

# Método de parametrización: Variedades estables e inestables en mapeos Hamiltonianos de dos dimensiones

Evelyn Álvarez Cruz

Facultad de Ciencias  
Universidad Nacional Autónoma de México

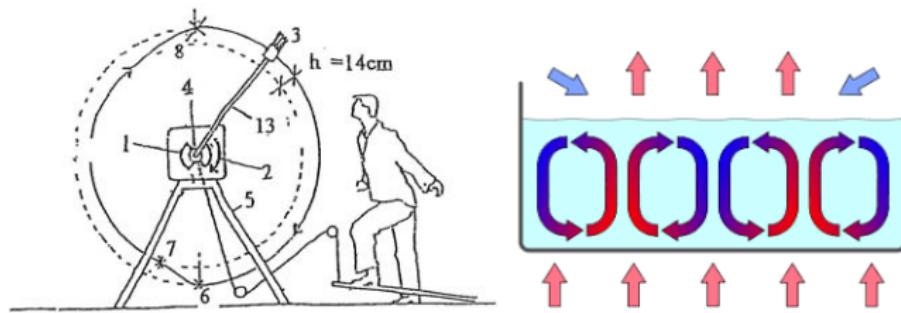
21 de febrero de 2019

# Resumen

- 1 Motivaciones.
- 2 El método de parametrización.
  - 2.1 Ejemplo de aplicación al mapeo estándar.
- 3 Implementación
- 4 Ejemplos
  - 4.1 El mapeo estándar
  - 4.2 El mapeo de Hénon
  - 4.3 El mapeo exponencial
- 5 Conclusiones y perspectivas

# Motivaciones

- Los mapeos discretos pueden describir sistemas físicos.



- Conocer la dinámica alrededor de puntos fijos.
- Conocer el comportamiento de las variedades estables e inestables asociadas a puntos fijos hiperbólicos.
- Los métodos mediante los cuales se calculan las variedades son iterativos.

# Método de parametrización

Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un mapeo Hamiltoniano, el cual tiene un punto fijo hiperbólico  $x_*$ .

## Teorema (Hartman-Grobman)

Sea  $x_*$  un punto fijo hiperbólico de  $f$  y suponga que  $f'(x_*) = A$  con  $|\lambda_1| \neq 0, 1$ . Entonces hay vecindades  $U$  de  $x_*$  y  $V$  de  $0 \in \mathbb{R}$  y un homeomorfismo  $h : U \rightarrow V$  que conjuga  $f$  en  $U$  con el mapeo lineal  $L(x) = Ax$  en  $V$ .

Tomando en cuenta lo anterior

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad A = Df(x_*) \tag{1}$$

y sean

$$|\lambda_1| < 1 \rightarrow u \tag{2}$$

$$|\lambda_2| < 1 \rightarrow v \tag{3}$$

## Definition (Variedad estable e inestable)

$$W^s = \{x : f^n(x) \rightarrow x_* \text{ cuando } n \rightarrow \infty\} \quad (4)$$

$$W^u = \{x : f^n(x) \rightarrow x_* \text{ cuando } n \rightarrow -\infty\}. \quad (5)$$

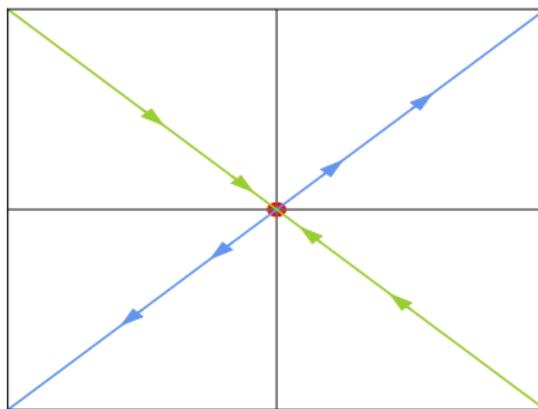
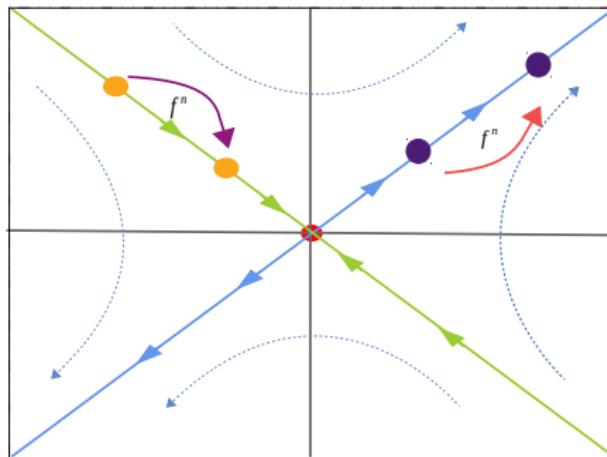


Figura: Punto fijo hiperbólico.

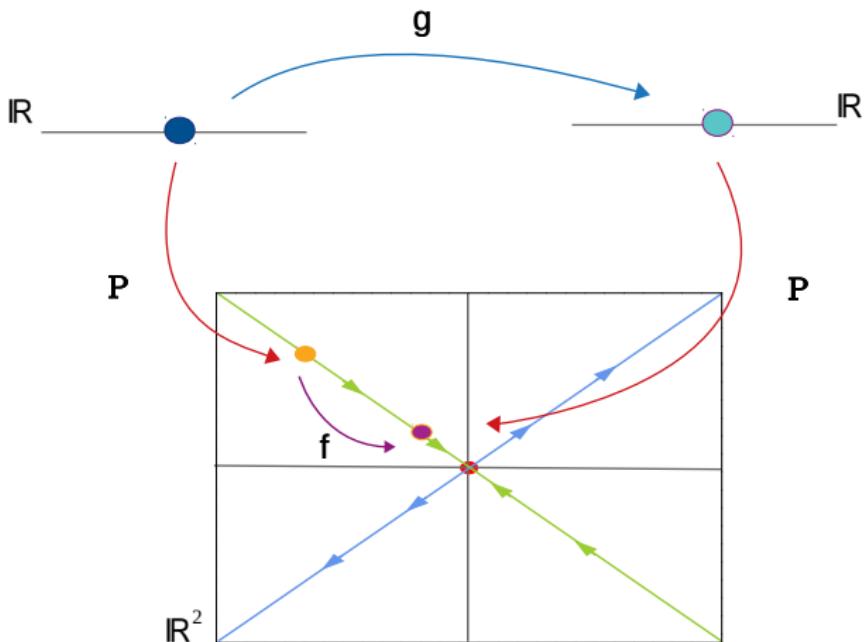
## Definition (Conjunto invariante)

Sea  $I \subset E$  subconjunto del espacio fase tal que para cualquier  $x_i \in I$  y  $n \in \mathbb{N}$

$$f^n(x_i) \in I \quad (6)$$



Para describir usamos una parametrización de la variedad.



