



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MÉTODO DE PARAMETRIZACIÓN: VARIEDADES
ESTABLES E INESTABLES EN MAPEOS
HAMILTONIANOS DE DOS DIMENSIONES

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

Físico

PRESENTA:

Evelyn Álvarez Cruz

TUTOR:

Dr. Luis Benet Fernández



México, D.F., 2018

A mis padres

Declaración de autenticidad

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

Evelyn Álvarez Cruz. México, D.F., 2018

Introducción

En el análisis de sistemas dinámicos es importante desarrollar aspectos que nos ayuden a describir de manera puntual el comportamiento de un sistema, esto ya que muchos de ellos tienen una dinámica rica en el sentido matemático y físico. Conocer por ejemplo los puntos fijos, las órbitas periódicas, el diagrama de bifurcación, entre otras características es una manera de poder decir mucho sobre el sistema en general. Entre esas otras características entra el estudio de variedades estables e inestables alrededor de puntos fijos o de periodo n . La importancia de las variedades radica en que mediante éstas se puede conocer el comportamiento del sistema dinámico en las vecindades del punto periódico, además para algunos casos la intersección de las mismas lleva a resultados interesantes sobre caos. Se puede por ejemplo estudiar el problema de los tres cuerpos mediante el estudio de sus variedades cerca del punto fijo, haciendo una linealización del problema.

El estudio analítico de las variedades cerca de puntos periódicos (puntos fijos y de periodo igual o mayor a dos) no ha sido tan exitoso como el numérico [MENCIONAR ALGUNOS MÉTODOS]. Dentro de los métodos semianalíticos se encuentra el de parametrización [1]. El método de parametrización, dicho de manera simple consiste en aproximar mediante series de Taylor las variedades alrededor de puntos periódicos usando que las variedades son solución a la ecuación de invariancia. Los coeficientes de los polinomios de Taylor se van calculando de manera recursiva. El método se describe en el trabajo de J.D. Mireles [2], quién lo aplicó de manera particular al mapeo estándar, describiendo muy claramente cómo se obtienen las relaciones de recurrencia; su trabajo es la motivación de esta tesis.

El objetivo de este trabajo es ir más allá de la implementación del método de parametrización para el mapeo estándar. Siguiendo las notas mencionadas se automatizó el método de manera computacional primero para el mapeo estándar y luego se hizo de manera general para cualquier mapeo de dos dimensiones. Con tal implementación se obtienen las variedades estable e inestable alrededor de puntos fijos hiperbólicos, parametrizadas por medio de un polinomio de orden n . Teniendo las variedades se hizo un análisis de las intersecciones entre ellas y de cómo explotar el método para mejorar el error.

Este escrito se divide en tres partes. En el primer capítulo desarrollaremos la teoría

0. INTRODUCCIÓN

de los sistemas dinámicos hamiltonianos que se usará a lo largo del método, junto con el método de parametrización. Introduciendo primero qué es un sistema dinámico junto con las definiciones de puntos fijos y órbitas periódicas. Llegando a la teoría detrás de la ecuación de invariancia. Las matemáticas que se utilizan en el proceso de parametrización están al alcance de un estudiante de licenciatura de Física o Matemáticas, sin embargo la teoría detrás del funcionamiento del método es un tanto más elevada de nivel, por lo que sólo mencionaremos en esta parte las herramientas más fundamentales.

En el segundo capítulo pasaremos a describir brevemente cómo J.D Mireles aplica el método para un caso particular. Para posteriormente explicar cómo se procedió a la implementación del método. En esta parte también se incluye el análisis del error y de la convergencia de las soluciones. El tercer y último capítulo consiste en analizar el mapeo estándar para reproducir algunos de los resultados presentados en [2]. También se analizarán otros mapeos como el de Hénon y el que aparece en el artículo [3]. Por último se presenta una breve perspectiva en el que mencionamos algunas de las ideas con las que se podría seguir trabajando a partir del método automatizado.

Dado que es un trabajo semianalítico se incluirán algunos enlaces que llevarán a ejemplos o códigos que se usen dentro del programa, con la documentación correspondiente. También hay algunas partes interactivas que estarán en línea.

Índice general

Introducción	v
1. Sistemas Hamiltonianos de dos dimensiones	1
1.1. Sistemas dinámicos	1
1.2. Mapeos	3
1.3. Conjuntos invariantes	5
1.4. Sistemas Hamiltonianos	6
1.5. Método de parametrización	8
2. Método de parametrización	11
2.1. Desarrollo explícito del mapeo estándar	11
2.2. Implementación del método	16
3. Ejemplos de aplicación del método	21
3.1. Mapeo Estándar	21
3.2. Mapeo de Hénon	27
3.3. Mapeo exponencial	32
3.4. Convergencia	35
3.5. Existencia de puntos homoclínicos	37
3.5.1. Estándar	38
3.5.2. Hénon	38
3.5.3. Mapeo exponencial	44
4. Panorama	49
Bibliografía	51

Sistemas Hamiltonianos de dos dimensiones

Para llegar al análisis de los sistemas de nuestro interés mediante el método de parametrización es fundamental conocer varios conceptos sobre la dinámica así como del análisis numérico del mismo. En este capítulo se hace una breve descripción de los teoremas y definiciones que nos ayudarán a entender el método. Las siguientes secciones no son la manera más formal de introducir al lector a cada uno de los temas expuestos. Sin embargo proporcionan una visión puntual de lo indispensable.

1.1. Sistemas dinámicos

Cuando uno habla sobre sistemas dinámicos lo que le viene a la mente es alguna relación que describe el comportamiento temporal de un sistema físico. Ya sea el movimiento de péndulos o de cargas, nos interesa saber más acerca de las características de su comportamiento. En el estudio de los mismos se hace una clasificación en términos de sus propiedades vistas en el espacio fase o por la forma del sistema. Hay sistemas dinámicos discretos y sistemas dinámicos continuos.

Dentro de éstas características de clasificación también puede estar que el sistema sea de tipo determinista o estocástico. La diferencia entre ambos es que para el determinista dado un punto en el espacio fase existe uno y sólo un punto subsecuente bien definido, mientras que en el estocástico para un estado puede haber varios estados subsecuentes posibles. En algunos casos los sistemas resultan ser simples, por ejemplo si su movimiento es regular. Sin embargo hay muchos otros sistemas que no son regulares en los que para dos condiciones iniciales parecidas los resultados de la dinámica después de cierto tiempo son diferentes. Para este trabajo nos enfocaremos en los sistemas deterministas discretos.

1. SISTEMAS HAMILTONIANOS DE DOS DIMENSIONES

Para formalizar usaremos la siguiente definición de sistema dinámico.

Definición 1 (*Sistema dinámico*[4])

Un sistema dinámico es un semigrupo G actuando en un espacio M

$$T : G \times M \rightarrow M; \quad T_g \circ T_h = T_{g \circ h}. \quad (1.1)$$

Un ejemplo típico de un sistema dinámico continuo es el flujo de una ecuación diferencial autónoma, mientras que de uno discreto es por ejemplo el mapeo de un intervalo cerrado en \mathbb{R} en sí mismo, o simplemente una función iterada. En el primer caso

$$\dot{x} = f(x); \quad x(0) = x_0, \quad (1.2)$$

suponiendo que $f \in C^k(M, \mathbb{R}^n)$ con $k \geq 1$ y donde M es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Las soluciones de este tipo de sistemas son curvas contenidas en \mathbb{R}^n a las que llamamos trayectorias y denotamos por ϕ .

En el segundo caso

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.3)$$

Para la ecuación 1.3 dada una condición inicial \mathbf{x}_0 podemos obtener el estado siguiente evaluando el lado derecho con tal punto. De manera sucesiva se puede obtener el estado \mathbf{x}_{n+1} del estado \mathbf{x}_n . La aplicación consecutiva de la función proporciona la trayectoria u órbita del punto inicial. Podemos decir que el mapeo es un isomorfismo entre la condición inicial y los puntos de la trayectoria,

$$\mathbf{x}_{k+1} = F \circ F \circ F \circ F \dots \circ F(\mathbf{x}_0) \quad (k \text{ veces})$$

o

$$\mathbf{x}_{k+1} = F^k(\mathbf{x}_0).$$

Al conjunto $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ se le llama la órbita de \mathbf{x}_0 . En este tipo de sistemas es posible que exista un \mathbf{x}_* tal que $\mathbf{F}^p(\mathbf{x}_*) = \mathbf{x}_*$ con $p \in \mathbb{Z}$. Es decir después de un número finito de aplicaciones se vuelve al mismo punto (\mathbf{x}_*) al cual le llamamos un punto de periodo p . También es entonces posible que exista un punto de periodo uno $\mathbf{x}_* = \mathbf{F}(\mathbf{x}_*)$ al cual llamamos punto fijo. Los puntos fijos serán otra forma de clasificar a los sistemas dinámicos, para ello separamos las órbitas en términos de los periodos:

- Órbitas fijas (asociadas a puntos con periodo uno).
- Órbitas periódicas regulares (asociadas a puntos con periodo mayor a uno).
- Órbitas no cerradas (asociadas a puntos no periódicos).

Nos enfocaremos sobre todo en los puntos fijos, sin embargo es posible también analizar en aquellos puntos de periodo mayor a uno.

1.2. Mapeos

Como mencionamos en la introducción existen diferentes características de los sistemas dinámicos, la forma en la que depende un estado del estado anterior es una de ellas. Esa dependencia está determinada por \mathbf{F} en la ecuación 1.3; gráficamente se describe en el espacio fase, que es el espacio de todos los posibles valores de \mathbf{x} . En el mismo espacio la órbita de cualquier punto se ve como una curva que representa la evolución de un punto \mathbf{x} bajo el mapeo hacia adelante y hacia atrás.

Las funciones que aparecen en el mapeo pueden contener términos con potencia mayor a uno, productos entre las variables o peor aún funciones mucho más difíciles de manejar, lo que hace que la suma de soluciones no sea solución, esa característica se llama no linealidad. Una de las primeras cosas a analizar serían los puntos fijos del sistema, los cuales deberán encontrarse algebraicamente o numéricamente dependiendo de la dificultad del mapeo. Supongamos que se tiene un punto fijo de un mapeo, al rededor del punto fijo pueden presentarse diversos comportamientos de las trayectorias; como el sistema es no lineal es difícil decir qué tipo de evolución sufre el sistema visto en el espacio fase.

Si tenemos un punto fijo \mathbf{x}_* asociado al mapeo entonces la ecuación

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n \tag{1.4}$$

representa la linearización del sistema en el punto, donde $\mathbf{A} = D\mathbf{F}(\mathbf{x}_*)$. Es decir el mapeo puede ser representado como una matriz de coeficientes constantes, además si el sistema dinámico es invertible se puede conocer el punto anterior \mathbf{x}_{n-1} a un cierto \mathbf{x}_n usando la matriz inversa de \mathbf{A} que representa el mapeo inverso \mathbf{F}^{-1} . Es decir las características de tal matriz nos dirán el comportamiento del sistema.

Dado que los sistemas tratados en este trabajo son de dos dimensiones entonces analizaremos sólo este caso. Los valores propios λ_1, λ_2 , soluciones del polinomio característico de grado dos, son en general valores complejos clasificados como sigue.

- $|\lambda_i| < 1$
- $|\lambda_i| > 1$
- $|\lambda_i| = 1$

En cada uno de los casos anteriores podremos tener dos vectores propios $\mathbf{x}_{p1}, \mathbf{x}_{p2}$ asociados a cada valor propio

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_{p1} = \lambda_1\mathbf{x}_{p1}; \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_{p2} = \lambda_2\mathbf{x}_{p2}. \tag{1.5}$$

1. SISTEMAS HAMILTONIANOS DE DOS DIMENSIONES

Los vectores serán linealmente independientes si λ_1, λ_2 son diferentes. Si además consideramos que los valores propios son reales, según [5] existe una matriz \mathbf{U} tal que

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

. A partir de esto no es difícil ver que \mathbf{U} tiene como columnas los vectores propios. Consecuentemente un mapeo lineal de dimensión dos es linealmente conjugado con un mapeo el cual tiene una matriz de representación diagonal. Este tipo de matrices son llamadas formas normales y permiten representar el sistema en su forma más simple mediante la diagonalización del mismo.

Cuando \mathbf{A} es una matriz diagonalizable y sus valores propios son puramente imaginarios entonces decimos que tiene un comportamiento elíptico. Si es el caso que ninguno de los dos valores propios tienen parte real cero entonces la matriz se dice hiperbólica y el punto fijo asociado es un punto fijo hiperbólico. El resultado de estas características visto en el espacio fase es un comportamiento muy particular que se puede muestra en la figura 1.1.

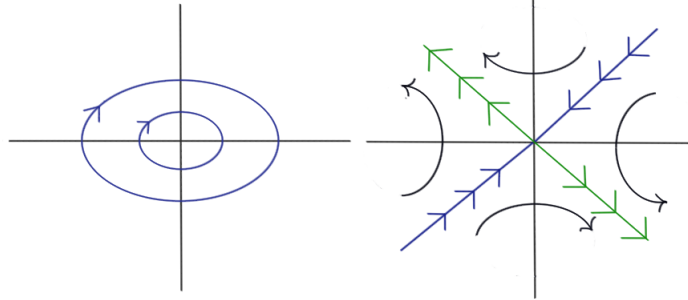


Figura 1.1: Punto fijo elíptico(izquierda) e hiperbólico(derecha) en el espacio fase

En el caso hiperbólico tenemos dos comportamientos que nos interesan, marcados con las líneas azul y verde de la figura anterior, tales corresponden a los eigenespacios asociados a los vectores propios de \mathbf{A} . Existe un teorema importante de Hartman-Grobman que nos asegura que hay una vecindad del punto fijo hiperbólico tal que el mapeo es topológicamente conjugado con su linealización [6, 7, 8]. Dicho de otra manera hay vecindades U de x_* , V de $0 \in \mathbf{R}^2$ y un homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ tal que h mapea trayectorias de \mathbf{F} en trayectorias del sistema lineal. De esta manera justificamos el porque se trabaja con un sistema lineal.

1.3. Conjuntos invariantes

Al rededor de un punto fijo existen ciertos conjuntos que nos dirán características globales del sistema, estos conjuntos tienen que ver directamente con lo que se observa en la figura 1.1. Para entender su comportamiento necesitamos definir un conjunto invariante.

Definición 2 (Conjunto invariante[9])

Un conjunto invariante es un subconjunto $\mathbf{I} \subset \mathbf{E}$ del espacio fase tal que para cualquier $\mathbf{x}_i \in \mathbf{I}$ y $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{F}^n(\mathbf{x}_i) \in \mathbf{I}.$$

Es decir que cualquier elemento tomado en el conjunto se queda en el conjunto bajo la aplicación del mapeo.

Estudiaremos los conjuntos invariantes asociados a puntos fijos hiperbólicos, si \mathbf{x}_* es un punto fijo hiperbólico entonces definimos las variedades estable e inestable como

$$W^s = \{\mathbf{x} : \mathbf{F}^n(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{x}_* \text{ cuando } n \rightarrow \infty\} \quad (1.7)$$

$$W^u = \{\mathbf{x} : \mathbf{F}^n(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{x}_* \text{ cuando } n \rightarrow -\infty\}. \quad (1.8)$$

Localmente las variedades resultan ser tangentes a los subespacios generados por los vectores propios

$$E^s = \{(x, y) : (x, y) = \beta \mathbf{v}_1 \quad \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$E^u = \{(x, y) : (x, y) = \alpha \mathbf{v}_2 \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Esto se resume en el siguiente teorema.

