



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CÁLCULO DE VARIEDADES INVARIANTES EN
ÓRBITAS PERIÓDICAS.

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
Maestra en Matemáticas

PRESENTA:

Evelyn Álvarez Cruz

TUTOR:

Dr. Renato Carlos Calleja



Ciudad Universitaria, CD.MX. , 2021

Declaración de autenticidad

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesina es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesina es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

Evelyn Álvarez Cruz. Ciudad Universitaria, CD.MX. , 2021

Introducción

El estudio de órbitas perriódicas hiperbólicas es un tema interesante en el estudio de los sistemas dinámicos discretos. En particular el estudio de los conjuntos invariantes asociados a tales órbitas es un tema de intereés para quienes estudian la teoría KAM (escribir completo el nombre). Uno de los problemas abiertos interesantes en sistemas dinámicos es el estudio del rompimiento de toros invariantes para mapeos simplécticos. Tal problema puede ser abordado desde el estudio del comportamiento de las variedades estables e inestables de órbitas hiperbólicas.

En este trabajo se presenta la implementación de un método para encontrar órbitas periódicas de mapeos simplécticos de dos dimensiones y para parametrizar las variedades asociadas a aquellas órbitas que resulten ser hiperbólicas. El objetivo es dar una introducción a la forma en la que se estudia el rompimiento de los toros invariantes en este tipo de mapeos.

Índice general

Introducción	v
1. Teoría	1
1.1. Un método para encontrar órbitas periódicas de mapeos de 2D.	1
1.2. Método de parametrización	5
2. Implementación del método	9
2.1. Desarrollo explícito para el mapeo estándar	9
2.2. Implementación del método	11
3. Ejemplos de aplicación del método	15
3.1. Órbitas periódicas hiperbólicas y sus variedades.	19
Bibliografía	27

Capítulo 1

Teoría

Consideremos un mapeo M que preserva área, tal que $M : \mathbb{S} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S} \times \mathbb{R}$. El mapeo M lleva puntos $v_i = (x_i, y_i)$ en puntos dados por $M(v_i) = v_{i+1}$, donde el índice denota que se trata de la i -ésima iteración.

Nos interesa centrarnos en los mapeos que violan la condición de no degeneración también llamada *condición twist* que dice que

$$\frac{\partial x_{i+1}}{\partial y_i} \neq 0 \quad (1.1)$$

Un mapeo puede violar la condición 1.1 de diferentes maneras, en especial si para algún valor particular de y ocurre que $\partial x_{i+1}/\partial y_i = 0$. La violación de la condición 1.1 da lugar a bifurcaciones las cuales a su vez son indicadoras de una colisión de órbitas periódica en el mapeo. El valor del parámetro para el cual ocurre la colisión es de importancia en teoría KAM.

1.1. Un método para encontrar órbitas periódicas de mapeos de 2D.

Los métodos para encontrar órbitas periódicas en mapeos de dos dimensiones son generalmente métodos para encontrar raíces de sistemas no lineales en dos dimensiones. En este caso se busca reducir la dimensión en la que se trabaja para encontrar órbitas periódicas. Para ello es necesario encontrar algunas simetrías que reduzcan el problema a una dimensión. Veremos que las órbitas periódicas se pueden encontrar usando simetrías e involuciones.

Decimos que el mapeo M permanece invariante bajo un mapeo T o que commuta con T si

$$TM = MT, \quad (1.2)$$

1. TEORÍA

esta característica nos ayudará a redefinir una órbita periódica del mapeo. Por otro lado decimos que una transformación I se dice de *tiempo inverso* para M si

$$I_0 M^{-1} = M I_0 \quad (1.3)$$

Es decir si la simetría cambia el sentido del mapeo hacia atrás. Si además la simetría de tiempo inverso es una involución ($I_0^2 = 1$) se puede construir una nueva involución a partir de la anterior mediante

$$I_1 = M I_0. \quad (1.4)$$

Es simple comprobar que I_1 es involución pues usando la definición 1.3 tenemos que

$$I_1^{-1} M I_1 = (M I_0)^{-1} M I_1 = I_0^{-1} M^{-1} M I_1 = I_0^{-1} I_1 = I_0^{-1} M I_0 = M^{-1}$$

reacomodando términos $I_0 M^{-1} = M I_0$.

Con las involuciones definidas arriba podemos escribir el mapeo M como factorización de las mismas.

$$M = I_1 I_0 \quad (1.5)$$

decimos entonces que el mapeo M es reversible. Usando estos conceptos vamos a analizar la siguiente afirmación.

Teorema 1

Sea $M : \mathbb{S} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S} \times \mathbb{R}$ un mapeo simpléctico no-twist reversible. Sean

$$\mathbb{J}_0 = \{v \in \mathbb{S} \times \mathbb{R} | I_0 v = v\} \quad (1.6)$$

$$\mathbb{J}_1 = \{v \in \mathbb{S} \times \mathbb{R} | I_1 v = v\} \quad (1.7)$$

Si $v_0 \in \mathbb{J}_0$ y $M^N v_0 = v_N \in \mathbb{J}_0$ entonces v_0 es de periodo $2N$.

Demostración:

Queremos probar que $M^{2N} v_0 = v_0$. Entonces

$$\begin{aligned} M^{2N} v_0 &= M^N M^N v_0 \\ &= M^{N-1} M M^{N-1} M v_0 \\ &= M^{N-1} M M^{N-1} I_1 I_0 v_0 \end{aligned}$$

usando que $v_0 \in I_0$ y que M es reversible

$$M^{2N} v_0 = M^{N-1} I_1 I_0 M^{N-1} I_1 v_0$$

1.1 Un método para encontrar órbitas periódicas de mapeos de 2D.

usando que $M^N v_0 = v_N \in \mathbb{J}_0$ y que $M^{N-1} = M^N M^{-1}$

$$\begin{aligned} M^{2N} v_0 &= M^{N-1} I_1 I_0 M^N M^{-1} I_1 v_0 \\ &= M^{N-1} I_1 M^{N-1} I_1 v_0. \end{aligned}$$

Usando que el mapeo es reversible es fácil ver que se cumple que

$$I_1 M = I_0 \quad (1.8)$$

$$M I_0 = I_1. \quad (1.9)$$

Tomando en cuenta la ecuación 1.8

$$\begin{aligned} M^{2N} v_0 &= M^{N-2} M I_1 M M^{N-2} I_1 v_0 \\ &= M^{N-2} M I_0 M^{N-2} I_1 v_0 \\ &= M^{N-2} I_1 M^{N-2} I_1 v_0. \end{aligned}$$

Usando de nuevo las ecuaciones 1.8,1.9,

$$\begin{aligned} M^{2N} v_0 &= M^{N-3} M I_1 M M^{N-3} I_1 v_0 \\ &= M^{N-3} M I_0 M^{N-3} I_1 v_0 \\ &= M^{N-3} I_1 M^{N-3} I_1 v_0. \end{aligned}$$

De manera sucesiva aplicando 1.8,1.9 obtenemos que

$$M^{2N} v_0 = M I_1 M I_1 v_0,$$

donde por última vez aplicamos 1.8 y que M es reversible

$$\begin{aligned} M^{2N} v_0 &= M I_0 I_1 v_0 \\ &= I_1 I_0 I_0 I_1 v_0 \\ &= v_0 \end{aligned}$$

De manera análoga se puede demostrar el teorema para $v_0 \in \mathbb{J}_1$.