El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \Theta \subset \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \Theta \subset \mathbb{R} \\ \downarrow \mathcal{P} & & \downarrow \mathcal{P} \\ M \subset \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathbf{f}} & M \subset \mathbb{R}^2 \end{array} \quad (7)$$

Es decir:

$$\mathbf{f} \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \circ g \quad (8)$$

usaremos el método gráfico.

$$g = \lambda t. \quad (9)$$

Para evaluar el error cometido

$$E_n(t) = \| \mathbf{f} \circ \mathcal{P}_n(t) - \mathcal{P}_n \circ g(t) \|_{\infty}. \quad (10)$$

## Ejemplo de aplicación al mapeo estándar

El *mapeo estándar* tiene la forma

$$\mathbf{f}_k(\theta, p) = \begin{bmatrix} \theta + p \\ p + k \sin(\theta + p) \end{bmatrix} \pmod{(2\pi)}, \quad (11)$$

con  $k$  un parámetro.

Los puntos fijos serán los que cumplan que  $\mathbf{f}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  con  $\mathbf{x} = (\theta, p)$ . El resultado de esta condición son únicamente los puntos  $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$  y  $\mathbf{x}_2 = (0, \pi)$ .

Escribimos las variables  $(\theta, p)$

$$\theta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad (12)$$

y

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \quad (13)$$

tal que  $\mathcal{P}(t) := (\theta(t), p(t))$ .

Sustituyendo en el mapeo estándar

$$\mathbf{f}_k(\theta, p) = \begin{bmatrix} \theta(t) + p(t) \\ p(t) + k \sin[\theta(t) + p(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(\lambda t) \\ p(\lambda t) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

que de forma explícita es

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n + k \sin(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n t^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n t^n \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Usando la serie de Taylor del seno para la segunda ecuación y expandiendo las sumas resulta:

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots = a_0 + a_1 \lambda t + \cdots .$$

$$\begin{aligned} & b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + k [a_0 + (a_1 + b_1)t + \cdots] - \\ & \frac{k}{3!} [a_0 + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \cdots]^3 + \cdots \\ & = b_1 \lambda t + b_2 \lambda^2 t^2 + \cdots \end{aligned}$$

Comparamos términos del mismo orden:

- Orden cero:

$$a_0 + b_0 = a_0 \rightarrow b_0 = 0 \quad (16)$$

$$ka_0 + \frac{k}{3!}a_0^3 + \dots = 0 \rightarrow a_0 = 0 \quad (17)$$

- Orden uno:

$$(a_1 + b_1)t = a_1\lambda t, \quad (18)$$

$$b_1t + k(a_1 + b_1)t = b_1\lambda t. \quad (19)$$

- Orden dos:

$$(a_2 + b_2)t^2 = a_2\lambda^2 t^2. \quad (20)$$

$$b_2t^2 + k(a_2 + b_2)t^2 = b_2\lambda^2 t^2. \quad (21)$$

Ocuparemos un truco, buscaremos que la ecuación (15) satisfaga una ecuación diferencial simple. Para ello escribimos a  $W$  como:

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n t^n = \sin \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right). \quad (22)$$

Consideramos como un compleja a  $W$

$$\overline{W} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n) t^n = \exp[i(\theta(t) + p(t))], \quad (23)$$

Ya que  $W(t) = \operatorname{Im}(\overline{W})$ .

Al tomar la derivada de (23)

$$\overline{W}' = i\overline{W}[\theta'(t) + p'(t)]. \quad (24)$$

Mucha talacha!

Expandiendo en potencias de  $t$  la ecuación (24), se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(\alpha_{n+1} + i\beta_{n+1})t^n = i \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n + i \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n, \quad (25)$$

con

$$c_n = \sum_{l=0}^n (l+1)(\alpha_{n-l} + i\beta_{n-l})a_{l+1}, \quad (26)$$

$$d_n = \sum_{l=0}^n (l+1)(\alpha_{n-l} + i\beta_{n-l})b_{l+1}. \quad (27)$$

Separando la parte real

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\alpha_{n+1}t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ - \sum_{l=0}^n (l+1)\beta_{n-l}(a_{l+1} + b_{l+1}) \right] t^n, \quad (28)$$

e imaginaria

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\beta_{n+1}t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{l=0}^n (l+1)\alpha_{n-l}(a_{l+1} + b_{l+1}) \right] t^n. \quad (29)$$

Igualando potencias de  $t$  en (28), (29) y despejando  $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$  se obtiene

$$\alpha_{n+1} = \frac{-1}{n+1} \sum_{l=0}^n (l+1) \beta_{n-l} (a_{l+1} + b_{l+1}), \quad (30)$$

$$\beta_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^n (l+1) \alpha_{n-l} (a_{l+1} + b_{l+1}), \quad (31)$$

Usando el caso  $t = 0$  en la ecuación (23) resulta

$$\overline{W}(0) = \alpha_0 + i\beta_0 = \cos(\theta(0) + p(0)) + i \sin(\theta(0) + p(0)) = 1, \quad (32)$$

por lo que  $\alpha_0 = 1, \beta_0 = 0$ .

Para encontrar los otros coeficientes usamos de nuevo la ecuación del mapeo, considerando lo que propusimos para el término del seno

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n t^n, \quad (33)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n + k \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda^n t^n. \quad (34)$$

Al agrupar los términos de orden  $n + 1$  en ambas ecuaciones resulta:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = -\frac{k}{n+1} \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) \alpha_{n-l} (a_{l+1} + b_{l+1}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

siendo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a - \lambda^{n+1} & 1 \\ k & 1 - \lambda^{n+1} + k \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Al multiplicar  $\mathbf{A}^{-1}$  por la derecha y separar cada renglón obtenemos las relaciones de recurrencia

$$a_{n+1} = \frac{k}{(n+1)[(1 - \lambda^{n+1})(1 - \lambda^{n+1} + k) - k]} \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{n-l}(l+1)(a_{l+1} + b_{l+1}),$$

$$b_{n+1} = \frac{-k1 - \lambda^{n+1}}{(n+1)[(1 - \lambda^{n+1})(1 - \lambda^{n+1} + k) - k]} \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{n-l}(l+1)(a_{l+1} + b_{l+1}).$$

## Ejemplos de aplicación: Mapeo estándar

En el mapeo estándar (11) uno de los puntos fijos es el origen de coordenadas  $x_1 = (0, 0)$ .

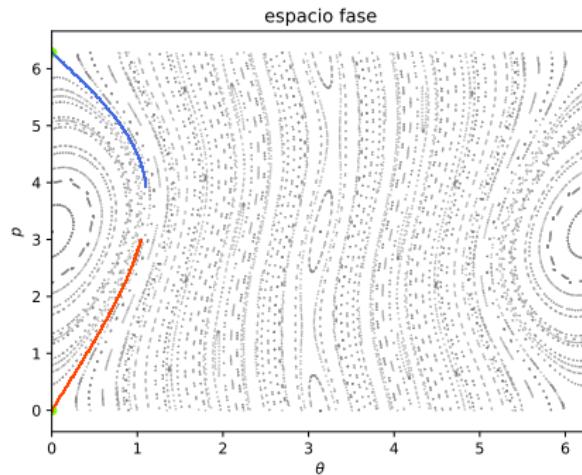


Figura:  $W^s, W^u$  de orden 25 en el mapeo estándar con  $k = 0,3$  en el intervalo  $t = [0., 3.]$

El error lo calculamos usando

$$E_n(t) = \| \mathbf{f} \circ \mathcal{P}_n(t) - \mathcal{P}_n \circ g(t) \|_{\infty} .$$

