



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MÉTODO DE PARAMETRIZACIÓN: VARIEDADES
ESTABLES E INESTABLES EN MAPEOS
HAMILTONIANOS DE DOS DIMENSIONES

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

Físico

PRESENTA:

Evelyn Álvarez Cruz

TUTOR:

Dr. Luis Benet Fernández



México, D.F., 2018

*A mis padres y mis hermanos, quienes me enseñaron
Gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación
Tecnológica(PAPIIT) de la UNAM con clave IG100616. Agradezco a la
DGPA-UNAM la beca recibida.*

Declaración de autenticidad

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

Evelyn Álvarez Cruz. México, D.F., 2018

Introducción

En el análisis de sistemas dinámicos es importante desarrollar aspectos que nos ayuden a describir de manera puntual el comportamiento de un sistema, esto ya que muchos de ellos tienen una dinámica rica en el sentido matemático y físico. Conocer por ejemplo los puntos fijos, las órbitas periódicas, el diagrama de bifurcación, entre otras características es una manera de poder decir mucho sobre el sistema en general. Entre esas características está el estudio de las variedades estables e inestables alrededor de puntos fijos o de periodo n . La importancia de las variedades radica en que mediante éstas se puede conocer el comportamiento del sistema dinámico en las vecindades del punto periódico, además para algunos casos la intersección de las mismas lleva a resultados interesantes sobre caos. Se puede por ejemplo estudiar el problema de los tres cuerpos mediante el estudio de sus variedades cerca del punto fijo, haciendo una linearización del problema.

El estudio analítico de las variedades cerca de puntos periódicos (puntos fijos y de periodo igual o mayor a dos) se ha complementado con el numérico. Dentro de los métodos semianalíticos se encuentra el de parametrización [1]. El método de parametrización, dicho de manera simple consiste en aproximar mediante series de Taylor las variedades alrededor de puntos periódicos usando que las variedades son solución a la ecuación de invariancia. Los coeficientes de los polinomios de Taylor se van calculando de manera recursiva. El método se describe en el trabajo de J.D. Mireles [2], quién lo aplicó de manera particular al mapeo estándar, describiendo muy claramente cómo se obtienen las relaciones de recurrencia; su trabajo es la motivación de esta tesis.

El objetivo de este trabajo es ir más allá de implementar el método de parametrización para el mapeo estándar. Siguiendo las notas mencionadas se automatizó el método de manera computacional primero para el mapeo estándar y luego se hizo de manera general para cualquier mapeo de dos dimensiones. Con el método implementado se obtienen las variedades estable e inestable alrededor de puntos fijos hiperbólicos, parametrizadas por medio de un polinomio de orden n . Teniendo las variedades se hizo un análisis de las intersecciones entre ellas y de cómo explotar el método para mejorar el error.

Este escrito se divide en tres partes. En el primer capítulo presentaré la teoría de los sistemas dinámicos Hamiltonianos que se usará a lo largo del método, junto con el

0. INTRODUCCIÓN

método de parametrización. Primero introducimos qué es un sistema dinámico junto con las definiciones de puntos fijos y órbitas periódicas, llegando a la teoría detrás de la ecuación de invariancia. Las matemáticas que se utilizan en el proceso de parametrización están al alcance de un estudiante de licenciatura de Física o Matemáticas, sin embargo la teoría detrás del funcionamiento del método es un tanto más elevada de nivel, por lo que sólo mencionaremos en esta parte las herramientas más fundamentales.

En el segundo capítulo pasaremos a describir brevemente cómo J.D Mireles aplica el método para un caso particular para posteriormente explicar cómo se procedió a implementar el método. En esta parte también se incluye el análisis del error y de la convergencia de las soluciones. El tercer y último capítulo consiste en analizar el mapeo estándar para reproducir algunos de los resultados presentados en [2]. También se analizarán otros mapeos como el de Hénon y el que aparece en el artículo [3]. Por último se presenta una breve perspectiva en la que mencionamos algunas de las ideas con las que se podría seguir trabajando a partir del método automatizado.

Dado que es un trabajo semianalítico se incluirán algunos enlaces que llevarán a ejemplos o códigos que se usen dentro del programa, con la documentación correspondiente. También hay algunas partes interactivas que estarán en línea.

Índice general

Introducción	v
1. Sistemas Hamiltonianos de dos dimensiones	1
1.1. Sistemas dinámicos	1
1.2. Mapeos	3
1.3. Conjuntos invariantes	4
1.4. Sistemas Hamiltonianos	6
1.5. Método de parametrización	8
2. Método de parametrización	11
2.1. Desarrollo explícito para el mapeo estándar	11
2.2. Implementación del método	17
3. Ejemplos de aplicación del método	21
3.1. Mapeo Estándar	21
3.2. Mapeo de Hénon	27
3.3. Mapeo exponencial	32
3.4. Convergencia	35
3.5. Existencia de puntos homoclínicos/heteroclínicos	38
3.5.1. Estándar	38
3.5.2. Hénon	40
3.5.3. Mapeo exponencial	44
3.6. Rectángulo fundamental	46
4. Resumen y perspectivas	57
Bibliografía	59

Sistemas Hamiltonianos de dos dimensiones

Para llegar al análisis de los sistemas de nuestro interés mediante el método de parametrización es fundamental conocer algunos conceptos sobre la dinámica así como del análisis numérico del mismo. En este capítulo se hace una breve descripción de los teoremas y definiciones que nos ayudarán a entender el método. Las siguientes secciones no son la manera más formal de introducir al lector a cada uno de los temas expuestos. Sin embargo proporcionan una visión puntual de lo indispensable.

1.1. Sistemas dinámicos

Cuando uno habla sobre sistemas dinámicos lo que le viene a la mente es alguna relación que describe el comportamiento temporal de un sistema físico. Ya sea el movimiento de péndulos o de cargas, nos interesa saber más acerca de las características de su comportamiento. En el estudio de los mismos se hace una clasificación en términos de sus propiedades vistas en el espacio fase o por la forma del sistema. Hay sistemas dinámicos discretos y sistemas dinámicos continuos, en el primero el tiempo varía discretamente mientras que en el segundo varía de manera continua.

Dentro de estas características de clasificación también puede ser que el sistema sea de tipo determinista o estocástico. La diferencia entre ambos es que para el determinista dado un punto en el espacio fase existe uno y sólo un punto subsecuente bien definido, mientras que en el estocástico para un estado puede haber varios estados subsecuentes posibles. En algunos casos los sistemas resultan ser simples, por ejemplo si su movimiento es regular. En otros sistemas, dos condiciones iniciales cercanas se alejan exponencialmente con el tiempo. En este trabajo nos enfocaremos en los sistemas deterministas discretos.

1. SISTEMAS HAMILTONIANOS DE DOS DIMENSIONES

Para formalizar usaremos la siguiente definición de sistema dinámico.

Definición 1 (*Sistema dinámico*[4])

Un sistema dinámico es un semigrupo G actuando en un espacio M , definido por una relación de la forma

$$T : G \times M \rightarrow M; \quad T_g \circ T_h = T_{g \circ h}. \quad (1.1)$$

Un ejemplo típico de un sistema dinámico continuo es el flujo de una ecuación diferencial autónoma, mientras que de uno discreto es por ejemplo el mapeo de un intervalo cerrado en \mathbb{R} en sí mismo, o simplemente una función iterada. En el primer caso

$$\dot{x} = f(x); \quad x(0) = x_0, \quad (1.2)$$

suponiendo que $f \in C^k(M, \mathbb{R}^n)$ con $k \geq 1$ y donde M es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Las soluciones de este tipo de sistemas son curvas contenidas en \mathbb{R}^n a las que llamamos trayectorias y denotamos por ϕ .

En el segundo caso

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.3)$$

Para la ecuación (1.3) dada una condición inicial \mathbf{x}_0 podemos obtener el estado siguiente evaluando el lado derecho con tal punto. De manera sucesiva se puede obtener el estado \mathbf{x}_{n+1} del estado \mathbf{x}_n . La aplicación consecutiva de la función proporciona la trayectoria u órbita del punto inicial. Podemos decir que el mapeo es un isomorfismo entre la condición inicial y los puntos de la trayectoria,

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f} \circ \mathbf{f} \circ \mathbf{f} \circ \mathbf{f} \dots \circ \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \quad (k \text{ veces})$$

o

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}^k(\mathbf{x}_0).$$

Al conjunto $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ se le llama la órbita de \mathbf{x}_0 . En este tipo de sistemas es posible que exista un \mathbf{x}_* tal que $\mathbf{f}^p(\mathbf{x}_*) = \mathbf{x}_*$ con $p \in \mathbb{Z}$. Es decir después de un número finito de aplicaciones se vuelve al mismo punto (\mathbf{x}_*) al cual le llamamos un punto de periodo p . También es entonces posible que exista un punto de periodo uno $\mathbf{x}_* = \mathbf{f}(\mathbf{x}_*)$ al cual llamamos punto fijo. Los puntos fijos serán otra forma de clasificar a los sistemas dinámicos, para ello separamos las órbitas en términos de los periodos:

- Órbitas fijas (asociadas a puntos con periodo uno).
- Órbitas periódicas regulares (asociadas a puntos con periodo mayor a uno).
- Órbitas no cerradas (asociadas a puntos no periódicos).

Nos enfocaremos sobre todo en los puntos fijos, sin embargo es posible también analizar aquellos puntos de periodo mayor a uno.

1.2. Mapeos

Como mencionamos en la introducción existen diferentes características de los sistemas dinámicos, la forma en la que depende un estado del estado anterior es una de ellas. Esa dependencia está determinada por \mathbf{f} en la ecuación (1.3); gráficamente se describe en el espacio fase, que es el espacio de todos los posibles valores de \mathbf{x} . En el mismo espacio la órbita de cualquier punto se ve como una trayectoria que representa la evolución de un punto \mathbf{x} bajo el mapeo hacia adelante y hacia atrás.

Las funciones que aparecen en el mapeo pueden contener términos con potencia mayor a uno, productos entre las variables o peor aún funciones mucho más difíciles de manejar, lo que hace que la suma de soluciones no sea solución, esa característica se llama no linealidad. Una de las primeras cosas a analizar serían los puntos fijos del sistema, los cuales deberán encontrarse algebraicamente o numéricamente dependiendo de la dificultad del mapeo, al rededor de los cuales pueden presentarse diversos comportamientos de las trayectorias.

Si tenemos un punto fijo \mathbf{x}_* asociado al mapeo entonces la ecuación

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n, \quad (1.4)$$

representa el sistema linealizado alrededor del punto, donde $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_*)$. Es decir el mapeo puede ser representado como una matriz de coeficientes constantes, además si el sistema dinámico es invertible se puede conocer el punto anterior \mathbf{x}_{n-1} a un cierto \mathbf{x}_n usando la matriz inversa de \mathbf{A} que representa la linearización del mapeo inverso \mathbf{f}^{-1} . Es decir las características de tal matriz nos dirán el comportamiento del sistema.

Dado que los sistemas tratados en este trabajo son de dos dimensiones entonces analizaremos sólo este caso. Los valores propios λ_1, λ_2 , soluciones del polinomio característico de grado dos, son en general valores complejos clasificados como sigue.

- $|\lambda_i| < 1$
- $|\lambda_i| > 1$
- $|\lambda_i| = 1$

En cada uno de los casos anteriores tenemos un vector propio \mathbf{x}_{p1} asociado, tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_{p1} = \lambda_1\mathbf{x}_{p1}. \quad (1.5)$$

Los vectores serán linealmente independientes si λ_1, λ_2 son diferentes. Si además consideramos que los valores propios son reales, según [5] existe una matriz \mathbf{U} tal que

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

A partir de esto es fácil ver que \mathbf{U} tiene como columnas los vectores propios. Consecuentemente un mapeo lineal de dimensión dos es linealmente conjugado con un mapeo el cual tiene una matriz de representación diagonal. Este tipo de matrices son llamadas formas normales y permiten representar el sistema en su forma más simple mediante la diagonalización del mismo [6].

Cuando los valores propios de \mathbf{A} son en valor absoluto igual a uno entonces decimos que el punto fijo tiene un comportamiento elíptico. Si es el caso que un valor propio tiene valor absoluto mayor a uno y otro menor a uno entonces el punto fijo asociado es un punto fijo hiperbólico. El resultado de estas características visto en el espacio fase es un comportamiento muy particular que se muestra en la figura 1.1.

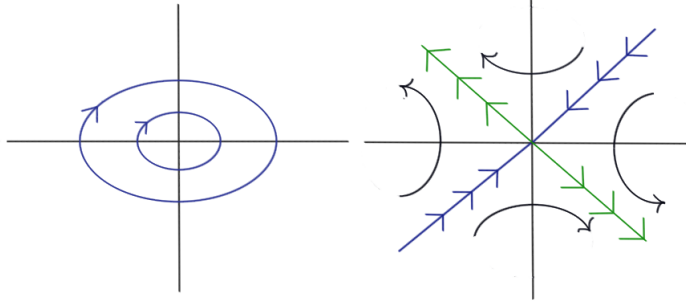


Figura 1.1: Punto fijo elíptico(izquierda) e hiperbólico(derecha) en el espacio fase.

En el caso hiperbólico tenemos dos comportamientos que nos interesan, marcados con las líneas azul y verde de la figura 1.1, tales corresponden a los eigenespacios asociados a los vectores propios de \mathbf{A} . Existe un teorema importante de Hartman-Grobman que nos asegura que hay una vecindad del punto fijo hiperbólico tal que el mapeo es topológicamente conjugado a su linearización [7, 8, 9]. Dicho de otra manera, hay vecindades U de \mathbf{x}_* , V de $0 \in \mathbf{R}^2$ y un homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ tal que h mapea trayectorias de \mathbf{f} en trayectorias del sistema lineal. De esta manera justificamos el porque se trabaja con un sistema lineal.

1.3. Conjuntos invariantes

Alrededor de un punto fijo existen ciertos conjuntos que nos dirán algunas características del sistema; estos conjuntos tienen que ver directamente con lo que se observa en la figura 1.1. Para entender su comportamiento necesitamos definir qué es un conjunto invariante.

Definición 2 (Conjunto invariante[10])

Un conjunto invariante es un subconjunto $\mathbf{I} \subset \mathbf{E}$ del espacio fase tal que para cualquier $\mathbf{x}_i \in \mathbf{I}$ y $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{f}^n(\mathbf{x}_i) \in \mathbf{I}.$$

Es decir que cualquier elemento tomado en el conjunto se queda en el conjunto bajo la aplicación del mapeo.

Estudiaremos los conjuntos invariantes asociados a puntos fijos hiperbólicos. Si \mathbf{x}_* es un punto fijo hiperbólico entonces definimos las variedades estable e inestable como

$$W^s = \{\mathbf{x} : \mathbf{f}^n(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{x}_* \text{ cuando } n \rightarrow \infty\} \quad (1.7)$$

$$W^u = \{\mathbf{x} : \mathbf{f}^n(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{x}_* \text{ cuando } n \rightarrow -\infty\}. \quad (1.8)$$

Localmente las variedades resultan ser tangentes a los subespacios generados por los vectores propios

$$E^s = \{(x, y) : (x, y) = \beta \mathbf{v}_1 \quad \beta \in \mathbb{R}\},$$

$$E^u = \{(x, y) : (x, y) = \alpha \mathbf{v}_2 \quad \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Esto se resume en el siguiente teorema.

Teorema 1 (De la variedad estable [11])

Sea un sistema de la forma $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ con un punto fijo en el origen. Sean E^s y E^u los subespacios estables e inestables de la linealización del sistema, $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \rightarrow \mathbb{J}\mathbf{x}_n$, donde \mathbb{J} es la matriz Jacobiana en el origen. Si $|\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbb{J}\mathbf{x}_n| = O(x^2)$ entonces existen localmente variedades estables e inestables con las mismas dimensiones que E^s, E^u y que son tangentes a éstos en cero respectivamente.

$$W_{loc}^s(\mathbf{x}_*) = \{\mathbf{x}_* : \mathbf{f}^k(\mathbf{x}_n) \rightarrow \mathbf{x}_* \text{ cuando } k \rightarrow \infty\},$$

$$W_{loc}^u(\mathbf{x}_*) = \{\mathbf{x}_* : \mathbf{f}^k(\mathbf{x}_n) \rightarrow \mathbf{x}_* \text{ cuando } k \rightarrow -\infty\}.$$

Es necesario mencionar que una variedad estable no puede cruzarse con otra variedad estable, lo mismo sucede con las inestables, así como con la intersección de una variedad consigo misma. Para entender esto consideremos que se tienen dos puntos fijos diferentes con sus respectivas variedades inestables asociadas. Supongamos que las variedades se cruzan en algún punto. Si esto pasa la órbita hacia atrás de cualquiera de los dos puntos empezando en la intersección debería aproximarse a ambos puntos fijos, lo cual es imposible pues son diferentes. El argumento para la intersección de las estables es similar. Lo que sí puede suceder es la intersección de una variedad estable con una inestable, asociadas al mismo punto fijo; a esto se le llama una intersección homoclínica. Si la intersección es entre variedades asociadas a diferentes puntos fijos entonces se llama heteroclínica [10]. Resulta además que si dos variedades, estable e inestable, se cortan en un punto se cortarían una infinidad de veces más.

El cálculo de variedades alrededor de un punto fijo es un problema difícil de atacar analíticamente, pues su comportamiento puede ser muy complejo, por ello es necesario explotar al máximo la linealización que se hace del sistema para poder, con métodos numéricos o semianalíticos, calcular las variedades.

1.4. Sistemas Hamiltonianos

Los sistemas Hamiltonianos son una clase particular de los sistemas dinámicos. En 1834 William R. Hamilton reformuló la ecuación de Newton ($F = ma$) para un conjunto de partículas puntuales en un campo de fuerzas. Cuando la fuerza \mathbf{F} es conservativa es posible escribir a la fuerza como el negativo del gradiente de una función potencial

$$\mathbf{F} = -\nabla V. \quad (1.9)$$

Podemos convertir la ecuación (1.9) en un sistemas de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i, \quad (1.10)$$

$$m \frac{dv_i}{dt} = -\nabla_i V. \quad (1.11)$$

Las ecuaciones (1.10) y (1.11) pueden obtenerse a partir de una función muy particular

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2} + V(q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (1.12)$$

llamada Hamiltoniana, donde p denota el momento y q la posición y sin pérdida de generalidad se tomó $m = 1$. De manera general, cuando se tiene un sistema de la forma

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} + V(q), \quad (1.13)$$

las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (1.14)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (1.15)$$

De aquí obtenemos para el caso de (1.12)

$$\frac{dq}{dt} = p \quad (1.16)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{dV(q)}{dq} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (1.17)$$

sin pérdida de generalidad podemos tomar $T = 1$ e integrar la ecuación (1.16) en el intervalo $[t_n - \epsilon, t_{n+1} - \epsilon]$ con $\epsilon > 0$

$$\int_{t_n - \epsilon}^{t_{n+1} - \epsilon} \frac{dq}{dt} dt = \int_{t_n - \epsilon}^{t_{n+1} - \epsilon} p dt, \quad (1.18)$$

usando el teorema fundamental del cálculo

$$q(t_{n+1} - \epsilon) - q(t_n - \epsilon) = \epsilon p(t_n - \epsilon) + (1 - \epsilon)p(t_{n+1} - \epsilon). \quad (1.19)$$

Hacemos lo mismo para la ecuación (1.17)

$$\int_{t_n - \epsilon}^{t_{n+1} - \epsilon} \frac{dp}{dt} dt = \int_{t_n - \epsilon}^{t_{n+1} - \epsilon} -\frac{dV(q)}{dq} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n), \quad (1.20)$$

resultando

$$p(t_{n+1} - \epsilon) - p(t_n - \epsilon) = -\frac{dV(q)}{dq}. \quad (1.21)$$

Tomando el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ en las ecuaciones (1.19), (1.21)

$$q(t_{n+1}) = p(t_{n+1}) + q(t_n), \quad (1.22)$$

$$p(t_{n+1}) = p(t_n) - \frac{dV(q(t_n))}{dt}. \quad (1.23)$$

Las ecuaciones (1.22), (1.23) ya está en forma de un sistema de los que estudiamos anteriormente. Para linearizar el sistema calculamos el jacobiano

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(q_{n+1}, p_{n+1})}{\partial(q_n, p_n)}, \quad (1.24)$$

con $q_{n+1} = q(t_{n+1})$ y análogamente para p . Es justo de este sistema linearizado de donde obtendremos información a partir de aplicar los teoremas y resultados de las secciones anteriores.