En el caso en que tengamos una órbita de periodo impar afirmamos el siguiente teorema.

Teorema 2

Sea $M : \mathbb{S} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S} \times \mathbb{R}$ un mapeo simpléctico no-twist reversible. Sean

$$\mathbb{J}_0 = \{v \in \mathbb{S} \times \mathbb{R} | I_0 v = v\} \quad (1.10)$$

$$\mathbb{J}_1 = \{v \in \mathbb{S} \times \mathbb{R} | I_1 v = v\} \quad (1.11)$$

Si $v_0 \in \mathbb{J}_1$ y $M^N v_0 = v_N \in \mathbb{J}_0$ entonces v_0 es de periodo $2N + 1$.

1. TEORÍA

Demostración:

Queremos ver que $M^{2N+1}v_0 = v_0$.

Entonces

$$\begin{aligned} M^{2N+1}v_0 &= M^{2N}Mv_0 \\ &= M^N MM^N v_0. \end{aligned}$$

Usando que el mapeo es reversible y que $I_0 M^N = M^N$,

$$\begin{aligned} M^{2N+1}v_0 &= M^N I_1 I_0 M^N v_0 \\ &= M^N I_1 M^N v_0 \\ &= M^{N-1} M I_1 M M^{N-1} v_0. \end{aligned}$$

Usando 1.9 y 1.8,

$$\begin{aligned} M^{2N+1}v_0 &= M^{N-1} M I_0 M^{N-1} v_0 \\ &= M^{N-1} I_1 M^{N-1} v_0. \end{aligned}$$

De manera sucesiva se puede usar 1.8 y 1.9 hasta llegar a

$$\begin{aligned} M^{2N+1}v_0 &= M I_1 M_0^v \\ &= M I_0 v_0 \\ &= I_1 v_0. \end{aligned}$$

Debido a que $v_0 \in \mathbb{J}_1$

$$M^{2N+1}v_0 = v_0.$$

En el caso en que $v_0 \in \mathbb{J}_0$ y que $v_N \in \mathbb{J}_1$ se tiene que $M^{2N-1}v_0 = v_0$ y la demostración es análoga.

Con los teoremas 1 y 2 podemos enunciar el siguiente resultado.

Corolario 1

Sea $M : \mathbb{S} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S} \times \mathbb{R}$ un mapeo simpléctico no-twist reversible y $\mathbb{J}_0, \mathbb{J}_1$ como se definieron en los teoremas 1 y 2.

- Si $v_0 \in \mathbb{J}_0$ y $M^N v_0 \in \mathbb{J}_0$ si y sólo si v_0 pertenece a una órbita de periodo $2N$ de M .
- Si $v_0 \in \mathbb{J}_1$ y $M^N v_0 \in \mathbb{J}_1$ si y sólo si v_0 pertenece a una órbita de periodo $2N$ de M .

- Si $v_0 \in \mathbb{J}_1$ y $M^N v_0 \in \mathbb{J}_0$ si y sólo si v_0 pertenece a una órbita de periodo $2N + 1$ de M .
- Si $v_0 \in \mathbb{J}_0$ y $M^N v_0 \in \mathbb{J}_1$ si y sólo si v_0 pertenece a una órbita de periodo $2N - 1$ de M .

Si se conocen los conjuntos $\mathbb{J}_0, \mathbb{J}_1$ entonces la búsqueda de órbitas periódicas se puede reducir a un búsqueda en una dimensión ya que sabemos que al menos un punto de la órbita estarán en alguno de los conjuntos.

1.2. Método de parametrización

Esta sección tiene como objetivo describir el método de parametrización desarrollado por X. Cabré, E. Fontich y R. de la Llave [1]. El método fue desarrollado de manera general para conjuntos invariantes, estables e inestables, en puntos hiperbólicos, tratándose de un método semianalítico, es decir parte computacional y parte analítica. El método busca describir las variedades usando series.

Supongamos que $v_* \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}$ es un punto fijo hiperbólico del mapeo M . Asociado a v_* se tienen dos conjuntos invariantes

$$\mathbb{W}^s = \{v : M^n v \rightarrow v_* \text{ cuando } n \rightarrow \infty\} \quad (1.12)$$

$$\mathbb{W}^u = \{v : M^n v \rightarrow v_* \text{ cuando } n \rightarrow -\infty\}, \quad (1.13)$$

llamados *variedades estable e inestable* respectivamente.

Para describir los conjuntos invariantes tomemos $U \subset \mathbb{W}^z$ con $z \in \{u, s\}$ y un abierto $\Theta \subset \mathbb{R}$. Como U es parte de conjunto ivariante entonces

$$M : U \subset \mathbb{W}^z \longrightarrow U \subset \mathbb{W}^z. \quad (1.14)$$

Por otro lado podemos encontrar $\mathcal{P} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S} \times \mathbb{R}$ parametrización tal que el siguiente diagrama commute

$$\begin{array}{ccc} \Theta \subset \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \Theta \subset \mathbb{R} \\ \downarrow \mathcal{P} & & \downarrow \mathcal{P} \\ U \subset \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{M} & U \subset \mathbb{R}^2 \end{array} \quad (1.15)$$

La función g contiene la dinámica del mapeo pero sobre Θ . A partir del diagrama 1.15 obtenemos la siguiente ecuación de cohomología.

1. TEORÍA

$$M \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \circ g, . \quad (1.16)$$

Una forma gráfica de ver lo que nos dice la ecuación 1.16 es mediante la figura 1.1.

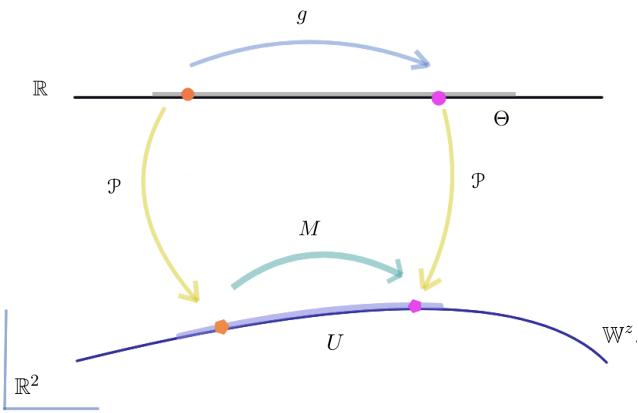


Figura 1.1: Representación gráfica del diagrama (1.15).

Las variables a encontrar en la ecuación 1.16 son \mathcal{P} y g , por lo que se necesita al menos fijar o encontrar una de ellas para poder resolver la ecuación. Para hacer esto se suelen tomar en cuenta dos formas de parametrización definidas como *la forma gráfica* y *la forma normal*. En este caso se usa la forma gráfica que consiste en usar la forma local de las variedades al rededor del punto v_* . Es decir se usa que localmente la dependencia es lineal, por lo que

$$g(t) = \lambda t \quad (1.17)$$

con $t \in \mathbb{R}$ el parámetro, $\lambda \in \mathbb{R}$ el valor propio asociado a la linearización del mapeo. Esta desición esta apoyada en el teorema de Hartman-Grobman que declara que en una vecindad del punto fijo hiperbólico se puede aproximar el comportamiento del sistema mediante su linearización.

Entonces usando la linealización del mapeo y la ecuación (1.17) se puede resolver la ecuación (1.16) para \mathcal{P} . Para ello se propone que

$$\mathcal{P} := (p_1(t), p_2(t)) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right). \quad (1.18)$$

Sustituyendo la ecuación (1.18) en la ecuación (1.16) se puede separar por grado de cada lado de la ecuación y comparar términos, las ecuaciones resultantes son recursivas , es decir que proponiendo los coeficientes de orden cero del polinomio \mathcal{P} se puede obtener todos los consecutivos.

