Métodos Clásicos de Resolución de E.D.O.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Material Educativo

2026-02-11

Table of contents

Chapter 1

Métodos Clásicos de Resolución de E.D.O.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Bienvenida

Este libro presenta los **métodos clásicos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (E.D.O.)**, organizados de manera sistemática y pedagógica.

1.1 Contenido del libro

El material está estructurado en **tres partes principales**:

1.1.1 Parte I: Ecuaciones Explícitas de Primer Orden

Métodos fundamentales para resolver ecuaciones del tipo $y' = f(x, y)$:

- Variables separadas
- Ecuaciones homogéneas
- Ecuaciones lineales
- Ecuación de Bernoulli
- Ecuaciones exactas
- Factor integrante

1.1.2 Parte II: E.D. con Derivada Implícita

Técnicas especiales para ecuaciones donde la derivada no está despejada:

- Ecuación de Clairaut
- Ecuación de Lagrange
- Ecuación de d'Alembert

1.1.3 Parte III: Reducción de Orden

Métodos avanzados para ecuaciones de orden superior:

- Reducción en ausencia de variable dependiente
- Reducción en ausencia de variable independiente
- Ecuaciones homogéneas generalizadas

1.2 Características del material

RECETAS

A lo largo del libro encontrarás **recetas** que resumen paso a paso los métodos de resolución.

Ejemplos resueltos

Cada método incluye ejemplos completamente desarrollados con explicaciones detalladas.

Ejercicios

Al final de cada apartado hay ejercicios propuestos para practicar.

1.3 Navegación

Utiliza el menú lateral para navegar entre los diferentes apartados. La barra de búsqueda te permitirá encontrar rápidamente conceptos específicos.

Material Educativo • 2026

Part I

Parte I: Ecuaciones Explícitas de Primer Orden

Chapter 2

Apartado 1: Variables Separadas

2.1 Variables separadas

Si tenemos la E. D.

$$g(x) = h(y)y',$$

formalmente, podemos poner $g(x)\,dx = h(y)\,dy$; si suponemos que G es una primitiva de g y H una de h, tendremos $G'(x)\,dx = H'(y)\,dy$ e, integrando, $G(x) = H(y) + C$, que es la solución general de la ecuación.

Expliquemos con un poco más de rigor por qué funciona el método: Sea $y = \varphi(x)$ una solución de la E. D., es decir, $\varphi(x)$ debe cumplir $g(x) = h(\varphi(x))\varphi'(x)$. Pero H es una primitiva de h, así que, por la regla de la cadena, $g(x) = h(\varphi(x))\varphi'(x) = (H \circ \varphi)'(x)$. Integrando, $G(x) = (H \circ \varphi)(x) + C$ (lo que antes hemos expresado como $G(x) = H(y) + C$), de donde $\varphi(x) = H^{-1}(G(x) - C)$.

En los pasos anteriores, está justificado emplear la regla de la cadena cuando φ y H son derivables, lo cual es cierto sin más que suponer que h sea continua. Y finalmente, para poder despejar φ mediante el uso de H^{-1} bastaría con exigir además que h no se anulara en el intervalo de definición, con lo cual, como $H' = h \neq 0$, H es creciente o decreciente luego existe H^{-1} (en otras palabras, como la derivada de H no se anula, el teorema de la función inversa nos asegura que existe H^{-1}).

Las ecuaciones en variables separadas son las más sencillas de integrar y, a la vez, las más importantes, ya que cualquier otro método de resolución se basa esencialmente en aplicar diversos trucos para llegar a una ecuación en variables separadas. En ellas hemos visto, con todo rigor, qué hipótesis hay que imponer para que el método que conduce a la solución esté correctamente empleado, y cómo se justifica el funcionamiento del proceso. A partir de ahora no incidiremos más en estos detalles que, aunque importantes, sobrecargarían la explicación. El lector puede detenerse mentalmente a pensar en ellos, justificando adecuadamente los pasos que se efectúen.

