

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MÉTODO DE PARAMETRIZACIÓN: VARIEDADES
ESTABLES E INESTABLES EN MAPEOS
HAMILTONIANOS DE DOS DIMENSIONES

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

Físico

PRESENTA:

Evelyn Álvarez Cruz

TUTOR:

Dr. Luis Benet Fernández



México, D.F., 2018

A mis padres

Declaración de autenticidad

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

Evelyn Álvarez Cruz. México, D.F., 2018

Introducción

En el análisis de sistemas dinámicos es importante desarrollar aspectos que nos ayuden a describir de manera puntual el comportamiento de un sistema, esto ya que muchos de ellos tienen una dinámica rica en el sentido matemático y físico. Conocer por ejemplo los puntos fijos, las órbitas periódicas, el diagrama de bifurcación, entre otras características es una manera de poder decir mucho sobre el sistema en general. Entre esas otras características entra el estudio de variedades estables e inestables **al rededor** de puntos fijos o de periodo n . La importancia de las variedades radica en que mediante éstas se puede conocer el comportamiento del sistema dinámico en las vecindades del punto periódico, además para algunos casos la intersección de las mismas lleva a resultados interesantes sobre caos. Se puede por ejemplo estudiar el problema de los tres cuerpos mediante el estudio de sus variedades cerca del punto fijo, haciendo una linearización del problema. Esta linearización se hace en sistemas con condiciones suficientemente "suaves" para que las variedades inestables del sistema linearizado se puedan relacionar con las del sistema no lineal.



El estudio analítico de las variedades cerca de puntos periódicos (puntos fijos y de periodo igual o mayor a dos) no ha sido tan exitoso como el **computacional** **MENCIONAR ALGUNOS MÉTODOS**. Dentro de los métodos semianalíticos se encuentra el de parametrización. El método de parametrización, dicho de manera simple, consiste en aproximar mediante series de Taylor las variedades alrededor de puntos periódicos usando los vectores propios del sistema linearizado para dirigir la parametrización. Los coeficientes de los polinomios de Taylor se van calculando de manera recursiva. El método se describe en el trabajo de J.D. Mireles, quién lo aplicó de manera particular al mapeo estándar, describiendo muy claramente cómo se obtienen las relaciones de recurrencia; su trabajo **fue** la motivación de esta tesis.



El objetivo de este trabajo **fue** ir más allá de la implementación del método de parametrización ~~sólo~~ para el mapeo estándar. Siguiendo las notas mencionadas se automatizó el método de manera computacional primero para el mapeo estándar y luego se hizo de manera general para cualquier mapeo de dos dimensiones. Con tal implementación se obtienen las variedades estable e inestable **al rededor** de puntos fijos hiperbólicos, parametrizadas por medio de un polinomio de orden n . Teniendo las variedades se hizo un análisis de las intersecciones entre ellas y de **como** explotar el método para mejorar

0. INTRODUCCIÓN

el error.

~~Para explicar el trabajo~~ este escrito se divide en tres partes. En el primer capítulo desarrollaremos la teoría de los sistemas dinámicos hamiltonianos que se usará a lo largo del método, junto con el método de parametrización. Introduciendo primero qué es un sistema dinámico junto con las definiciones de puntos fijos, órbitas periódicas y fijas. Llegando a la teoría detrás de la ecuación cohomológica. Las matemáticas que se utilizan en el proceso de parametrización están al alcance de un estudiante de licenciatura de Física o Matemáticas, sin embargo la teoría detrás del funcionamiento del método es un tanto más elevada de nivel, por lo que sólo mencionaremos en esta parte las herramientas más fundamentales.

En el segundo pasaremos a describir brevemente cómo J.D Mireles aplica el método para un caso particular. Para posteriormente explicar cómo se procedió a la implementación del método. En esta parte también se incluye el análisis del error y de la convergencia de las soluciones. El tercer y último capítulo consiste en analizar el mapeo estándar para reproducir algunos de los resultados presentados en (8). También se analizarán otros mapeos como el de Hénon y el que aparece en el artículo (3). Por último se presenta un breve panorama en el que mencionamos algunas de las ideas con las que se podría seguir trabajando a partir del método automatizado.

Dado que es un trabajo semianalítico se incluirán algunos enlaces que llevarán a ejemplos o códigos que se usen dentro del programa, con la documentación correspondiente. También hay algunas partes interactivas que estarán en línea.

Índice general

Introducción	v
1. Sistemas Hamiltonianos de dos dimensiones	1
1.1. Sistemas dinámicos	1
1.2. Sistemas lineales	3
1.3. Estabilidad	5
1.4. Sistemas Hamiltonianos	8
1.5. Método de parametrización	10
2. Método de parametrización	13
2.1. Desarrollo explícito del mapeo estándar	13
2.2. Implementación del método	15
3. Ejemplos de aplicación del método	21
3.1. Mapeo Estándar	21
3.2. Mapeo de Hénon	28
3.3. Mapeo exponencial	38
4. Panorama	47
Bibliografía	49

Sistemas Hamiltonianos de dos dimensiones

Para llegar al análisis de los sistemas de nuestro interés mediante el método de parametrización es fundamental conocer varios conceptos sobre la dinámica así como del análisis numérico del mismo. En este capítulo se hace una breve descripción de los teoremas y definiciones que nos ayudarán a entender el método. Las siguientes secciones no son la manera más formal de introducir al lector a cada uno de los temas expuestos. Sin embargo proporcionan una visión puntual de lo indispensable.

1.1. Sistemas dinámicos

Cuando uno habla sobre sistemas dinámicos lo que le viene a la mente es alguna relación que describe el comportamiento temporal de un sistema físico. Ya sea el movimiento de péndulos o de cargas, nos interesa saber más acerca de las características de su comportamiento. En el estudio de los mismos se hace una clasificación en términos de sus propiedades vistas en el espacio fase o por la forma del sistema. Hay sistemas dinámicos discretos y sistemas dinámicos continuos.

Dentro de estas características de clasificación también puede estar que el sistema sea de tipo determinista o estocástico. La diferencia entre ambos es que para **la** determinista dado un punto en el espacio fase existe uno y sólo un punto subsecuente bien definido. **Mientras** que en el estocástico para un estado puede haber varios estados subsecuentes posibles. En algunos casos los sistemas resultan ser simples, por ejemplo si su movimiento es regular ~~y converge~~. Sin embargo hay muchos otros sistemas que no son regulares en los que para dos condiciones iniciales parecidas los resultados de la dinámica después de cierto tiempo son diferentes. Para este trabajo nos enfocaremos en los **discretos** provenientes de sistemas Hamiltonianos.

Para hablar de manera clara sobre sistemas dinámicos necesitamos definir.

Definición 1 (Sistema dinámico de ODEDS)

Un sistema dinámico es un semigrupo G actuando en un espacio M .

$$T : G \times M \rightarrow M; \quad T_g \circ T_h = T_{g \circ h} \quad (1.1)$$

Un ejemplo típico de un sistema dinámico continuo es el flujo de una ecuación diferencial autónoma, mientras que de uno discreto es por ejemplo el mapeo de un intervalo cerrado en \mathbb{R} en sí mismo, o simplemente una función iterada. En el primer caso

$$\dot{x} = f(x); \quad x(0) = x_0 \quad (1.2)$$

Suponiendo que $f \in C^k(M, \mathbb{R}^n)$ con $k \geq 1$ y donde M es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Las soluciones de las ecuaciones diferenciales son llamadas trayectorias, por lo que diremos que ϕ es una trayectoria de x_0 si satisface que $\phi(0) = x_0$. En el segundo caso

$$x_{n+1} = Ax_n \quad (1.3)$$

donde x_n tiene k componentes y A es una matriz de $k \times k$. Donde $G = \mathbb{R}^m$ y $M = \mathbb{R}^n$ en 1.1. Dada una condición inicial x_0 podemos obtener el estado siguiente evaluando el lado derecho de 1.3 con tal punto. De manera sucesiva se puede obtener el estado x_{n+1} del estado x_n . La aplicación consecutiva de la función proporciona la trayectoria u órbita del punto inicial.

$$x_{k+1} = F \circ F \circ F \circ F \dots \circ F(x_0) \quad (k \text{ veces})$$

$$x_{k+1} = F^k(x_0)$$

donde $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ es llamado la órbita de x_0 , que en ocasiones se define como

Definición 2 (Órbita)

Se dice que la órbita de un punto x_0 es

$$\Gamma = \{x_k | x_k = F^k(x_0), k \in \mathbb{Z}\}$$

Es posible que para un sistema exista un x_* tal que $F^p(x_*) = x_*$ con $p \in \mathbb{Z}$. Es decir después de un número finito de aplicaciones se vuelve al mismo punto, a x_0 le llamaremos un punto periódico, de periodo p . También es entonces posible que exista un punto de periodo uno $x_* = F(x_*)$, al cual llamamos punto fijo. Los puntos fijos serán otra forma de clasificar a los sistemas dinámicos, para lo cual es necesario clasificar también las órbitas en términos de los periodos:

- Órbitas fijas (asociadas a puntos con periodo **cero**)
- Órbitas periódicas regulares (asociadas a puntos con periodo mayor **a cero**)
- Órbitas no cerradas (asociadas a puntos no periódicos)

Nos queremos enfocar en principio en los puntos fijos. Para ello es necesario hablar sobre la linearización del sistema, que es de lo que trata la siguiente sección.

1.2. Sistemas lineales

La siguiente sección tiene como objetivo introducirnos al análisis de sistemas lineales y con ello al análisis de estabilidad en sistemas Hamiltonianos de dos dimensiones. En el estudio de sistemas dinámicos de dimensiones altas el estudio de los sistemas lineales provee las bases para los modelos de más alta dimensión de manera local. Cuando se considera un sistema como el de la ecuación 1.3 donde $\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ podemos decir que la solución **prevee** un isomorfismo entre la condición inicial y los puntos de la trayectoria. Es decir si podemos entender la dinámica o comportamiento del punto inicial entonces podemos conocer también de cierta manera la de cualquier punto en su trayectoria. De manera inversa, conociendo un valor \mathbf{x}_k obtener \mathbf{x}_{k-1} es posible si el sistema dinámico es invertible, lo cual ocurre cuando el dominio de nuestro mapeo es un grupo.

Como la evolución de un estado inicial está determinada por la matriz \mathbf{A} que es la representación del sistema en términos de los vectores de una base, entonces nos concierne analizar las características de esta. Dado que los sistemas tratados en este trabajo son de dos dimensiones entonces analizaremos este caso. Sabemos ya que para matrices de 2×2 existen a lo más dos valores propios λ_1, λ_2 . Digamos de manera general que $\lambda_i, i \in \{1, 2\}$ es complejo, ya que son soluciones del polinomio característico. De manera que podemos observar lo siguiente

- $|\lambda_i| < 1$
- $|\lambda_i| > 1$
- $|\lambda_i| = 1$

Para estos tres casos puede además pasar que $\lambda_1 = \alpha \lambda_2$ con $\alpha \in \mathbb{N}$ es decir uno sea un múltiplo del otro. Sin embargo si esto no ocurre tendremos dos vectores propios $\mathbf{x}_{p1}, \mathbf{x}_{p2}$ asociados a cada valor propio.

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_{p1} = \lambda_1\mathbf{x}_{p1}; \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_{p2} = \lambda_2\mathbf{x}_{p2} \quad (1.4)$$

los vectores serán linealmente independientes si cumplen las condiciones del siguiente teorema.

Teorema 1

Sean λ_1, λ_2 los valores propios de \mathbf{A} con $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ son ortogonales.

Un resultado importante de este teorema es el siguiente **corolario** que nos permitirá reescribir la matriz \mathbf{A} .

Corolario 1

Sea \mathbf{A} una matriz de 2×2 con distintos valores propios λ_1, λ_2 , reales, entonces existe una matriz \mathbf{U} tal que

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Digamos que \mathbf{A}' será la matriz resultado de la diagonalización anterior, suponiendo que ambos valores propios no suman cero y son reales. De hecho no es difícil ver que \mathbf{U} tiene como columnas los vectores propios. Consecuentemente un mapeo lineal de dimensión dos es linealmente conjugado con un mapeo el cual tiene una matriz de representación diagonal. Este tipo de matrices son llamadas formas normales o simplécticas, permiten representar el sistema en su forma simpléctica mediante la diagonalización del mismo. Si todos los valores de la matriz \mathbf{A} son puramente imaginarios y además es diagonalizable entonces decimos que \mathbf{A} es elíptica y un punto fijo asociado al sistema se dice punto fijo elíptico. Si es el caso que los dos valores propios son reales entonces la matriz se dice hiperbólica y un punto fijo asociado al sistema es un punto fijo hiperbólico. En el caso de la matriz hiperbólica tendremos que si ambos valores propios de \mathbf{A} son mayores a cero entonces

$$\mathbf{A}'\mathbf{x}_0 \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad n \rightarrow \infty$$

Pero también puede suceder que uno de los valores propios tenga parte real negativa mientras que el restante positiva. El resultado de estas características es un comportamiento muy particular en el espacio fase para cada caso, que se puede ver en la figura 1.1

Retomemos además que si los valores propios eran ortogonales entonces podemos escribir los subespacios generados por los vectores propios.

$$E^s = \{(x, y) : (x, y) = \beta \mathbf{v}_1 \quad \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$E^u = \{(x, y) : (x, y) = \alpha \mathbf{v}_2 \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$$

La pregunta que surge ahora es ¿qué efecto tienen la forma de los valores propios sobre el sistema?, para responder a esta pregunta necesitamos hacer un análisis de estabilidad.

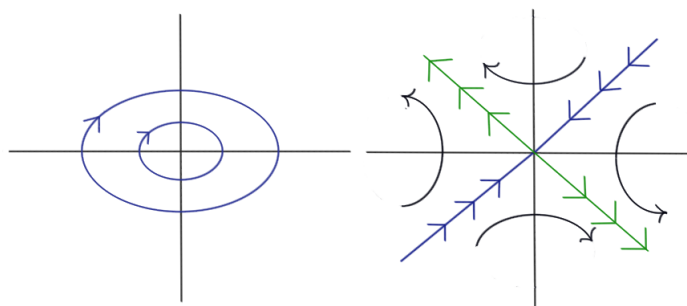


Figura 1.1: Punto fijo elíptico(izquierda) e hiperbólico(derecha) en el espacio fase

1.3. Estabilidad

Como se menciono antes es necesario saber más información sobre los puntos fijos. Para hablar sobre la estabilidad de los mismos primero introducimos la definición de un conjunto invariante.

