

# Método de parametrización: Variedades estables e inestables en mapeos Hamiltonianos de dos dimensiones

Evelyn Álvarez Cruz

Facultad de Ciencias  
Universidad Nacional Autónoma de México

21 de febrero de 2019

# Resumen

1 Motivaciones.

2 El método de parametrización.

2.1 Ejemplo de aplicación al mapeo estándar.

3 Implementación

4 Ejemplos

4.1 El mapeo estándar

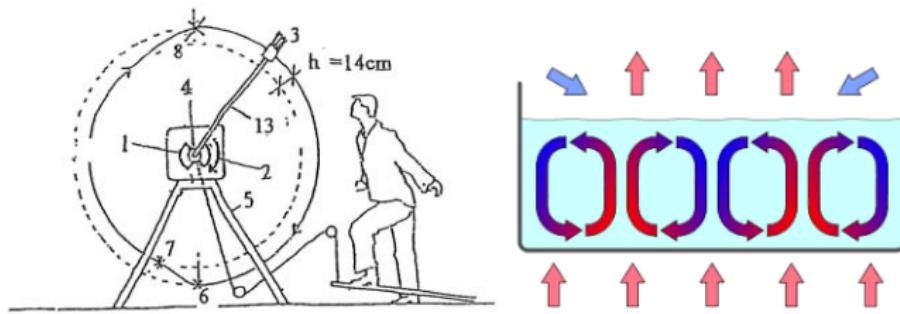
4.2 El mapeo de Hénon

4.3 El mapeo exponencial

5 Conclusiones y perspectivas

# Motivaciones

- Los mapeos discretos pueden describir sistemas físicos.



- Conocer la dinámica alrededor de puntos fijos.
- Conocer el comportamiento de las variedades estables e inestables asociadas a puntos fijos hiperbólicos.
- Los métodos mediante los cuales se calculan las variedades son iterativos.

# Método de parametrización

Sea  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un mapeo Hamiltoniano, el cual tiene un punto fijo hiperbólico  $\mathbf{x}_*$ .

Tomando la linealización:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n, \quad \mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_*) \quad (1)$$

donde

$$|\lambda_1| < 1 \quad \rightarrow \mathbf{u} \quad (2)$$

$$|\lambda_2| > 1 \quad \rightarrow \mathbf{v} \quad (3)$$

## Definición (Variedad estable e inestable)

$$W^s = \{x : f^n(x) \rightarrow x_* \text{ cuando } n \rightarrow \infty\} \quad (4)$$

$$W^u = \{x : f^n(x) \rightarrow x_* \text{ cuando } n \rightarrow -\infty\}. \quad (5)$$

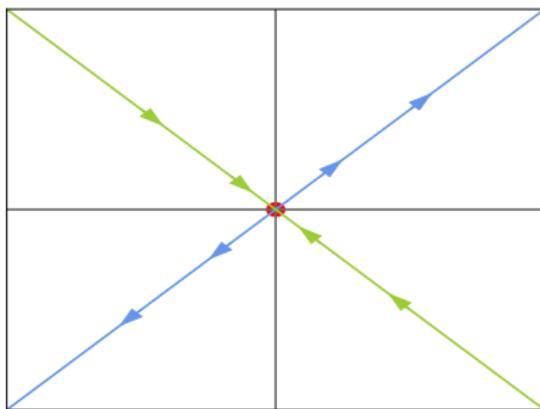


Figura: Punto fijo hiperbólico.

Sea  $I \subset W$  subconjunto de la variedad, para cualquier  $x_i \in I$  y  $n \in \mathbb{N}$

$$f^n(x_i) \in W \quad (6)$$

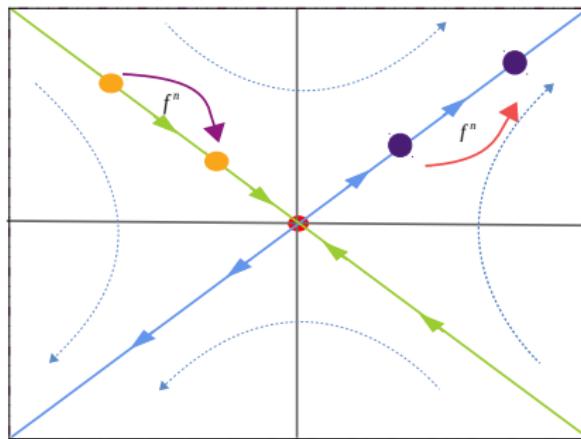
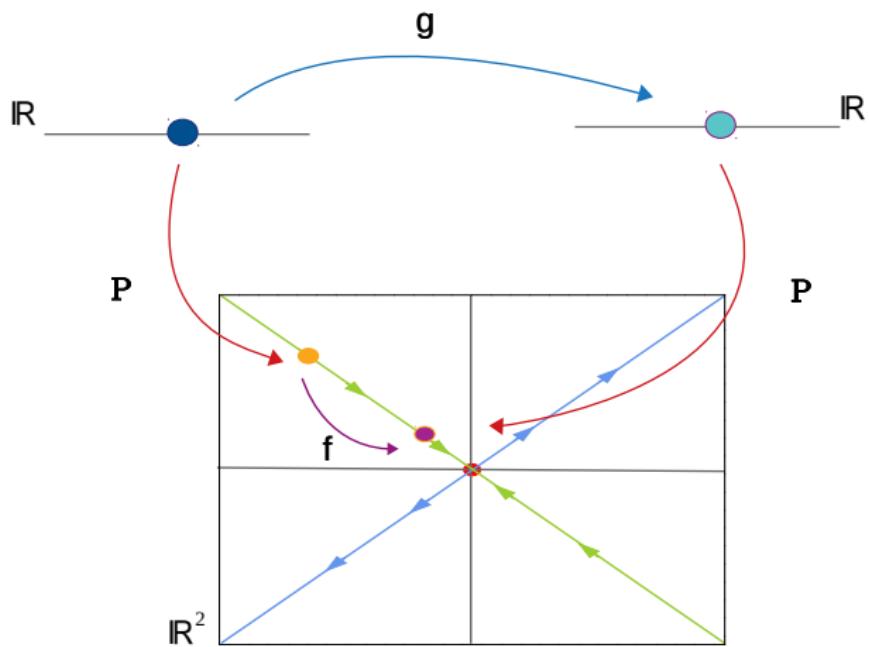


Figura: Comportamiento de las variedades.

Para describir la variedad usamos una parametrización  $\mathcal{P}$ .



A partir de esto podemos escribir

$$\mathbf{f} \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \circ g \quad (7)$$

usaremos el método gráfico.

$$g = \lambda t. \quad (8)$$

El error se evalúa como:

$$E_n(t) = \| \mathbf{f} \circ \mathcal{P}_n(t) - \mathcal{P}_n \circ g(t) \|_{\infty}. \quad (9)$$

## Ejemplo de aplicación: mapeo estándar

El *mapeo estándar* es

$$\mathbf{f}_k(\theta, p) = \begin{bmatrix} \theta + p \\ p + k \sin(\theta + p) \end{bmatrix} \quad \text{mód } (2\pi), \quad (10)$$

Puntos fijos:

- $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$
- $\mathbf{x}_2 = (0, \pi)$

Escribimos las variables  $(\theta, p)$

$$\theta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad (11)$$

y

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \quad (12)$$

tal que  $\mathcal{P}(t) := (\theta(t), p(t))$ .