Capítulo 2

Implementación del método

En este capítulo se describe brevemente cómo se implementó el método para encontrar puntos fijos. Sobre el método de la parametrización implemetado se puede revisar la referencia ***** en donde se describe también cómo se aplicó al mapeo estándar.

2.1. Desarrollo explícito para el mapeo estándar

El mapeo etández es uno de los mapeos más estudiados, esta dado por

$$M_\kappa(x_n, y_n) = \begin{pmatrix} x_n + y_{n+1} \\ y_n - \kappa \sin(2\pi x_n)/2\pi \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

con κ un parámetro y $x \in [0, 1]$. Escrito de esta forma el mapeo se descompone en el producto de dos involuciones dadas por

$$I_0 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_n \\ y_n - \frac{\kappa}{1\pi} \sin(2\pi x_n) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$I_1 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n - x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Los conjuntos invariantes asociados a las involuciones (2.2), (2.3) son los siguientes

$$\mathbb{J}_0 = \{x \in [0, 1] | x = 0, x = 1/2\} \quad (2.4)$$

$$\mathbb{J}_1 = \{x \in [0, 1] | x = \frac{y}{2}, x = \frac{y+1}{2}\} \quad (2.5)$$

Entonces siguiendo el resultado del Corolario 1, sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{J}_0$ si buscamos una órbita de periodo 2 tendremos que resolver

$$M_\kappa(x, y) = M_\kappa(0, y) = (1/2, y)$$

2. IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO

lo cual se reduce a que

$$y = 1/2.$$

Por lo que entonces afirmamos que el punto $(0, 1/2)$ es un punto de periodo 2. La órbita encontrada es $\{(0, 1/2), (1/2, 1/2)\}$, recordemos que la variable x está definida en el intervalo $[0, 1]$ por lo que se debe tomar módulo 1 en esa componente.

Una vez encontrada un órbita periódica es necesario determinar la estabilidad de la misma. Para ello se usa la linearización alrededor del punto fijo. En este caso se toma como punto fijo del mapeo $M_k^n(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$, un punto de la órbita periódica. La estabilidad esta dada por los valores propios del jacobiano $DM_k^n(x_0, y_0)$. Para calcular este jacobiano no hace falta hacer la composición solo hace falta usar la regla de la cadena y la órbita periódica.

$$\begin{aligned} DM_k^n(x_0, y_0) &= D(M_\kappa(M_\kappa(\cdots M_\kappa(x_0, y_0)))) \\ &= DM_\kappa(M^{n-1}(x_0, y_0))DM_\kappa(M_\kappa^{n-2}(x_{n-2}, y_{n-1}))\cdots DM_\kappa(x_0, y_0) \\ &= DM_\kappa(x_{n-1}, y_{n-1})DM_\kappa(x_{n-2}, y_{n-2})\cdots DM_\kappa(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Entonces el jacobiano $DM_k^n(x_0, y_0)$ se puede calcular evaluando el jacobiano del mapeo estándar en los puntos de la órbita y multiplicando las matrices. El jacobiano del mapeo esándar es

$$M_k^n(x_n, y_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\kappa \cos(2\pi x_n) & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

y la órbita se conoce si se conoce solo uno de los puntos. Usando el hecho de que el determinante del producto es el producto de los determinantes se tiene que

$$\det DM_k^n(x_0, y_0) = (\det DM(x_{n-1}, y_{n-1})) \cdots (\det DM(x_0, y_0)). \quad (2.7)$$

Si los valores propios asociados al polinomio característico de la ecuación (2.7) tienen módulo mayor que uno y menor que uno entonces tenemos que (x_0, y_0) es un punto hiperbólico lo que indica que la órbita encontrada es hiperbólica.

Una vez que se tiene calculada una órbita periódica hiperbólica del mapeo se aplica el método de la parametrización para describir las variedades invariantes asociadas a tal órbita.

Escribimos las variables (x, y) como dos polinomios de variable real t

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad (2.8)$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \quad (2.9)$$

tal que $\mathcal{P}(t) := (x(t), y(t))$. En cuanto a la dinámica interna g , se usa la ecuación $g(t) = \lambda t$ (1.17). Después de sustituir esto en $M \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \circ g$ (1.16) para el mapeo estándar se obtiene

$$M_\kappa(x, y) = \begin{bmatrix} x(t) + y(t) - \frac{\kappa}{2\pi} \sin(2\pi x(t)) \\ y(t) - \frac{\kappa}{2\pi} \sin[2\pi x(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(\lambda t) \\ y(\lambda t) \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

que en forma explícita es

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n - \frac{\kappa}{2\pi} \sin(2\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n) \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n - \frac{\kappa}{2\pi} \sin(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n t^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n t^n \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

al desarrollar las sumas y usar la serie de Taylor el seno se puede obtener una ecuación para comparar los términos de orden 0.

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n - \frac{\kappa}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n)^{2n+1} \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n - \frac{\kappa}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n)^{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n t^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n t^n \end{bmatrix}$$

Desarrollando las sumas y agrupando los términos de orden cero.

$$\begin{bmatrix} a_0 + b_0 - \frac{\kappa}{2\pi} (2\pi a_0 - \frac{2\pi}{3!} a_0^3 + \frac{2\pi}{5!} a_0^5 - \dots) \\ b_0 - \frac{\kappa}{2\pi} (2\pi a_0 - \frac{2\pi}{3!} a_0^3 + \frac{2\pi}{5!} a_0^5 - \dots) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

De donde se obtiene que a_0, b_0 son cero. Análogamente se pueden agrupar los de primer orden y obtener un sistema que se resuelve a partir de los coeficientes a_0 y b_0 . De manera sucesiva se puede obtener los términos de orden n . Para más detalle de cómo se encuentran los coeficientes consultar REFERENCIA DE TESIS!!!.

2.2. Implementación del método

La implementación del método consiste principalmente en aplicar un método de Newton para encontrar raíces. Para encontrar las órbitas periódicas, dado el mapeo y los conjuntos invariantes de las simetrías se puede buscar una órbita periódica de periodo n usando una semilla. En la siguiente tabla se exquematiza cómo se calcula, sin embargo se recomienda que para mayor detalle viste <https://github.com/alvarezze/Tesis-Variedades-Estables-e-inestables/>. En la liga se encuentra la documentación necesaria para poder usar el método así como algunos ejemplos.

2. IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO

Pasos

1. Se reciben el mapeo, las involuciones, el periodo y una semilla.
2. Se crea un nuevo mapeo que es la composición del mapeo k veces.
3. Se toma un punto en el conjunto invariante
4. Se toma la composición del mapeo iterado con el punto tomado en el paso anterior.
5. Se usa la ecuación que describe el conjunto J_B y se construye una nueva ecuación.
6. Se usa un método de Newton para encontrar la raíz de la ecuación del paso 5.

M, I_A, I_B, n, v_0

$f(v) = M^k(v)$

J_A

$f(p)$

$g(f(p)) = 0$

La implementación del método de parametrización fue resultado de un trabajo anterior CITAR TESIS!, por lo que solo se describirá de manera muy superficial lo programado. Al igual que en el caso del método para las órbitas periódicas se puede encontrar la documentación en <https://github.com/alvarezeve/Tesis-Variedades-Estables-e-inestables/>.

