





## Declaración de autenticidad

---

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesina es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra universidad. Esta tesina es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

Evelyn Álvarez Cruz. Ciudad Universitaria, CD.MX. , 2021



# Introducción

---

El estudio de órbitas perriódicas hiperbólicas es un tema interesante en el estudio de los sistemas dinámicos discretos. En particular el estudio de los conjuntos invariantes asociados a tales órbitas es un tema de interés para quienes estudian la teoría KAM (Kolmogorov–Arnold–Moser). Uno de los problemas abiertos en sistemas dinámicos es el estudio del rompimiento de toros invariantes para mapeos simplécticos. Tal problema puede ser abordado desde el estudio del comportamiento de las variedades estables e inestables de órbitas hiperbólicas.

En este trabajo se presenta la implementación de un método para encontrar órbitas periódicas de mapeos simplécticos de dos dimensiones y para parametrizar las variedades asociadas a aquellas órbitas que resulten ser hiperbólicas. El objetivo es dar una herramienta para el estudio del rompimiento de los toros invariantes.



# Índice general

---

<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>1. Teoría</b>	<b>1</b>
1.1. Un método para encontrar órbitas periódicas de mapeos de 2D. . . . .	1
1.2. Método de parametrización . . . . .	5
<b>2. Implementación del método</b>	<b>9</b>
2.1. Desarrollo explícito para el mapeo estándar . . . . .	9
2.2. Implementación del método . . . . .	11
<b>3. Resultados</b>	<b>15</b>
3.1. Órbitas periódicas hiperbólicas y sus variedades. . . . .	19
3.2. Conclusiones . . . . .	27
<b>Bibliografía</b>	<b>29</b>



---

## Capítulo 1

# Teoría

---

Consideremos un mapeo  $M$  que preserva área, donde  $M : \mathbb{S} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S} \times \mathbb{R}$ . El mapeo  $M$  lleva puntos  $v_i = (x_i, y_i)$  en puntos dados por  $M(v_i) = v_{i+1}$ , donde el subíndice denota que se trata de la  $i$ -ésima iteración.

Nos interesa centrarnos en los mapeos que violan la condición de no degeneración también llamada *condición twist* [1] que dice que

$$\frac{\partial x_{i+1}}{\partial y_i} \neq 0. \quad (1.1)$$

Un mapeo puede violar la condición 1.1 de diferentes maneras, en especial si para algún valor particular de  $y_i$  ocurre que  $\partial x_{i+1}/\partial y_i = 0$ . La violación de la condición 1.1 da lugar a bifurcaciones de los círculos invariantes, las cuales a su vez son indicadoras de una colisión de órbitas periódicas en el mapeo. El valor del parámetro para el cual ocurre la colisión es de importancia en teoría KAM.

### 1.1. Un método para encontrar órbitas periódicas de mapeos de 2D.

Los métodos para encontrar órbitas periódicas en mapeos de dos dimensiones son generalmente métodos para encontrar raíces de sistemas no lineales en dos dimensiones. En este caso se busca reducir la dimensión en la que se trabaja para encontrar órbitas periódicas. Para ello es necesario encontrar algunas simetrías que reduzcan el problema a una dimensión. Veremos que las órbitas periódicas se pueden encontrar usando simetrías e involuciones. [2]

Decimos que el mapeo  $M$  permanece invariante bajo un mapeo  $T$  o que commuta con  $T$  si

$$TM = MT, \quad (1.2)$$

## 1. TEORÍA

---

esta característica nos ayudará a redefinir una órbita periódica del mapeo. Por otro lado decimos que una transformación  $I$  se dice de *tiempo inverso* para  $M$  si

$$I_0 M^{-1} = M I_0. \quad (1.3)$$

Es decir si la simetría cambia el sentido del mapeo hacia atrás. Si además la simetría de tiempo inverso es una involución ( $I_0^2 = 1$ ) se puede construir una nueva involución a partir de la anterior mediante

$$I_1 = M I_0. \quad (1.4)$$

Es simple comprobar que  $I_1$  es involución, usando la definición 1.3 tenemos que

$$I_1^{-1} M I_1 = (M I_0)^{-1} M I_1 = I_0^{-1} M^{-1} M I_1 = I_0^{-1} I_1 = I_0^{-1} M I_0 = M^{-1},$$

y reacomodando términos obtenemos  $I_0 M^{-1} = M I_0$ .

Con las involuciones definidas arriba podemos escribir el mapeo  $M$  como factorización de las mismas [3]

$$M = I_1 I_0. \quad (1.5)$$

Decimos entonces que el mapeo  $M$  es reversible. Usando estos conceptos vamos a analizar la siguiente afirmación.

### **Teorema 1**

Sea  $M : \mathbb{S} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S} \times \mathbb{R}$  un mapeo simpléctico no-twist reversible. Sean

$$\mathbb{J}_0 = \{v \in \mathbb{S} \times \mathbb{R} | I_0 v = v\} \quad (1.6)$$

$$\mathbb{J}_1 = \{v \in \mathbb{S} \times \mathbb{R} | I_1 v = v\} \quad (1.7)$$

Si  $v_0 \in \mathbb{J}_0$  y  $M^N v_0 = v_N \in \mathbb{J}_0$  entonces  $v_0$  es de periodo  $2N$ .

*Demostración:*

Queremos probar que  $M^{2N} v_0 = v_0$ . Entonces

$$\begin{aligned} M^{2N} v_0 &= M^N M^N v_0 \\ &= M^{N-1} M M^{N-1} M v_0 \\ &= M^{N-1} M M^{N-1} I_1 I_0 v_0, \end{aligned}$$

usando que  $v_0 \in I_0$  y que  $M$  es reversible

$$M^{2N} v_0 = M^{N-1} I_1 I_0 M^{N-1} I_1 v_0,$$

---

### 1.1 Un método para encontrar órbitas periódicas de mapeos de 2D.

usando que  $M^N v_0 = v_N \in \mathbb{J}_0$  y que  $M^{N-1} = M^N M^{-1}$

$$\begin{aligned} M^{2N} v_0 &= M^{N-1} I_1 I_0 M^N M^{-1} I_1 v_0 \\ &= M^{N-1} I_1 M^{N-1} I_1 v_0. \end{aligned}$$

Usando que el mapeo es reversible es fácil ver que se cumple que

$$I_1 M = I_0 \quad (1.8)$$

$$M I_0 = I_1. \quad (1.9)$$

Tomando en cuenta la ecuación 1.8

$$\begin{aligned} M^{2N} v_0 &= M^{N-2} M I_1 M M^{N-2} I_1 v_0 \\ &= M^{N-2} M I_0 M^{N-2} I_1 v_0 \\ &= M^{N-2} I_1 M^{N-2} I_1 v_0. \end{aligned}$$

Usando de nuevo las ecuaciones 1.8,1.9,

$$\begin{aligned} M^{2N} v_0 &= M^{N-3} M I_1 M M^{N-3} I_1 v_0 \\ &= M^{N-3} M I_0 M^{N-3} I_1 v_0 \\ &= M^{N-3} I_1 M^{N-3} I_1 v_0. \end{aligned}$$

De manera sucesiva aplicando 1.8,1.9 obtenemos que

$$M^{2N} v_0 = M I_1 M I_1 v_0,$$

donde por última vez aplicamos 1.8 y que  $M$  es reversible

$$\begin{aligned} M^{2N} v_0 &= M I_0 I_1 v_0 \\ &= I_1 I_0 I_0 I_1 v_0 \\ &= v_0 \end{aligned}$$

De manera análoga se puede demostrar el teorema para  $v_0 \in \mathbb{J}_1$ .

En el caso en que tengamos una órbita de periodo impar afirmamos el siguiente teorema.

#### **Teorema 2**

Sea  $M : \mathbb{S} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S} \times \mathbb{R}$  un mapeo simpléctico no-twist reversible. Sean

$$\mathbb{J}_0 = \{v \in \mathbb{S} \times \mathbb{R} | I_0 v = v\} \quad (1.10)$$

$$\mathbb{J}_1 = \{v \in \mathbb{S} \times \mathbb{R} | I_1 v = v\}. \quad (1.11)$$

Si  $v_0 \in \mathbb{J}_1$  y  $M^N v_0 = v_N \in \mathbb{J}_0$  entonces  $v_0$  es de periodo  $2N + 1$ .

## 1. TEORÍA

---

*Demostración:*

Queremos ver que  $M^{2N+1}v_0 = v_0$ .

