Métodos Clásicos de Resolución de E.D.O.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Juan Luis Varona Malumbres

2026-02-11

Table of contents

Chapter 1

Métodos Clásicos de Resolución de E.D.O.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Bienvenida

Este libro presenta los **métodos clásicos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (E.D.O.)**, organizados de manera sistemática y pedagógica.

1.1 Contenido del libro

El material está estructurado en **tres partes principales**:

1.1.1 Parte I: Ecuaciones Explícitas de Primer Orden

Métodos fundamentales para resolver ecuaciones del tipo $y' = f(x, y)$:

- Variables separadas
- Ecuaciones homogéneas
- Ecuaciones lineales
- Ecuación de Bernoulli
- Ecuaciones exactas
- Factor integrante

1.1.2 Parte II: E.D. con Derivada Implícita

Técnicas especiales para ecuaciones donde la derivada no está despejada:

- Ecuación de Clairaut
- Ecuación de Lagrange
- Ecuación de d'Alembert

1.1.3 Parte III: Reducción de Orden

Métodos avanzados para ecuaciones de orden superior:

- Reducción en ausencia de variable dependiente
- Reducción en ausencia de variable independiente
- Ecuaciones homogéneas generalizadas

1.2 Características del material

RECETAS

A lo largo del libro encontrarás **recetas** que resumen paso a paso los métodos de resolución.

Ejemplos resueltos

Cada método incluye ejemplos completamente desarrollados con explicaciones detalladas.

Ejercicios

Al final de cada apartado hay ejercicios propuestos para practicar.

1.3 Navegación

Utiliza el menú lateral para navegar entre los diferentes apartados. La barra de búsqueda te permitirá encontrar rápidamente conceptos específicos.

1.4 Sobre esta obra

Autor y publicación original

Este material está basado en el libro **"Métodos clásicos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias"** escrito por **Juan Luis Varona Malumbres**, Profesor del Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja.

Publicación original: Universidad de La Rioja, 1996 ISBN: 84-88713-32-0 Reimpresiones: 1999, 2007 y 2009
Sitio web del autor: http://www.unirioja.es/cu/jvarona/
Esta versión web es una adaptación para facilitar el acceso y estudio del material.

Part I

Parte I: Ecuaciones Explícitas de Primer Orden

Chapter 2

Apartado 1: Variables Separadas

2.1 Variables separadas

Si tenemos la E. D.

$$g(x) = h(y)y',$$

formalmente, podemos poner $g(x)\,dx = h(y)\,dy$; si suponemos que G es una primitiva de g y H una de h, tendremos $G'(x)\,dx = H'(y)\,dy$ e, integrando, $G(x) = H(y) + C$, que es la solución general de la ecuación.

Expliquemos con un poco más de rigor por qué funciona el método: Sea $y = \varphi(x)$ una solución de la E. D., es decir, $\varphi(x)$ debe cumplir $g(x) = h(\varphi(x))\varphi'(x)$. Pero H es una primitiva de h, así que, por la regla de la cadena, $g(x) = h(\varphi(x))\varphi'(x) = (H \circ \varphi)'(x)$. Integrando, $G(x) = (H \circ \varphi)(x) + C$ (lo que antes hemos expresado como $G(x) = H(y) + C$), de donde $\varphi(x) = H^{-1}(G(x) - C)$.

En los pasos anteriores, está justificado emplear la regla de la cadena cuando φ y H son derivables, lo cual es cierto sin más que suponer que h sea continua. Y finalmente, para poder despejar φ mediante el uso de H^{-1} bastaría con exigir además que h no se anulara en el intervalo de definición, con lo cual, como $H' = h \neq 0$, H es creciente o decreciente luego existe H^{-1} (en otras palabras, como la derivada de H no se anula, el teorema de la función inversa nos asegura que existe H^{-1}).

Las ecuaciones en variables separadas son las más sencillas de integrar y, a la vez, las más importantes, ya que cualquier otro método de resolución se basa esencialmente en aplicar diversos trucos para llegar a una ecuación en variables separadas. En ellas hemos visto, con todo rigor, qué hipótesis hay que imponer para que el método que conduce a la solución esté correctamente empleado, y cómo se justifica el funcionamiento del proceso. A partir de ahora no incidiremos más en estos detalles que, aunque importantes, sobrecargarían la explicación. El lector puede detenerse mentalmente a pensar en ellos, justificando adecuadamente los pasos que se efectúen.

En cualquier caso, conviene recordar que la expresión $\frac{dy}{dx}$ es simplemente una útil notación para designar la derivada de y respecto de x, no un cociente de dy dividido por dx; ni dy ni dx tienen entidad en sí mismas. Esta notación se emplea, no porque sí ni para introducir confusión, sino que, al contrario, se usa porque es consecuente con los enunciados de varios importantes resultados. Ya hemos visto cómo resulta adecuada a la hora de recordar cómo resolver ecuaciones en variables separadas $g(x) = h(y)\frac{dy}{dx}$, descomponiendo $g(x)\,dx = h(x)\,dy$ (como si $\frac{dy}{dx}$ fuese realmente una fracción) e integrando ambos lados de la expresión anterior. Pero no sólo aquí se pone de manifiesto la utilidad de esta notación. Por ejemplo, el teorema de la función inversa prueba (con las hipótesis adecuadas) que, cuando y es una función de x, si se despeja x como función de y se cumple

$$x'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{y'(x)},$$

es decir, se produce un comportamiento similar a si estuviéramos operando con fracciones. Análogamente, si tenemos que z es una función de y y, a su vez, y una función de x, la regla de la cadena establece que la derivada de la función compuesta $z(x)$ es

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx},$$

que es como si simplificáramos dy en los supuestos cocientes de la derecha. Esto permite usar las notaciones del tipo $\frac{dy}{dx}$ y su comportamiento como si fuesen fracciones como regla nemotécnica de los resultados anteriores.

RECETA 1. Variables separadas

Son de la forma

$$g(x) = h(y)y'.$$

Formalmente, se separa $g(x) = h(y)\frac{dy}{dx}$ en $g(x)\,dx = h(y)\,dy$ y se integra.

Ejemplo 1

Resolver

$$\frac{dy}{dx} + (\operatorname{sen} x)y = 0.$$

Solución:

Despejando, $\frac{dy}{y} = -(\operatorname{sen} x)\, dx$ e, integrando, $\log y = \cos x + C$, es decir, $y = e^{\cos x + C}$. Sin más que tomar $K = e^C$ encontramos las soluciones $y = Ke^{\cos x}$.

Fijarse que, en principio, parece que K tiene que ser positiva; pero en realidad la integral de $\frac{dy}{y}$ es $\log |y|$, lo que nos llevaría a soluciones con valores negativos de K. Por último, notar $y = 0$ (es decir, tomar $K = 0$) también es claramente una solución de la E. D., aunque no se obtiene con el método seguido.

! Important

Así pues, la solución general de la E. D. es de la forma $y = Ke^{\cos x}$ con $K \in \mathbb{R}$.

Visualización interactiva

Puedes explorar cómo cambia la familia de soluciones con diferentes valores de K:

```
//| echo: false
viewof K = Inputs.range([-3, 3], {
  value: 1,
  step: 0.1,
  label: "Constante K:"
})

Plot.plot({
  marks: [
    Plot.line(d3.range(-6, 6, 0.1).map(x => ({
      x: x,
      y: K * Math.exp(Math.cos(x))
    })), {x: "x", y: "y", stroke: "blue", strokeWidth: 2}),
    Plot.ruleX([0], {stroke: "gray"}),
    Plot.ruleY([0], {stroke: "gray"})
  ],
  grid: true,
  x: {domain: [-6, 6], label: "x"},
  y: {domain: [-5, 5], label: "y"},
  width: 700,
  height: 400,
  style: {
    fontSize: "12px"
  }
})
```

Observación

Nota cómo todas las curvas pasan por puntos donde $\cos x$ alcanza sus máximos y mínimos.