Pasos

1. Se reciben el mapeo, el punto fijo el orden del polinomio, el intervalo en el que se va a evaluar y el paso.
2. Se crean dos polinomios de grado 1 asociados a las variables del mapeo.
3. Se aplica el mapeo a los polinomios.
4. Se calcula la matriz jacobiana del sistema anterior y se calculan los valores y vectores propios. $JM(P_x, P_y)$

$M, O, pf, t, \Delta t$

$P_x = a_0 + a_1 t + O(t^2)$
 $P_y = b_0 + b_1 t + O(t^2)$

$M(P_x + P_y)$

5. Se elige el valor propio asociado a la variedad que se está calculando

$$\lambda$$

6. Se resuelve para a_1, b_1

7. Se sustituyen los valores de a_1, b_1 en los polinomios P_x, P_y y se aumenta el orden.

$$P_x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + O(t^3)$$

$$P_y = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + O(t^3)$$

8. Se aplica el mapeo a los nuevos polinomios.

$$M(P_x + P_y)$$

9. Se crea el polinomio

$$P_{\lambda x} = a_0 + a_1 \lambda t + a_2 \lambda t^2 + O(t^3)$$

$$P_{\lambda y} = b_0 + b_1 \lambda t + b_2 \lambda t^2 + O(t^3)$$

10. Se crea una ecuación con la resta de las ecuaciones del paso 8 y 9.

$$M(P_x + P_y) - (P_{\lambda x}, P_{\lambda y}) = 0$$

11. Se resuelve la ecuación del paso 10 para las variables a_2, b_2 .

12. Se regresa al paso 7. y se itera hasta que se llegue al orden deseado.

En ambas implementaciones se añadió una forma de evaluar el error numérico. Para las órbitas periódicas se tomó la diferencia entre el punto de la órbita de periodo n encontrado y su n -ésima iteración .

$$E = \|(x_0, y_0) - M^n(x_0, y_0)\| \quad (2.13)$$

Mientras que en el caso de las parametrizaciones el error se toma de la diferencia entre composiciones evaluada en el intervalo en el que se tomó la parametrización.

$$\mathbf{E} = \|M \circ \mathcal{P} - \mathcal{P} \circ g\| \quad (2.14)$$

Los errores se analizan por separado ya que cada método puede considerarse ajeno.

Ejemplos de aplicación del método

Utilizando el método ya programado se hicieron diferentes cálculos para encontrar algunas órbitas periódicas en el mapeo estándar, que se muestran en la figura ???. Todas las órbitas que aparecen fueron calculadas números de tipo Float64 y presentan un error menor al 1×10^{-15} .

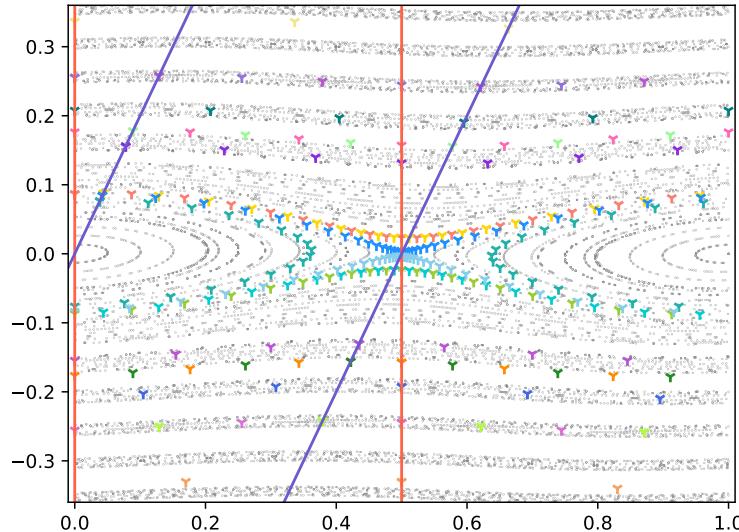


Figura 3.1: Espacio fase del mapeo estándar, con $\kappa = 0.07$, junto con varias órbitas periódicas. Las líneas rojas y azul representan los conjuntos invariantes J_0, J_1

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

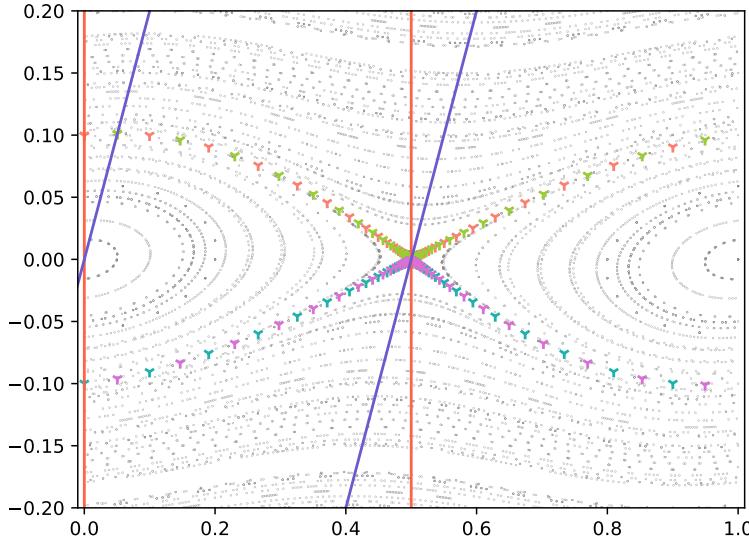


Figura 3.2: Espacio fase del mapeo estándar, con $\kappa = 0.07$, con 4 órbitas de periodo 40.

Las líneas rojas y azul representan los conjuntos invariantes J_0, J_1

Para calcular las órbitas se requiere una semilla para iniciar el método de Newton, esta semilla se calculó primero calculando las órbitas periódicas del mapeo cuando el valor del parámetro es $\kappa = 0.0$ y el sistema es completamente integrable.

Otro mapeo con el que se trabajó fue el mapeo cuadrático que es un mapeo que preserva área y donde a, b son números reales. El mapeo es integrable cuando $b = 0$.

$$M_{a,b}(x_n, y_n) = \begin{pmatrix} x_n + a(1 - y_{n+1}^2) \\ y_n - b \sin(2\pi x_n) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Sus correspondientes involuciones son.

$$\mathbf{I}_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-xy - b \sin(2\pi x)) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{I}_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-x + a(1 - y^2)y) \quad (3.3)$$

Mientras que sus conjuntos invariantes asociados son

$$J_0 = \{(x, y) | x = 0, x = 1/2\} \quad (3.4)$$

$$J_1 = \{(x, y) | x = a(1 - y^2)/2, x = a(1 - y^2)/2 + 1/2\} \quad (3.5)$$

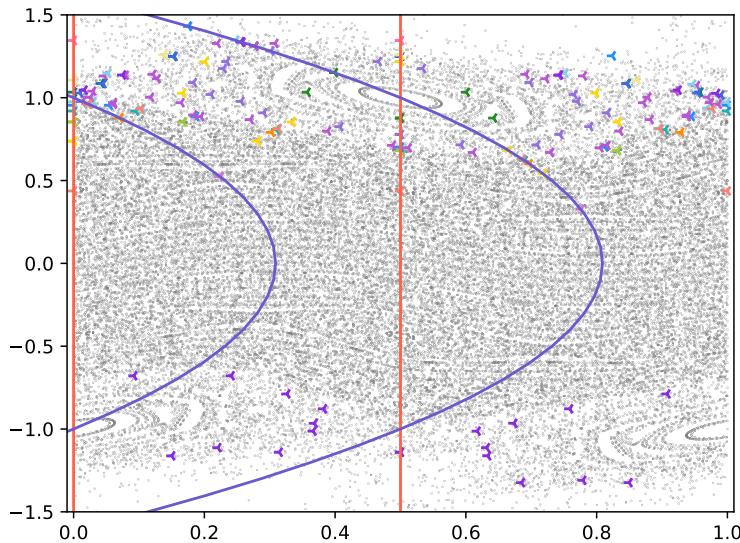


Figura 3.3: Espacio fase y algunas órbitas periódicas del mapeo (3.1) con $a = 0.618, b = 0.2$. Las curvas de color rojo y azul corresponden a los conjuntos $\mathbb{J}_0, \mathbb{J}_1$.