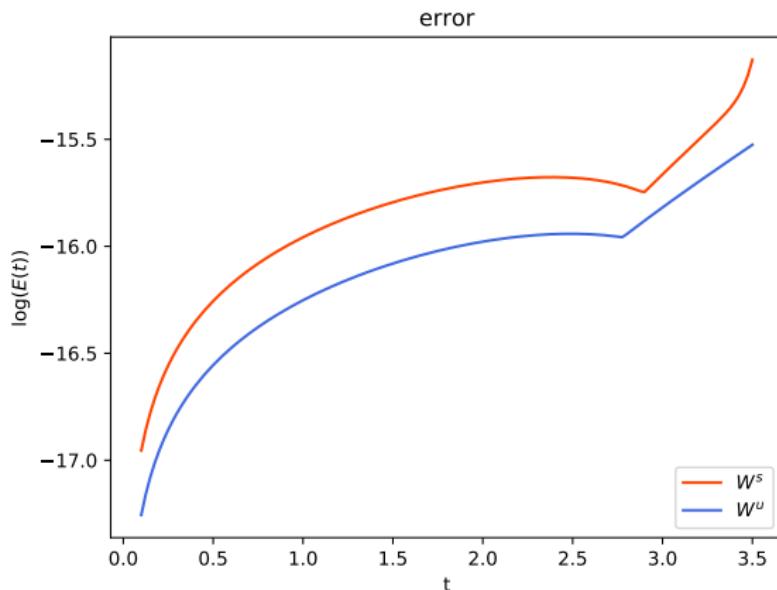
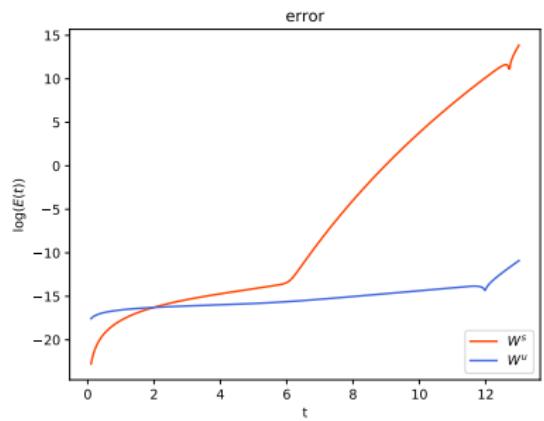
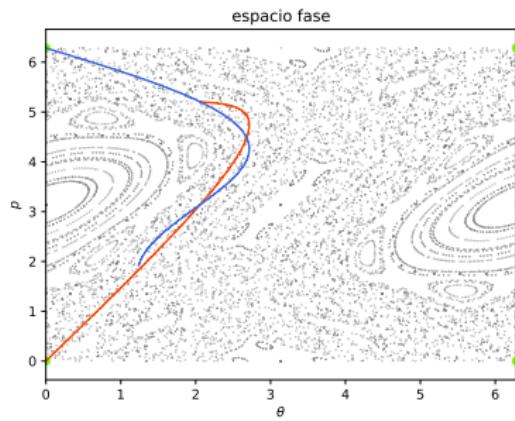


Figura: Error en las variedades de la figura 2.



**Figura:**  $W^s$ ,  $W^u$  de orden 80 en el mapeo estándar con  $k = 1,5$  en el intervalo  $t = [0., 13.]$  y su error.

Para observar cómo cambia el error con el orden de la parametrización.

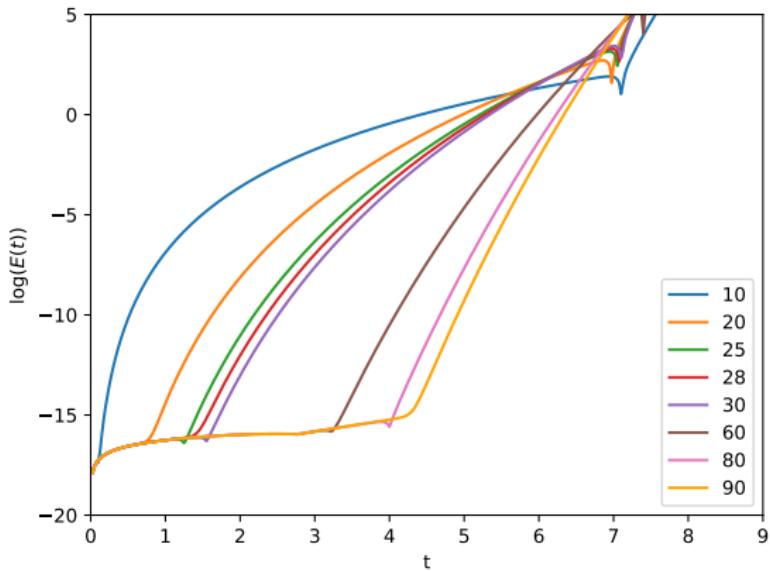


Figura: Curvas de error para diferentes órdenes en el mapeo estándar,  $k = 0,3$ .

## Usando números de presición extendida

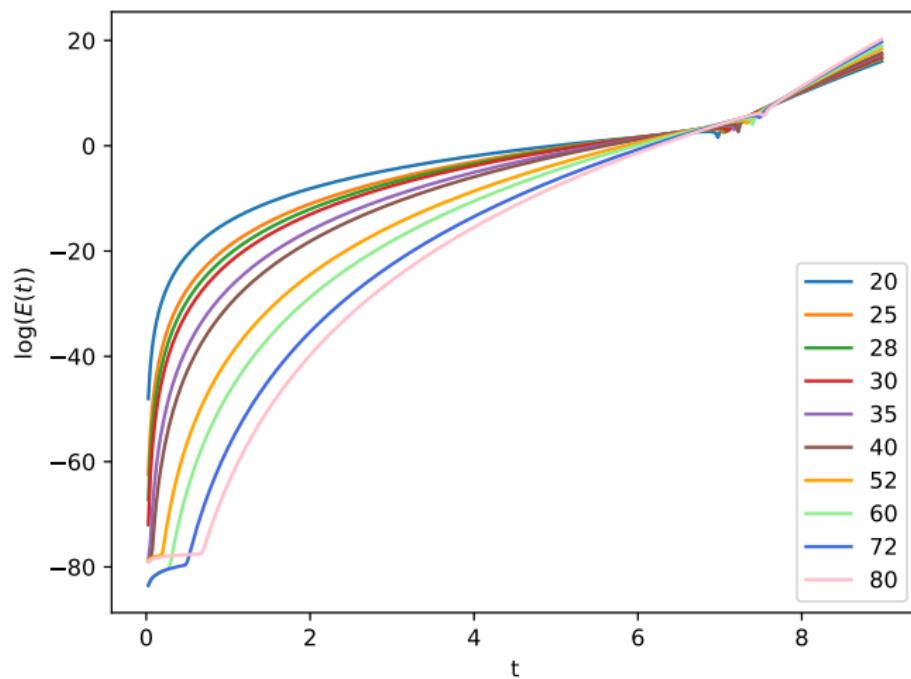
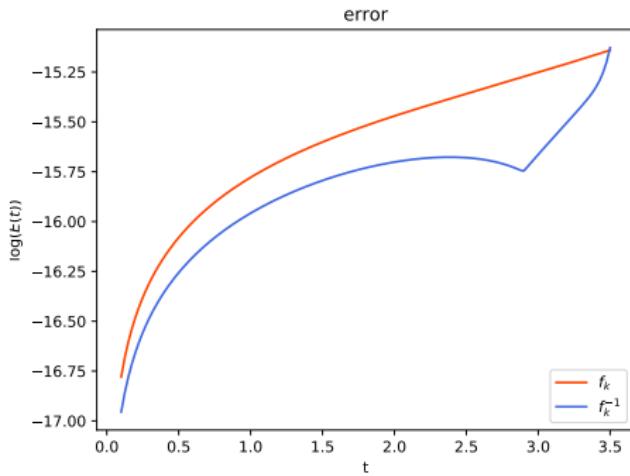