Entonces

$$\begin{aligned} M^{2N+1}v_0 &= M^{2N}Mv_0 \\ &= M^N MM^N v_0. \end{aligned}$$

Usando que el mapeo es reversible y que  $I_0 M^N = M^N$ ,

$$\begin{aligned} M^{2N+1}v_0 &= M^N I_1 I_0 M^N v_0 \\ &= M^N I_1 M^N v_0 \\ &= M^{N-1} M I_1 M M^{N-1} v_0. \end{aligned}$$

Usando 1.9 y 1.8,

$$\begin{aligned} M^{2N+1}v_0 &= M^{N-1} M I_0 M^{N-1} v_0 \\ &= M^{N-1} I_1 M^{N-1} v_0. \end{aligned}$$

De manera sucesiva se puede usar 1.8 y 1.9 hasta llegar a

$$\begin{aligned} M^{2N+1}v_0 &= M I_1 M_0^v \\ &= M I_0 v_0 \\ &= I_1 v_0. \end{aligned}$$

Debido a que  $v_0 \in \mathbb{J}_1$

$$M^{2N+1}v_0 = v_0.$$

En el caso en que  $v_0 \in \mathbb{J}_0$  y que  $v_N \in \mathbb{J}_1$  se tiene que  $M^{2N-1}v_0 = v_0$  y la demostración es análoga.

Con los teoremas 1 y 2 podemos enunciar el siguiente resultado.

### **Corolario 1**

Sea  $M : \mathbb{S} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S} \times \mathbb{R}$  un mapeo simpléctico no-twist reversible y  $\mathbb{J}_0, \mathbb{J}_1$  como se definieron en los teoremas 1 y 2.

- Si  $v_0 \in \mathbb{J}_0$  y  $M^N v_0 \in \mathbb{J}_0$  si y sólo si  $v_0$  pertenece a una órbita de periodo  $2N$  de  $M$ .
- Si  $v_0 \in \mathbb{J}_1$  y  $M^N v_0 \in \mathbb{J}_1$  si y sólo si  $v_0$  pertenece a una órbita de periodo  $2N$  de  $M$ .

- Si  $v_0 \in \mathbb{J}_1$  y  $M^N v_0 \in \mathbb{J}_0$  si y sólo si  $v_0$  pertenece a una órbita de periodo  $2N + 1$  de  $M$ .
- Si  $v_0 \in \mathbb{J}_0$  y  $M^N v_0 \in \mathbb{J}_1$  si y sólo si  $v_0$  pertenece a una órbita de periodo  $2N - 1$  de  $M$ .

Si se conocen los conjuntos  $\mathbb{J}_0, \mathbb{J}_1$  entonces la búsqueda de órbitas periódicas se puede reducir a una búsqueda en una dimensión, ya que sabemos que al menos un punto de la órbita estará en alguno de los conjuntos.

## 1.2. Método de parametrización

Esta sección tiene como objetivo describir el método de parametrización desarrollado por X. Cabré, E. Fontich y R. de la Llave [4]. El método fue desarrollado de manera general para conjuntos invariantes, estables e inestables, en puntos hiperbólicos, tratándose de un método semianalítico, es decir parte computacional y parte analítica. El método busca describir las variedades usando series.

Supongamos que  $v_* \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}$  es un punto fijo hiperbólico del mapeo  $M$ . Asociado a  $v_*$  se tienen dos conjuntos invariantes

$$\mathbb{W}^s = \{v : M^n v \rightarrow v_* \text{ cuando } n \rightarrow \infty\} \quad (1.12)$$

$$\mathbb{W}^u = \{v : M^n v \rightarrow v_* \text{ cuando } n \rightarrow -\infty\}, \quad (1.13)$$

llamados *variedades estable e inestable* respectivamente.

Para describir los conjuntos invariantes tomemos  $U \subset \mathbb{W}^z$  con  $z \in \{u, s\}$  y un abierto  $\Theta \subset \mathbb{R}$ . Como  $U$  es parte de un conjunto invariante entonces

$$M : U \subset \mathbb{W}^z \longrightarrow U \subset \mathbb{W}^z. \quad (1.14)$$

Por otro lado podemos encontrar  $\mathcal{P} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S} \times \mathbb{R}$  parametrización tal que el siguiente diagrama commute

$$\begin{array}{ccc} \Theta \subset \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \Theta \subset \mathbb{R} \\ \downarrow \mathcal{P} & & \downarrow \mathcal{P} \\ U \subset \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{M} & U \subset \mathbb{R}^2 \end{array} \quad (1.15)$$

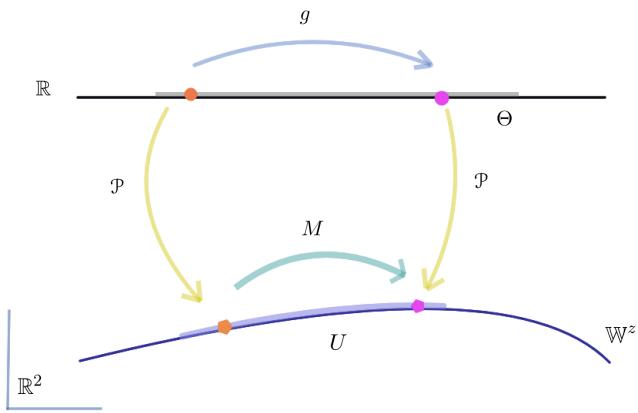
La función  $g$  contiene la dinámica del mapeo pero sobre  $\Theta$ . A partir del diagrama 1.15 obtenemos la siguiente ecuación de cohomología

## 1. TEORÍA

---

$$M \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \circ g. \quad (1.16)$$

Una forma gráfica de ver lo que nos dice la ecuación 1.16 es mediante la figura 1.1.



**Figura 1.1:** Representación gráfica del diagrama (1.15).

Las variables a encontrar en la ecuación 1.16 son  $\mathcal{P}$  y  $g$ , por lo que se necesita fijar o encontrar una de ellas para poder resolver la ecuación. Para hacer esto se suelen tomar en cuenta dos formas de parametrización definidas como *la forma gráfica* y *la forma normal* [4]. En este caso se usa la forma gráfica que consiste en usar la forma local de las variedades alrededor del punto  $v_*$ . Es decir se usa que localmente la dependencia es lineal, por lo que

$$g(t) = \lambda t, \quad (1.17)$$

con  $t \in \mathbb{R}$  el parámetro,  $\lambda \in \mathbb{R}$  el valor propio asociado a la linearización del mapeo. Esta desición esta apoyada en el teorema de Hartman-Grobman [5][6] que declara que en una vecindad del punto fijo hiperbólico se puede aproximar el comportamiento del sistema mediante su linearización.

Entonces usando la linearización del mapeo y la ecuación (1.17) se puede resolver la ecuación (1.16) para  $\mathcal{P}$ . Para ello se propone que

$$\mathcal{P} := (p_1(t), p_2(t)) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right). \quad (1.18)$$

Sustituyendo la ecuación (1.18) en la ecuación (1.16) se puede separar por grado de cada lado de la ecuación y comparar términos. Las ecuaciones resultantes son recursivas , es decir que proponiendo los coeficientes de orden cero del polinomio  $\mathcal{P}$  se puede obtener todos los consecutivos.



## Implementación del método

---

En este capítulo se describe brevemente cómo se implementó el método para encontrar puntos fijos. Sobre el método de la parametrización implementado se puede revisar la referencia [7] en donde se describe también cómo se aplicó al mapeo estándar.

### 2.1. Desarrollo explícito para el mapeo estándar

El mapeo etándar es uno de los mapeos más estudiados, esta dado por

$$M_\kappa(x_n, y_n) = \begin{pmatrix} x_n + y_{n+1} \\ y_n - \kappa \sin(2\pi x_n)/2\pi \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

con  $\kappa$  un parámetro y  $x \in [0, 1]$ . Escrito de esta forma el mapeo se descompone en el producto de dos involuciones dadas por

$$I_0 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_n \\ y_n - \frac{\kappa}{2\pi} \sin(2\pi x_n) \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

$$I_1 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n - x_n \\ y_n \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Los conjuntos invariantes asociados a las involuciones (2.2), (2.3) son los siguientes

$$\mathbb{J}_0 = \{x \in [0, 1] | x = 0, x = 1/2\}, \quad (2.4)$$

$$\mathbb{J}_1 = \{x \in [0, 1] | x = \frac{y}{2}, x = \frac{y+1}{2}\}. \quad (2.5)$$

Siguiendo el resultado del Corolario 1, sea  $(x_0, y_0) \in \mathbb{J}_0$  si buscamos una órbita de periodo dos tendremos que resolver

$$M_\kappa(x, y) = M_\kappa(0, y) = (1/2, y),$$

## 2. IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO

---

lo cual se reduce a que

$$y = 1/2.$$

Entonces afirmamos que el punto  $(0, 1/2)$  es un punto de periodo dos, cuya órbita encontrada es  $\{(0, 1/2), (1/2, 1/2)\}$ . Es importante recordar que la variable  $x$  está definida en el intervalo  $[0, 1]$  por lo que se debe tomar módulo 1 en esa componente.