Utilizando el método implementado de la misma manera que se utilizó para el mapeo estándar es posible obtener órbitas periódicas de diferentes períodos usando semillas adecuadas. Un ejemplo de algunas órbitas se muestra en la figura ??.

Es posible dentro del programa implementado cambiar el método para encontrar las raíces dentro del método. Sin embargo es mejor encontrar la forma de obtener raíces que se aproximen a un punto de la órbita ya que eso garantiza la convergencia del método usando los métodos de solución de raíces más simples. También se implementó una extensión del método para aritmética de presición extendida. En presición extendida se utilizan números de presición arbitraria la cual trabaja con 256 bits predefinida.

Algo interesante de analizar con esta herramienta es la dinámica de las órbitas periódicas conforme se mueven los parámetros. En el caso del mapeo (3.1) se muestra en la figura 3.5 cómo la órbita de periodo 4 se va modificando al variar el parámetro b y dejando fijo $a = 0.618$.

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

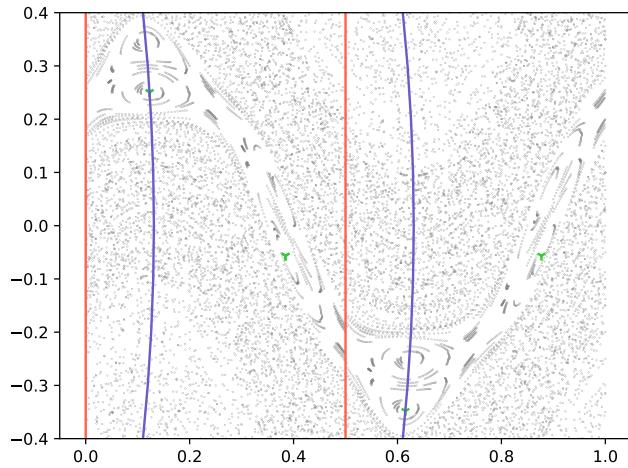


Figura 3.4: Órbita de periodo 4 en el mapeo (3.1) con $a = 0.2625, b = 0.44$.

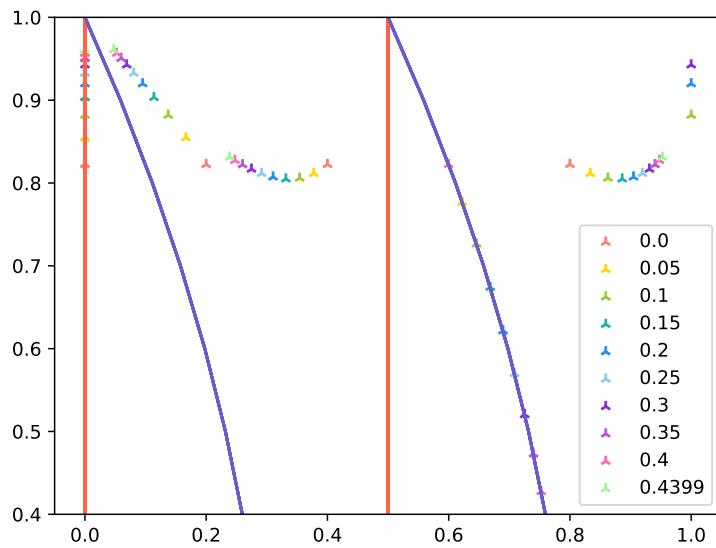


Figura 3.5: Dinámica de una órbita de periodo 4 del mapeo (3.1) con valores $a = 0.618$ fija y b variable. Las curvas rojas y azules corresponden a los conjuntos invariantes $\mathbb{J}_0, \mathbb{J}_1$.

3.1. Órbitas periódicas hiperbólicas y sus variedades.

Una vez que se tienen algunas órbitas periódicas es posible determinar cuáles de ellas son hiperbólicas. Seleccionando las que cumplen ser hiperbólicas es posible ahora aplicar el método de parametrización para las variedades asociadas a la órbita.

En el caso del mapeo estándar es bien conocido que existe una órbita hiperbólica de periodo 2 que persiste para ciertos valores del parámetro κ . Usando diferentes valores del parámetro se calcularon las parametrizaciones de las variedades asociadas usando polinomios de orden 70 evaluados en el intervalo $t = [-0.2, 0.2]$. La figura 3.6 muestra las variedades en el espacio fase asociadas a la órbita hiperbólica de periodo dos para diferentes valores de κ . Como se puede observar mientras el valor de κ aumenta las variedades se van abriendo dejando mayor espacio a la dinámica de la órbita elíptica de periodo dos.

Variando el valor de κ entre 0.1 y 1.1 y calculando las órbitas hiperbólicas de periodo dos y sus respectivas variedades se obtuvo la figura 3.8 donde se muestra como la órbita de periodo dos se va deformando así como las variedades. De cada punto marcado en color verde surge una variedad estable (verde) y una variedad inestable (naranja), se puede notar como la variedad estable se convierte en la inestable del punto siguiente en la órbita.

κ	Error
0.01	$2.220446049250313e - 16$
0.02	0.0
0.03	$2.220446049250313e - 16$
0.04	$2.220446049250313e - 16$
0.05	$2.220446049250313e - 16$
0.06	$2.220446049250313e - 16$
0.07	$2.220446049250313e - 16$
0.08	0.0
0.09	0.0
0.1	0.0
0.2	$3.3306690738754696e - 16$
0.3	$2.220446049250313e - 16$
0.4	$2.220446049250313e - 16$
0.5	$2.220446049250313e - 16$
0.6	$4.440892098500626e - 16$
0.7	0.0
0.8	0.0
0.9	$4.440892098500626e - 16$
1.0	$4.440892098500626e - 16$
1.1	$4.440892098500626e - 16$