En cualquier caso, conviene recordar que la expresión $\frac{dy}{dx}$ es simplemente una útil notación para designar la derivada de y respecto de x, no un cociente de dy dividido por dx; ni dy ni dx tienen entidad en sí mismas. Esta notación se emplea, no porque sí ni para introducir confusión, sino que, al contrario, se usa porque es consecuente con los enunciados de varios importantes resultados. Ya hemos visto cómo resulta adecuada a la hora de recordar cómo resolver ecuaciones en variables separadas $g(x) = h(y)\frac{dy}{dx}$, descomponiendo $g(x)\,dx = h(x)\,dy$ (como si $\frac{dy}{dx}$ fuese realmente una fracción) e integrando ambos lados de la expresión anterior. Pero no sólo aquí se pone de manifiesto la utilidad de esta notación. Por ejemplo, el teorema de la función inversa prueba (con las hipótesis adecuadas) que, cuando y es una función de x, si se despeja x como función de y se cumple

$$x'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{y'(x)},$$

es decir, se produce un comportamiento similar a si estuviéramos operando con fracciones. Análogamente, si tenemos que z es una función de y y, a su vez, y una función de x, la regla de la cadena establece que la derivada de la función compuesta $z(x)$ es

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx},$$

que es como si simplificáramos dy en los supuestos cocientes de la derecha. Esto permite usar las notaciones del tipo $\frac{dy}{dx}$ y su comportamiento como si fuesen fracciones como regla nemotécnica de los resultados anteriores.

RECETA 1. Variables separadas

Son de la forma

$$g(x) = h(y)y'.$$

Formalmente, se separa $g(x) = h(y)\frac{dy}{dx}$ en $g(x)\,dx = h(y)\,dy$ y se integra.

Ejemplo 1

Resolver

$$\frac{dy}{dx} + (\operatorname{sen} x)y = 0.$$

Solución:

Despejando, $\frac{dy}{y} = -(\operatorname{sen} x)\,dx$ e, integrando, $\log y = \cos x + C$, es decir, $y = e^{\cos x + C}$. Sin más que tomar $K = e^C$ encontramos las soluciones $y = Ke^{\cos x}$.

Fijarse que, en principio, parece que K tiene que ser positiva; pero en realidad la integral de $\frac{dy}{y}$ es $\log |y|$, lo que nos llevaría a soluciones con valores negativos de K. Por último, notar $y = 0$ (es decir, tomar $K = 0$) también es claramente una solución de la E. D., aunque no se obtiene con el método seguido.

> **!** Important
>
> Así pues, la solución general de la E. D. es de la forma $y = Ke^{\cos x}$ con $K \in \mathbb{R}$.

Visualización interactiva

Puedes explorar cómo cambia la familia de soluciones con diferentes valores de K:

```
//| echo: false
viewof K = Inputs.range([-3, 3], {
  value: 1,
  step: 0.1,
  label: "Constante K:"
})

Plot.plot({
  marks: [
    Plot.line(d3.range(-6, 6, 0.1).map(x => ({
      x: x,
      y: K * Math.exp(Math.cos(x))
    })), {x: "x", y: "y", stroke: "blue", strokeWidth: 2}),
    Plot.ruleX([0], {stroke: "gray"}),
    Plot.ruleY([0], {stroke: "gray"})
  ],
  grid: true,
  x: {domain: [-6, 6], label: "x"},
  y: {domain: [-5, 5], label: "y"},
  width: 700,
  height: 400,
  style: {
    fontSize: "12px"
  }
})
```

Observación

Nota cómo todas las curvas pasan por puntos donde $\cos x$ alcanza sus máximos y mínimos.

Chapter 3

Apartado 2: Ecuación de la forma $y^{'} = f(ax + by)$

3.1 Ecuación de la forma $y^{'} = f(ax + by)$

Si $a = 0$ o $b = 0$, la ecuación es separable. En otro caso, efectuemos el cambio de función $y(x)$ por $z(x)$ dado por $z = ax + by$, de donde $z' = a + by'$, por tanto, $y' = \frac{z'-a}{b}$. Entonces, sustituyendo en la E. D. obtenemos $\frac{z'-a}{b} = f(z)$, es decir, $z' = a + bf(z)$, que es de variables separadas. La escribimos como

$$dx = \frac{dz}{a + bf(z)},$$

con lo que, integrando, $x = \int (a + bf(z))^{-1}\, dz = \phi(z, C)$. Así pues, las soluciones de la E. D. de partida serán

$$x = \phi(ax + by, C),$$

de modo que hemos encontrado y como función de x expresada en forma implícita.

RECETA 2. Ecuación de la forma $y' = f(ax + by)$

El cambio de función $y(x)$ por $z(x)$ dado por $z = ax + by$ la transforma en una de variables separadas.