Sustituyendo en el mapeo estándar

$$\mathbf{f}_k(\theta, p) = \begin{bmatrix} \theta(t) + p(t) \\ p(t) + k \sin[\theta(t) + p(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(\lambda t) \\ p(\lambda t) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

de forma explícita es

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n + k \sin(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n t^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n t^n \end{bmatrix}. \quad (14)$$

## Comparamos términos del mismo orden

- Orden cero:

$$a_0 + b_0 = a_0 \rightarrow b_0 = 0 \quad (15)$$

$$ka_0 + \frac{k}{3!}a_0^3 + \dots = 0 \rightarrow a_0 = 0 \quad (16)$$

- Orden uno:

$$a_1 + b_1 = a_1\lambda, \quad (17)$$

$$b_1 + ka_1 + b_1 = b_1\lambda. \quad (18)$$

- Orden dos:

$$a_2 + b_2 = a_2\lambda^2. \quad (19)$$

$$b_2 + ka_2 + b_2 = b_2\lambda^2. \quad (20)$$

Hay otra forma de calcular los coeficientes: mediante relaciones de recurrencia. Para ello se usa el truco de buscar que la ecuación (14) satisfaga una ecuación diferencial simple.

$$\alpha_{n+1} = \frac{-1}{n+1} \sum_{l=0}^n (l+1) \beta_{n-l} (a_{l+1} + b_{l+1}), \quad (21)$$

$$\beta_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^n (l+1) \alpha_{n-l} (a_{l+1} + b_{l+1}), \quad (22)$$

$$a_{n+1} = \frac{k}{(n+1)[(1-\lambda^{n+1})(1-\lambda^{n+1}+k)-k]} \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{n-l} (l+1) (a_{l+1} + b_{l+1}),$$

$$b_{n+1} = \frac{-k - \lambda^{n+1}}{(n+1)[(1-\lambda^{n+1})(1-\lambda^{n+1}+k)-k]} \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{n-l} (l+1) (a_{l+1} + b_{l+1}).$$

# Iterativo

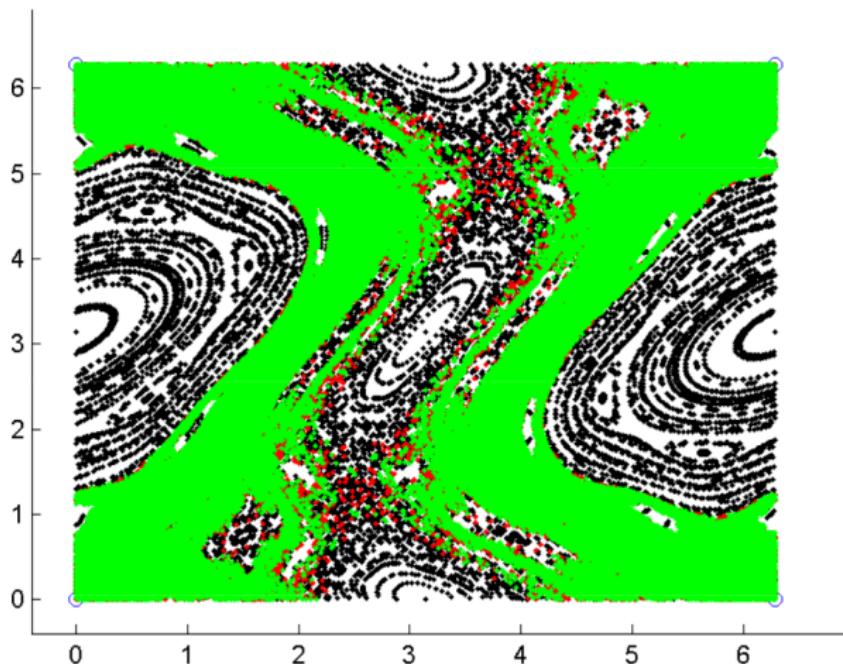


Figura: Variedades calculadas mediante iterar un conjunto de condiciones iniciales 300 veces. [12]

## Ejemplos de aplicación: mapeo estándar

Usando el punto fijo  $x_1 = (0, 0)$ .

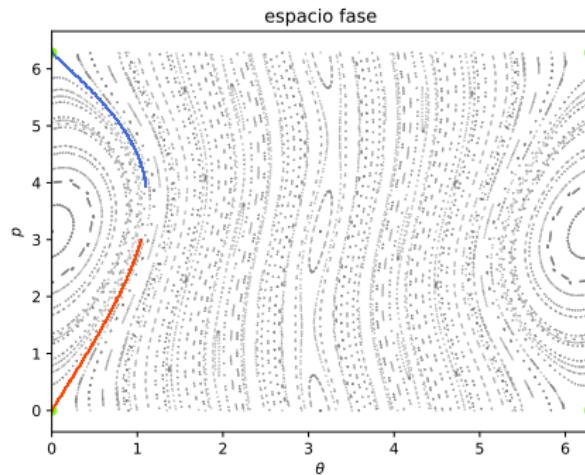


Figura:  $W^s, W^u$  de orden 25 en el mapeo estándar con  $k = 0.3$  en el intervalo  $t = [0., 3.]$

El error:

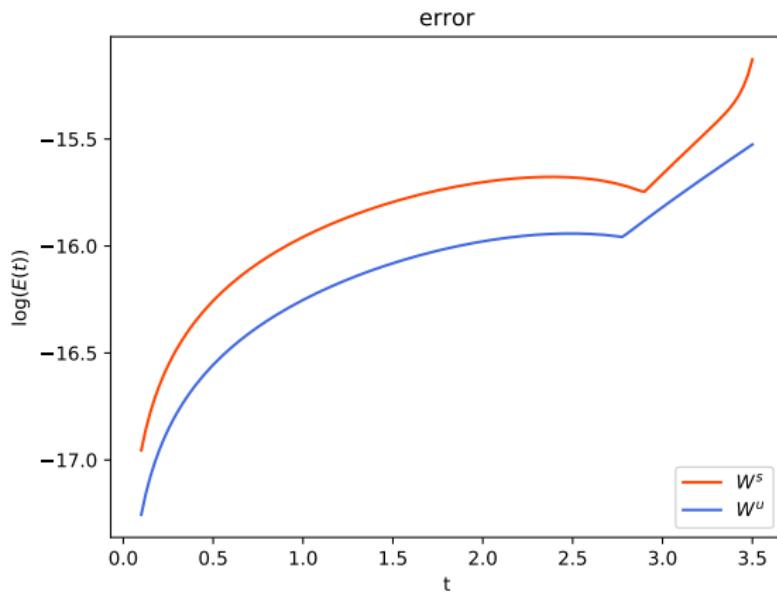
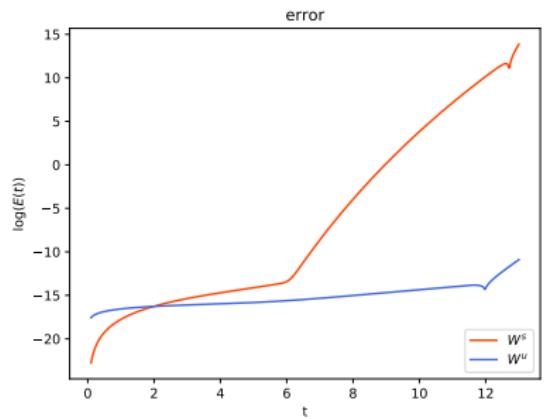
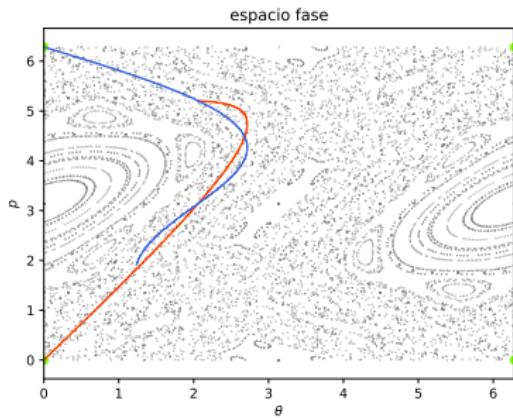


Figura: Error en las variedades de la figura 4.



**Figura:**  $W^s$ ,  $W^u$  de orden 80 en el mapeo estándar con  $k = 1.5$  en el intervalo  $t = [0., 13.]$  y su error.

Para observar cómo cambia el error con el orden de la parametrización.