1.5. Método de parametrización

Como ya observamos en la sección anterior encontrar las variedades asociadas a un punto fijo no es trivial. Los métodos analíticos se vuelven no sólo tediosos si no que hacen necesario que el análisis de un sistema se haga de forma particular. Y para encontrar tales variedades debemos explotar los conocimientos que tenemos sobre los sistemas. Algunas de estas características son realmente simples, por ejemplo sabemos que en un punto hiperbólico resultarán dos variedades asociadas a los valores propios de la matriz que representa el sistema linearizado. Para este trabajo nos concentraremos en los sistemas Hamiltonianos ya que estos preservan el área y son importantes en la física, sin embargo el método funciona también para sistemas no Hamiltonianos. El objetivo de esta sección es describir sobre el método de parametrización el cual fue desarrollado por X.Cabré, E. Fontich y R. de la Llave [1]. El método fue desarrollado de manera general para conjuntos invariantes, estables e inestables, en puntos hiperbólicos, tratándose de un método semianalítico, es decir parte computacional y parte analítica.

Para ahondar en el método recordemos que anteriormente mencionamos que los conjuntos (1.7), (1.8) son conjuntos invariantes. Por otro lado también recordemos la definición de sistema dinámico que nos dice que se trata de un semigrupo actuando sobre un espacio M , la manera en la que se genera el sistema es con un difeomorfismo $\mathbf{f} : M \rightarrow M$. En este mismo espacio M definamos una inmersión inyectiva $P : \Theta \rightarrow M$ con $\theta \in \mathbb{R}$, lo cual nos define una subvariedad P parametrizada por medio de las variables locales en $\theta \in \Theta$. La variedad invariante parametrizada por P junto con $g : \Theta \rightarrow \Theta$ deben cumplir

$$\mathbf{f} \circ P = P \circ g, \quad (1.25)$$

llamada ecuación de invariancia [1]. Es decir P y g son de tal forma que hacen que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} \Theta \subset \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \Theta \subset \mathbb{R} \\ \downarrow P & & \downarrow P \\ M \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\mathbf{f}} & M \subset \mathbb{R}^n \end{array} \quad (1.26)$$

En este sentido g representa un subsistema de \mathbf{f} , en otras palabras g contiene la dinámica del mapeo pero sobre Θ . El objetivo del método de parametrización es encontrar P y g que cumplan la ecuación de invariancia (1.25). Aunque no conozcamos la dinámica interna de g sabemos que P y g son soluciones de (1.25), si observamos el diagrama (1.26) es claro que la composición también lo es y eso nos dará una libertad para resolver la ecuación. El obstáculo, no conocer g , se puede pasar si se escoge una forma de parametrización que dependa del sistema; en el método de parametrización se tienen descritas dos formas: la forma gráfica y la forma normal. Usaremos el método de la forma gráfica, que es la forma más simple de parametrización. Consiste en adaptar

la forma de la parametrización P a la forma de las variedades, la cual está relacionada con la dirección que proporcionan los vectores propios. Para el caso de una matriz hiperbólica de 2×2 sus vectores propios nos indicarán, suficientemente cerca del punto fijo, la dirección de cada variedad.

La forma en la que se escoge g , en la mayoría de las veces, es polinomial de tal manera que se adapte a la forma del mapeo. Sin embargo la elección puede ser diferente dependiendo del sistema. En este caso escogimos la dependencia más sencilla para x, y (1.27) que resulta ser suficiente en el caso hiperbólico

$$g(t) = \lambda t. \quad (1.27)$$

Con esto tendremos del lado derecho de la ecuación (1.25) un polinomio.

Supongamos ahora que tenemos ya las variedades parametrizadas, para este punto es importante tener una función que nos indique qué tan acertada es nuestra parametrización. La primera y más fácil forma de calcular el error es a partir de la ecuación (1.25), mediante la resta

$$E_n(t) = \| \mathbf{f} \circ P_n - P_n \circ g \|_\infty. \quad (1.28)$$

Este error será el asociado a la variación con respecto a la ecuación de invariancia. Dado que depende del parámetro esperamos que el error vaya creciendo conforme se evalúa en valores de t más alejados del punto fijo. La otra forma de evaluar qué tan lejos podemos llegar con la parametrización es ver la convergencia de los polinomios asociados. Al tener los polinomios que parametrizan la variedad, con coeficientes a_n y b_n de orden n , podemos evaluar el cociente entre ellos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}, \quad (1.29)$$

con $(a_0, b_0) = \mathbf{x}_*$ los coeficientes de orden cero. Lo que prácticamente estamos haciendo con este cociente es lo que se llama estudiar la convergencia según Hadamard. Si el límite anterior tiende a cero entonces la serie a_n converge. Otra forma de evaluarlo es usando la relación de tres términos [12].

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left[i \left(\frac{a_{i+1}}{a_i} \right) - (i-1) \left(\frac{a_i}{a_{i-1}} \right) \right]. \quad (1.30)$$

Aunque el método se aplica de la misma manera para los puntos fijos de mapeos de dos dimensiones, la parametrización será diferente en cada mapeo y en cada punto fijo, por lo que la convergencia de cada parametrización es distinta.

Método de parametrización

En este capítulo describimos cómo se implementó el método de parametrización aplicado a sistemas Hamiltonianos. Se comienza explicando el análisis del mapeo estándar siguiendo el trabajo de Mireles James [2]. A partir de este trabajo se generalizó el método para los sistemas Hamiltonianos de dos dimensiones de manera que dado un mapeo el método programado en Julia pudiera calcular de manera recurrente los polinomios asociados a las variedades.

2.1. Desarrollo explícito para el mapeo estándar

Para desarrollar el método de parametrización de manera automática se usó como base el desarrollo que aparece en las notas [2]. En este trabajo se expone de manera explícita cómo se calculan las variedades estables e inestables para el mapeo estándar. El mapeo estándar tiene la forma

$$\mathbf{f}_k(\theta, p) = \begin{bmatrix} \theta + p \\ p + k \sin(\theta + p) \end{bmatrix} \pmod{2\pi}, \quad (2.1)$$

mientras el inverso es

$$\mathbf{f}_k^{-1}(p, \theta) = \begin{bmatrix} p - k \sin(\theta) \\ \theta - p + k \sin \theta \end{bmatrix} \pmod{2\pi}. \quad (2.2)$$

Los puntos fijos del mapeo serán aquellos que

$$\mathbf{f}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad (2.3)$$

con $\mathbf{x} = (\theta, p)$. El resultado de esta condición son los puntos $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$ y $\mathbf{x}_2 = (0, \pi)$. Para analizar la estabilidad lineal del mapeo hacemos

$$D\mathbf{f}_k(\theta, p) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k \cos(\theta + p) & 1 + k \cos(\theta + p) \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

2. MÉTODO DE PARAMETRIZACIÓN

Al evaluar $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ en (2.4) resulta

$$D\mathbf{f}_k(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & 1+k \end{pmatrix}, \quad D\mathbf{f}_k(0, \pi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -k & 1-k \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

A partir de esto podemos obtener los valores propios para \mathbf{x}_1 que resultan

$$\lambda_{1,2} = \frac{2+k \pm \sqrt{k^2+4k}}{2}, \quad (2.6)$$

cuyos vectores propios (y_1, y_2) cumplen que

$$y_2 = y_1 \left(\frac{1 \pm \sqrt{k^2+4k}}{2k} \right), \quad (2.7)$$

los cuales son hiperbólicos para cualquier $k > 0$. Mientras que para \mathbf{x}_2

$$\lambda_{1,2} = \frac{-k+2 \pm \sqrt{k^2-4k}}{2} \quad 0 < k < 4, \quad (2.8)$$

resultan valores complejos, por lo que para el análisis sólo se ocupará el punto \mathbf{x}_1 .

Escribimos a las variables (θ, p) como dos polinomios en t , para encontrar la parametrización de las variedades

$$\theta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad (2.9)$$

y

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \quad (2.10)$$

tal que $P(t) := (\theta(t), p(t))$. Necesitamos la parametrización también de la dinámica interna g , para la cual usamos la ecuación 1.27. Después de sustituir esto en la (1.25) para el mapeo estándar obtenemos

$$\mathbf{f}_k(\theta, p) = \begin{bmatrix} \theta(t) + p(t) \\ p(t) + k \sin(\theta(t) + p(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(\lambda t) \\ p(\lambda t) \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

que en forma explícita es

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n + k \sin(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n t^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n t^n \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Desarrollando el primer renglón de la ecuación (2.12)

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots = a_0 + a_1 \lambda t + \dots \quad (2.13)$$

Agrupamos términos del mismo orden y comparamos primero los de orden cero

$$a_0 + b_0 = a_0, \quad (2.14)$$

que implica $b_0 = 0$. Hacemos lo mismo pero ahora con el renglón dos de (2.12) usando la serie de Taylor del seno

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n + k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right]^{2j+1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n t^n, \quad (2.15)$$

desarrollamos cada suma tomando en cuenta que $b_0 = 0$

$$\begin{aligned} & b_1 t + b_2 t^2 + \dots + k [a_0 + (a_1 + b_1)t + \dots] - \\ & \frac{k}{3!} [a_0 + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \dots]^3 + \dots \\ & = b_1 \lambda t + b_2 \lambda^2 t^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.16)$$

e igualamos los términos de orden cero

$$k a_0 + \frac{k}{3!} a_0^3 + \dots = 0, \quad (2.17)$$

por lo que $a_0 = 0$, recordemos que a_0, b_0 es el punto fijo. Si ahora usamos los de orden uno en la ecuación (2.13), (2.16) respectivamente

$$(a_1 + b_1)t = a_1 \lambda t, \quad (2.18)$$

$$b_1 t + k(a_1 + b_1)t = b_1 \lambda t. \quad (2.19)$$

Al dividir entre t ambas ecuaciones podemos escribir las ecuaciones en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & 1+k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Es posible obtener las soluciones para a_1 en términos de b_1 y de λ en términos de k . Este procedimiento es básicamente el análisis lineal al rededor del punto $(0, 0)$. Análogamente se pueden obtener los coeficientes a_2, b_2 , tomando los términos cuadráticos de la ecuación 2.13 y agrupando obtenemos

$$(a_2 + b_2)t^2 = a_2 \lambda^2 t^2. \quad (2.21)$$

De la misma forma tomamos los coeficientes de los términos cuadráticos en la ecuación 2.16 y obtenemos

$$b_2 t^2 + k(a_2 + b_2)t^2 = b_2 \lambda^2 t^2. \quad (2.22)$$

2. MÉTODO DE PARAMETRIZACIÓN

Al dividir 2.21 y 2.22 entre t^2 podemos formar el sistema matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & 1+k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Podemos resolver el sistema en términos de λ^2 y de k , como en el caso de a_1, b_1 . Sin embargo, obtener los términos de esta manera es un camino tedioso, por lo que recurrimos a encontrar relaciones de recurrencia que calculen los coeficientes de los polinomios. Usando de nuevo las ecuaciones (2.9), (2.10) escribimos

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n t^n = \sin \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right), \quad (2.24)$$

es decir la parte que aparece en el mapeo $\sin(\theta + p)$ se puede ver como un solo polinomio con coeficientes β_n . Al considerar de forma compleja a W tenemos

$$\overline{W} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n) t^n = \exp(i(\theta(t) + p(t))), \quad (2.25)$$

y calculando la derivada de la ecuación (2.25) resulta

$$\overline{W}' = i\overline{W}(\theta'(t) + p'(t)). \quad (2.26)$$

Al desarrollar en potencias de t y usando convolución en (2.26)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(\alpha_{n+1} + i\beta_{n+1}) t^n = i \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n + i \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n, \quad (2.27)$$

con

$$c_n = \sum_{l=0}^n (l+1)(\alpha_{n-l} + i\beta_{n-l}) a_{l+1}, \quad d_n = \sum_{l=0}^n (l+1)(\alpha_{n-l} + i\beta_{n-l}) b_{l+1}. \quad (2.28)$$

Con algo de álgebra se pueden desarrollar las sumas y separar las partes real y compleja de cada lado para compararlas, llegando a que la parte real es

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\alpha_{n+1} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[- \sum_{l=0}^n (l+1)\beta_{n-l}(a_{l+1} + b_{l+1}) \right] t^n, \quad (2.29)$$

mientras que la imaginaria

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\beta_{n+1} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^n (l+1)\alpha_{n-l}(a_{l+1} + b_{l+1}) \right] t^n. \quad (2.30)$$

Podemos volver a igualar potencias de t en (2.29), (2.30) y despejando $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ obtenemos

$$\alpha_{n+1} = \frac{-1}{n+1} \sum_{l=0}^n (l+1)\beta_{n-l}(a_{l+1} + b_{l+1}), \quad (2.31)$$

$$\beta_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^n (l+1) \alpha_{n-l} (a_{l+1} + b_{l+1}), \quad (2.32)$$

que son las relaciones de recurrencia para α, β en términos de los coeficientes del polinomio, con las que podemos calcular $\sin(\theta + p)$. Acabamos de usar un truco en el que fue muy importante la forma del mapeo en el que sólo tuvimos que usar una expansión en serie de Taylor, sin embargo si en el mapeo aparecieran productos de funciones, no necesariamente se podrán factorizar fácilmente los términos de cada orden.

Para obtener las relaciones de recurrencia de a_n, b_n usaremos el caso $t = 0$ pues ya sabemos los primeros valores de las constantes $\alpha_0, \beta_0, a_0, b_0$, entonces al sustituir $t = 0$ en la ecuación (2.25) resulta

$$\overline{W}(0) = \alpha_0 + i\beta_0 = \cos(\theta(0) + p(0)) + i\sin(\theta(0) + p(0)) = 1, \quad (2.33)$$

por lo que $\alpha_0 = 1, \beta_0 = 0$, ahora ya tenemos los valores iniciales de la recursión y por tanto podemos calcular los otros valores. Para encontrar los demás coeficientes usemos la ecuación (2.12) pero tomando en cuenta la forma en la que escribimos al seno

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n t^n, \quad (2.34)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n + k \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda^n t^n. \quad (2.35)$$

Reescribimos las ecuaciones anteriores de manera que nos permita comparar términos de la misma potencia

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda^n) a_n t^n = - \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n, \quad (2.36)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda^n) b_n t^n = -k \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n, \quad (2.37)$$

entonces los coeficientes de t^{n+1} son

$$(1 - \lambda^{n+1}) a_{n+1} = -b_{n+1}, \quad (2.38)$$

$$(1 - \lambda^{n+1}) b_{n+1} = -k \beta_{n+1}. \quad (2.39)$$

Sustituyendo (2.32) en (2.39)

$$(1 - \lambda^{n+1}) b_{n+1} = \frac{-k}{n+1} \sum_{l=0}^n (l+1) \alpha_{n-l} (a_{l+1} + b_{l+1}). \quad (2.40)$$

2. MÉTODO DE PARAMETRIZACIÓN

Como buscamos una ecuación para la recurrencia separaremos el término $l = n$ del lado derecho de (2.40)

$$(1 - \lambda^{n+1})b_{n+1} = -\frac{k}{n+1} \sum_{l=0}^{n-1} (l+1)\alpha_{n-l}(a_{l+1} + b_{l+1}) - k(a_{n+1} + b_{n+1}), \quad (2.41)$$

y agrupamos de manera que los coeficientes a_{n+1}, b_{n+1} queden en el mismo lado de la ecuación

$$ka_{n+1} + (1 - \lambda^{n+1} + k)b_{n+1} = -\frac{k}{n+1} \sum_{l=0}^{n-1} (l+1)\alpha_{n-l}(a_{l+1} + b_{l+1}). \quad (2.42)$$

Usando las ecuaciones (2.38) y (2.42) escribimos un sistema de ecuaciones para a_{n+1}, b_{n+1} en forma matricial

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = -\frac{k}{n+1} \sum_{l=0}^{n-1} (l+1)\alpha_{n-l}(a_{l+1} + b_{l+1}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

siendo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a - \lambda^{n+1} & 1 \\ k & 1 - \lambda^{n+1} + k \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Escrito de esta forma es claro que podemos resolver el sistema multiplicando por \mathbf{A}^{-1} siempre que $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = -\frac{k}{n+1} \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{n-l}(a_{l+1} + b_{l+1}) \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

siendo

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{(1 - \lambda^{n+1})(1 - \lambda^{n+1} - k) - k} \begin{pmatrix} 1 - \lambda^{n+1} + k & -1 \\ -k & 1 - \lambda^{n+1} \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Al escribir de manera separada la ecuación (2.45) obtenemos las relaciones de recurrencia para los coeficientes de la parametrización

$$a_{n+1} = \frac{k}{(n+1)[(1 - \lambda^{n+1})(1 - \lambda^{n+1} + k) - k]} \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{n-l}(l+1)(a_{l+1} + b_{l+1}), \quad (2.47)$$

$$b_{n+1} = \frac{-k1 - \lambda^{n+1}}{(n+1)[(1 - \lambda^{n+1})(1 - \lambda^{n+1} + k) - k]} \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{n-l}(l+1)(a_{l+1} + b_{l+1}). \quad (2.48)$$

Usando cada uno de los valores propios y las anteriores ecuaciones de recurrencia obtendremos los coeficientes de los polinomios $\theta(t), p(t)$ a cualquier orden. Dependiendo de qué valor de λ se tome tendremos la parametrización de la variedad estable o de la inestable.

2.2. Implementación del método

En esta sección explicaremos paso a paso la cómo se implementó el método. Supondremos que se tiene un mapeo Hamiltoniano $\mathbf{f}_k(\mathbf{x})$ donde k es un parámetro, del cual tenemos un punto fijo $\mathbf{x}_* = (\theta_*, p_*)$. En la siguiente liga se encuentra el archivo llamado N5(Implementación.ipynb) que contiene el ejemplo de cómo se aplica el método paso a paso para el mapeo estándar, <https://github.com/alvarezeve/Tesis-Variedades-Estables-e-inestables/>.