Ejemplo 2

Resolver

$$y' - e^x e^y = -1.$$

Solución:

Tenemos $y' + 1 = e^{x+y}$, con lo que si efectuamos el cambio de función dado por la sustitución $z = x + y$, la ecuación queda transformada en $z' = e^z$, es decir, $dx = e^{-z}\,dz$, ecuación en variables separadas cuya solución es $x = -e^{-z} + C$.

Volviendo a las variables iniciales, $C - x = e^{-x-y}$, de donde $\log(C - x) = -x - y$, y por tanto la solución de la E. D. de partida es $y = -\log(C - x) - x$.

Observación

Observar que no nos hemos preocupado de poner módulos cuando al calcular una integral aparece un logaritmo. El lector podría analizar estos casos con mucho más cuidado.

Chapter 4

Apartado 3: Ecuaciones Homogéneas

4.1 Ecuaciones Homogéneas

Supongamos que tenemos la ecuación

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Para resolverla, hacemos el cambio de función $y(x)$ por $u(x)$ mediante $u = \frac{y}{x}$. Así, derivando $y = ux$ tenemos $y' = u'x + u$, es decir, $u'x + u = f(u)$. Esta ecuación, que podemos poner como $u'x = f(u) - u$, es de variables separadas. Vamos a solucionarla:

Caso 1: $f(u) \neq u$

Podemos escribir $\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$ e, integrando, $\int \frac{du}{f(u)-u} = \log(\frac{x}{C})$. Despejando x obtenemos $x = Ce^{\phi(u)}$ con $\phi(u) = \int \frac{du}{f(u)-u}$.

Por tanto, las curvas con ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = Ce^{\phi(u)} \\ y = Cue^{\phi(u)} \end{cases}$$

son solución de la ecuación diferencial para cada $C \in \mathbb{R}$.

Familia de curvas homotéticas

Esto constituye una familia de curvas homotéticas: una curva se obtiene de otra mediante una homotecia, es decir, multiplicando los valores de x e y por una constante.

A veces, es conveniente expresar estas soluciones de otras formas. Siempre puede ponerse $x = Ce^{\phi(y/x)}$, solución dada mediante una función implícita. Y, cuando en $x = Ce^{\phi(u)}$ se logra despejar de alguna forma $u = H(x, C)$, la solución de la E. D. queda mucho más sencilla: $y = xH(x, C)$.

Caso 2: Soluciones singulares

Supongamos ahora que existe algún u_0 tal que $f(u_0) = u_0$. En este caso, es inmediato comprobar que la recta $y = u_0x$ es solución: $y' = u_0 = f(u_0) = f(\frac{y}{x})$, luego se satisface la ecuación diferencial.

Soluciones singulares

Este tipo de soluciones que no se obtienen con el procedimiento general suelen denominarse **soluciones singulares**.

Nota sobre funciones homogéneas

En general, una función $h(x, y)$ se dice **homogénea de grado** α si $h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha h(x, y)$.

Es inmediato comprobar que una E. D. de la forma

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$$

con $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ funciones homogéneas del mismo grado es, efectivamente, una ecuación diferencial homogénea (despejar $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = -\frac{P(x,x(y/x))}{Q(x,x(y/x))}$ y extraer $\lambda = x$ de P y Q). De aquí proviene el nombre de este tipo de ecuaciones.

RECETA 3. Homogéneas

Son de la forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Se hace el cambio de función $y(x)$ por $u(x)$ mediante $y = ux$, transformándose así la E. D. en una de variables separadas.

Ejemplo 3

Resolver

$$y' = \frac{2xy - y^2}{x^2}.$$

Solución:

Con el cambio $y = ux$ podemos poner $y' = 2\frac{y}{x} - (\frac{y}{x})^2 = 2u - u^2$. Como $y' = u'x + u$, sustituyendo tenemos $u'x + u = 2u - u^2$, es decir, $xu' = u - u^2$.

Si $u \neq u^2$, podemos poner $\frac{du}{u-u^2} = \frac{dx}{x}$. Para integrar, descomponemos $\frac{1}{u-u^2} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1-u}$, lo que se satisface para $A = B = 1$.

Entonces, integrando, $\log u - \log(1-u) = \log \frac{x}{C}$, es decir, $\frac{u}{1-u} = \frac{x}{C}$; y sustituyendo $u = \frac{y}{x}$ tenemos $\frac{y/x}{1-y/x} = \frac{x}{C}$, de donde $Cy = x(x-y)$. De aquí es fácil despejar explícitamente y si así se desea.

Por otra parte, a partir de $u_0 = 0$ y $u_0 = 1$ (para las cuales $u = u^2$), se tienen las soluciones singulares $y = 0$ e $y = x$.