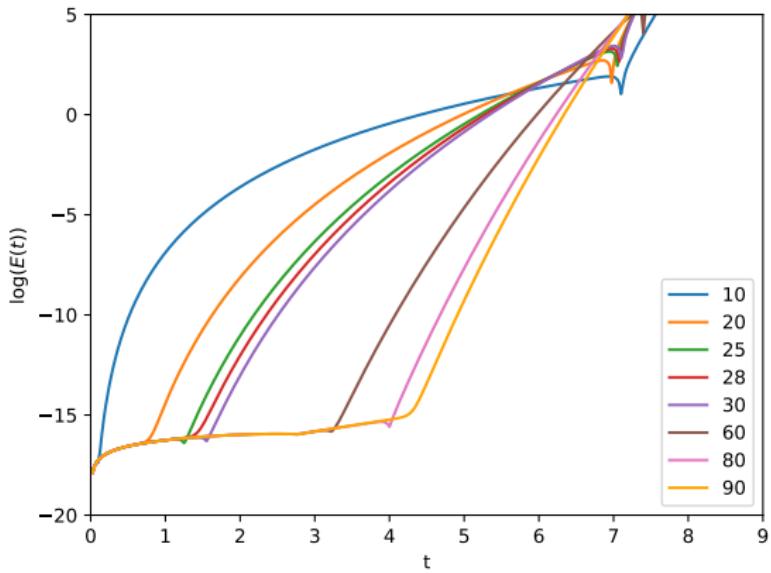


Figura: Curvas de error para diferentes órdenes en el mapeo estándar,  $k = 0.3$ .

## Usando números de presición extendida

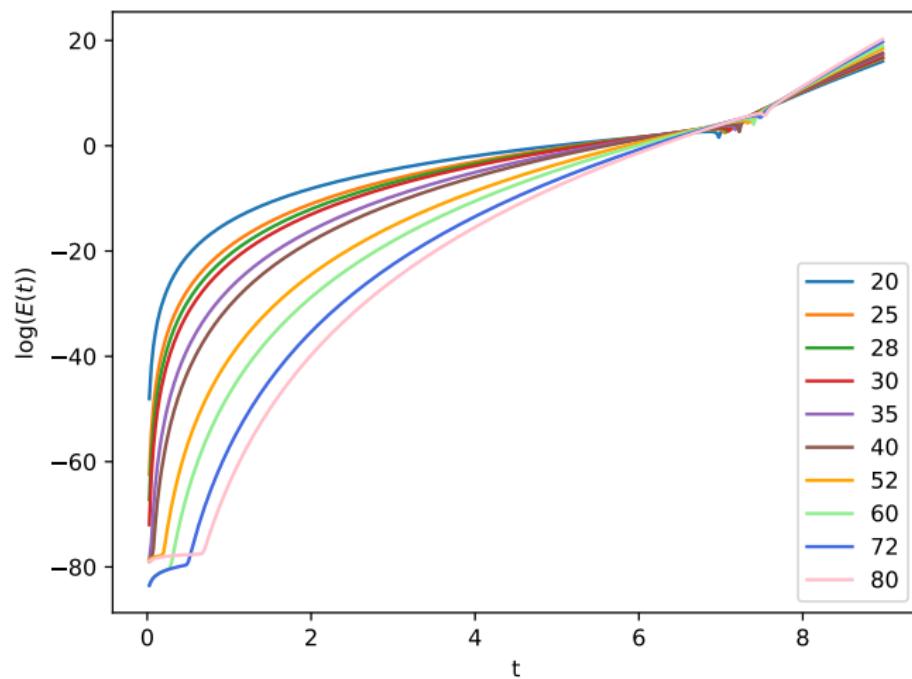
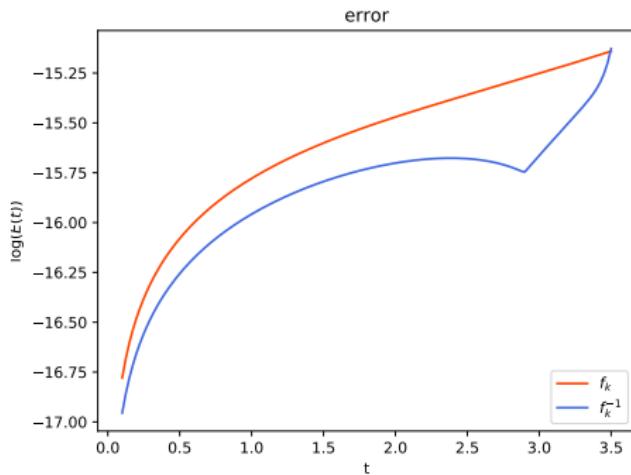


Figura: Curvas de error para diferentes órdenes usando precisión extendida

## Usando mapeo estándar inverso

$$f_k^{-1}(p, \theta) = \begin{bmatrix} p - k \sin(\theta) \\ \theta - p + k \sin \theta \end{bmatrix} \pmod{2\pi}, \quad (25)$$

podemos calcular la variedad estable



**Figura:** Error para las parametrizaciones usando el mapeo y el mapeo inverso con polinomios de orden 20 y  $k = 0.3$ .

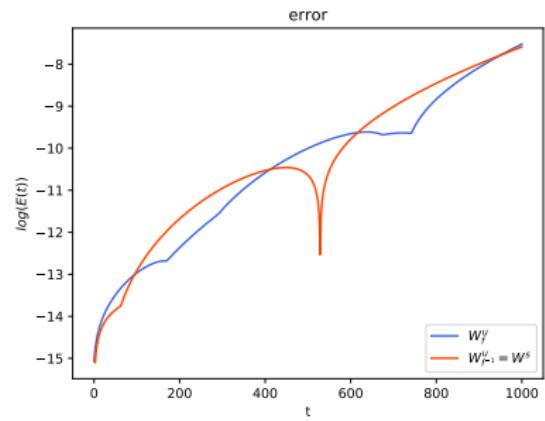
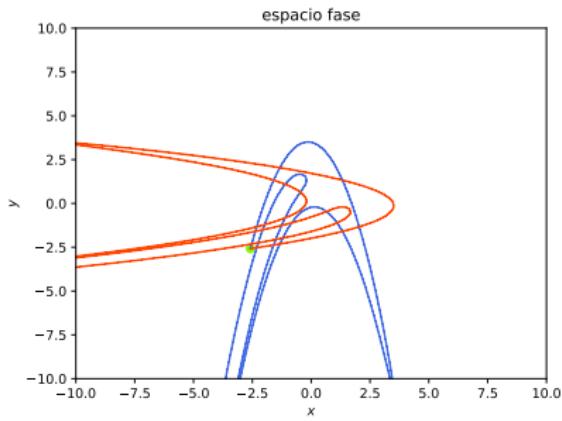
# Mapeo de Hénon

El mapeo de Hénon se define como:

$$\mathbf{f}_{a,b}(x, y) = \begin{pmatrix} a - by - x^2 \\ x \end{pmatrix}, \quad (26)$$

y su inverso:

$$\mathbf{f}_{a,b}^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ (a - x - y^2)/b \end{pmatrix}. \quad (27)$$



**Figura:**  $W^u$  y  $W^s$  de orden 45 en el intervalo  $t = [0., 900.]$  para el mapeo de Hénon con  $a = 1.5, b = 1$ .