Primer orden

.....
<i>Primero se crean dos variables θ, p del mapeo, como dos polinomios de grado mayor a uno que corresponden a \mathbf{x}_1 en (1.3).</i>	$\mathbf{x}_1 = (\theta + \dots, p + \dots)$
.....
<i>Creamos dos polinomios de variable t de orden uno que representan la variedad. Los coeficientes de orden cero son el punto fijo.</i>	$P_\theta = \theta_* + (\theta + \dots)t + O(t^2)$ $P_p = p_* + (p + \dots)t + O(t^2)$
.....
<i>Aplicamos el mapeo \mathbf{f}_k a los polinomios anteriores lo cual corresponde al lado izquierdo de (1.25).</i>	$C_1 = \mathbf{f}_k(P_\theta, P_p)$
.....

Hasta este momento hemos calculado la parte izquierda de la ecuación de invariancia, nos ocuparemos del lado derecho más adelante. La razón por la que se escriben los coeficientes de $P = (P_\theta, P_p)$ a su vez como polinomios es que al escribir un polinomio en el coeficiente es posible tratarlo como una variable. Es decir la θ en $P_\theta = \theta_* + (\theta + \Delta\theta)t$ representa la incógnita del coeficiente de orden uno. Para encontrar el primer orden de los polinomios P_θ, P_p escribimos todo en forma matricial.

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{w} \quad (2.49)$$

donde la matriz \mathbf{A} contiene a los coeficientes de orden $n = 1$ de P , mientras que $\mathbf{v} = (a_1, b_1)$ y \mathbf{w} tiene los términos independientes de P .

.....
<i>La matriz \mathbf{A} se calculó con el jacobiano de P_n, permitiéndonos obtener los coeficientes de orden uno</i>	$\mathbf{J}(\mathbf{f}_k(P_\theta, P_p))$
.....

2. MÉTODO DE PARAMETRIZACIÓN

Calculamos ahora los valores y vectores propios de \mathbf{A}

$$[\lambda_1, \lambda_2]$$

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$$

Escogemos el valor y vector propio asociados a la variedad que queramos.

$$\lambda_2, \mathbf{v}_2 = (a_1, b_1)$$

Los valores de \mathbf{v}_2 serán los coeficientes de orden uno en los polinomios P_θ, P_p , que acompañan a t . Al ser los vectores propios proporcionan una dirección tangente a la variedad, que es justo la manera en la que se implementa el método usual.

Como se está usando el método gráfico necesitamos una forma polinomial para g y la forma más simple es usar 1.27 con λ_2 , $g(t) = (\lambda_2 t, \lambda_2 t)$. Además recordemos que nuestro sistema lo linearizamos para analizarlo y la matriz asociada a la linearización es justo la que contiene los vectores propios como columnas.

Segundo orden

Actualizamos los coeficientes en los polinomios.

$$P_\theta = \theta_* + a_1 t$$

$$P_p = p_* + b_1 t$$

Agregamos de nuevo las variables θ, p para calcular el término cuadrático.

$$P_\theta = \theta_* + a_1 t + (\theta) t^2 + O(t^3)$$

$$P_p = p_* + b_1 t + (p) t^2 + O(t^3)$$

Aplicamos el mapeo

$$C_2 = \mathbf{f}_k(P_\theta, P_p)$$

Necesitamos retomar el lado derecho de la ecuación de invariancia (1.25) para el cual tenemos un polinomio que tiene como coeficientes los valores de a_i multiplicados con una potencia del valor propio.

$$a_0 + a_1 \lambda t + a_2 \lambda^2 t^2 \tag{2.50}$$

$$b_0 + b_1 \lambda t + b_2 \lambda^2 t^2 \tag{2.51}$$

Escribimos el lado derecho de la ecuación (1.25) como polinomios en t

$$P_{\theta\lambda} = \theta_* + a_1 \lambda t + \theta \lambda^2 t^2 + O(t^3)$$

$$P_{p\lambda} = p_* + b_1 \lambda t + p \lambda^2 t^2 + O(t^3)$$

Ahora que tenemos las dos partes de la ecuación (1.25) para el orden 2 podemos resolverla.

Definimos una ecuación que será la resta de ambos lados de la expresión (1.25) igualada a cero. Con tal condición el término de orden dos cumple una ecuación lineal inhomogénea, en donde la matriz se obtiene calculando el jacobiano.

Acomodamos los valores independientes de h_θ, h_p en un vector \mathbf{w}_2 .

Escribimos el sistema en forma matricial (2.49) y resolvemos multiplicando por la inversa del lado izquierdo

El resultado de esta ecuación serán los coeficientes cuadráticos de P , es decir, a_2, b_2 .

$$\begin{aligned} R &:= C_2 - P_\lambda = \mathbf{0} \\ h_\theta(\theta, p)t^2 &= (C_{2\theta} - \theta\lambda^2)t^2 \\ h_p(\theta, p)t^2 &= (C_{2p} - p\lambda^2)t^2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{J}(h_\theta, h_p)$$

$$\mathbf{w}_2 = (c_\theta, c_p)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{w}_2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= (a_2, b_2) \\ P_\theta &= \theta_* + a_1 t + a_2 t^2 + O(t^3) \\ P_p &= p_* + b_1 t + b_2 t^2 + O(t^3) \end{aligned}$$

La manera de proceder con el cálculo de los coeficientes de orden cúbico es la misma que la de orden cuadrático. En cada orden n aparecerá la dependencia de λ^n debida a lado derecho de la ecuación de invariancia y a la forma de la función g . En general una vez actualizados los valores a_n, b_n se agrega un orden más a los polinomios P_θ, P_p así como a los de $P_{\theta\lambda}, P_{p\lambda}$ en términos de las variables θ y p , se aplica el mapeo a los primeros y se escribe la resta igualada a cero de la ecuación (1.25). Calculando el Jacobiano se obtiene la matriz del sistema \mathbf{A}_{n+1} y con los términos independientes \mathbf{w}_{n+1} . Se resuelve el sistema mediante la inversa de \mathbf{A}_n y se obtienen ahora los términos a_{n+1}, b_{n+1} .

Notemos que es sólo el primer orden el que difiere en la forma del cálculo ya que en el primer paso se necesitan los valores y vectores propios. Salvo esos primeros términos los otros se pueden resumir en un sólo procedimiento. Tales características fueron las que permitieron automatizar el método. Las diferencias que surgen al resolver la ecuación lineal se toman en cuenta en el cálculo así como el error que se va acumulando en cada paso.

Al tener la parametrización P hasta cierto orden n es necesario calcular el error cometido al evaluar t . Tengamos en mente que los polinomios son desarrollos en series de Taylor alrededor del punto fijo por lo que nuestra parametrización es válida sólo en una vecindad cercana. Como ya vimos el error se calcula mediante (1.28). Si tenemos a $P = (P_\theta, P_p)$ entonces podemos proceder como se muestra a continuación.

2. MÉTODO DE PARAMETRIZACIÓN

<i>Aplicamos el mapeo a P.</i>	$\mathbf{S} = \mathbf{f}_k(P)$
.....
<i>Construimos los polinomios P_λ.</i>	$P_\lambda = (P_{\theta\lambda}, P_{p\lambda})$
.....
<i>Usamos la ecuación (1.28).</i>	$\mathbf{E} = \mathbf{S} - P_\lambda$
.....

El error será un conjunto de valores que resulten de evaluar la función (1.28) para un conjunto $\tau = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$.

Usando este procedimiento se automatizó el método sin necesitar las ecuaciones de recurrencia explícitamente, ya que mediante la manipulación algebraica de las series de Taylor se calcula fácilmente los nuevos términos de la parametrización. En general el método se desarrolló para las variedades inestables, ya que la misma dinámica de tal variedad permite llegar más lejos en la evaluación tanto de los coeficientes como del parámetro t garantizando una mejor aproximación. La manera en la que se calculan las variedades estables es en esencia la misma, escogiendo el vector y valor propio adecuado se puede hacer el mismo análisis para la inestable. Hacerlo de esta forma no será lo más conveniente, mantenerse en la variedad estable será numéricamente inestable debido a los errores de truncamiento y redondeo, que llevarán a caer en la dinámica inestable del sistema. La forma más adecuada será calcular la variedad estable usando el mismo método para la variedad inestable del mapeo inverso.

Con esto se completa la automatización del método, el código junto con la documentación de cómo usar el programa y algunos ejemplos se encuentran en <https://github.com/alvarezeve/>.

Ejemplos de aplicación del método

3.1. Mapeo Estándar

En el capítulo anterior ya mostramos cómo se aplica el método de manera algebraica para el caso de este mapeo. Utilizando el método ya programado se hicieron diferentes cálculos para reproducir los resultados presentados en [2]. Una de las razones de estudiar el mapeo estándar, además de usarlo como una forma de validación, es porque a partir del estudio de este mapeo se saben muchas de las características de otros. Por otro lado queremos mostrar lo importante que es tener una parametrización analítica. Aunque el estudio cualitativo del mapeo puede darnos información útil, tener una parametrización de las variedades relacionadas a sus puntos fijos convierte el análisis en algo cuantitativo y semianalítico. El objetivo de esta sección es mostrar algunas de las cosas que son posibles alcanzar en términos de este análisis, además de la forma en la que se usa el método desde Julia.

En el mapeo estándar (2.1) uno de los puntos fijos es el origen de coordenadas $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$. Utilizando el método programado se calcularon las variedades estables e inestables para diferentes valores del parámetro en el mapeo. En las notas [2] no aparece explícitamente el orden del polinomio usado ni el error específico, sin embargo se intentó reproducir al menos gráficamente los resultados. Dependiendo del orden del polinomio que se calcule y del parámetro del mapeo se podrá llegar más lejos del punto fijo.

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

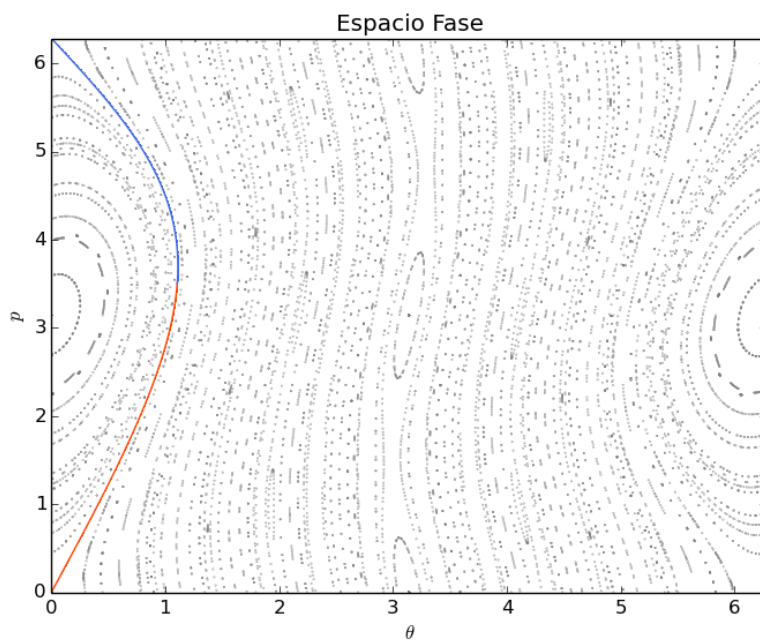


Figura 3.1: W^s, W^u de orden 25 en el mapeo estándar con $k = 0.3$ y $t_{max} = 3.0$.

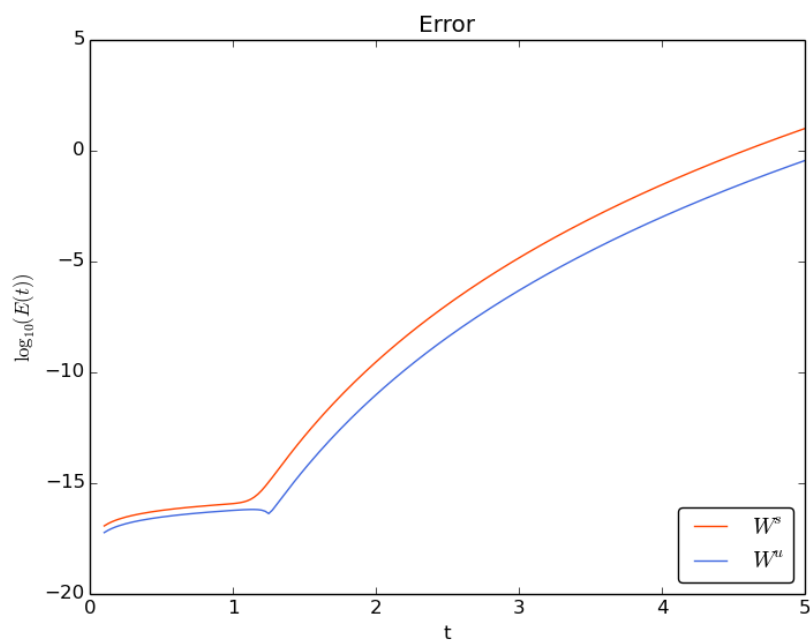


Figura 3.2: Error en las variedades de la figura 3.1.

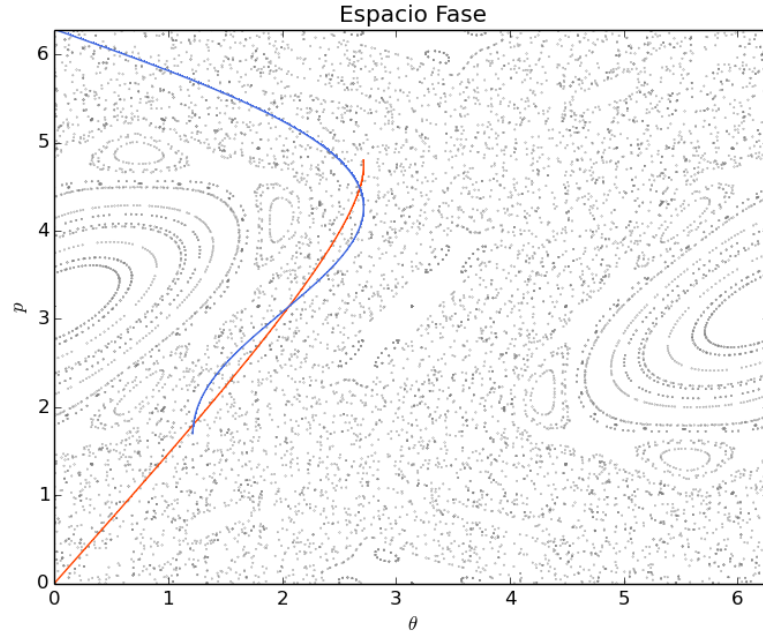


Figura 3.3: W^s, W^u de orden 80 en el mapeo estándar con $k = 1.5$ y $t_{max} = 13.0$.

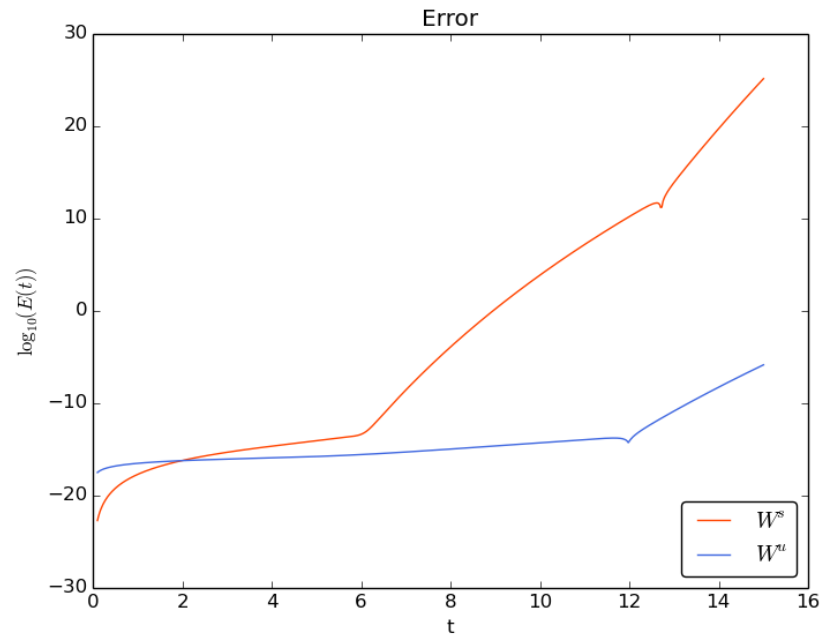


Figura 3.4: Error en las variedades de la figura 3.3.

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

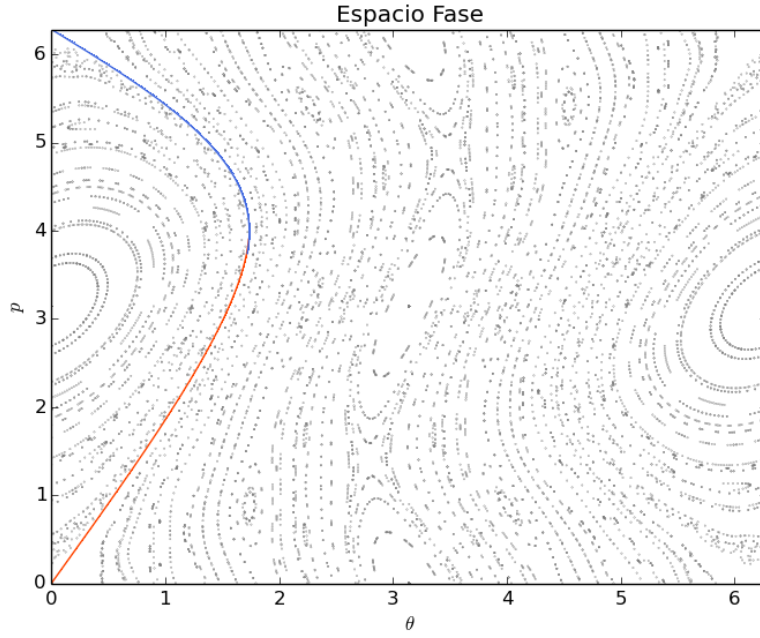


Figura 3.5: W^s, W^u de orden 70 en el mapeo estándar con $k = 0.7$ y $t_{max} = 5.5$.

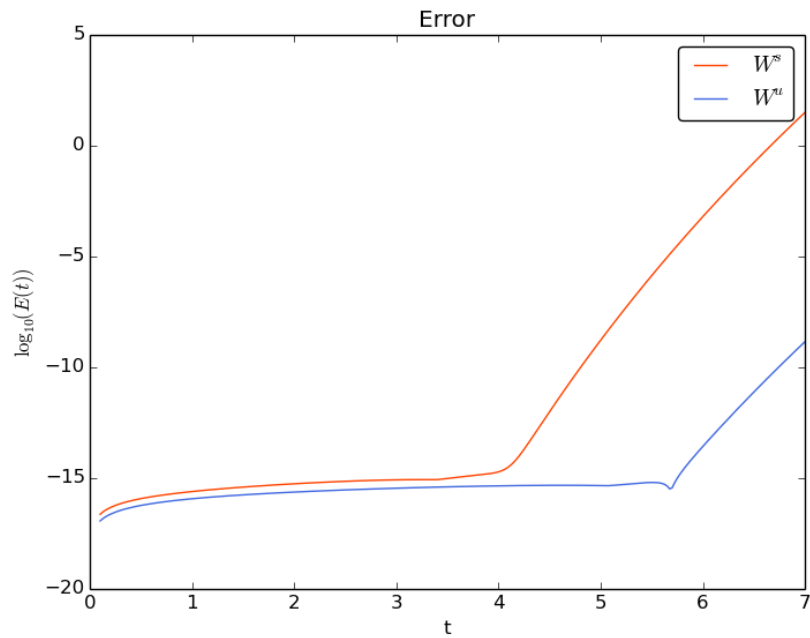


Figura 3.6: Error en las variedades de la figura 3.5.