Definición 3 (Conjunto invariante)

Un conjunto invariante es un subconjunto $I \subset E$ del espacio fase tal que para cualquier $x_i \in I$ y $n \in \mathbb{Z}$ $F^n(x_i) \in I$.

Como esta definición es para cualquier punto en el dominio por consiguiente podemos analizar tales conjuntos invariantes asociados a puntos fijos. Si x_* es un punto fijo hiperbólico vamos a definir los conjuntos estable e inestable para x_* .

Definición 4 (Variedad estable e inestable para un punto fijo)

$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un mapeo analítico y sea x_* un punto fijo del mapeo, si $C \in \mathbb{R}^2$ es una vecindad del punto fijo definimos

$$W_{loc}^s(x_*) = \{x \in C : F^n(x) \in C \quad \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

La definición 4 es análoga para la variedad inestable W_{loc}^u , pero sólo nos da una relación local. Si queremos ir más alejados del punto fijo entonces necesitamos una variedad que sea más general. Para ello existe el teorema siguiente.

Teorema 2 (De la variedad estable(inestable))

Sea \mathbf{A} una matriz de 2×2 con dos valores propios λ_1, λ_2 donde uno tiene parte real positiva y otro negativa, tal que si ϵ es lo suficientemente pequeña y positiva existe $W^s(\mathbf{x}_i)$ entonces $F^n(\mathbf{x}_i) \rightarrow x_*$ cuando $n \rightarrow \infty$. Respectivamente para $W^u(\mathbf{x}_i)$ tenemos que $F^n(\mathbf{x}_i) \rightarrow x_*$ cuando $n \rightarrow -\infty$.

Con esto podemos asegurar que existen funciones lo suficientemente suaves que se extienden por la variedad, no sólo de manera local. Esto es de suma importancia en el método de parametrización que aplicaremos, ya que la parametrización se hace por medio de polinomios que son funciones suaves y que con lo que acabamos de mencionar no sólo se aproximan de manera local. Si escribimos el conjunto de la definición anterior

$$W^s(\mathbf{x}_i) = \{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^2 : \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}^n(\mathbf{x}_i) = x_*\} \quad (1.5)$$

podemos notar que además tal conjunto consiste en todas las órbitas que se acumulan bajo la aplicación iterada del mapeo al punto fijo. En el caso en que el mapeo se a invertible entonces podemos relacionar

$$W^s(\mathbf{x}_*) = \cup_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}^n[W_{loc}^s(\mathbf{x}_i)]$$

que nos dice que la variedad estable se obtiene de la unión de todas las aplicaciones hacia atrás de la variedad local estable. Para escribir de manera análoga la variedad inestable digamos primero que la órbita hacia atrás de \mathbf{x}_k es $\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_{k+1}$ con $k \leq -1$ donde además

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) = x_*$$

si el mapeo es invertible entonces la órbita hacia atrás es simplemente la aplicación iterada de la inversa. Entonces

$$W^u(\mathbf{x}_*) = \{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^2 : \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}^n(\mathbf{x}_i) = \mathbf{x}_*\}$$

Para relacionar esto con los sistemas de interés regresemos a la ecuación 1.3 donde es evidente que el origen $[0, 0]$ es un punto fijo de cualquier sistema que tenga la misma forma. Si ninguno de los dos eigenvalores $\lambda_{1,2}$ de la matriz \mathbf{A} tiene módulo uno y se tiene que ambos son de signo contrario entonces la matriz es llamada hiperbólica y x_* un punto fijo hiperbólico. Mientras que si por ejemplo los dos valores propios de \mathbf{A} tienen sólo parte imaginaria entonces el sistema es llamado elíptico. El comportamiento de ambos casos se puede ver en la figura 1.1. Estos conjuntos invariantes relacionados con el punto fijo resultan ser espacios propios generalizados de la matriz \mathbf{A} generados por los vectores propios. Es decir si $\mathbf{x}_{pj} = \mathbf{u}_j + i\mathbf{v}_j$ proviene de una base

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2\} \quad (1.6)$$

entonces hay diferentes direcciones asociadas al punto fijo de acuerdo con la base \mathbf{B} . Para los sistemas que trabajaremos resulta que no sólo la norma de los valores propios son menores o mayores a uno, si no que además la parte imaginaria es cero para ambos. Lo que quiere decir que la base \mathbf{B} tiene dos elementos únicamente. Los elementos de la misma forman subespacios, un subespacio asociado al valor propio con norma mayor a uno y otro con norma menos a uno.

Teorema 3

Dado un sistema de la forma 1.3 donde los valores propios de \mathbf{A} tengan parte real diferente de cero entonces

$$W^s = E^s$$

$$W^u = E^u$$

donde E^s es la suma directa de los eigenspacios asociados al valor propio con parte real negativa, E^u es análogo pero con positivo. En particular

$$\mathbb{R}^n = W^s \oplus W^u$$

Puesto que los valores propios son reales, y entonces también los vectores propios. Este teorema nos resume que la suma directa de los conjuntos invariantes del sistema forman al espacio de soluciones. Además de mostrarnos que los conjuntos invariantes son para este caso las variedades invariantes. En el caso de sistemas más generales tenemos el siguiente teorema, que además nos aclara a qué llamamos una variedad inestable.

Teorema 4 (De la variedad estable)

Sea un sistema de la forma $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$ con un punto fijo en el origen. Sean E^s y E^u los subespacios estables e inestables de la linearización del sistema, $\mathbf{F}(\mathbf{x}_n) \rightarrow \mathbb{J}\mathbf{x}_n$, donde \mathbb{J} es la matriz jacobiana en el origen. Si $|\mathbf{F}(\mathbf{x}_n) - \mathbb{J}\mathbf{x}_n| = O(x^2)$ entonces existen localmente variedades estables e inestables con las mismas dimensiones que E^s, E^u y que son tangentes a estos en cero respectivamente.

$$W_{loc}^s(\mathbf{x}_*) = \{\mathbf{x}_n : \mathbf{F}^k(\mathbf{x}_n) \rightarrow \mathbf{x}_* \text{ cuando } k \rightarrow \infty\}$$

$$W_{loc}^u(\mathbf{x}_*) = \{\mathbf{x}_* : \mathbf{F}^k(\mathbf{x}_n) \rightarrow \mathbf{x}_* \text{ cuando } k \rightarrow -\infty\}$$

Hay que notar que las variedades anteriores son locales , en caso de ser globales resultan

$$W^s(\mathbf{x}_*) = \{\mathbf{x}_n : \exists k \in \mathbb{Z} \mid \mathbb{F}(\mathbf{x}_n) \in W_{loc}^s(\mathbf{x}_*)\}$$

$$W^u(\mathbf{x}_*) = \{\mathbf{x}_* : \exists k \in \mathbb{Z} \mid \mathbb{F}(\mathbf{x}_n) \in W_{loc}^{u0}(\mathbf{x}_*)\}$$

El cálculo de variedades **al rededor** de un punto fijo es un problema difícil de atacar analíticamente por ello es necesario explotar al máximo la linearización que se hace del sistema para poder, con métodos numéricos o semianalíticos, calcular las variedades. Es justo esto lo que nos lleva a la siguiente sección.

1.4. Sistemas Hamiltonianos

Los sistemas Hamiltonianos son una clase particular de los sistemas dinámicos. En 1834 William R. Hamilton reformuló la ecuación de Newton ($F = ma$) para un conjunto de partículas puntuales en un campo de fuerzas. Cuando la fuerza \mathbf{F} es conservativa es posible escribir a la fuerza como menos el gradiente de una función potencial.

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad (1.7)$$

Podemos convertir la ecuación 1.7 en un sistemas de ecuaciones diferenciales.

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i; \quad m_i \frac{dv_i}{dt} = -\nabla_i V \quad (1.8)$$

Aquí es donde Hamilton notó que estas ecuaciones pueden obtenerse a partir de una función muy particular.

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m_i} + V(q) \quad (1.9)$$

A la función 1.9 actualmente se le llama Hamiltoniana, donde p_i denota el momento y q la colección de las **posiciones** en forma de vector. Al comparar 1.9 con 1.8 tenemos que las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (1.10)$$

Físicamente hablando H es la energía total del sistema, que es invariante en el tiempo, $\frac{dH}{dt} = 0$. La formulación Hamiltoniana de la mecánica no está limitada a sistemas que son de la forma **energía cinética más energía potencial**. Ya que de manera más general una Hamiltoniana es cualquier función C^1 , $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ donde en nuestro caso M es una variedad $2n$ -dimensional con coordenadas $z = (q, p)$. Para escribir las ecuaciones de Hamilton de manera resumida

$$\frac{dz}{dt} = J \nabla H \quad (1.11)$$

Donde I es la matriz identidad de $n \times n$ por lo que J es de $2n \times 2n$ antisimétrica, llamada matriz de Poisson.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

Si por otro lado pensamos que el cambio de una función escalar F que depende del tiempo se puede calcular usando la ecuación 1.11 mediante la regla de la cadena

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, h\}$$

Aquí la expresión $\{F, H\}$ es llamada el paréntesis de Poisson definido como:

$$\{F, H\} = \nabla F^T J \nabla H \quad (1.12)$$

que nos sirve para escribir las ecuaciones de movimiento 1.10

$$\dot{z} = \{z, H\} \quad (1.13)$$

Algunas de las cosas que nos interesan en este tipo de sistemas son las cantidades conservadas. La primera de ellas que nos interesa es la energía.

Lema 1

(Conservación de energía) Si H es independiente del tiempo entonces la energía se conserva a lo largo de trayectorias. $H(q(t), p(t)) = E$.

Demostración:

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} = \nabla H^T J \nabla H = 0$$

ya que J es antisimétrica. ■

La otra cantidad que nos interesa es el volumen. Joseph Liouville mostró que los flujos Hamiltonianos preservan el volumen.

Lema 2

(Liouville) Si H es C^2 entonces su flujo preserva el volumen.

Una característica más de los sistemas Hamiltonianos es que sus puntos críticos son equivalentemente sus puntos fijos. Lo cual se enuncia en el siguiente lema.

Lema 3

(Equilibrio) Un punto z^* es un punto fijo del flujo autónomo Hamiltoniano si y sólo si es un punto crítico de H .

Consecuentemente de eso tenemos **que al** ser iguales sus puntos críticos y **fijos entonces** la estabilidad de los mismos se puede estudiar a partir de la matriz Hessiana de H . **Lo cuál analizaremos en una sección posterior.** Mientras podemos pensar que una consecuencia de este lema es que cualquier máximo o mínimo no degenerado de H es **Lyapunov estable**.

Pero ¿cómo es que este tipo de sistemas se relacionan con los sistemas lineales que analizamos antes? La clave está en escribir a nuestro sistema de manera linearizada mediante la matriz \mathbb{J} . **Si** escribimos 1.10 como

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta t}$$

donde $q_i = q(t)$ y $q_{i+1} = q(t + \Delta t)$. **Entonces** las ecuaciones de movimiento se pueden reescribir

$$q_{i+1} = q_i + \Delta t p_i; \quad p_{i+1} = p_i - \Delta t \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_{q=q_{i+1}} \quad (1.14)$$

lo cual ya está en forma de un **sistema de los que estudiamos anteriormente**. Para linearizar el sistema calculamos el jacobiano

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(q_{i+1}, p_{i+1})}{\partial(q_i, p_i)} = \det \begin{pmatrix} 1 & -\Delta t \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i^2} \right) \\ \Delta t & 1 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Es justo de este sistema linearizado de donde obtendremos información a partir de aplicar los teoremas y resultados de las secciones anteriores. ~~Pero antes~~, notemos que el determinante es uno

$$\det(\mathbf{J}) = 1 + (\Delta t)^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} \right)_{q=q_{i+1}}$$

ya que la segunda parcial del potencial vale cero. Por lo que es un sistema que preserva áreas.

1.5. Método de parametrización

Como ya observamos en la sección anterior encontrar las variedades asociadas a un punto fijo no es ~~algo~~ trivial. Los métodos analíticos se vuelven no **solo** tediosos si no que hacen necesario que el análisis de un sistema se haga de forma personalizada. Y para encontrar tales variedades debemos explotar los conocimientos que tenemos sobre los sistemas. **Como hemos resumido hasta ahora los mapeos Hamiltonianos de dos dimensiones tienen varias características que nos ayudarán a construir una forma de calcular variedades.** Algunas de estas características son realmente simples, por ejemplo sabemos que en un punto hiperbólico resultarán dos variedades asociadas a los valores propios de la matriz que representa el sistema linearizado. También que tales mapeos

preservan el área, entre otras cosas. El objetivo de esta sección ~~final en la introducción~~ es hablar sobre el método de parametrización el cual fue descrito por X.Cabré, E. Fontich y R. de la Llave (21). El método fue desarrollado de manera general para las variedades asociadas a puntos fijos, se trata de un método semianalítico, es decir parte computacional y parte matemática. El método básicamente consiste en parametrizar mediante polinomios las variedades de manera que se conozca ya el punto fijo.

Para seguir explicando más sobre el método recordemos que anteriormente mencionamos que los conjuntos 1.5, 1.6 son conjuntos invariantes. Por otro lado si recordamos la definición de sistema dinámico que nos dice que se trata de un semigrupo actuando sobre un espacio M , la manera en la que se genera el sistema es con un difeomorfismo $F : M \rightarrow M$. En este mismo espacio M definamos una inmersión inyectiva $P : \Theta \rightarrow M$ lo cual nos define una subvariedad \mathbf{P} parametrizada por medio de las variables locales en $\theta \in \Theta$. Tal variedad \mathbf{P} es invariante bajo F si existe un difeomorfismo $g : \Theta \rightarrow \Theta$ tal que cumple la siguiente ecuación de invariancia.

$$F \circ P = P \circ g \quad (1.16)$$

En este sentido g representa un subsistema de F de manera que g es una representación de la dinámica del mapeo pero sobre Θ . Dentro de esta ecuación debemos encontrar P, g , justo de eso se trata el método de parametrización. Las variedades estarán parametrizadas por P . En particular no conocemos la dinámica interna de g pero como P, g son soluciones de 1.16 la composición también lo es y eso nos dará una libertad para resolver la ecuación. Este obstáculo se puede pasar si se escoge una forma de parametrización que dependa del sistema, en el método de parametrización se tienen descritas dos formas: la forma gráfica y la forma normal. En este trabajo usaremos el método de la forma normal, que es la forma más simple de parametrización. Consiste en adaptar la forma de la parametrización P a la forma de las variedades. Esta forma tiene que ver justo con la dirección que proporcionan los vectores propios. Para el caso de una matriz de 2×2 hiperbólica justo sus vectores nos indicarán la dirección de cada variedad.