Figura: Curvas de error para diferentes órdenes usando precisión extendida

## Usando mapeo estándar inverso

$$f_k^{-1}(p, \theta) = \begin{bmatrix} p - k \sin(\theta) \\ \theta - p + k \sin \theta \end{bmatrix} \pmod{2\pi}, \quad (39)$$

podemos calcular la variedad estable



**Figura:** Error para las parametrizaciones usando el mapeo y el mapeo inverso con polinomios de orden 20 y  $k = 0,3$ .

# Hénon

El mapeo de Hénon se define como:

$$\mathbf{f}_{a,b}(x, y) = \begin{pmatrix} a - by - x^2 \\ x \end{pmatrix}, \quad (40)$$

y su inverso:

$$\mathbf{f}_{a,b}^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ (a - x - y^2)/b \end{pmatrix}. \quad (41)$$

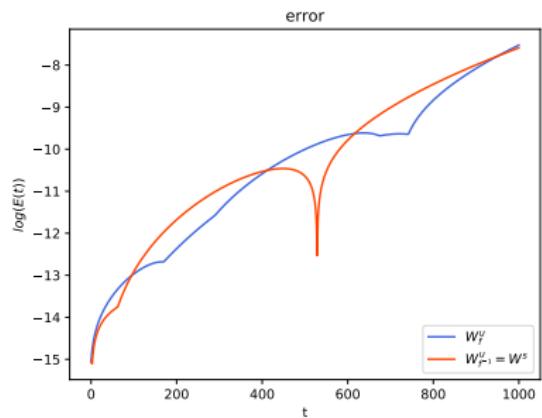
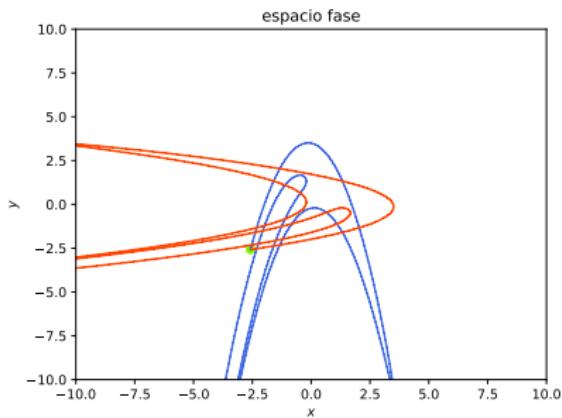
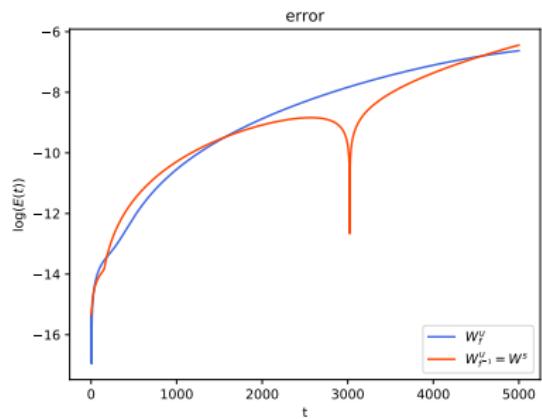
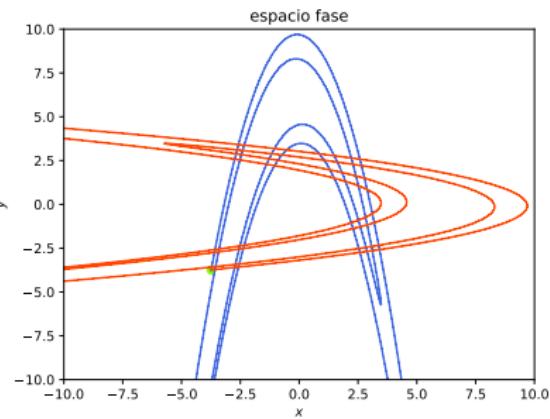


Figura:  $W^u$  y  $W^s$  de orden 45 en el intervalo  $t = [0., 900.]$  para el mapeo de Hénon con  $a = 1.5, b = 1$ .



**Figura:**  $W^u$ ,  $W^s$  de orden 78 en el intervalo  $t = [0., 4000, 0]$  para el mapeo de Hénon con  $a = 6.5, b = 1..$

## Mapeo exponencial

El último mapeo que se estudió fue uno usado en el artículo:

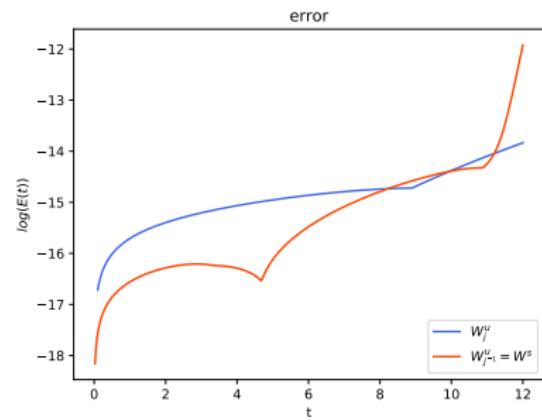
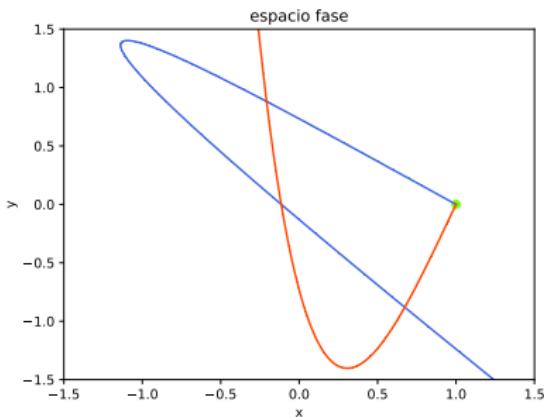
$$\mathbf{j}_a(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ y + af(x + y) \end{pmatrix}, \quad f(x) = x(x - 1)e^{-x}. \quad (42)$$

A este mapeo le corresponde su mapeo inverso

$$\mathbf{j}_a^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} x - y + ax(x - 1)e^{-x} \\ y - ax(x - 1)e^{-x} \end{pmatrix} \quad (43)$$

Los puntos fijos del sistema son:

- $\mathbf{x}_0 = (1, 0) \rightarrow$  hiperbólico
- $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$ 
  - ▶ elíptico si  $a < 4$
  - ▶ inverso hiperbólico si  $a \geq 4$