En las figuras 3.1-3.6 se muestran los resultados de la parametrización de las varie-

dades estable e inestable asociadas al punto fijo \mathbf{x}_1 para diferentes valores del parámetro k , junto con cada una aparece su respectiva gráfica del error numérico. Los cálculos se hicieron utilizando números de punto flotante de 64 bits (Float64). Para las figuras 3.1, 3.5 se puede ver que las variedades se juntan de manera que parecen ser tangentes, mientras que para el caso de la figura 3.3 observamos tres intersecciones entre las variedades. En todos los casos el error se comporta de manera similar, manteniéndose prácticamente constante, del orden del epsilon de la máquina 10^{-16} , hasta cierto valor del parámetro t y creciendo de forma exponencial después del mismo. La curva será entonces confiable hasta valores del parámetro t que no excedan el punto donde el error crece rápidamente.

Para observar como cambia el comportamiento del error respecto al orden de la parametrización se calcularon polinomios de diferente orden que parametrizan a la variedad inestable del mapeo con $k = 0.3$, el resultado se muestra en la figura 3.7. Observamos que mientras más grande sea el orden del polinomio mejor es la aproximación, pues podemos llegar a valores del parámetro más grandes, que se traduce en ir más lejos en la variedad inestable.

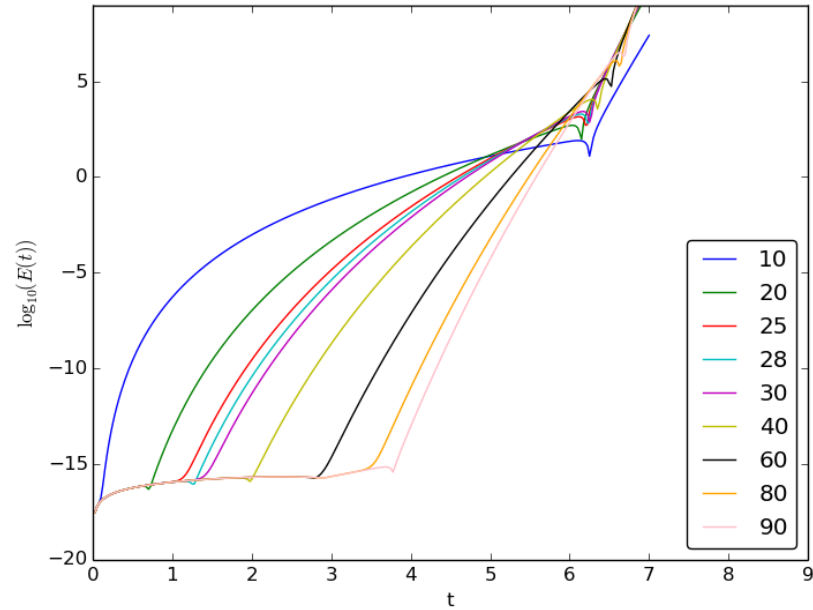


Figura 3.7: Curvas de error para diferentes órdenes en el mapeo estándar, $k = 0.3$.

A fin de mostrar que el error es de alguna manera controlable se usaron números de precisión extendida (256 bits) para hacer cálculos análogos a los anteriores. En la figura 3.8 se muestran los resultados para parametrizaciones de órdenes entre 10 y 80. Observamos un comportamiento análogo, de tal manera que para cada orden diferente

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

de parametrización hay un valor diferente del parámetro en el cual pasa de un error que no crece significativamente a un error que crece de manera abrupta. También notamos que al usar precisión extendida (256 bits, $\epsilon_{mach} = 10^{-77}$) el error cerca del punto fijo es imperceptible pero en la parte donde crece, tiene un cambio más pronunciado que en el caso de números de punto flotante.

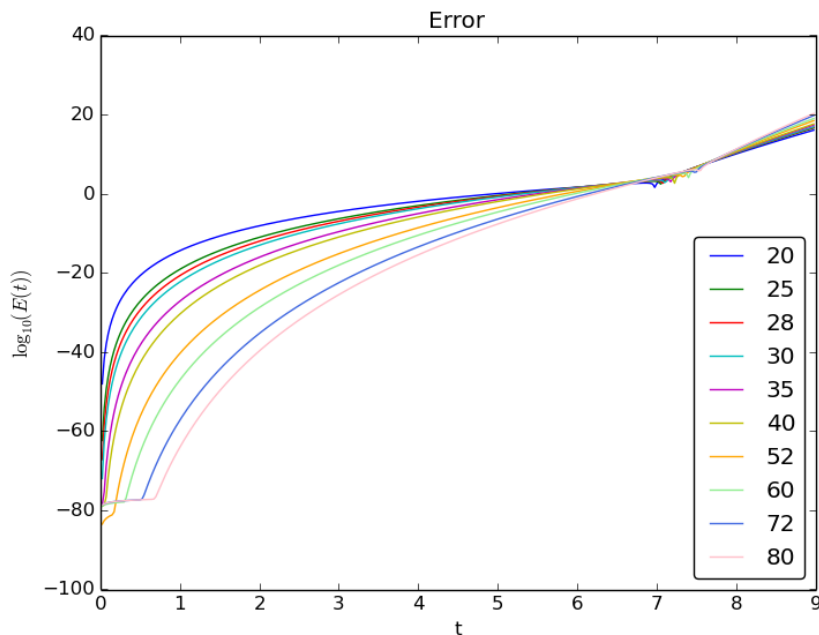


Figura 3.8: Curvas de error para diferentes órdenes usando precisión extendida, $k = 0.3$.

Como ya mencionamos antes la variedad inestable del mapeo inverso corresponde a la variedad estable del mapeo. Si se usa el mismo método calculando la variedad inestable del mapeo inverso (2.2) podemos controlar mejor el error numérico. Para mostrar esto hicimos una comparación parametrizando la variedad estable mediante el mapeo inverso y el mapeo inicial. Los polinomios fueron del mismo orden y lo que se observó en el error se muestra en la figura 3.9.

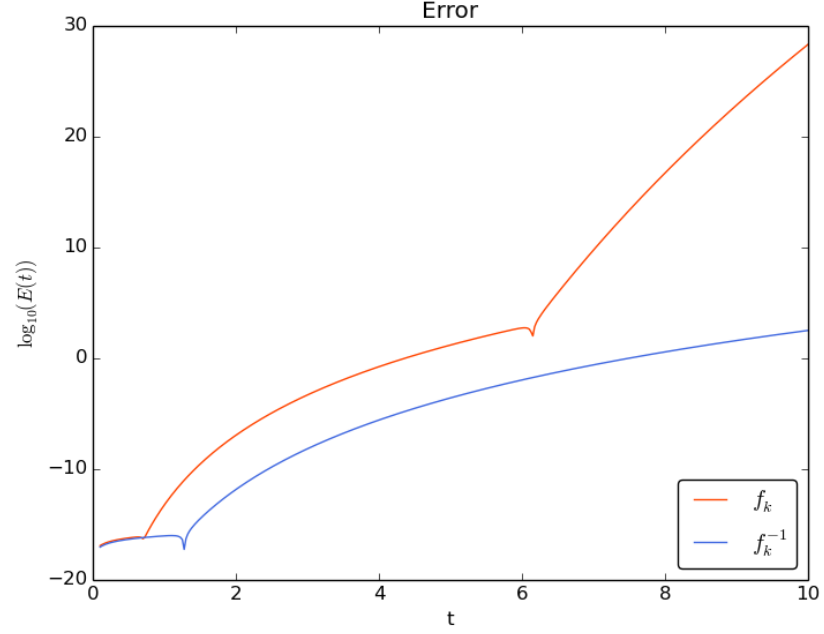


Figura 3.9: Error para las parametrizaciones usando el mapeo y el mapeo inverso con polinomios de orden 20 y $k = 0.3$.

Usar el mapeo inverso para calcular la variedad estable resulta ser mejor que usar el mapeo normal. El error se mantiene casi sin cambios hasta un valor de t mayor en el caso del mapeo inverso.

3.2. Mapeo de Hénon

El mapeo de Hénon se define como [13]

$$\mathbf{f}_{a,b}(x, y) = \begin{pmatrix} a - by - x^2 \\ x \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

siendo el mapeo inverso

$$\mathbf{f}_{a,b}^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ (a - x - y^2)/b \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Para poder analizarlo debemos linearizar el sistema. Primero obtenemos el jacobiano

$$D\mathbf{f}_{a,b}(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

Notamos que el determinante del jacobiano no es igual a uno sino $\det(D\mathbf{f}_{a,b}(x, y)) = b$. El determinante es constante, entonces será Hamiltoniano en el caso en que b sea igual a uno o menos uno. Analizaremos estos casos, encontrando los puntos fijos

$$\mathbf{f}_{a,b}(x, y) = \begin{pmatrix} a - by - x^2 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

lo que implica que $a - by - x^2 = x$ y $x = y$ de donde es claro que la primer ecuación queda

$$x^2 + (b + 1)x - a = 0,$$

que se puede resolver usando la fórmula general

$$x = \frac{-(b + 1) \pm ((b + 1)^2 + 4a)^{1/2}}{2},$$

para el caso en que $b = 1$ se tiene

$$x = \frac{-2 \pm 2(1 + a)^{1/2}}{2}. \quad (3.5)$$

Al escoger $b = 1$ garantizamos estar en un sistema Hamiltoniano, mientras que a debe escogerse de manera que resulten puntos fijos hiperbólicos ($a > -1$). La figura 3.10 muestra un ejemplo en cálculos de variedades para el mapeo de Hénon con $a = 1.5$ y polinomios de orden 45, tomando un valor máximo del parámetro $t = 1000.0$. El error asociado a la parametrización de la figura 3.10 se muestra en la figura 3.11; a partir de este punto se usará la notación W_f^u para denotar la parametrización de la variedad inestable calculada con el mapeo, y $W_{f^{-1}}^u$ para denotar la variedad estable calculada con el mapeo inverso.

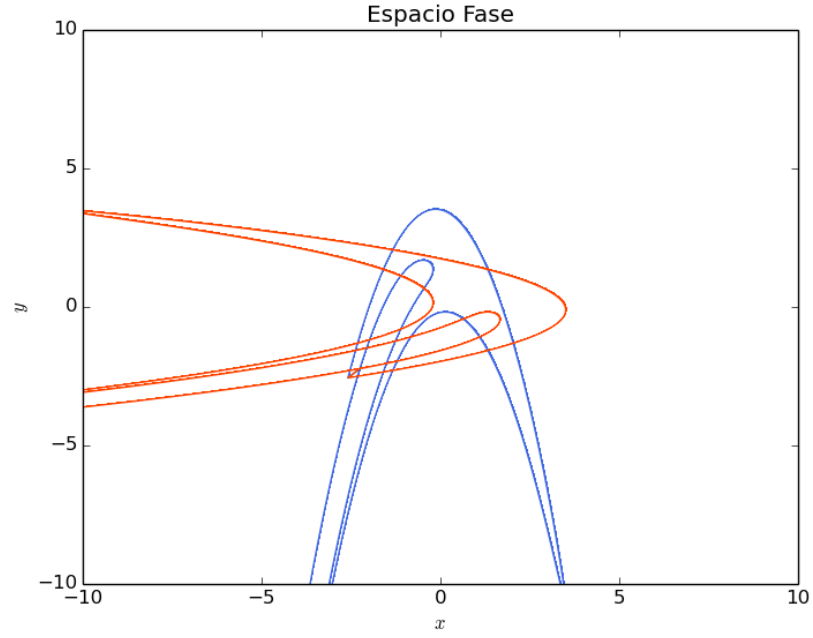


Figura 3.10: W^u y W^s de orden 45 con $t_{max} = 900.0$ para el mapeo de Hénon con $a = 1.5, b = 1$.

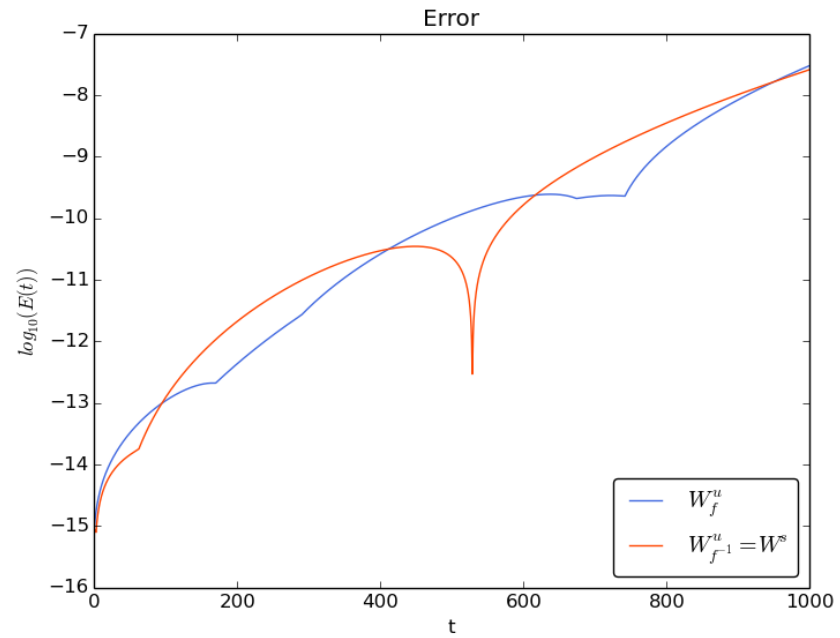


Figura 3.11: Error asociado a las variedades de la figura 3.10.

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

Las variedades que aparecen en la figura 3.10 fueron calculadas con el mapeo de Hénon (3.1) y el mapeo inverso (3.2); las variedades se observan simétricas, aún así las parametrizaciones son diferentes. Puede verse en la figura 3.11, que el error cambia cinco órdenes de magnitud en todo el intervalo del parámetro.

A diferencia del mapeo estándar en este mapeo las órbitas pueden escapar a infinito, es decir, no están constreñidas en una región finita, lo que representa un mayor reto en cuanto a la parametrización ya que el polinomio debe ser tal que pueda regresar varias veces. De hecho podemos observar que se necesitan valores grandes en el parámetro, comparados con los del mapeo estándar, para observar los cruces de las variedades. También esta situación hace que el error numérico sea mayor que para el mapeo estándar.

En las figuras 3.13, 3.15 se muestran las variedades calculadas de la misma manera en la que se calcularon para la figura 3.10. En 3.13 las curvas son más cerradas y se necesita de un polinomio de orden mayor que en el caso de 3.15 para observar los cortes.

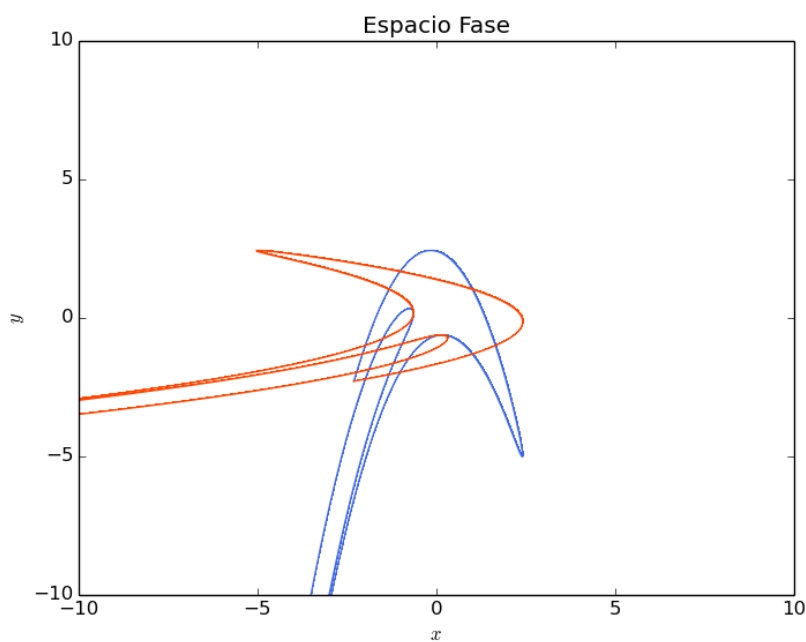


Figura 3.12: W^u , W^s de orden 50 y $t_{max} = 800.0$ para el mapeo de Hénon con $a = 0.7, b = 1$.

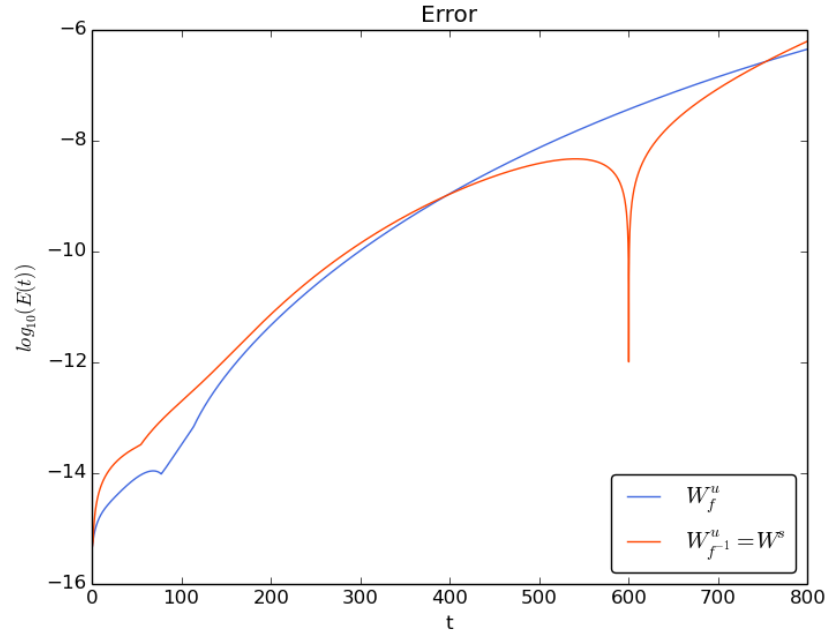


Figura 3.13: Error asociado a las variedades de la figura 3.13.

