

Método de parametrización: Variedades estables e inestables en mapeos Hamiltonianos de dos dimensiones

Evelyn Álvarez Cruz

Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

21 de febrero de 2019

Resumen

1 Motivaciones.

2 El método de parametrización.

2.1 Ejemplo de aplicación al mapeo estándar.

3 Implementación

4 Ejemplos

4.1 El mapeo estándar

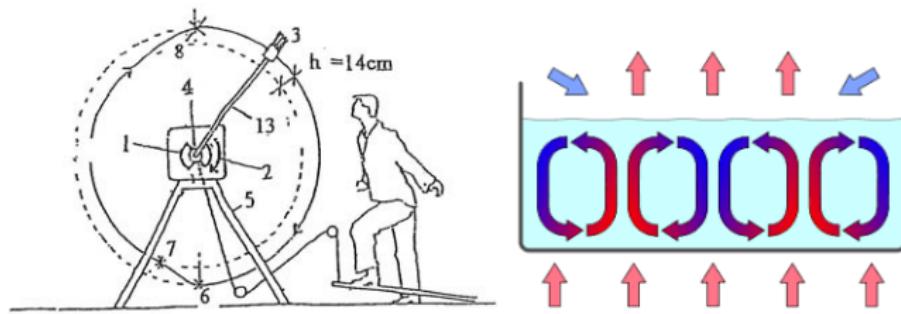
4.2 El mapeo de Hénon

4.3 El mapeo exponencial

5 Conclusiones y perspectivas

Motivaciones

- Los mapeos discretos pueden describir sistemas físicos.



- Conocer la dinámica alrededor de puntos fijos.
- Conocer el comportamiento de las variedades estables e inestables asociadas a puntos fijos hiperbólicos.
- Los métodos mediante los cuales se calculan las variedades son iterativos.

Método de parametrización

Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un mapeo Hamiltoniano, el cual tiene un punto fijo hiperbólico \mathbf{x}_* .

Tomando la linealización:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n, \quad \mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_*) \quad (1)$$

donde

$$|\lambda_1| < 1 \quad \rightarrow \mathbf{u} \quad (2)$$

$$|\lambda_2| > 1 \quad \rightarrow \mathbf{v} \quad (3)$$

Definición (Variedad estable e inestable)

$$W^s = \{x : f^n(x) \rightarrow x_* \text{ cuando } n \rightarrow \infty\} \quad (4)$$

$$W^u = \{x : f^n(x) \rightarrow x_* \text{ cuando } n \rightarrow -\infty\}. \quad (5)$$

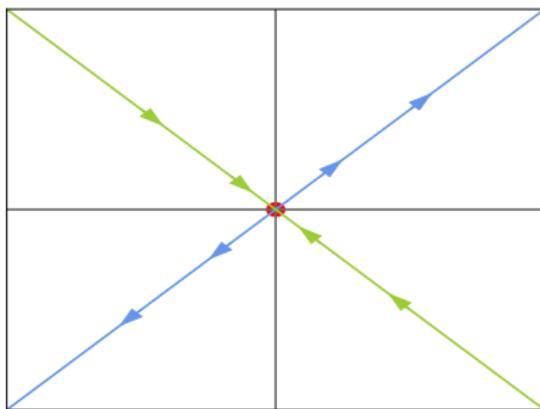


Figura: Punto fijo hiperbólico.

Sea $I \subset W$ subconjunto de la variedad, para cualquier $x_i \in I$ y $n \in \mathbb{N}$