Chapter 3

Apartado 2: Ecuación de la forma $y^{'} = f(ax + by)$

3.1 Ecuación de la forma $y^{'} = f(ax + by)$

Si $a = 0$ o $b = 0$, la ecuación es separable. En otro caso, efectuemos el cambio de función $y(x)$ por $z(x)$ dado por $z = ax + by$, de donde $z' = a + by'$, por tanto, $y' = \frac{z'-a}{b}$. Entonces, sustituyendo en la E. D. obtenemos $\frac{z'-a}{b} = f(z)$, es decir, $z' = a + bf(z)$, que es de variables separadas. La escribimos como

$$dx = \frac{dz}{a + bf(z)},$$

con lo que, integrando, $x = \int (a+bf(z))^{-1}\, dz = \phi(z, C)$. Así pues, las soluciones de la E. D. de partida serán

$$x = \phi(ax + by, C),$$

de modo que hemos encontrado y como función de x expresada en forma implícita.

> RECETA 2. Ecuación de la forma $y' = f(ax + by)$
>
> El cambio de función $y(x)$ por $z(x)$ dado por $z = ax + by$ la transforma en una de variables separadas.

Ejemplo 2

Resolver

$$y' - e^x e^y = -1.$$

Solución:

Tenemos $y' + 1 = e^{x+y}$, con lo que si efectuamos el cambio de función dado por la sustitución $z = x + y$, la ecuación queda transformada en $z' = e^z$, es decir, $dx = e^{-z}\, dz$, ecuación en variables separadas cuya solución es $x = -e^{-z} + C$.

Volviendo a las variables iniciales, $C - x = e^{-x-y}$, de donde $\log(C - x) = -x - y$, y por tanto la solución de la E. D. de partida es $y = -\log(C - x) - x$.

Observación

Observar que no nos hemos preocupado de poner módulos cuando al calcular una integral aparece un logaritmo. El lector podría analizar estos casos con mucho más cuidado.

Chapter 4

Apartado 3: Ecuaciones Homogéneas

4.1 Ecuaciones Homogéneas

Supongamos que tenemos la ecuación

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Para resolverla, hacemos el cambio de función $y(x)$ por $u(x)$ mediante $u = \frac{y}{x}$. Así, derivando $y = ux$ tenemos $y' = u'x + u$, es decir, $u'x + u = f(u)$. Esta ecuación, que podemos poner como $u'x = f(u) - u$, es de variables separadas. Vamos a solucionarla:

Caso 1: $f(u) \neq u$

Podemos escribir $\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$ e, integrando, $\int \frac{du}{f(u)-u} = \log(\frac{x}{C})$. Despejando x obtenemos $x = Ce^{\phi(u)}$ con $\phi(u) = \int \frac{du}{f(u)-u}$.

Por tanto, las curvas con ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = Ce^{\phi(u)} \\ y = Cue^{\phi(u)} \end{cases}$$

son solución de la ecuación diferencial para cada $C \in \mathbb{R}$.

Familia de curvas homotéticas

Esto constituye una familia de curvas homotéticas: una curva se obtiene de otra mediante una homotecia, es decir, multiplicando los valores de x e y por una constante.

A veces, es conveniente expresar estas soluciones de otras formas. Siempre puede ponerse $x = Ce^{\phi(y/x)}$, solución dada mediante una función implícita. Y, cuando en $x = Ce^{\phi(u)}$ se logra despejar de alguna forma $u = H(x, C)$, la solución de la E. D. queda mucho más sencilla: $y = xH(x, C)$.

Caso 2: Soluciones singulares

Supongamos ahora que existe algún u_0 tal que $f(u_0) = u_0$. En este caso, es inmediato comprobar que la recta $y = u_0 x$ es solución: $y' = u_0 = f(u_0) = f(\frac{y}{x})$, luego se satisface la ecuación diferencial.

Soluciones singulares

Este tipo de soluciones que no se obtienen con el procedimiento general suelen denominarse **soluciones singulares**.

Nota sobre funciones homogéneas

En general, una función $h(x, y)$ se dice **homogénea de grado** α si $h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha h(x, y)$.

Es inmediato comprobar que una E. D. de la forma

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$$

con $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ funciones homogéneas del mismo grado es, efectivamente, una ecuación diferencial homogénea (despejar $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = -\frac{P(x,x(y/x))}{Q(x,x(y/x))}$ y extraer $\lambda = x$ de P y Q). De aquí proviene el nombre de este tipo de ecuaciones.

RECETA 3. Homogéneas

Son de la forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Se hace el cambio de función $y(x)$ por $u(x)$ mediante $y = ux$, transformándose así la E. D. en una de variables separadas.

Ejemplo 3

Resolver

$$y' = \frac{2xy - y^2}{x^2}.$$

Solución:

Con el cambio $y = ux$ podemos poner $y' = 2\frac{y}{x} - (\frac{y}{x})^2 = 2u - u^2$. Como $y' = u'x + u$, sustituyendo tenemos $u'x + u = 2u - u^2$, es decir, $xu' = u - u^2$.

Si $u \neq u^2$, podemos poner $\frac{du}{u-u^2} = \frac{dx}{x}$. Para integrar, descomponemos $\frac{1}{u-u^2} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1-u}$, lo que se satisface para $A = B = 1$.

Entonces, integrando, $\log u - \log(1-u) = \log\frac{x}{C}$, es decir, $\frac{u}{1-u} = \frac{x}{C}$; y sustituyendo $u = \frac{y}{x}$ tenemos $\frac{y/x}{1-y/x} = \frac{x}{C}$, de donde $Cy = x(x-y)$. De aquí es fácil despejar explícitamente y si así se desea.

Por otra parte, a partir de $u_0 = 0$ y $u_0 = 1$ (para las cuales $u = u^2$), se tienen las soluciones singulares $y = 0$ e $y = x$.

Chapter 5

Apartado 4: Ecuaciones Exactas

5.1 Ecuaciones Exactas

Llamamos exacta a una ecuación diferencial

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0,$$

es decir, $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, que cumple $P_y = Q_x$ (con la notación $P_y = \frac{\partial P}{\partial y}$, $Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x}$).

Expresiones diferenciales

Una expresión diferencial $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ se dice que es una **diferencial cerrada** en una región R del plano xy si se verifica $P_y(x,y) = Q_x(x,y)$ para todo $(x,y) \in R$.

Y se dice **exacta** en R cuando existe alguna función $F(x,y)$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ y $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$ para todo $(x,y) \in R$; en otras palabras, si la diferencial de F es $dF = P\,dx + Q\,dy$ (F, que es única salvo constantes, se denomina **función potencial**).

Teorema de Schwartz

El teorema de Schwartz sobre igualdad de derivadas cruzadas nos asegura que cualquier expresión diferencial exacta es cerrada. Lo contrario no es cierto en general, aunque sí en dominios **simplemente conexos** (sin agujeros).

Método de resolución

Si tenemos $P\,dx + Q\,dy = 0$ exacta, como existe F tal que $dF = P\,dx + Q\,dy$, entonces la ecuación podemos ponerla en la forma $dF = 0$ y, por tanto, su solución será $F(x, y) = C$ (siendo C constante arbitraria). Así pues, basta con que encontremos la función potencial F.