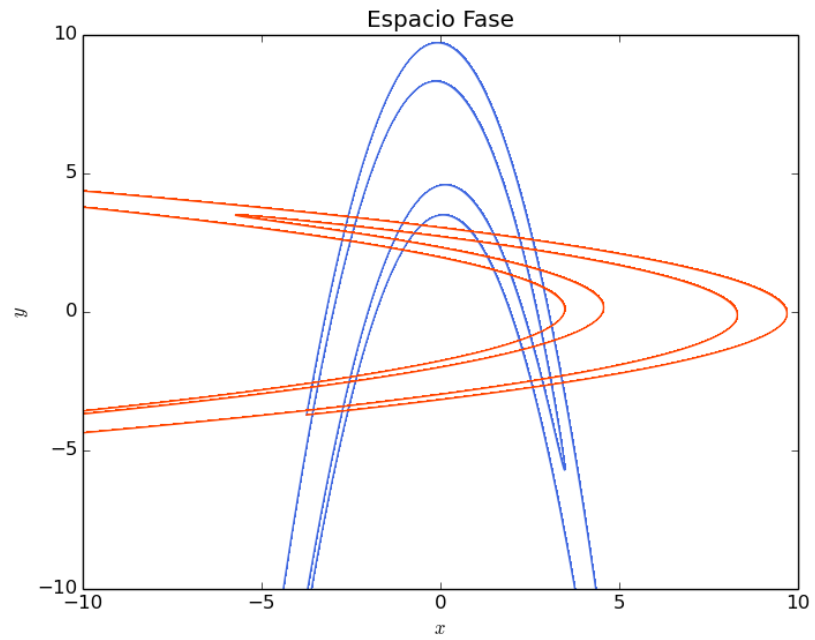


Figura 3.14: W^u , W^s de orden 78 y $t_{max} = 4000.0$ para el mapeo de Hénon con $a = 6.5, b = 1..$

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

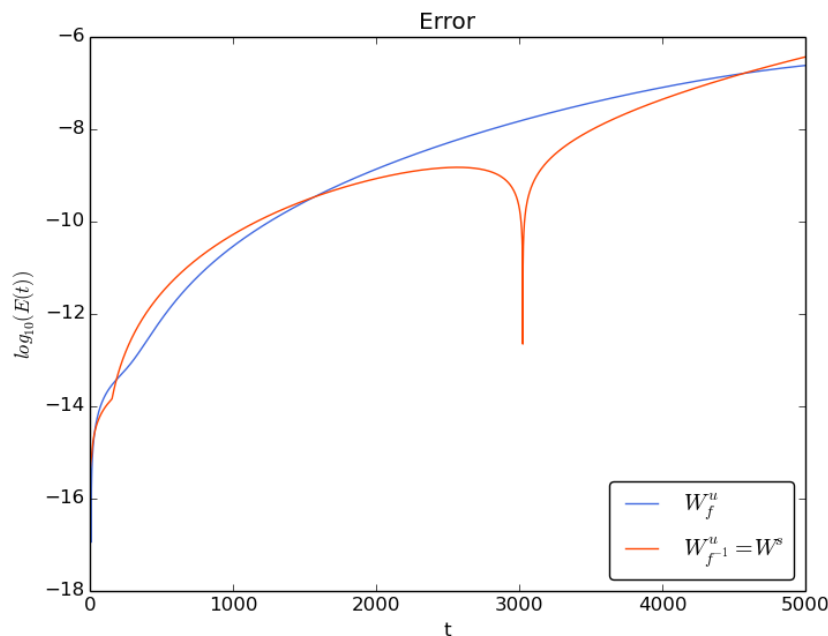


Figura 3.15: Error asociado a las variedades de la figura 3.15.

Así que con el orden suficiente es posible observar los cruces de ambas variedades, retomaremos esto en la última sección.

3.3. Mapeo exponencial

El último mapeo que se estudió fue uno usado en el artículo [3] el cual queda definido por

$$\mathbf{j}_a(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ y + af(x + y) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

que describe el movimiento de una partícula pateada, donde la coordenada x representa la posición en una dimensión mientras que la coordenada y es el momento, a es un parámetro libre. La función f es la responsable de describir la fuerza aplicada; en el artículo [3] se escoge

$$f(x) = x(x - 1)e^{-x}.$$

A este mapeo le corresponde su mapeo inverso

$$\mathbf{j}_a^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} x - y + ax(x - 1)e^{-x} \\ y - ax(x - 1)e^{-x} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Los puntos fijos encontrados del sistema son $\mathbf{x}_0 = (1, 0)$, $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$ donde \mathbf{x}_0 es un punto fijo hiperbólico. El punto \mathbf{x}_1 es un punto elíptico mientras el valor del parámetro a sea menor a 4, y para valores de $a \geq 4$ se torna inverso hiperbólico.

Usando el mismo procedimiento que en los casos anteriores se obtuvieron las figuras 3.16-3.19 que muestran cómo se comportan las variedades aún en el caso en que el sistema no sea completamente hiperbólico. Como en los casos anteriores el error asociado a la variedad estable es mayor, después de cierto valor del parámetro, que el asociado a la variedad inestable. El orden al que se debe llegar en los polinomios para observar algunos de los cortes de las variedades es más alto en comparación con el mapeo de Hénon debido a que en este caso se está aproximando una función exponencial.

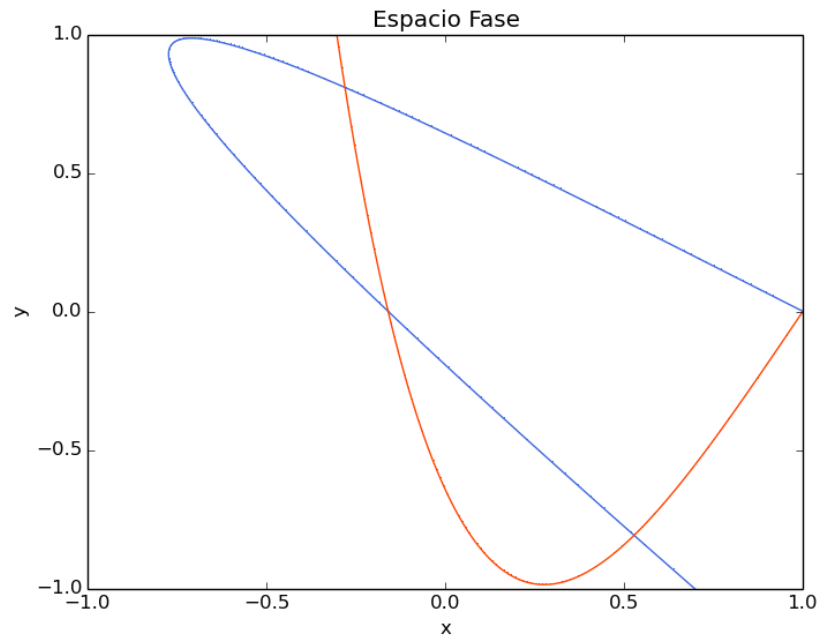


Figura 3.16: W^s y W^u de orden 86 con $t_{max} = 5.5$, con $a = 3.4$ en el punto fijo x_0 .

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

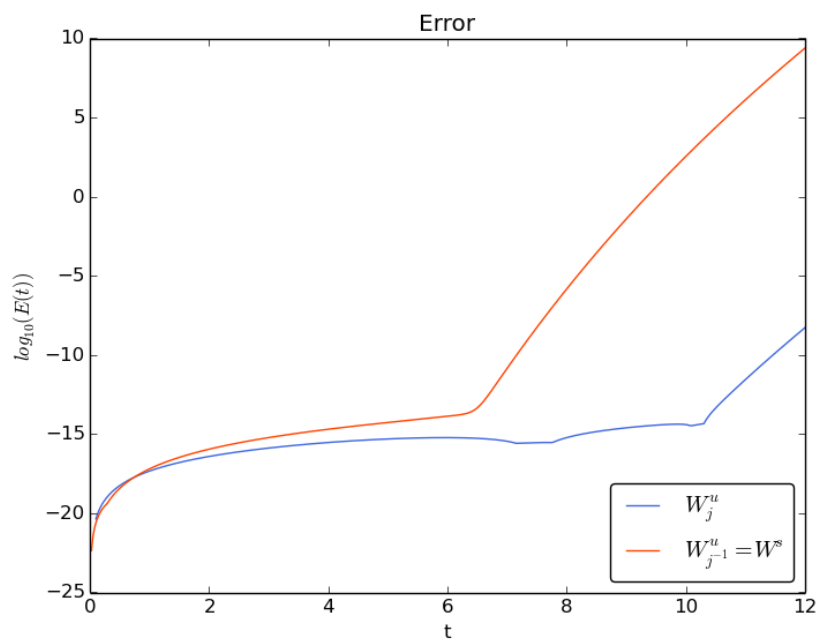


Figura 3.17: Error asociado a las variedades de la figura 3.16.

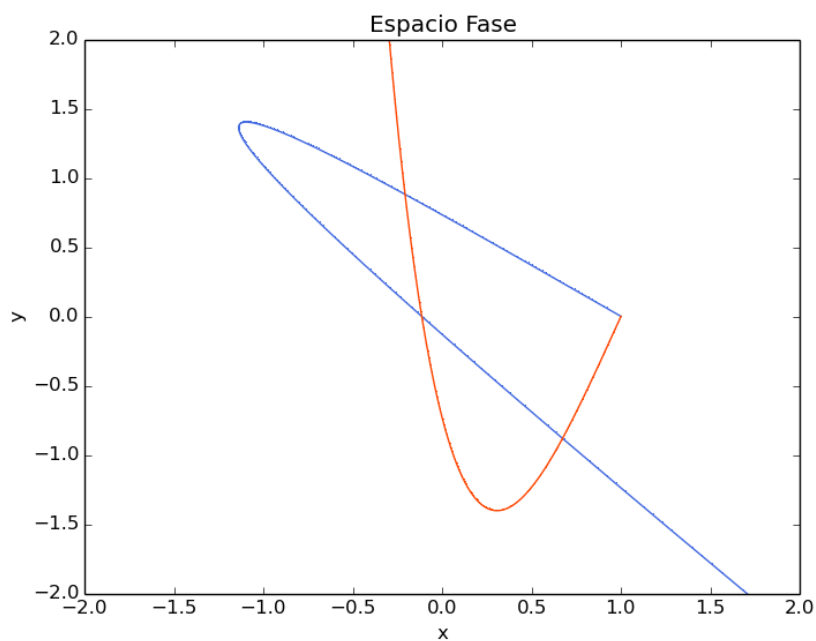


Figura 3.18: W^s y W^u de orden 93 con $t_{max} = 6.5$, con $a = 5.7$ en el punto fijo x_0 .

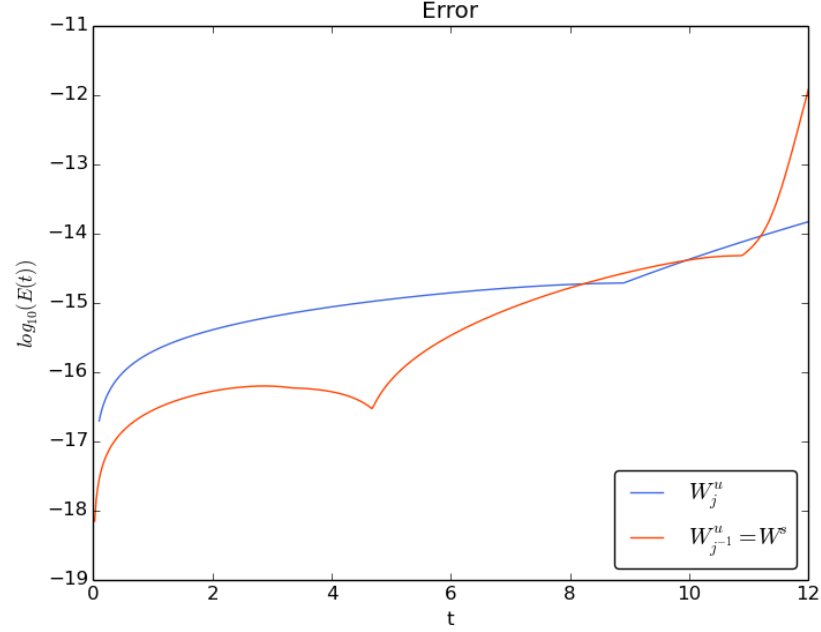


Figura 3.19: Error asociado las variedades de la figura 3.18.

Se puede observar en las figuras 3.17, 3.19 que en la variedad estable el error crece de manera abrupta antes que el error de la variedad inestable. Ambas curvas del error tienen la misma forma, se mantienen aproximadamente en el mismo orden de error. El mapeo (3.6) es más sensible que los dos mapeos pasados, algunos órdenes resultaban no ajustarse a la variedad más allá de valores del parámetro menor a uno.

3.4. Convergencia

Además de medir el error asociado a la parametrización consideramos importante tomar en cuenta la convergencia de los coeficientes de los polinomios. En casos como el mapeo exponencial en que las variedades se acercan a puntos fijos de diferente naturaleza puede ocurrir que tal cercanía afecte la forma de parametrización. Para ello se implementaron dos formas de revisar la convergencia, la de Hadamard (1.29) y la de tres términos (1.30).

La figura 3.20 muestra la convergencia de los polinomios de orden 25 que parametrizan la variable θ en el mapeo estándar para las variedades estable e inestable con $k = 1.5$ a la que corresponde el espacio fase mostrado en la figura 3.3. En ambos casos se ve que los coeficientes cambian de manera suave y se van haciendo cada vez más pequeños comparados con el anterior; podemos decir que los coeficientes de la parametrización convergen a cero.

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

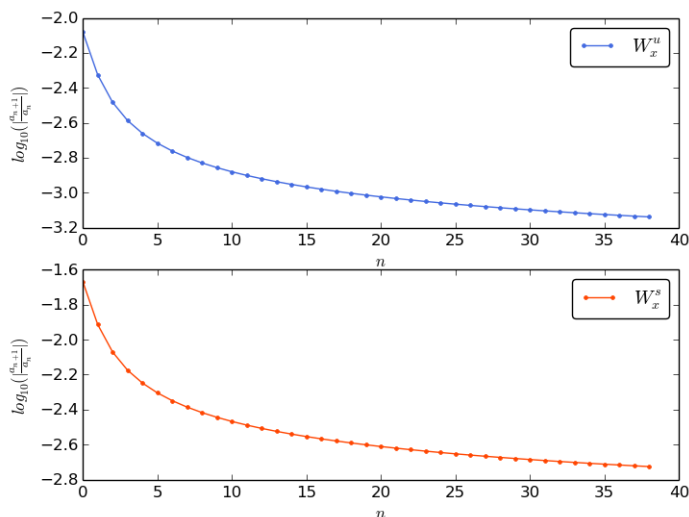


Figura 3.20: Convergencia de Hadamard asociada a los polinomios para θ en las variedades del mapeo estándar con $k = 1.5$.

La figura 3.21 muestra la convergencia de las parametrizaciones de orden 45 para la variable x en el mapeo de Hénon con $a = 1.5$. En ambos casos la convergencia parece suave y tiende a cero igual que en el caso del mapeo estándar.

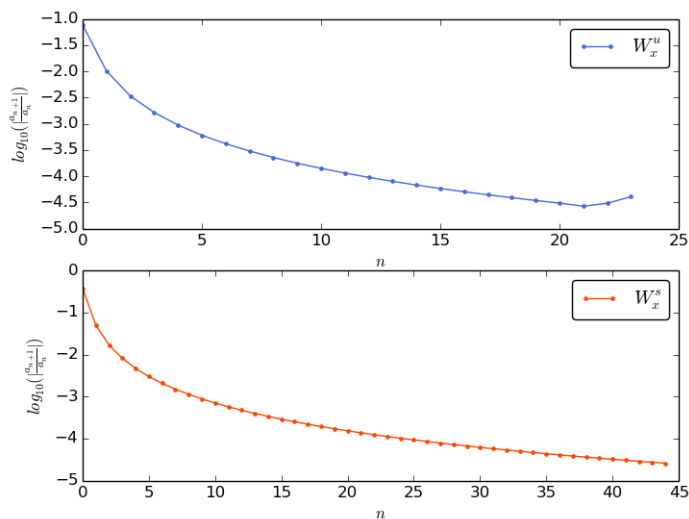


Figura 3.21: Convergencia de Hadamard asociada a los polinomios para x en las variedades del mapeo de Hénon con $a = 1.5$.

Para el mapeo exponencial realizamos los dos criterios de convergencia. La figura 3.22 muestra el criterio de Hadamard (1.29), para los polinomios que parametrizan la

variable x en cada variedad, se ve que hay una convergencia clara de los coeficientes en el caso de la variedad inestable, para el caso de la estable parece que después de cierto orden los coeficientes no convergen. Lo mismo ocurre en la figura 3.23 en dónde se usó el criterio de tres términos (1.30), con $C_n = n \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) - (n-1) \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \right)$.

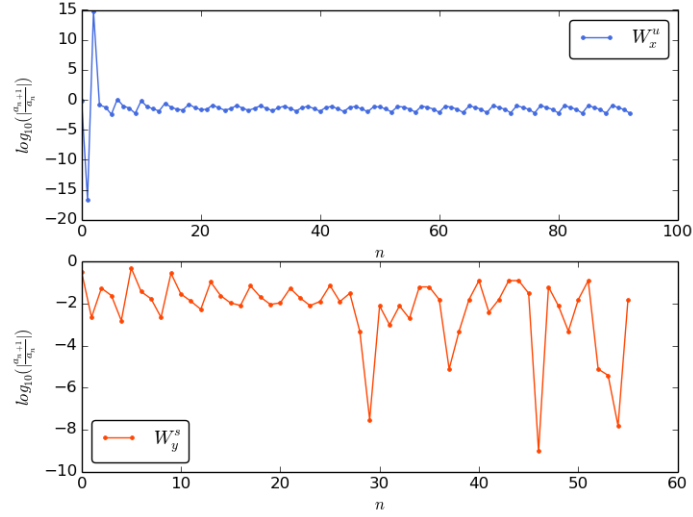


Figura 3.22: Convergencia de Hadamard asociada a las variedades mostradas en la figura 3.18.

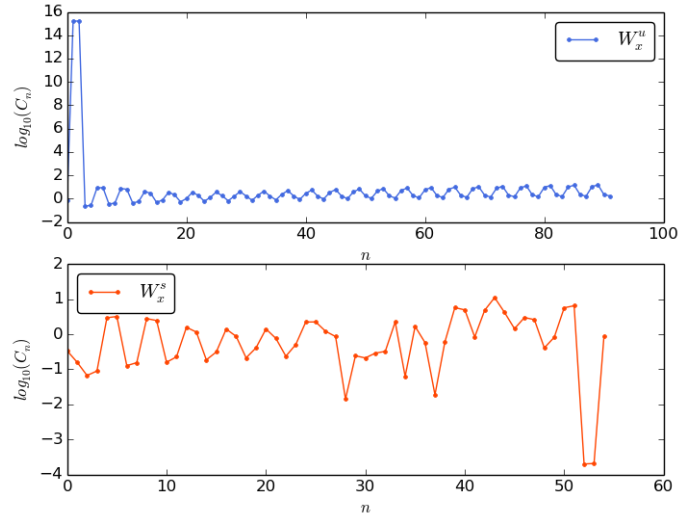


Figura 3.23: Convergencia de tres términos asociada a las variedades en la figura 3.18.

Estudiar la convergencia de las parametrizaciones puede dar una idea de cómo se

va modificando el polinomio si se cambia el orden, en mapeos más sensibles puede ser determinante para saber a qué orden es conveniente aproximar.

3.5. Existencia de puntos homoclínicos/heteroclínicos

Siendo que el resultado son polinomios se puede aplicar el método de Newton, o cualquier otro, en dos dimensiones para resolver $P^u = P^s$ y encontrar puntos homoclínicos o heteroclínicos. Por suerte existe una paquetería en Julia que hace cálculos numéricos validados `ValidatedNumerics`[14] dentro de la cuál se tiene un paquete para aritmética de intervalos `IntervalArithmetic`[15] y para encontrar raíces `IntervalRootFinding`[16].

El paquete [14] hace cálculos de computación rigurosa con números de punto flotante usando el paquete de aritmética de intervalos, que efectúa operaciones con intervalos en lugar de números. Mientras que [16] automatiza métodos populares como el de Newton para encontrar raíces de funciones, en este caso se garantiza que la respuesta correcta se encuentra en un intervalo. Para entender mejor cómo funcionan cada una de las paqueterías así como la teoría rigurosa detrás de éstos recomendamos revisar las lecturas [17],[18]. De manera breve podemos decir que los paquetes ya mencionados generalizan las operaciones y funciones ahora en términos de conjuntos, de tal manera que la solución contenga la respuesta correcta.

