Afirmación: Sea $M:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ un mapeo simpléctico, no-twist tal que M se puede factorizar como

$$M = I_1 I_0$$

con I_1, I_0 involuciones tales que

$$I_0 M = M I_0 \quad , \quad I_1 M = M I_1$$

$$I_0^2 = 1 \quad , \quad I_1^2 = 1$$

Sea $J_1 = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid I_1 v = v \}$ y $J_0 = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid I_0 v = v \}$

Si $v_0 \in J_0$ es tal que

$$M^N v_0 \in J_0 \Rightarrow v_0 \text{ es de periodo } 2N.$$

Demostración: Queremos probar que $M^{2N} v_0 = v_0$

$$M^{2N} v_0 = M^N M^N v_0 = M^{N-1} M M^{N-1} M v_0$$

[usando que $M = I_1 I_0$]

$$M^{2N} v_0 = M^{N-1} I_1 I_0 M^{N-1} I_1 I_0 v_0$$

[usando que v_0 es punto fijo de I_0]

$$M^{2N} v_0 = M^{N-1} I_1 I_0 M^{N-1} I_1 v_0$$

[usando que $M^N v_0 = v_n \in J_0$ y que $M^{N-1} = M^N M^{-1}$]

$$M^{2N} v_0 = M^{N-1} I_1 I_0 M^N M^{-1} I_1 v_0$$

$$= M^{N-1} I_1 M^N M^{-1} I_1 v_0 = M^{N-1} I_1 M^{N-1} I_1 v_0$$

[Usando que $M = I_1 I_0$ tenemos que. $I_1^{-1} M = I_0 \to I_1^2 I_1^{-1} M = I_1^2 I_0$

$\to I_1 \underbrace{I_1 I_1^{-1}}_{Id} M = I_0 \to I_1 M = I_0 \ldots (1)$

Análogamente $M = I_1 I_0 \to M I_0^{-1} = I_1 \to M I_0^{-1} I_0^2 = I_1 I_0^2$

$\to M I_0 = I_1 \ldots (2)$]

$$M^{2N} v_0 = M^{N-2} M I_1 M M^{N-2} I_1 v_0 = M^{N-2} M I_0 M^{N-2} I_1 v_0 = M^{N-2} I_1 M^{N-2} I_1 v_0$$

[Usando de nuevo (1) y (2)]

$$M^{2N} v_0 = M^{N-3} M I_1 M M^{N-3} I_1 v_0 = M^{N-3} M I_0 M^{N-3} I_1 v_0 = M^{N-3} I_1 M^{N-3} I_1 v_0$$

haciendo esto de manera sucesiva llegamos a que

$$M^{2N} v_0 = M I_1 M I_1 v_0$$

[aplicando de nuevo (1)]

$$M^{2N} v_0 = M I_0 I_1 v_0 = I_1 I_0 I_0 I_1 v_0 = I_1 I_1 v_0 = v_0 \quad \blacksquare$$

Afirmación: Análogamente para si $v_0 \in J_1$

Demostración: Tomando ahora $M^{-1} = I_0 I_1$ tenemos que:

$$M^{-2N} v_0 = M^{-N} M^{-N} v_0 = M^{-N-1} M^{-1} M^{-N-1} M^{-1} v_0$$

$$= M^{-N-1} I_0 I_1 M^{-N-1} I_0 I_1 v_0 = M^{-N-1} I_0 I_1 M^{-N-1} I_0 v_0$$

$$= M^{-N-1} I_0 I_1 M^{-N} M^{-1} I_0 v_0 = M^{-N-1} I_0 M^{-N-1} I_0 v_0$$

$$= M^{-N-2} M^{-1} I_0 M^{-1} M^{-N-2} I_0 v_0$$

$$= M^{-N-2} I_1 M^{-1} M^{-N-2} I_0 v_0$$

$$= M^{-N-2} I_0 M^{-N-2} I_0 v_0$$

$\vdots$ sucesivamente

$$= M^{-1} I_0 M^{-1} I_0 v_0$$

$= M^{-1} I_1 I_0 v_0$ usando M^{-1}

$= I_0 I_1 I_1 I_0 v_0 = v_0$ $\therefore$ v_0 es de periodo $2N$.