Teorema 1 (De la variedad estable [10])

Sea un sistema de la forma $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$ con un punto fijo en el origen. Sean E^s y E^u los subespacios estables e inestables de la linealización del sistema, $\mathbf{F}(\mathbf{x}_n) \rightarrow \mathbb{J}\mathbf{x}_n$, donde \mathbb{J} es la matriz jacobiana en el origen. Si $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_n) - \mathbb{J}\mathbf{x}_n\| = O(x^2)$ entonces existen localmente variedades estables e inestables con las mismas dimensiones que E^s, E^u y que son tangentes a estos en cero respectivamente.

$$W_{loc}^s(\mathbf{x}_*) = \{\mathbf{x}_n : \mathbf{F}^k(\mathbf{x}_n) \rightarrow \mathbf{x}_* \text{ cuando } k \rightarrow \infty\}$$

$$W_{loc}^u(\mathbf{x}_*) = \{\mathbf{x}_* : \mathbb{F}^k(\mathbf{x}_n) \rightarrow \mathbf{x}_* \text{ cuando } k \rightarrow -\infty\}$$

Es necesario mencionar que una variedad estable no puede cruzarse con otra variedad estable, lo mismo sucede con las inestables, así como con la intersección de una variedad con sí misma. Para entender esto consideremos que se tienen dos puntos fijos diferentes con sus respectivas variedades inestables asociadas. Supongamos que las variedades se cruzan en algún punto, si esto pasa la órbita hacia atrás de cualquiera de los dos puntos empezando en la intersección debería aproximarse a ambos puntos fijos, lo cual es imposible pues eran diferentes. Los argumentos para la intersección de las estables son similares. Lo que sí puede suceder es la intersección de una variedad estable con una inestable, a esto se le llama una intersección homoclínica. Si la intersección se da en otro punto fijo entonces se llama heteroclínica [9]. Resulta además que si dos variedades, estable e inestable, se cortan en un punto se cortarán una infinidad de veces más.

El cálculo de variedades alrededor de un punto fijo es un problema difícil de atacar analíticamente, pues su comportamiento puede ser muy complejo, por ello es necesario explotar al máximo la linearización que se hace del sistema para poder, con métodos numéricos o semianalíticos, calcular las variedades. Es justo esto lo que nos lleva a la siguiente sección.

1.4. Sistemas Hamiltonianos

Los sistemas Hamiltonianos son una clase particular de los sistemas dinámicos. En 1834 William R. Hamilton reformuló la ecuación de Newton ($F = ma$) para un conjunto de partículas puntuales en un campo de fuerzas. Cuando la fuerza \mathbf{F} es conservativa es posible escribir a la fuerza como menos el gradiente de una función potencial.

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad (1.9)$$

Podemos convertir la ecuación 1.9 en un sistemas de ecuaciones diferenciales.

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i; \quad m_i \frac{dv_i}{dt} = -\nabla_i V \quad (1.10)$$

Aquí es donde Hamilton notó que estas ecuaciones pueden obtenerse a partir de una función muy particular.

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m_i} + V(q) \quad (1.11)$$

A la función 1.11 actualmente se le llama Hamiltoniana, donde p_i denota el momento y q la colección de las posiciones en forma de vector. Al comparar 1.11 con 1.10 tenemos que las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (1.12)$$

Físicamente hablando H es la energía total del sistema, que es invariante en el tiempo, $\frac{dH}{dt} = 0$. La formulación Hamiltoniana de la mecánica no está limitada a sistemas que son de la forma "energía cinética más energía potencial". Ya que de manera más general una Hamiltoniana es cualquier función C^1 , $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ donde en nuestro caso M es una variedad $2n$ -dimensional con coordenadas $z = (q, p)$. Para escribir las ecuaciones de Hamilton de manera resumida

$$\frac{dz}{dt} = J \nabla H \quad (1.13)$$

Donde I es la matriz identidad de $n \times n$ por lo que J es de $2n \times 2n$ antisimétrica, llamada matriz de Poisson.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

Si por otro lado pensamos que el cambio de una función escalar F que depende del tiempo se puede calcular usando la ecuación 1.13 mediante la regla de la cadena

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}$$

Aquí la expresión $\{F, H\}$ es llamada el paréntesis de Poisson definido como:

$$\{F, H\} = \nabla F^T J \nabla H \quad (1.14)$$

que nos sirve para escribir las ecuaciones de movimiento 1.12

$$\dot{z} = \{z, H\} \quad (1.15)$$

Algunas de las cosas que nos interesan en este tipo de sistemas son las cantidades conservadas. La primera de ellas que nos interesa es la energía.

Lema 1

(Conservación de energía) Si H es independiente del tiempo entonces la energía se conserva a lo largo de trayectorias. $H(q(t), p(t)) = E$.

Demostración:

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} = \nabla H^T J \nabla H = 0$$

ya que J es antisimétrica. ■

La otra cantidad que nos interesa es el volumen, Joseph Liouville mostró que los flujos Hamiltonianos preservan el volumen.

Lema 2

(Liouville) Si H es C^2 entonces su flujo preserva el volumen.

Una característica más de los sistemas Hamiltonianos es que sus puntos críticos son equivalentemente sus puntos fijos. Lo cual se enuncia en el siguiente lema.

Lema 3

(Equilibrio) *Un punto z^* es un punto fijo del flujo autónomo Hamiltoniano si y sólo si es un punto crítico de H .*

Consecuentemente de eso tenemos que al ser iguales sus puntos críticos y fijos entonces la estabilidad de los mismos se puede estudiar a partir de la matriz Hessiana de H . Lo cual analizaremos en una sección posterior. Mientras podemos pensar que una consecuencia de este lema es que cualquier máximo o mínimo no degenerado de H es Lyapunov estable.

Pero ¿cómo es que este tipo de sistemas se relacionan con los sistemas lineales que analizamos antes?. La clave está en escribir a nuestro sistema de manera linearizada mediante la matriz \mathbb{J} . Si escribimos 1.12 como

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta t}$$

donde $q_i = q(t)$ y $q_{i+1} = q(t + \Delta t)$. Entonces las ecuaciones de movimiento se pueden reescribir

$$q_{i+1} = q_i + \Delta t p_i; \quad p_{i+1} = p_i - \Delta t \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_{q=q_{i+1}} \quad (1.16)$$

lo cual ya está en forma de un sistema de los que estudiamos anteriormente. Para linearizar el sistema calculamos el jacobiano

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(q_{i+1}, p_{i+1})}{\partial(q_i, p_i)} = \det \begin{pmatrix} 1 & -\Delta t \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i^2} \right) \\ \Delta t & 1 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

Es justo de este sistema linearizado de donde obtendremos información a partir de aplicar los teoremas y resultados de las secciones anteriores. Pero antes, notemos que el determinante es uno

$$\det(\mathbf{J}) = 1 + (\Delta t)^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} \right)_{q=q_{i+1}}$$

ya que la segunda parcial del potencial vale cero. Por lo que es un sistema que preserva áreas.

1.5. Método de parametrización

Como ya observamos en la sección anterior encontrar las variedades asociadas a un punto fijo no es trivial. Los métodos analíticos se vuelven no sólo tediosos si no que

hacen necesario que el análisis de un sistema se haga de forma personalizada. Y para encontrar tales variedades debemos explotar los conocimientos que tenemos sobre los sistemas. Algunas de estas características son realmente simples, por ejemplo sabemos que en un punto hiperbólico resultarán dos variedades asociadas a los valores propios de la matriz que representa el sistema linearizado. Para este trabajo nos concentraremos en los sistemas Hamiltonianos ya que estos preservan el área y son importantes en la física, sin embargo el método funciona también para sistemas no Hamiltonianos. El objetivo de esta sección es hablar sobre el método de parametrización el cual fue desarrollado por X.Cabré, E. Fontich y R. de la Llave [1]. El método fue desarrollado de manera general para conjuntos invariantes, se trata de un método semianalítico, es decir parte computacional y parte analítica.

Para ahondar en el método recordemos que anteriormente mencionamos que los conjuntos Θ , \mathbf{P} son conjuntos invariantes. Por otro lado también recordemos la definición de sistema dinámico que nos dice que se trata de un semigrupo actuando sobre un espacio M , la manera en la que se genera el sistema es con un difeomorfismo $F : M \rightarrow M$. En este mismo espacio M definamos una inmersión inyectiva $P : \Theta \rightarrow M$ lo cual nos define una subvariedad \mathbf{P} parametrizada por medio de las variables locales en $\theta \in \Theta$. La variedad invariante parametrizada por \mathbf{P} junto con $g : \Theta \rightarrow \Theta$ deben cumplir

$$F \circ P = P \circ g, \quad (1.18)$$

llamada ecuación de invariancia [1]. Es decir \mathbf{P} y g son de tal forma que hacen que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} \Theta \subset \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \Theta \subset \mathbb{R} \\ \downarrow \mathbf{P} & & \downarrow \mathbf{P} \\ M \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{F} & M \subset \mathbb{R}^n \end{array} \quad (1.19)$$

En este sentido g representa un subsistema de F , en otras palabras g contiene la dinámica del mapeo pero sobre Θ . El objetivo del método de parametrización es encontrar P y g que cumplan la ecuación de invariancia 1.18. Aunque no conozcamos la dinámica interna de g sabemos que P, g son soluciones de 1.18, si observamos el diagrama 1.19 es claro que la composición también lo es y eso nos dará una libertad para resolver la ecuación. El obstáculo, de no conocer g , se puede pasar si se escoge una forma de parametrización que dependa del sistema; en el método de parametrización se tienen descritas dos formas: la forma gráfica y la forma normal. Usaremos el método de la forma gráfica, que es la forma más simple de parametrización. Consiste en adaptar la forma de la parametrización P a la forma de las variedades, la cual esta relacionada con la dirección que proporcionan los vectores propios. Para el caso de una matriz hiperbólica de 2×2 sus vectores propios nos indicarán, suficientemente cerca del punto fijo, la dirección de cada variedad.

La forma en la que se escoge g , en la mayoría de las veces, es polinomial de tal manera que se adapte a la forma del mapeo. Sin embargo la elección puede ser diferente dependiendo del sistema. En este caso escogimos la dependencia más sencilla para x, y [1.20](#) que resulta ser suficiente en el caso hiperbólico

$$g(t) = (\lambda t, \lambda t). \quad (1.20)$$

Con esto tendremos del lado derecho de la ecuación [1.18](#) un polinomio.

Supongamos ahora que tenemos ya las variedades parametrizadas, para este punto es importante tener una función que nos indique que tan acertada es nuestra parametrización. La primera y más fácil forma de calcular el error es a partir de la ecuación [1.18](#), mediante la resta

$$E_n(t) = \| F \circ P_n - P_n \circ g \|_\infty. \quad (1.21)$$

Este error será el asociado a la variación con respecto a la ecuación cohomológica. Dado que depende del parámetro esperamos que el error vaya creciendo conforme se evalúa en valores de t lejos del punto fijo. La otra forma de evaluar qué tan lejos podemos llegar con la parametrización es ver la convergencia de los polinomios asociados. Al tener los polinomios de la variedad podemos evaluar el cociente entre los coeficientes de cada término.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad (1.22)$$

donde $(a_0, b_0) = x_*$ son los coeficientes de orden cero y a_n el de orden n . Lo que prácticamente estamos haciendo con este cociente es lo que se llama estudiar la convergencia según Hadamard. Si el límite anterior tiende a cero entonces la serie a_n converge. Otra forma de evaluarlo es usando tres términos [\[11\]](#).

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left[i \left(\frac{a_{i+1}}{a_i} \right) - (i-1) \left(\frac{a_i}{a_{i-1}} \right) \right] \quad (1.23)$$

Aunque el método se aplica de la misma manera para los mapeos analizados, es obvio que la parametrización será diferente, por lo que la convergencia de cada parametrización es distinta.

Método de parametrización

En este capítulo describimos cómo se realizó el método de parametrización aplicado a sistemas hamiltonianos. Se comienza explicando el análisis del mapeo estándar siguiendo el trabajo de Mireles James [2]. A partir de este trabajo se generalizó el método para los sistemas hamiltonianos de dos dimensiones de manera que dado un mapeo el método programado en Julia pudiera calcular de manera recurrente los polinomios asociados a las variedades.

2.1. Desarrollo explícito del mapeo estándar

Para desarrollar el método de parametrización de manera automática se usó como base el desarrollo que aparece en las notas [2]. En este trabajo se expone de manera explícita cómo se calculan las variedades estables e inestables para el mapeo estándar. La razón por la que se usa este mapeo es dado que preserva área y que puede ser pensado como una perturbación de un mapeo integrable en el toro, además de que exhibe la dinámica asociada a mapeos hamiltonianos. El mapeo estándar tiene la forma

$$\mathbf{f}_k(\theta, p) = \begin{bmatrix} \theta + p \\ p + k \sin(\theta + p) \end{bmatrix} \text{ mód } (2\pi), \quad (2.1)$$

mientras el inverso es

$$\mathbf{f}_k^{-1}(\theta, p) = \begin{bmatrix} \theta - k \sin(p - \theta) \\ p - \theta \end{bmatrix} \text{ mod}(2\pi). \quad (2.2)$$

Los puntos fijos del mapeo serán aquellos que

$$\mathbf{f}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad (2.3)$$

con $\mathbf{x} = (\theta, p)$. El resultado de esta condición son los puntos $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$ y $\mathbf{x}_2 = (0, \pi)$. Para analizar la estabilidad lineal del mapeo hacemos

$$D\mathbf{f}_k(\theta, p) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k \cos(\theta + p) & 1 + k \cos(\theta + p) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

2. MÉTODO DE PARAMETRIZACIÓN

Al evaluar $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ en 2.4 resulta

$$D\mathbf{f}_k(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & 1+k \end{pmatrix} \quad D\mathbf{f}_k(0, \pi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -k & 1-k \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

A partir de esto podemos obtener los valores propios para \mathbf{x}_1 que resultan

$$\lambda_{1,2} = \frac{2+k \pm \sqrt{k^2+4k}}{2}, \quad (2.6)$$

cuyos vectores propios (y_1, y_2) cumplen que

$$y_2 = y_1 \left(\frac{1 \pm \sqrt{k^2+4k}}{2k} \right), \quad (2.7)$$

los cuales son hiperbólicos para cualquier $k > 0$. Mientras que para \mathbf{x}_2

$$\lambda_{1,2} = \frac{-k+2 \pm \sqrt{k^2-4k}}{2} \quad 0 < k < 4, \quad (2.8)$$

resultan valores complejos, por lo que para el análisis sólo se ocupará el punto \mathbf{x}_1 . Necesitamos entonces una parametrización de las variedades por lo que proponemos a las variables como dos polinomios en t

$$\theta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad (2.9)$$

y

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \quad (2.10)$$

tal que $P(t) := (\theta(t), p(t))$. Por otro lado necesitamos la parametrización también de la dinámica interna g , proponiendo que $g(t) = \lambda t$ con λ una constante. Después de sustituir esto en la 1.18 para el mapeo estándar obtenemos

$$\mathbf{f}_k(\theta, p) = \begin{bmatrix} \theta(t) + p(t) \\ p(t) + k \sin(\theta(t) + p(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(\lambda(t)) \\ p(\lambda(t)) \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

que en forma explícita es

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n + k \sin(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n t^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n t^n \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Al desarrollar el primer renglón de la ecuación anterior

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots = a_0 + a_1 \lambda t + \dots \quad (2.13)$$

agrupamos términos del mismo orden y comparamos los de orden cero

$$a_0 + b_0 = a_0 \quad (2.14)$$

que implica $b_0 = 0$. Hacemos lo mismo pero ahora con el renglón dos de 2.12 usando la serie de Taylor del seno

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n + k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right]^{2j+1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n t^n \quad (2.15)$$

desarrollamos cada suma tomando en cuenta que $b_0 = 0$

$$b_1 t + b_2 t^2 + \dots + \kappa [a_0 + (a_1 + b_1)t + \dots] + \frac{\kappa}{3!} [a_0 + (a_1 + b_1)t]^3 + \dots = b_1 \lambda t + \dots \quad (2.16)$$

e igualamos los términos de orden cero

$$\kappa a_0 + \frac{\kappa}{3!} a_0^3 + \dots = 0 \quad (2.17)$$

por lo que $a_0 = 0$. Si ahora usamos los de orden uno en la ecuación 2.13, 2.16 respectivamente

$$(a_1 + b_1)t = a_1 \lambda t \quad (2.18)$$

$$b_1 t + \kappa(a_1 + b_1)t = b_1 \lambda t \quad (2.19)$$

al dividir entre t ambas ecuaciones podemos escribir las ecuaciones en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \kappa & 1 + \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Es posible obtener las soluciones para a_1 en términos de b_1 y de λ en términos de κ . De manera análoga se pueden obtener los coeficientes a_2, b_2 al comparar los términos cuadráticos. Sin embargo es claro que obtener los términos de esta manera es un camino tedioso, por lo que recurrimos al método de parametrización para poder encontrar relaciones de recurrencia que calculen los coeficientes de los polinomios. Usando de nuevo las ecuaciones 2.9, 2.10 proponemos que