Una vez encontrada un órbita periódica es necesario determinar la estabilidad de la misma. Usando la linearización alrededor del punto fijo, en este caso un punto en la órbita se toma como punto fijo del mapeo  $M_k^n(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$ . La estabilidad está dada por los valores propios del jacobiano  $DM_k^n(x_0, y_0)$ . Para calcular este jacobiano no hace falta hacer la composición, solo hace falta usar la regla de la cadena y la órbita periódica.

$$\begin{aligned} DM_k^n(x_0, y_0) &= D(M_k(M_k(\cdots M_k(x_0, y_0)))) \\ &= DM_k(M^{n-1}(x_0, y_0))DM_k(M_k^{n-2}(x_{n-2}, y_{n-1})) \cdots DM_k(x_0, y_0) \\ &= DM_k(x_{n-1}, y_{n-1})DM_k(x_{n-2}, y_{n-2}) \cdots DM_k(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Entonces el jacobiano  $DM_k^n(x_0, y_0)$  se puede calcular evaluando el jacobiano del mapeo estándar en los puntos de la órbita y multiplicando las matrices. El jacobiano del mapeo estándar es

$$M_k^n(x_n, y_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\kappa \cos(2\pi x_n) & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

y la órbita se conoce si se conoce solo uno de los puntos. Usando el hecho de que el determinante del producto es el producto de los determinantes se tiene que

$$\det DM_k^n(x_0, y_0) = (\det DM(x_{n-1}, y_{n-1})) \cdots (\det DM(x_0, y_0)). \quad (2.7)$$

Si los valores propios asociados al polinomio característico de la ecuación (2.7) tienen módulo mayor que uno y menor que uno entonces tenemos que  $(x_0, y_0)$  es un punto hiperbólico lo que indica que la órbita encontrada es hiperbólica.

Una vez que se tiene calculada una órbita periódica hiperbólica del mapeo se aplica el método de la parametrización para describir las variedades invariantes asociadas a tal órbita.

Para el método de parametrización escribimos las variables  $(x, y)$  como dos polinomios de variable real  $t$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad (2.8)$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \quad (2.9)$$

dónde  $a_0, b_0$  representan los coeficientes n-ésimos del polinomio y tal que  $\mathcal{P}(t) := (x(t), y(t))$ . En cuanto a la dinámica interna  $g$ , se usa la ecuación  $g(t) = \lambda t$  (1.17). Sustituyendo las variables en su expansión de Taylor en  $M \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \circ g$  (1.16) y usando que  $M$  es el mapeo estándar (2.1) obtenemos

$$M_\kappa(x, y) = \begin{bmatrix} x(t) + y(t) - \frac{\kappa}{2\pi} \sin(2\pi x(t)) \\ y(t) - \frac{\kappa}{2\pi} \sin[2\pi x(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(\lambda t) \\ y(\lambda t) \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

que en forma explícita es

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n - \frac{\kappa}{2\pi} \sin(2\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n) \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n - \frac{\kappa}{2\pi} \sin(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n t^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n t^n \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

al desarrollar las sumas y usar la serie de Taylor del seno se puede obtener una ecuación para comparar los términos de orden 0.

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n - \frac{\kappa}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n)^{2n+1} \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n - \frac{\kappa}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n)^{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n t^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n t^n \end{bmatrix}$$

Desarrollando las sumas y agrupando los términos de orden cero.

$$\begin{bmatrix} a_0 + b_0 - \frac{\kappa}{2\pi} (2\pi a_0 - \frac{2\pi}{3!} a_0^3 + \frac{2\pi}{5!} a_0^5 - \dots) \\ b_0 - \frac{\kappa}{2\pi} (2\pi a_0 - \frac{2\pi}{3!} a_0^3 + \frac{2\pi}{5!} a_0^5 - \dots) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

De donde se obtiene que  $a_0, b_0$  son cero. Análogamente se pueden agrupar los de primer orden y obtener un sistema que se resuelve a partir de los coeficientes  $a_0$  y  $b_0$ . De manera sucesiva se pueden obtener ecuaciones de recurrencia para encontrar los coeficientes de orden  $j$ , los detalles de cómo son estos cálculos se pueden consultar en [7].

## 2.2. Implementación del método

La implementación del método consiste principalmente en aplicar un método de Newton para encontrar raíces. Para encontrar las órbitas periódicas, dado el mapeo y los conjuntos invariantes de las simetrías se puede buscar una órbita periódica de periodo  $n$  usando una semilla. En la siguiente tabla se ezquematiza cómo se calcula, sin embargo se recomienda que para mayor detalle viste <https://github.com/alvarezze/Tesis-Variedades-Estables-e-inestables/>. En la liga se encuentra la documentación necesaria para poder usar el método así como algunos ejemplos.

## 2. IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO

---

### Pasos

.....  
**1.** Se reciben el mapeo, las involuciones, el periodo y una semilla.

$$M, I_A, I_B, n, v_0$$

.....  
**2.** Se crea un nuevo mapeo que es la composición del mapeo  $M$ ,  $k$  veces.

$$f(v) = M^k(v)$$

.....  
**3.** Se toma un punto en el conjunto invariante.

$$J_A$$

.....  
**4.** Se usa la función creada en el paso 2. y se aplica al punto elegido en el paso anterior.

$$f(p)$$

.....  
**5.** Se usa la ecuación que describe el conjunto  $J_B$  y el hecho de que es invariante para construir una nueva ecuación.

$$g(f(p)) = 0$$

.....  
**6.** Se usa un método de Newton para encontrar la raíz de la ecuación del paso 5.

La implementación del método de parametrización fue resultado de un trabajo anterior [7], por lo que solo se describirá de manera muy superficial lo programado. Al igual que en el caso del método para las órbitas periódicas se puede encontrar la documentación en <https://github.com/alvarezzeve/PeriodicOrbits2DMaps>.

### Pasos

.....  
**1.** Se reciben el mapeo, el punto fijo el orden del polinomio, el intervalo en el que se va a evaluar y el paso.

$$M, O, v, t, \Delta t$$

.....  
**2.** Se crean dos polinomios de grado 1 asociados a las variables del mapeo.

$$\begin{aligned} P_x &= a_0 + a_1 t + O(t^2) \\ P_y &= b_0 + b_1 t + O(t^2) \end{aligned}$$

.....  
**3.** Se aplica el mapeo a los polinomios.

$$M(P_x + P_y)$$

.....  
**4.** Se calcula la matriz jacobiana del

sistema anterior y se calculan los valores y vectores propios.

.....  
**5.** Se elige el valor propio asociado a la variedad que se está calculando

.....  
**6.** Se resuelve para  $a_1, b_1$ .

.....  
**7.** Se sustituyen los valores de  $a_1, b_1$  en los polinomios  $P_x, P_y$  y se aumenta el orden.

.....  
**8.** Se aplica el mapeo a los nuevos polinomios.

.....  
**9.** Se crea el polinomio.

.....  
**10.** Se crea una ecuación con la resta de las ecuaciones del paso 8 y 9.

.....  
**11.** Se resuelve la ecuación del paso 10 para las variables  $a_2, b_2$ .