**Figura:**  $W^s$  y  $W^u$  de orden 93 en el intervalo  $t = [0., 6,5]$ , con  $a = 5,7$  en el punto fijo  $x_0$ .

# Convergencia

Usando el criterio de Hadamard

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}, \quad (44)$$

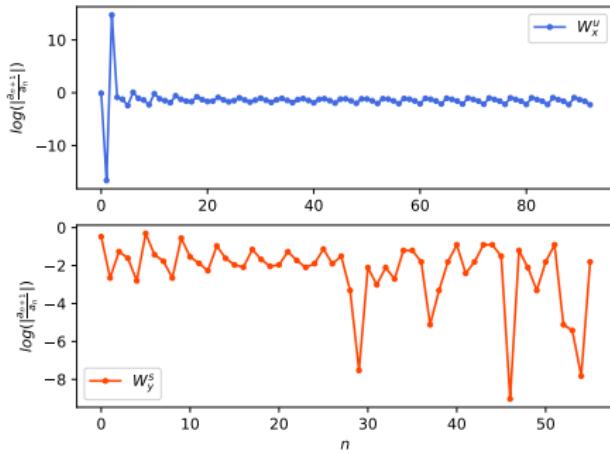


Figura: Convergencia de Hadamard asociada a las variedades mostradas en la figura 10.

Usando el criterio de los tres términos:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left[ i \left( \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) - (i-1) \left( \frac{a_i}{a_{i-1}} \right) \right]. \quad (45)$$

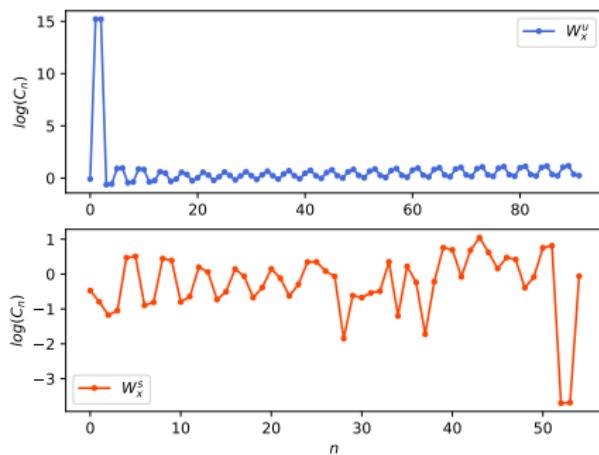


Figura: Convergencia de tres términos asociada a las variedades en la figura 10.

## Existencia de puntos homoclínicos/heteroclínicos

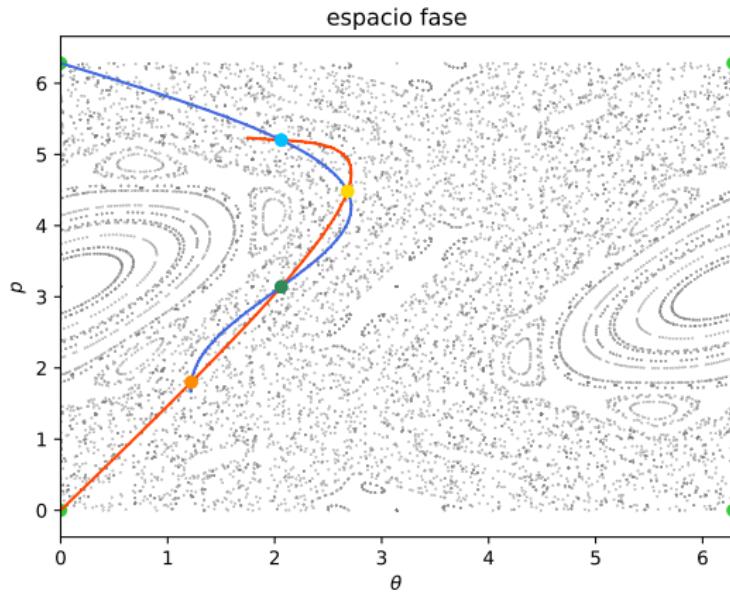
Siendo que el resultado son polinomios, se puede aplicar el método de Newton, o cualquier otro, en dos dimensiones para resolver  $\mathcal{P}^u = \mathcal{P}^s$ . Concretamente se tienen

$$W^s(t) = (\mathcal{P}_x(t), \mathcal{P}_y(t)), \quad W^u(\tau) = (\mathcal{P}_x(\tau), \mathcal{P}_y(\tau)) \quad (46)$$

$$W^s(t) = W^u(\tau), \quad (47)$$

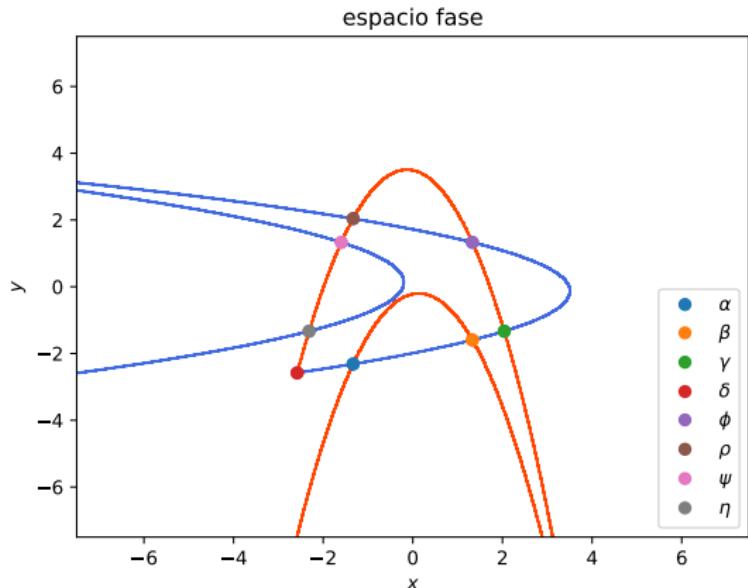
la intersección se encontrará en  $I_t \times I_\tau$ . En el espacio fase la intersección se verá como el producto cartesiano de  $W^s(I_t) \times W^u(I_\tau)$  formando una sección en la que se garantiza hay un punto homoclínico o heteroclínico.

# Estándar

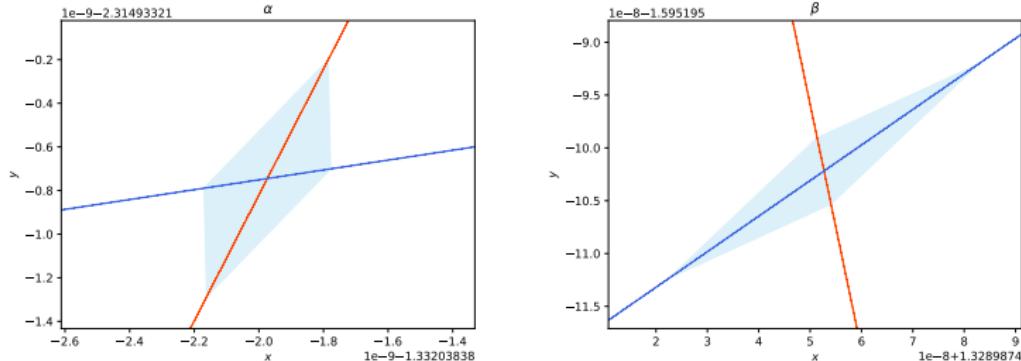


**Figura:** Cruces de  $W^u$ ,  $W^s$  de orden 120 para el mapeo estándar con  $k = 1,5$ , usando una tolerancia de  $10^{-6}$ .