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n t^n = \sin \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right) \quad (2.21)$$

es decir la parte que aparece en el mapeo $\sin(\theta + p)$ se puede ver como un solo polinomio con coeficientes β_n . Al considerar de forma compleja a W tenemos

$$\overline{W} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n) t^n = \exp(i(\theta(t) + p(t))), \quad (2.22)$$

2. MÉTODO DE PARAMETRIZACIÓN

calculando la derivada de la ecuación anterior

$$\overline{W}' = i\overline{W}(\theta'(t) + p'(t)) \quad (2.23)$$

que al desarrollar en potencias de t y usando convolución

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(\alpha_{n+1} + i\beta_{n+1})t^n = i \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n + i \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n \quad (2.24)$$

con

$$c_n = \sum_{l=0}^n (l+1)(\alpha_{n-l} + i\beta_{n-l})a_{l+1}, \quad d_n = \sum_{l=0}^n (l+1)(\alpha_{n-l} + i\beta_{n-l})b_{l+1} \quad (2.25)$$

con algo de álgebra se pueden desarrollar las sumas y separar las partes real y compleja de cada lado para compararlas, llegando a que la parte real es

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\alpha_{n+1}t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[- \sum_{l=0}^n (l+1)\beta_{n-l}(a_{l+1} + b_{l+1}) \right] t^n \quad (2.26)$$

mientras que la compleja

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\beta_{n+1}t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^n (l+1)\alpha_{n-l}(a_{l+1} + b_{l+1}) \right] t^n \quad (2.27)$$

en donde podemos volver a igualar potencias de t y despejando $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ resulta

$$\alpha_{n+1} = \frac{-1}{n+1} \sum_{l=0}^n (l+1)\beta_{n-l}(a_{l+1} + b_{l+1}), \quad (2.28)$$

$$\beta_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^n (l+1)\alpha_{n-l}(a_{l+1} + b_{l+1}), \quad (2.29)$$

que son las relaciones de recurrencia para α, β en términos de los coeficientes del polinomio, con las que podemos calcular $\sin(\theta + p)$. Acabamos de usar un truco en el que fue muy importante la forma del mapeo en el que sólo tuvimos que usar una expansión en serie de Taylor, sin embargo si resultara que en el mapeo aparecieran productos de funciones no podemos garantizar que se puedan encontrar las relaciones de recurrencia de manera fácil. Para obtener las relaciones de recurrencia de a_n, b_n usaremos el caso $t = 0$ pues ya sabemos los primeros valores de las constantes $\alpha_0, \beta_0, a_0, b_0$, entonces al sustituir $t = 0$ en la ecuación 2.22 resulta

$$\overline{W}(0) = \alpha_0 + i\beta_0 = \cos(\theta(0) + p(0)) + i\sin(\theta(0) + p(0)) = 1 \quad (2.30)$$

entonces $\alpha_0 = 1, \beta_0 = 0$, tenemos entonces los valores iniciales de la recursión y por tanto podemos calcular los otros valores. Para encontrar los demás usemos la ecuación 2.12 pero tomando en cuenta la forma en la que escribimos al seno

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n t^n \quad (2.31)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n + \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda^n t^n. \quad (2.32)$$

Reescribimos las ecuaciones anteriores de manera que nos permita comparar términos de la misma potencia

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda^n) a_n t^n = - \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n \quad (2.33)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda^n) b_n t^n = -\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n, \quad (2.34)$$

entonces los coeficientes de t^{n+1} son

$$(1 - \lambda^{n+1}) a_{n+1} = -b_{n+1} \quad (2.35)$$

$$(1 - \lambda^{n+1}) b_{n+1} = -\kappa \beta_{n+1}. \quad (2.36)$$

Sustituyendo 2.29 en 2.36

$$(1 - \lambda^{n+1}) b_{n+1} = \frac{-\kappa}{n+1} \sum_{l=0}^n (l+1) \alpha_{n-l} (a_{l+1} + b_{l+1}). \quad (2.37)$$

Como buscamos una ecuación para la recurrencia separaremos el término $l = n$ del lado derecho de 2.37

$$(1 - \lambda^{n+1}) b_{n+1} = -\frac{\kappa}{n+1} \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) \alpha_{n-l} (a_{l+1} + b_{l+1}) - \kappa (a_{n+1} + b_{n+1}) \quad (2.38)$$

y agrupamos de manera que los coeficientes a_{n+1}, b_{n+1} queden en el mismo lado de la ecuación

$$\kappa a_{n+1} + (1 - \lambda^{n+1} + \kappa) b_{n+1} = -\frac{\kappa}{n+1} \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) \alpha_{n-l} (a_{l+1} + b_{l+1}). \quad (2.39)$$

2. MÉTODO DE PARAMETRIZACIÓN

Usando las ecuaciones 2.35 y 2.39 escribimos un sistema de ecuaciones para a_{n+1}, b_{n+1} en forma matricial

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = -\frac{\kappa}{n+1} \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) \alpha_{n-l} (a_{l+1} + b_{l+1}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

siendo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a - \lambda^{n+1} & 1 \\ \kappa & 1 - \lambda^{n+1} + \kappa \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Escrito de esta forma es claro que podemos resolver el sistema multiplicando por \mathbf{A}^{-1} siempre que $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = -\frac{\kappa}{n+1} \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{n-l} (a_{l+1} + b_{l+1}) \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

siendo

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{(1 - \lambda^{n+1})(1 - \lambda^{n+1} + \kappa) - \kappa} \begin{pmatrix} 1 - \lambda^{n+1} + \kappa & -1 \\ -\kappa & 1 - \lambda^{n+1} \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Al escribir de manera separada la ecuación anterior obtenemos las relaciones de recurrencia para los coeficientes de la parametrización

$$a_{n+1} = \frac{\kappa}{(n+1)[(1 - \lambda^{n+1})(1 - \lambda^{n+1} + \kappa) - \kappa]} \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{n-l} (l+1) (a_{l+1} + b_{l+1}) \quad (2.44)$$

$$b_{n+1} = \frac{-\kappa(1 - \lambda^{n+1})}{(n+1)[(1 - \lambda^{n+1})(1 - \lambda^{n+1} + \kappa) - \kappa]} \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{n-l} (l+1) (a_{l+1} + b_{l+1}). \quad (2.45)$$

Usando el cada uno de los valores propios y las anteriores ecuaciones de recurrencia obtendremos los coeficientes de los polinomios $\theta(t), p(t)$ a cualquier orden. Dependiendo de qué valor de λ se tome tendremos la parametrización de la variedad estable o de la inestable.

2.2. Implementación del método

En esta sección explicaremos paso a paso la implementación del método. Supondremos que se tiene un mapeo hamiltoniano $\mathbf{f}_\kappa(\mathbf{x})$ donde κ es un parámetro, y del cual tenemos un punto fijo $\mathbf{x}_* = (\theta_*, p_*)$.

Primer orden

.....
Primero se crean dos variables θ, p del mapeo, como dos polinomios de grado mayor a uno que corresponden a \mathbf{x}_1 en 1.3. Se escogen de esta manera para obtener una ecuación lineal.
.....

$$\mathbf{x}_1 = (\theta + \dots, p + \dots)$$

.....
Creamos dos polinomios de variable t de orden uno que representan la variedad. Los coeficientes de orden cero son el punto fijo.
.....

$$\begin{aligned} T_\theta &= \theta_* + (\theta + \dots)t + O(t^2) \\ T_p &= p_* + (p + \dots)t + O(t^2) \end{aligned}$$

.....
Aplicamos el mapeo \mathbf{f}_κ a los polinomios anteriores lo cual corresponde al lado izquierdo de 1.18.
.....

$$C_n = \mathbf{f}_\kappa(T_\theta, T_p)$$

Hasta este momento hemos calculado la parte izquierda de la ecuación de invarianza, nos ocuparemos del lado derecho más adelante. La razón por la que se escriben los coeficientes de $\mathbf{T} = (T_\theta, T_p)$ a su vez como polinomios es que al escribir un polinomio en el coeficiente es posible tratarlo como una variable. Es decir la θ en $P_\theta = \theta_* + (\theta + \Delta\theta)t$ representa la incógnita del coeficiente de orden uno. Para encontrar el primer orden de los polinomios T_θ, T_p escribimos todo en forma matricial.

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{w} \tag{2.46}$$

donde la matriz \mathbf{A} contiene a los coeficientes de orden $n = 1$ de \mathbf{T} , mientras que $\mathbf{v} = (a_1, b_1)$ y \mathbf{w} tiene los términos independientes de \mathbf{T} .

.....
La matriz \mathbf{A} se calculó con el jacobiano de \mathbf{T}_n , permitiendonos obtener los coeficientes de orden uno
.....

$$\mathbf{J}(\mathbf{f}_\kappa(T_\theta, T_p))$$

.....
Calculamos ahora los valores y vectores propios de \mathbf{A}
.....

$$\begin{aligned} [\lambda_1, \lambda_2] \\ [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] \end{aligned}$$

.....
Escogemos el valor y vector propio asociados a la variedad que queramos.
.....

$$\lambda_2, \mathbf{v}_2 = (a_1, b_1)$$

Los valores de \mathbf{v}_2 serán los coeficientes de orden uno en los polinomios T_θ, T_p , que acompañan a t . Al ser los vectores propios proporcionan una dirección tangente a la

2. MÉTODO DE PARAMETRIZACIÓN

variedad, que es justo la manera en la que se implementa el método usual.

Dado que estamos usando el método gráfico necesitamos una forma polinomial para g y la forma más simple es proponer que sea lineal $g(\theta, p) = (\lambda_2 t, \lambda_2 t)$. Además recordemos que nuestro sistema lo linearizamos para analizarlo y la matriz asociada a la linearización es justo la que contiene los vectores propios como columnas.

Segundo orden

.....
Actualizamos los coeficientes en los polinomios.	$T_\theta = \theta_* + a_1 t$
.....	$T_p = p_* + b_1 t$
.....
Agregamos de nuevo las variables θ, p para calcular el término cuadrático.	$T_\theta = \theta_* + a_1 t + (\theta) t^2 + O(t^3)$
.....	$T_p = p_* + b_1 t + (p) t^2 + O(t^3)$
.....
Aplicamos el mapeo	$\mathbf{T} = \mathbf{f}_\kappa(T_\theta, T_p)$
.....

Necesitamos retomar el lado derecho de la ecuación de invariancia 1.18 para el cual tenemos un polinomio que tiene como coeficientes los valores de a_i multiplicados con una potencia del valor propio.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n t^n \quad (2.47)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda^n t^n \quad (2.48)$$

.....
Escribimos el lado derecho de la ecuación 1.18 como polinomios en t	$T_{\theta\lambda} = \theta_* + a_1 \lambda t + \theta \lambda^2 t^2 + O(t^3)$
.....	$T_{p\lambda} = p_* + b_1 \lambda t + p \lambda^2 t^2 + O(t^3)$
.....

Ahora que tenemos las dos partes de la ecuación 1.18 para el orden 2 podemos resolverla.

.....
Definimos una ecuación que será la	

resta de ambos lados de la expresión [1.18](#) igualada a cero. Con tal condición el término de orden dos cumple una ecuación lineal inhomogénea, en donde la matriz se obtiene con el jacobiano.

.....
Acomodamos los valores independientes de h_θ, h_p en \mathbf{w}_2 .

.....
Escribimos el sistema en forma matricial [2.46](#) y resolvemos multiplicando por la inversa del lado izquierdo

.....
El resultado de esta ecuación serán los coeficientes cuadráticos de \mathbf{T} .

$$\begin{aligned} R &:= \mathbf{T} - \mathbf{T}_\lambda = \mathbf{0} \\ h_\theta(\theta, p)t^2 &= (T_\theta - \theta\lambda^2)t^2 \\ h_p(\theta, p)t^2 &= (T_p - p\lambda^2)t^2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{J}(h_\theta, h_p)$$

$$\mathbf{w}_2 = (c_\theta, c_p)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{w}_2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= (a_2, b_2) \\ T_\theta &= \theta_* + a_1 t + a_2 t^2 + O(t^3) \\ T_p &= p_* + b_1 t + b_2 t^2 + O(t^3) \end{aligned}$$

La manera de proceder con el cálculo de los coeficientes de orden cúbico es la misma que la de orden cuadrático, en cada orden aparecerá la dependencia de λ^n debida a lado derecho de la ecuación de invariancia y a la forma de la función g . En general una vez actualizados los valores a_n, b_n se agrega un orden más a los polinomios T_θ, T_p así como a los de $T_{\theta\lambda}, T_{p\lambda}$ en términos de las variables θ y p , se aplica el mapeo a los primeros y se escribe la resta igualada a cero de la ecuación [1.18](#). Con el jacobiano se obtiene la matriz del sistema \mathbf{A}_{n+1} y con los términos independientes \mathbf{w}_{n+1} . Se resuelve el sistema mediante la inversa de \mathbf{A}_n y se obtienen ahora los términos a_{n+1}, b_{n+1} .

Notemos que es sólo el primer orden el que difiere en la forma del cálculo ya que en el primer paso se necesitan los valores y vectores propios. Salvo esos primeros términos los otros se pueden resumir en un sólo procedimiento. Tales características fueron las que permitieron automatizar el método. Las diferencias que surgen al resolver la ecuación lineal se toman en cuenta en el cálculo así como el error que se va acumulando en cada paso.

Al tener la parametrización \mathbf{T} hasta un cierto orden n es necesario calcular el error cometido al evaluar t . Tengamos en mente que los polinomios son desarrollos en series de Taylor al rededor del punto fijo por lo que nuestra parametrización es válida sólo en una vecindad cercana. Cómo ya vimos el error se calcula mediante [1.21](#). Si tenemos a $\mathbf{T} = (T_\theta, T_p)$ entonces podemos proceder como se muestra a continuación.

.....
Aplicamos el mapeo a \mathbf{T} .

$$\mathbf{S} = \mathbf{f}_\kappa(\mathbf{T})$$

2. MÉTODO DE PARAMETRIZACIÓN

<i>Extraemos también los polinomios \mathbf{T}_λ.</i>	$\mathbf{T}_\lambda = (T_{\theta\lambda}, T_{p\lambda})$
.....
<i>Usando la ecuación 1.21.</i>	$\mathbf{E} = \mathbf{S} - \mathbf{T}_\lambda$
.....

El error será un conjunto de valores que resulten de evaluar la función 1.21 para un conjunto $\tau = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$.

Usando este procedimiento se automatizó el método sin necesitar las ecuaciones de recurrencia, ya que mediante la manipulación algebraica de las series de Taylor se calcula fácilmente los nuevos términos de la parametrización. En general el método se desarrolló para las variedades inestables, ya que la misma dinámica de tal variedad permite llegar más lejos en la evaluación tanto de los coeficientes como del parámetro t garantizando una mejor aproximación. Sin embargo la manera en la que se calculan las variedades estables es en esencia la misma, escogiendo el vector y valor propio adecuado se puede hacer el mismo análisis. Hacerlo de ésta forma no será lo más conveniente pues la dinámica de la variedad provoca que mantenerse en la variedad estable sea numéricamente inestable. La forma más adecuada será calcular la variedad estable usando el mismo método para la variedad inestable del mapeo inverso.

Con esto se completa la automatización del método, el código junto con la documentación de cómo usar el programa y algunos ejemplos se encuentran en <https://github.com/alvarezeve>.