El procedimiento para hallarla es:

1. Buscamos F tal que $\frac{\partial F}{\partial x} = P$; integrando $P(x, y)$ respecto a x mientras se mantiene y constante:

$$F(x, y) = \int P(x, y)\,dx + \varphi(y)$$

   donde $\varphi(y)$ es una función arbitraria.

2. Derivando respecto de y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y)\,dx + \varphi'(y)$$

3. Como $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$, resulta:

$$\varphi'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y)\,dx$$

4. Integrando obtenemos $\varphi(y)$ y, sustituyendo su valor, llegamos a $F(x, y)$.

5. Las soluciones quedan expresadas implícitamente como $F(x, y) = C$.

RECETA 4. Ecuaciones exactas

Son las de la forma

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0,$$

que cumplen $P_y = Q_x$. Se busca una función $F(x, y)$ tal que $dF = P\,dx + Q\,dy$, y la solución de la E. D. es $F(x, y) = C$.

Ejemplo 4

Resolver

$$3y + e^x + (3x + \cos y)y' = 0.$$

Solución:

Ponemos la ecuación en la forma $P\,dx + Q\,dy = 0$ con: - $P(x, y) = 3y + e^x$ - $Q(x, y) = 3x + \cos y$

Verificamos: $P_y = 3 = Q_x$, luego la E. D. es exacta.

Calculemos la función potencial F:

1. Como $F_x = 3y + e^x$, integrando respecto de x:

$$F(x, y) = 3yx + e^x + \varphi(y)$$

2. Derivando respecto de y e igualando a Q:

$$3x + \varphi'(y) = 3x + \cos y$$

3. Por tanto $\varphi'(y) = \cos y$, de donde $\varphi(y) = \operatorname{sen} y$.
4. Así: $F(x, y) = 3yx + e^x + \operatorname{sen} y$

! Solución

La solución de la E. D. viene dada, implícitamente, por:

$$3yx + e^x + \operatorname{sen} y = C$$

Chapter 6

Apartado 5: Ecuaciones Lineales

6.1 Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es de la forma:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones dadas de x.

Método del Factor Integrante

El método de resolución consiste en multiplicar ambos lados de la ecuación por un **factor integrante** $\mu(x)$ que convierte el lado izquierdo en la derivada de un producto.

RECETA 5. Ecuaciones Lineales

Para resolver $y' + a(x)y = b(x)$:

1. Calcular el factor integrante: $\mu(x) = e^{\int a(x)\,dx}$
2. Multiplicar la ecuación por $\mu(x)$:

$$\mu(x)y' + \mu(x)a(x)y = \mu(x)b(x)$$

3. El lado izquierdo es $\frac{d}{dx}[\mu(x)y]$:

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)b(x)$$

4. Integrar ambos lados:
$$\mu(x)y = \int \mu(x)b(x)\,dx + C$$

5. Despejar y:
$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)b(x)\,dx + C\right]$$

Ejemplo 5

Resolver

$$y' + 2xy = x$$

Solución:

1. Identificamos: $a(x) = 2x$, $b(x) = x$
2. Factor integrante:
$$\mu(x) = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$
3. Multiplicamos:
$$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = xe^{x^2}$$
4. El lado izquierdo es la derivada:
$$\frac{d}{dx}[e^{x^2}y] = xe^{x^2}$$
5. Integramos:
$$e^{x^2}y = \int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$
6. Solución:
$$y = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}$$

Observación

La solución general es la suma de: - **Solución particular** de la ecuación completa: $y_p = \frac{1}{2}$ - **Solución general** de la ecuación homogénea: $y_h = Ce^{-x^2}$

Chapter 7

Apartado 6: Ecuación de Bernoulli

7.1 Ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli es de la forma:

$$y' + a(x)y = b(x)y^n$$

donde n es un número real ($n \neq 0, 1$).

Casos especiales

- Si $n = 0$: la ecuación es **lineal**
- Si $n = 1$: la ecuación es de **variables separadas**

Método de resolución

El método consiste en hacer un cambio de variable que transforma la ecuación de Bernoulli en una ecuación lineal.

Cambio de variable: $z = y^{1-n}$

Derivando: $z' = (1-n)y^{-n}y'$, es decir, $y' = \frac{y^n z'}{1-n}$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$\frac{y^n z'}{1-n} + a(x)y = b(x)y^n$$

Dividiendo por y^n:

$$\frac{z'}{1-n} + a(x)y^{1-n} = b(x)$$

Como $z = y^{1-n}$:

$$\frac{z'}{1-n} + a(x)z = b(x)$$

Multiplicando por $(1-n)$:

$$z' + (1-n)a(x)z = (1-n)b(x)$$

Esta es una **ecuación lineal** en z que podemos resolver con el método del factor integrante.

RECETA 6. Ecuación de Bernoulli

Para resolver $y' + a(x)y = b(x)y^n$ con $n \neq 0, 1$:

1. Hacer el cambio $z = y^{1-n}$
2. La ecuación se transforma en la lineal:

$$z' + (1-n)a(x)z = (1-n)b(x)$$

3. Resolver la ecuación lineal en z
4. Deshacer el cambio: $y = z^{\frac{1}{1-n}}$

Ejemplo 6

Resolver

$$y' + \frac{y}{x} = y^2$$

Solución:

Esta es una ecuación de Bernoulli con $a(x) = \frac{1}{x}$, $b(x) = 1$, $n = 2$.

1. Cambio de variable: $z = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y}$
2. Derivando: $z' = -\frac{y'}{y^2}$, por tanto $y' = -y^2 z'$
3. Sustituyendo en la ecuación:

$$-y^2 z' + \frac{y}{x} = y^2$$

4. Dividiendo por y^2:
$$-z' + \frac{1}{xy} = 1$$

5. Como $z = \frac{1}{y}$:
$$-z' + \frac{z}{x} = 1$$

6. Reordenando:
$$z' - \frac{z}{x} = -1$$

7. Esta es una ecuación lineal. Factor integrante:
$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}\,dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

8. Multiplicamos:
$$\frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

9. Integrando:
$$\frac{z}{x} = -\ln|x| + C$$

10. Despejando z:
$$z = -x\ln|x| + Cx$$

11. Deshaciendo el cambio $y = \frac{1}{z}$:
$$y = \frac{1}{Cx - x\ln|x|}$$

! Solución general

$$y = \frac{1}{x(C - \ln|x|)}$$

Part II

Parte II: E.D. con Derivada Implícita

Chapter 8

Apartado 7: F algebraica en $y^{'}$ de grado n

8.1 Ecuaciones algebraicas en $y^{'}$

Tenemos

$$(y')^n + a_1(x,y)(y')^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x,y)y' + a_n(x,y) = 0.$$

Resolviendo este polinomio en y' de grado n igualado a cero obtenemos

$$(y' - f_1(x,y))(y' - f_2(x,y)) \cdots (y' - f_n(x,y)) = 0.$$

Por lo tanto, las soluciones de la E. D. de partida serán las de cada una de las nuevas ecuaciones diferenciales $y' - f_i(x,y) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, que habrá que resolver. De esta forma obtenemos n familias uniparamétricas de soluciones.

RECETA 7. F algebraica en y' de grado n

Tenemos

$$(y')^n + a_1(x,y)(y')^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x,y)y' + a_n(x,y) = 0.$$

Resolviéndolo como un polinomio en y' de grado n igualado a cero obtenemos

$$(y' - f_1(x,y))(y' - f_2(x,y)) \cdots (y' - f_n(x,y)) = 0.$$

Por tanto, las soluciones de la E. D. de partida serán las soluciones de cada una de las ecuaciones $y' - f_i(x,y) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo 7

Resolver

$$y^2((y')^2+1)=1.$$

Solución:

Despejando $(y')^2$ queda $(y')^2 = \frac{1-y^2}{y^2}$, cuyas soluciones algebraicas son $y' = \pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$.