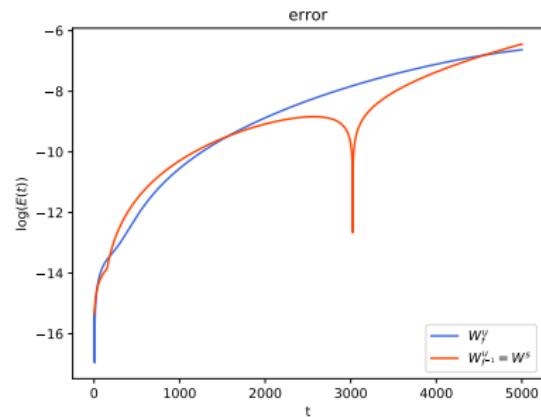
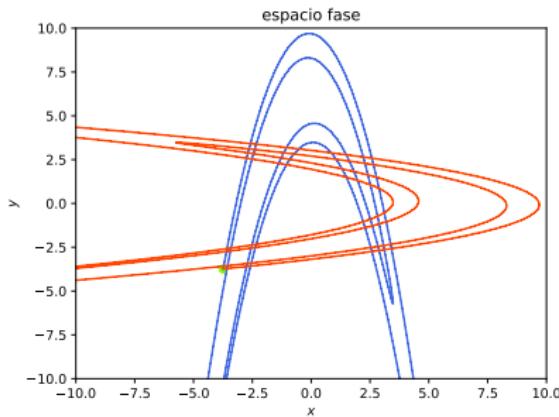


Figura:  $W^u$ ,  $W^s$  de orden 78 en el intervalo  $t = [0., 4000.0]$  para el mapeo de Hénon con  $a = 6.5, b = 1..$

# Mapeo exponencial

El mapeo exponencial se define como:

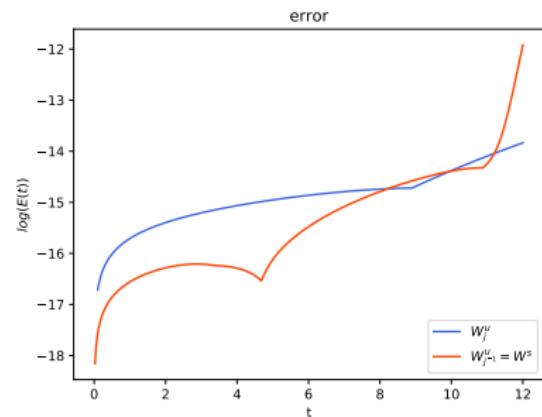
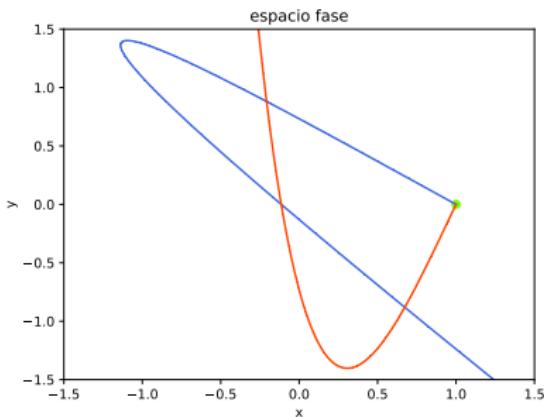
$$\mathbf{j}_a(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ y + af(x + y) \end{pmatrix}, \quad f(x) = x(x - 1)e^{-x}. \quad (28)$$

y su inverso

$$\mathbf{j}_a^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} x - y + ax(x - 1)e^{-x} \\ y - ax(x - 1)e^{-x} \end{pmatrix} \quad (29)$$

Los puntos fijos del sistema son:

- $\mathbf{x}_0 = (1, 0) \rightarrow$  hiperbólico
- $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$ 
  - ▶ elíptico si  $a < 4$
  - ▶ inverso hiperbólico si  $a \geq 4$



**Figura:**  $W^s$  y  $W^u$  de orden 93 en el intervalo  $t = [0., 6.5]$ , con  $a = 5.7$  en el punto fijo  $x_0$ .

# Convergencia

Usando el criterio de Hadamard

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}, \quad (30)$$

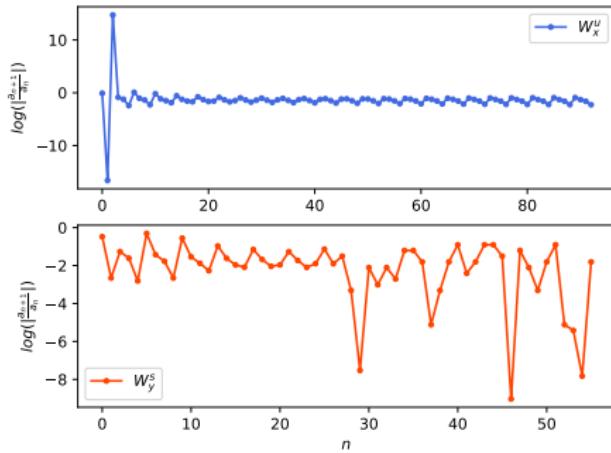


Figura: Convergencia de Hadamard asociada a las variedades mostradas en la figura 12.

Usando el criterio de los tres términos:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left[ i \left( \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) - (i-1) \left( \frac{a_i}{a_{i-1}} \right) \right]. \quad (31)$$

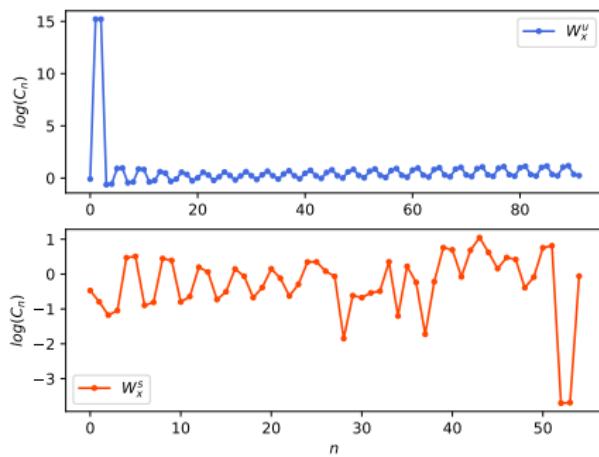


Figura: Convergencia de tres términos asociada a las variedades en la figura 12.

## Existencia de puntos homoclínicos

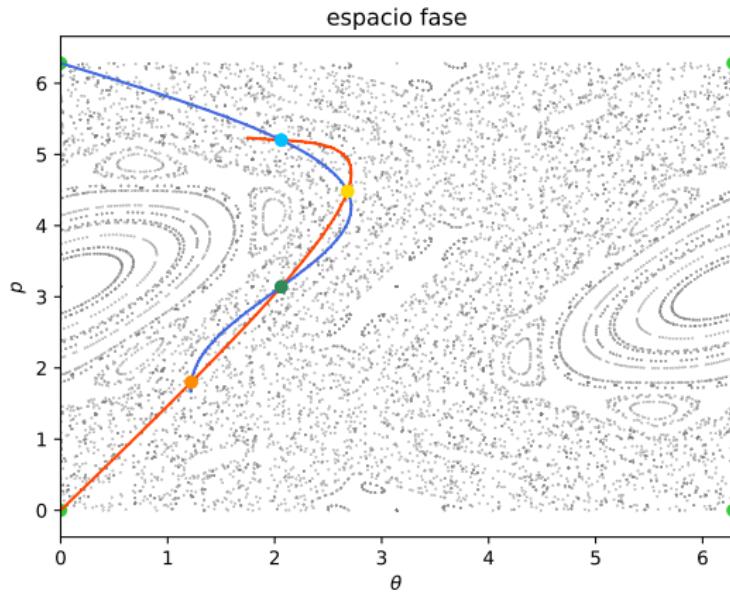
Siendo que el resultado son polinomios, se puede aplicar el método de Newton, o cualquier otro, en dos dimensiones para resolver  $\mathcal{P}^u = \mathcal{P}^s$ . Concretamente se tienen

$$W^s(t) = (\mathcal{P}_x(t), \mathcal{P}_y(t)), \quad W^u(\tau) = (\mathcal{P}_x(\tau), \mathcal{P}_y(\tau)) \quad (32)$$

$$W^s(t) = W^u(\tau), \quad (33)$$

la intersección se encontrará en  $I_t \times I_\tau$ . En el espacio fase la intersección se verá como el producto cartesiano de  $W^s(I_t) \times W^u(I_\tau)$  formando una sección en la que se garantiza hay un punto homoclínico o heteroclínico.