# Hénon

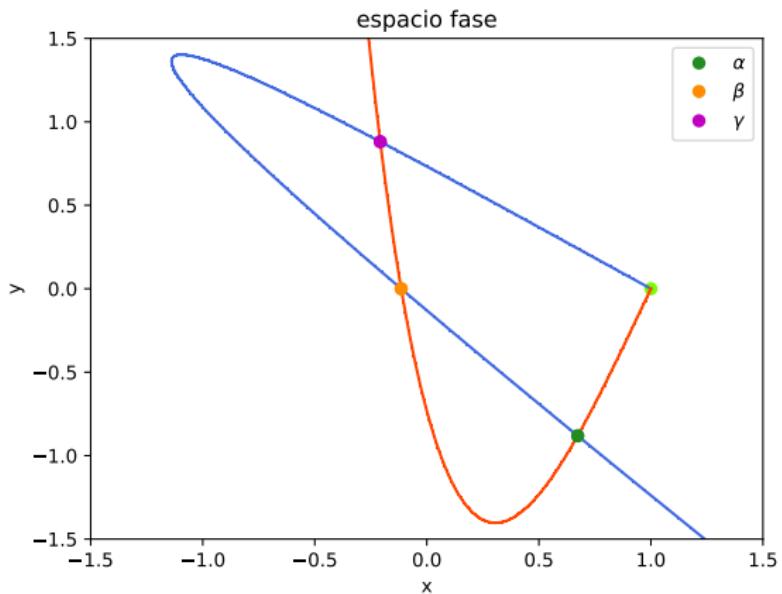


**Figura:** Cruces de  $W^u$ ,  $W^s$  encontrados en el intervalo  $[-400., 0.] \times [0., 400.]$  con una tolerancia de  $10^{-6}$ .

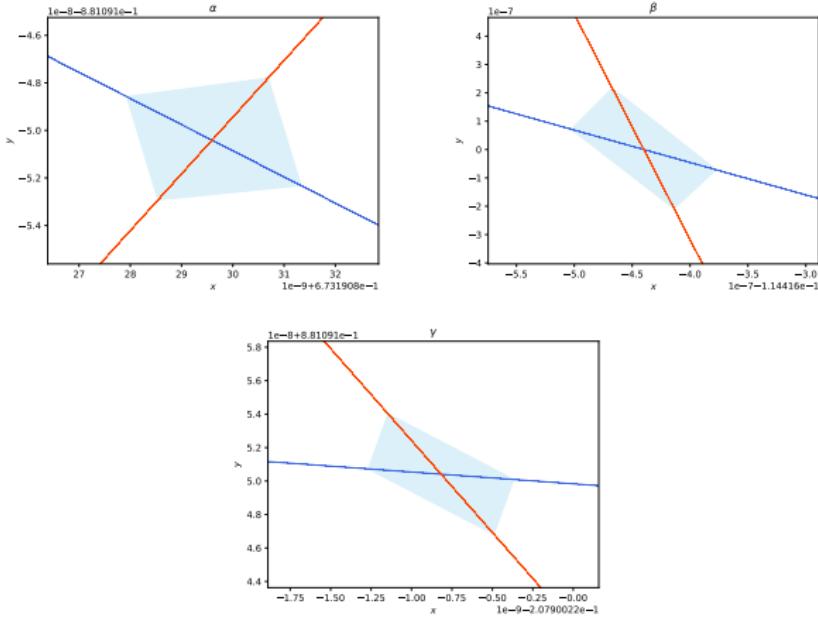


**Figura:** Intervalos de intersecciones entre las variedades estable e inestable del mapeo de Hénon.

# Exponencial



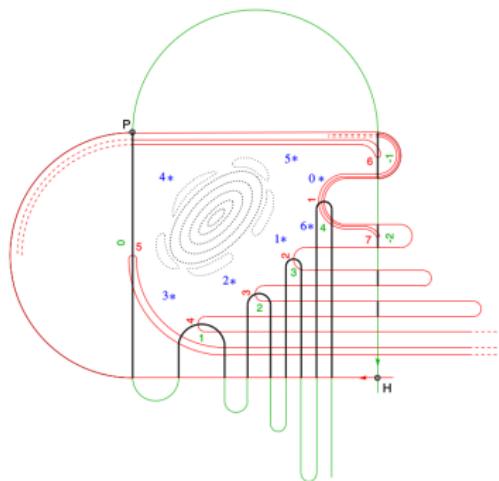
**Figura:** Intersecciones en el mapeo exponencial con  $a = 5,7$ , con una toleracia de  $10^{-6}$ .



**Figura:** Intervalo de intersección de las variedades estable e inestable en el mapeo exponencial.

# Rectángulo fundamental

El rectángulo fundamental es una región del espacio fase que contiene todas las intersecciones (homoclínicas y heteroclínicas) del mapeo, lo que permite obtener toda la dinámica fuera del mismo.



Reescribiendo la ecuación de invariancia (8) para el caso de la variedad estable, se obtiene:

$$f_{a,b}^{-1}(W_0^s(t)) = W_0^s(\lambda^s t). \quad (48)$$

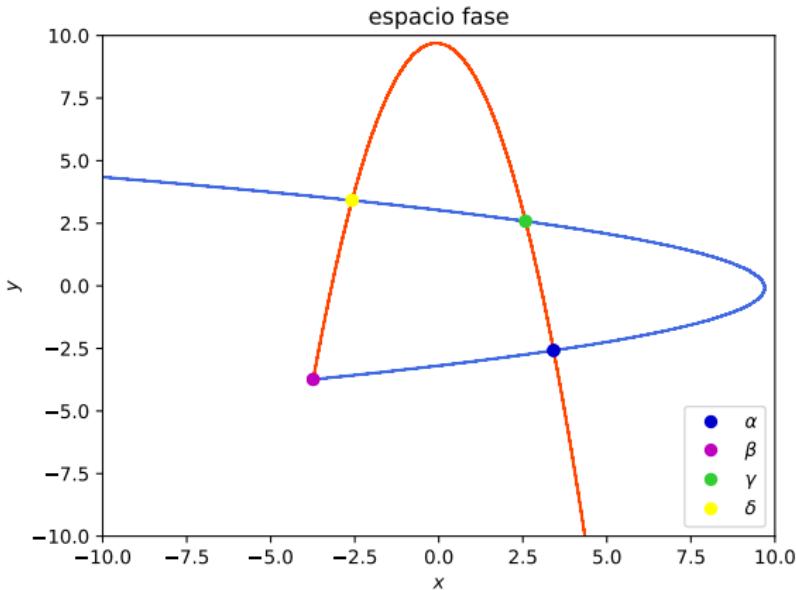
Aplicando el mapeo de Hénon inverso (41) a la ecuación (48) resulta

$$W_0^s(t) = f_{a,b}(W_0^s(\lambda^s t)), \quad (49)$$

que se reescribe como (49),

$$W_0^s\left(\frac{t}{\lambda^s}\right) = f_{a,b}(W_0^s(t)). \quad (50)$$

Como  $|\lambda^s| < 1$  la ecuación (50) muestra que aplicar el mapeo es análogo a tener la variedad estable evaluada en un valor mayor del parámetro, puesto que  $1/\lambda^s > 1$ .