Chapter 5

Apartado 4: Ecuaciones Exactas

5.1 Ecuaciones Exactas

Llamamos exacta a una ecuación diferencial

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0,$$

es decir, $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, que cumple $P_y = Q_x$ (con la notación $P_y = \frac{\partial P}{\partial y}$, $Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x}$).

Expresiones diferenciales

Una expresión diferencial $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ se dice que es una **diferencial cerrada** en una región R del plano xy si se verifica $P_y(x,y) = Q_x(x,y)$ para todo $(x,y) \in R$.

Y se dice **exacta** en R cuando existe alguna función $F(x,y)$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ y $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$ para todo $(x,y) \in R$; en otras palabras, si la diferencial de F es $dF = P\,dx + Q\,dy$ (F, que es única salvo constantes, se denomina **función potencial**).

Teorema de Schwartz

El teorema de Schwartz sobre igualdad de derivadas cruzadas nos asegura que cualquier expresión diferencial exacta es cerrada. Lo contrario no es cierto en general, aunque sí en dominios **simplemente conexos** (sin agujeros).

Método de resolución

Si tenemos $P\,dx + Q\,dy = 0$ exacta, como existe F tal que $dF = P\,dx + Q\,dy$, entonces la ecuación podemos ponerla en la forma $dF = 0$ y, por tanto, su solución será $F(x, y) = C$ (siendo C constante arbitraria). Así pues, basta con que encontremos la función potencial F.

El procedimiento para hallarla es:

1. Buscamos F tal que $\frac{\partial F}{\partial x} = P$; integrando $P(x, y)$ respecto a x mientras se mantiene y constante:

$$F(x, y) = \int P(x, y)\,dx + \varphi(y)$$

   donde $\varphi(y)$ es una función arbitraria.

2. Derivando respecto de y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx + \varphi'(y)$$

3. Como $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$, resulta:

$$\varphi'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx$$

4. Integrando obtenemos $\varphi(y)$ y, sustituyendo su valor, llegamos a $F(x, y)$.

5. Las soluciones quedan expresadas implícitamente como $F(x, y) = C$.

RECETA 4. Ecuaciones exactas

Son las de la forma

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0,$$

que cumplen $P_y = Q_x$. Se busca una función $F(x, y)$ tal que $dF = P\,dx + Q\,dy$, y la solución de la E. D. es $F(x, y) = C$.

Ejemplo 4

Resolver

$$3y + e^x + (3x + \cos y)y' = 0.$$

Solución:

Ponemos la ecuación en la forma $P\,dx + Q\,dy = 0$ con: - $P(x, y) = 3y + e^x$ - $Q(x, y) = 3x + \cos y$

Verificamos: $P_y = 3 = Q_x$, luego la E. D. es exacta.

Calculemos la función potencial F:

1. Como $F_x = 3y + e^x$, integrando respecto de x:

$$F(x, y) = 3yx + e^x + \varphi(y)$$

2. Derivando respecto de y e igualando a Q:

$$3x + \varphi'(y) = 3x + \cos y$$

3. Por tanto $\varphi'(y) = \cos y$, de donde $\varphi(y) = \operatorname{sen} y$.
4. Así: $F(x, y) = 3yx + e^x + \operatorname{sen} y$

! Solución

La solución de la E. D. viene dada, implícitamente, por:

$$3yx + e^x + \operatorname{sen} y = C$$

Chapter 6

Apartado 5: Ecuaciones Lineales

6.1 Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es de la forma:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones dadas de x.

Método del Factor Integrante

El método de resolución consiste en multiplicar ambos lados de la ecuación por un **factor integrante** $\mu(x)$ que convierte el lado izquierdo en la derivada de un producto.

RECETA 5. Ecuaciones Lineales

Para resolver $y' + a(x)y = b(x)$:

1. Calcular el factor integrante: $\mu(x) = e^{\int a(x)\,dx}$
2. Multiplicar la ecuación por $\mu(x)$:

$$\mu(x)y' + \mu(x)a(x)y = \mu(x)b(x)$$

3. El lado izquierdo es $\frac{d}{dx}[\mu(x)y]$:

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)b(x)$$

4. Integrar ambos lados:
$$\mu(x)y = \int \mu(x)b(x)\,dx + C$$

5. Despejar y:
$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)b(x)\,dx + C\right]$$

Ejemplo 5

Resolver
$$y' + 2xy = x$$

Solución:

1. Identificamos: $a(x) = 2x$, $b(x) = x$
2. Factor integrante:
$$\mu(x) = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$
3. Multiplicamos:
$$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = xe^{x^2}$$
4. El lado izquierdo es la derivada:
$$\frac{d}{dx}[e^{x^2}y] = xe^{x^2}$$
5. Integramos:
$$e^{x^2}y = \int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$
6. Solución:
$$y = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}$$

Observación

La solución general es la suma de: - **Solución particular** de la ecuación completa: $y_p = \frac{1}{2}$ - **Solución general** de la ecuación homogénea: $y_h = Ce^{-x^2}$

Chapter 7

Apartado 6: Ecuación de Bernoulli

7.1 Ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli es de la forma:

$$y' + a(x)y = b(x)y^n$$

donde n es un número real ($n \neq 0, 1$).

> **Casos especiales**
>
> - Si $n = 0$: la ecuación es **lineal**
> - Si $n = 1$: la ecuación es de **variables separadas**

Método de resolución

El método consiste en hacer un cambio de variable que transforma la ecuación de Bernoulli en una ecuación lineal.

Cambio de variable: $z = y^{1-n}$

Derivando: $z' = (1-n)y^{-n}y'$, es decir, $y' = \frac{y^n z'}{1-n}$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$\frac{y^n z'}{1-n} + a(x)y = b(x)y^n$$

Dividiendo por y^n:

$$\frac{z'}{1-n} + a(x)y^{1-n} = b(x)$$

Como $z = y^{1-n}$:

$$\frac{z'}{1-n} + a(x)z = b(x)$$

Multiplicando por $(1-n)$:

$$z' + (1-n)a(x)z = (1-n)b(x)$$

Esta es una **ecuación lineal** en z que podemos resolver con el método del factor integrante.

RECETA 6. Ecuación de Bernoulli

Para resolver $y' + a(x)y = b(x)y^n$ con $n \neq 0, 1$:

1. Hacer el cambio $z = y^{1-n}$
2. La ecuación se transforma en la lineal:

$$z' + (1-n)a(x)z = (1-n)b(x)$$

3. Resolver la ecuación lineal en z
4. Deshacer el cambio: $y = z^{\frac{1}{1-n}}$

Ejemplo 6

Resolver

$$y' + \frac{y}{x} = y^2$$

Solución:

Esta es una ecuación de Bernoulli con $a(x) = \frac{1}{x}$, $b(x) = 1$, $n = 2$.

1. Cambio de variable: $z = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y}$
2. Derivando: $z' = -\frac{y'}{y^2}$, por tanto $y' = -y^2 z'$
3. Sustituyendo en la ecuación:

$$-y^2 z' + \frac{y}{x} = y^2$$

4. Dividiendo por y^2:
$$-z' + \frac{1}{xy} = 1$$

5. Como $z = \frac{1}{y}$:
$$-z' + \frac{z}{x} = 1$$

6. Reordenando:
$$z' - \frac{z}{x} = -1$$

7. Esta es una ecuación lineal. Factor integrante:
$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}\,dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

8. Multiplicamos:
$$\frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

9. Integrando:
$$\frac{z}{x} = -\ln|x| + C$$

10. Despejando z:
$$z = -x\ln|x| + Cx$$

11. Deshaciendo el cambio $y = \frac{1}{z}$:
$$y = \frac{1}{Cx - x\ln|x|}$$

! Solución general

$$y = \frac{1}{x(C - \ln|x|)}$$

Part II

Parte II: E.D. con Derivada Implícita

Chapter 8

Apartado 7: F algebraica en $y^{'}$ de grado n

8.1 Ecuaciones algebraicas en $y^{'}$

Tenemos

$$(y')^n + a_1(x,y)(y')^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x,y)y' + a_n(x,y) = 0.$$

Resolviendo este polinomio en y' de grado n igualado a cero obtenemos

$$(y' - f_1(x,y))(y' - f_2(x,y)) \cdots (y' - f_n(x,y)) = 0.$$

Por lo tanto, las soluciones de la E. D. de partida serán las de cada una de las nuevas ecuaciones diferenciales $y' - f_i(x,y) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, que habrá que resolver. De esta forma obtenemos n familias uniparamétricas de soluciones.