.....  
**12.** Se regresa al paso 7 y se itera hasta que se llegue al orden deseado.

$$JM(P_x, P_y)$$

$$\lambda$$

$$a_1(a_0, \lambda), b_1(b_0, \lambda)$$

$$\begin{aligned} P_x &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + O(t^3) \\ P_y &= b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + O(t^3) \end{aligned}$$

$$M(P_x + P_y)$$

$$\begin{aligned} P_{\lambda x} &= a_0 + a_1 \lambda t + a_2 \lambda t^2 + O(t^3) \\ P_{\lambda y} &= b_0 + b_1 \lambda t + b_2 \lambda t^2 + O(t^3) \end{aligned}$$

$$M(P_x + P_y) - (P_{\lambda x}, P_{\lambda y}) = 0$$

En ambas implementaciones se añadió una forma de evaluar el error numérico. Para las órbitas periódicas se tomó la diferencia entre el punto de la órbita de periodo  $n$  encontrado y su  $n$ -ésima iteración.

$$\mathbb{E} = \|(x_0, y_0) - M^n(x_0, y_0)\| \quad (2.13)$$

Mientras que en el caso de las parametrizaciones el error se toma de la diferencia entre composiciones evaluada en el intervalo en el que se tomó la parametrización [8].

$$\mathbf{E} = \|M \circ \mathcal{P} - \mathcal{P} \circ g\| \quad (2.14)$$

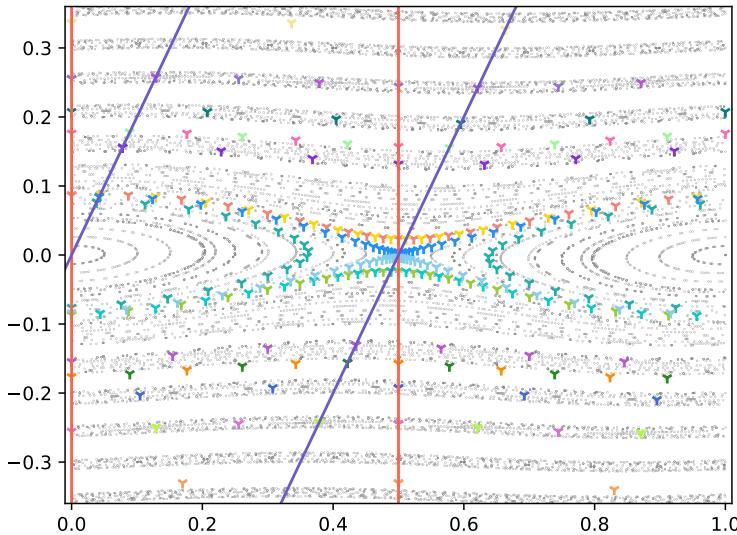
Los errores se analizan por separado ya que cada método puede considerarse ajeno.



## Resultados

---

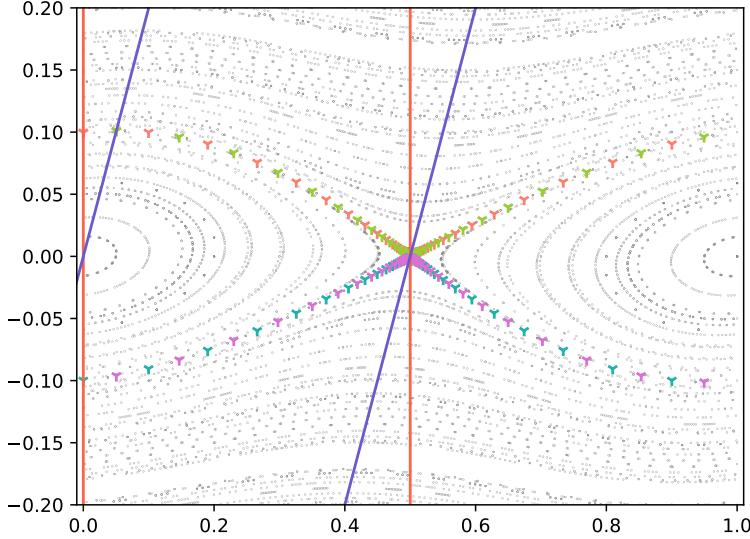
Utilizando el método ya programado se hicieron diferentes cálculos para encontrar algunas órbitas periódicas en el mapeo estándar, que se muestran en la figura 3.1. Todas las órbitas que aparecen fueron calculadas usando números de tipo Float64 y presentan un error menor al  $1 \times 10^{-15}$ .



**Figura 3.1:** Espacio fase del mapeo estándar, con  $\kappa = 0.07$ , junto con varias órbitas periódicas. Las líneas rojas y azul representan los conjuntos invariantes  $J_0, J_1$

### 3. RESULTADOS

---



**Figura 3.2:** Espacio fase del mapeo estándar con  $\kappa = 0.07$ , con 4 órbitas de periodo 40.

Las líneas rojas y azul representan los conjuntos invariantes  $J_0, J_1$ .

Para calcular las órbitas se requiere una semilla para iniciar el método de Newton, esta semilla se calculó primero calculando las órbitas periódicas del mapeo cuando el valor del parámetro es  $\kappa = 0.0$  y el sistema es completamente integrable.

Otro mapeo con el que se trabajó fue el mapeo cuadrático (3.1), un mapeo que preserva área y donde  $a, b$  son números reales. El mapeo es integrable cuando  $b = 0$ .

$$M_{a,b}(x_n, y_n) = \begin{pmatrix} x_n + a(1 - y_{n+1}^2) \\ y_n - b \sin(2\pi x_n) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Sus correspondientes involuciones son

$$\mathbf{I}_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-xy - b \sin(2\pi x)), \quad (3.2)$$

$$\mathbf{I}_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-x + a(1 - y^2)y). \quad (3.3)$$

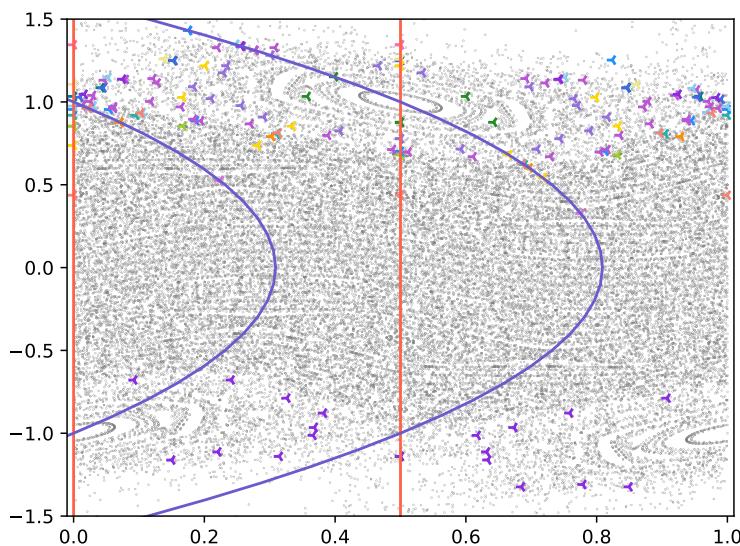
Mientras que sus conjuntos invariantes asociados son

$$J_0 = \{(x, y) | x = 0, x = 1/2\}, \quad (3.4)$$

$$J_1 = \{(x, y) | x = a(1 - y^2)/2, x = a(1 - y^2)/2 + 1/2\}. \quad (3.5)$$

---

Utilizando el método implementado de la misma manera que se utilizó para el mapeo estándar es posible obtener órbitas periódicas de diferentes períodos usando semillas adecuadas. Un ejemplo de algunas órbitas se muestra en la figura 3.3.



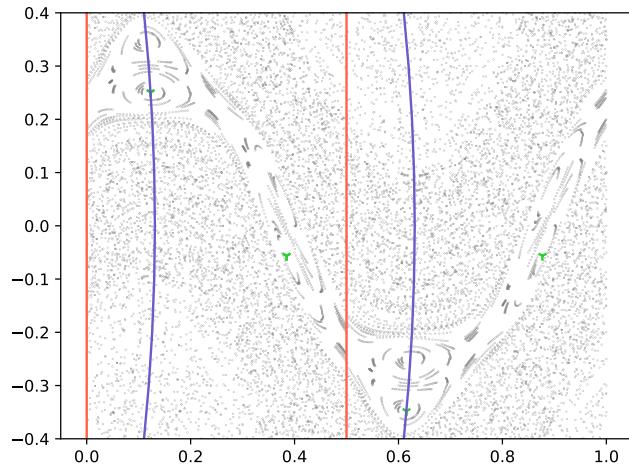
**Figura 3.3:** Espacio fase y algunas órbitas periódicas del mapeo (3.1) con  $a = 0.618, b = 0.2$ . Las curvas de color rojo y azul corresponden a los conjuntos  $\mathbb{J}_0, \mathbb{J}_1$ .

Es posible cambiar el método usado (Newton) para encontrar las raíces dentro de la implementación. Sin embargo es mejor obtener raíces que se aproximen a un punto de la órbita ya que eso garantiza la convergencia del método. También se implementó una extensión del método para aritmética de presición extendida. En presición extendida se utilizan números de presición arbitraria en dónde se trabaja con 256 bits de manera predefinida.