Para la forma en la que se escoge g la mayoría de las veces se propone una forma polinómica que se adapte a la forma del mapeo. ~~En casos en que el mapeo sea de hecho de forma polinomial ayuda a que a parametrización describa de mejor manera las variedades.~~ Sin embargo la elección puede ser diferente si se analiza cada mapeo por separado. En nuestro caso escogimos la misma dependencia para las funciones de x, y en g que además es lineal. Es decir

$$g(t) = (\lambda t, \lambda t) \quad (1.17)$$

con esto tendremos que del lado derecho de la ecuación 1.16 es totalmente un polinomio.

1. SISTEMAS HAMILTONIANOS DE DOS DIMENSIONES

Ya que definimos cómo se hará la parametrización y suponiendo que tenemos las variedades parametrizadas, es importante tener una función que nos indique que tan acertada es nuestra parametrización. Para hacer esto la primera y más fácil forma de calcular el error es justo a partir de la ecuación 1.16, si ya se han calculado las parametrizaciones P de orden n entonces el error es

$$E_n(t) = \| F \circ P_n - P_n \circ g \|_\infty \quad (1.18)$$

Este error será el asociado a la variación con respecto a la ecuación cohomológica. Dado que depende del parámetro esperamos que el error vaya creciendo conforme se evalúa en valores de t lejos del punto fijo. La otra forma de evaluar que tan lejos podemos llegar con la parametrización es ver la convergencia de los polinomios asociados. Ya que tenemos los polinomios de la variedad podemos evaluar el cociente entre los coeficientes de cada término.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad (1.19)$$

dónde $(a_0, b_0) = x_*$ son los coeficientes de orden cero y a_n el de orden n . Lo que practicamente estamos haciendo con este cociente es lo que se llama estudiar la convergencia degun Hadamard. Si el límite anterior tiende a cero entonces la serie a_n converge. Otra forma de evaluarlo es con el de tres términos.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left[i \left(\frac{a_{i+1}}{a_i} \right) - (i-1) \left(\frac{a_i}{a_{i-1}} \right) \right] \quad (1.20)$$

Aunque el método se aplica de la misma manera para los mapeos analizados, es obvio que la parametrización será diferente, por lo que la convergencia de cada parametrización es distinta. El método de tres términos nos puede ayudar en casos donde haya singularidades en el sistema.

Método de parametrización



En este capítulo describimos cómo se realizó el método de parametrización aplicado a sistemas hamiltonianos. Se comienza explicando el análisis del mapeo **estandar** que fue lo presentado en el trabajo de Mireles (8). A partir de este trabajo se generalizó el método para los sistemas hamiltonianos de dos dimensiones de manera que dado un mapeo el método programado en Julia pudiera calcular de manera recurrente los polinomios asociados a las variedades.

2.1. Desarrollo explícito del mapeo estándar

Para desarrollar el método de parametrización de manera automática se usó como base el trabajo de J.D.Mireles James. En este trabajo se expone de manera explícita cómo se calculan las variedades estables e inestables para el mapeo estándar. La razón por la que se usa este mapeo es dado que preserva área y que puede ser pensado como una perturbación de un mapeo integrable en el toro, además de que exhibe la dinámica asociada a mapeos hamiltonianos.

$$f_k(\theta, p) = \begin{bmatrix} \theta + p \\ p + k \sin(\theta + p) \end{bmatrix} \text{mod}(2\pi) \quad (2.1)$$



Los puntos fijos del mapeo serán aquellos que

$$f_k(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad (2.2)$$

con $\mathbf{x} = (\theta, p)$. El resultado de esta condición son **ls** puntos $x_1 = (0, 0)$ y $x_2 = (0, \pi)$. Para analizar el mapeo haremos una linearización



$$Df_k(\theta, p) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k \cos(\theta + p) & 1 + k \cos(\theta + p) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Al evaluar en $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ resulta

$$Df_k(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & 1 + k \end{pmatrix} \quad Df_k(0, \pi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -k & 1 - k \end{pmatrix}$$

2. MÉTODO DE PARAMETRIZACIÓN

A partir de esto podemos obtener los valores propios para \mathbf{x}_1 que resultan

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 + k \pm \sqrt{k^2 + 4k}}{2}$$

cuyos vectores propios son (y_1, y_2)

$$y_2 = y_1 \left(\frac{1 \pm \sqrt{k^2 + 4k}}{2k} \right)$$

Los cuales son hiperbólicos para cualquier $k > 0$. Mientras que para \mathbf{x}_2

$$\lambda_{1,2} = \frac{-k + 2 \pm \sqrt{k^2 - 4k}}{2} \quad 0 < k < 4$$

Resultan valores complejos, por lo que para el análisis sólo se ocupará el punto \mathbf{x}_1 .



Para **comenzar** el método de manera analítica necesitamos dos polinomios

$$\theta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

y

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

tal que $P(t) := (\theta(t), p(t))$. Para este caso hay que resolver la ecuación de invariancia suponiendo que λ es una constante, que es la forma más simple posible. Después de sustituir esto en la 1.16 para el mapeo estándar obtenemos :



$$f_k(\theta, p) = \begin{bmatrix} \theta(t) + p(t) \\ p(t) + k \sin(\theta(t) + p(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(\lambda(t)) \\ p(\lambda(t)) \end{bmatrix}$$

que en forma expandida se ve como



$$\begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n + k \sin(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n t^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n t^n \end{bmatrix}$$



de manera separada y usando la serie de Taylor del seno

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right]^{2j+1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n t^n$$

si **expandimos** las sumas

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots = a_0 + a_1 \lambda t + \dots$$

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + k(a_0 + a_1 t + \dots + b_0 + b_1 t + \dots) - k \frac{1}{3!} (a_0 + a_1 t + \dots + b_0 + b_1 t \dots)^3 + \dots =$$

$$b_0 + b_1 \lambda t + b_2 \lambda t^2 + \dots$$

2.2. Implementación del método

Para comenzar a explicar la implementación del método primero daremos una vista a lo que hace el método paso a paso de manera computacional. ~~Esta fue de hecho la forma de proceder en la creación del programa.~~ Supondremos que se tiene un mapeo hamiltoniano $f_k(x, y)$ donde k es un parámetro, y del cual tenemos un punto fijo p_* . El código escrito en Julia usa principalmente la paquetería *TaylorSeries* que manipula series de Taylor.

Primero se crean dos variables x, y del mapeo, como dos polinomios de grado mayor a uno. que corresponden a \mathbf{x}_n en 1.3

$$\mathbf{x}_n = (1.0x + O(x^2), 1.0y + O(y^2))$$

Por otra parte necesitamos dos polinomios con variable t de orden uno que representan a las variedades **que tienen como coeficientes las variables x, y .** y como primer término el punto fijo.

$$\begin{aligned} P_x &= x_* + (1.0x + O(x^2))t^1 + O(t^2) \\ P_y &= y_* + (1.0y + O(y^2))t^1 + O(t^2) \end{aligned}$$

Aplicamos el mapeo \mathbf{F} a los polinomios anteriores lo cual **forma la parte izquierda** de 1.16

$$C_n = F_k(P_x, P_y)$$

Hasta este momento hemos calculado la parte izquierda de la ecuación **cohomológica**, nos ocuparemos **de la otra parte** más adelante. La razón por la que se escriben los coeficientes de P a su vez como polinomios es que al escribir un polinomio en el coeficiente es posible tratarlo como una variable. Es decir la x en $P_x = x_* + (x + \Delta x)t^1$ representa la incógnita del coeficiente de orden uno. Para encontrar el primer orden de los polinomios P_x, P_y escribimos todo en forma matricial.

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

donde la matriz \mathbf{A} contiene a los coeficientes de orden $n = 1$ de P_n , mientras que $\mathbf{v} = (x, y)$ y \mathbf{w} tiene los términos independientes de P_n .

2. MÉTODO DE PARAMETRIZACIÓN

Para poder obtener la matriz \mathbf{A}
calcularemos el jacobiano de P_n
los que nos permite obtener los coeficientes
asociados al orden 1, en este caso.

$$\mathbf{J}(\mathbf{F}_k(P_{nx}, P_{ny}))$$

Calculamos ahora los valores y vectores
propios de \mathbf{A}

$$[\lambda_1, \lambda_2]$$

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$$

Escogemos los asociados a la variedad inestable

$$\lambda_2, \mathbf{v}_2 = (a_1, b_1)$$

Los valores de \mathbf{v}_2 serán los coeficientes de orden uno en los polinomios P_x, P_y , que acompañan a t . ~~Ya que~~ al ser los vectores propios proporcionan una dirección tangente a la variedad. Que es justo la manera en la que se **hace el método normal**. Si notamos en esta parte no ocupamos la parte derecha de la ecuación cohomológica, la razón es que para ello necesitamos primero saber qué tipo de función es g que representa la dinámica del mapeo en \mathbf{R} . Dado que estamos usando el **método normal** necesitamos una forma polinomial para g y la forma más simple es proponer que sea lineal $g(x, y) = (\lambda_2 t, \lambda_2 t)$. Además recordemos que nuestro sistema lo linearizamos para analizarlo y la matriz asociada a la linearización es justo la que contiene los vectores propios como columnas. Al final estamos usando una aproximación lineal que va acorde a la ecuación 2.3.

Para seguir calculando el segundo orden

Actualizamos los coeficientes en los polinomios

$$P_x = x_* + a_1 t$$

$$P_y = y_* + b_1 t$$

Agregamos de nuevo las variables x, y para
calcular el término cuadrático.

$$P_x = x_* + a_1 t + (x + O(x^2))t^2$$

$$P_y = y_* + a_1 t x + (y + O(y^2))t^2$$

Aplicamos el mapeo

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{F}_k(P_x, P_y)$$

Necesitamos retomar el lado derecho de la ecuación cohomológica 1.16 para el cual tenemos un polinomio que tiene como coeficientes los valores de a_i multiplicados con una potencia del valor propio.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n t^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda^n t^n$$



.....
Creamos un polinomio de acuerdo a la parte
derecha de la ecuación 1.16
.....

.....
$$P_{x\lambda} = x_* + a_1\lambda t + (x + O(x^2))\lambda^2 t^2$$
$$P_{y\lambda} = y_* + b_1\lambda t + (y + O(y^2))\lambda^2 t^2$$

.....

Ahora que tenemos las dos partes de la ecuación 1.16 para el orden 2 podemos restarlas buscando resolver

$$F_k \circ P - P \circ g = 0 \quad (2.4)$$



Para este punto la ecuación anterior no es cero ya que el término cuadrático no se sabe aún y está como incógnita representada por las variables x, y .



.....
Definimos una ecuación que será la resta
de la expresión 2.4.
.....

.....
$$R := P_n - P_\lambda$$

.....

.....
Resultará sólo el término cuadrático
en ambos lados, con h_x, h_y funciones.
.....

.....
$$h_x(x, y)t^2$$
$$h_y(x, y)t^2$$

.....



.....
Obtenemos los coeficientes calculando
el jacobiano.
.....

.....
$$\mathbf{A} := \partial(h_x(x, y), h_y(x, y)) / \partial(x, y)$$

.....

.....
Acomodamos los valores independientes
de h_x, h_y en \mathbf{w} .
.....

.....
$$\mathbf{w} = (c_x, c_y)$$

.....



.....
Escribimos el sistema
en forma matricial.
.....

.....
$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

.....

.....
Resolvemos el sistema multiplicando por la
inversa del lado izquierdo.
.....

.....
$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{w}$$

.....

.....
El resultado de esta ecuación serán los
coeficientes cuadráticos de P .
.....

.....
$$\mathbf{v} = (a_2, b_2)$$
$$P_x = x_* + a_1 t + a_2 t^2$$
$$P_y = y_* + b_1 t + b_2 t^2$$

.....



La manera de proceder con el cálculo de los coeficientes de orden cúbico es la misma que la de orden cuadrático. Una vez actualizados los valores se agrega un orden más a los polinomios P_x, P_y así como a los de $P_{x\lambda}, P_{y\lambda}$ en términos de las variables x, y se aplica el mapeo a los primeros y se escribe la ecuación 2.4. Con el jacobiano se extraen las constantes y se forma la matriz \mathbf{A} y con los términos independientes \mathbf{w} . Se resuelve el sistema mediante la inversa y se obtienen ahora los términos cúbicos. Notemos que

2. MÉTODO DE PARAMETRIZACIÓN

es sólo el primer término el que difiere en la forma del cálculo ya que en el primer paso se necesitan los valores y vectores propios. Salvo esos primeros términos los otros se pueden resumir en un sólo procedimiento. Es justo esto lo que permitió automatizar el método. Las sutilezas que surgen al resolver el sistema se toman en cuenta en el cálculo así como el error que se va acumulando en cada paso.

Esta serie de pasos se puede seguir hasta obtener polinomios del orden deseado, ~~dependiendo de la aproximación que se quiera hacer~~. Por lo mismo es necesario calcular el error cometido al evaluar \mathbf{P} para algún t . Tengamos en mente que los polinomios están calculados al rededor de punto fijo por lo cual nuestras aproximaciones son válidas ~~pero~~ sólo en una vecindad cercana. Como ya vimos el error se calcula mediante 1.18. Si tenemos a $\mathbf{P} = (P_x, P_y)$ entonces

.....
Aplicamos el mapeo a \mathbf{P} .	$\mathbf{S} := F_k(\mathbf{P})$
.....
Extraemos también los polinomios \mathbf{P}_λ .	$P_{x\lambda}, P_{y\lambda}$
.....
Usando la ecuación 1.18.	$\mathbf{E} = \mathbf{S} - \mathbf{P}_\lambda$
.....

Evaluaremos el error para un conjunto $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$. Usando este procedimiento se automatizó el método sin necesitar las ecuaciones de recurrencia, ya que mediante la manipulación algebraica de las series de Taylor se calcula fácilmente los nuevos términos de la parametrización. Lo que aparece a continuación es la forma en la que se resumió el método en funciones específicas.

Lo anterior esta resumido para que sea fácil entender el código. Muchas de las funciones fueron programadas para hacer el código más simple. Por otro lado el cálculo del error y de la convergencia estan aparte del método.