Ejemplos de aplicación del método

3.1. Mapeo Estándar

En el capítulo anterior ya mostramos cómo se aplica el método de manera algebraica para el caso de este mapeo. Utilizando el método ya programado se hicieron diferentes cálculos para comparar con los resultados presentados en [2]. Una de las razones de estudiar el mapeo estándar, además de usarlo como una forma de validación, es porque del mapeo conocemos muchas cosas. Por otro lado queremos mostrar lo importante que es tener una parametrización analítica. Aunque el estudio cualitativo del mapeo puede darnos información útil, tener una parametrización de las variedades relacionadas a sus puntos fijos convierte el análisis en algo cuantitativo y semi-analítico. El objetivo de esta sección es mostrar algunas de las cosas que son posibles alcanzar en términos de este análisis, además de la forma en la que se usa el método desde Julia.

En el mapeo estándar 2.1 uno de los puntos fijos es el origen de coordenadas $x_1 = (0, 0)$. Utilizando el método programado se calcularon las variedades estables e inestables para diferentes valores del parámetro en el mapeo. El objetivo de hacer éstas fue reproducir los resultados de J.D. Mireles que presenta en sus notas [2]. En tales notas no aparece el orden del polinomio ni el error específico, sin embargo se intentó reproducir al menos gráficamente los resultados. Dependiendo del orden del polinomio que se calcule y del parámetro del mapeo se podrá llegar más lejos del punto fijo.

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

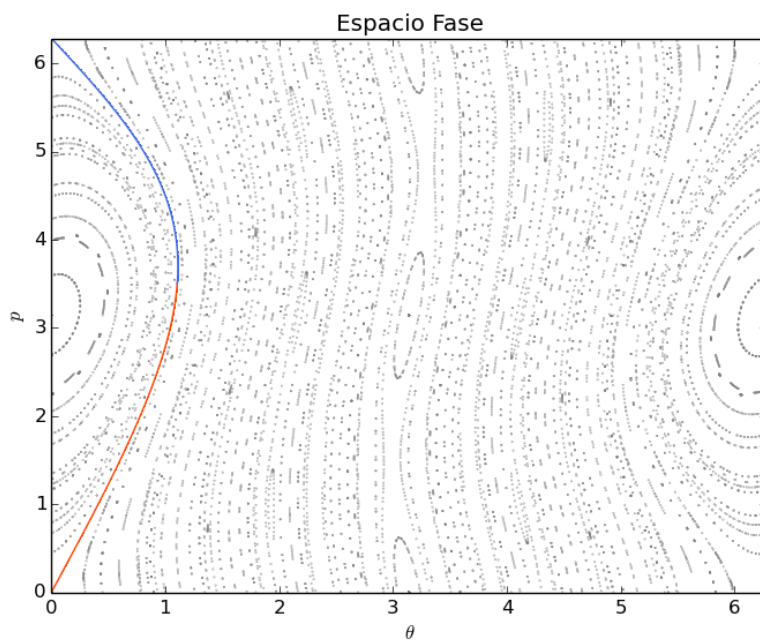


Figura 3.1: W^s, W^u de orden 25 en el mapeo estándar con $\kappa = 0.3$ y $t_{max} = 3.0$.

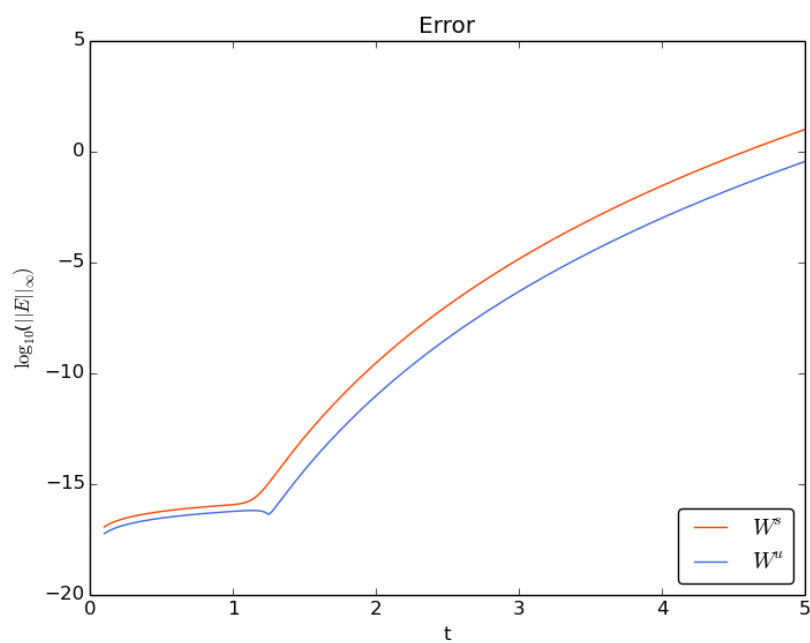


Figura 3.2: Error en las variedades de la figura 3.1.

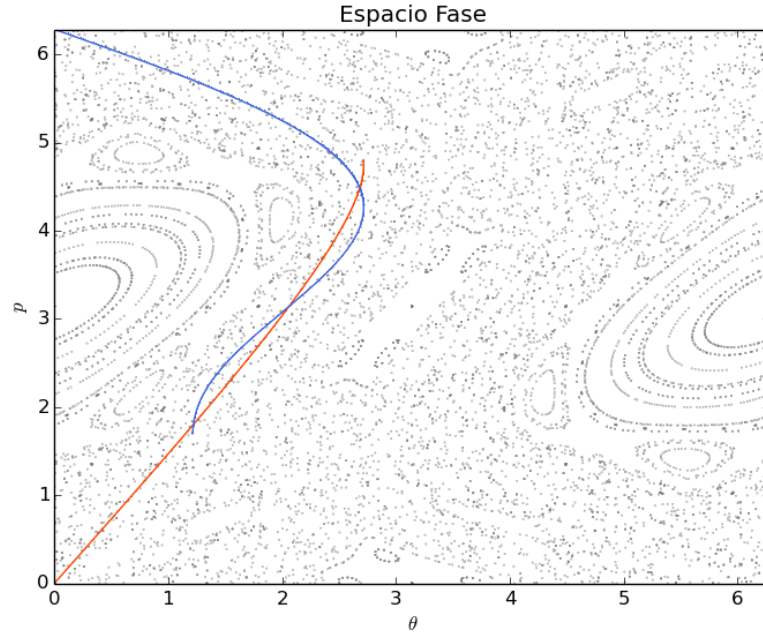


Figura 3.3: W^s, W^u de orden 80 en el mapeo estándar con $\kappa = 1.5$ y $t_{max} = 13.0$.

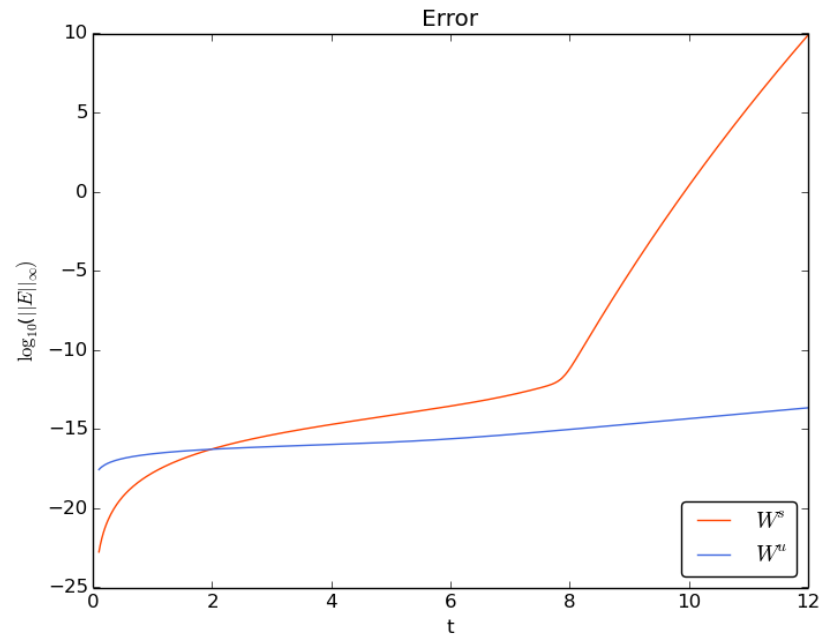


Figura 3.4: Error en las variedades de la figura 3.3.

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

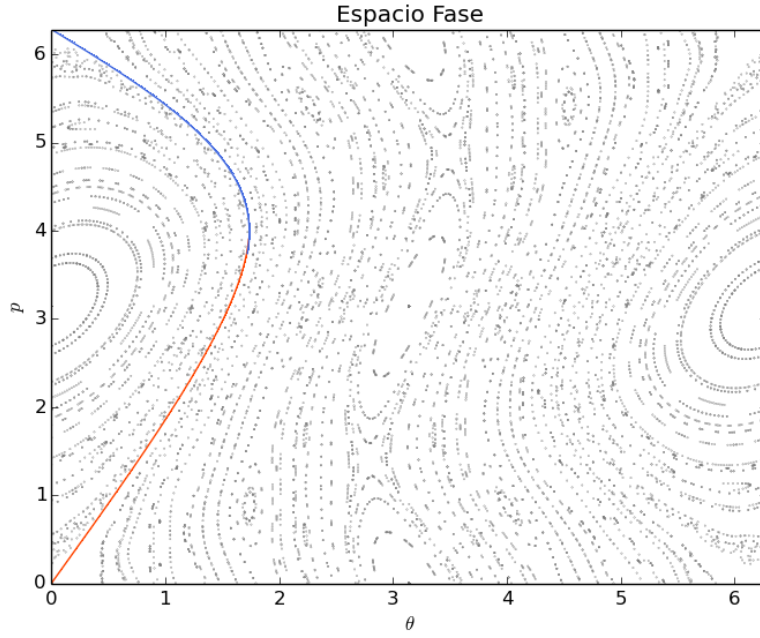


Figura 3.5: W^s, W^u de orden 70 en el mapeo estándar con $\kappa = 0.7$ y $t_{max} = 5.5$.

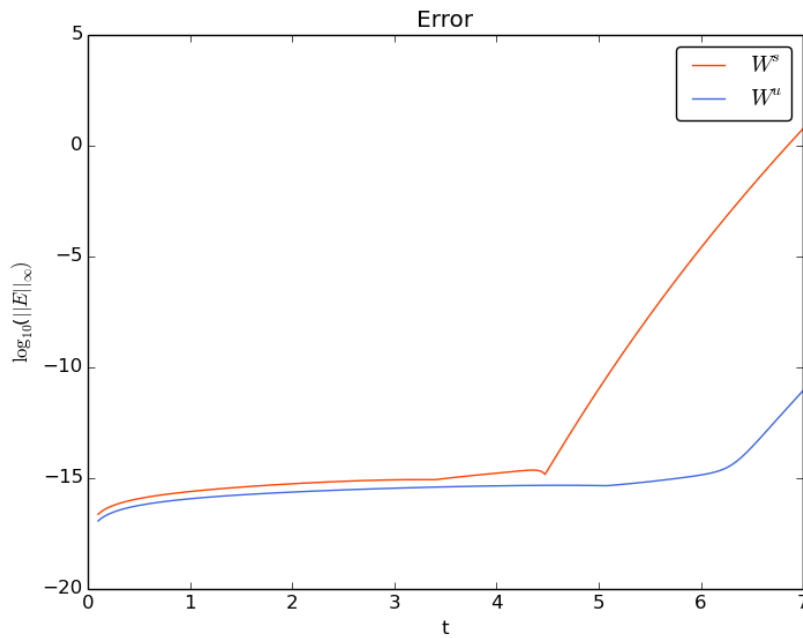


Figura 3.6: Error en las variedades de la figura 3.5.

En las figuras 3.1-3.6 se muestran los resultados de la parametrización de las varie-

dades estable e inestable asociadas al punto fijo $\mathbf{x} = (0, 0)$ para diferentes valores del parámetro κ , junto con cada una aparece su respectiva gráfica del error numérico. Los cálculos se hicieron utilizando números de punto flotante de 64 bits (Float64). Para las figuras 3.1, 3.5 se puede ver que las variedades se juntan de manera que parecen ser tangentes, mientras que para el caso de la figura 3.3 observamos varias intersecciones entre las variedades. En todos los casos el error se comporta de manera similar, manteniéndose prácticamente constante hasta cierto valor del parámetro t y creciendo de forma exponencial después del mismo. La curva será entonces confiable hasta valores del parámetro que no excedan el punto donde el error crece rápidamente.

Para observar como cambiaba el comportamiento del error respecto del orden de la parametrización se calcularon polinomios de diferente orden que parametrizan a la variedad inestable del mapeo con $\kappa = 0.3$, el resultado se muestra en la figura 3.7. Observamos que mientras más grande sea el orden del polinomio mejor es la aproximación, pues podemos llegar a valores del parámetro más grandes, que se traduce en ir más lejos en la variedad inestable.

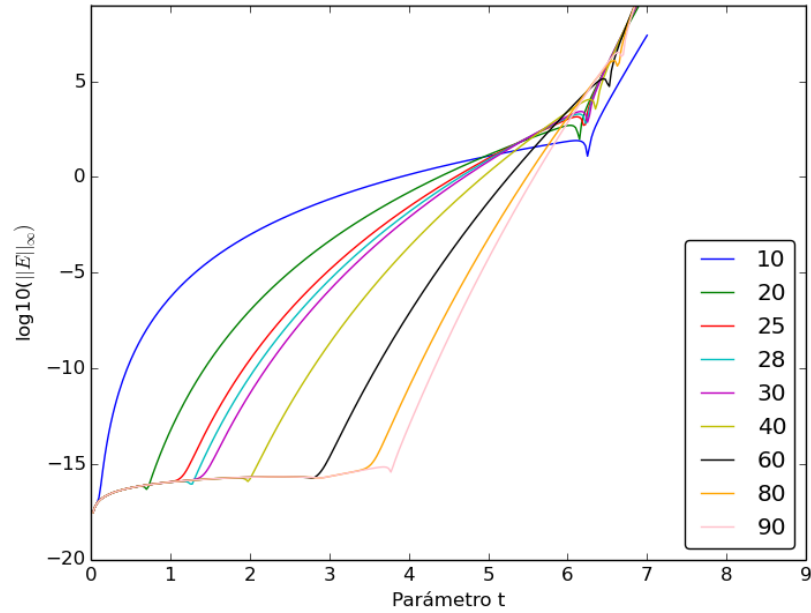


Figura 3.7: Curvas de error para diferentes órdenes en el mapeo estándar, $\kappa = 0.3$.

A fin de mostrar que el error es de alguna manera controlable se usaron números de precisión extendida para hacer cálculos análogos a los anteriores. En la figura 3.8 se muestran los resultados para parametrizaciones de ordenes entre 10 y 80. Observamos un comportamiento análogo, de tal manera que para cada orden diferente de parametrización hay un valor diferente del parámetro en el cual pasa de un error que no crece

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

significativamente a un error que crece de manera abrupta. También notamos que al usar precisión extendida el error cerca del punto fijo es imperceptible pero en la parte donde crece, tiene un crecimiento más pronunciado que en el caso de números de punto flotante.

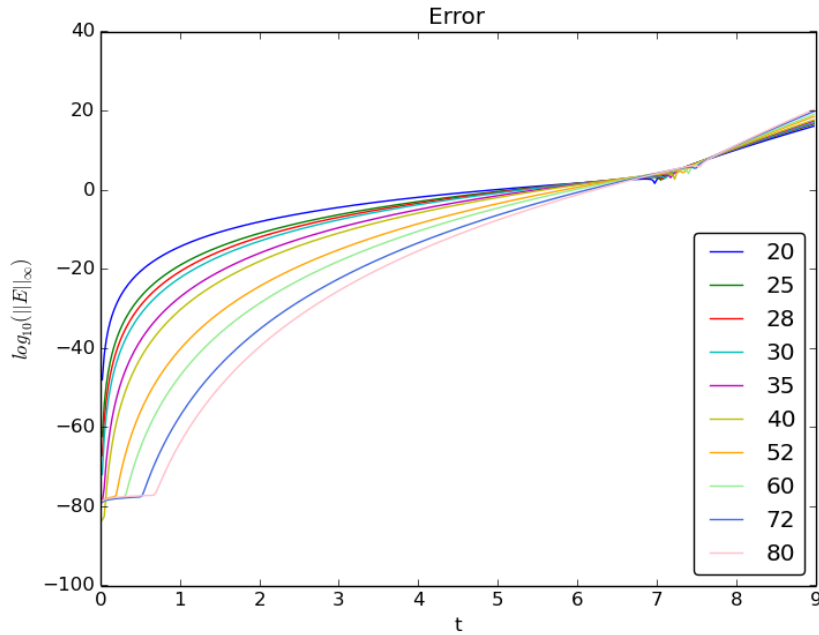


Figura 3.8: Curvas de error para diferentes órdenes usando precisión extendida, $\kappa = 0.3$.

