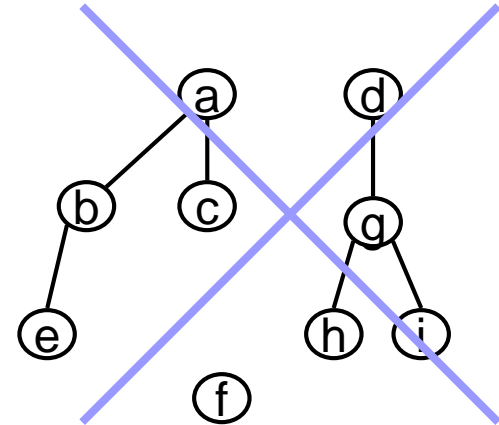
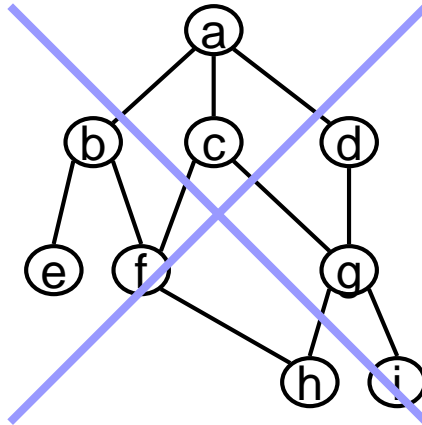
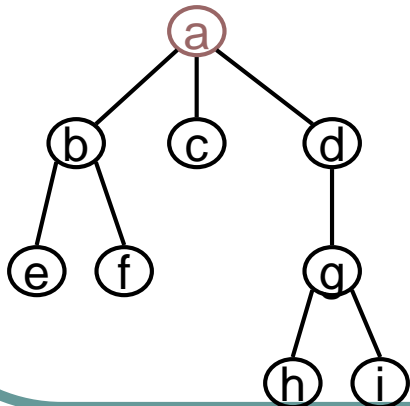


Árvores

Antonio Pereira Lima Jr.

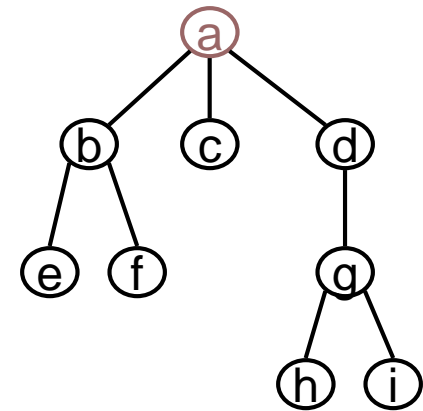
Árvores (definição)

- Em matemática, uma árvore é um tipo especial de grafo:
 - tem um nodo especial chamado “raiz”
 - não tem ciclo no grafo
 - tem um caminho da raiz para todos os outros nodos



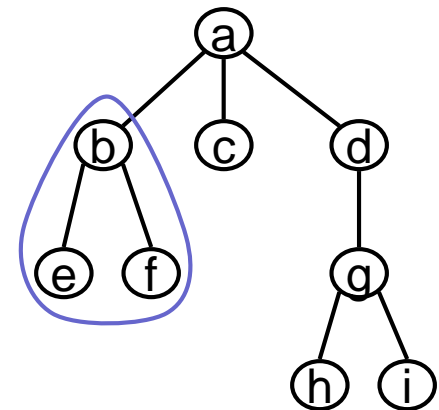
Árvores (definição)

- Uma árvore é uma coleção finita de $N > 0$ nodos. Se $N = 0$ dizemos que a árvore é nula. Nos demais casos uma árvore apresenta as seguintes características:
- Existe um nodo especial denominado raiz;
- Os demais são particionados em T_1, T_2, \dots, T_k estruturas disjuntas de árvores;
- As estruturas T_1, T_2, \dots, T_k denominam-se sub-árvores.



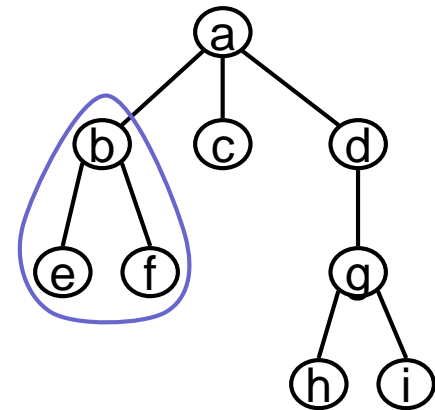
Árvores (definições)

