Primero recordemos que la serie de Taylor del seno es

$$\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

y el mapeo es

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n - \frac{k}{2\pi}\text{sen}(2\pi x(t)) \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n - \frac{k}{2\pi}\text{sen}(2\pi x(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n t^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n t^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n - \frac{k}{2\pi}\text{sen}\left(2\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n - \frac{k}{2\pi}\text{sen}\left(2\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n t^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n t^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n - \frac{k}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(2\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)^{2n+1} \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n - \frac{k}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(2\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)^{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n t^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n t^n \end{bmatrix}$$ desarrollando primero el seno

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n - \frac{k}{2\pi}\left[\left(2\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) - \frac{1}{3!}\left(2\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(2\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)^5 - \dots\right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n - \frac{k}{2\pi}\left[\left(2\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) - \frac{1}{3!}\left(2\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(2\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)^5 - \dots\right] = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n t^n$$

identificando y agrupando los términos de orden cero:

de

$$\left(2\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)^3 = \left(2\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\left(2\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\left(2\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) = (2\pi)^3 \left(a_0 t^0 + a_1 t^1 + \dots\right)\left(a_0 t^0 + a_1 t^1 + \dots\right)\left(a_0 t^0 + a_1 t^1\right.$$

$$= (2\pi)^3\left[(a_0)^3 + O(>t)\right]$$

$$\left(2\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)^5 = (2\pi)^5\left[a_0^5 + O(>t)\right]$$

Por lo que a orden cero

$$a_0 + b_0 - \frac{k}{2\pi}\left[2\pi a_0 - \frac{(2\pi)^3}{3!}a_0^3 + \frac{(2\pi)^5}{5!}a_0^5 - \dots\right] = a_0$$

$$b_0 - \frac{k}{2\pi}\left[2\pi a_0 - \frac{(2\pi)^3}{3!}a_0^3 + \frac{(2\pi)^5}{5!}a_0^5 - \dots\right] = b_0$$

Sistema de ecuaciones de orden cero

Comparando términos:

$$-k\left[a_0 - \frac{(2\pi)^2}{3!}a_0^3 + \frac{(2\pi)^4}{5!}a_0^5 - \dots\right] = 0 \Rightarrow -ka_0\left[1 - \frac{(2\pi)^2}{3!}a_0^2 + \frac{(2\pi)^4}{5!}a_0^4 - \dots\right] = 0$$

$$\Rightarrow a_0 = 0 \quad \text{ó} \quad 1 - \frac{(2\pi)^2}{3!}a_0^2 + \frac{(2\pi)^4}{5!}a_0^4 - \dots = 0$$

si $a_0 = 0$ entonces $b_0 = 0$

Si $a_0 \neq 0$ entonces

$$1 - \frac{(2\pi)^2}{3!}a_0^2 + \frac{(2\pi)^4}{5!}a_0^4 - \dots 0$$

$$1 = \frac{(2\pi)^2}{3!}a_0^2 - \frac{(2\pi)^4}{5!}a_0^4 + \frac{(2\pi)^6}{7}a_0^6 \Rightarrow 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n+1)!}(-1)^{2n} a_0^{2n}$$

si $a_0 \neq 0$ la serie tendría que converger a 1. $\therefore \left|\frac{(-2\pi a_0)^{2n}}{(2n+1)!}\right| < 1.$

$$\Rightarrow |(-2\pi a_0)^{2n}| < |(2n+1)!|$$

con $n=0$

$$\Rightarrow |a_0^{2n}| < \left|\frac{(2n+1)!}{2\pi}\right| \quad \forall n.$$

$$|a_0| < \left|\frac{1}{2\pi}\right|$$ lo cual no podemos asegurar $\therefore a_0 = 0$

Entonces pasamos a orden 1.

$$\left(2\pi\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)^3 = \left(2\pi\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\left(2\pi\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\left(2\pi\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) = (2\pi)^3\left(a_0t^0 + a_1t^1 + \dots\right)\left(a_0t^0 + a_1t^1 + \dots\right)\left(a_0t^0 + a_1t^1\right.$$

los de orden 1 serán $a_0t^0(a_1t^1)(a_0t^0)$, $(a_1t^1)(a_0)(a_0)$, $(a_0)(a_0)(a_1t)$

$$\left(2\pi\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)^3 = \underbrace{\left(2\pi\sum_{0}^{\infty} a_n t^n\right)\dots\left(2\pi\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)}_{5\text{ veces}} = (a_0 + a_1t + \dots)\dots(a_0 + a_1t + \dots)$$

Términos de orden 5: $a_0a_1ta_0^3$, $a_0^2a_1ta_0^2$, $a_0^3a_1ta_0$, $a_0^4a_1t$, $a_1ta_0^4$

$$\Rightarrow = 5a_1ta_0^4$$

Entonces a orden 1 tenemos que

$$a_1 t^1 + b_1 t - \frac{k}{2\pi}\left[2\pi a_1 t^1 - \frac{(2\pi)^3}{3!} 3 a_1 t a_0^2 + \frac{(2\pi)^5}{5!} 5 a_1 t a_0^4 \dots\right] = a_1 \lambda t$$

$$b_1 t^1 - \frac{k}{2\pi}\left[2\pi a_1 t^1 - \frac{1}{3!} 3 a_1 t a_0^2 + \frac{1}{5!} 5 a_1 t a_0 - \dots\right] = b_1 \lambda t$$

Sistema de ecuaciones para el orden 1.

Suponiendo que $a_0 = 0$ queda:

$$\begin{cases} a_1 t + b_1 t - \frac{k}{2\pi}\left[2\pi a_1 t\right] = a_1 \lambda t \\ b_1 t - \frac{k}{2\pi}\left[a_1 t 2\pi\right] = b_1 \lambda t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1 + b_1 - k a_1 - a_1 \lambda) t = 0 \\ (b_1 - k a_1 - b_1 \lambda) t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + b_1 - k a_1 - a_1 \lambda = 0 \\ b_1 - k a_1 - b_1 \lambda = 0 \end{cases}$$

con λ conocida

$a_1(1 - k - \lambda) + b_1 = 0 \rightarrow b_1 = a_1(k + \lambda - 1)$

$b_1(1 - \lambda) - k a_1 = 0$

entonces tenemos que