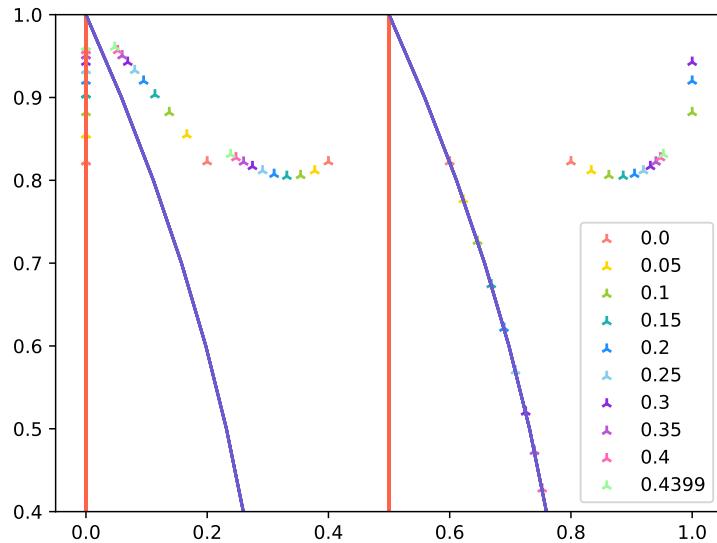
Algo interesante de analizar con esta herramienta es la dinámica de las órbitas periódicas conforme se mueven los parámetros. En el caso del mapeo (3.1) se muestra en la figura 3.5 cómo la órbita de periodo 4 se va modificando al variar el parámetro  $b$  y dejando fijo  $a = 0.618$ .

### 3. RESULTADOS

---



**Figura 3.4:** Órbita de periodo 4 en el mapeo (3.1) con  $a = 0.2625, b = 0.44$ .



**Figura 3.5:** Dinámica de una órbita de periodo 4 del mapeo (3.1) con valores  $a = 0.618$  fija y  $b$  variando de acuerdo a los valores en la tabla. Las curvas rojas y azules corresponden a los conjuntos invariantes  $\mathbb{J}_0, \mathbb{J}_1$ .

### 3.1. Órbitas periódicas hiperbólicas y sus variedades.

Una vez que se tienen algunas órbitas periódicas es posible determinar cuáles de ellas son hiperbólicas. Seleccionando las que cumplan ser hiperbólicas se puede aplicar el método de parametrización para las variedades asociadas a la órbita.

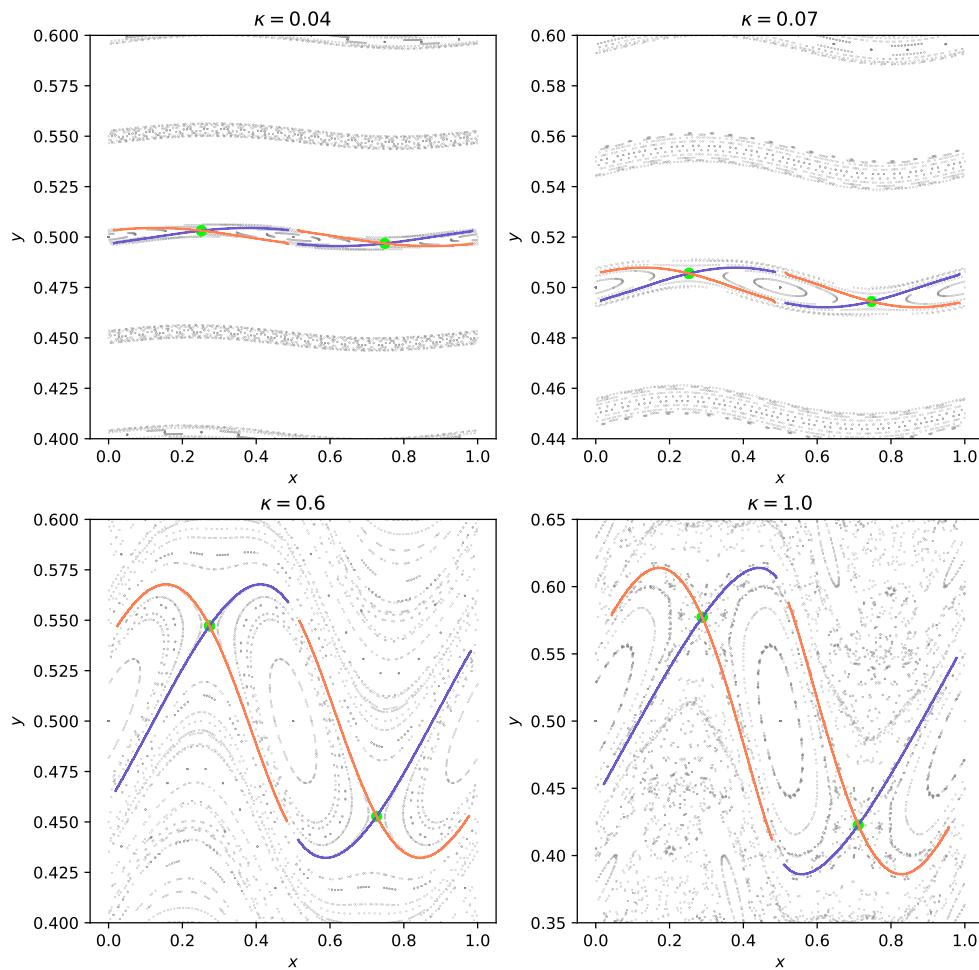
En el caso del mapeo estándar es bien conocido que existe una órbita hiperbólica de periodo dos que persiste para ciertos valores del parámetro  $\kappa$ . Usando diferentes valores del parámetro se calcularon las parametrizaciones de las variedades asociadas usando polinomios de orden 70 evaluados en el intervalo  $t = [-0.2, 0.2]$ . La figura 3.6 muestra las variedades en el espacio fase asociadas a la órbita hiperbólica de periodo dos para diferentes valores de  $\kappa$ . Como se puede observar mientras el valor de  $\kappa$  aumenta las variedades se van abriendo dejando mayor espacio a la dinámica de la órbita elíptica de periodo dos.

Para observar con más detalle el comportamiento de las órbitas y sus variedades se varió el valor de  $\kappa$  entre 0.1 y 1.1, se calcularon las órbitas hiperbólicas de periodo dos y sus respectivas variedades. La figura 3.8 muestra cómo la órbita y las variedades se van modificando. De cada punto marcado en color verde surge una variedad estable (azul) y una variedad inestable (naranja), se puede notar como la variedad estable de un punto de la órbita se convierte en la inestable del punto siguiente.

En la tabla 1 se muestra el error asociado al cálculo de la órbita periódica que se obtuvo mediante la ecuación (2.13), mientras que en la figura 3.7 se muestra el error asociado al cálculo de las variedades invariantes. En la tabla 1 se muestra que algunas órbitas tienen un error cero lo que significa que el error es menor a la presición de los números con los que se calcularon. En el caso del error de las parametrizaciones se puede observar como crece rápidamente después de un valor de  $t$  que depende de cada parametrización. Por esa razón las variedades que aparecen en la figura 3.6 fueron calculadas en los intervalos donde el error es mínimo, es decir menor a un orden  $10^{-10}$ .