Las variedades parametrizadas que resultan del método son polinomios, por lo que con las paqueterías mencionadas se puede analizar cuando dos de ellas se cruzan. Concretamente se tienen $W^s(t) = (P_x(t), P_y(t))$ y $W^u(\tau) = (P_x(\tau), P_y(\tau))$ de órdenes no necesariamente iguales, y lo que se busca es:

$$W^s(t) = W^u(\tau), \quad (3.8)$$

que arrojará como resultado un intervalo I_t y otro intervalo I_τ , la intersección se encontrará en $I_t \times I_\tau$. En el espacio fase la intersección se verá como el producto cartesiano de $W^s(I_t) \times W^u(I_\tau)$ formando una sección en la que se garantiza hay un punto homoclínico o heteroclínico.

3.5.1. Estándar

Usando lo descrito anteriormente se calcularon las intersecciones de las variedades estable e inestable en el mapeo estándar para un valor de $k = 1.5$ usando polinomios de orden 120, además de usar el mapeo inverso (2.2) para calcular la variedad estable. Se encontraron cuatro raíces en el intervalo $[-20., 0.]$ para t y $[-15., 0.]$ para τ , con una tolerancia de 10^{-6} usando el método de Newton, las cuales son:

- `Root([-7.16826, -7.16825] × [-4.45972, -4.45971], :unique)`
- `Root([-4.21757, -4.21756] × [-8.36029, -8.36028], :unique)`

- $\text{Root}([-2.24983, -2.24982] \times [-14.2093, -14.2092], : \text{unique})$
- $\text{Root}([-13.4378, -13.4377] \times [-2.62396, -2.62395], : \text{unique})$

El primer intervalo corresponde al parámetro t mientras que el segundo al parámetro τ , la leyenda **unique** indica que en el intervalo presentado sólo hay una raíz. Las raíces se representan gráficamente en el espacio fase en la figura 3.24.

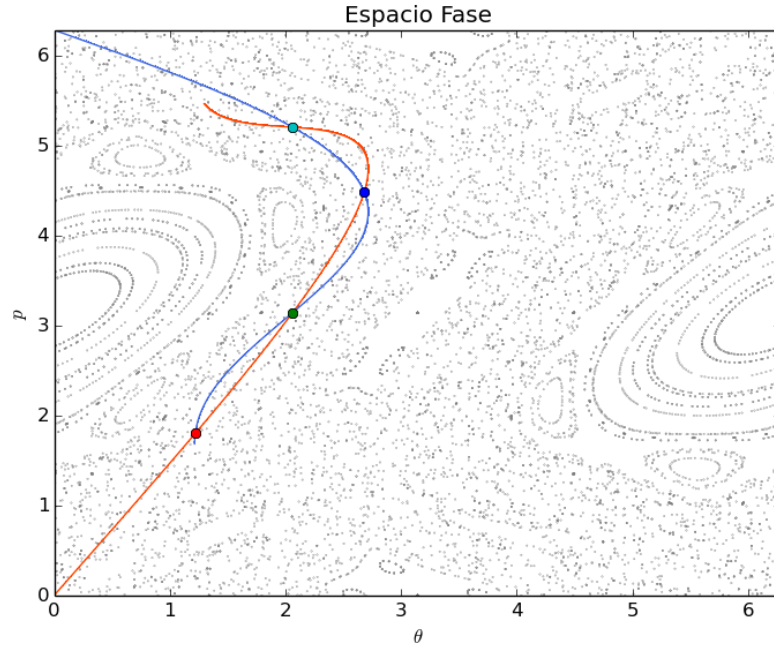


Figura 3.24: Cruces de W^u, W^s de orden 120 para el mapeo estándar con $k = 1.5$.

El error asociado al cálculo de las variedades se puede ver en la figura 3.25, en dónde se aprecia que los valores aceptables de los parámetros están dentro del intervalo inicial.

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

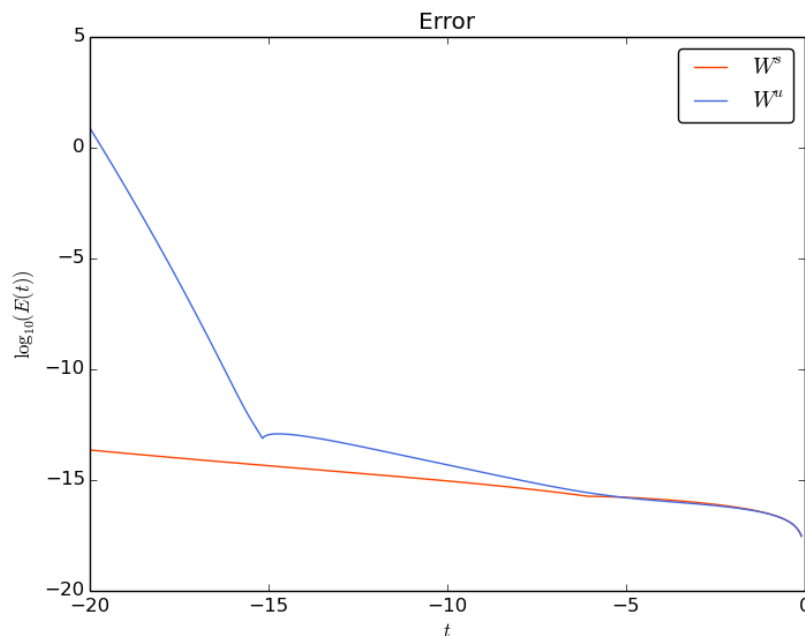


Figura 3.25: Error en las variedades de la figura 3.24.

El cálculo numérico riguroso garantiza que la solución está en el intervalo que da como resultado, sin embargo no debemos olvidar que nuestras variedades tienen un error asociado, por lo que es importante quedarse en aquellos intervalos del parámetro donde se tenga un error mínimo; en otras palabras, el método de encontrar raíces está validado mientras que el cálculo de los coeficientes de polinomios no. Con las raíces obtenidas podemos asegurar que en el mapeo estándar con el valor del parámetro $k = 1.5$ se encuentran cuatro intersecciones de las variedades, sin embargo es necesaria sólo una de ellas para saber que hay un número infinito[10]. Si se quiere encontrar más intersecciones, de manera directa, se debe considerar un polinomio de orden mayor o en todo caso usar números de precisión extendida para llegar más lejos en las variedades.

3.5.2. Hénon

Así como se calcularon las intersecciones en las variedades del mapeo estándar se calcularon ahora para el mapeo de Hénon. En este caso se usó un valor del parámetro $a = 1.5$ con un polinomio de orden 45 y el método de Newton con una tolerancia de 10^{-6} además de usar el mapeo inverso (3.2), para calcular la variedad estable. Los resultados fueron los siguientes intervalos:

- a) $\text{Root}([-1.36597, -1.36596] \times [166.749, 166.75], : \text{unique})$
- b) $\text{Root}([-5.26555, -5.26554] \times [129.577, 129.578], : \text{unique})$
- c) $\text{Root}([-6.77613, -6.77612] \times [33.6142, 33.6143], : \text{unique})$

- d) $\text{Root}([-5.54438e - 07, 0] \times [0, 5.54438e - 07], : \text{unknown})$
e) $\text{Root}([-26.1208, -26.1207] \times [26.1207, 26.1208], : \text{unique})$
f) $\text{Root}([-33.6143, -33.6142] \times [6.77612, 6.77613], : \text{unique})$
g) $\text{Root}([-129.578, -129.577] \times [5.26554, 5.26555], : \text{unique})$
h) $\text{Root}([-166.75, -166.749] \times [1.36596, 1.36597]4, : \text{unique})$

La leyenda **unknown** nos dice que no puede concluir si hay una o más raíces en el intervalo. Si notamos el tercer intervalo contiene al cero $(t, \tau) = (0, 0)$ en el cual se cortan las variedades pues representa el punto fijo. La figura 3.26 representa con un punto los cortes encontrados en las variedades.

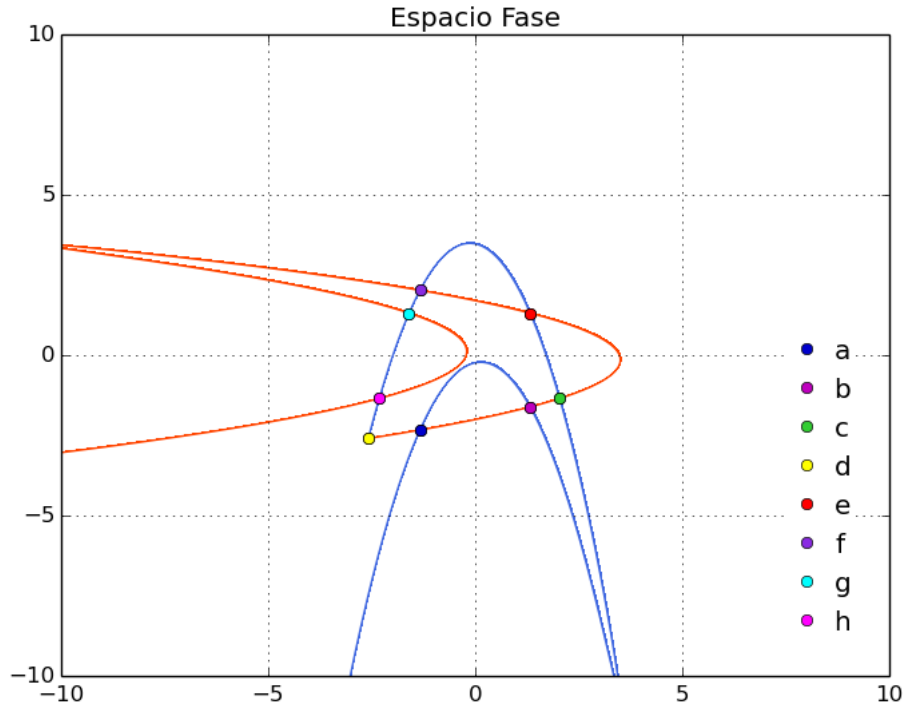


Figura 3.26: Cruces de W^u, W^s encontrados en el intervalo $[-400., 0.] \times [0., 400.]$.

Los puntos de color son sólo para indicar cuales intersecciones fueron encontradas. Para los intervalos encontrados se hizo una gráfica que representa la región en el espacio fase donde se encuentra el cruce, la figura 3.27 muestra cada una de ellas.

La zona rectangular sombreada en cada gráfica representa el producto cartesiano de los intervalos donde se encuentra la solución. Podemos observar que de hecho cada zona contiene el cruce de las variedades garantizando así que en el intervalo propuesto hay un cruce lo cual representa un punto homoclínico. Algunos de los intervalos como los de las figuras 3.27 son muy delgados. Este tipo de resultados son útiles para hablar

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

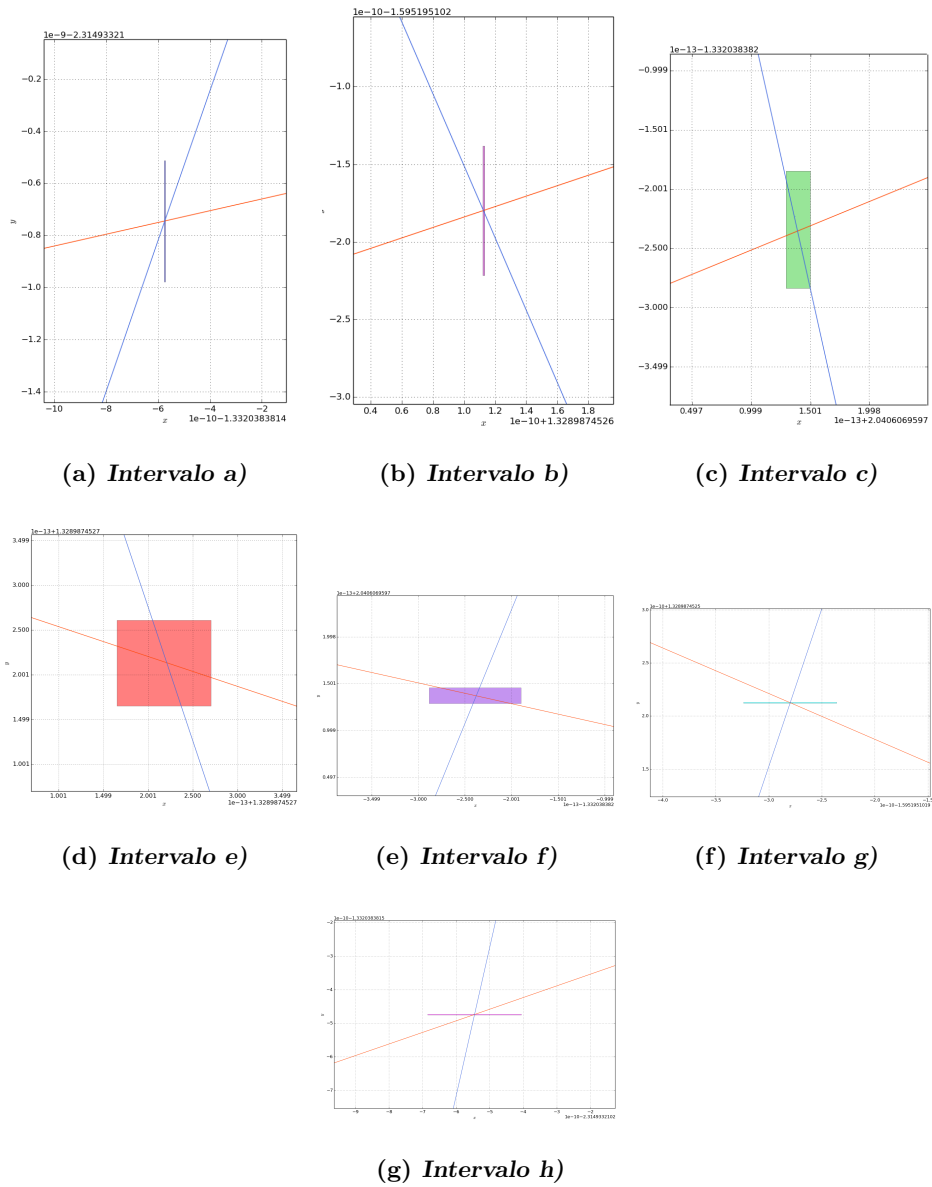


Figura 3.27: Intervalos de intersecciones entre las variedades estable e inestable del mapeo de Hénon.

sobre caos topológico [13],[4].

Para complementar todo este análisis se puede obtener una gráfica de las superficies que forman las variedades al cambiar el parámetro del mapeo lo que nos da una idea de como se ven las superficies y además de como se comportan las intersecciones. La figura 3.28 muestra las superficies formadas por las variedades para ciertos valores del parámetro a . Algunas gráficas más se encuentran en <https://github.com/alvarezeve/Tesis-Variedades-Estables-e-inestables/> en el archivo llamado Superficies.ipynb.

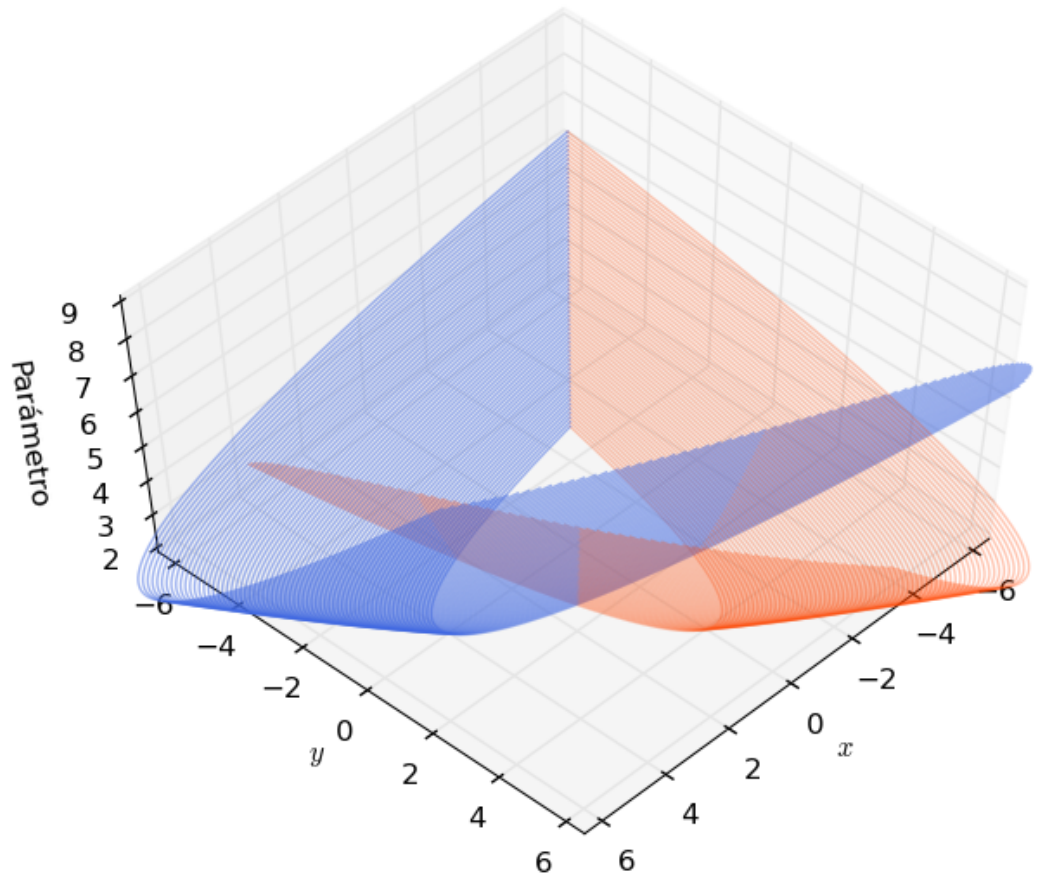


Figura 3.28: Superficies en el mapeo de Hénon formadas por las variedades.

3.5.3. Mapeo exponencial

Las intersecciones en el caso del mapeo (3.6) se calcularon usando como en los casos anteriores el mapeo inverso (3.7). Este mapeo representa un mayor reto en cuanto al orden del polinomio, pues la presencia de la exponencial hace que la parametrización sea sensible al orden del mismo. Para el siguiente ejemplo se utilizó un polinomio de orden 86 y una tolerancia en el método de Newton de 10^{-6} y se calcularon los cruces de las variedades como en los otros casos. Las siguientes fueron las secciones en términos del parámetro t, τ dónde se encontraron los cortes.

- a) $\text{Root}([-0.985068, -0.985067] \times [5.99488, 5.99489], : \text{unique})$
- b) $\text{Root}([-3.46215, -3.46214] \times [5.49229, 5.4923], : \text{unique})$
- c) $\text{Root}([-3.77896, -3.77895] \times [1.56269, 1.5627], : \text{unique})$

La representación de los cortes se puede ver en la figura 3.29.