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

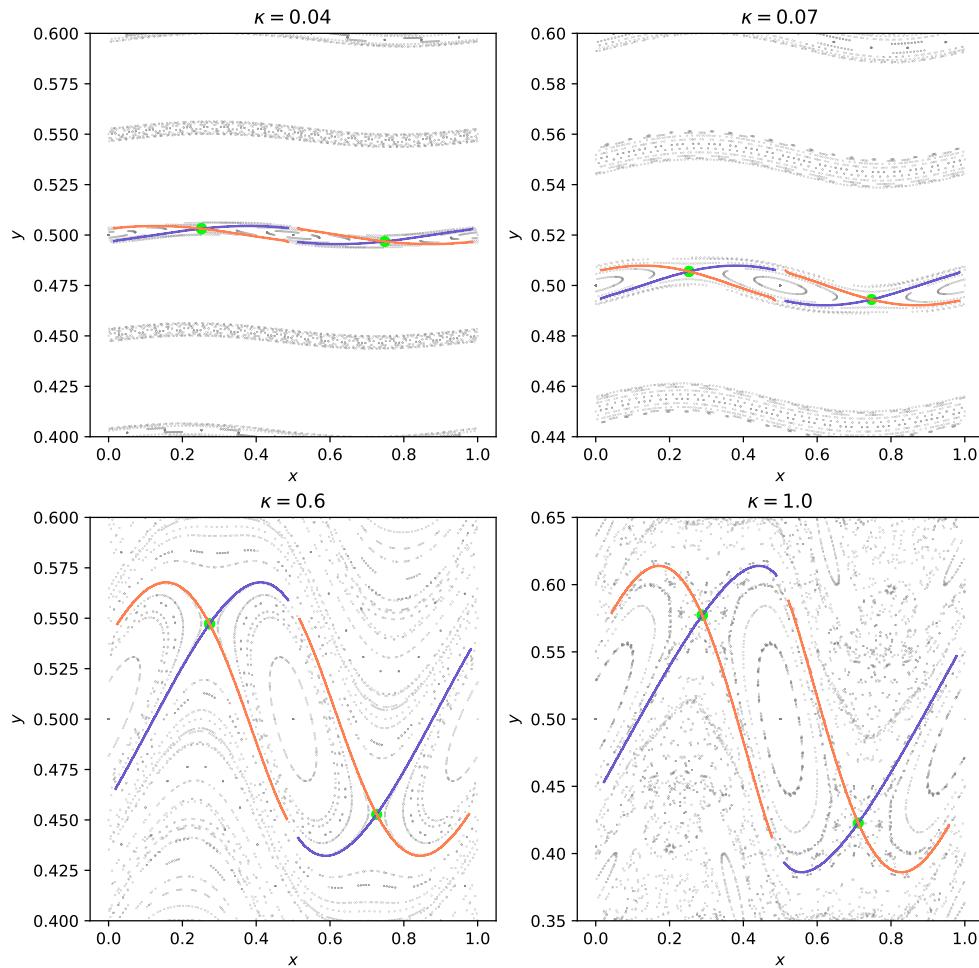


Figura 3.6: Variedades invariantes asociadas a la órbita de periodo dos en el mapeo estándar con diferentes valores de κ .

3.1 Órbitas periódicas hiperbólicas y sus variedades.

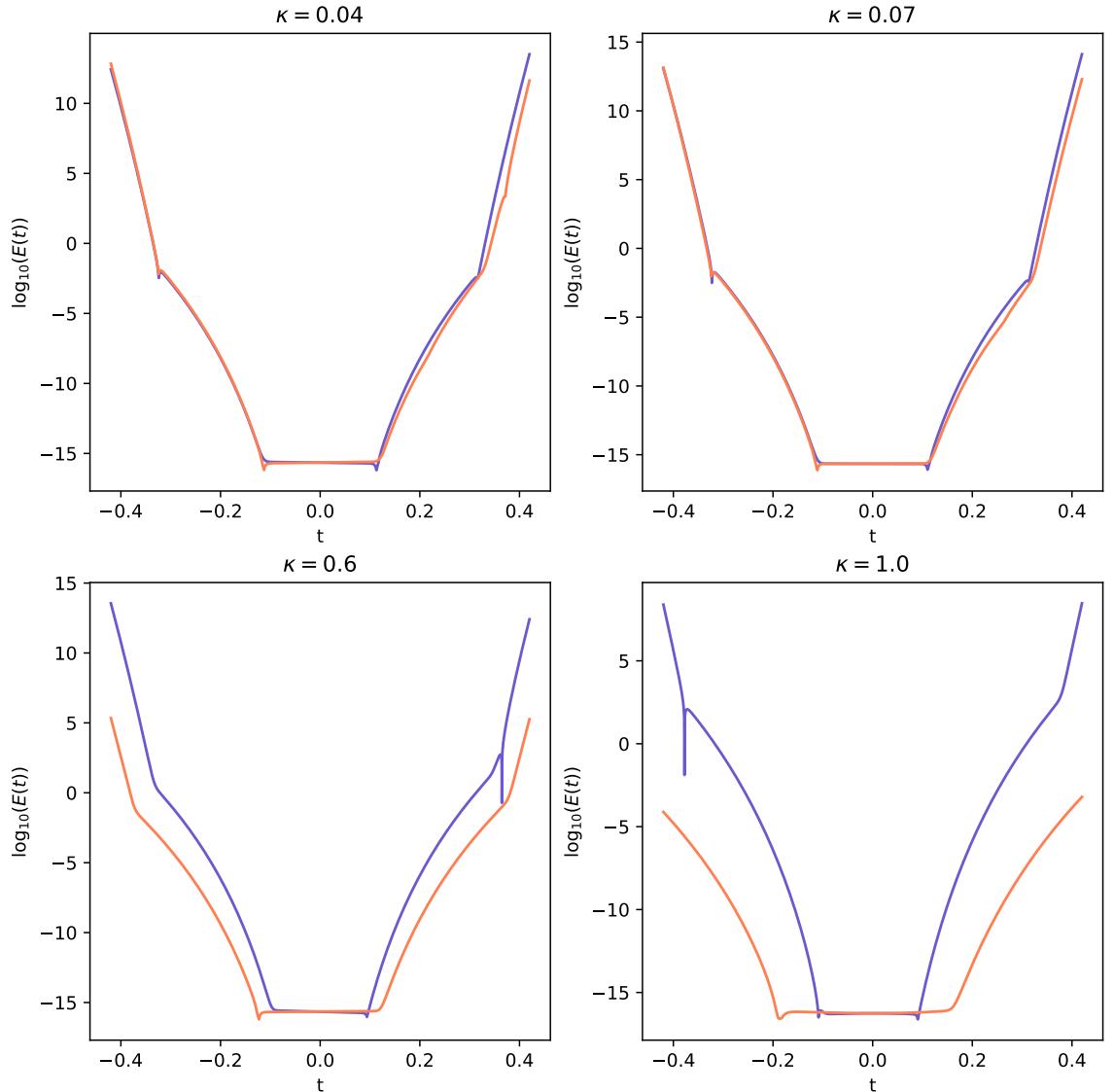


Figura 3.7: Errores asociados al cálculo de las variedades invariantes que aparecen en la figura 3.6.

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

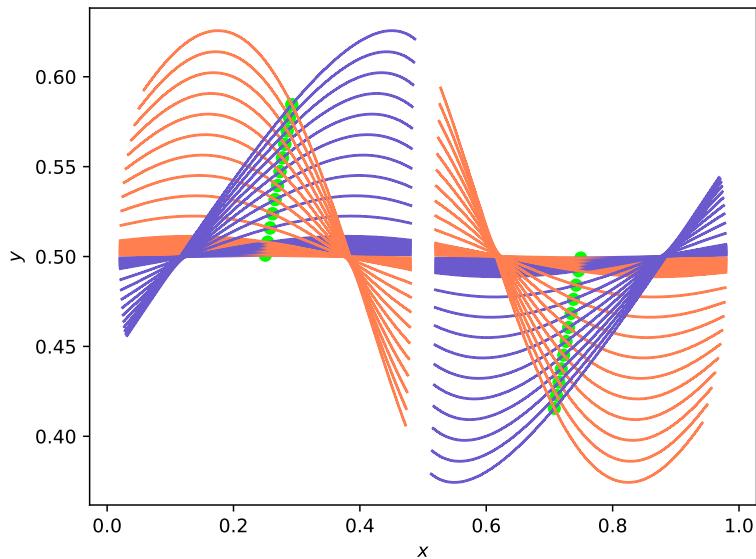


Figura 3.8: Comportamiento de las variedades invariantes asociadas a la órbita de periodo dos en el mapeo estándar al variar κ entre $[0.1, 1.1]$.