### 3. RESULTADOS

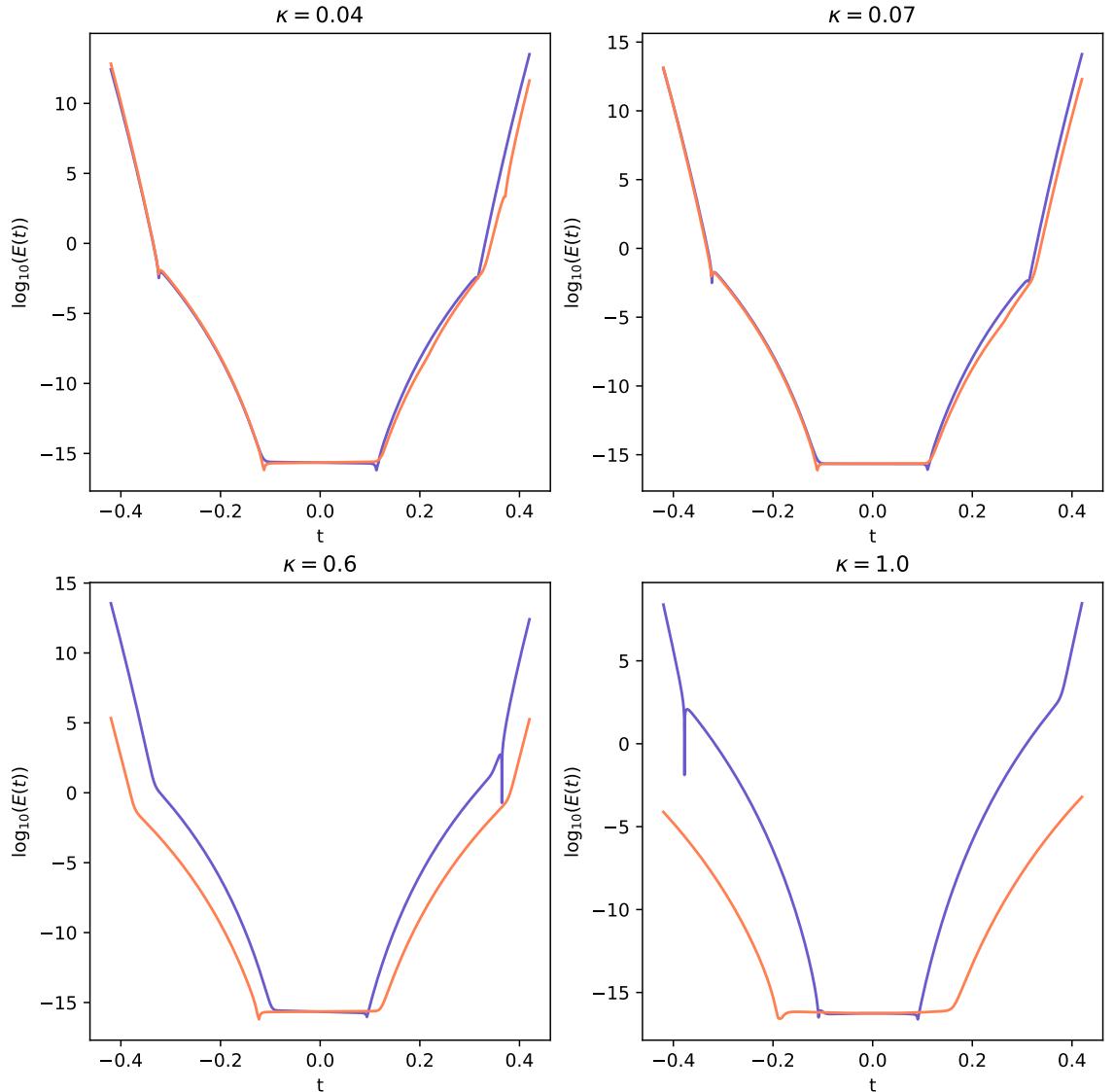
---



**Figura 3.6:** Variedades invariantes asociadas a la órbita de periodo dos en el mapeo estándar con diferentes valores de  $\kappa$ .

---

### 3.1 Órbitas periódicas hiperbólicas y sus variedades.



**Figura 3.7:** Errores asociados al cálculo de las variedades invariantes que aparecen en la figura 3.6.

### 3. RESULTADOS

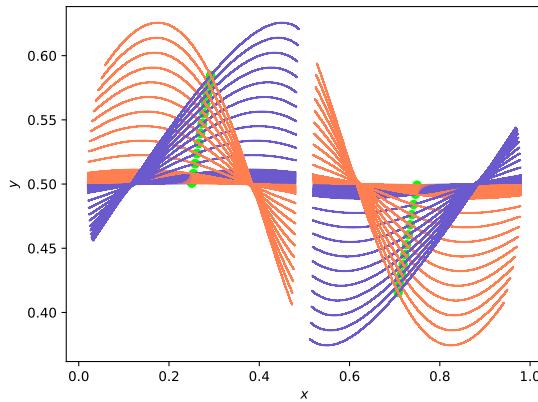
---

$\kappa$	Error
0.01	$2.220446049250313e - 16$
0.02	0.0
0.03	$2.220446049250313e - 16$
0.04	$2.220446049250313e - 16$
0.05	$2.220446049250313e - 16$
0.06	$2.220446049250313e - 16$
0.07	$2.220446049250313e - 16$
0.08	0.0
0.09	0.0
0.1	0.0
0.2	$3.3306690738754696e - 16$
0.3	$2.220446049250313e - 16$
0.4	$2.220446049250313e - 16$
0.5	$2.220446049250313e - 16$
0.6	$4.440892098500626e - 16$
0.7	0.0
0.8	0.0
0.9	$4.440892098500626e - 16$
1.0	$4.440892098500626e - 16$
1.1	$4.440892098500626e - 16$

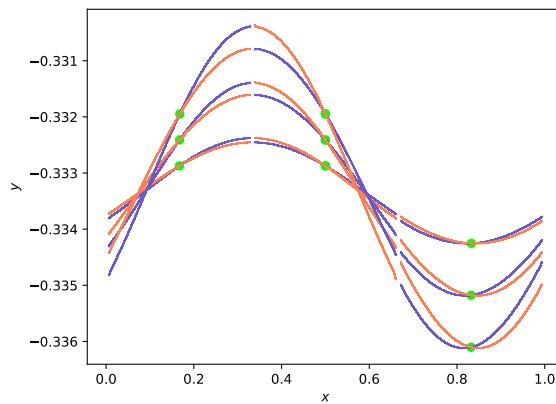
**Tabla 3.1:** Tabla con los errores asociados al cálculo de la órbita de periodo dos en el mapeo estándar con diferentes valores de  $\kappa$ .

En el caso del mapeo (3.1) se aplicó el método para dos órbitas encontradas, una de periodo tres y una de periodo once, tomando el valor de parámetro  $a = 0.618$  fijo y variando  $b$ . El error asociado al cálculo de las órbitas periódicas está en el mismo orden que en el caso del mapeo estándar, es decir alrededor de  $10^{-16}$ . Lo que podemos ver de la figura 3.12 es que cuando el parámetro  $b$  es cercano a cero las variedades asociadas

a las órbitas periódicas resultan con menos curvaturas. Cuando el parámetro  $b$  va aumentando las órbitas periódicas se van acercando como se muestra en la figura 3.12 con  $b = 0.2$  en donde las órbitas son cercanas y sus variedades también. Además de esto podemos observar que las variedades se van curvando y teniendo un comportamiento más complicado de describir. Cuando el valor de  $b$  aumenta lo suficiente las órbitas están lo suficientemente cerca como para que las variedades de la órbita de periodo tres y la de periodo once se corten en varios puntos.



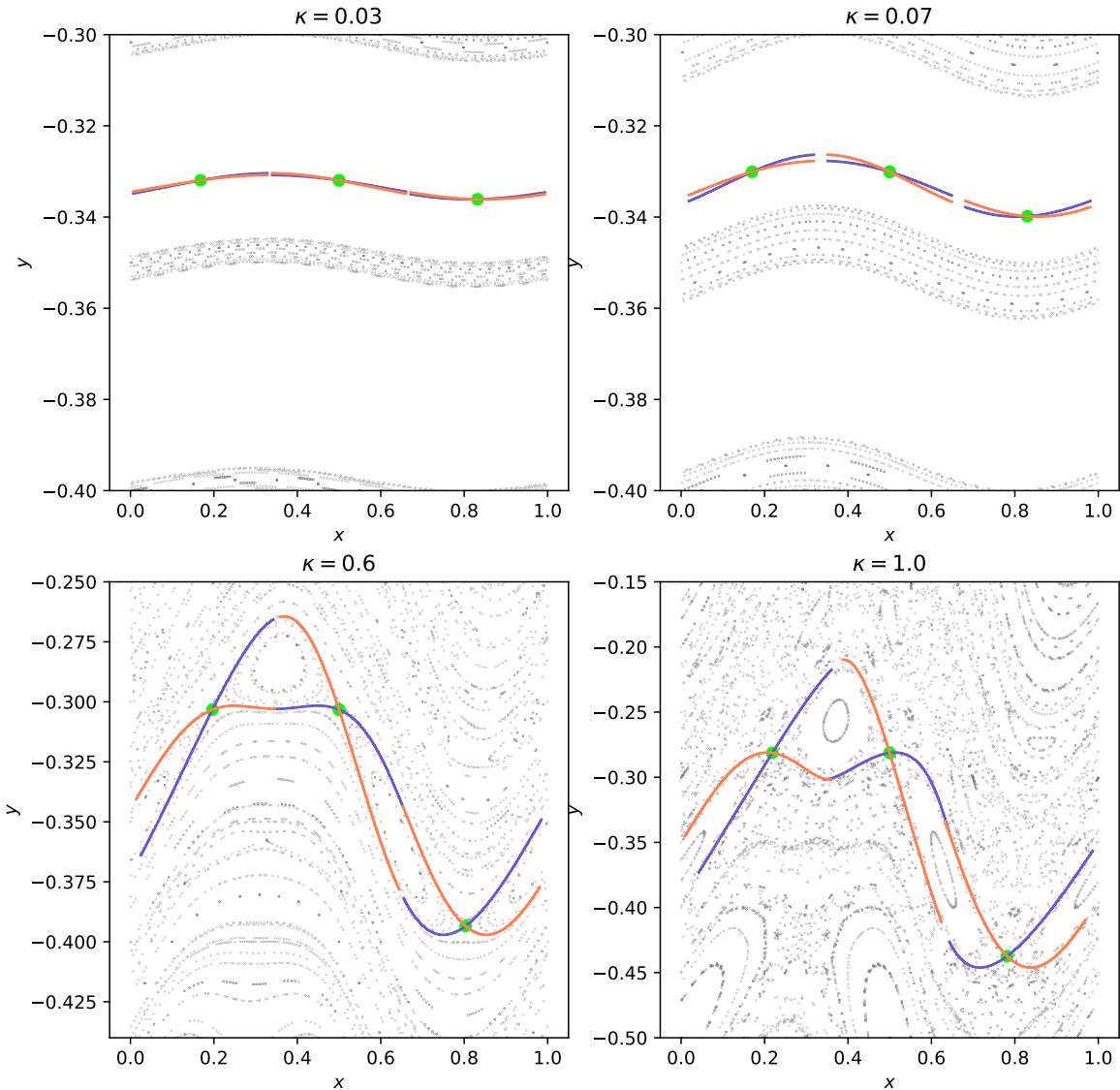
**Figura 3.8:** Comportamiento de las variedades invariantes asociadas a la órbita de periodo dos en el mapeo estándar al variar  $\kappa$  entre  $[0.1, 1.1]$ .