- O número de sub-árvores de um nodo denomina-se **grau** do nodo (grau de 'a' = 3, grau de 'd' = 1, grau de 'i' = 0).
- Um nodo que possua grau=0 denomina-se **terminal** ou **folha**
- O **grau da árvore** (ou n-aridade) é igual ao máximo dos graus de seus nodos (grau da árvore exemplo=3)



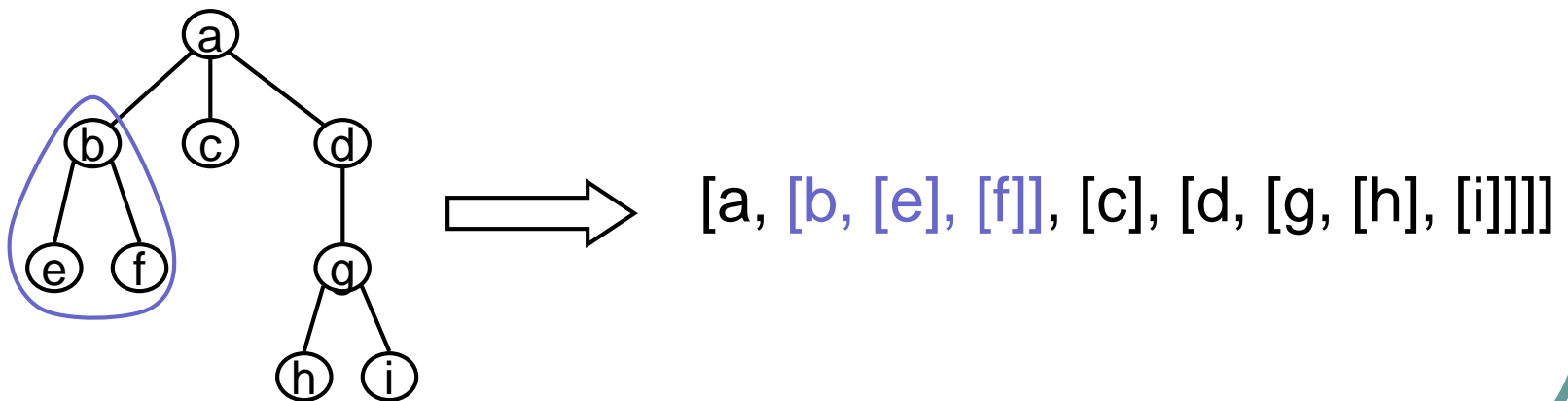
Árvores (definições)

- As raízes das sub-árvores de um nodo denominam-se **filhos** do nodo ('b' é a raiz da sub-árvore: 'b', 'e', 'f'), que é o **pai** delas.
- A raiz de uma árvore encontra-se no **nível 1** e estando um nodo no nível N seus filhos estarão no nível N+1
- A **altura** de uma árvore é igual ao máximo dos níveis de seus nodos (altura da árvore exemplo=4)



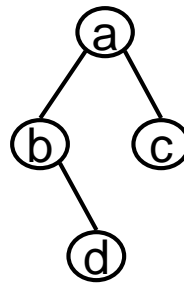
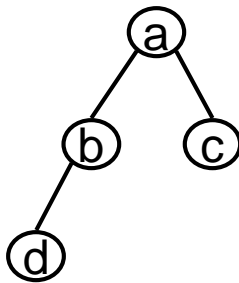
Árvores (representação)

- Listas generalizadas são bem adaptadas para representar árvores:
 - Uma árvore é representada com uma lista generalizada
 - a raiz da árvore é o primeiro elemento (atom) da lista
 - cada filho da raiz é uma sub-árvore representada com uma lista generalizada



Árvores binárias

- Uma árvore binária é uma árvore de grau 2 (nenhum nodo tem mais de 2 filhos)
- Árvores binárias são decompostas em:
 - A raiz
 - Uma sub-árvore (binária) esquerda
 - Uma sub-árvore (binária) direita
- Duas árvores binárias diferentes:



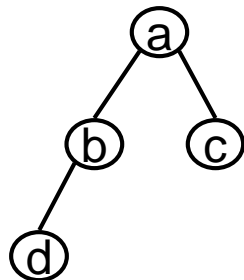
Árvores binárias (atravessamento)

- Atravessar / caminhar uma árvore significa percorrer todos os seus nodos, efetuando uma determinada operação sobre cada um deles
- Existem 3 atravessamentos (caminhamentos, percursos) básicos de uma árvore:
 - *infixa* ou *em-ordem*
 - *prefixa* ou *pré-ordem*
 - *posfixa* ou *pós-ordem*