Como ya mencionamos antes la variedad inestable del mapeo inverso corresponde a la variedad estable del mapeo, por lo que si se usa el mismo método calculando la variedad inestable del mapeo inverso [2.2](#) podemos controlar mejor el error numérico. Para mostrar esto hicimos una comparación parametrizando la variedad estable mediante el mapeo inverso y el mapeo inicial. Los polinomios fueron del mismo orden y lo que se observó en el error se muestra en la figura [3.9](#).

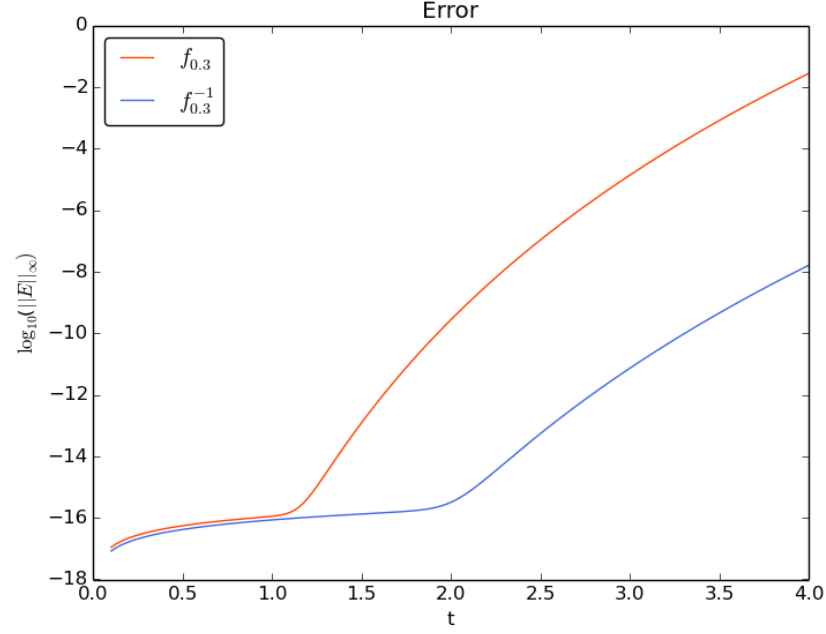


Figura 3.9: Error para las parametrizaciones usando el mapeo y el mapeo inverso con polinomios de orden 20 y $\kappa = 0.3$.

3.2. Mapeo de Hénon

El mapeo de Hénon se define como [12]

$$\mathbf{f}_{a,b}(x, y) = \begin{pmatrix} a - by - x^2 \\ x \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

siendo el mapeo inverso

$$\mathbf{f}_{a,b}^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ (x + y^2 - a)/-b \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Para poder analizarlo debemos linearizar el sistema. Primero obtenemos el jacobiano

$$D\mathbf{f}_{a,b}(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

Notamos que el determinante del jacobiano no es igual a uno sino $\det(D\mathbf{f}_{a,b}(x, y)) = b$. El determinante es constante, entonces será hamiltoniano en el caso en que b sea igual a uno o menos uno. Analizaremos estos casos, primero encontrando los puntos fijos

$$\mathbf{f}_{a,b}(x, y) = \begin{pmatrix} a - by - x^2 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

lo que implica que $a - by - x^2 = x$ y $x = y$ de donde es claro que la primer ecuación queda

$$x^2 + (b + 1)x - a = 0$$

que se puede resolver usando la fórmula general

$$x = \frac{-(b + 1) \pm ((b + 1)^2 + 4a)^{1/2}}{2}$$

para el caso en que $b = 1$ se tiene

$$x = \frac{-2 \pm 2(1 + a)^{1/2}}{2} \quad (3.5)$$

Al escoger $b = 1$ garantizamos estar en un sistema hamiltoniano, mientras que a debe escogerse de manera que resulten puntos fijos hiperbólicos. La figura 3.10 muestra un ejemplo en cálculos de variedades para el mapeo de Hénon, junto con el error.

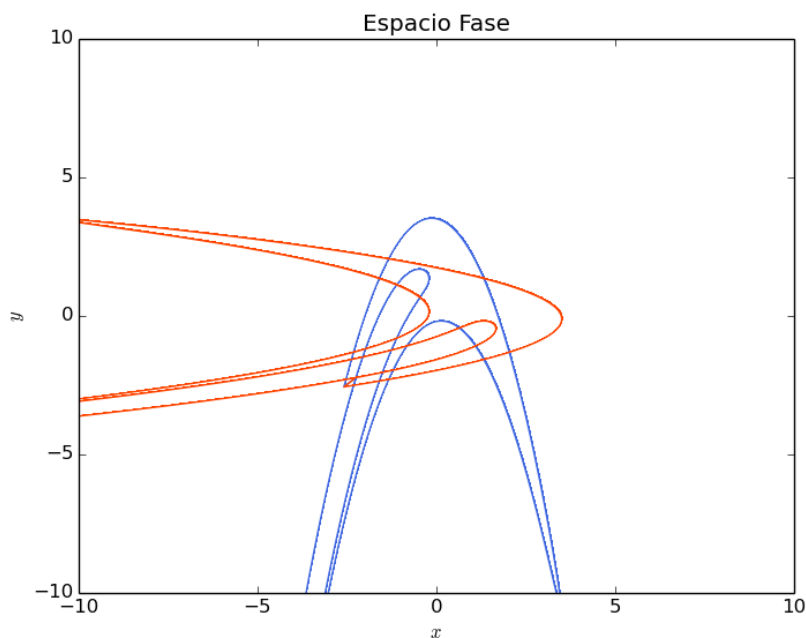


Figura 3.10: W^u y W^s de orden 45 con $t_{max} = 1000.0$ para el mapeo de Hénon con $a = 1.5, b = 1$.

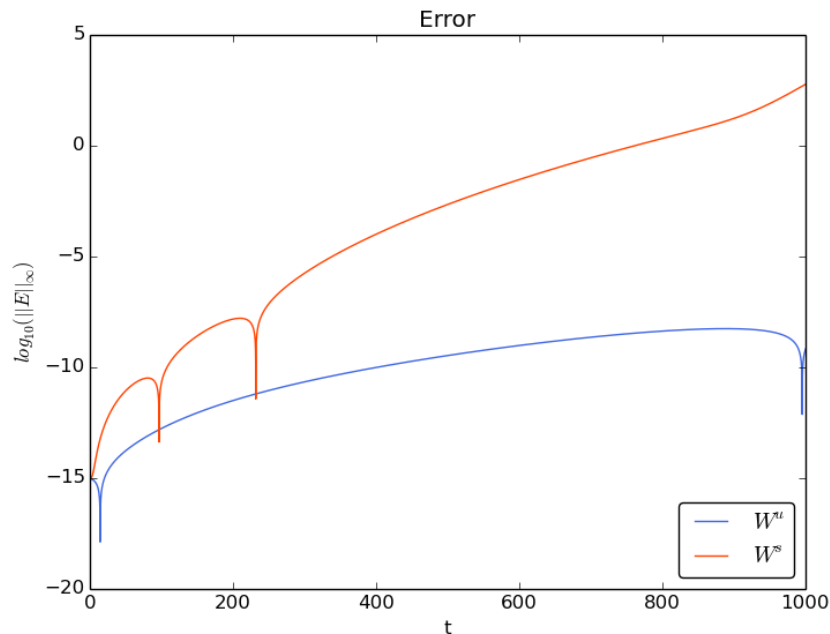


Figura 3.11: Error asociado a las variedades de la figura 3.10.

Las variedades que aparecen en la figura 3.10 fueron calculadas con el mapeo de Hénon inicial 3.1, las variedades se observan simétricas, aún así las parametrizaciones son diferentes. Puede verse en el error, figura 3.11, que la variedad estable tiene un mayor error que la variedad inestable, mientras en la inestable el error cambia cinco órdenes de magnitud, en todo el intervalo del parámetro, el error de la variedad estable cambia en al menos quince órdenes de magnitud.

A diferencia del mapeo estándar en éste mapeo las órbitas pueden irse al infinito, es decir no están constreñidas en una sección fija, lo que representa un mayor reto en cuanto a la parametrización ya que el polinomio debe ser tal que pueda regresar varias veces. De hecho podemos observar que se necesitan valores realmente grandes, comparados con los del mapeo estándar, para observar los cruces de las variedades. También esta situación hace que el error numérico sea mayor que para el estándar.

En las figuras 3.13, 3.15 se muestran las variedades calculadas de la misma manera en la que se calcularon para la figura 3.10. En 3.13 las curvas son más cerradas y se necesita de un polinomio de orden mayor que en el caso de 3.15 para observar los cortes.

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

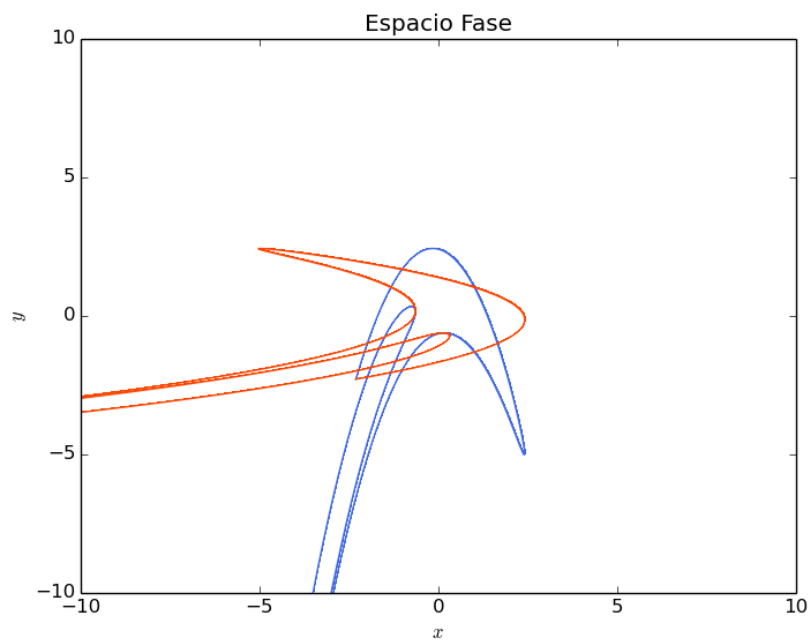


Figura 3.12: W^u , W^s de orden 50 y $t_{max} = 800.0$ para el mapeo de Hénon con $a = 0.7, b = 1.$.

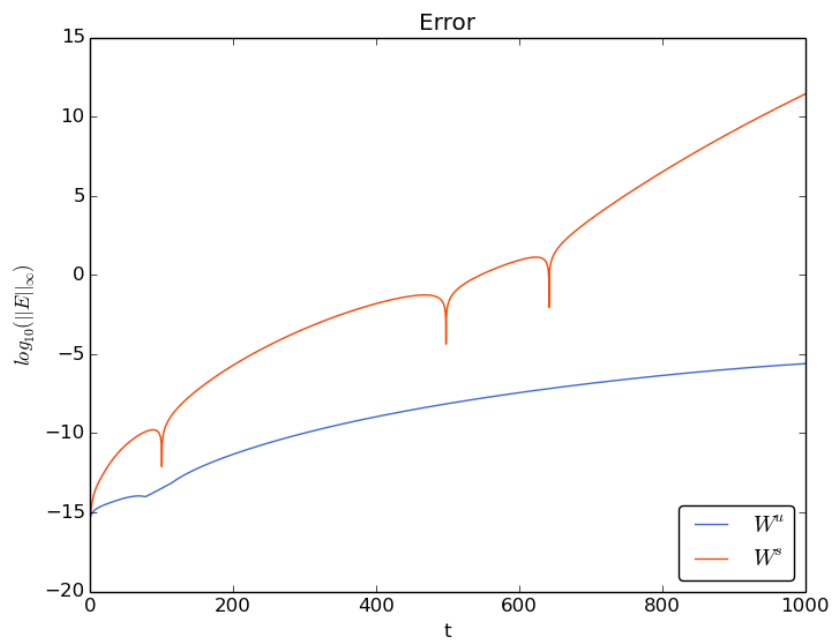


Figura 3.13: Error asociado a las variedades de la figura 3.13.

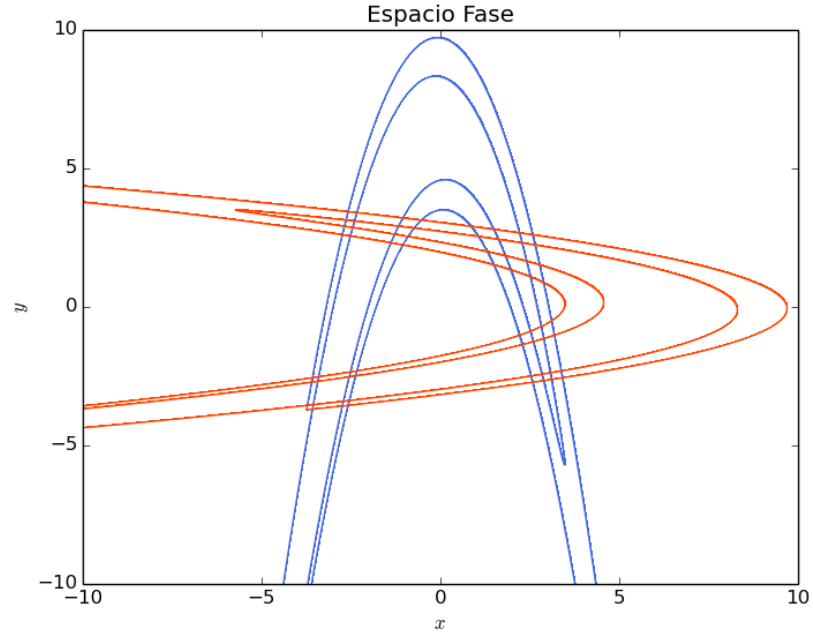


Figura 3.14: W^u , W^s de orden 78 y $t_{max} = 4000.0$ para el mapeo de Hénon con $a = 6.5, b = 1..$

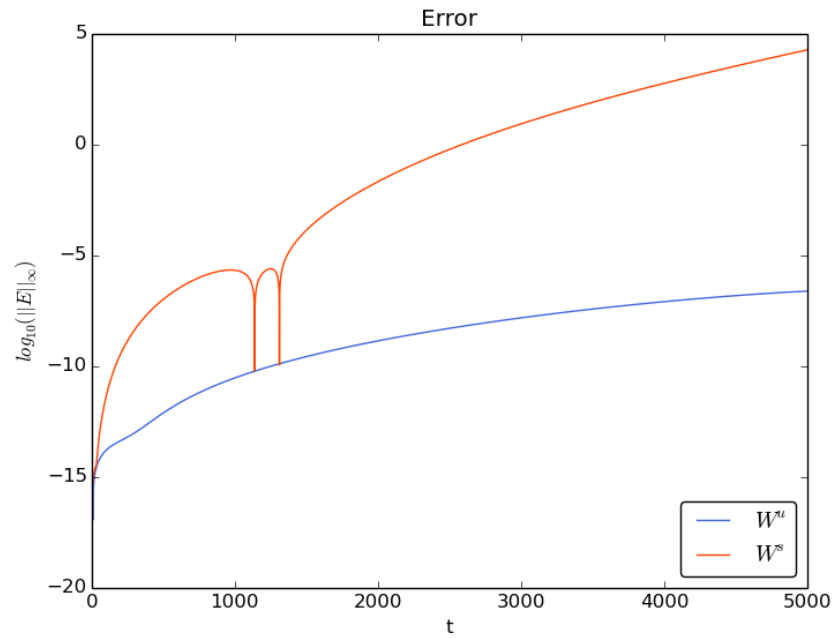


Figura 3.15: Error asociado a las variedades de la figura 3.15.