RECETA 7. F algebraica en y' de grado n

Tenemos

$$(y')^n + a_1(x,y)(y')^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x,y)y' + a_n(x,y) = 0.$$

Resolviéndolo como un polinomio en y' de grado n igualado a cero obtenemos

$$(y' - f_1(x,y))(y' - f_2(x,y)) \cdots (y' - f_n(x,y)) = 0.$$

Por tanto, las soluciones de la E. D. de partida serán las soluciones de cada una de las ecuaciones $y' - f_i(x,y) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Ejemplo 7

Resolver

$$y^2((y')^2+1)=1.$$

Solución:

Despejando $(y')^2$ queda $(y')^2 = \frac{1-y^2}{y^2}$, cuyas soluciones algebraicas son $y' = \pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$.

Vamos a resolver estas dos nuevas ecuaciones diferenciales a la vez (ambas son de variables separadas). Si las ponemos como $\pm\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx$, integrando, $\mp\sqrt{1-y^2} = x + C$.

Si elevamos al cuadrado ambos términos, podemos expresar conjuntamente las dos familias de soluciones como $1-y^2 = (x+C)^2$, es decir:

$$(x+C)^2 + y^2 = 1$$

que son las **circunferencias con centro en el eje x y radio 1**.

> **!** Soluciones singulares
>
> Por último, es evidente que $y = 1$ e $y = -1$ también son soluciones de la E. D., aunque no se encuentran entre las que acabamos de hallar. Si atendemos a la interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales, es lógico que estas dos rectas sean soluciones, ya que son las **envolventes** de la familia de circunferencias que satisfacen la E. D.

8.2 Obtención de la envolvente de una familia de curvas

Recordemos qué es una envolvente: Dada una familia uniparamétrica de curvas $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ en el plano, la envolvente de la familia es una nueva curva φ tal que, en cada punto de contacto de φ con alguna de las φ_α, la tangente de φ y de φ_α es la misma.

Familia de curvas implícitas

Supongamos que tenemos una familia de curvas expresadas implícitamente como $F(x,y,C)=0$. Las envolventes se obtienen eliminando C del sistema:

$$\begin{cases} F(x,y,C)=0 \\ F_C(x,y,C)=0 \end{cases}$$

donde con F_C hemos denotado la derivada parcial de F respecto a C.

En el caso de las circunferencias del ejemplo anterior tendríamos:

$$\begin{cases} (x+C)^2 + y^2 = 1 \\ 2(x+C) = 0 \end{cases}$$

Despejando en la segunda ecuación, $x = -C$ y, sustituyendo en la primera, $y^2 = 1$. Es decir, las envolventes son las rectas $y = \pm 1$.

Familia de curvas paramétricas

Supongamos que tenemos la familia de curvas en paramétricas:

$$\begin{cases} x = x(t, C) \\ y = y(t, C) \end{cases}$$

Las envolventes se obtienen despejando $C = C(t)$ en el jacobiano igualado a cero:

$$\det \begin{pmatrix} x_C & y_C \\ x_t & y_t \end{pmatrix} = 0$$

y sustituyendo en las ecuaciones paramétricas.

> **i** Puntos singulares
>
> Realmente, con estos procedimientos no sólo aparecen las envolventes, sino también los lugares geométricos de **puntos singulares**, ya sea de puntos de retroceso, de puntos de inflexión o de cúspides.
> Los puntos de retroceso se llaman **puntos singulares esenciales** y los otros **puntos singulares evitables**. En todo caso, después de aplicar estos métodos, hay que comprobar siempre qué es lo que hemos encontrado.

Chapter 9

Apartado 8: Ecuación de la forma $y = f(x, y^{'})$

9.1 Método general

Como procedimiento general para intentar resolver este tipo de ecuaciones, tomamos $y' = p$ y derivamos $y = f(x, y')$ respecto de x, con lo cual tenemos

$$p = y' = f_x + f_{y'} \frac{dy'}{dx} = f_x(x, p) + f_{y'}(x, p)p'.$$

Cuando f tiene la forma adecuada, la nueva ecuación $p = f_x(x, p) + f_p(x, p)p'$ que hemos encontrado puede ser de alguno de los tipos ya estudiados. Si éste es el caso, la resolvemos, obteniendo su solución $x = \phi(p, C)$.

Entonces, la solución de la E. D. de partida será:

$$\begin{cases} x = \phi(p, C) \\ y = f(\phi(p, C), p) \end{cases}$$

expresado como una familia de curvas en paramétricas.

> **Note**
>
> Puede resultar extraño pensar que el parámetro p vale precisamente $\frac{dy}{dx}$; pero esto no importa en absoluto, sino que puede considerarse una simple curiosidad.