En las funciones anteriores se resume el núcleo del método de parametrización. En general el método se desarrolló para variedades inestables, ya que la misma dinámica de tal variedad permite llegar más lejos en la evaluación tanto de los coeficientes como del parámetro t garantizando una mejor aproximación. Sin embargo la manera en la que se calcula una variedad estable es en esencia la misma, por lo que escogiendo los vectores propios adecuados se puede hacer el mismo análisis para aproximar a la estable. Esta no será la forma más adecuada de hacerlo ya que la misma dinámica de la variedad provoca que quedarse en la estable sea más complicado numéricamente. La forma más adecuada será calcular la variedad estable mediante el mapeo inverso, ya que al ser inverso la variedad estable se convertirá en la inestable. Así que con el mismo análisis se puede calcular de dos maneras diferentes la variedad estable, cada una con diferente error. ~~La forma en la que se define el error es como menciona la ecuación 1.18.~~

.....
La función error toma los coeficientes	

Algorithm 1 Método automatizado

```

1: procedure PROCEDIMIENTO
Require: PuntoFijo, Mapeo, Orden
2:   Orden=1
3:   X:=[PuntoFijo[1]], Y:=[PuntoFijo[2]], Z:=[ $\lambda^0$ ]
4:   t:=CreaPolinomio(Punto fijo ,1)
5:   F := Mapeo(t+ Taylor1[x,y])
6:   J := Jacobiano(F)
7:    $\lambda, v := \text{eigen}(J)$ 
8:   if  $\text{imag}(\lambda) \neq 0$  then
9:     Error
10:  else continue
11:  end if
12:  agrega(v[1],X), agrega(v[2],Y), agrega( $\lambda^1$ ,Z)
13:  P=Taylor1(X,Y)
14:  g=Taylor1(X · Z, Y · Z)
15:  for i=[1,Orden] do
16:    t=CreaPolinomio(X,Y,i)
17:    F = Mapeo(t)
18:    J = Jacobiano(F)
19:    I = Independientes(F)
20:    if I = (0, 0) then
21:      v=(0.,0.)
22:    else v =  $J^{-1}I$ 
23:    end if
24:    agrega(v[1],X), agrega(v[2],Y), agrega( $\lambda^1$ ,Z)
25:  end for
26:   $P_f = \text{Taylor1}(X,Y)$ 
27:   $g_f = \text{Taylor1}(Z,Z)$  return  $P_f, g_f$ 
28: end procedure

```

2. MÉTODO DE PARAMETRIZACIÓN

resultantes de *Variedades* y los convierte en polinomios de orden n , los cuales son restados como en 1.18 después de evaluar en un intervalo para t .

.....

$$Error(parametros) = [t, E]$$

.....

Algorithm 2 Error

1: **procedure** PROCEDIMIENTO

Require: PolinomioF,g,Mapeo,Tiempo

2: $A=[], B=[]$

3: $CohomoL := Mapeo(PolinomioF)$

4: $CohomoR := g$

5: $E := CohomoL - CohomoR$

6: **for** $t=[0, Tiempo]$ **do**

7: $VecE := E(t)$

8: $Error := \| VecE \|_{\infty}$

9: agrega(Error,A),agrega(t,B)

10: **end for** **return** B,A

11: **end procedure**

Para el método de convergencia de Hadamard sólo era necesario extraer los coeficientes de cada polinomio y evaluar el cociente, como son polinomios finitos lo importante es observar la tendencia de los cocientes conforme avanza el orden del polinomio.



Con esto se completa la automatización del método, el código junto con la documentación de cómo usar el programa se encuentran [en la siguiente liga](#).

Ejemplos de aplicación del método

3.1. Mapeo Estándar

En el capítulo anterior ya mostramos cómo se aplica el método de manera algebraica para el caso de este mapeo. Utilizando el método ya programado se hicieron diferentes cálculos para comparar con los resultados presentados en (8). Una de las razones de estudiar el mapeo estándar, además de usarlo como una forma de validación, es porque del mapeo conocemos muchas cosas. Por otro lado queremos mostrar lo importante que es tener una parametrización analítica. Aunque el estudio cualitativo del mapeo puede darnos información útil, tener una parametrización de las variedades relacionadas a sus puntos fijos convierte el análisis en algo cuantitativo y semi-analítico. El objetivo de esta sección es mostrar algunas de las cosas que son posibles de alcanzar en términos de este análisis, además de la forma en la que se usa el método desde Julia.

En el mapeo estándar 2.1 uno de los puntos fijos es el origen de coordenadas $x_1 = (0, 0)$. Utilizando el método programado se calcularon las variedades estables e inestables para diferentes valores del parámetro en el mapeo. El objetivo de hacer estas fue reproducir los resultados de J.D. Mireles que presenta en sus notas. En tales notas no aparece el orden del polinomio ni el error específico, sin embargo se intentó reproducir al menos gráficamente los resultados. Dependiendo del orden del polinomio que se calcule y del parámetro del mapeo se podrá llegar más lejos del punto fijo. El orden para las dos variedades asociadas a un punto no necesariamente debe ser el mismo aún cuando el parámetro sí lo sea.



3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

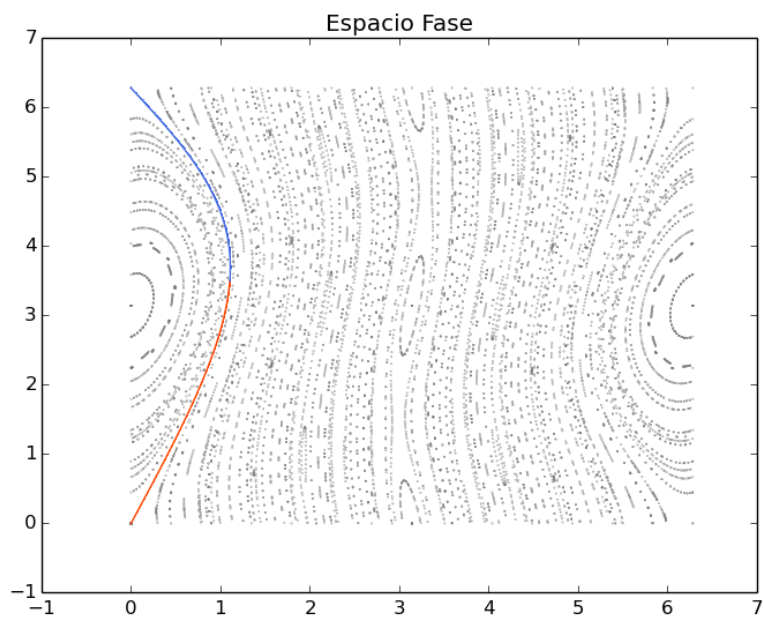


Figura 3.1: W^s, W^u de orden 25 en el mapeo estándar con $k = 0.3$

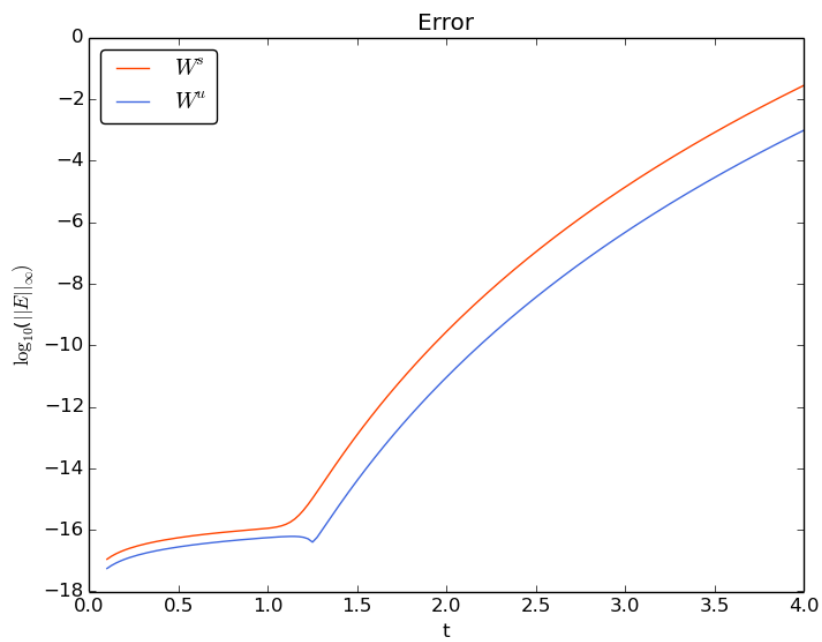


Figura 3.2: Error en las variedades de orden 25 , $k = 0.3$

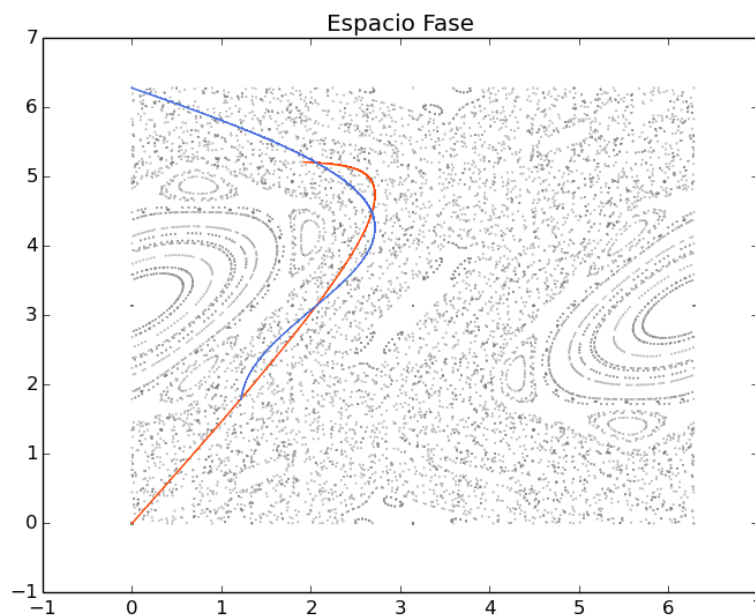


Figura 3.3: W^s, W^u de orden 80 en el mapeo estándar con $k = 1.5$

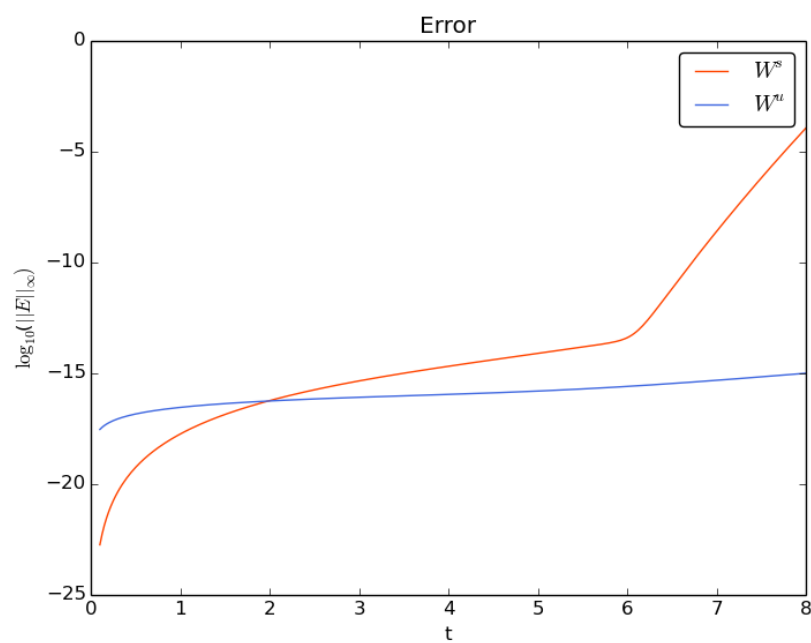


Figura 3.4: Error en las variedades de orden 80 , $k = 1.5$

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

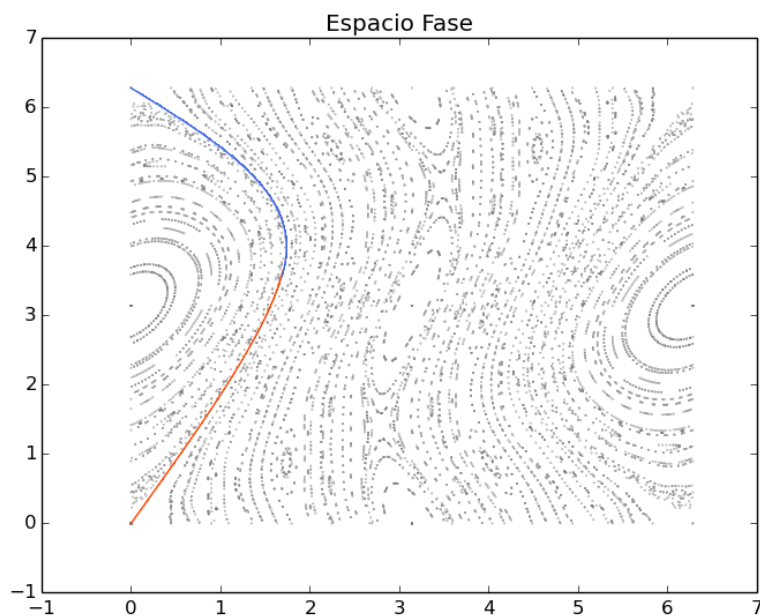


Figura 3.5: W^s, W^u de orden 70 en el mapeo estándar con $k = 0.7$

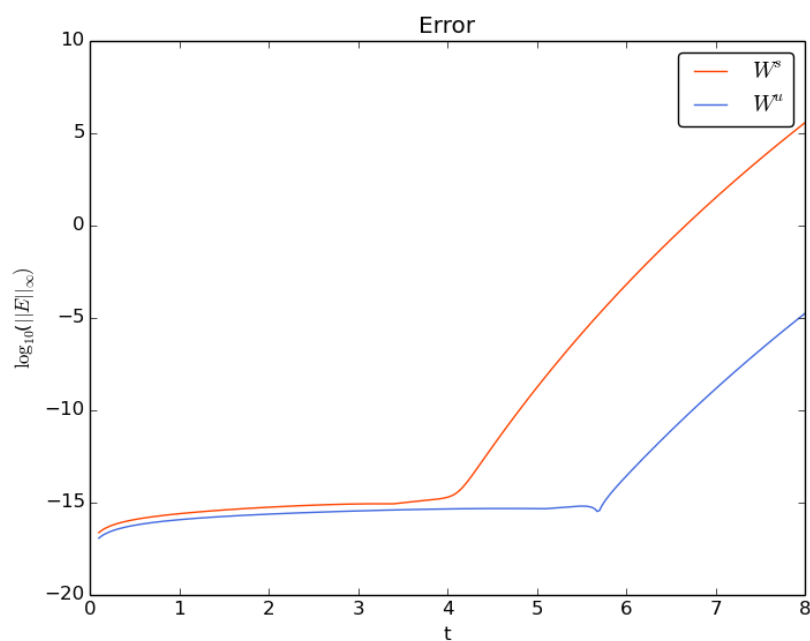


Figura 3.6: Error en las variedades , $k = 0.7$



Todos los casos anteriores fueron calculados usando la ecuación 2.1 y números tipo

Float64.