Así que con el orden suficiente es posible observar los cruces de ambas variedades, retomaremos esto en la última sección.

3.3. Mapeo exponencial

El último mapeo que se estudió fue uno presentado en el artículo [3] el cual queda definido por

$$\mathbf{j}_a(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ y + af(x + y) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

que describe el movimiento de una partícula pateada, donde la coordenada x representa la posición en una dimensión mientras que la coordenada y es el momento, a es un parámetro libre. La función f es la responsable de describir la fuerza aplicada, en el artículo [3] se escoge

$$f(x) = x(x - 1)e^{-x}.$$

Al cual le corresponde su inverso

$$\mathbf{j}_a^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} x - y + ax(x - 1)e^{-x} \\ y - ax(x - 1)e^{-x} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

En este sistema los puntos fijos encontrados son $x_0 = (1, 0)$, $x_1 = (0, 0)$ donde x_0 es un punto fijo hiperbólico. El punto x_1 es un punto elíptico mientras el valor del parámetro sea menor a 4, para valores de $a \geq 4$ se torna inverso hiperbólico.

Aplicando el mismo mecanismo que en los casos pasados se obtuvieron las figuras 3.16-3.19 que muestran cómo se comportan las variedades aún en el caso en que el sistema no sea completamente hiperbólico. Como en los casos anteriores el error asociado a la variedad estable es mayor que el asociado a la inestable. Al parecer la forma exponencial del mapeo también hace que el error crezca de manera exponencial para la estable. El orden al que se debe llegar en los polinomios para observar algunos de los cortes de las variedades es más alto en comparación con el mapeo de Hénon debido a que en este caso se está aproximando una función exponencial.

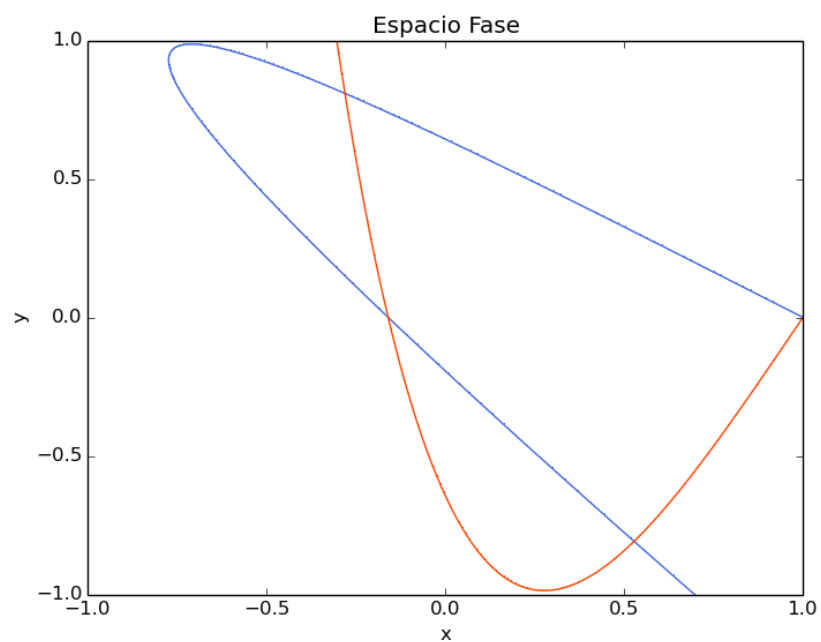


Figura 3.16: W^s de orden 93, W^u de orden 86 con $t_{max} = 5.5$, con $a = 3.4$ en el punto fijo x_0 .

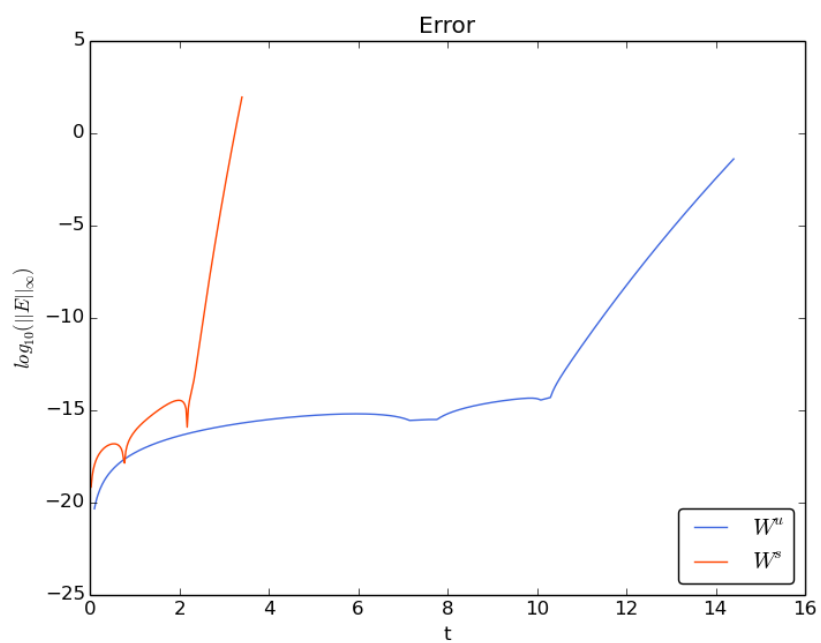


Figura 3.17: Error asociado a las variedades de la figura 3.16.

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

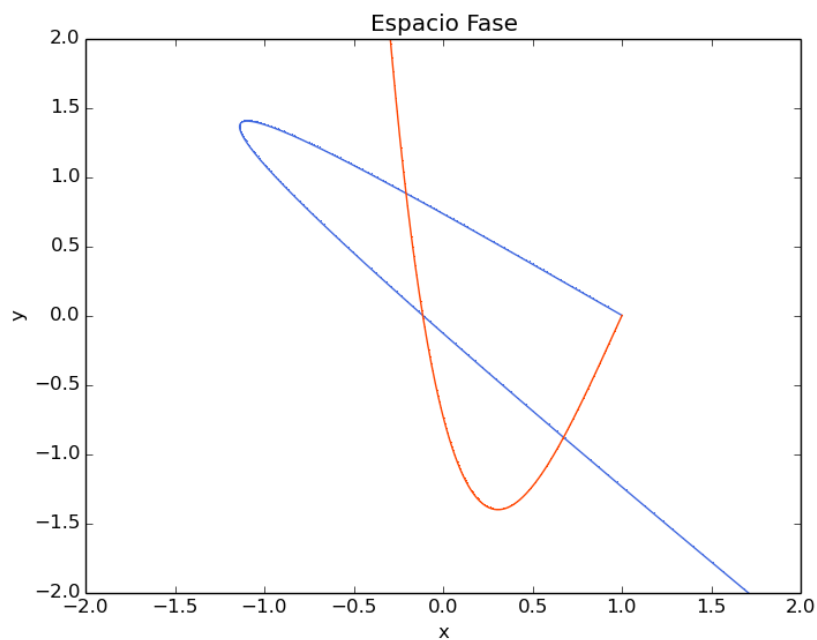


Figura 3.18: W^s de orden 90, W^u de orden 87 con $t_{max} = 6.5$, con $a = 5.7$ en el punto fijo x_0 .

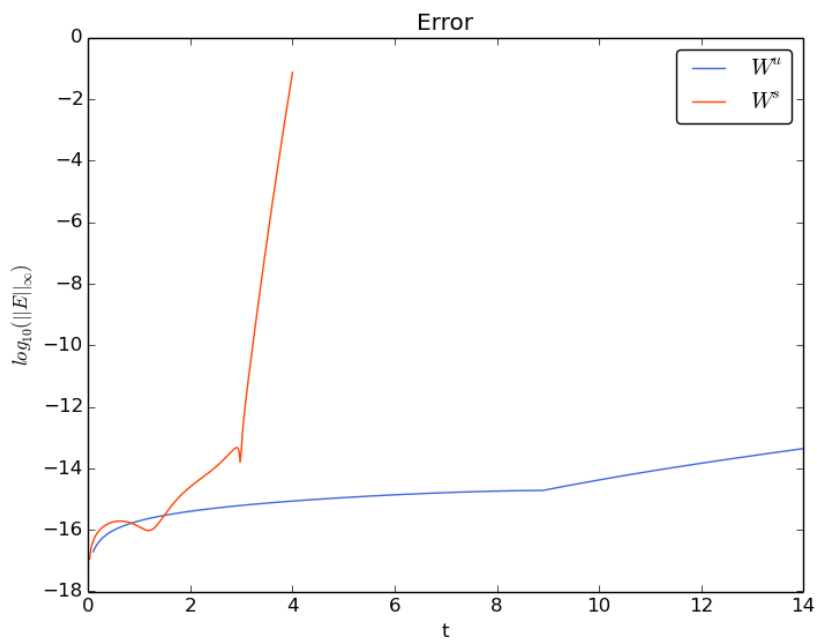


Figura 3.19: Error asociado las variedades de la figura 3.18

3.4. Convergencia

Además de medir el error asociado a la parametrización consideramos importante tomar en cuenta la convergencia de los coeficientes de los polinomios. En casos como el mapeo exponencial en que las variedades se acercan a puntos fijos de diferente naturaleza puede ocurrir que tal cercanía afecte la forma de parametrización. Para ello se implementaron dos formas de revisar la convergencia, la de Hadamard 1.22 y la de tres términos 1.23.

La figura 3.20 muestra la convergencia de los polinomios de orden 25 que parametrizan la variable θ en el mapeo estándar para las variedades estable e inestable con $\kappa = 1.5$ a la que corresponde el espacio fase mostrado en 3.3. En el caso de la variedad estable se ve que los coeficientes cambian de manera abrupta al principio pero después de cierta n el cociente es casi cero. Para el caso de la variedad inestable los coeficientes cambian de manera suave y el cociente también se acerca a cero. En ambos casos podemos decir que los coeficientes de la parametrización convergen a cero.

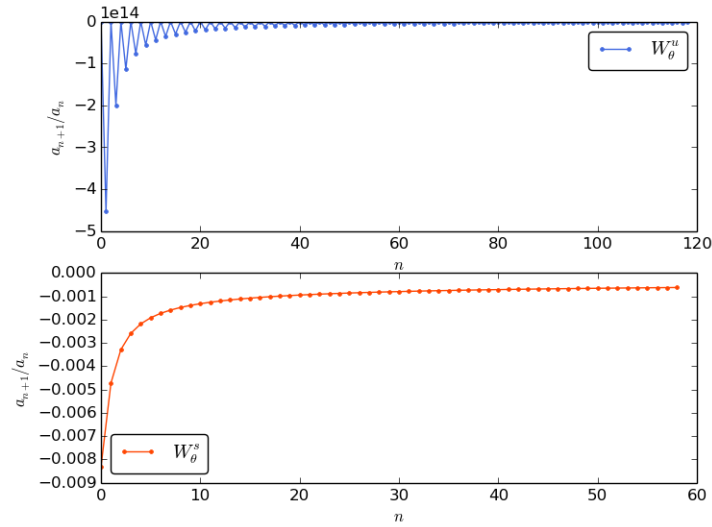


Figura 3.20: Convergencia de Hadamard asociada a los polinomios para θ en las variedades del mapeo estándar con $\kappa = 1.5$

La figura 3.21 muestra la convergencia de las parametrizaciones de orden 45 para la variable x en el mapeo de Hénon con $a = 1.5$. En ambos casos la convergencia parece suave y tiende a cero y igual que en el caso del mapeo estándar.

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

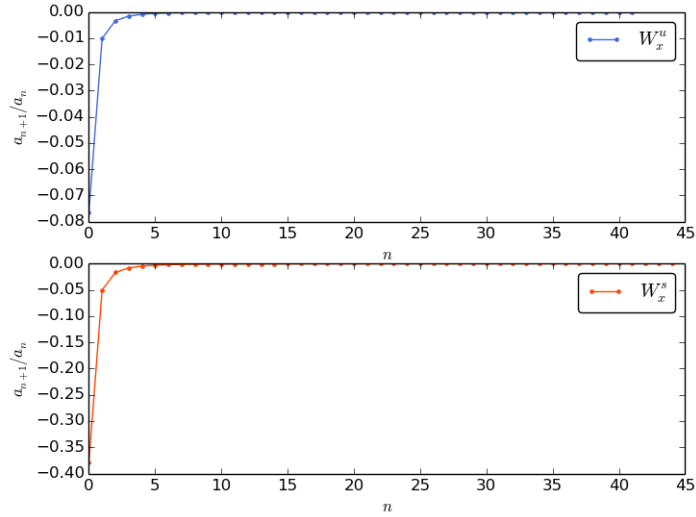


Figura 3.21: Convergencia de Hadamard asociada a los polinomios para x en las variedades del mapeo de Hénon con $a = 1.5$

Para el mapeo exponencial realizamos los dos criterios de convergencia. La figura 3.22 muestra el criterio de Hadamard 1.22 para los polinomios que parametrizan la variable x en cada variedad, se ve que hay una convergencia clara de los coeficientes. Lo mismo ocurre en la figura 3.23 en donde se usó el criterio de tres términos 1.23.

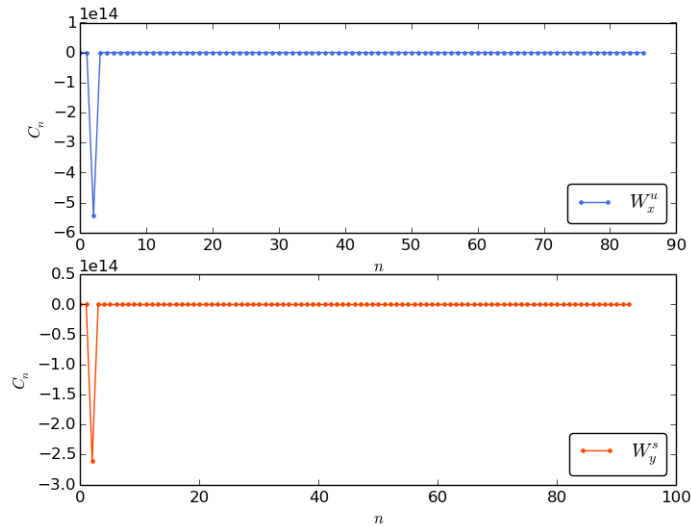


Figura 3.22: Convergencia de Hadamard asociada a las variedades mostradas en la figura 3.18.

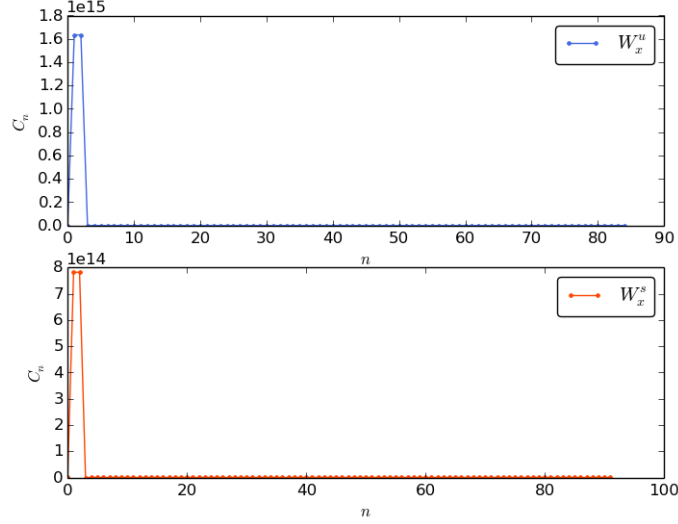


Figura 3.23: Convergencia de tres términos asociada a las variedades en la figura 3.18

Estudiar la convergencia de las parametrizaciones puede dar una idea de cómo se va modificando el polinomio si se cambia el orden, en mapeos más sensibles puede ser determinante para saber en a qué orden es conveniente aproximar.