**Figura 3.9:** Variedades asociadas a una órbita de periodo tres para el mapeo estándar con valores de  $\kappa = [0.01, 0.02, 0.03]$ .

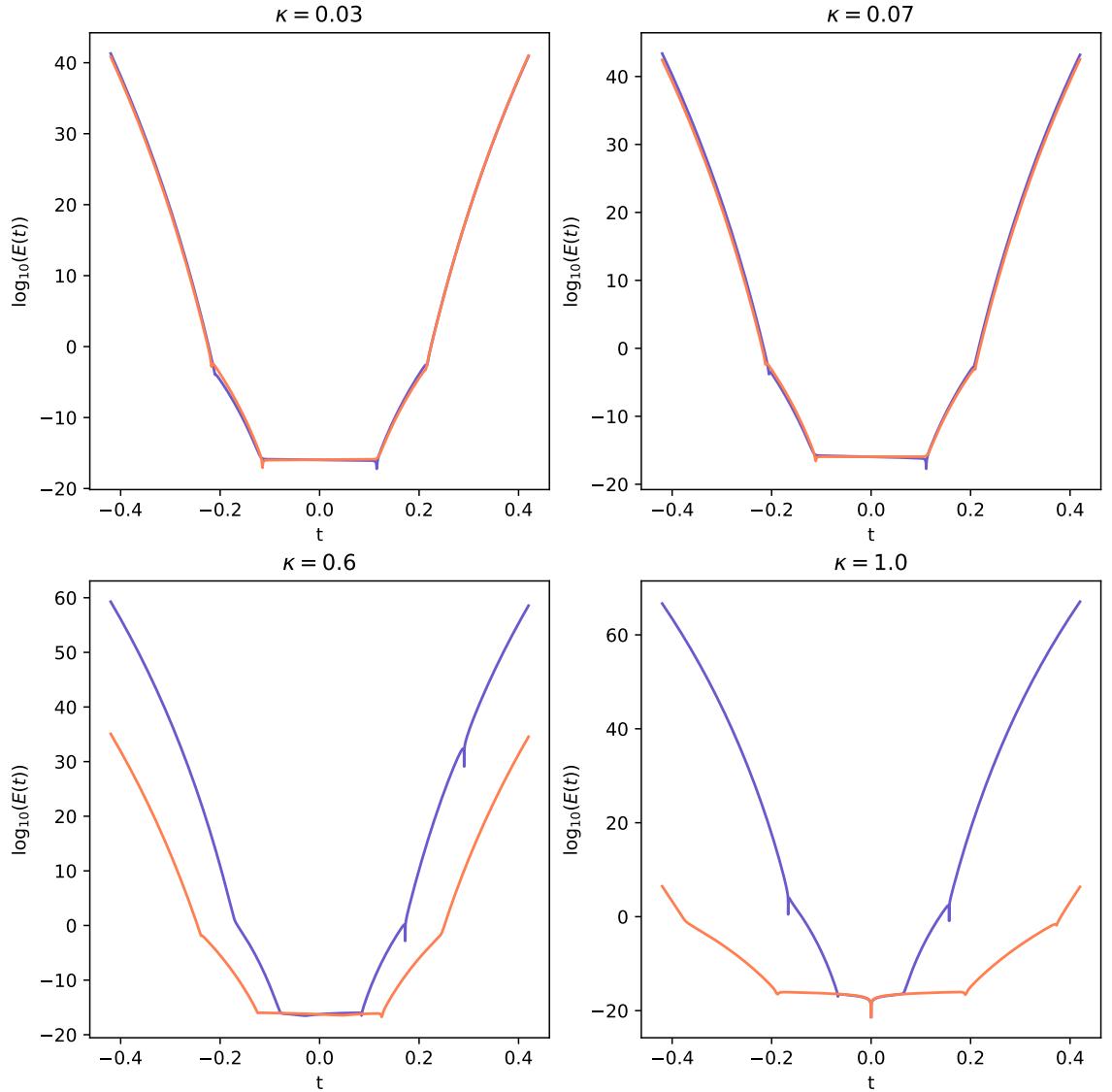
### 3. RESULTADOS

---



**Figura 3.10:** Variedades invariantes asociadas a una órbita de periodo tres en el mapeo estándar con diferentes valores de  $\kappa$ .

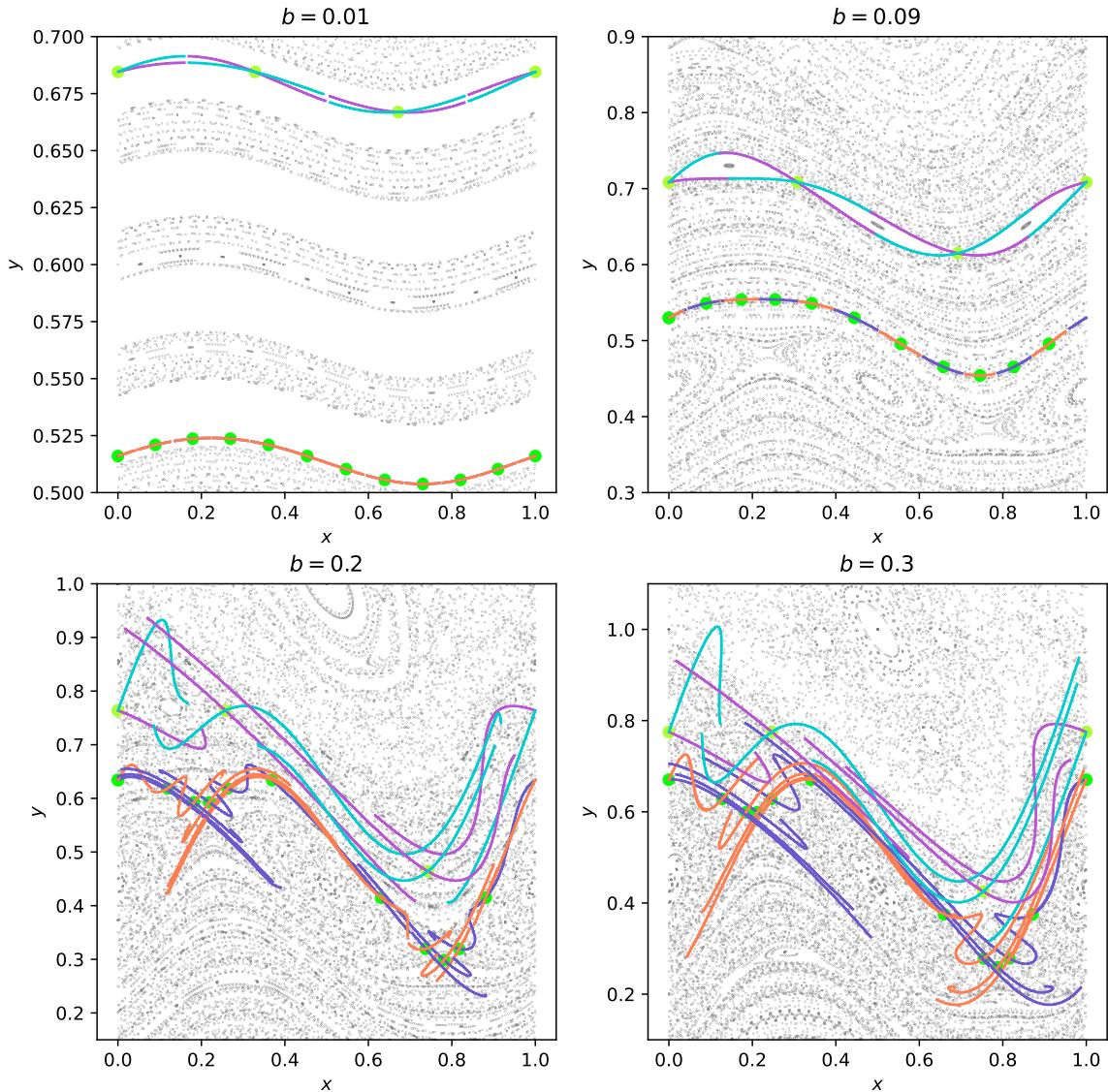
3.1 Órbitas periódicas hiperbólicas y sus variedades.