En la figura 3.7 se muestra el error en las parametrizaciones de acuerdo a la ecuación 1.18 en términos del valor del parámetro t . Podemos observar que mientras más grande sea el orden del polinomio mejor es la aproximación, pues podemos llegar a valores del parámetro más grandes con un error casi constante.

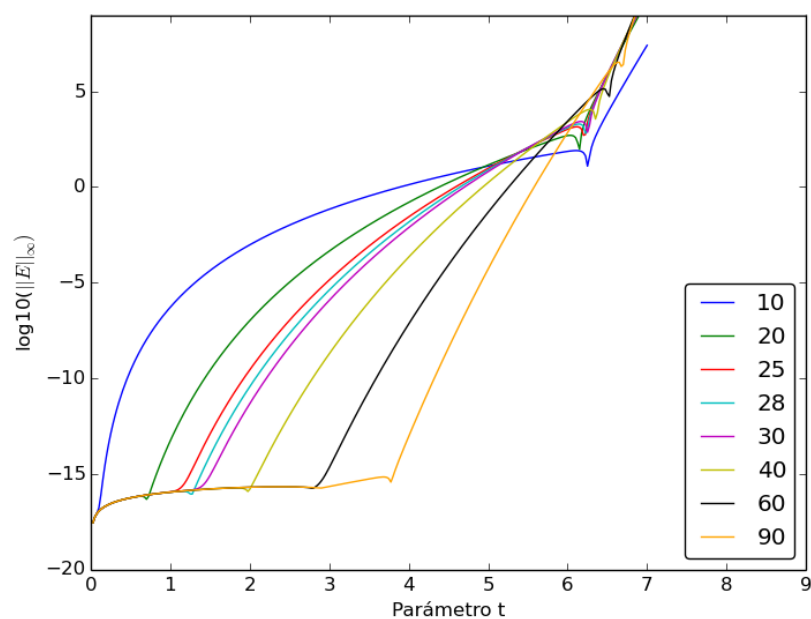


Figura 3.7: Curvas de error para diferentes órdenes en el mapeo estándar, $k = 0.3$

Se quiso explotar el método y tener un menor error usando números de precisión extendida para calcular las mismas variedades que en la gráfica pasada. Como podemos observar para los valores del parámetro cercanos al punto fijo el error es prácticamente imperceptible, sin embargo crece más rápido que en el caso anterior.

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

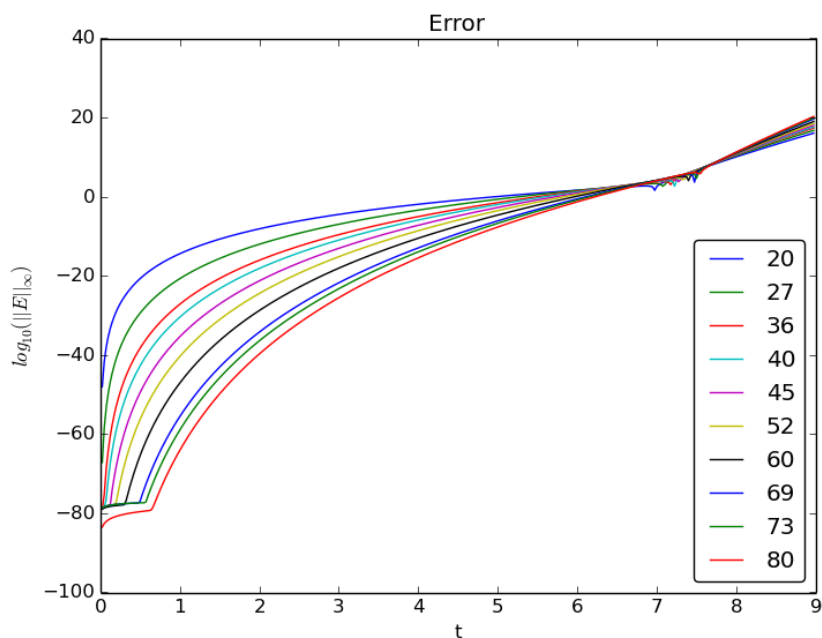


Figura 3.8: Curvas de error para diferentes órdenes usando precisión extendida , $k = 0.3$

Una de las formas de aprovechar el método es calculando la variedad estable con el mapeo inverso. Es decir dado que en el mapeo inverso la variedad estable pasará a ser la inestable entonces tenemos que la dinámica misma del mapeo nos ayudará a tener una mejor parametrización. En el caso del mapeo estándar hicimos una comparación calculando la variedad estable mediante el mapeo inverso y el mapeo normal. Los polinomios fueron del mismo orden y se encontró que el error en la parametrización con el mapeo inverso es de hecho mejor.

$$f_k^{-1}(\theta, p) = \begin{bmatrix} \theta - k \sin(p - \theta) \\ p - \theta \end{bmatrix} \text{mod}(2\pi) \quad (3.1)$$

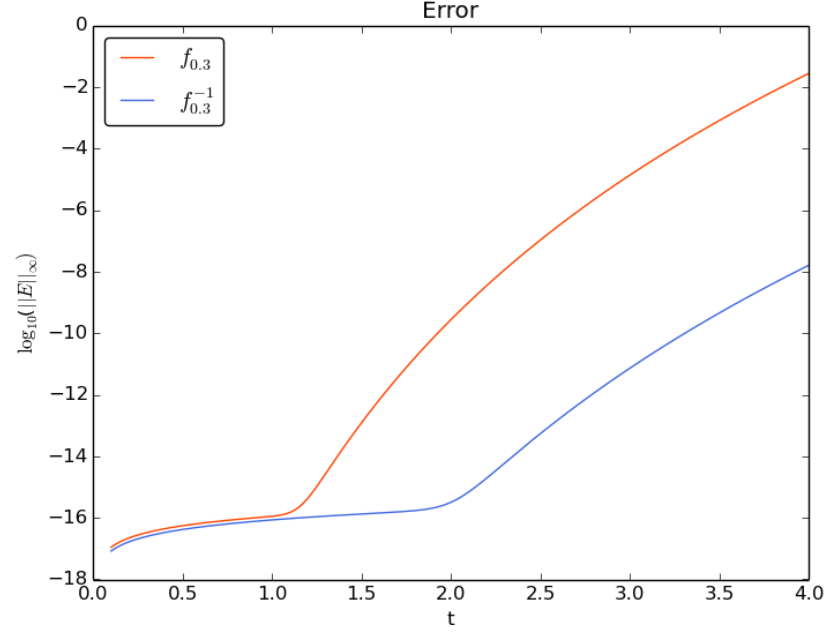


Figura 3.9: Error para las parametrizaciones usando el mapeo y el mapeo inverso , $k = 0.3$, $orden = 20$



Siendo que el resultado son polinomios se puede aplicar el método de Newton en dos dimensiones o cualquier otro para resolver $P^u = P^s$. Por suerte existe un paquete en Julia que hace aritmética de intervalos **ValidatedNumerics** ?? , dentro de este se encuentra el paquete que calcula raíces de funciones en términos de intervalos. En forma simple si $[a, b], [c, d]$ son intervalos en \mathbb{R} entonces es posible definir las operaciones básicas, por ejemplo la suma +

$$[a, b] + [c, d] = [a + b, c + d] \quad (3.2)$$

resulta bastante simple e intuitiva; la definición de otras operaciones puede verse en ???. La finalidad en nuestro caso de usar intervalos $[a, b]$ en lugar de un valor x es que al encontrar un intervalo podemos afirmar que **en tal** se encuentra la raíz, sin embargo al calcular la raíz como un valor debemos tomar en cuenta que puede que ese valor no sea el exacto. Es decir debido a procesos de redondeo, así como de errores en la interpretación de un número real de manera computacional puede que nuestro valor de la raíz calculado de manera convencional no sea el valor correcto. Sin embargo al hacer aritmética de intervalos no encontramos la raíz en sí , encontramos un intervalo en donde podemos garantizar que se encuentra la raíz verdadera. Los métodos usados para calcular raíces con intervalos se valen de la generalización del método de Newton.

Para nuestro caso resulta que el programa arroja dos polinomios asociados a cada variedad, si definimos

$$P := P^u(t) - P^s(t') = 0 \quad (3.3)$$



3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

podemos encontrar las intersecciones en un intervalo de 2 dimensiones que será $[a, b] \times [c, d]$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Usando esto en el mapeo estándar con una tolerancia de 10^{-5} se encontraron la siguientes intersecciones para un caso específico.

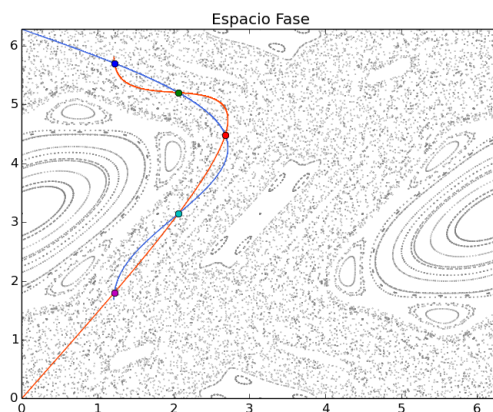


Figura 3.10: Cruces de W^u, W^s para el mapeo estándar con $k = 1.5$

En la sección siguiente ahondaremos más en este tipo de cálculos.

3.2. Mapeo de Hénon

~~Vamos a analizar un poco sobre otro mapeo, el de Hénon.~~ El mapeo de Hénon es un mapeo descrito de la forma:

$$f_{a,b}(x, y) = \begin{pmatrix} a - by - x^2 \\ x \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Para poder analizarlo debemos linearizar el sistema. Primero obtenemos el jacobiano

$$DF_{a,b}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$DF_{a,b}(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notamos que el determinante del jacobiano no es igual a uno sino $\det(DF_{a,b}(x, y)) = b$. El determinante es constante, entonces será hamiltoniano en el caso en que $b = 1$.

Analizaremos esos casos, primero encontrando los puntos fijos.

$$f_{a,b}(x, y) = \begin{pmatrix} a - by - x^2 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Lo que implica que $a - by - x^2 = x$ y $x = y$ de donde es claro que la primer ecuación queda

$$x^2 + (b + 1)x - a = 0$$

que se puede resolver usando la fórmula general

$$x = \frac{-(b + 1) \pm ((b + 1)^2 + 4a)^{1/2}}{2}$$

para el caso en que $b = 1$ se tiene

$$x = \frac{-2 \pm 2(1 + a)^{1/2}}{2} \quad (3.6)$$

Por lo que escogiendo un valor de a podemos obtener un punto fijo. El escoger $b = 1$ nos garantiza que estamos en un sistema hamiltoniano, sin embargo no para cualquier valor del parámetro restante resultará en sistema con un punto hiperbólico. En muchos de los casos el punto será elíptico. Para calcular las variedades es necesario asegurarnos de que en efecto nos encontramos en un punto hiperbólico, aún así si por error queremos calcular las variedades para un punto fijo elíptico el programa nos arrojará un error.

Las siguiente figura presenta un ejemplo en cálculos de variedades para el mapeo de Hénon, junto con el error.

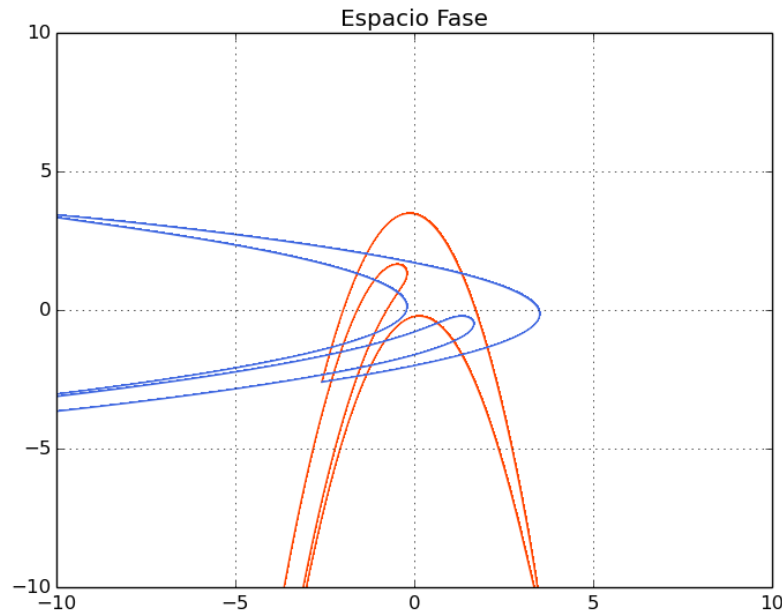


Figura 3.11: W^u, W^s para el mapeo de Hénon con $a=1.5, b=1$.

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

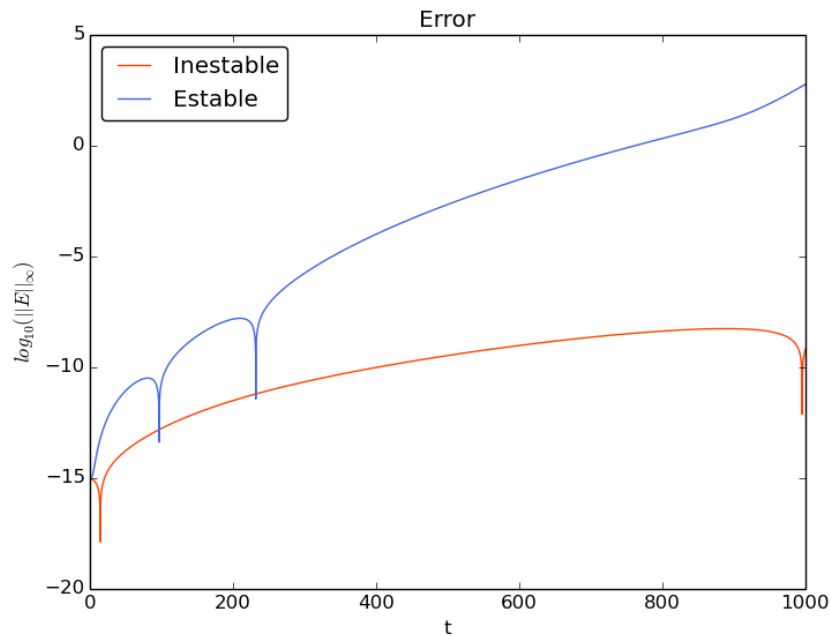


Figura 3.12: Error en el mapeo de Hénon con $a=1.5, b=1$.