**Figura:** Variedades estable e inestable de orden 250, para el mapeo de Hénon con  $a = 6.5$ ,  $b = 1.$ , en el intervalo  $t = [0., 100.]$ . El punto  $\omega$  denota el punto fijo mientras que  $\alpha, \beta, \gamma$  son las primeras intersecciones de las variedades.

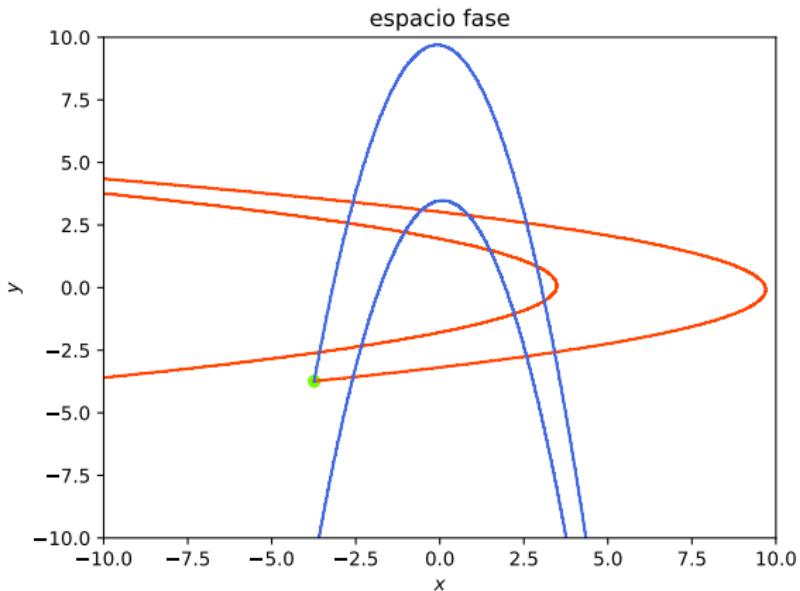


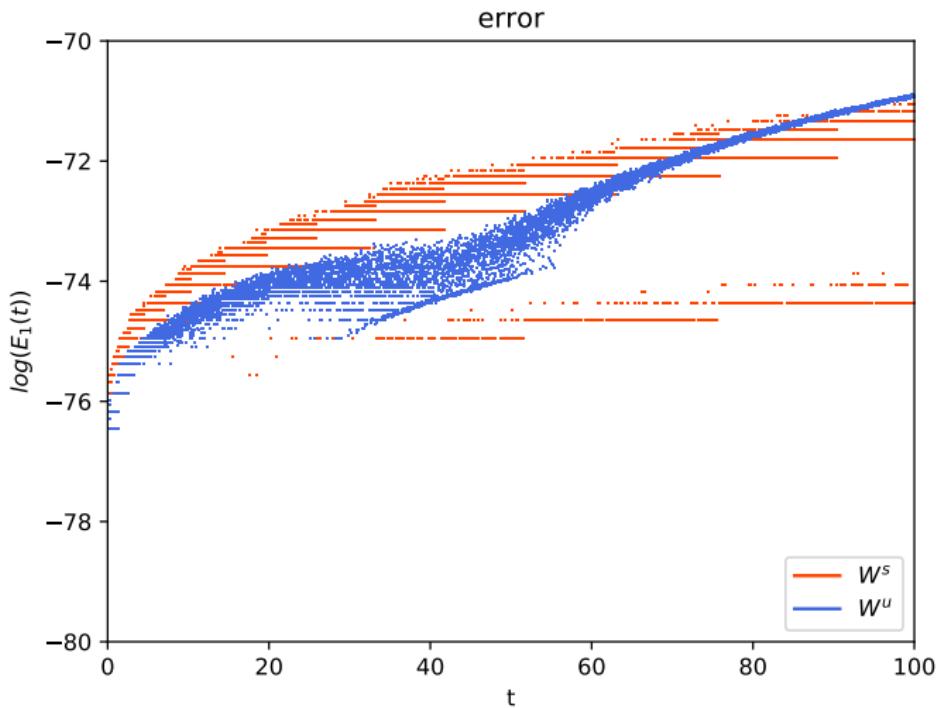
Figura: Primera aplicación del mapeo a los polinomios de orden 250,  $t = [0, 100]$ .

Para saber cuál es este error se usó la ecuación (50),

$$E_1(t) = \left\| W_0^s \left( \frac{t}{\lambda^s} \right) - f_{a,b}(W_0^s(t)) \right\|_{\infty}, \quad (51)$$

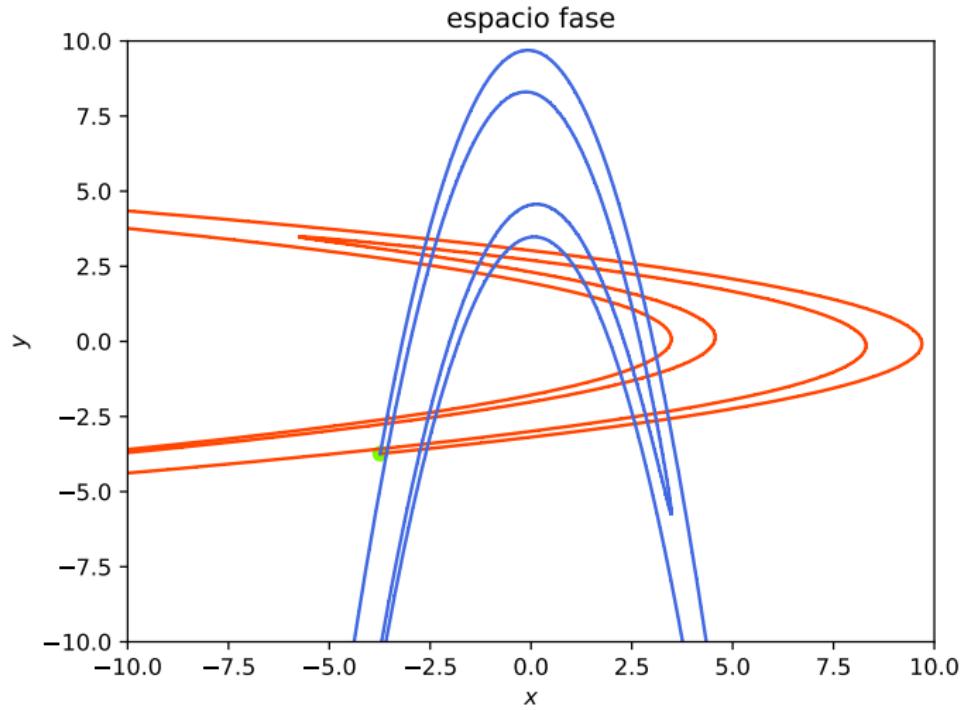
generalizando obtenemos

$$E_n(t) = \left\| (f_k^{-1})^n \left( W_0^s \left( \frac{t}{\lambda^s} \right) \right) - (f_k^{-1})^{n-1}(W_0^s(t)) \right\|_{\infty}. \quad (52)$$