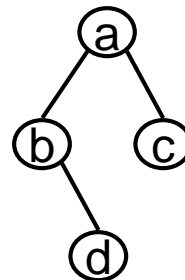
Árvores binárias (em-ordem)

- No atravessamento infixo, vamos tratar a sub-árvore esquerda em primeiro, depois a raiz e finalmente a sub-árvore direita
- Por exemplo, imprimir as árvores exemplos em-ordem (atravessamento infixo) produz os resultados:

d b a c



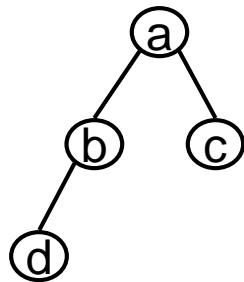
b d a c



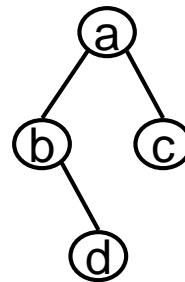
Árvores binárias (pré-ordem)

- No atravessamento prefixo, vamos tratar a raiz em primeiro, depois a sub-árvore esquerda e finalmente a sub-árvore direita
- Imprimir as árvores exemplos em pré-ordem (atravessamento prefixo) produz os resultados:

a b d c



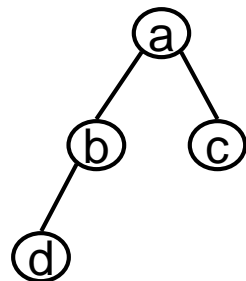
a b d c



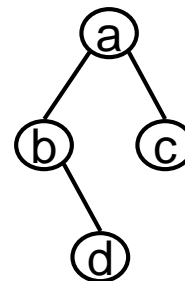
Árvores binárias (pós-ordem)

- No atravessamento posfixo, vamos tratar a sub-árvore esquerda em primeiro, depois a sub-árvore direita e finalmente a raiz
- Imprimir as árvores exemplos pré-ordem (atravessamento prefixo) produz os resultados:

d b c a

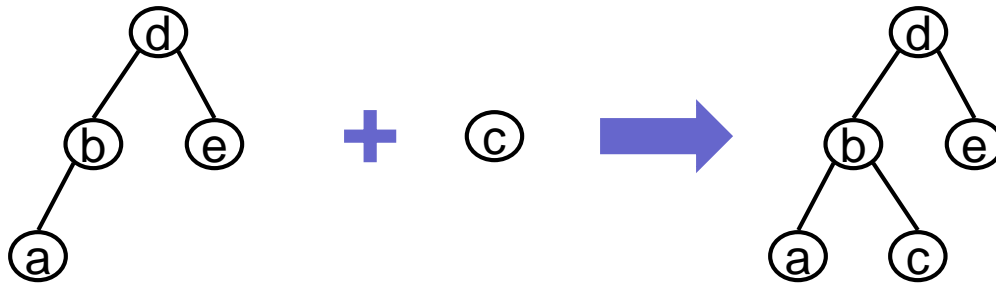


b d c a



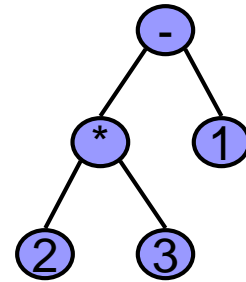
Árvores binárias de busca

- Árvores binárias podem ser usadas para achar rapidamente um elemento
- Uma árvore binária de busca (ABB) é uma árvore onde:
 - todo nodo da sub-árvore esquerda é menor que a raiz
 - todo nodo da sub-árvore direita é maior que a raiz
 - As sub-árvores esquerda e direita também são ABB.



Exercícios

- Mostre o resultado das impressões em-ordem, pré-ordem e pós-ordem da árvore exemplo:
(Qual é a correspondência com as notações polonesas previamente vistas?)
- Representar a árvore binária de busca depois da inserção dos elementos: 5 9 3 1 8 3 4 2 7
- Elabore uma função/método para comparar duas árvores binárias (retornar **true** se forem iguais)
- Elabore uma função/método que imprima todas as folhas de uma árvore



Exercícios

- Elabore as 3 rotinas de impressão de uma árvore binária: ordem infixa, prefixa e posfixa
- Elabore uma função/método que compare duas árvores binária de busca e retorne True se elas contem os mesmos elementos
- Elabore uma função/método max(ABB) que retorne o maior elemento de uma árvore binária de busca ABB
- Elabore uma função/método insABB(ABB,x) que insira o elemento x na árvore binária de busca ABB
- Elabore uma função/método buscaABB(ABB,x) que procure o elemento x na árvore binária de busca ABB e retorna **true** se ele está na árvore e **false** caso contrário