# Estándar



**Figura:** Cruces de  $W^u$ ,  $W^s$  de orden 120 para el mapeo estándar con  $k = 1.5$ , usando una tolerancia de  $10^{-6}$ .

# Hénon

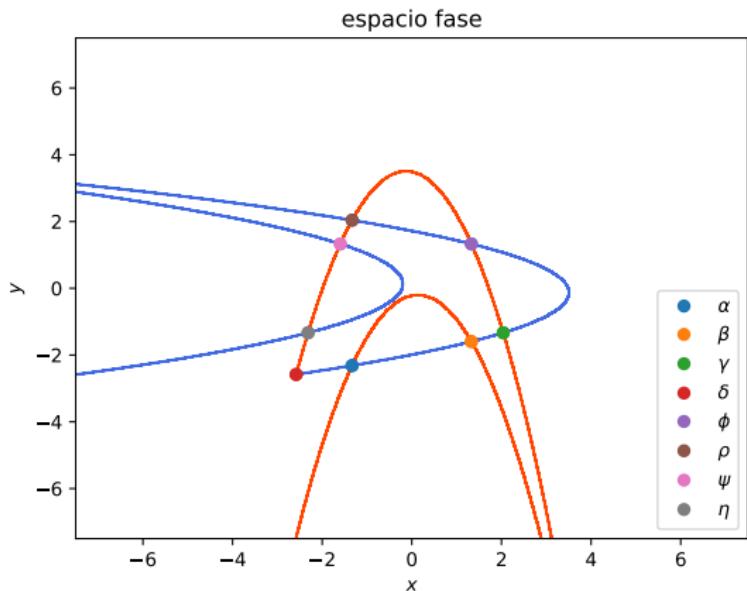
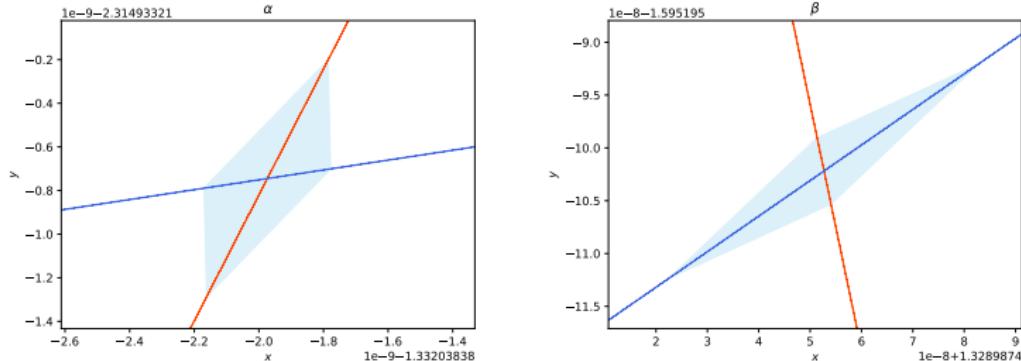
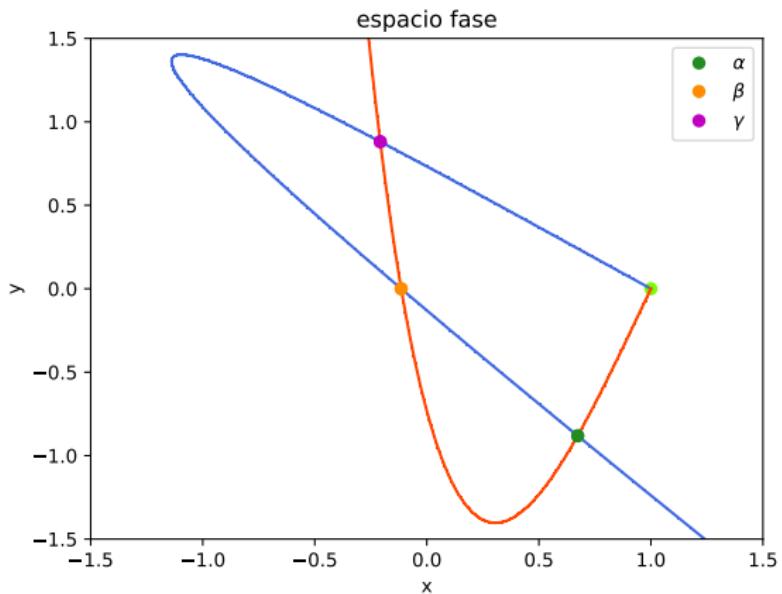


Figura: Cruces de  $W^u$ ,  $W^s$ , con una tolerancia de  $10^{-6}$ .

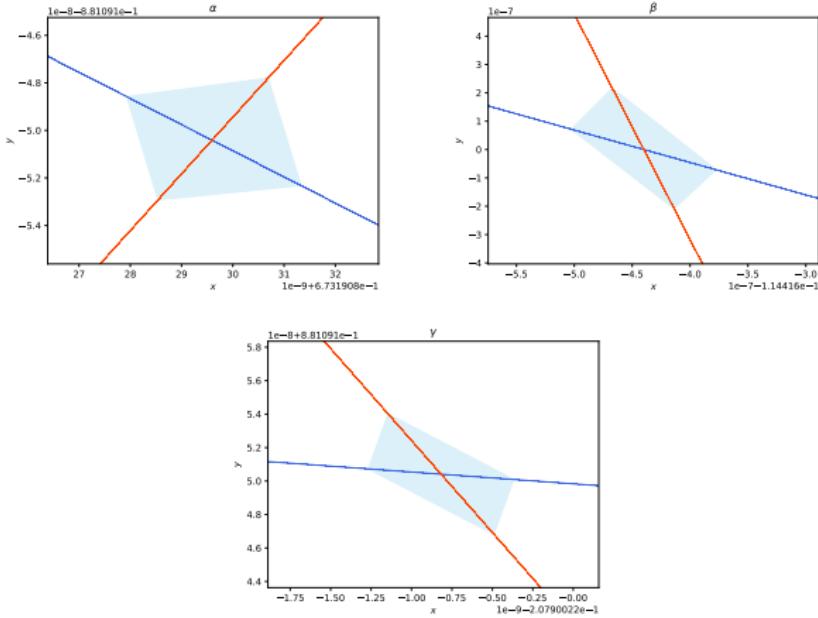


**Figura:** Intervalos de intersecciones entre las variedades estable e inestable del mapeo de Hénon.

# Exponencial

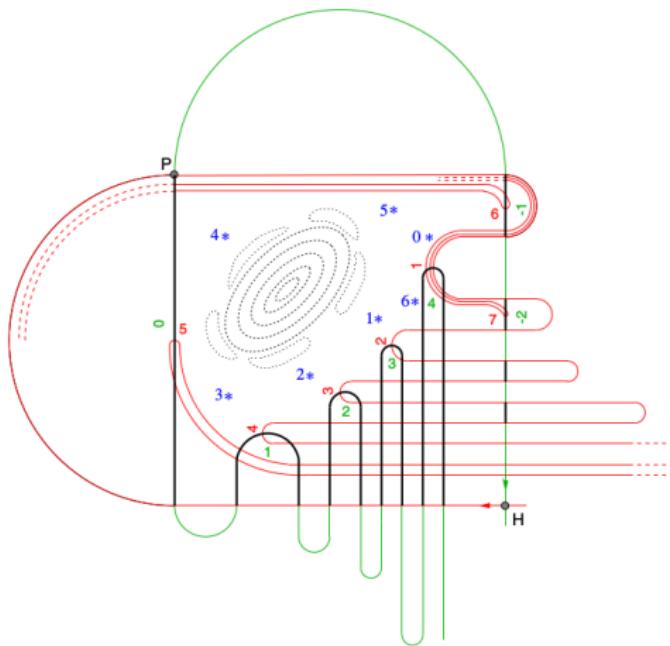


**Figura:** Intersecciones en el mapeo exponencial con  $a = 5.7$ , con una tolerancia de  $10^{-6}$ .



**Figura:** Intervalo de intersección de las variedades estable e inestable en el mapeo exponencial.

# Rectángulo fundamental



**Figura:** Diagrama ilustrativo de la topología de una herradura en un sistema Hamiltoniano de dos dimensiones.[8]

Reescribiendo la ecuación de invariancia (7) para el caso de la variedad estable, se obtiene:

$$f_{a,b}^{-1}(W_0^s(t)) = W_0^s(\lambda^m t). \quad (34)$$

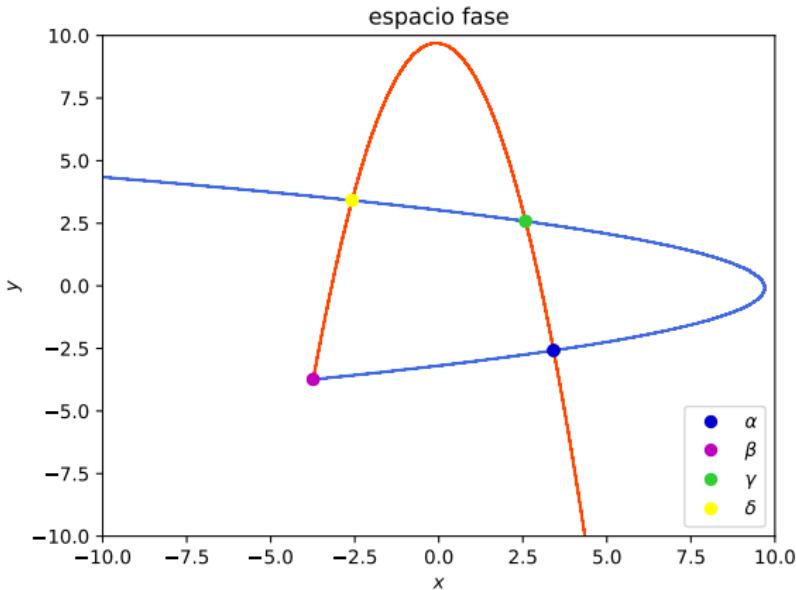
Aplicando el mapeo de Hénon (26) a la ecuación (34) resulta

$$W_0^s(t) = f_{a,b}(W_0^s(\lambda^m t)), \quad (35)$$

que se reescribe como (35),

$$W_0^s\left(\frac{t}{\lambda^m}\right) = f_{a,b}(W_0^s(t)). \quad (36)$$

Como  $|\lambda^m| < 1$  la ecuación (36) muestra que aplicar el mapeo es análogo a tener la variedad estable evaluada en un valor mayor del parámetro, puesto que  $1/\lambda^m > 1$ .



**Figura:** Variedades estable e inestable de orden 250, para el mapeo de Hénon con  $a = 6.5$ ,  $b = 1.$ , en el intervalo  $t = [0., 100.]$ . El punto  $\omega$  denota el punto fijo mientras que  $\alpha, \beta, \gamma$  son las primeras intersecciones de las variedades.

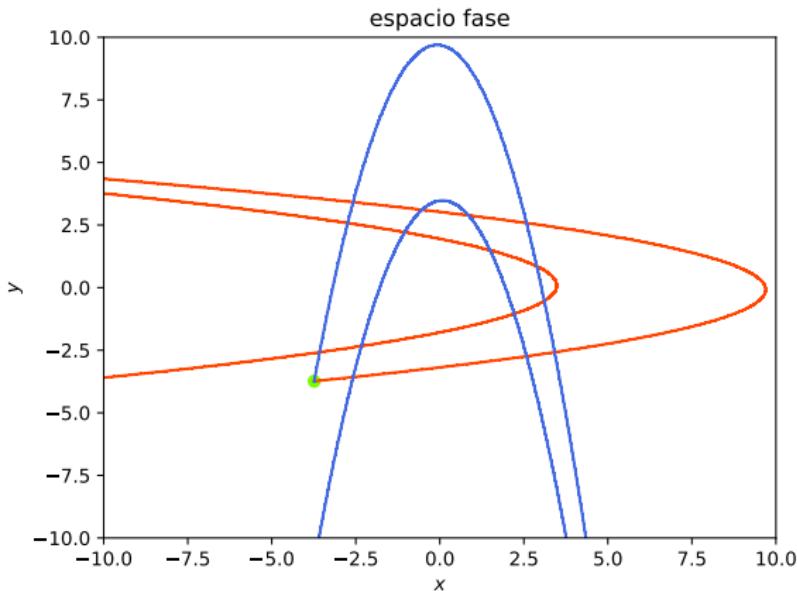


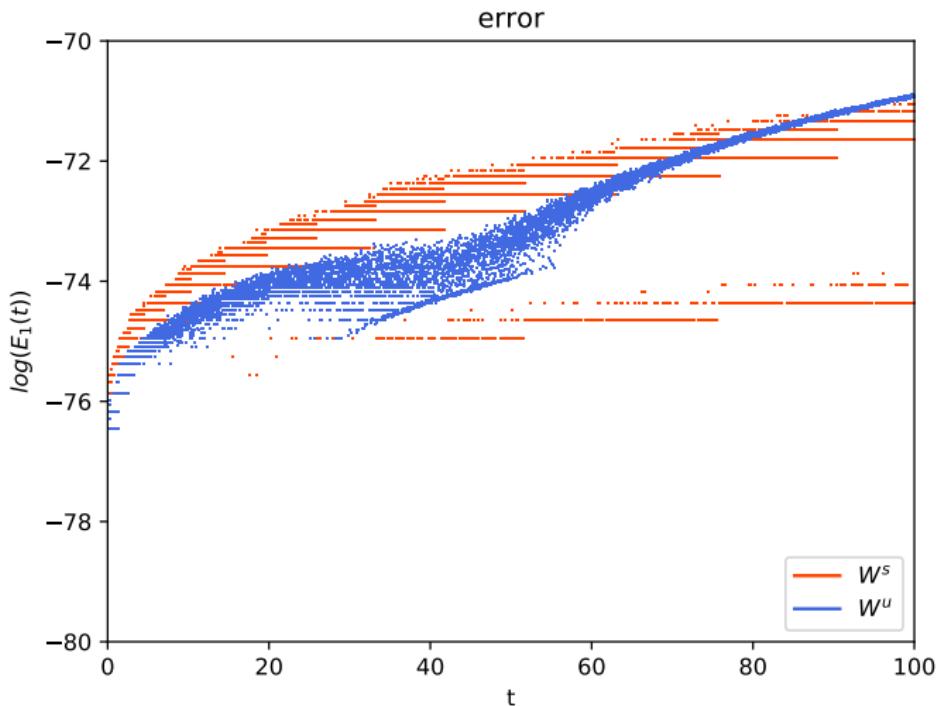
Figura: Primera aplicación del mapeo a los polinomios de orden 250,  $t = [0, 100]$ .