Vamos a resolver estas dos nuevas ecuaciones diferenciales a la vez (ambas son de variables separadas). Si las ponemos como $\pm\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx$, integrando, $\mp\sqrt{1-y^2} = x + C$.

Si elevamos al cuadrado ambos términos, podemos expresar conjuntamente las dos familias de soluciones como $1-y^2=(x+C)^2$, es decir:

$$(x+C)^2+y^2=1$$

que son las **circunferencias con centro en el eje x y radio 1**.

! Soluciones singulares

Por último, es evidente que $y=1$ e $y=-1$ también son soluciones de la E. D., aunque no se encuentran entre las que acabamos de hallar. Si atendemos a la interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales, es lógico que estas dos rectas sean soluciones, ya que son las **envolventes** de la familia de circunferencias que satisfacen la E. D.

8.2 Obtención de la envolvente de una familia de curvas

Recordemos qué es una envolvente: Dada una familia uniparamétrica de curvas $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ en el plano, la envolvente de la familia es una nueva curva φ tal que, en cada punto de contacto de φ con alguna de las φ_α, la tangente de φ y de φ_α es la misma.

Familia de curvas implícitas

Supongamos que tenemos una familia de curvas expresadas implícitamente como $F(x,y,C)=0$. Las envolventes se obtienen eliminando C del sistema:

$$\begin{cases} F(x,y,C)=0 \\ F_C(x,y,C)=0 \end{cases}$$

donde con F_C hemos denotado la derivada parcial de F respecto a C.

En el caso de las circunferencias del ejemplo anterior tendríamos:

$$\begin{cases} (x+C)^2 + y^2 = 1 \\ 2(x+C) = 0 \end{cases}$$

Despejando en la segunda ecuación, $x = -C$ y, sustituyendo en la primera, $y^2 = 1$. Es decir, las envolventes son las rectas $y = \pm 1$.

Familia de curvas paramétricas

Supongamos que tenemos la familia de curvas en paramétricas:

$$\begin{cases} x = x(t, C) \\ y = y(t, C) \end{cases}$$

Las envolventes se obtienen despejando $C = C(t)$ en el jacobiano igualado a cero:

$$\det \begin{pmatrix} x_C & y_C \\ x_t & y_t \end{pmatrix} = 0$$

y sustituyendo en las ecuaciones paramétricas.

> **i** Puntos singulares
>
> Realmente, con estos procedimientos no sólo aparecen las envolventes, sino también los lugares geométricos de **puntos singulares**, ya sea de puntos de retroceso, de puntos de inflexión o de cúspides.
> Los puntos de retroceso se llaman **puntos singulares esenciales** y los otros **puntos singulares evitables**. En todo caso, después de aplicar estos métodos, hay que comprobar siempre qué es lo que hemos encontrado.

Chapter 9

Apartado 8: Ecuación de la forma $y = f(x, y^{'})$

9.1 Método general

Como procedimiento general para intentar resolver este tipo de ecuaciones, tomamos $y' = p$ y derivamos $y = f(x, y')$ respecto de x, con lo cual tenemos

$$p = y' = f_x + f_{y'} \frac{dy'}{dx} = f_x(x,p) + f_{y'}(x,p)p'.$$

Cuando f tiene la forma adecuada, la nueva ecuación $p = f_x(x,p) + f_p(x,p)p'$ que hemos encontrado puede ser de alguno de los tipos ya estudiados. Si éste es el caso, la resolvemos, obteniendo su solución $x = \phi(p, C)$.

Entonces, la solución de la E. D. de partida será:

$$\begin{cases} x = \phi(p, C) \\ y = f(\phi(p, C), p) \end{cases}$$

expresado como una familia de curvas en paramétricas.

> **Note**
>
> Puede resultar extraño pensar que el parámetro p vale precisamente $\frac{dy}{dx}$; pero esto no importa en absoluto, sino que puede considerarse una simple curiosidad.

9.2 8.1. Ecuación $y = f(y^{'})$

En este caso, como $f(x, y') = f(y')$, se tiene $f_x(x, p) = 0$, luego con el proceso descrito habremos obtenido la ecuación $p = f_p(p)p'$ o, lo que es lo mismo, $p = f'(p)p'$.

Si $p \neq 0$, esto lo podemos poner como $dx = \frac{f'(p)}{p}\,dp$, que es de variables separadas. Integrándola, $x = \int \frac{f'(p)}{p}\,dp = \phi(p) + C$, y las soluciones de $y = f(y')$ serán las curvas:

$$\begin{cases} x = \phi(p) + C \\ y = f(p) \end{cases}$$

> **!** Observación geométrica
>
> Notar, a la vista de su representación paramétrica, que todas ellas tienen la misma forma: se diferencian únicamente en un desplazamiento horizontal.

A partir de $p = 0$ obtenemos la solución constante $y = f(0)$. Gráficamente, esto es una recta envolvente de las demás soluciones.

9.3 8.2. Ecuación de Lagrange: $y + x\varphi(y^{'}) + \psi(y^{'}) = 0$

Si ponemos $y' = p$ y derivamos respecto de x queda:

$$p + \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx} = 0$$

que podemos escribir como:

$$(p + \varphi(p))\,dx + x\varphi'(p)\,dp + \psi'(p)\,dp = 0$$

Caso 1: p + (p) 0

Dividimos por $p + \varphi(p)$, con lo que nos aparece la ecuación lineal:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{p + \varphi(p)}x + \frac{\psi'(p)}{p + \varphi(p)} = 0$$

en la que x actúa como función y p como variable. Si la resolvemos, obtendremos como solución $x = \phi(p, C)$. Con esto, habremos encontrado para la E. D. de

Lagrange las soluciones:

$$\begin{cases} x = \phi(p, C) \\ y = -\phi(p, C)\varphi(p) - \psi(p) \end{cases}$$

en forma de familia de curvas paramétricas.

Caso 2: Soluciones singulares

Supongamos que existe algún λ para el cual $\lambda + \varphi(\lambda) = 0$. Formalmente, tomamos $y' = \lambda$, sustituyendo en la E. D., $y + x\varphi(\lambda) + \psi(\lambda) = 0$, es decir:

$$y = \lambda x - \psi(\lambda)$$

Esta recta es, efectivamente, solución de la ecuación de Lagrange. Estas rectas decimos que son las **soluciones singulares** de la ecuación.

9.4 8.3. Ecuación de Clairaut: $y - xy^{'} + \psi(y^{'}) = 0$

Éste es un caso particular de ecuación de Lagrange con $\varphi(y') = -y'$. Aquí, como $\varphi(\lambda) + \lambda = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, no existen las soluciones que, en la ecuación de Lagrange, encontrábamos por el método general; sólo aparecen rectas.