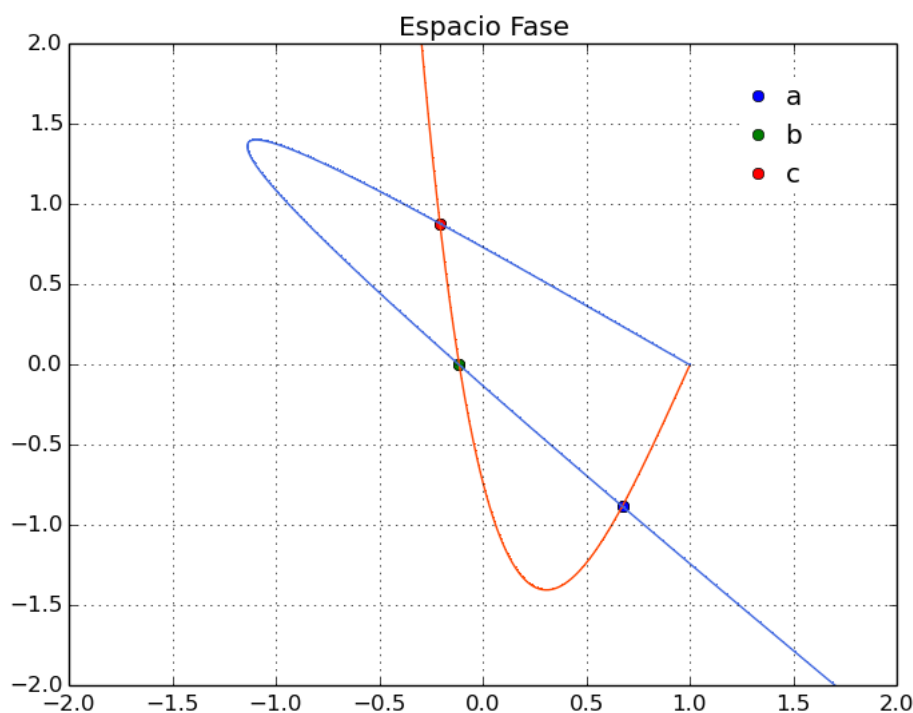


Figura 3.29: Intersecciones en el mapeo exponencial con $a = 5.7$.

Tomando los cruces a escala del intervalo se obtuvieron las figuras 3.30.

Las escalas en las que se observan los cortes de las variedades son pequeños comparados con la escala del mapeo, tanto que si se graficaran en el espacio fase no se podrían observar. Como ya se mencionó esto garantiza que existen tres puntos homoclínicos en

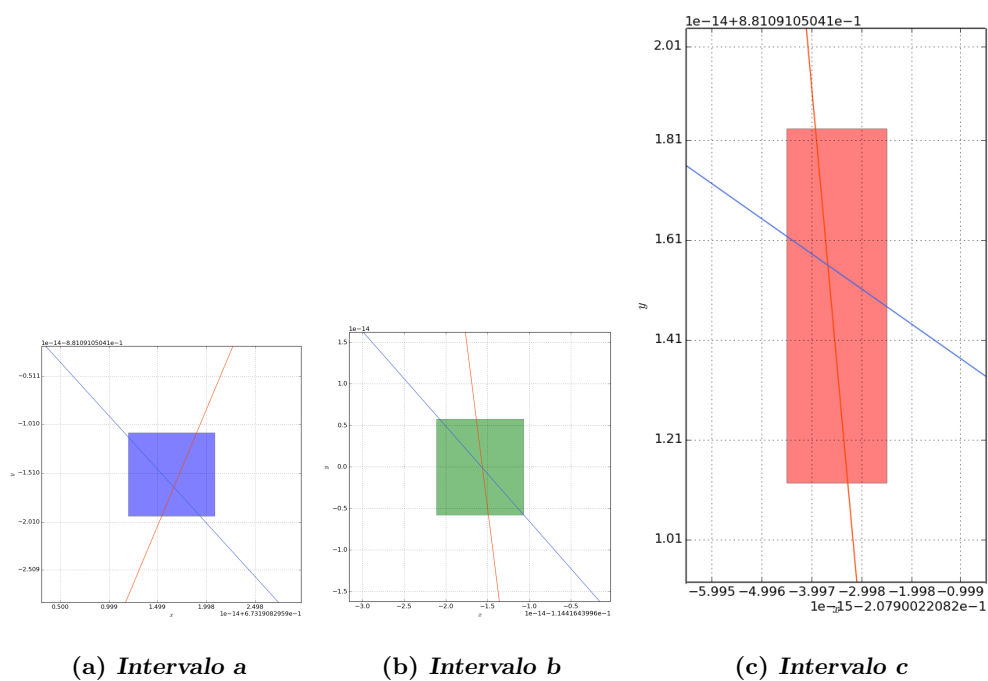
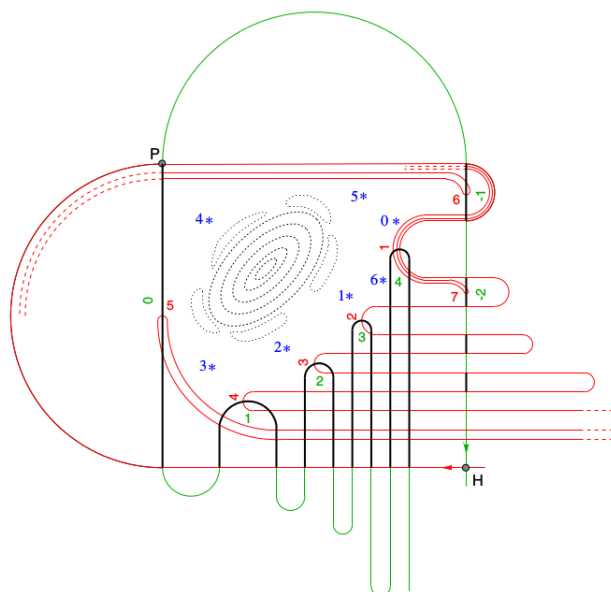


Figura 3.30: Intervalo de intersección de las variedades estable e inestable en el mapeo exponencial.



el mapeo a la parametrización, pues ésta representa los puntos sobre la variedad. Con esta idea se pudo encontrar parte de las estructuras mostradas en la figura 3.31, para los mapeos (3.1), (3.6).

En el caso del mapeo de Hénon con $a = 6.5$ se calcularon polinomios de orden 250 usando números de precisión extendida (W_0^s, W_0^u), además calcular la variedad estable usando el mapeo de Hénon inverso (3.2). En este caso se necesitó un valor máximo del parámetro $t = 100$ para obtener el rectángulo fundamental, que se muestra en la figura 3.32, en este caso, el error es menor a 10^{-73} .

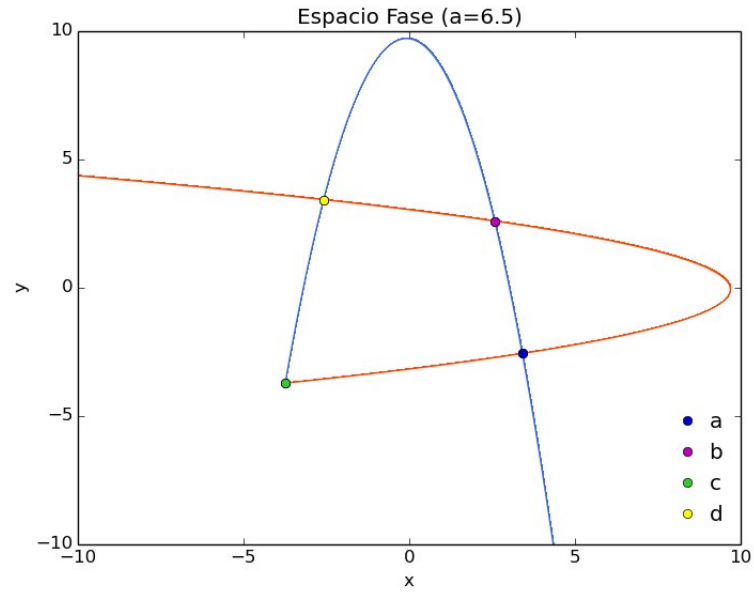


Figura 3.32: Variedades estable e inestable de orden 250, para el mapeo de Hénon con $a = 6.5, b = 1.$, con $t_{max} = 100$. El punto c) denota el punto fijo mientras que a), b), d) son las primeras intersecciones de las variedades.

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

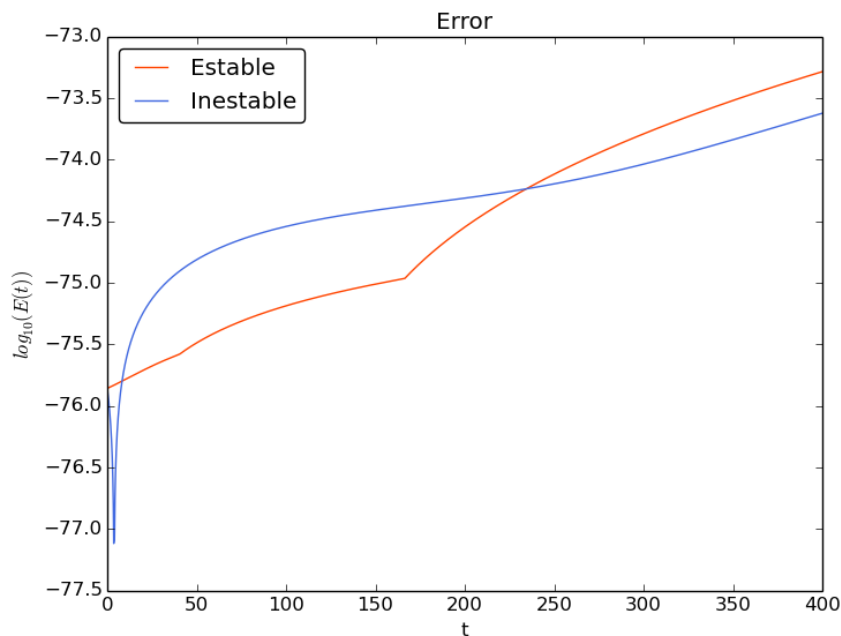


Figura 3.33: Error asociado al cálculo de las variedades en la figura 3.32

Reescribiendo la ecuación de invariancia (1.25) para el caso de la variedad estable, tenemos que:

$$f_{a,b}^{-1}(W_0^s(t)) = W_0^s(\lambda^s t). \quad (3.9)$$

Si aplicamos el mapeo de Hénon inverso (3.2) a la ecuación (3.9) resulta

$$W_0^s(t) = f_{a,b}(W_0^s(\lambda^s t)), \quad (3.10)$$

que podemos reescribir (3.10),

$$W_0^s\left(\frac{t}{\lambda^s}\right) = f_{a,b}(W_0^s(t)). \quad (3.11)$$

Siendo que $|\lambda^s| < 1$ la ecuación (3.11) muestra que aplicar el mapeo es análogo a tener la variedad estable evaluada en un valor mayor del parámetro, puesto que $1/\lambda^s > 1$. Este resultado es análogo para la variedad inestable. Usando esto se obtuvo la figura 3.34, que muestra el resultado de iterar una vez, $(W_{x1}^s, W_{y1}^s) = f_{a,b}(W_x^s, W_y^s)$, análogamente para las inestables, evaluando los nuevos polinomios exactamente en los mismos intervalos que en el caso de la figura 3.32.

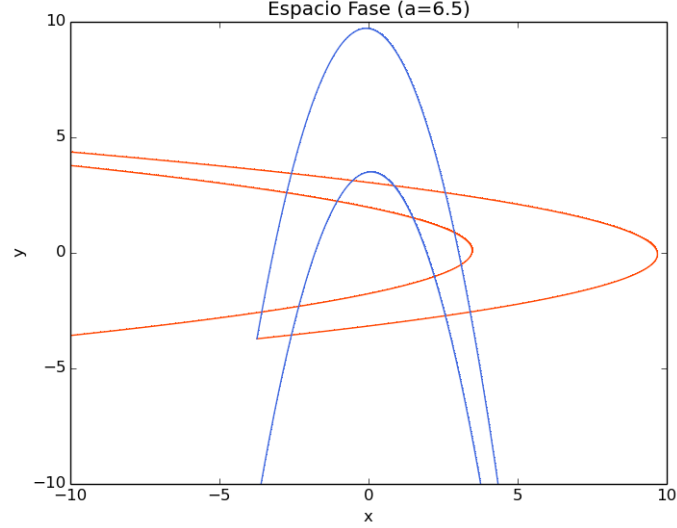


Figura 3.34: Primera aplicación del mapeo a los polinomios de orden 250, $t_{max} = 100$

El cálculo con el que se obtiene la figura 3.34 produce un nuevo polinomio el cual tiene asociado también un error numérico. Para saber cuál es este error se usó la ecuación (3.11),

$$E_1(t) = \| W_0^s(\frac{t}{\lambda^s}) - f_{a,b}(W_0^s(t)) \|_{\infty}, \quad (3.12)$$

esta forma es análoga a la ecuación (1.28) la cual se representa en la figura 3.35. De la misma manera se evalúa el error en las aplicaciones consecutivas, el cual podemos expresar como

$$E_n(t) = \| (f_k^{-1})^n(W_0^s(\frac{t}{\lambda^s})) - (f_k^{-1})^{n-1}(W_0^s(t)) \|_{\infty}. \quad (3.13)$$

En la ecuación (3.13) n representa el número de aplicaciones del mapeo mientras que W_0 es la parametrización inicial calculada mediante el método.

Se puede observar en la figura 3.35 que el error es mínimo en ambas variedades, manteniéndose por debajo del orden de 10^{-70} , las líneas verticales son producto de valores numéricos que aparecen como cero al evaluar el polinomio a los cuales se les sumó un valor del orden de 10^{-120} para poder evaluar el logaritmo base 10 del error. Si revisamos en la sección 3.1 el error crece mucho más rápido cuando sólo se usa el polinomio que resulta de la parametrización, además de que no es posible llegar tan lejos como se muestra en las figuras 3.34-3.42.

La segunda aplicación del mapeo a los polinomios, $(W_{x2}^s, W_{y2}^s) = f_{a,b}(W_{x1}^s, W_{y1}^s)$ se muestra en la figura 3.36, de nuevo usando el mismo valor máximo del parámetro t , además en la figura 3.37 muestra el error asociado a tal resultado.

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

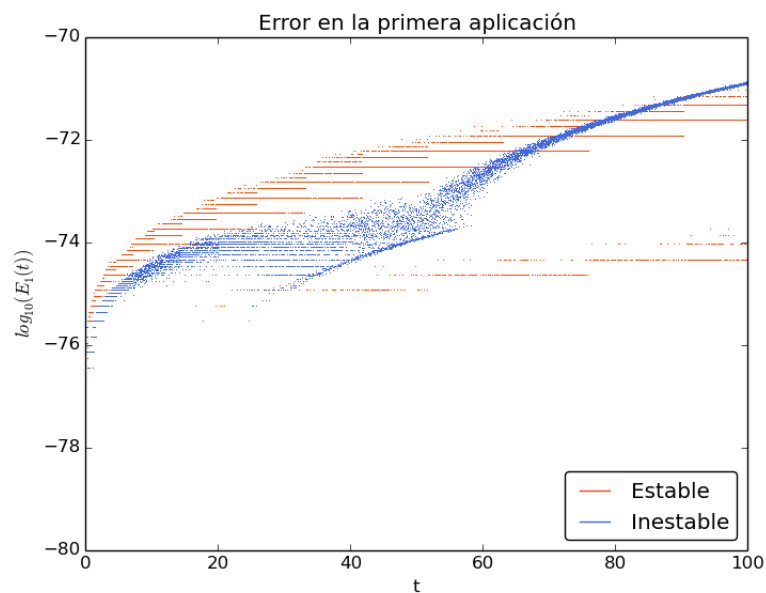


Figura 3.35: Error en el polinomio que resulta de aplicar el mapeo a la parametrización de orden 250.

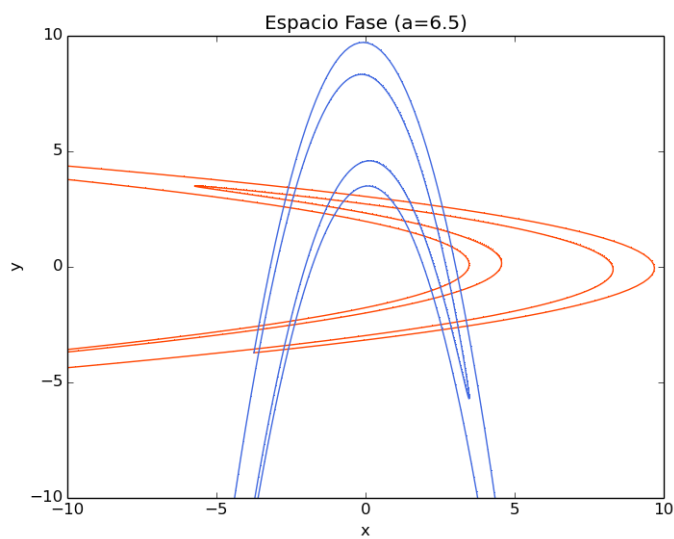


Figura 3.36: Segunda aplicación del mapeo a los polinomios de orden 250.

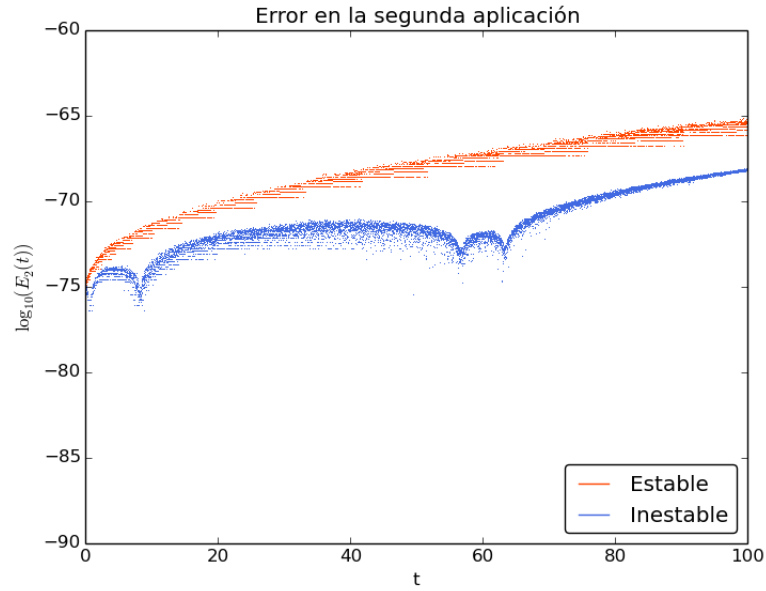


Figura 3.37: Error en el polinomio que resulta de aplicar el mapeo por segunda vez a la parametrización de orden 250.

De manera sucesiva se aplicaron los mapeos correspondientes hasta iterar cinco veces, siempre conservando el mismo valor máximo del parámetro t .

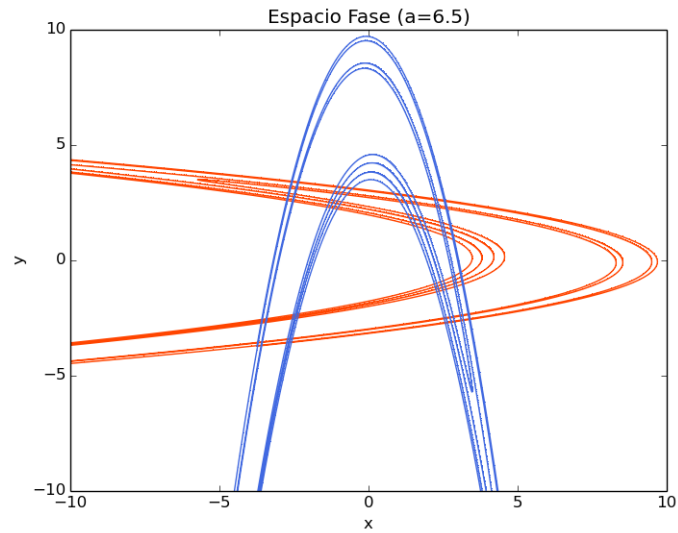


Figura 3.38: Tercer aplicación del mapeo a los polinomios de orden 250.