A diferencia del mapeo estándar este mapeo no está **normalizado**, lo cual representa un mayor reto en cuanto a la parametrización ya que el polinomio debe ser tal que pueda regresar varias veces. De hecho podemos observar que se necesitan valores realmente grandes, comparados con los del mapeo exponencial, para llegar a observar algunos **comportamientos interesantes**. Por esta situación el error es más grande que el estándar.

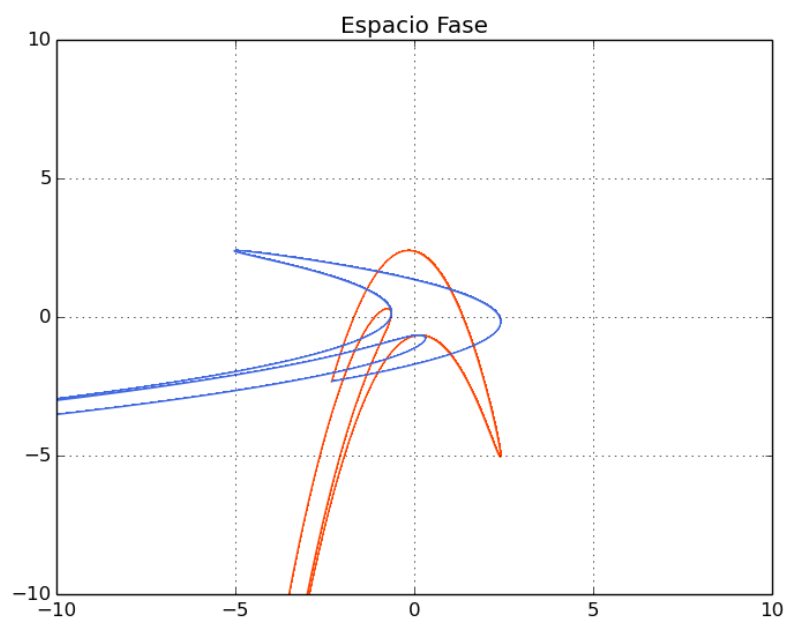


Figura 3.13: W^u, W^s para el mapeo de Hénon con $a=0.7, b=1$.

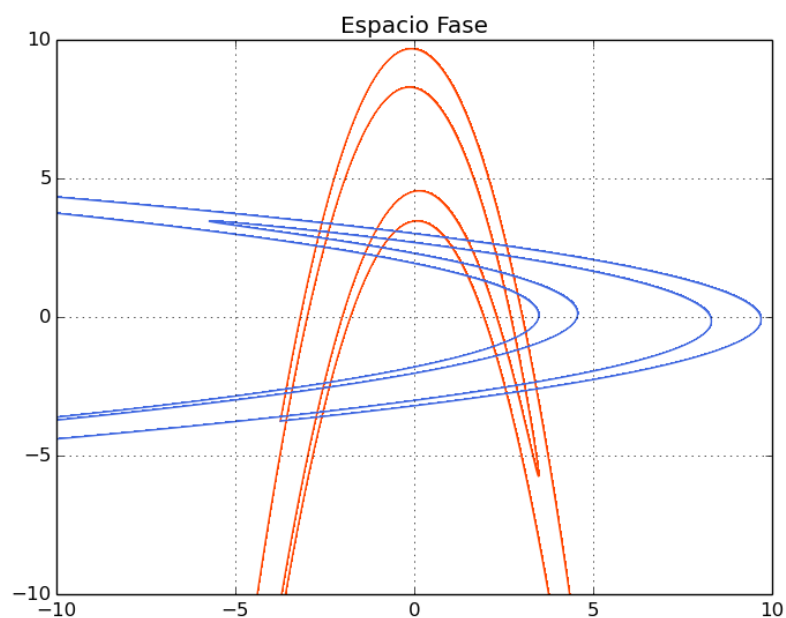


Figura 3.14: W^u, W^s para el mapeo de Hénon con $a=6.5, b=1$.

Otra de las cosas interesantes sobre la obtención de las parametrizaciones de las variedades es que con el orden suficiente es posible observar el cruce de ambas varie-

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

dades. Como mencionamos en el mapeo estándar usando el paquete de aritmética de intervalos se pueden calcular las intersecciones de las variedades estable e inestable. En este caso para el mapeo de Hénon, donde el parámetro $a = 1.5$ con un polinomio de orden 45, se usó el método con una tolerancia de 10^{-6} además de usar el mapeo inverso 3.7, para calcular la variedad estable.

$$f_{a,b}^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ (x + y^2 - a) / -b \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Lo que resultó de resolver 3.3 fueron los siguientes intervalos:

- a) Root($[-1.36597, -1.36596] \times [166.749, 166.75]$, :unique)
- b) Root($[-5.26555, -5.26554] \times [129.577, 129.578]$, :unique)
- c) Root($[-6.77613, -6.77612] \times [33.6142, 33.6143]$, :unique)
- d) Root($[-5.54438e - 07, 0] \times [0, 5.54438e - 07]$, :unknown)
- e) Root($[-26.1208, -26.1207] \times [26.1207, 26.1208]$, :unique)
- f) Root($[-33.6143, -33.6142] \times [6.77612, 6.77613]$, :unique)
- g) Root($[-129.578, -129.577] \times [5.26554, 5.26555]$, :unique)
- h) Root($[-166.75, -166.749] \times [1.36596, 1.36597]$ 4, :unique)

La leyenda **unique** concluye que hay una raíz en el intervalo y es única, mientras que **unknown** nos dice que no puede concluir si hay una o más. Si notamos el tercer intervalo contiene al cero $(t, t') = (0, 0)$ en el cual se cortan las variedades pues representa el punto fijo. Para los intervalos encontrados se hizo una gráfica que representa el intervalo donde se encuentra el cruce.

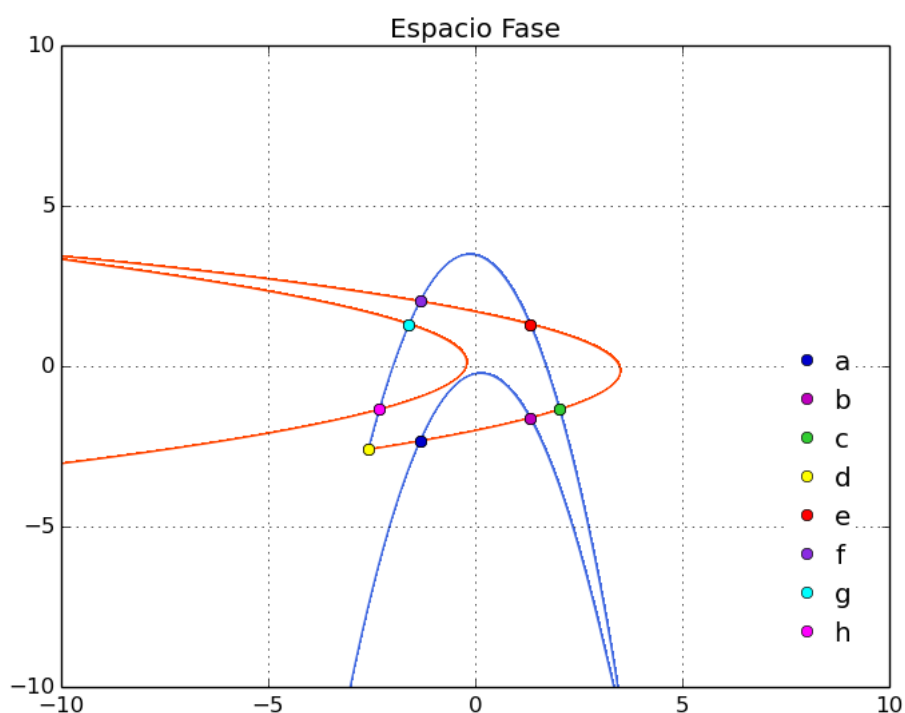


Figura 3.15: Cruces de W^u, W^s encontrados en el intervalo $[-400., 0.] \times [0., 400.]$



Donde cada punto indica un cruce encontrado, el punto de color es sólo para indicar cuáles fueron encontradas. En cuanto a el intervalo real en donde se encontró la intersección podemos encontrar las siguientes gráficas.