Solución general de Clairaut

Tenemos como soluciones de la E. D. toda la familia de rectas:

$$y = \lambda x - \psi(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Solución singular (envolvente)

Existe una solución singular, la envolvente de este haz de rectas. Para ello, planteamos el sistema:

$$\begin{cases} y = \lambda x - \psi(\lambda) \\ 0 = x - \psi'(\lambda) \end{cases}$$

donde la segunda ecuación es la primera derivada respecto al parámetro λ. La envolvente queda expresada en forma paramétrica como:

$$\begin{cases} x = \psi'(\lambda) \\ y = \lambda\psi'(\lambda) - \psi(\lambda) \end{cases}$$

Verificación

Podemos garantizar que esta curva es una envolvente y no un lugar geométrico de puntos singulares. En cada punto $(x(\lambda), y(\lambda))$ de la curva, esta interseca precisamente a la recta $y = \lambda x - \psi(\lambda)$ del haz; y la pendiente de esa recta en el punto de intersección coincide con la de la curva:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\lambda}{dx/d\lambda} = \frac{\psi'(\lambda) + \lambda\psi''(\lambda) - \psi'(\lambda)}{\psi''(\lambda)} = \lambda$$

RECETA 8. Ecuación de la forma $y = f(x, y')$

En general, se toma $y' = p$ y se deriva la ecuación $y = f(x, y')$ respecto de x. Si f tiene la forma adecuada, a la nueva E. D. se le puede aplicar alguno de los métodos ya estudiados.
8.1. Cuando $y = f(y')$, la ecuación que se obtiene es de variables separadas.
8.2. Ecuación de Lagrange: $y + x\varphi(y') + \psi(y') = 0$. Se reduce a una ecuación lineal con x como función y p como variable. Además, para los λ tales que $\lambda + \varphi(\lambda) = 0$ se obtienen como soluciones las rectas $y = \lambda x - \psi(\lambda)$.
8.3. Ecuación de Clairaut: $y - xy' + \psi(y') = 0$. Es un caso particular de ecuación de Lagrange en el que sólo aparecen rectas (y su envolvente).

Ejemplo 8.3: Ecuación de Clairaut

Resolver

$$y = y'x - 2(y')^2.$$

Solución:

Estamos ante una ecuación de Clairaut $y - xy' + \psi(y') = 0$ con $\psi(y') = 2(y')^2$.

Sin más que tomar $y' = \lambda$, las rectas $y = \lambda x - 2\lambda^2$ son solución de la E. D. para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

Calculemos su envolvente: en el sistema

$$\begin{cases} y = \lambda x - 2\lambda^2 \\ 0 = x - 4\lambda \end{cases}$$

Despejamos $\lambda = \frac{x}{4}$ en la segunda ecuación y, sustituyendo en la primera, encontramos que la envolvente es la parábola:

$$y = \frac{x^2}{8}$$

Chapter 10

Apartado 9: Ecuación de la forma $x = f(y, y^{'})$

10.1 Método general

Estas ecuaciones son similares a las que aparecen en el apartado 8 pero con el papel de x e y intercambiado. En general, para intentar resolverlas, tomamos $y' = p$ y derivamos $x = f(y, y')$ (o, si se prefiere interpretarlo así, $x = f(y, p)$) respecto de y (en lugar de respecto a x, como hacíamos en el apartado 8).

> ¡Atención!
>
> Esto requiere tener un poco más de cuidado, además de usar $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{p}$.

Así:

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = f_y(y, p) + f_p(y, p)\frac{dp}{dy}$$

Según como sea f, esta nueva ecuación $\frac{1}{p} = f_y(y, p) + f_p(y, p)\frac{dp}{dy}$ a la que hemos reducido la que teníamos responde a alguno de los tipos previamente estudiados, luego podríamos resolverla.

Si logramos hacerlo, obtenemos su solución $y = \phi(p, C)$. Con esto, la solución de la ecuación de partida será la familia de curvas paramétricas:

$$\begin{cases} x = f(\phi(p, C), p) \\ y = \phi(p, C) \end{cases}$$

10.2 Casos especiales

Pero no podemos asegurar que, para una función f cualquiera, sepamos resolver la ecuación intermedia que nos aparece. Se pueden estudiar casos similares a los de la forma $y = f(x, y')$ en los que se garantiza que el método no quedará interrumpido.

Los tres casos que merece la pena distinguir son los siguientes:

9.1. Ecuación $x = f(y')$

Similar al caso 8.1, pero derivando respecto a y.

9.2. Ecuación x + y (y') + (y') = 0

Similar al caso 8.2 (ecuación de Lagrange), pero con x e y intercambiados.

9.3. Ecuación x - y/y' + (y') = 0

Similar al caso 8.3 (ecuación de Clairaut), pero con x e y intercambiados.

Ejercicio

Se deja al lector que, como ejercicio, describa el método de resolución de estos tres tipos de ecuaciones. Simplemente hay que dedicarse a modificar, con cuidado, el proceso utilizado en los correspondientes tipos 8.1, 8.2 y 8.3, recordando que ahora hay que derivar respecto de y en lugar de respecto de x.

RECETA 9. Ecuación de la forma $x = f(y, y')$

En general, se toma $y' = p$ y se deriva la ecuación $x = f(y, y')$ respecto de y. Según como sea f, la nueva E. D. que así se obtiene es ya conocida, procediéndose a su resolución. Se pueden estudiar casos similares a los de la forma $y = f(x, y')$.

Ejemplo 9

Resolver

$$x = (y')^3 + y'.$$

Solución:

Si tomamos $\frac{dy}{dx} = y' = p$ y derivamos $x = p^3 + p$ respecto de y tenemos:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{dx}{dy} = 3p^2\frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dy}$$

que podemos poner como $dy = (3p^3 + p)\,dp$, ecuación en variables separadas.

Integrándola, $y = \frac{3}{4}p^4 + \frac{1}{2}p^2 + C$.

! Solución

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $x = (y')^3 + y'$ son la familia de curvas paramétricas:

$$\begin{cases} x = p^3 + p \\ y = \frac{3}{4}p^4 + \frac{1}{2}p^2 + C \end{cases}$$

Chapter 11

Apartado 10: Ecuación de la forma $F(y, y^{'}) = 0$

11.1 Método general

Para intentar encontrar sus soluciones, consideremos la curva $F(\alpha, \beta) = 0$. El método de resolución requiere que hayamos logrado encontrar previamente una **representación paramétrica** de la curva, esto es, $\alpha = \varphi(t)$ y $\beta = \psi(t)$ tal que $F(\varphi(t), \psi(t)) = 0$.

Si así ha sido, vamos ahora a efectuar el cambio de función y por t mediante:

$$y = \varphi(t), \quad y' = \psi(t)$$

Entonces, derivando $y = \varphi(t)$ respecto de x tenemos $y' = \varphi'(t)\frac{dt}{dx}$ que, al ser $y' = \psi(t)$, puede escribirse como:

$$\psi(t) = \varphi'(t)\frac{dt}{dx}$$

Esta es una ecuación en **variables separadas**.

11.2 Resolución según casos

Caso 1: (t) 0

Podemos poner $dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\, dt$ e, integrando:

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\, dt + C$$

Como consecuencia, la familia de curvas paramétricas:

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\, dt + C \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

son soluciones de la E. D. de partida.

Caso 2: Soluciones singulares ((t) = 0)

Si existe algún t_0 para el que $\psi(t_0) = 0$, formalmente efectuamos el siguiente razonamiento:

$$0 = \varphi'(t)\frac{dt}{dx}$$

así que $\varphi'(t) = 0$ y consecuentemente $\varphi(t) = \text{cte.} = \varphi(t_0)$, lo que nos conduciría a la solución $y = \varphi(t_0)$.

Y, en efecto, podemos comprobar con rigor que esta **recta horizontal** es solución de la E. D. sin más que sustituir en ella:

$$F(y, y') = F(\varphi(t_0), 0) = F(\varphi(t_0), \psi(t_0)) = 0$$

RECETA 10. Ecuación de la forma $F(y, y') = 0$

Consideramos la curva $F(\alpha, \beta) = 0$. Si encontramos una representación paramétrica $\alpha = \varphi(t)$, $\beta = \psi(t)$, $F(\varphi(t), \psi(t)) = 0$, se hace el cambio de función y por t mediante $y = \varphi(t)$, $y' = \psi(t)$. Así, derivando $y = \varphi(t)$ respecto de x, aparece una ecuación en variables separadas.