3.1 Órbitas periódicas hiperbólicas y sus variedades.

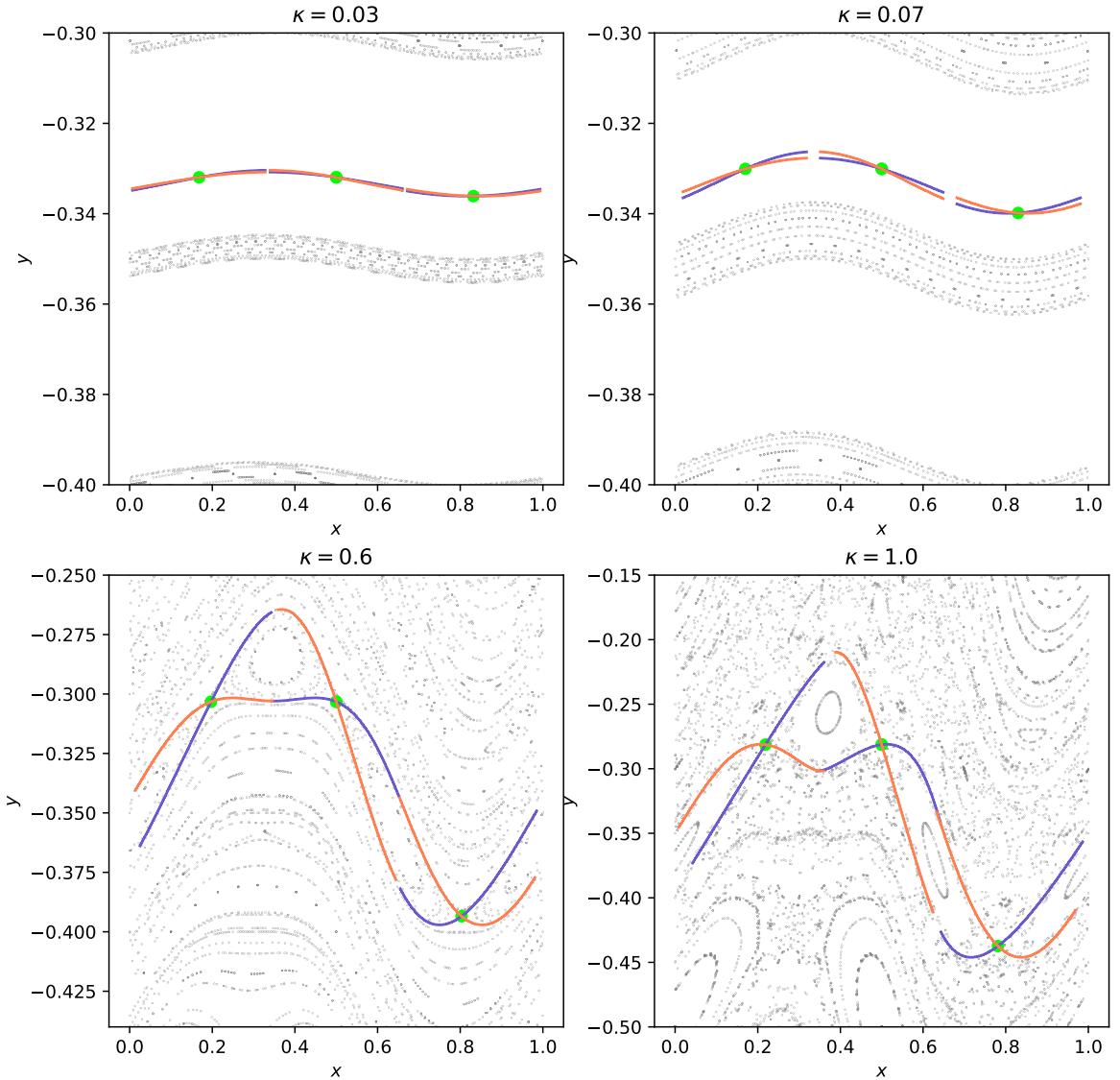


Figura 3.9: Variedades invariantes asociadas a una órbita de periodo 3 en el mapeo estándar con diferentes valores de κ .

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

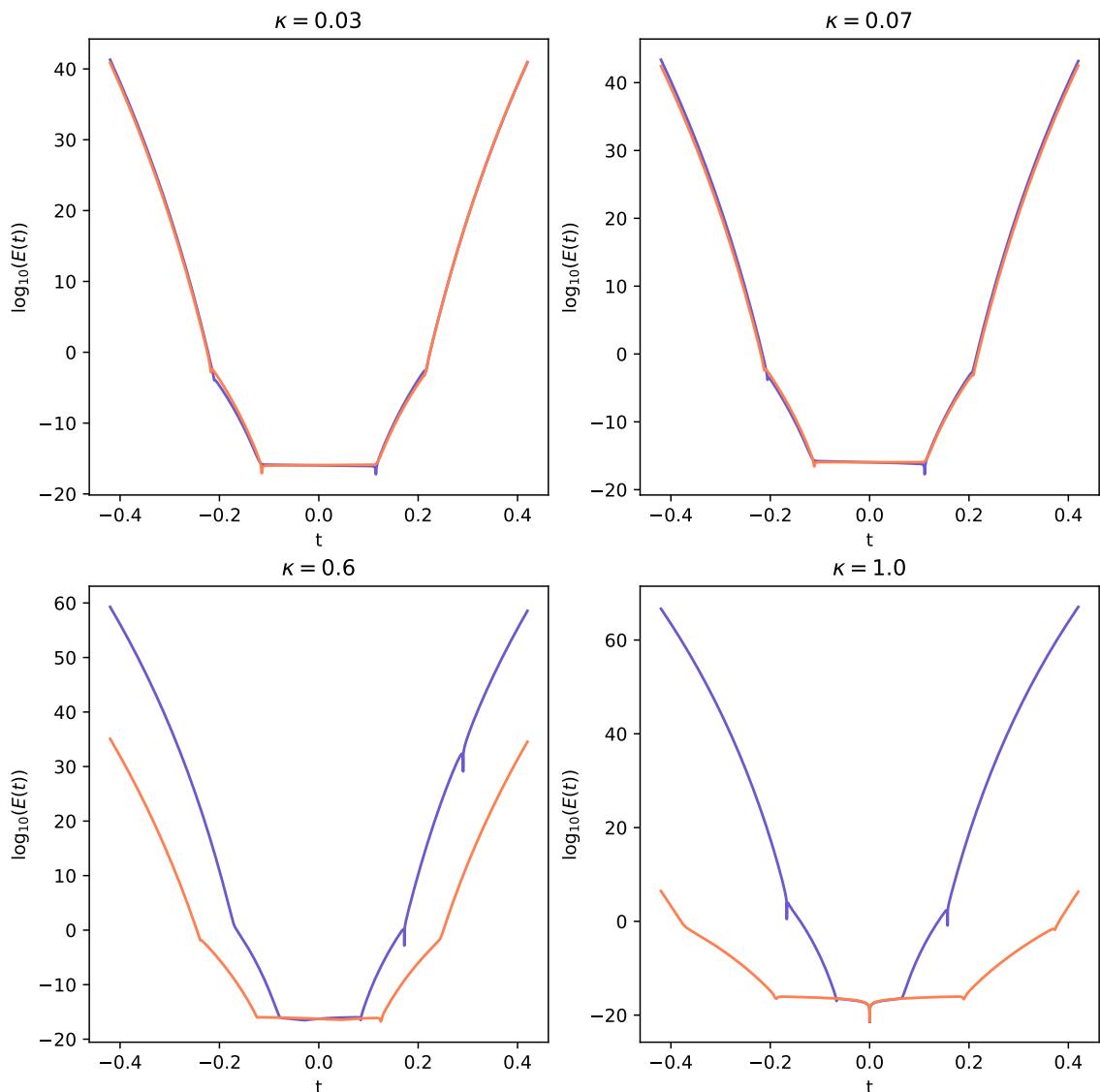


Figura 3.10: Errores asociados al cálculo de las variedades invariantes de la figura 3.9.