3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

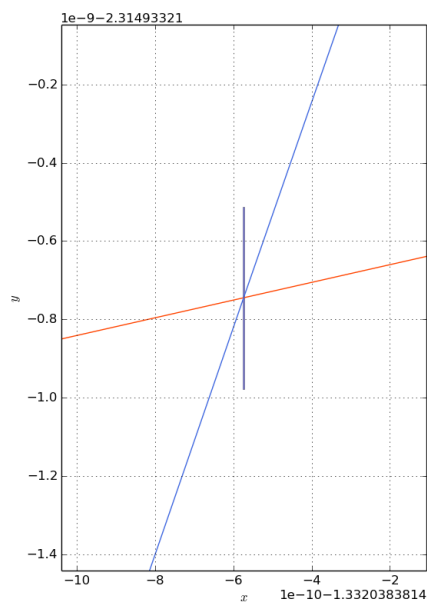


Figura 3.16: Cruce de W^u, W^s encontrado con el intervalo a

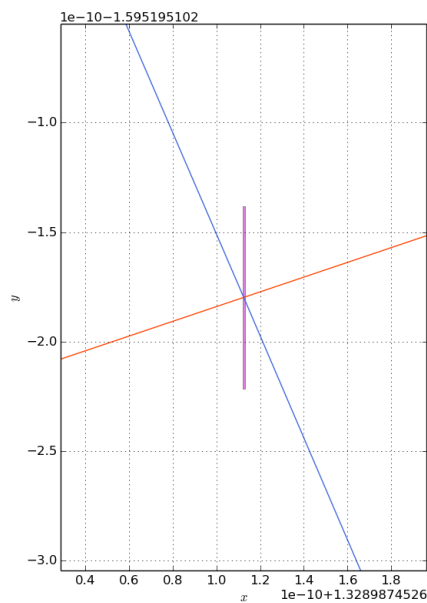


Figura 3.17: Cruce de W^u, W^s encontrado con el intervalo b

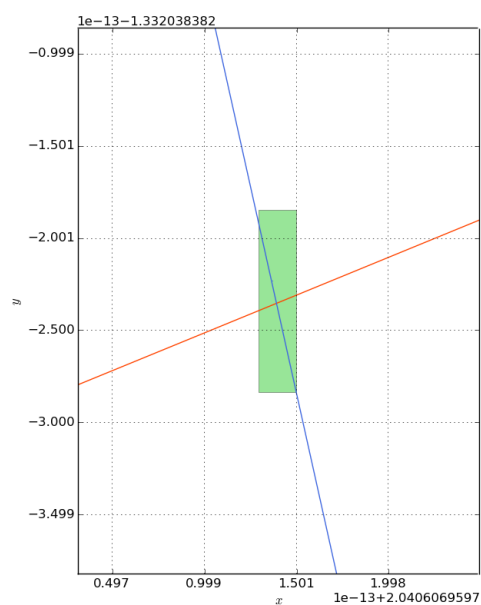


Figura 3.18: Cruce de W^u, W^s encontrado con el intervalo c

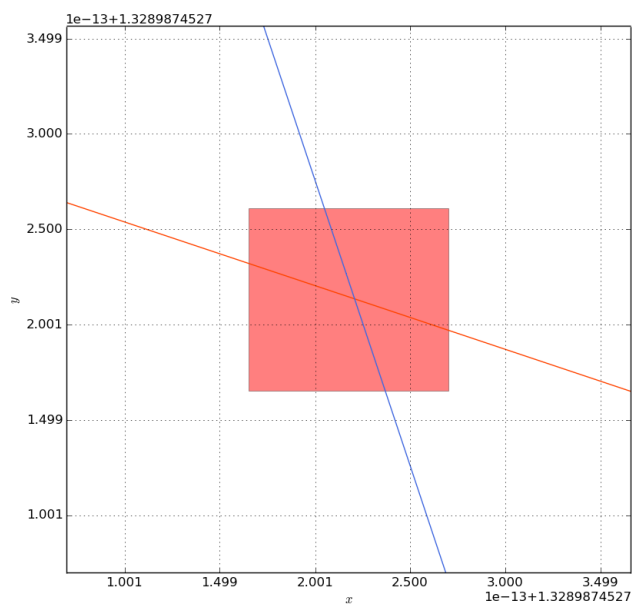


Figura 3.19: Cruce de W^u, W^s encontrado con el intervalo e

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

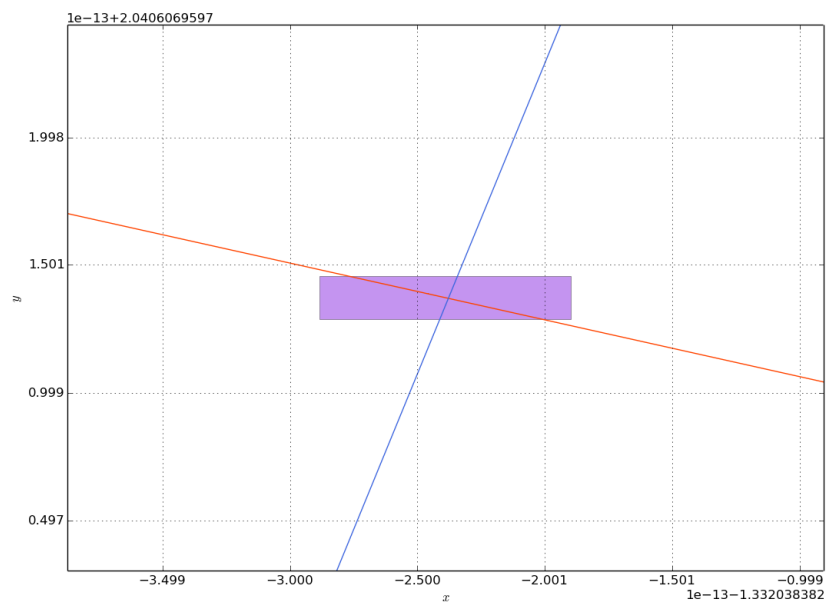


Figura 3.20: Cruce de W^u, W^s encontrado con el intervalo f

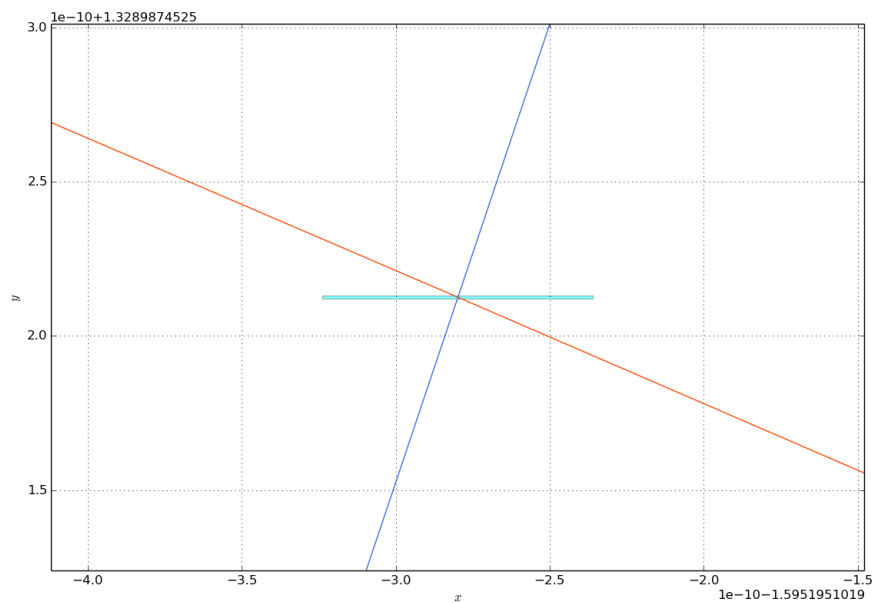


Figura 3.21: Cruce de W^u, W^s encontrado con el intervalo g

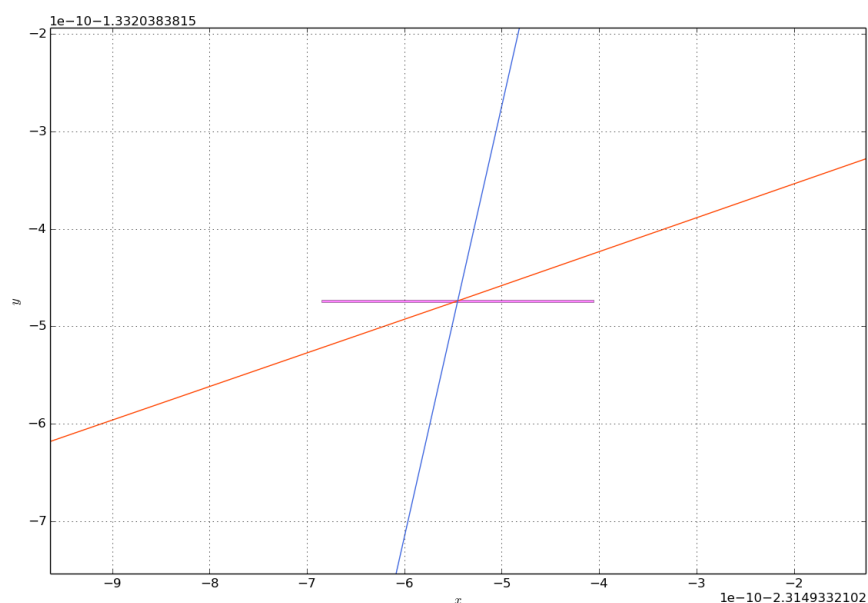


Figura 3.22: Cruce de W^u, W^s encontrado con el intervalo h

La zona rectangular sombreada en cada gráfica representa el **producto cruz** de los intervalos donde se encuentra la solución. Podemos observar que de hecho cada zona contiene el cruce de las variedades. **Garantizando** así que en el intervalo propuesto hay un cruce de variedades. Este tipo de resultados son útiles para hablar sobre caos. Hay que aclarar que los intervalos en los que se encuentra la intersección son intervalos en términos de los parámetros, no de las coordenadas del espacio fase, sin embargo conociendo cómo se mapean los intervalos en cada variedad podemos definir un nuevo intervalo en el espacio fase.

Para complementar todo este análisis se puede obtener una gráfica de las superficies que forman las variedades al cambiar el parámetro del mapeo lo que nos da una idea de como se ven las superficies y además de como se comportan las intersecciones. Las gráficas correspondientes a esto se encuentran en el sitio **LIGA**.

3.3. Mapeo exponencial

El último mapeo que se estudió fue uno presentado en el artículo (3) el cual se ve como

$$j_a(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ y + af(x + y) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

que describe el movimiento de una partícula pateada, donde la coordenada x representa la posición en una dimensión mientras que la coordenada y es el momento, a es un parámetro libre. La función f es la responsable de describir la fuerza aplicada, para la cual se escoge

$$f(x) = x(x - 1)e^{-x}$$

En este sistema los puntos fijos encontrados son $x_0 = (1, 0)$, $x_1 = (0, 0)$ donde x_0 es un punto fijo hiperbólico. El punto x_1 es un punto elíptico mientras el valor del parámetro sea menor a 4, para valores de $a \geq 4$ se torna hiperbólico. Por lo que es posible examinar las variedades asociadas al punto fijo x_0 . Aplicando el mismo mecanismo que en los casos pasados encontramos las siguientes gráficas que muestran cómo se comportan las variedades aún en el caso de que el sistema no sea completamente hiperbólico.

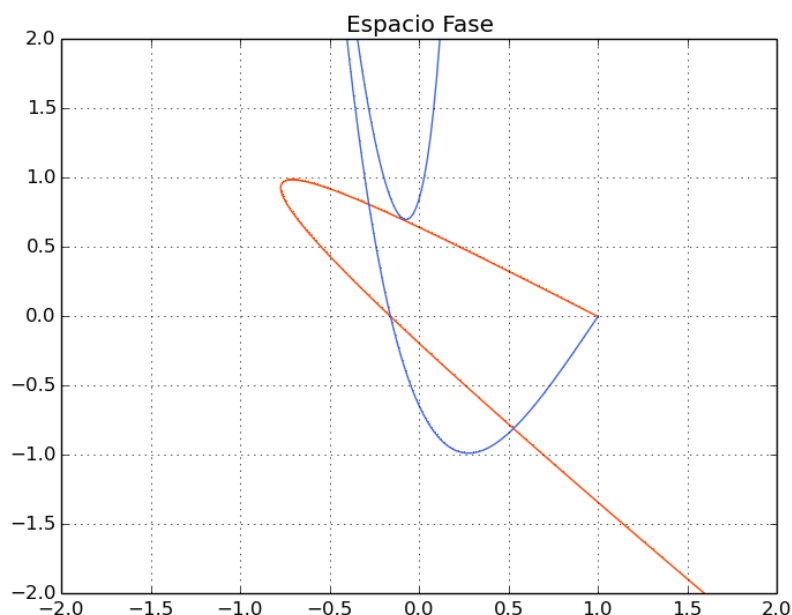


Figura 3.23: Variedades para el mapeo exponencial con $a = 3.4$

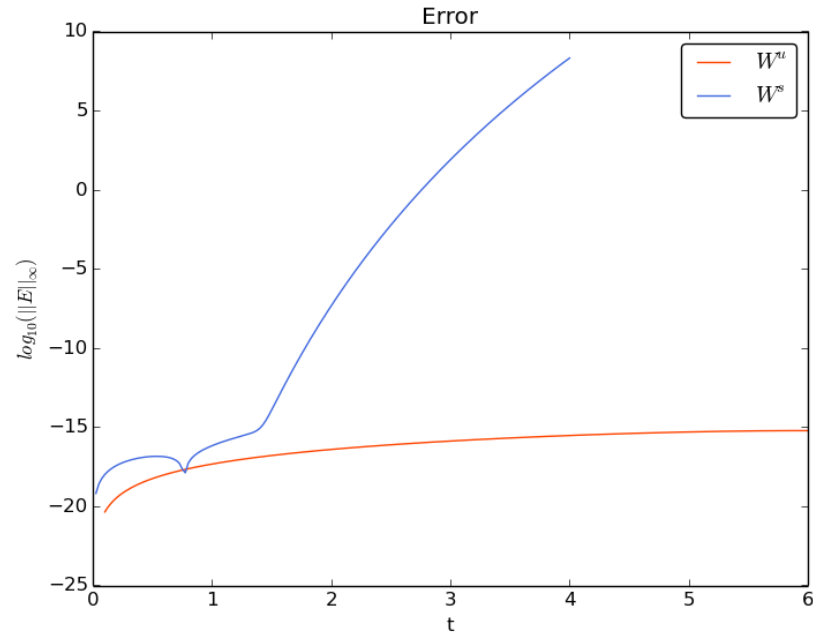


Figura 3.24: Error asociado a W^s, W^u con $a = 3.4$

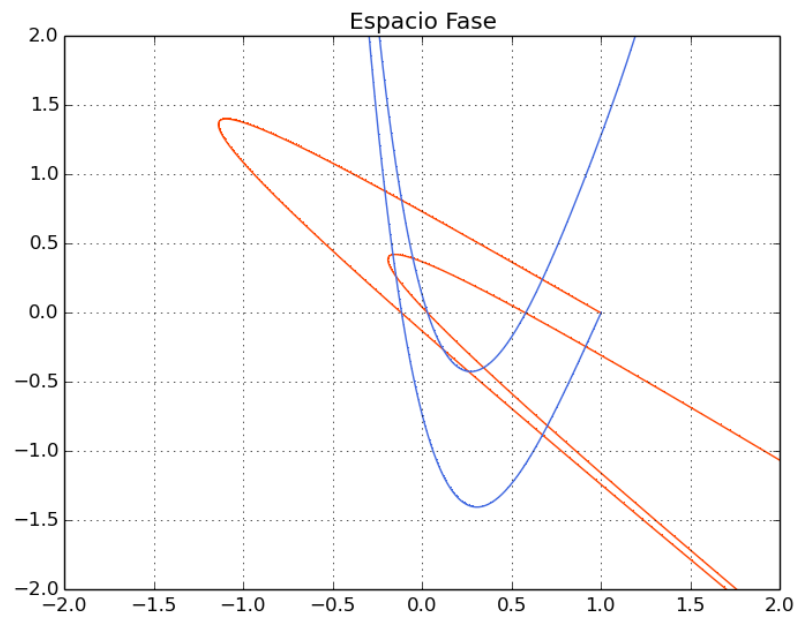


Figura 3.25: Variedades para el mapeo exponencial con $a = 5.7$ en el punto fijo x_0

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

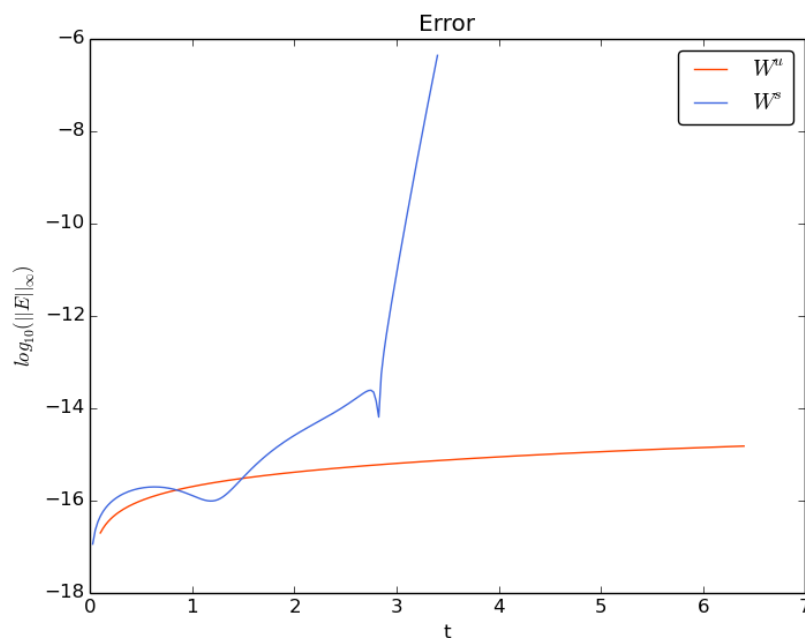


Figura 3.26: Error asociado a W^s, W^u con $a = 5.7$ en x_0

Otra forma que encontramos para analizar que tan fiables son las parametrizaciones, es mediante la convergencia de los coeficientes del polinomio. Pues en casos como el mapeo exponencial en el que las variedades se acercan a puntos fijos que pueden ser de diferente naturaleza puede ocurrir que tal cercanía afecte la forma de parametrización. Para ello se implementaron dos formas de revisar la convergencia, la de Hadamard y la de tres términos. Las siguientes figuras muestran de manera gráfica la convergencia en el caso de los polinomios para x .

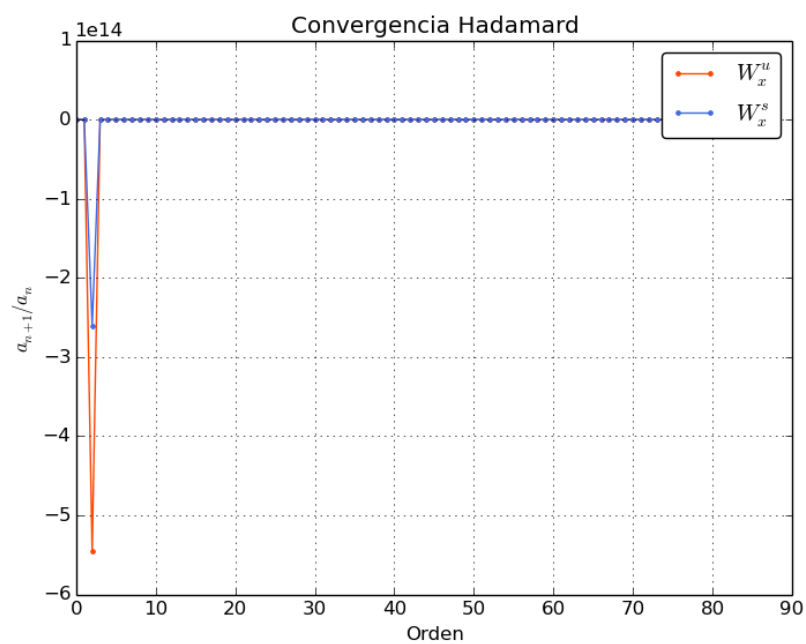


Figura 3.27: Convergencia de Hadamard asociada a los polinomios para x en las variedades del mapeo de Jung para $a = 5.7$