**Figura:** Error en el polinomio que resulta de aplicar el mapeo a la parametrización de orden 250.

La segunda aplicación del mapeo a los polinomios,  
 $(W_{x2}^s, W_{y2}^s) = f_{a,b}(W_{x1}^s, W_{y1}^s)$



## La tercera aplicación

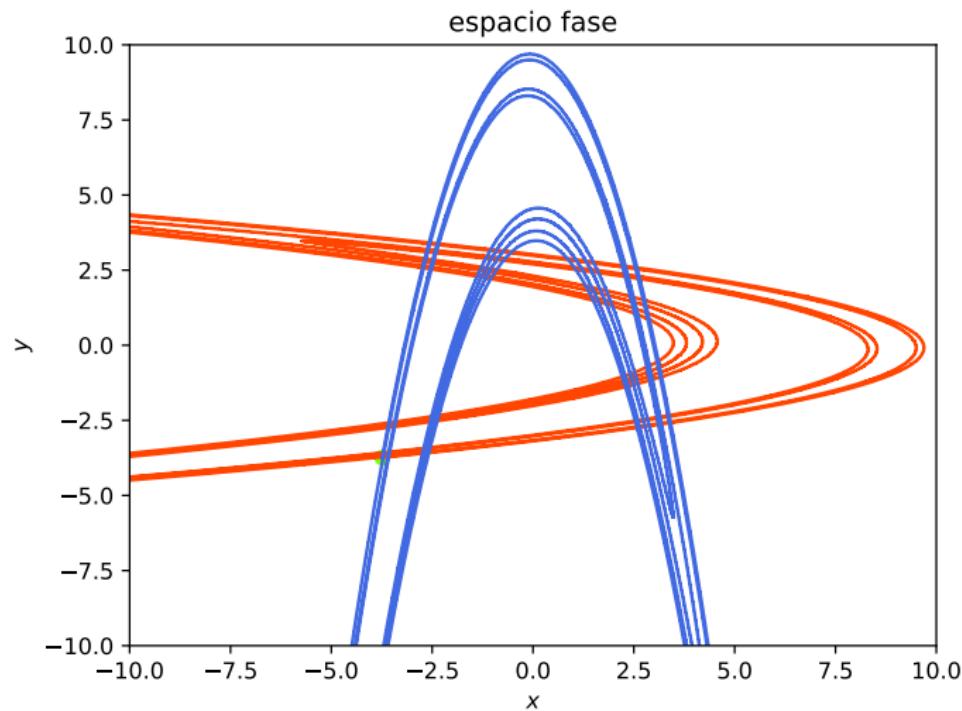


Figura: Tercer aplicación del mapeo a los polinomios de orden 250.

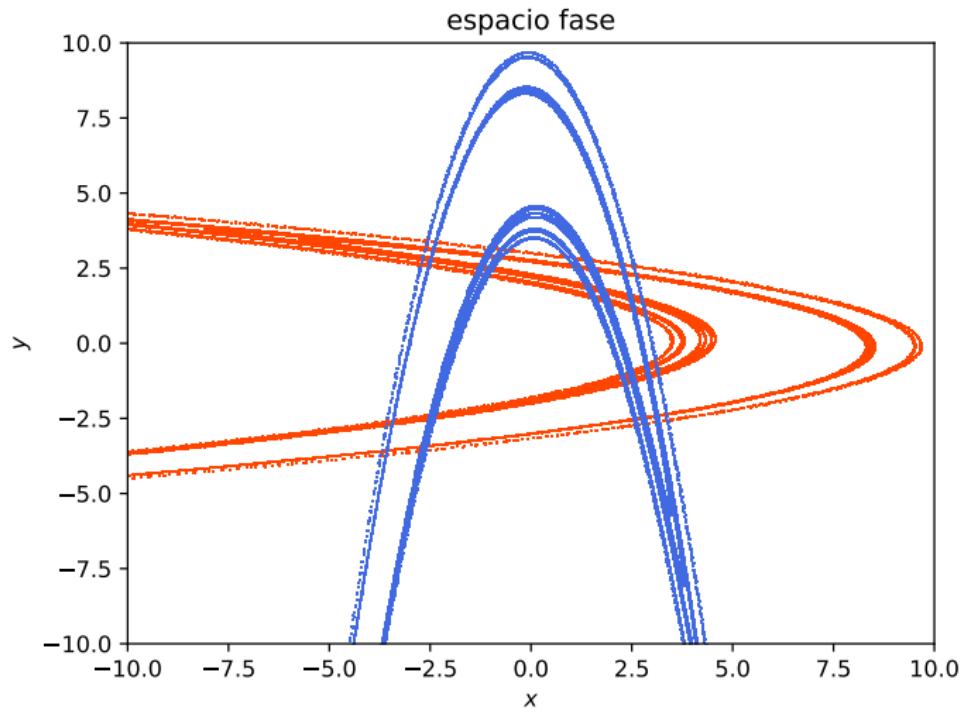


Figura: Cuarta aplicación del mapeo a los polinomios de orden 250.

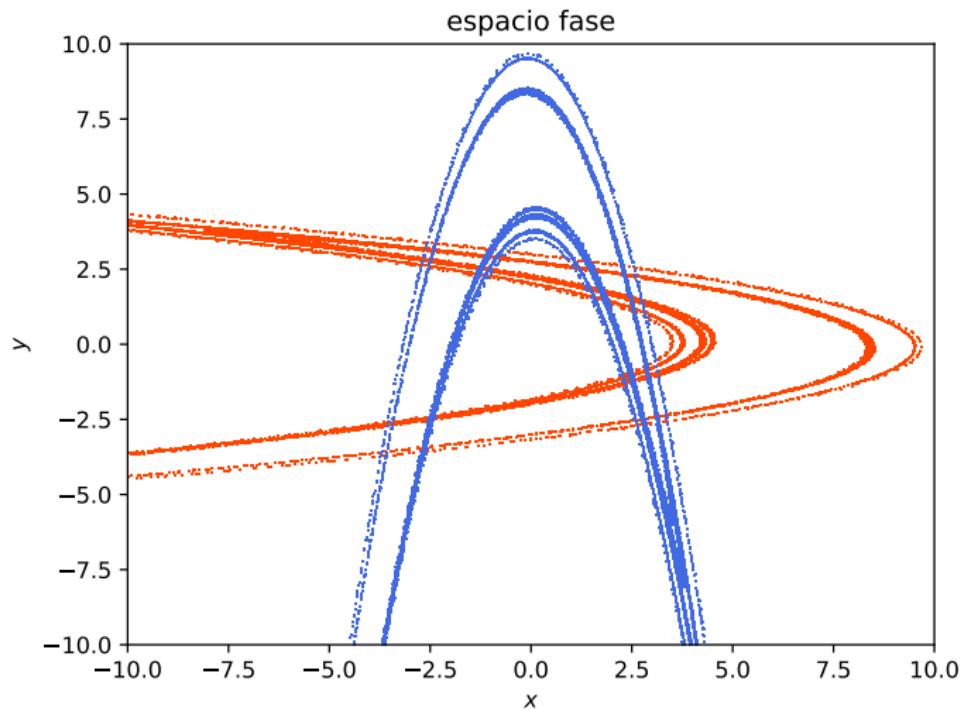


Figura: Quinta aplicación del mapeo a los polinomios de orden 250.

# Conclusiones y perspectivas