3.5. Existencia de puntos homoclínicos

Siendo que el resultado son polinomios se puede aplicar el método de Newton en dos dimensiones o cualquier otro para resolver $P^u = P^s$ y encontrar puntos homoclínicos o heteroclínicos. Por suerte existe una paquetería en Julia que hace cálculos numéricos validados `ValidatedNumerics`[13] dentro de la cuál se tiene un paquete para aritmética de intervalos `IntervalArithmetic`[14] y para encontrar raíces `IntervalRootFinding`[15] además del paquete `Static Arrays`[16] que permite manipular intervalos.

El paquete [13] hace cálculos de computación rigurosa con números de punto flotante usando el paquete de aritmética de intervalos, que efectúa operaciones con intervalos en lugar de números. Mientras que [15] automatiza el métodos populares como el de Newton para encontrar raíces de funciones, en este caso se garantiza que la respuesta correcta se encuentra en un intervalo. Para entender mejor cómo funcionan cada una de las paqueterías así como la teoría rigurosa detrás de éstos recomendamos revisar las lecturas [27],[?].

En forma simple si $[a, b], [c, d]$ son intervalos en \mathbb{R} entonces es posible definir las operaciones básicas, por ejemplo la suma +

$$[a, b] + [c, d] = [a + b, c + d] \quad (3.8)$$

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

resulta bastante simple e intuitiva; la definición de otras operaciones puede verse en ???. La finalidad en nuestro caso de usar intervalos $[a, b]$ en lugar de un valor x es que al encontrar un intervalo podemos afirmar que en tal se encuentra la raíz, sin embargo al calcular la raíz como un valor debemos tomar en cuenta que puede que ese valor no sea el exacto. Es decir debido a procesos de redondeo, así como de errores en la interpretación de un número real de manera computacional puede que nuestro valor de la raíz calculado de manera convencional no sea el valor correcto. Sin embargo al hacer aritmética de intervalos no encontramos la raíz en sí, encontramos un intervalo en donde podemos garantizar que se encuentra la raíz verdadera. Los métodos usados para calcular raíces con intervalos se valen de la generalización del método de Newton.

Para nuestro caso resulta que el programa arroja dos polinomios asociados a cada variedad, si definimos

$$P := P^u(t) - P^s(t') = 0 \quad (3.9)$$

podemos encontrar las intersecciones en un intervalo de 2 dimensiones que será $[a, b] \times [c, d]$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

3.5.1. Estándar

Usando esto en el mapeo estándar con una tolerancia de 10^{-5} se encontraron la siguientes intersecciones para un caso específico.

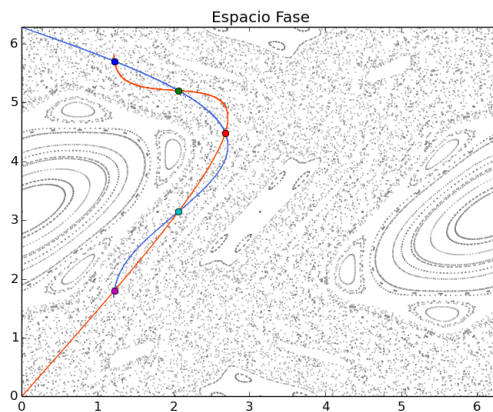


Figura 3.24: Cruces de W^u, W^s para el mapeo estándar con $k = 1.5$

3.5.2. Hénon

Como mencionamos en el mapeo estándar usando el paquete de aritmética de intervalos se pueden calcular las intersecciones de las variedades estable e inestable. En este caso para el mapeo de Hénon, donde el parámetro $a = 1.5$ con un polinomio de orden

45, se usó el método con una tolerancia de 10^{-6} además de usar el mapeo inverso 3.2, para calcular la variedad estable.

Lo que resultó de resolver 3.9 fueron los siguientes intervalos:

- a) $\text{Root}([-1.36597, -1.36596] \times [166.749, 166.75], : \text{unique})$
- b) $\text{Root}([-5.26555, -5.26554] \times [129.577, 129.578], : \text{unique})$
- c) $\text{Root}([-6.77613, -6.77612] \times [33.6142, 33.6143], : \text{unique})$
- d) $\text{Root}([-5.54438e - 07, 0] \times [0, 5.54438e - 07], : \text{unknown})$
- e) $\text{Root}([-26.1208, -26.1207] \times [26.1207, 26.1208], : \text{unique})$
- f) $\text{Root}([-33.6143, -33.6142] \times [6.77612, 6.77613], : \text{unique})$
- g) $\text{Root}([-129.578, -129.577] \times [5.26554, 5.26555], : \text{unique})$
- h) $\text{Root}([-166.75, -166.749] \times [1.36596, 1.36597]4, : \text{unique})$

La leyenda **unique** concluye que hay una raíz en el intervalo y es única, mientras que **unknown** nos dice que no puede concluir si hay una o más. Si notamos el tercer intervalo contiene al cero $(t, t') = (0, 0)$ en el cual se cortan las variedades pues representa el punto fijo. Para los intervalos encontrados se hizo una gráfica que representa el intervalo donde se encuentra el cruce.

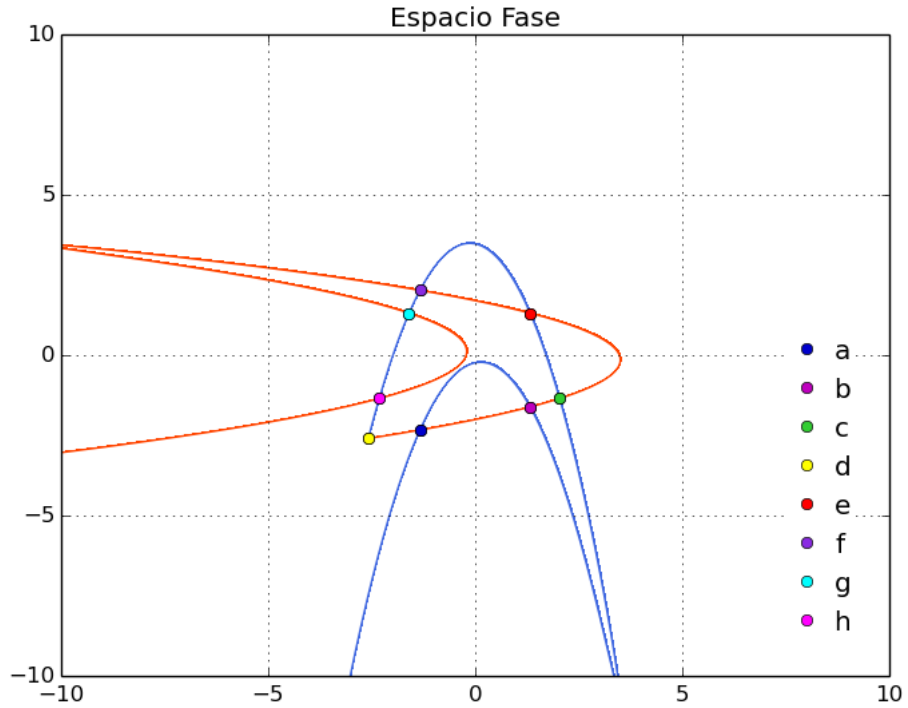


Figura 3.25: Cruces de W^u, W^s encontrados en el intervalo $[-400., 0.] \times [0., 400.]$

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

Donde cada punto indica un cruce encontrado, el punto de color es sólo para indicar cuáles fueron encontradas. En cuanto a el intervalo real en donde se encontró la intersección podemos encontrar las siguientes gráficas.

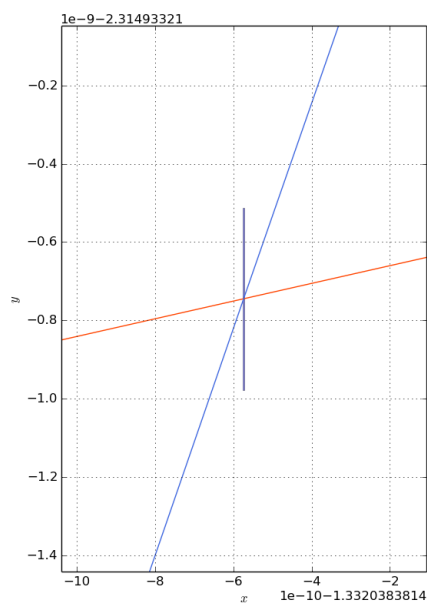


Figura 3.26: Cruce de W^u, W^s encontrado con el intervalo a

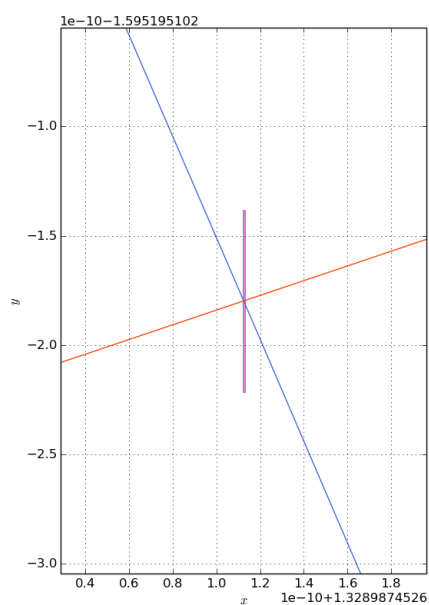


Figura 3.27: Cruce de W^u, W^s encontrado con el intervalo b

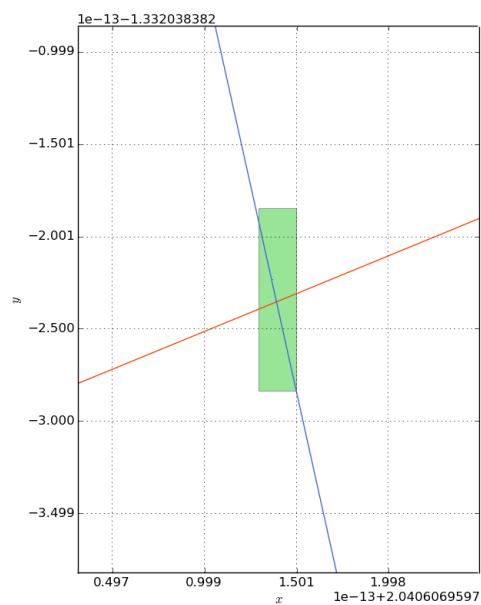


Figura 3.28: Cruce de W^u, W^s encontrado con el intervalo c

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

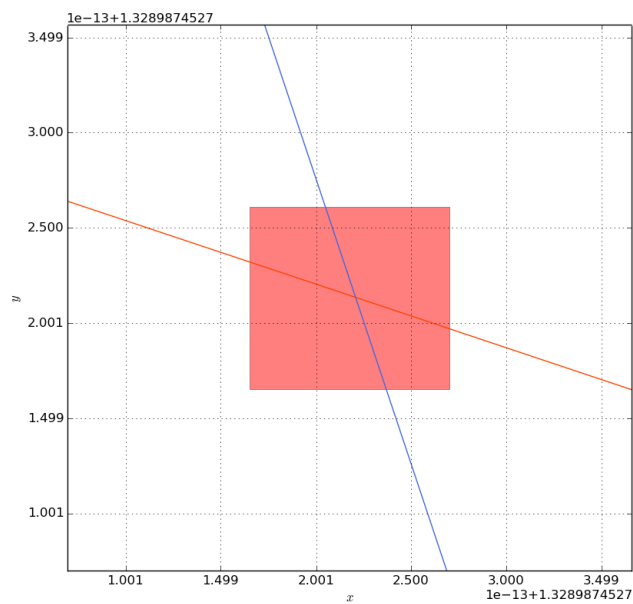


Figura 3.29: Cruce de W^u, W^s encontrado con el intervalo e

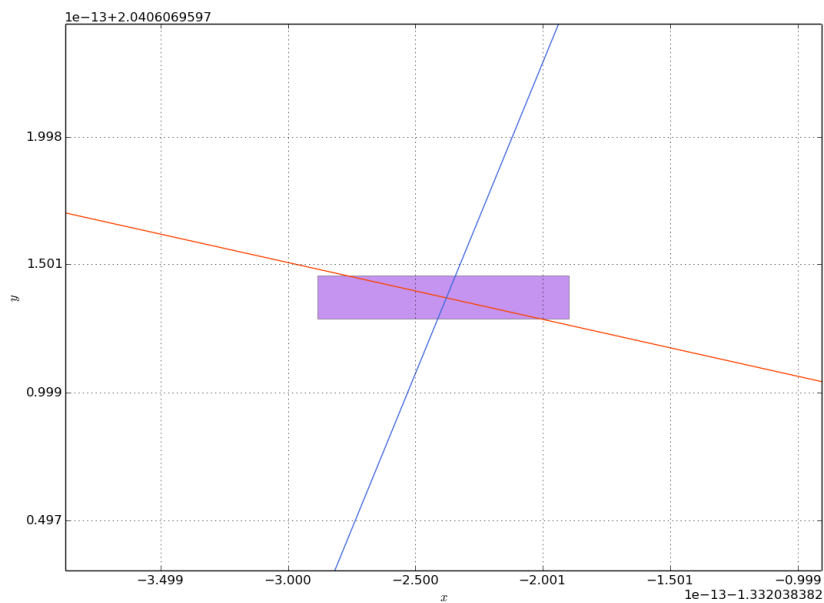


Figura 3.30: Cruce de W^u, W^s encontrado con el intervalo f

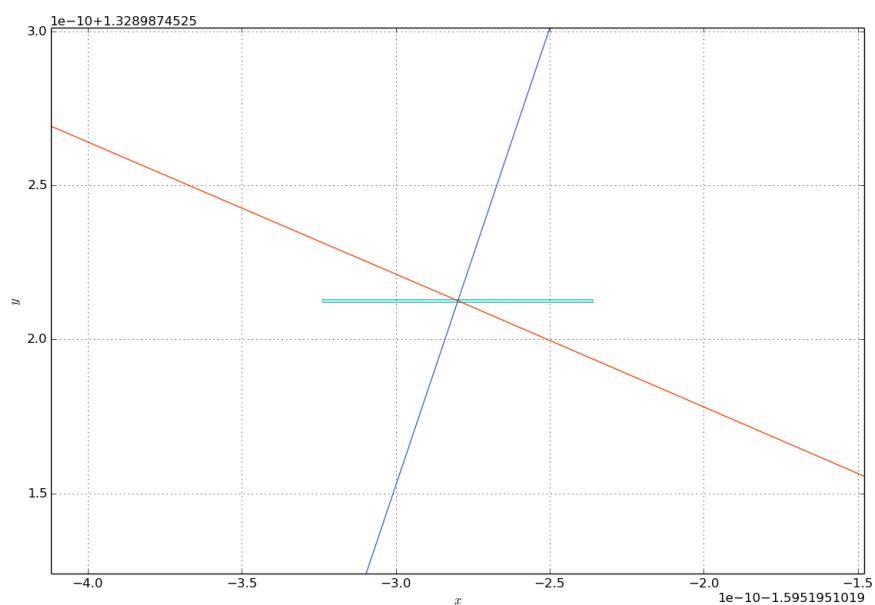


Figura 3.31: Cruce de W^u, W^s encontrado con el intervalo g

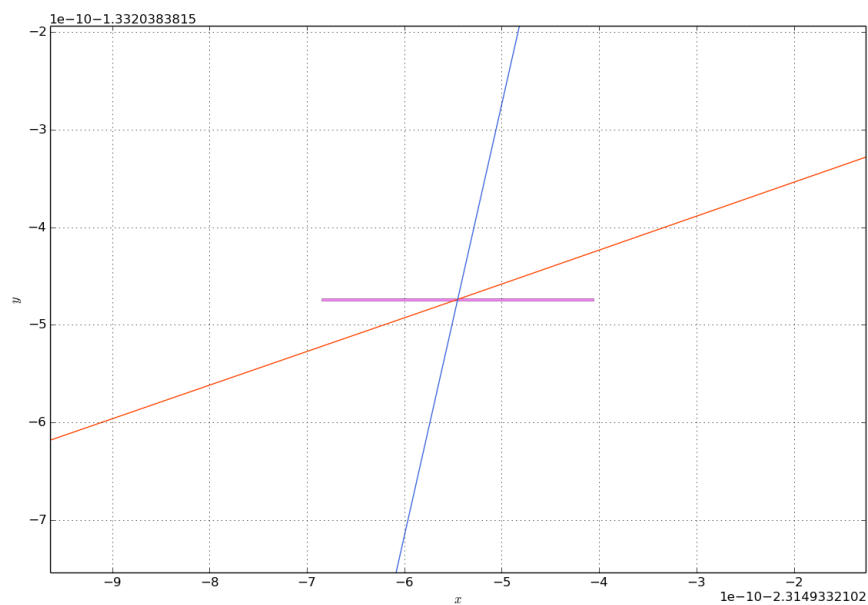


Figura 3.32: Cruce de W^u, W^s encontrado con el intervalo h

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

La zona rectangular sombreada en cada gráfica representa el producto cruz de los intervalos donde se encuentra la solución. Podemos observar que de hecho cada zona contiene el cruce de las variedades. Garantizando así que en el intervalo propuesto hay un cruce de variedades. Este tipo de resultados son útiles para hablar sobre caos. Hay que aclarar que los intervalos en los que se encuentra la intersección son intervalos en términos de los parámetros, no de las coordenadas del espacio fase, sin embargo conociendo cómo se mapean los intervalos en cada variedad podemos definir un nuevo intervalo en el espacio fase.