3.1 Órbitas periódicas hiperbólicas y sus variedades.

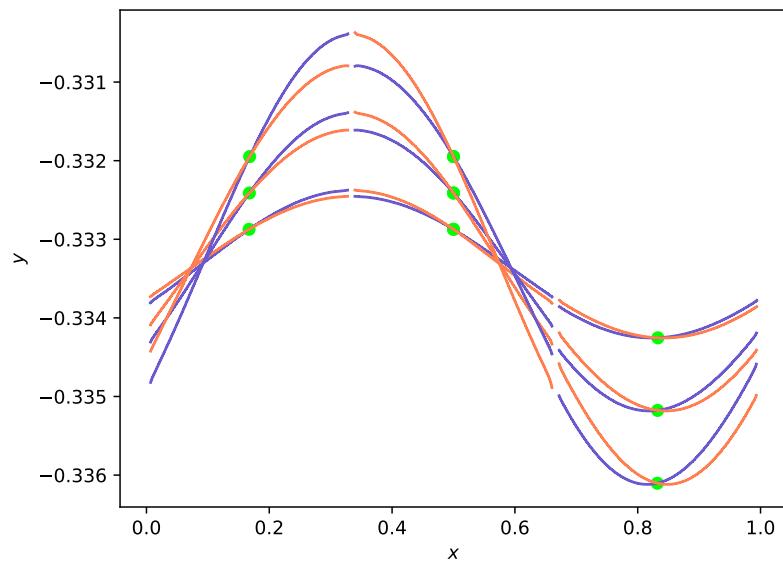


Figura 3.11: Variedades asociadas a una órbita de periodo tres para el mapeo estándar con valores de $\kappa = [0.01, 0.02, 0.03]$.

Bibliografía

- [1] J. Figueras A. Luque y J. Mondelo Á. Haro, M. Canadell. *The Parameterization Method for Invariant Manifolds*, volume 195 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 1 edition, 2010. [5](#)
- [2] J.D Mireles James. Elementary example of the parametrization method; stable and unstable manifolds of the standard map. <http://cosweb1.fau.edu/~jmirelesjames/standardMapNotes.pdf>, 2007.
- [3] J.D. Mireles James y Christian Reinhardt Jan Bouwe van den Berg. Computing (un)stable manifolds with validated error bounds: non-resonant and resonant spectra. http://cosweb1.fau.edu/~jmirelesjames/parametrization_draft9.pdf, 2015.
- [4] Glen R. Hall y Dan Offin Kenneth R. Meyerb. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, volume 90 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 2nd edition, 2009.
- [5] Gerald Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1 edition, 2011.
- [6] James D. Meiss. *Differential Dynamical Systems*, volume 14 of *Mathematical modeling and computation*. Society for Industrial and Applied Mathematics ,Philadelphia, 1 edition, 2007.
- [7] Y.F. Chang y G. Corliss. Ratio-like and recurrence relation tests for convergence of series. *J. Inst. Maths Applies.*, 25:349–359, 1980.
- [8] O. Merlo y T.H. Seligman C. Jung, C. Mejía-Monasterio. Self-pushing effect in chaotic scattering. *New Journal of Physics*, 6, 2004.
- [9] Juergen Quandt. On the Hartman–Grobman theorem for maps. *Journal of Differential Equations*, 64:154–164, 1986.

BIBLIOGRAFÍA

- [10] Anthony M. Bloch y Melvin Leok Tomoki Ohsawa. Discrete Hamilton-Jacobi theory. *SIAM J. Control Optim.*, 49:1822–1856, 3009.
- [11] B. Rückerl y C. Jung. Scaling properties of a scattering system with an incomplete horseshoe. *J. Phys A: Math.*, 27:55–77, 1994.
- [12] B. Rückerl y C. Jung. Hierarchical structure in the chaotic scattering off a magnetic dipole. *J. Phys A: Math.*, 27:6741–6758, 1994.
- [13] C. Lipp y T.H. Seligman C. Jung. The inverse scattering problem for chaotic hamiltonian systems. *Annals of Physics*, 275:151–189, 1999.
- [14] Edward Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 5th edition, 1993.
- [15] Charles P. Poole y John L. Safko Herbert Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 3 edition, 2000.
- [16] Vladimir I. Arnol'd. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, volume 1 of *Analytic Mechanics*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1992.
- [17] Vladimir I. Arnol'd y Roger Cooke. *Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, 1991.
- [18] Jack K. Hale. *Ordinary Differential Equations*. Krieger Pub Co, 1980.
- [19] Ferdinand Verhulst. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, 1985.
- [20] Robert L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Adyson-Wesley, 2nd edition, 1989.
- [21] Robert L. Devaney y Glen R. Hall Paul Banchard. *Ecuaciones diferenciales*. Thomson, 1th edition, 1998.
- [22] Stephen T. Thornton y Jerry B. Marion. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Thomson, 5th edition, 2004.
- [23] R.Baker Kearfott y Michael J. Cloud Ramon E. More. *Introduction to Interval Analysis*. SIAM, 2009.
- [24] Interval Arithmetic (paquete de julia). <https://juliaintervals.github.io/IntervalArithmetic.jl/stable/>.
- [25] Validated Numerics (paquete de julia). <https://github.com/JuliaIntervals/ValidatedNumerics.jl>.
- [26] Static Arrays (paquete de julia). <https://github.com/JuliaArrays/StaticArrays.jl>. v0.7.2.

BIBLIOGRAFÍA

- [27] Interval Root Finding (paquete de julia). <https://github.com/JuliaIntervals/IntervalRootFinding.jl>.
- [28] A. J. Insel y L.E. Spence Stephen H. Friedberg. *Algebra lineal*. Publicaciones Culturales S.A., 1 edition.
- [29] Mateo Wirth. Invariant manifolds of dynamical systems and an application to space exploration. http://pi.math.cornell.edu/~templier/junior/final_paper/Mateo_Wirth.pdf.
- [30] Calvin D. Ahlbrandt y Allan C. Peterson (auth.). *Discrete Hamiltonian Systems: Difference Equations, Continued Fractions, and Riccati Equations*. Kluwer Texts in the Mathematical Sciences 16. Springer US, 1 edition, 1996.
- [31] W. Tucker. *Validated Numerics: A short introduction to Rigorous Computations*. Princeton University Press.
- [32] Tamás Tél Ying-Cheng Lai. *Transient Chaos*, volume 173 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 1 edition, 2010.
- [33] *Complex Analysis*.