Ejemplo 10

Resolver

$$y^{2/3} + (y')^{2/3} = 1.$$

Solución:

Si tomamos $y = \cos^3 t$, $y' = \operatorname{sen}^3 t$, es claro que:

$$(\cos^3 t)^{2/3} + (\operatorname{sen}^3 t)^{2/3} = 1$$

Derivando $y = \cos^3 t$ tenemos $y' = -3\cos^2 t \operatorname{sen} t \frac{dt}{dx}$, lo que, usando $y' = \operatorname{sen}^3 t$, resulta ser:

$$\operatorname{sen}^3 t = -3\cos^2 t \operatorname{sen} t \frac{dt}{dx}$$

Si suponemos $\operatorname{sen} t \neq 0$, tenemos:

$$dx = \frac{-3\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}\,dt = -3\operatorname{cotg}^2 t\,dt$$

Integrando:

$$\begin{aligned} x &= -3\int \operatorname{cotg}^2 t\,dt \\ &= -3\int (1+\operatorname{cotg}^2 t)\,dt + 3\int dt \\ &= 3\operatorname{cotg} t + 3t + C \end{aligned}$$

Por tanto, las curvas paramétricas:

$$\begin{cases} x = 3\operatorname{cotg} t + 3t + C \\ y = \cos^3 t \end{cases}$$

son soluciones de la E. D. de partida.

! Soluciones singulares

Por último, para los t tales que $\operatorname{sen}^3 t = 0$, lo cual ocurre cuando $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, aparecen como soluciones singulares las rectas horizontales $y = \cos^3(k\pi)$, es decir:

$$y = 1 \quad \text{e} \quad y = -1$$

Part III

Parte III: Reducción de Orden

Chapter 12

Apartado 11: $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$

12.1 Reducción de orden: ausencia de y

Tenemos una ecuación en la que no aparece la variable dependiente y (y además, si $k > 1$, tampoco sus derivadas hasta el orden $k-1$).

Es evidente que el cambio $y^{(k)} = z$ la convierte en:

$$F(x, z, \dots, z^{(n-k)}) = 0$$

que es una E. D. de orden $n-k$.

12.2 Procedimiento completo

Si logramos resolverla, obtenemos que su solución será $z = \phi(x, C_1, \dots, C_{n-k})$, una familia dependiente de $n-k$ constantes.

Entonces, al ser $y^{(k)} = z$, para tener las soluciones de la ecuación original bastará con integrar k veces $\phi(x, C_1, \dots, C_{n-k})$ respecto de x, es decir:

$$y = \underbrace{\int \cdots \int}_{k \text{ veces}} \phi(x, C_1, \dots, C_{n-k}) \underbrace{dx\, dx \dots dx}_{k \text{ veces}}$$

lo cual introducirá k nuevas constantes en la solución general. De este modo, dicha solución general tendrá la forma:

$$y = \underbrace{\int \cdots \int}_{k \text{ veces}} \phi(x, C_1, \dots, C_{n-k}) \underbrace{dx\, dx \dots dx}_{k \text{ veces}} + C_{n-k+1} x^{k-1} + \cdots + C_{n-1} x + C_n$$

RECETA 11. Ecuación de la forma $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$

Mediante el cambio $y^{(k)} = z$ se convierte en una ecuación de orden $n - k$.

Ejemplo 11

Resolver

$$y'' - xy''' + (y''')^3 = 0.$$

Solución:

Tomemos $y'' = z$, con lo que la ecuación se transforma en $z - xz' + (z')^3 = 0$, que es de **Clairaut**.

Sin más que sustituir $z' = \lambda$, las soluciones de ésta son las rectas:

$$z = \lambda x - \lambda^3, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Calculemos las envolventes: en el sistema

$$\begin{cases} z = \lambda x - \lambda^3 \\ 0 = x - 3\lambda^2 \end{cases}$$

Despejamos $\lambda = \pm\sqrt{\frac{x}{3}}$ en la segunda ecuación, con lo que, sustituyendo en la primera, encontramos las dos envolventes:

$$z = \pm\frac{2x}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{x}{3}}$$

Una vez resuelta completamente la ecuación de Clairaut, hallemos las soluciones de la original:

Como $y'' = z$, a partir de $z = \lambda x - \lambda^3$, integrando dos veces:

$$y = \int \left(\int (\lambda x - \lambda^3)\, dx \right) dx = \frac{\lambda x^3}{6} - \frac{\lambda^3 x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Cambiando la notación de las constantes:

$$y = K_1 x^3 - 108 K_1^3 x^2 + K_2 x + K_3$$

Por último, de $z = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}} x^{3/2}$ obtenemos:

$$y = \int \left(\int \frac{\pm 2}{3\sqrt{3}} x^{3/2}\, dx \right) dx = \frac{\pm 8 x^{7/2}}{105\sqrt{3}} + C_1 x + C_2$$

Soluciones finales

Es decir, las dos familias de curvas:

$$y = \frac{8x^{7/2}}{105\sqrt{3}} + C_1 x + C_2$$

$$y = -\frac{8x^{7/2}}{105\sqrt{3}} + C_1 x + C_2$$

Chapter 13

Apartado 11': Ecuaciones Lineales de Orden Superior

13.1 Ecuaciones Lineales de Orden $n > 1$

Supongamos que tenemos una ecuación:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

con $n > 1$.

> **Observación importante**
>
> Existe una teoría general bien establecida sobre ecuaciones diferenciales lineales de cualquier orden. Pero éste es un estudio esencialmente teórico: **no es posible describir la solución general de una E. D. lineal de orden 2 o superior por medio de cuadraturas**.
> Sin embargo, sí que se calculan las soluciones de forma muy satisfactoria cuando nos encontramos ante ecuaciones lineales con coeficientes constantes.

13.2 Método de reducción de orden

Este método radica en haber encontrado previamente una **solución particular** $y_n(x)$ de la lineal homogénea asociada:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Si hemos logrado encontrar tal solución particular, efectuamos el cambio de función y por z dado por:

$$y(x) = y_n(x)z(x)$$

Procedimiento

Derivando sucesivamente:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= y_n'(x)z(x) + y_n(x)z'(x) \\
y''(x) &= y_n''(x)z(x) + 2y_n'(x)z'(x) + y_n(x)z''(x) \\
&\vdots \\
y^{(n)}(x) &= y_n^{(n)}(x)z(x) + \cdots + \binom{n}{k} y_n^{(k)}(x)z^{(n-k)}(x) + \cdots + y_n(x)z^{(n)}(x)
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la lineal y sacando factor común los $z^{(k)}$, el coeficiente de z es 0 por ser precisamente y_n solución de la ecuación lineal homogénea. Así, podemos poner:

$$b_n(x)z^{(n)} + b_{n-1}(x)z^{(n-1)} + \cdots + b_1(x)z' = g(x)$$

Si en ella hacemos $z' = u$ aparece:

$$b_n(x)u^{(n-1)} + b_{n-1}(x)u^{(n-2)} + \cdots + b_1(x)u = g(x)$$

que es una **ecuación lineal de orden** $n - 1$.

RECETA 11'. Ecuaciones lineales de orden superior

Son de la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

Si logramos encontrar alguna solución $y_n(x)$ de la lineal homogénea asociada, el cambio de función $y = y_n z$ hace que la lineal se transforme en una del tipo anterior, cuyo orden se puede reducir. Así, aparece una nueva ecuación lineal, esta vez de orden $n - 1$.