Para saber cuál es este error se usó la ecuación (36),

$$E_1(t) = \left\| W_0^s \left( \frac{t}{\lambda^m} \right) - f_{a,b}(W_0^s(t)) \right\|_{\infty}, \quad (37)$$

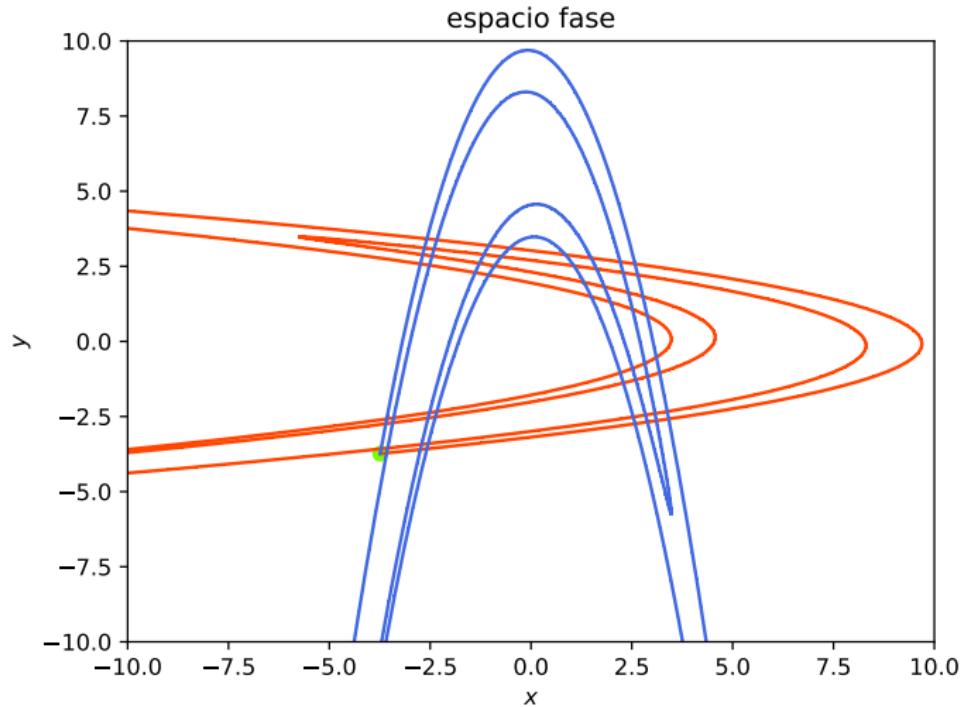
generalizando obtenemos

$$E_n(t) = \left\| (f_k)^n \left( W_0^s \left( \frac{t}{\lambda^m} \right) \right) - (f_k)^{n-1}(W_0^s(t)) \right\|_{\infty}. \quad (38)$$



**Figura:** Error en el polinomio que resulta de aplicar el mapeo a la parametrización de orden 250.

La segunda aplicación del mapeo a los polinomios,  
 $(W_{x2}^s, W_{y2}^s) = f_{a,b}(W_{x1}^s, W_{y1}^s)$



## La tercera aplicación

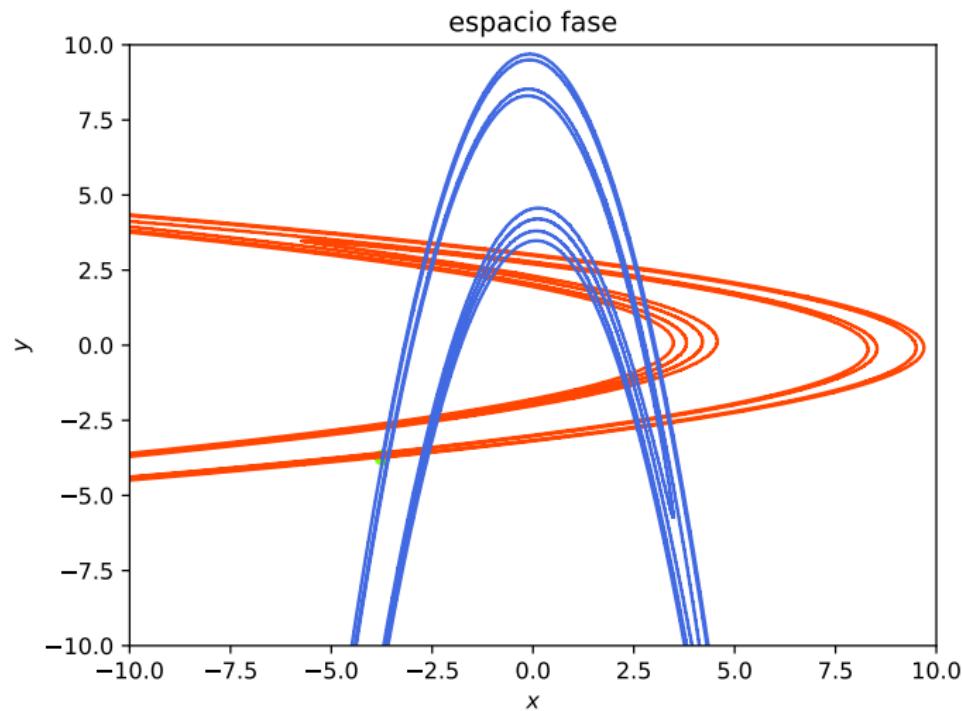


Figura: Tercer aplicación del mapeo a los polinomios de orden 250.

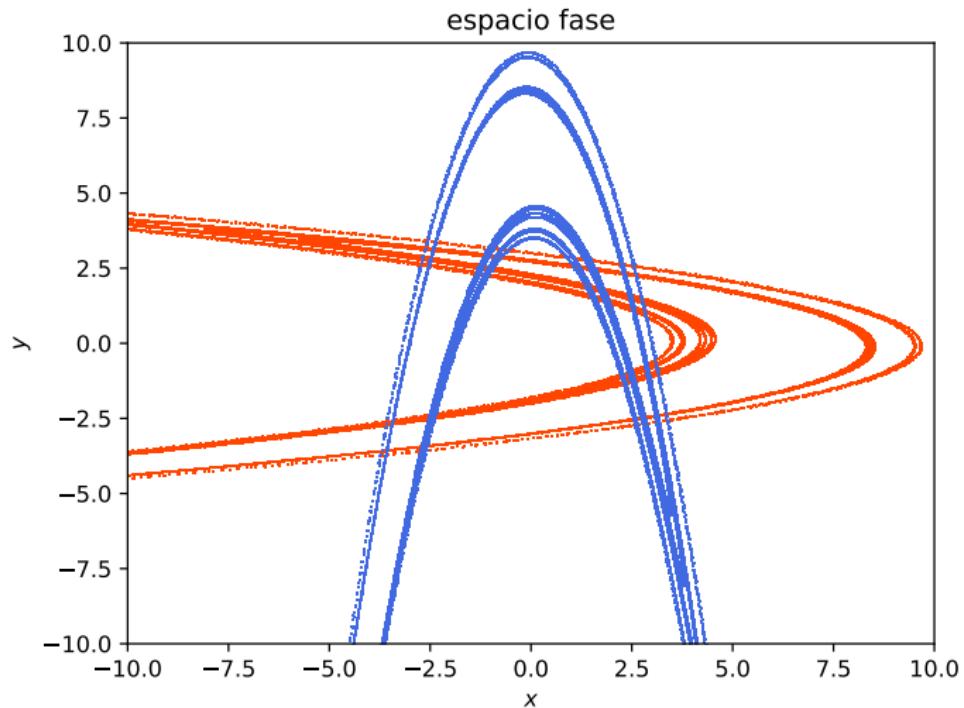
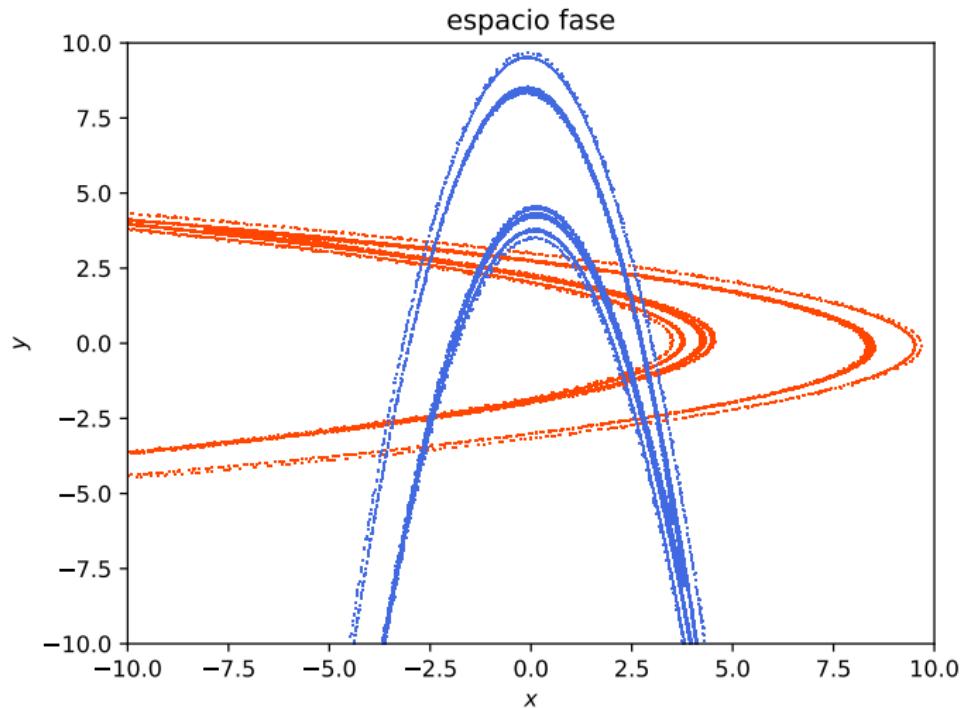