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

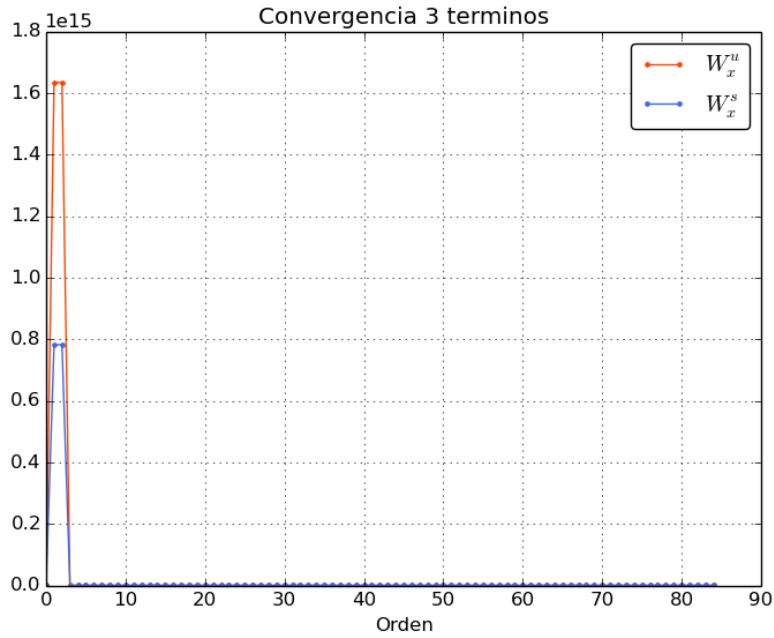


Figura 3.28: Convergencia de tres términos asociada a los polinomios para x en las variedades del mapeo de Jung para $a = 5.7$

Además se analizaron los cruces en las variedades, usando como en los casos anteriores el mapeo inverso 3.9. Este mapeo representa un mayor reto en cuanto al orden del polinomio, la presencia de la exponencial hace que la parametrización sea sensible al orden del polinomio. Para el siguiente ejemplo se **necesitó** un polinomio de orden 86, en el cual se podía observar un comportamiento interesante, y se calcularon los cruces de las variedades como en los otros casos.

$$j_a^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} x - y + ax(x-1)e^{-x} \\ y - ax(x-1)e^{-x} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

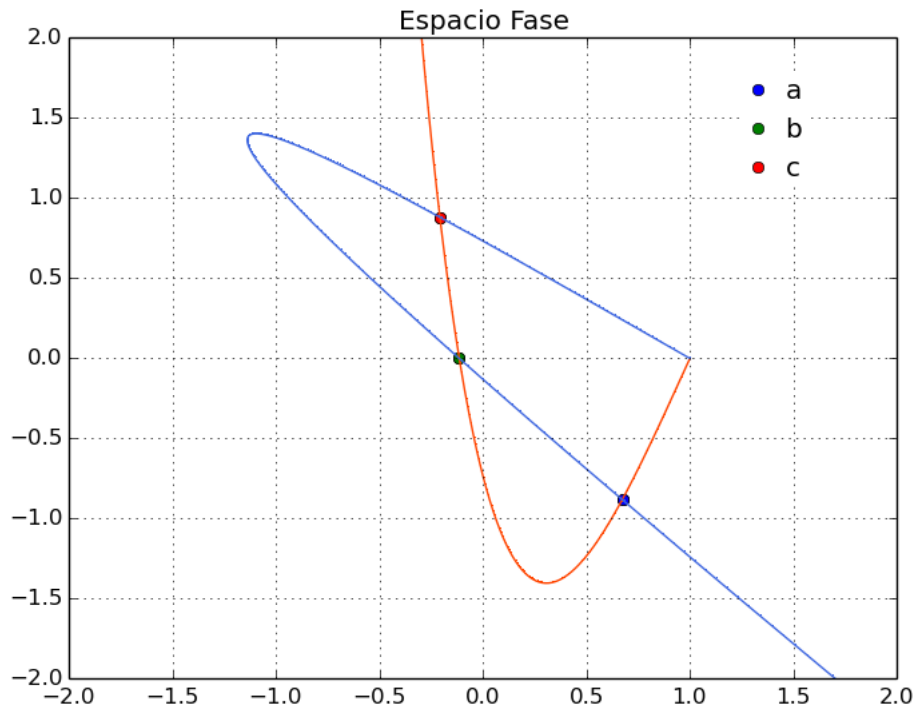


Figura 3.29: Intersecciones en el mapeo exponencial con $a = 5.7$

- a) $\text{Root}([-0.985068, -0.985067] \times [5.99488, 5.99489], : \text{unique})$
- b) $\text{Root}([-3.46215, -3.46214] \times [5.49229, 5.4923], : \text{unique})$
- c) $\text{Root}([-3.77896, -3.77895] \times [1.56269, 1.5627], : \text{unique})$

Tomando los cruces a escala del intervalo resultan las siguientes gráficas.

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

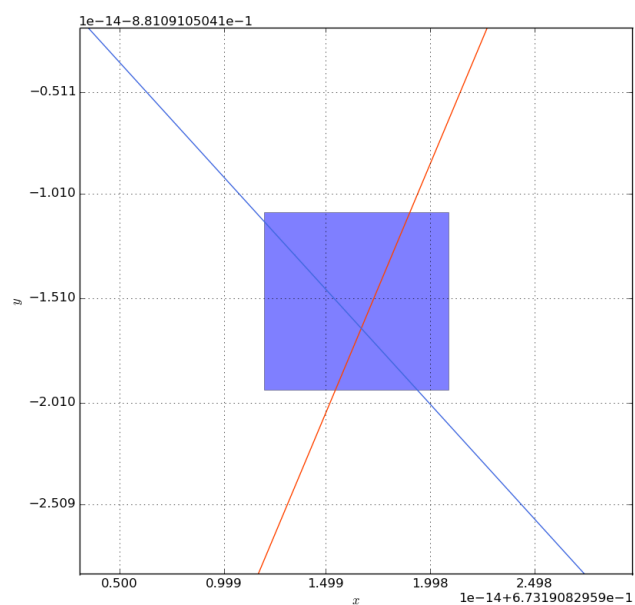


Figura 3.30: Intersección en el intervalo a

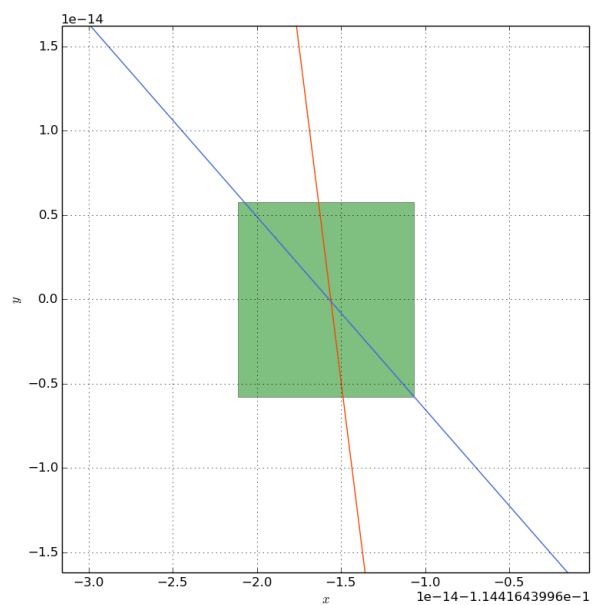


Figura 3.31: Intersección en el intervalo b

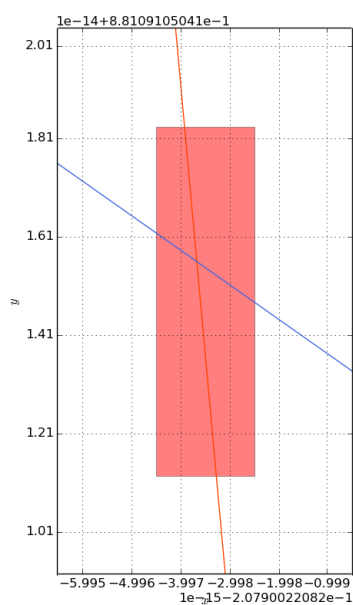


Figura 3.32: Intersección en el intervalo c



Panorama

Una característica importante a estudiar en los mapeos en general son las variedades estables e inestables asociadas a puntos fijos. En el caso de los mapeos de dos dimensiones resulta manejable, hasta cierto punto, encontrarlas de manera analítica usando el método de parametrización. Como vimos el método tiene como núcleo de desarrollo la ecuación de invariancia y la linearización del sistema **al rededor** de un punto fijo. Sin embargo decir manejable en términos matemáticos y físicos no resulta suficiente si lo que necesitamos es estudiar propiedades de los sistemas a partir de las variedades o el comportamiento de puntos fijos. Por ello es que la implementación del método resultaba llamativa. Tener un módulo escrito en software libre que calcula las variedades asociadas a puntos fijos hiperbólicos va más allá de generar las relaciones de recurrencia en casos particulares. El método automatizado es capaz de generar las parametrizaciones de las variedades **al rededor** de un punto fijo conocido, en cualquier mapeo de dos dimensiones que sea simpléctico. La idea detrás de la automatización se basa en que la computadora haga las veces de la recurrencia en lugar de calcularlas de manera analítica. Esto de ninguna manera modifica el modo del método. Todo esto da como resultado un método semianalítico con el cual tenemos las variedades de manera **polinómica**.

Dado que es un método parte analítico y parte computacional que involucra series de Taylor es crucial decir de alguna manera **que** tan confiable es la parametrización que resulta. Por ello se incluyeron tres formas de evaluar el comportamiento de las variedades, tales involucran **al error y la convergencia** mediante dos métodos. Conocer que tanto podemos afirmar sobre el comportamiento de las variedades depende de estas tres funciones.

Como pudimos notar en el capítulo anterior en los tres ejemplos que se presentan observamos comportamientos muy variados. En el mapeo estándar se buscaba mostrar un ejemplo bastante conocido, en el de **henón** mostrar el cruce de variedades mientras que en el exponencial que tantos cruces (o tentáculos) se pueden observar. Puede pasar que para otros mapeos se busque estudiar un comportamiento particular de las varia-

4. PANORAMA

des. Por ello consideramos que el método se puede explotar en varias direcciones que se adapten a cada mapeo en particular. En el caso por ejemplo de observar la dependencia de los tentáculos de las variedades con respecto a los parámetros del mapeo tendrá que ver con qué tan grande podemos hacer el orden del polinomio y qué tan lejos llegamos con un error relativamente pequeño. Además como mostramos hay formas de mejorar la parametrización usando el mapeo inverso.

En el mapeo de Hénon mostramos que es posible calcular las intersecciones de las variedades. Tal resultado nos muestra una ventana hacia la *demonstración* de que hay un corte entre ambas y con ello a resultados más importantes y áreas más amplias como el estudio de bifurcaciones y caos. Esta idea resulta de que al conocer las variedades de manera analítica podemos buscar el cero de las funciones correctas para encontrar un cruce. Aún si no se conoce si en el sistema las variedades se cruzan en uno o más puntos, con el orden suficiente se podría asegurar. Para ello habrá que trabajar de manera analítica primero con las parametrizaciones y asociar un error al cálculo de la intersección .

En el proceso de este trabajo surgió una duda que se formuló en principio como sigue :¿es posible seleccionar una dirección preferente en la parametrización?. Es decir, es claro que en términos del vector propio hay una dirección en la que se desarrolla la variedad, en algunos casos resulta que la variedad puede pasar cerca de algún otro punto fijo del sistema, ¿cómo seleccionar una dirección preferente para el desarrollo del polinomio?. Resulta que los polinomios de Taylor no tienen una dirección preferencial , mientras que los polinomios de Chebyshev sí. En términos burdos uno puede usar polinomios diferentes que tengan preferencias topológicas con respecto a los de Taylor. Eso puede ayudar a que la parametrización se encamine a la dirección necesaria desde un inicio. Se piensa que el método de parametrización se puede desarrollar usando tales polinomios en lugar de usar Taylor. Sería una manera de parametrizar más enfocada. Todos los comentarios anteriores intentan mostrar que hay aún preguntas sin responder ~~del todo~~ y sobre todo curiosidad por hacer más con el método de parametrización tanto de manera computacional como de manera analítica. Sin duda puede que dentro del estudio de variedades en mapeos de dos dimensiones haya muchas más cosas que se estén estudiando con diferentes y variados propósitos.

Bibliografía

- [1] ARNOL'D, V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd ed., vol. 1 of *Analytic Mechanics*. Springer-Verlag, 1992.
- [2] B. RÜCKERL, C. J. Hierarchical structure in the chaotic scattering off a magnetic dipole. *J. Phys A: Math.* 27 (1994), 6741–6758.
- [3] B. RÜCKERL, C. J. Scaling properties of a scattering system with an incomplete horseshoe. *J. Phys A: Math.* 27 (1994), 55–77.
- [4] C. JUNG, C. LIPP, T. S. The inverse scattering problem for chaotic hamiltonian systems. *Annals of Physics* 275 (1999), 151–189.
- [5] DEVANEY, R. L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2nd ed. Adyson-Wesley, 1989.
- [6] HALE, J. K. *Ordinary Differential Equations*. Krieger Pub Co, 1980.
- [7] HERBERT GOLDSTEIN, CHARLES P. POOLE, J. L. S. *Classical mechanics*, 3 ed. Addison-Wesley, 2000.
- [8] JAMES, J. M. Elementary example of the parametrization method; stable and unstable manifolds of the standar map. 2007.
- [9] JAN BOUWE VAN DEN BERG, J.D. MIRELES JAMES, C. R. Computing (un)stable manifolds with validated error bounds: non-resonant and resonant spectra. 2015.
- [10] KENNETH R. MEYER, GLEN R. HALL, D. O. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Poble*, 2nd ed., vol. 90 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 2009.
- [11] LUIS BENET, D. P. S. Interval arithmetic(paquete ijulia).
- [12] MEISS, J. D. *Differential Dynamical Systems*, 1 ed., vol. 14 of *Mathematical modeling and computation*. Society for Industrial and Applied Mathematics ,Philadelphia, 2007.

BIBLIOGRAFÍA

- [13] OTT, E. *Chaos in dynamical systems*, 1th ed. Cambridge university press, 1993.
- [14] PAUL BANCHARD, ROBERT L. DEVANEY, G. R. H. *Ecuaciones diferenciales*, 1th ed. Thomson, 1998.
- [15] RAMON E. MORE, R.BAKER KEARFOTT, M. J. C. *Introduction to Interval Analysis*. SIAM, 2009.
- [16] STEPHEN T. THORNTON, J. B. M. *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 5th ed. Thomson, 2004.
- [17] TESCHL, G. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, 1 ed. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 2011.
- [18] VERHULST, F. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, 1985.
- [19] VLADIMIR I. ARNOL'D, R. C. *Ordinary differential equations*. Springer-Verlag, 1991.
- [20] Y.F. CHANG, G. C. Ratio-like and recurrence relation tests for convergence of series. *J. Inst. Maths Applies* 25 (1980), 349–359.
- [21] Á. HARO, M. CANADELL, J. F. A. L. J. M. *The parameterization Method for Invariant Manifolds*, 1 ed., vol. 195 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 2010.