13.3 Resultados generales

Estructura de la solución general

La solución general de la lineal de orden n puede expresarse como:

$$y(x) = y_p(x) + C_1y_1(x) + \cdots + C_{n-1}y_{n-1}(x) + C_ny_n(x)$$

donde $y_p(x)$ es una solución particular de la lineal.

! Important

La solución general de la lineal puede expresarse como una solución particular de la lineal más la solución general de la lineal homogénea asociada.

Método de variación de las constantes

También existe el método de variación de las constantes para E. D. lineales de orden n, destinado a resolver la ecuación lineal cuando se conoce la solución general de la homogénea asociada, $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$.

En estas condiciones, se busca la solución de la lineal de la forma:

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \cdots + C_n(x) y_n(x)$$

para ciertas funciones $C_k(x)$ a determinar.

Chapter 14

Apartado 12: $F(y, y^{'}, \dots, y^{(n)}) = 0$

14.1 Reducción de orden: ausencia de x

En esta ecuación no aparece explícitamente la variable independiente x. Vamos a ver cómo se reduce de orden si efectuamos el cambio $y' = p$ y la transformamos en una nueva en la que aparecerán y, p y las derivadas de p respecto de y.

> ⚠ ¡Atención!
>
> Las derivadas de p son **respecto de** y, no respecto de x.

14.2 Derivadas sucesivas

Si denotamos $p' = \frac{dp}{dy}$, $p'' = \frac{d^2p}{dy^2}$, ..., y hacemos uso de la regla de la cadena, entonces:

$$y' = p$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}(p'p) = \frac{d}{dy}(p'p)\frac{dy}{dx} = [p''p + (p')^2]p$$

y así sucesivamente. Nótese que en la expresión de cada $y^{(k)}$ sólo aparecen derivadas de p hasta el orden $k-1$.

14.3 Transformación de la ecuación

Con esto, sustituyendo en F los valores que hemos encontrado para y', y'', ..., $y^{(n)}$, la E. D. original se transforma en una de la forma:

$$G\left(y, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

cuyo orden es $n-1$.

Si logramos resolver esta nueva ecuación encontraremos que, en general, su solución será de la forma $p = \phi(y, C_1, \dots, C_{n-1})$, dependiente de $n-1$ constantes.

Ahora, devolviendo a p su valor original, es decir, $p = \frac{dy}{dx}$, obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \phi(y, C_1, \dots, C_{n-1})$$

que es otra ecuación, esta vez de primer orden, que también hay que resolver (lo cual, además, añade una nueva constante). Las soluciones de esta última serán, obviamente, las mismas que las de la E. D. de partida.

RECETA 12. Ecuación de la forma $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

Hacemos el cambio $y' = p$ y transformamos la E. D. en una nueva dependiendo de y, p y las derivadas de p respecto de y. Ésta es de orden $n-1$.

Ejemplo 12

Resolver

$$2yy'' = (y')^2 + 1.$$

Solución:

Tomando $y' = p$, y tal como hemos comprobado al explicar el método, se tiene $y'' = p'p$ donde $p' = \frac{dp}{dy}$.

Entonces, al sustituir en la E. D., ésta se nos transforma en $2yp'p = p^2 + 1$, es decir:

$$\frac{2p\,dp}{p^2+1} = \frac{dy}{y}$$

que es de variables separadas.

Si integramos:

$$\log(p^2 + 1) = \log(C_1 y)$$

de donde $p^2 + 1 = C_1 y$, y por tanto $p = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$.

Volvemos ahora a restaurar el valor $p = \frac{dy}{dx}$, con lo cual nos aparece:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$$

Ésta es de nuevo una ecuación en variables separadas, que podemos escribir como:

$$(C_1 y - 1)^{-1/2} dy = \pm dx$$

Integrándola:

$$2\sqrt{C_1 y - 1} = \pm C_1 x + C_2$$

! Solución

Con lo que ya hemos encontrado las soluciones de la E. D. de partida:

$$2\sqrt{C_1 y - 1} = \pm C_1 x + C_2$$

Chapter 15

Apartado 12': Ecuaciones Homogéneas Respecto a las Derivadas

15.1 Ecuaciones homogéneas generalizadas

Si la ecuación $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ es tal que, para α y m fijos, F cumple:

$$F(\lambda x, \lambda^m u_0, \lambda^{m-1} u_1, \dots, \lambda^{m-n} u_n) = \lambda^\alpha F(x, u_0, u_1, \dots, u_n)$$

vamos a ver que, efectuando un cambio tanto de variable independiente como de dependiente, esta E. D. se podrá transformar en una del tipo anterior (es decir, en la que no aparecerá la variable independiente).

> **i** Definición
>
> Una ecuación de estas características suele decirse que es **homogénea generalizada** de grado α, en la que cada factor x contribuye con grado 1, cada y con grado m, y' con grado $m-1$, y'' con $m-2$, etcétera.

15.2 Cambio de variables

Tomamos dos nuevas variables t y z (t la independiente y z la dependiente) que relacionamos con las originales x e y mediante:

$$x = e^t, \quad y = e^{mt} z$$

Con esto, si denotamos $z' = \frac{dz}{dt}$, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{me^{mt}z + e^{mt}z'}{e^t} = e^{(m-1)t}(z' + mz)$$

A partir de aquí:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} \\ &= e^{(m-2)t}(z'' + (2m-1)z' + m(m-1)z)\end{aligned}$$

y así sucesivamente. En general, por inducción, es claro que:

$$\frac{d^{(k)}y}{dx^{(k)}} = e^{(m-k)t}g_k(z, z', \dots, z^{(k)})$$

15.3 Transformación de la ecuación

De este modo, sustituyendo en la E. D. que estamos intentando resolver, obtenemos:

$$F(e^t, e^{mt}z, e^{(m-1)t}(z' + mz), \dots, e^{(m-n)t}g_n(z, z', \dots, z^{(n)})) = 0$$

extrayendo $\lambda = e^t$, esto resulta ser:

$$e^{\alpha t}F(1, z, (z' + mz), \dots, g_n(z, z', \dots, z^{(n)})) = 0$$

Como $e^{\alpha t}$ no puede anularse, el otro factor tiene que ser cero, luego hemos transformado la ecuación de partida en una de la forma:

$$G(z, z', \dots, z^{(n)}) = 0$$

en la que no aparece explícitamente la variable independiente t. Esta ecuación puede reducirse de orden aplicando el proceso descrito en el apartado anterior.

RECETA 12'. Si la ecuación $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

es tal que, para α y m fijos, F cumple:

$$F(\lambda x, \lambda^m u_0, \lambda^{m-1}u_1, \dots, \lambda^{m-n}u_n) = \lambda^\alpha F(x, u_0, u_1, \dots, u_n)$$

haciendo el cambio $x = e^t$, $y = e^{mt}z$ la E. D. se transforma en una de la forma $G(z, z', \dots, z^{(n)}) = 0$, a la que se puede aplicar el método anterior.

Ejemplo 12’

Resolver

$$4x^2y^3y'' = x^2 - y^4.$$

Análisis de homogeneidad:

Para que esta ecuación sea homogénea generalizada, cada monomio tiene que ser del mismo grado. En el miembro de la derecha, esto se consigue con $2 = 4m$, es decir, $m = \frac{1}{2}$, con lo cual $x^2 - y^4$ es de grado 2.

El miembro de la izquierda es de grado $2 + 3m + (m - 2) = 2 + \frac{3}{2} + (\frac{1}{2} - 2) = 2$, coincidente con el del otro miembro.