Figura: Cuarta aplicación del mapeo a los polinomios de orden 250.



**Figura:** Quinta aplicación del mapeo a los polinomios de orden 250.

## Conclusiones y perspectivas

- El método es eficiente para calcular variedades estables e inestables en comparación con los métodos iterativos.
- Se puede estudiar más sobre el comportamiento de las variedades.
- Es posible calcular puntos homoclínicos y heteroclínicos.
- Mediante la iteración de la parametrización bajo el mapeo es posible obtener más sobre las variedades.
- Generalizar el método para otro tipo de sistemas.
- Utilizar cómputo validado.

# Bibliografía |

-  Interval Arithmetic (paquete de julia).  
[https://juliaintervals.github.io/IntervalArithmetic.jl/stable/.](https://juliaintervals.github.io/IntervalArithmetic.jl/stable/)
-  Interval Root Finding (paquete de julia).  
[https://github.com/JuliaIntervals/IntervalRootFinding.jl.](https://github.com/JuliaIntervals/IntervalRootFinding.jl)
-  Static Arrays (paquete de julia).  
[https://github.com/JuliaArrays/StaticArrays.jl.](https://github.com/JuliaArrays/StaticArrays.jl)  
v0.7.2.
-  Validated Numerics (paquete de julia).  
[https://github.com/JuliaIntervals/ValidatedNumerics.jl.](https://github.com/JuliaIntervals/ValidatedNumerics.jl)

## Bibliografía II

-  J. Figueras A. Luque y J. Mondelo Á. Haro, M. Canadell.  
*The Parameterization Method for Invariant Manifolds*, volume 195 of  
*Applied Mathematical Sciences*.  
Springer, 1 edition, 2010.
-  Vladimir I. Arnol'd.  
*Mathematical Methods of Classical Mechanics*, volume 1 of *Analytic Mechanics*.  
Springer-Verlag, 2nd edition, 1992.
-  C. Lipp y T.H. Seligman C. Jung.  
The inverse scattering problem for chaotic hamiltonian systems.  
*Annals of Physics*, 275:151–189, 1999.

## Bibliografía III

-  O. Merlo y T.H. Seligman C. Jung, C. Mejía-Monasterio.  
*Self-pushing effect in chaotic scattering.*  
*New Journal of Physics*, 6, 2004.
-  Robert L. Devaney.  
*An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.*  
Addison-Wesley, 2nd edition, 1989.
-  Jack K. Hale.  
*Ordinary Differential Equations.*  
Krieger Pub Co, 1980.
-  Charles P. Poole y John L. Safko Herbert Goldstein.  
*Classical Mechanics.*  
Addison-Wesley, 3 edition, 2000.

## Bibliografía IV



J.D Mireles James.

Elementary example of the parametrization method; stable and unstable manifolds of the standard map.

[http:](http://cosweb1.fau.edu/~jmirelesjames/standardMapNotes.pdf)

[//cosweb1.fau.edu/~jmirelesjames/standardMapNotes.pdf](http://cosweb1.fau.edu/~jmirelesjames/standardMapNotes.pdf),  
2007.



J.D. Mireles James y Christian Reinhardt Jan Bouwe van den Berg.  
Computing (un)stable manifolds with validated error bounds:  
non-resonant and resonant spectra.

[http://cosweb1.fau.edu/~jmirelesjames/parametrization\\_  
draft9.pdf](http://cosweb1.fau.edu/~jmirelesjames/parametrization_draft9.pdf), 2015.

## Bibliografía V



Glen R. Hall y Dan Offin Kenneth R. Meyerb.

*Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, volume 90 of *Applied Mathematical Sciences*.  
Springer, 2nd edition, 2009.



James D. Meiss.

*Differential Dynamical Systems*, volume 14 of *Mathematical modeling and computation*.

Society for Industrial and Applied Mathematics ,Philadelphia, 1 edition, 2007.



Edward Ott.

*Chaos in Dynamical Systems.*

Cambridge University Press, 5th edition, 1993.

## Bibliografía VI

-  Robert L. Devaney y Glen R. Hall Paul Banchard.  
*Ecuaciones diferenciales.*  
Thomson, 1th edition, 1998.
-  Juergen Quandt.  
On the Hartman–Grobman theorem for maps.  
*Journal of Differential Equations*, 64:154–164, 1986.
-  R.Baker Kearfott y Michael J. Cloud Ramon E. More.  
*Introduction to Interval Analysis.*  
SIAM, 2009.
-  A. J. Insel y L.E. Spence Stephen H. Friedberg.  
*Algebra lineal.*  
Publicaciones Culturales S.A., 1 edition.

## Bibliografía VII



Gerald Teschl.

*Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems.*

Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society  
Providence, Rhode Island, 1 edition, 2011.



Anthony M. Bloch y Melvin Leok Tomoki Ohsawa.

Discrete Hamilton-Jacobi theory.

*SIAM J. Control Optim.*, 49:1822–1856, 2009.



W. Tucker.

*Validated Numerics: A short introduction to Rigorous Computations.*

Princeton University Press.



Ferdinand Verhulst.

*Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems.*

Springer, 1985.

## Bibliografía VIII



Mateo Wirth.

Invariant manifolds of dynamical systems and an application to space exploration.

[http://pi.math.cornell.edu/~templier/junior/final\\_paper/Mateo\\_Wirth.pdf](http://pi.math.cornell.edu/~templier/junior/final_paper/Mateo_Wirth.pdf).



Calvin D. Ahlbrandt y Allan C. Peterson (auth.).

*Discrete Hamiltonian Systems: Difference Equations, Continued Fractions, and Riccati Equations.*

Kluwer Texts in the Mathematical Sciences 16. Springer US, 1 edition, 1996.



B. Rückerl y C. Jung.

Hierarchical structure in the chaotic scattering off a magnetic dipole.

*J. Phys A: Math.*, 27:6741–6758, 1994.

## Bibliografía IX

-  B. Rückerl y C. Jung.  
Scaling properties of a scattering system with an incomplete horseshoe.  
*J. Phys A: Math.*, 27:55–77, 1994.
-  Y.F. Chang y G. Corliss.  
Ratio-like and recurrence relation tests for convergence of series.  
*J. Inst. Maths Applies.*, 25:349–359, 1980.
-  Stephen T. Thornton y Jerry B. Marion.  
*Classical Dynamics of Particles and Systems*.  
Thomson, 5th edition, 2004.
-  Vladimir I. Arnol'd y Roger Cooke.  
*Ordinary Differential Equations*.  
Springer-Verlag, 1991.

# Bibliografía X



Tamás Tél Ying-Cheng Lai.

*Transient Chaos*, volume 173 of *Applied Mathematical Sciences*.  
Springer, 1 edition, 2010.