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

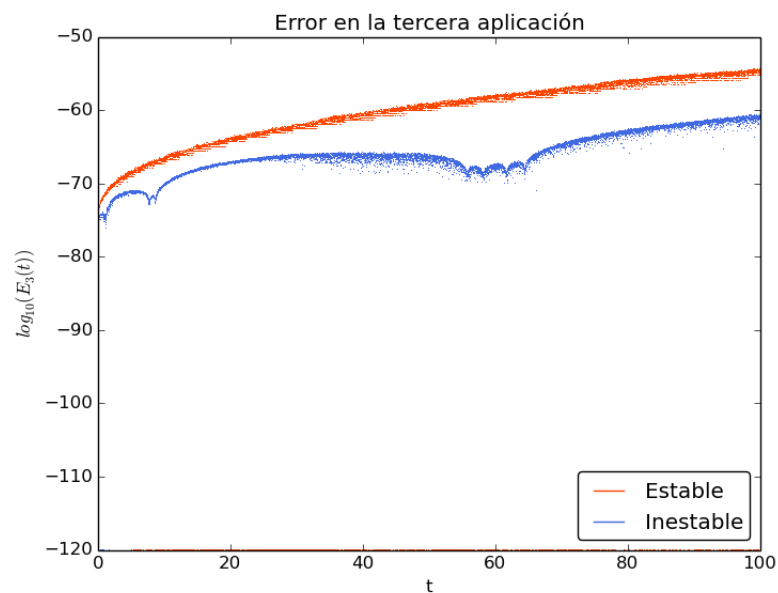


Figura 3.39: Error en el polinomio que resulta de aplicar el mapeo por tercera vez a la parametrización de orden 250.

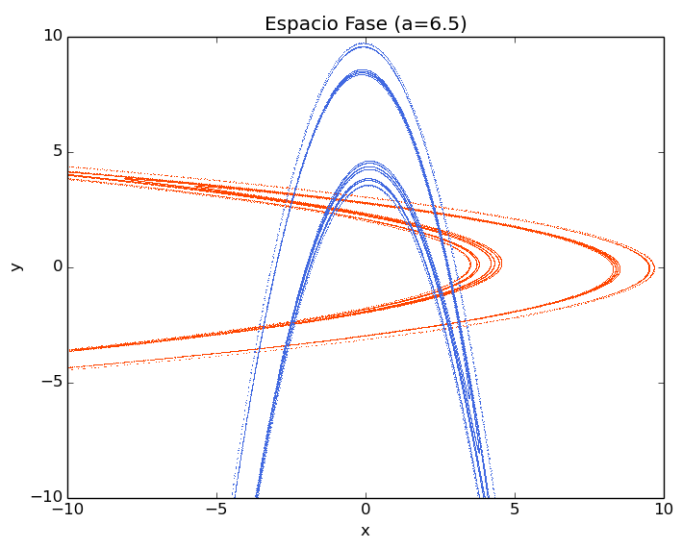


Figura 3.40: Cuarta aplicación del mapeo a los polinomios de orden 250.

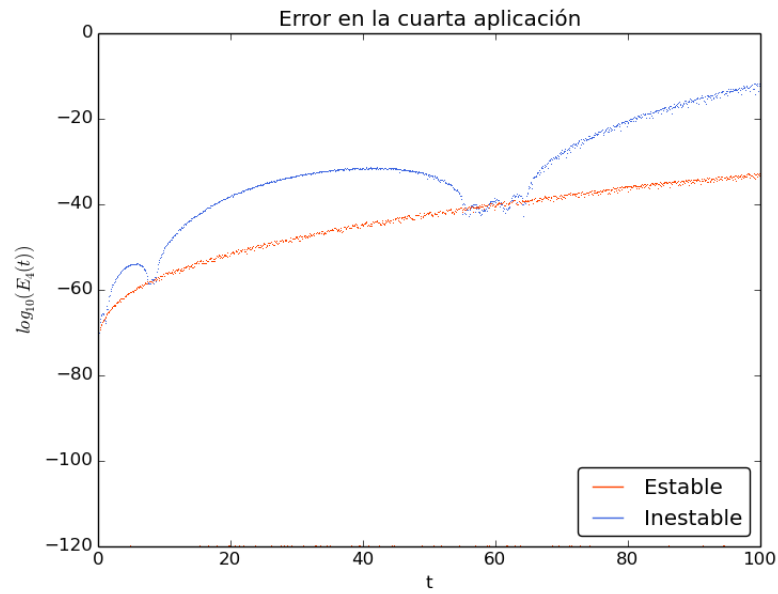


Figura 3.41: Error en el polinomio que resulta de aplicar el mapeo por cuarta vez a la parametrización de orden 250.

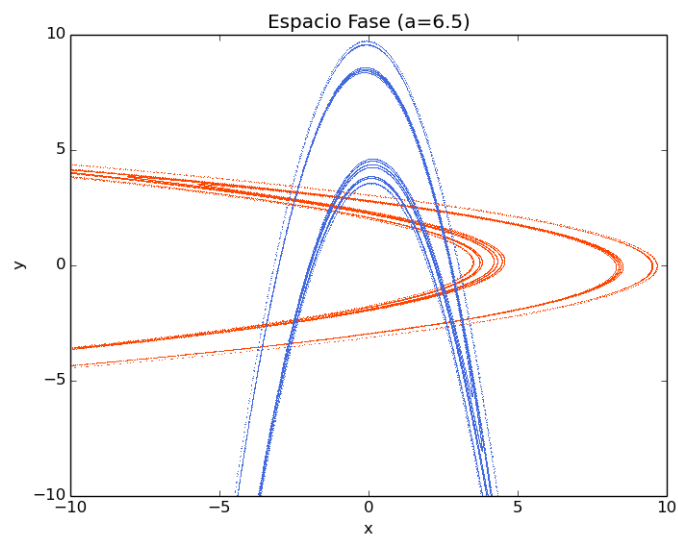


Figura 3.42: Quinta aplicación del mapeo a los polinomios de orden 250.

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

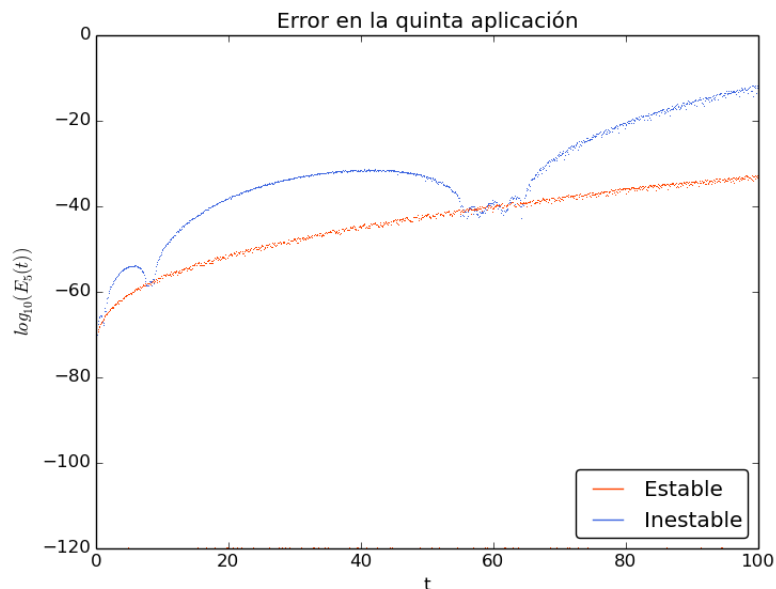


Figura 3.43: Error en el polinomio que resulta de aplicar el mapeo por quinta vez a la parametrización de orden 250.

En las primeras dos aplicaciones del mapeo, 3.36 y 3.38, se puede observar un tentáculo más en cada variedad, mientras que en las siguientes aparecen hasta dos más. La profundidad de tentáculos y la forma en la que se cruzan, depende del valor del parámetro a . Hay que enfatizar que para lograr observar estos cruces de manera directa, se debería llegar a valores del parámetro muy grandes comparados con el valor que se usó en todos los casos, lo cual no siempre es posible pues como se vio en la sección 3 después de cierto orden el error se estanca y no es posible llegar tan lejos con errores controlables, mientras que como muestran las figuras 3.35-3.41 el error es mucho menor que si se usará un polinomio de orden grande (> 250). Con esto mostramos que sólo se necesita conocer el rectángulo fundamental para conocer mucho de la dinámica de las variedades, y por tanto de los cruces entre ellas.

La implementación del método resultó ser eficiente para encontrar los polinomios que representan las variedades estable e inestable asociadas a puntos fijos hiperbólicos de los diferentes mapeos. Se tomaron estos tres mapeos para tener un poco de variedad en la forma de las variedades y también de los puntos fijos, en todos los casos el orden de la parametrización afecta de manera diferente, para el caso del mapeo exponencial resulta ser más sensible. En todos ellos un orden mayor contribuye a llegar más lejos en el valor del parámetro con un error bajo y como consecuencia graficar de mejor manera las variedades. Podemos decir que el error lo manipulamos al mover el orden pero también mostramos que se puede mejorar al usar números de precisión extendida. Una característica que se puede observar es que el error se comporta esencialmente de la misma forma para los tres mapeos, creciendo de manera lenta y luego creciendo rápido

a partir de cierto valor.

El análisis de la convergencia resulta congruente con lo que se puede observar en el error y en las mismas gráficas de las variedades. La convergencia también ayudó a ver que a partir de cierto orden los coeficientes son muy pequeños, por lo que no es necesariamente cierto que cada que aumentemos el orden se mejorará la parametrización.

El cálculo de puntos homoclínicos resulta una de las aplicaciones de tener las variedades parametrizadas. El método, junto con otras paqueterías de Julia, son indispensables para hacer este tipo de cálculos de una manera fácil. A pesar de que la aritmética de intervalos arroja resultados garantizados, no hay que olvidar que nuestros polinomios no son calculados de la misma manera, es decir se debe tener siempre en mente que al rededor de cada variedad hay un error asociado. Aún así las intersecciones pueden ser encontradas controlando bien el error en la parametrización y controlando la tolerancia en el método de Newton.

Resumen y perspectivas

Una característica importante a estudiar en los mapeos en general son las variedades estables e inestables asociadas a puntos fijos inestables. En el caso de los mapeos de dos dimensiones resulta manejable, hasta cierto punto, encontrarlas de manera semi-analítica usando el método de parametrización. Como vimos el método tiene como núcleo de desarrollo la ecuación de invariancia y la linearización del sistema alrededor de un punto fijo. Sin embargo decir manejable en términos matemáticos y físicos no resulta suficiente si lo que necesitamos es estudiar propiedades de los sistemas a partir de las variedades o el comportamiento de puntos fijos. Por ello es que la implementación del método resultaba llamativa. Tener un módulo escrito en software libre que calcula las variedades asociadas a puntos fijos hiperbólicos va más allá de generar las relaciones de recurrencia en casos particulares. El método automatizado es capaz de generar las parametrizaciones de las variedades alrededor de un punto fijo hiperbólico conocido, en cualquier mapeo Hamiltoniano de dos dimensiones. La idea detrás de la automatización se basa en que la computadora haga las veces de la recurrencia en lugar de calcularlas de manera analítica. Esto de ninguna manera modifica el modo del método, dando como resultado un método semianalítico con el cual tenemos las variedades de manera polinomial.

Dado que es un método en parte analítico y en parte computacional que involucra series de Taylor es crucial decir de alguna manera qué tan confiable es la parametrización. Por ello se incluyeron tres formas de evaluar el comportamiento de las variedades, tales involucran al error de la solución en serie de la ecuación de invariancia y el estudio de la convergencia mediante dos métodos. Conocer qué tanto podemos afirmar sobre el comportamiento de las variedades depende de estas tres funciones.

Como pudimos notar en el capítulo anterior, los tres ejemplos presentan comportamientos muy variados, el mapeo estándar tiene una función elemental además de estar acotado en el espacio fase, en el mapeo exponencial también se tiene una función elemental, pero no está acotado, mientras que en el de Hénon se tiene un polinomio y no es acotado. El mapeo estándar por ser bastante conocido sirvió como referencia

4. RESUMEN Y PERSPECTIVAS

para programar el método, el de Hénon por su parte se pensó que sería más fácil de parametrizar puesto que tiene forma polinomial lo cual concuerda pues se pudo llegar a valores grandes en el parámetro. En el mapeo exponencial se buscó un reto para el método pues al ser una función exponencial es más sutil aproximarla por polinomios. Fue notable que en el mapeo de Hénon se pudo observar más sobre las variedades que en los otros dos casos, mientras que el más complicado fue el exponencial. Podemos decir que aquellos mapeos que tengan formas polinomiales serán más dóciles de tratar por el método, debido a que el método consiste en aproximar las variedades por un polinomio.

Al explotar el método en los tres mapeos pudimos encontrar, con ayuda de los métodos para raíces, los cruces entre variedades para los tres casos, con lo cual se puede saber si hay conexiones homoclínicas o heteroclínicas. Usando aritmética de intervalos se puede tener un método numérico que garantice (matemáticamente hablando), la existencia de puntos homoclínicos o heteroclínicos. En este caso no es estricto el cálculo pues los coeficientes de la parametrización no son calculados de manera rigurosa con aritmética de intervalos. Esta idea sería una ventana hacia resultados más importantes y amplios como son el estudio de bifurcaciones y caos topológico.

Una característica importante a estudiar también es el comportamiento de los tentáculos formados por las variedades en términos de los parámetros de los mapeos. Como mostramos en la sección 3.5.3 se pueden obtener tentáculos a partir de iterar la parametrización mediante el mapeo. Así se puede calcular un polinomio de orden no tan grande, dependiendo del mapeo, e iterando hasta llegar a estructuras difíciles de alcanzar sólo con la parametrización.

Una de las dudas que surgió durante el proceso de este trabajo se formuló en principio como sigue: ¿es posible reparametrizar a partir de un cierto punto la variedad?. Por ejemplo en los casos en los que se tienen puntos homoclínicos se quisiera comenzar una nueva parametrización a partir del mismo. Esto permitiría construir las variedades por pedazos en los que se tenga un error más controlable y por tanto tener una mayor parte de la misma. Otra de las preguntas que surgieron tiene que ver con los polinomios de Chebyshev. Los polinomios de Taylor no tienen una dirección preferencial en el plano complejo, mientras que los de Chebyshev sí la tienen, el tener una dirección preferencial puede servir para mejorar el error y conseguir un polinomio que describa mejor la variedad a valores grandes del parámetro.

Bibliografía

- [1] J. Figueras A. Luque y J. Mondelo Á. Haro, M. Canadell. *The parameterization Method for Invariant Manifolds*, volume 195 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 1 edition, 2010. [v](#), [8](#)
- [2] J.D Mireles James. Elementary example of the parametrization method; stable and unstable manifolds of the standar map. 2007. [v](#), [vi](#), [11](#), [21](#)
- [3] B. Rückerl y C. Jung. Scaling properties of a scattering system with an incomplete horseshoe. *J. Phys A: Math.*, 27:55–77, 1994. [vi](#), [32](#)
- [4] Gerald Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1 edition, 2011. [2](#), [43](#)
- [5] A. J. Insel y L.E. Spence Stephen H. Friedberg. Algebra lineal. [3](#)
- [6] Vladimir I. Arnol'd. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, volume 1 of *Analytic Mechanics*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1992. [4](#)
- [7] James D. Meiss. *Differential Dynamical Systems*, volume 14 of *Mathematical modeling and computation*. Society for Industrial and Applied Mathematics ,Philadelphia, 1 edition, 2007. [4](#)
- [8] Glen R. Hall y Dan Offin Kenneth R. Meyerb. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Poble*, volume 90 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 2nd edition, 2009. [4](#)
- [9] Juergen Quandt. On the hartman-grobman theorem for maps. *Journal of differential equations*, 64:154–164, 1986. [4](#)
- [10] Edward Ott. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge university press, 1th edition, 1993. [5](#), [6](#), [40](#)
- [11] Mateo Wirth. Invariant manifolds of dynamical systems and an application to space exploration. [5](#)

- [12] Y.F. Chang y G. Corliss. Ratio-like and recurrence relation tests for convergence of series. *J. Inst. Maths Applies*, 25:349–359, 1980. [9](#)
- [13] Robert L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Adyson-Wesley, 2nd edition, 1989. [27](#), [43](#)
- [14] Validated numerics(paquete julia). url=<https://github.com/JuliaIntervals/ValidatedNumerics.jl>. [38](#)
- [15] Interval arithmetic(paquete julia). url=<https://juliaintervals.github.io/IntervalArithmetic.jl/stable/>. [38](#)
- [16] Interval root finding(paquete julia). url=<https://github.com/JuliaIntervals/IntervalRootFinding.jl>. [38](#)
- [17] R.Baker Kearfott y Michael J. Cloud Ramon E. More. *Introduction to Interval Analysis*. SIAM, 2009. [38](#)
- [18] W. Tucker. *Validated Numerics: A short introduction to Rigorous Computations*. Princeton University Press. [38](#)
- [19] Tamás Tél Ying-Cheng Lai. *Transient Chaos*, volume 173 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 1 edition, 2010.
- [20] J.D. Mireles James y Christian Reinhardt Jan Bouwe van den Berg. Computing (un)stable manifolds with validated error bounds: non-resonant and resonant spectra. 2015.
- [21] O. Merlo y T.H. Seligman C. Jung, C. Mejía-Monasterio. Self-pushing effect in chaotic scattering. *New Journal of Physics*, 6, 2004. [46](#)
- [22] Anthony M. Bloch y Melvin Leok Tomoki Ohsawa. Discrete hamilton-jacobi theory. *SIAM J. Control Optim*, 49:1822–1856, 3009.
- [23] B. Rückerl y C. Jung. Hierarchical structure in the chaotic scattering off a magnetic dipole. *J. Phys A: Math.*, 27:6741–6758, 1994.
- [24] C. Lipp y T.H. Seligman C. Jung. The inverse scattering problem for chaotic hamiltonian systems. *Annals of Physics*, 275:151–189, 1999.
- [25] Charles P. Poole y John L. Safko Herbert Goldstein. *Classical mechanics*. Addison-Wesley, 3 edition, 2000.
- [26] Vladimir I. Arnol'd y Roger Cooke. *Ordinary differential equations*. Springer-Verlag, 1991.
- [27] Jack K. Hale. *Ordinary Differential Equations*. Krieger Pub Co, 1980.
- [28] Ferdinand Verhulst. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, 1985.

- [29] Robert L. Devaney y Glen R. Hall Paul Banchard. *Ecuaciones diferenciales*. Thomson, 1th edition, 1998.
- [30] Stephen T. Thornton y Jerry B. Marion. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Thomson, 5th edition, 2004.
- [31] Static arrays(paquete julia). url=<https://github.com/JuliaArrays/StaticArrays.jl>. v0.7.2.
- [32] Calvin D. Ahlbrandt y Allan C. Peterson (auth.). *Discrete Hamiltonian Systems: Difference Equations, Continued Fractions, and Riccati Equations*. Kluwer Texts in the Mathematical Sciences 16. Springer US, 1 edition, 1996.