Así pues, con $m = \frac{1}{2}$ la E. D. es homogénea generalizada de grado 2.

Solución:

(El desarrollo completo está disponible en el documento LaTeX original)

Chapter 16

Apartado 13: Ecuaciones Homogéneas Respecto a Ciertos Argumentos

16.1 Ecuaciones homogéneas respecto a $y, y', \dots, y^{(n)}$

Si la ecuación $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ es tal que, para α fijo, F cumple:

$$F(x, \lambda u_0, \lambda u_1, \dots, \lambda u_n) = \lambda^\alpha F(x, u_0, u_1, \dots, u_n)$$

vamos a comprobar cómo, a través de un cambio de variable dependiente, el orden se puede reducir en uno.

> **Definición**
>
> La propiedad que caracteriza a la función F suele expresarse diciendo que F es **homogénea** de grado α respecto a los argumentos $u_0, u_1, \dots, u_n$. Con este lenguaje, la ecuación que estamos intentando resolver es homogénea de grado α respecto de $y, y', \dots, y^{(n)}$.

16.2 Solución trivial

En primer lugar, es claro que, cuando $\alpha > 0$, la función constante $y = 0$ (para la cual $y' = y'' = \dots = 0$) es solución ya que, efectivamente:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = F(x, 0, 0, \dots, 0) = 0^\alpha F(x, 1, 1, \dots, 1) = 0$$

16.3 Cambio de función

Para hallar las demás soluciones, tomemos una nueva función z dada por:

$$y' = yz$$

Obviamente, esto es equivalente a decir $y = \exp(\int z\,dx)$, puesto que:

$$\frac{dy}{dx} = yz \iff \frac{dy}{y} = z\,dx \iff \log y = \int z\,dx \iff y = \exp\left(\int z\,dx\right)$$

Derivadas sucesivas

Si derivamos sucesivamente la expresión $y' = yz$, obtenemos:

$$y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$$

$$y''' = y''z + y'z' + yz'' = y(z^3 + 3zz' + z'')$$

y así sucesivamente.

> **!** Important
>
> Es importante destacar el hecho de que siempre aparece una relación del tipo $y^{(k)} = yg_k(z, z', \dots, z^{(k-1)})$.

16.4 Transformación de la ecuación

Sin más que sustituir, en la E. D. queda:

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), \dots, yg_n(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0$$

de donde, extrayendo $\lambda = y$:

$$y^\alpha F(x, 1, z, z^2 + z', \dots, g_n(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0$$

y por tanto, como estamos suponiendo que y no es la función nula, el segundo factor habrá de ser cero. Claramente, esto puede ponerse en la forma:

$$G(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0$$

que es una **ecuación de orden** $n - 1$.

Si logramos resolverla, tendremos que sus soluciones serán $z = \phi(x, C_1, \dots, C_{n-1})$, una familia dependiente de $n-1$ constantes. Entonces, las soluciones de la E. D. original serán:

$$y = \exp\left(\int \phi(x, C_1, \dots, C_{n-1})\,dx\right)$$

lo que, al integrar, introduce la n-ésima constante. Así, puede ponerse:

$$y = C_n \exp\left(\int \phi(x, C_1, \dots, C_{n-1})\,dx\right)$$

RECETA 13. Si la ecuación $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

es tal que, para α fijo, F cumple:

$$F(x, \lambda u_0, \lambda u_1, \dots, \lambda u_n) = \lambda^\alpha F(x, u_0, u_1, \dots, u_n)$$

entonces el cambio de función dado por $y' = yz$ (es decir, $y = \exp(\int z\,dx)$) hace que el orden se reduzca en uno.

Ejemplo 13

Resolver

$$3x^2((y')^2 - yy'') = y^2.$$

Solución:

Esta ecuación es homogénea de grado 2 respecto de y, y', y'' pues, al sustituir y, y', y'' por $\lambda y, \lambda y', \lambda y''$, la ecuación queda multiplicada por λ^2.

Para resolverla, hacemos el cambio y por z dado por $y = \exp(\int z(x)\,dx)$, con lo cual:

$$y' = z\exp\left(\int z\,dx\right), \quad y'' = (z' + z^2)\exp\left(\int z\,dx\right)$$

Sustituyendo en la E. D. queda:

$$3x^2\left[z^2\exp\left(2\int z\,dx\right) - (z' + z^2)\exp\left(2\int z\,dx\right)\right] = \exp\left(2\int z\,dx\right)$$

de donde, simplificando $\exp(2\int z\,dx)$, se sigue $-3x^2z' = 1$, ecuación en variables separadas.

Tras ponerla como $dz = -\frac{1}{3}x^{-2}\,dx$ la integramos, con lo que $z = \frac{1}{3}x^{-1} + C_1$.

Por último:

$$\begin{aligned} y &= \exp\left(\int z(x)\,dx\right) = \exp\left(\int \left(\frac{1}{3}x^{-1} + C_1\right)dx\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{3}\log x + C_1 x + C_2\right) = x^{1/3}\exp(C_1 x + C_2) \end{aligned}$$

! Solución

La solución de la ecuación original es, sin más que cambiar la notación de las constantes, la familia de funciones:

$$y = K_1 x^{1/3} e^{K_2 x}$$

Chapter 17

Bibliografía

17.1 Referencias

A continuación se presenta la bibliografía recomendada para profundizar en el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias:

1. **F. Ayres**, *Ecuaciones diferenciales*, Col. Schaum, McGraw-Hill, México, 1988.

2. **M. Braun**, *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1990.

3. **W. E. Boyce y R. C. DiPrima**, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, Limusa, México, 1992 (3.ª edición).

4. **E. A. Coddington**, *Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias*, CECSA, México, 1980.

5. **M. W. Hirsch y S. Smale**, *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*, Alianza Universidad Textos, Madrid, 1983.

6. **S. G. Krantz**, *Differential Equations. Theory, Technique and Practice*, CRC Press, Boca Raton, 2015.

7. **L. Pontriaguine**, *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, Mir, Moscú, 1969.

8. **G. F. Simmons**, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*, McGraw-Hill, México, 1977.

9. **J. Stewart**, *Cálculo, conceptos y contextos*, Thomson, México, 1999.

Recursos adicionales

Para consulta en línea, se recomienda: - Wolfram MathWorld - Differential Equations - MIT OpenCourseWare - Differential Equations

Chapter 18

Apéndice: Fórmulas de Integración

18.1 Reglas principales de integración

1. Integral indefinida

Si $F'(x) = f(x)$, entonces:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

2. Integrales inmediatas

18.2 Potencias y logaritmo

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

18.3 Exponencial

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

18.4 Trigonométricas

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

$$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \operatorname{cotg} x| + C$$

18.5 Trigonométricas inversas

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \, dx = \operatorname{arcsec}|x| + C$$

3. Método de sustitución

Si $u = g(x)$, entonces:

$$\int f(g(x))g'(x) \, dx = \int f(u) \, du$$

4. Integración por partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

o equivalentemente:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

5. Fracciones racionales

Para integrar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son polinomios:

1. Si grado de $P \geq$ grado de Q: dividir primero
2. Descomponer en fracciones simples
3. Integrar cada fracción simple

Descomposición en fracciones simples

- Para $(x-a)^n$: términos $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$
- Para x^2+bx+c irreducible: término $\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$

Tabla de integrales útiles

Integral	Resultado
$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$	$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$	$\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\rvert + C$
$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C$

Recursos para más fórmulas

Para una lista más completa de fórmulas de integración, consultar:

- Tablas de integrales de Gradshteyn y Ryzhik
- Wolfram Integrator
- Symbolab Calculator