Afirmación:

Afirmación: Sea $M:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ un mapeo simpléctico, no-twist tal que M se puede factorizar como

$$M = I_1 I_0$$

con I_1, I_0 involuciones tales que

$$I_0 M = M I_0 \quad , \quad I_1 M = M I_1$$

$$I_0^2 = 1 \ , \ I_1^2 = 1$$

Sea $\mathcal{J}_1 = \{ v\in\mathbb{R}^2 \mid I_1 v = v \}$ y $\mathcal{J}_0 = \{ v\in\mathbb{R}^2 \mid I_0 v = v \}$

Si $v_0 \in \mathcal{J}_1$ es tal que

$$M^N v_0 = v_N \in \mathcal{J}_0 \Rightarrow \quad v_0 \text{ es de periodo } 2N\pm 1$$

Demostración: Queremos ver que $M^{2N\pm1} v_0 = v_0$ Con (+)

$$M^{2N+1} v_0 = M^{2N} M v_0 = M^N M^N M v_0 = M^N M M^N v_0$$

usando que $M = I_1 I_0$ y que $I_0 M^n = M^N$

$$M^{2N+1} v_0 = M^N I_1 I_0 M^N v_0 = M^N I_1 M^N v_0$$

$$= M^{N-1} M I_1 M M^{N-1} v_0$$

$$M^{2N+1} v_0 = M^{N-1} M I_0 M^{N-1} v_0$$ } usando que $I_1 M = I_0$

usando que $M I_0 = I_1$

$$M^{2N+1} v_0 = M^{N-1} I_1 M^{N-1} v_0$$

$$= M^{N-2} M I_1 M M^{N-2} v_0$$

$$= M^{N-2} M I_0 M^{N-2} v_0$$

$$= M^{N-2} I_1 M^{N-2} v_0$$

usando (1) y (2) sucesivamente

$\vdots$

$$M^{2N+1} v_0 = M I_1 M v_0 = M I_0 v_0 = I_1 v_0 = v_0 \quad \text{pues } v_0 \in \mathcal{J}_1$$

$\therefore$

$$M^{2N+1} v_0 = v_0$$

Para el caso con 2^{N-1} la demostración es análoga

$$M^{2N-1} v_0 = M^N M^N M^{-1} v_0 = M^N M^{-1} M^N v_0 = M^N I_0 I_1 M^N v_0$$

en este caso Si $v_0 \in J_0$ y $M^N v_0 \in J_1$

$$I_0 v_0 = v_0 \quad \text{y} \quad I_1 M^n = M^n$$

$$M^{2N-1} v_0 = M^N I_0 M^N v_0 = M^{N-1} M I_0 M M^{N-1} v_0$$

usando (2) $(MI_0 = I_1)$

$$M^{2N-1} v_0 = M^{N-1} I_1 M M^{N-1} v_0$$

usando (1) $(I_1 M = I_0)$

$$M^{2N-1} v_0 = M^{N-1} I_0 M^{N-1} v_0$$

usando (2) y (1) sucesivamente

$$\vdots$$

$$M^{2N-1} v_0 = M I_0 M v_0$$

usando (2)

$$M^{2N-1} v_0 = I_1 M v_0$$

usando (1)

$$M^{2N-1} v_0 = I_0 v_0 \qquad \text{usando que } v_0 \in J_0$$

$$M^{2N-1} v_0 = v_0 \qquad \blacksquare$$

Podemos entonces enunciar el siguiente resultado

Corolario: Sea $M: \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}^{2N}$ un mapeo simpléctico no-twist tal que M se puede escribir como producto de involuciones I_1, I_0

$$M = I_1 I_0$$

Sean

$$J_0 = \{ v \in \mathbb{R}^{2N} \mid I_0 v = v \}$$

$$J_1 = \{ v \in \mathbb{R}^{2N} \mid I_1 v = v \}$$

Entonces afirmamos lo siguiente:

i) Si $v_0 \in J_0$ y $M^N v_0 \in J_0$ ó $v_0 \in J_1$ y $M^N v_0 \in J_1$ $\Rightarrow$ v_0 es un punto de periodo $2N$.

ii) Si $v_0 \in J_1$ y $M^N v_0 = v_N \in J_0 \Rightarrow v_0$ es un punto de periodo $2N+1$

iii) Si $v_0 \in J_0$ y $M^N v_0 = v_N \in J_1 \Rightarrow v_0$ es un punto de periodo $2N-1$

Es decir que podemos buscar órbitas de periodo k buscando que sean puntos fijos de las simetrías.