Para complementar todo este análisis se puede obtener una gráfica de las superficies que forman las variedades al cambiar el parámetro del mapeo lo que nos da una idea de como se ven las superficies y además de como se comportan las intersecciones. Las gráficas correspondientes a esto se encuentran en el sitio **LIGA**.

3.5.3. Mapeo exponencial

Además se analizaron los cruces en las variedades , usando como en los casos anteriores el mapeo inverso 3.7. Este mapeo representa un mayor reto en cuanto al orden del polinomio, la presencia de la exponencial hace que la parametrización sea sensible al orden del polinomio. Para el siguiente ejemplo se necesitó un polinomio de orden 86, en el cual se podía observar un comportamiento interesante, y se calcularon los cruces de las variedades como en los otros casos.

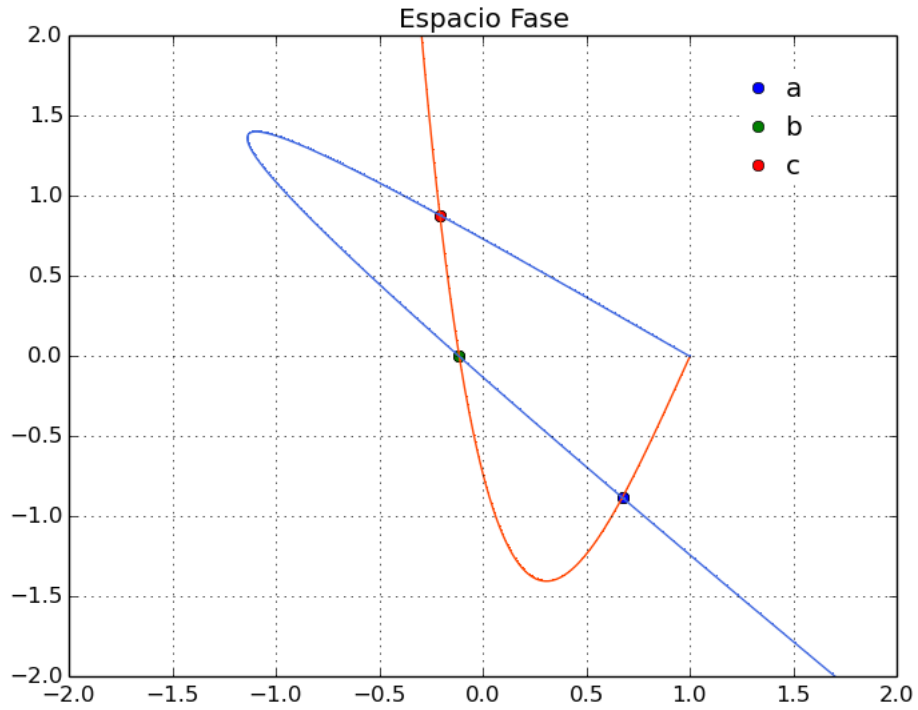


Figura 3.33: Intersecciones en el mapeo exponencial con $a = 5.7$

- a) $\text{Root}([-0.985068, -0.985067] \times [5.99488, 5.99489], : \text{unique})$
- b) $\text{Root}([-3.46215, -3.46214] \times [5.49229, 5.4923], : \text{unique})$
- c) $\text{Root}([-3.77896, -3.77895] \times [1.56269, 1.5627], : \text{unique})$

Tomando los cruces a escala del intervalo resultan las siguientes gráficas.

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

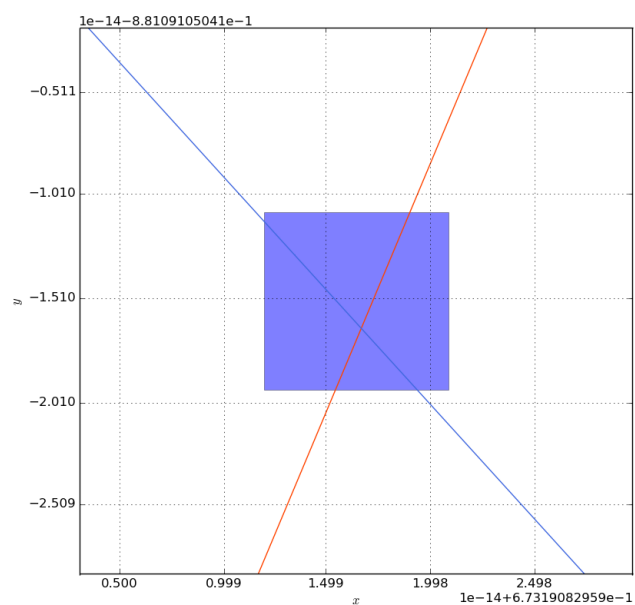


Figura 3.34: Intersección en el intervalo a

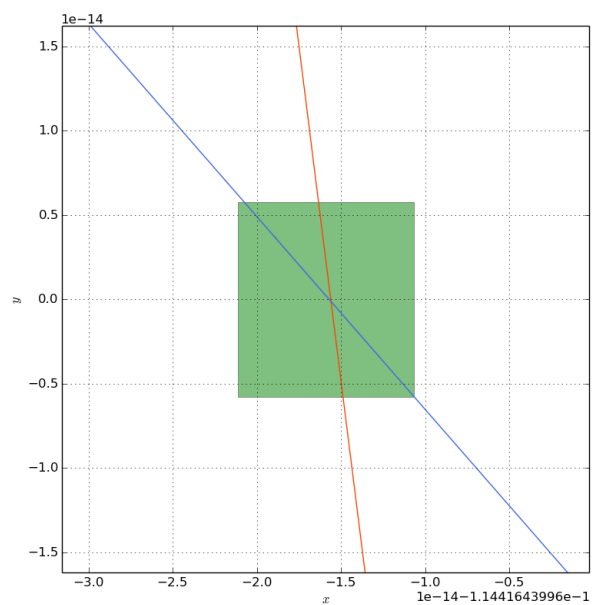


Figura 3.35: Intersección en el intervalo b

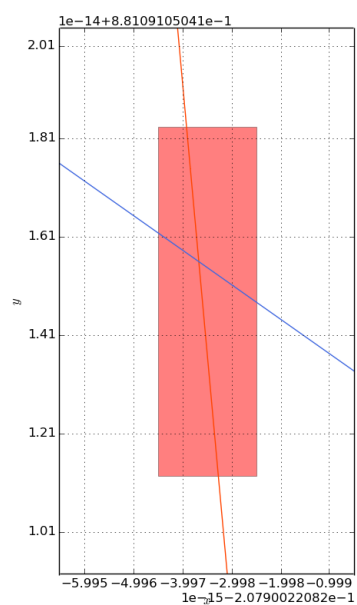


Figura 3.36: Intersección en el intervalo c

Panorama

Una característica importante a estudiar en los mapeos en general son las variedades estables e inestables asociadas a puntos fijos. En el caso de los mapeos de dos dimensiones resulta manejable, hasta cierto punto, encontrarlas de manera analítica usando el método de parametrización. Como vimos el método tiene como núcleo de desarrollo la ecuación de invariancia y la linearización del sistema al rededor de un punto fijo. Sin embargo decir manejable en términos matemáticos y físicos no resulta suficiente si lo que necesitamos es estudiar propiedades de los sistemas a partir de las variedades o el comportamiento de puntos fijos. Por ello es que la implementación del método resultaba llamativa. Tener un módulo escrito en software libre que calcula las variedades asociadas a puntos fijos hiperbólicos va más allá de generar las relaciones de recurrencia en casos particulares. El método automatizado es capaz de generar las parametrizaciones de las variedades al rededor de un punto fijo conocido, en cualquier mapeo de dos dimensiones que sea simpléctico. La idea detrás de la automatización se basa en que la computadora haga las veces de la recurrencia en lugar de calcularlas de manera analítica. Esto de ninguna manera modifica el modo del método. Todo esto da como resultado un método semianalítico con el cual tenemos las variedades de manera polinómica.

Dado que es un método parte analítico y parte computacional que involucra series de Taylor es crucial decir de alguna manera que tan confiable es la parametrización que resulta. Por ello se incluyeron tres formas de evaluar el comportamiento de las variedades, tales involucran al error y la convergencia mediante dos métodos. Conocer que tanto podemos afirmar sobre el comportamiento de las variedades depende de estas tres funciones.

Como pudimos notar en el capítulo anterior en los tres ejemplos que se presentan observamos comportamientos muy variados. En el mapeo estándar se buscaba mostrar un ejemplo bastante conocido, en el de henón mostrar el cruce de variedades mientras que en el exponencial que tantos cruces (o tentáculos) se pueden observar. Puede pasar que para otros mapeos se busque estudiar un comportamiento particular de las varia-

4. PANORAMA

des. Por ello consideramos que el método se puede explotar en varias direcciones que se adapten a cada mapeo en particular. En el caso por ejemplo de observar la dependencia de los tentáculos de las variedades con respecto a los parámetros del mapeo tendrá que ver con que tan grande podemos hacer el orden del polinomio y que tan lejos llegamos con un error relativamente pequeño. Además como mostramos hay formas de mejorar la parametrización usando el mapeo inverso.

En el mapeo de Hénon mostramos que es posible calcular las intersecciones de las variedades. Tal resultado nos muestra una ventana hacia la *demonstración* de que hay un corte entre ambas y con ello a resultados más importantes y áreas más amplias como el estudio de bifurcaciones y caos. Esta idea resulta de que al conocer las variedades de manera analítica podemos buscar el cero de las funciones correctas para encontrar un cruce. Aún si no se conoce si en el sistema las variedades se cruzan en uno o más puntos, con el orden suficiente se podría asegurar. Para ello habrá que trabajar de manera analítica primero con las parametrizaciones y asociar un error al cálculo de la intersección .

En el proceso de este trabajo surgió una duda que se formuló en principio como sigue :¿es posible seleccionar una dirección preferente en la parametrización?. Es decir, es claro que en términos del vector propio hay una dirección en la que se desarrolla la variedad, en algunos casos resulta que la variedad puede pasar cerca de algún otro punto fijo del sistema, ¿cómo seleccionar una dirección preferente para el desarrollo del polinomio?. Resulta que los polinomios de Taylor no tienen una dirección preferencial , mientras que los polinomios de Chebyshev sí. En términos burdos uno puede usar polinomios diferentes que tengan preferencias topológicas con respecto a los de Taylor. Eso puede ayudar a que la parametrización se encamine a la dirección necesaria desde un inicio. Se piensa que el método de parametrización se puede desarrollar usando tales polinomios en lugar de usar Taylor. Sería una manera de parametrizar más enfocada. Todos los comentarios anteriores intentan mostrar que hay aún preguntas sin responder del todo y sobre todo curiosidad por hacer más con el método de parametrización tanto de manera computacional como de manera analítica. Sin duda puede que dentro del estudio de variedades en mapeos de dos dimensiones haya muchas más cosas que se estén estudiando con diferentes y variados propósitos.

Bibliografía

- [1] Á. Haro, M. Canadell, J. Figueras, A. Luque, and J. Mondelo. *The parameterization Method for Invariant Manifolds*, volume 195 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 1 edition, 2010. [v](#), [9](#)
- [2] J.D Mireles James. Elementary example of the parametrization method; stable and unstable manifolds of the standar map. 2007. [v](#), [vi](#), [11](#), [21](#)
- [3] B. Rückerl and C. Jung. Scaling properties of a scattering system with an incomplete horseshoe. *J. Phys A: Math.*, 27:55–77, 1994. [vi](#), [32](#)
- [4] Gerald Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1 edition, 2011. [2](#)
- [5] Stephen H. Friedberg, A. J. Insel, and L.E. Spence. Algebra lineal. [4](#)
- [6] James D. Meiss. *Differential Dynamical Systems*, volume 14 of *Mathematical modeling and computation*. Society for Industrial and Applied Mathematics ,Philadelphia, 1 edition, 2007. [4](#)
- [7] Kenneth R. Meyerb, Glen R. Hall, and Dan Offin. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Poble*, volume 90 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 2nd edition, 2009. [4](#)
- [8] Juergen Quandt. On the hartman-grobman theorem for maps. *Journal of differential equations*, 64:154–164, 1986. [4](#)
- [9] Edward Ott. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge university press, 1th edition, 1993. [5](#), [6](#)
- [10] Mateo Wirth. Invariant manifolds of dynamical systems and an application to space exploration. [5](#)
- [11] Y.F. Chang and G. Corliss. Ratio-like and recurrence relation tests for convergence of series. *J. Inst. Maths Applies*, 25:349–359, 1980. [10](#)

BIBLIOGRAFÍA

- [12] Robert L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Adyson-Wesley, 2nd edition, 1989. 27
- [13] Validated numerics(paquete julia). url=<https://github.com/JuliaIntervals/ValidatedNumerics.jl>. 37
- [14] Interval arithmetic(paquete julia). url=<https://juliaintervals.github.io/IntervalArithmetic.jl/stable/>. 37
- [15] Interval root finding(paquete julia). url=<https://github.com/JuliaIntervals/IntervalRootFinding.jl>. 37
- [16] Static arrays(paquete julia). url=<https://github.com/JuliaArrays/StaticArrays.jl>. v0.7.2. 37
- [17] Ramon E. More, R.Baker Kearfott, and Michael J. Cloud. *Introduction to Interval Analysis*. SIAM, 2009. 37
- [18] W. Tucker. *Validated Numerics: A short introduction to Rigorous Computations*. Princeton University Press.
- [19] Jan Bouwe van den Berg, J.D. Mireles James, and Christian Reinhardt. Computing (un)stable manifolds with validated error bounds: non-resonant and resonant spectra. 2015.
- [20] B. Rückerl and C. Jung. Hierarchical structure in the chaotic scattering off a magnetic dipole. *J. Phys A: Math.*, 27:6741–6758, 1994.
- [21] C. Jung, C. Lipp, and T.H. Seligman. The inverse scattering problem for chaotic hamiltonian systems. *Annals of Physics*, 275:151–189, 1999.
- [22] Herbert Goldstein, Charles P. Poole, and John L. Safko. *Classical mechanics*. Addison-Wesley, 3 edition, 2000.
- [23] Vladimir I. Arnol'd. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, volume 1 of *Analytic Mechanics*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1992.
- [24] Vladimir I. Arnol'd and Roger Cooke. *Ordinary differential equations*. Springer-Verlag, 1991.
- [25] Jack K. Hale. *Ordinary Differential Equations*. Krieger Pub Co, 1980.
- [26] Ferdinand Verhulst. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, 1985.
- [27] Paul Banchard, Robert L. Devaney, and Glen R. Hall. *Ecuaciones diferenciales*. Thomson, 1th edition, 1998.
- [28] Stephen T. Thornton and Jerry B. Marion. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Thomson, 5th edition, 2004.

- [29] Calvin D. Ahlbrandt and Allan C. Peterson (auth.). *Discrete Hamiltonian Systems: Difference Equations, Continued Fractions, and Riccati Equations*. Kluwer Texts in the Mathematical Sciences 16. Springer US, 1 edition, 1996.