**Figura 3.11:** Errores asociados al cálculo de las variedades invariantes de la figura 3.10.

### 3. RESULTADOS

---



**Figura 3.12:** Variedades invariantes asociadas a dos órbitas de periodo tres y once respectivamente, para el mapeo (3.1), con diferentes valores del parámetro  $b$  y manteniendo  $a = 0.618$  fijo.

### 3.2. Conclusiones

Mediante el método descrito para encontrar órbitas periódicas es posible encontrar órbitas de periodo  $N$  en mapeos simplécticos de dos dimensiones usando una semilla adecuada y siempre que se cuente con las involuciones. Dado que el método usa internamente un método para encontrar raíces en una dimensión es importante tener en cuenta que se cumplan los requerimientos para que el método numérico converja. Las instrucciones de cómo puede modificarse el método o la presición con la que se calculan las órbitas puede encontrarse en <https://github.com/alvarezzeve/PeriodicOrbits2DMaps>.

Se presentó además una forma para determinar la estabilidad de las órbitas encontradas. Esta fórmula proviene de usar la regla de la cadena en la composición del mapeo con el que se esté trabajando y del hecho de que cualquier órbita de periodo  $N$  es un punto fijo del mapeo  $M^N$ . Usando esto y la forma en la que se determina la estabilidad de un punto fijo se implementó una forma fácil para determinar la estabilidad.

Para las órbitas periódicas hiperbólicas se aplicó el método de la parametrización para describir las variedades asociadas. El método ya había sido implementado previamente para puntos fijos hiperbólicos de mapeos de dos dimensiones por lo que solo fueron necesarios algunas modificaciones simples para usarlo en órbitas periódicas. Mediante este método fue posible describir el comportamiento de variedades asociadas a órbitas periódicas en cada uno de los puntos de la órbita.

El orden de la parametrización se puede elegir y modificar para que la variedad se pueda describir con un error aceptable en algún intervalo deseado. Sin embargo no es posible con solo aumentar el orden del polinomio describir una variedad en intervalos *grandes* (el tamaño depende del mapeo y de la órbita periódica), por lo que una alternativa es aplicar el mapeo a la parametrización, como una especie de iteración pero no de puntos en el espacio fase, sino directamente de la expresión polinómica de la variedad. La iteración de la variedad nos da un nuevo polinomio con diferentes coeficientes que pueden describir un intervalo mayor de la variedad.

Uniendo los métodos fue posible observar la dinámica de las órbitas periódicas y de las variedades asociadas cuando el parámetro  $\kappa$  en el mapeo estándar, o el parámetro  $b$  en el mapeo (3.1) van incrementándose.



## Bibliografía

---

- [1] A. Olvera and C. Simó. An obstruction method for the destruction of invariant curves. *Physica D*, 20:181–192. [1](#)
- [2] J. M. Greene. A method for determining a stochastic transition. *Journal of Mathematical Physics*, 20:1183–1201, 1979. [1](#)
- [3] R.L. Devaney. Reversible diffeomorphism and flows. *Transactions of the American Mathematical Society*, 218:89–113, 1976. [2](#)
- [4] Á. Haro, M. Canadell, J. Figueras, and A. Luque y J. Mondelo. *The Parameterization Method for Invariant Manifolds*, volume 195 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 1 edition, 2010. [5](#), [6](#)
- [5] Robert L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Adyson-Wesley, 2nd edition, 1989. [6](#)
- [6] Juergen Quandt. On the Hartman–Grobman theorem for maps. *Journal of Differential Equations*, 64:154–164, 1986. [6](#)
- [7] E. Alvarez. *Metodo de parametrización: Variedades estables e inestables en mapeos Hamiltonianos de dos dimensiones*. Universidad Nacional Autónoma de México, 2019. [9](#), [11](#), [12](#)
- [8] J.D Mireles James. Elementary example of the parametrization method; stable and unstable manifolds of the standard map. <http://cosweb1.fau.edu/~jmirelesjames/standardMapNotes.pdf>, 2007. [13](#)
- [9] Kenneth R. Meyer, Glen R. Hall, and Dan Offin. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, volume 90 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 2nd edition, 2009.
- [10] Gerald Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1 edition, 2011.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [11] James D. Meiss. *Differential Dynamical Systems*, volume 14 of *Mathematical modeling and computation*. Society for Industrial and Applied Mathematics ,Philadelphia, 1 edition, 2007.
- [12] X. Cabré, E. Fontich, and R. De la LLave. The parametrization method for invariant manifolds iii: overview and applications. *Journal of differential equations*, 218:444–515, 2005.
- [13] C. Simó. Some questions looking for answers in dynamical systems. *Discrete and continuous dynamical systems*, 38:6215–6239, 2018.
- [14] A. Berretti and G. Gentile. Periodic and quasi-periodic orbits for the standard map. *Commun. Math. Phys.*, 231:135–156, 2002.
- [15] R. Calleja, D. del Castillo-Negrete, D. Martinez del Rio, and A. Olvera. A new method to compute periodic orbits in general symplectic maps. *ResearchGate*, 38, 2020.
- [16] D. del Castillo-Negrete, J.M. Greene, and P.J. Morrison. Area preserving nontwist maps: periodic orbits and transition to chaos. *Physica D*, 91:1–23, 1996.
- [17] T. Ohsawa, A. M. Bloch, and M. Leok. Discrete Hamilton-Jacobi theory. *SIAM J. Control Optim.*, 49:1822–1856, 3009.
- [18] Edward Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 5th edition, 1993.
- [19] Herbert Goldstein, Charles P. Poole, and John L. Safko. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 3 edition, 2000.
- [20] Vladimir I. Arnol'd. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, volume 1 of *Analytic Mechanics*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1992.
- [21] Vladimir I. Arnol'd and Roger Cooke. *Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, 1991.
- [22] Jack K. Hale. *Ordinary Differential Equations*. Krieger Pub Co, 1980.
- [23] Ferdinand Verhulst. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, 1985.
- [24] Paul Banchard, Robert L. Devaney, and Glen R. Hall. *Ecuaciones diferenciales*. Thomson, 1th edition, 1998.
- [25] Stephen T. Thornton and Jerry B. Marion. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Thomson, 5th edition, 2004.
- [26] Static Arrays (paquete de julia). <https://github.com/JuliaArrays/StaticArrays.jl>. v0.7.2.

---

## BIBLIOGRAFÍA

- [27] Interval Root Finding (paquete de julia). <https://github.com/JuliaIntervals/IntervalRootFinding.jl>.
- [28] Taylor Series (paquete de julia). <https://github.com/JuliaDiff/TaylorSeries.jl>.
- [29] Julia Diff (paquete de julia). <https://github.com/JuliaDiff>.
- [30] Mateo Wirth. Invariant manifolds of dynamical systems and an application to space exploration. [http://pi.math.cornell.edu/~templier/junior/final\\_paper/Mateo\\_Wirth.pdf](http://pi.math.cornell.edu/~templier/junior/final_paper/Mateo_Wirth.pdf).
- [31] Calvin D. Ahlbrandt and Allan C. Peterson (auth.). *Discrete Hamiltonian Systems: Difference Equations, Continued Fractions, and Riccati Equations*. Kluwer Texts in the Mathematical Sciences 16. Springer US, 1 edition, 1996.
- [32] Ying-Cheng Lai and Tamás Tél. *Transient Chaos*, volume 173 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 1 edition, 2010.