$$f^n(x_i) \in W \quad (6)$$

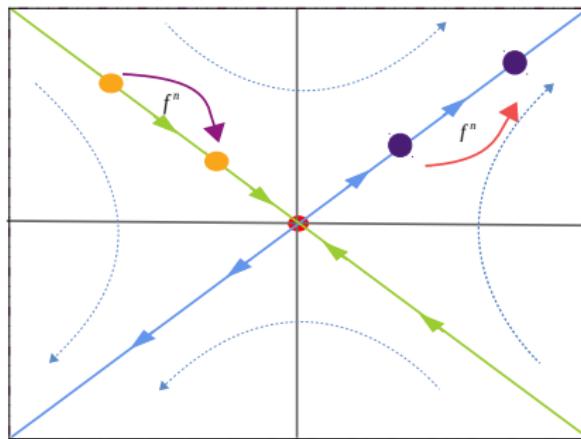
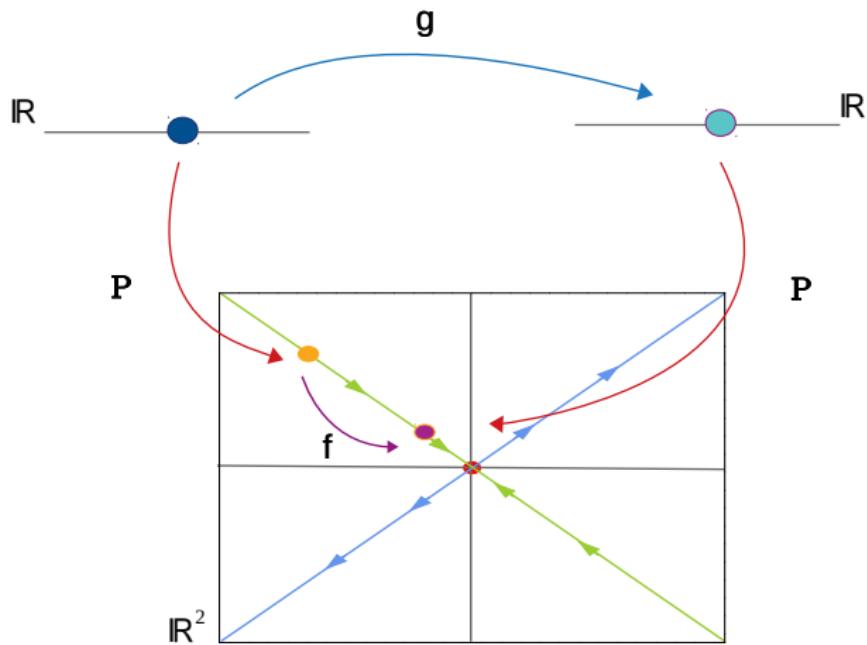


Figura: Comportamiento de las variedades.

Para describir la variedad usamos una parametrización \mathcal{P} .



A partir de esto podemos escribir

$$\mathbf{f} \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \circ g \quad (7)$$

usaremos el método gráfico.

$$g = \lambda t. \quad (8)$$

El error se evalúa como:

$$E_n(t) = \| \mathbf{f} \circ \mathcal{P}_n(t) - \mathcal{P}_n \circ g(t) \|_{\infty}. \quad (9)$$

Ejemplo de aplicación: mapeo estándar

El *mapeo estándar* es

$$\mathbf{f}_k(\theta, p) = \begin{bmatrix} \theta + p \\ p + k \sin(\theta + p) \end{bmatrix} \quad \text{mód } (2\pi), \quad (10)$$

Puntos fijos:

- $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$
- $\mathbf{x}_2 = (0, \pi)$

Escribimos las variables (θ, p)

$$\theta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad (11)$$

y

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \quad (12)$$

tal que $\mathcal{P}(t) := (\theta(t), p(t))$.

Sustituyendo en el mapeo estándar

$$\mathbf{f}_k(\theta, p) = \begin{bmatrix} \theta(t) + p(t) \\ p(t) + k \sin[\theta(t) + p(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(\lambda t) \\ p(\lambda t) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

de forma explícita es

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n + k \sin(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n t^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n t^n \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Comparamos términos del mismo orden

- Orden cero:

$$a_0 + b_0 = a_0 \rightarrow b_0 = 0 \quad (15)$$

$$ka_0 + \frac{k}{3!}a_0^3 + \dots = 0 \rightarrow a_0 = 0 \quad (16)$$

- Orden uno:

$$a_1 + b_1 = a_1\lambda, \quad (17)$$

$$b_1 + ka_1 + b_1 = b_1\lambda. \quad (18)$$

- Orden dos:

$$a_2 + b_2 = a_2\lambda^2. \quad (19)$$

$$b_2 + ka_2 + b_2 = b_2\lambda^2. \quad (20)$$

Hay otra forma de calcular los coeficientes: mediante relaciones de recurrencia. Para ello se usa el truco de buscar que la ecuación (14) satisfaga una ecuación diferencial simple.

$$\alpha_{n+1} = \frac{-1}{n+1} \sum_{l=0}^n (l+1) \beta_{n-l} (a_{l+1} + b_{l+1}), \quad (21)$$

$$\beta_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^n (l+1) \alpha_{n-l} (a_{l+1} + b_{l+1}), \quad (22)$$

$$a_{n+1} = \frac{k}{(n+1)[(1-\lambda^{n+1})(1-\lambda^{n+1}+k)-k]} \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{n-l} (l+1) (a_{l+1} + b_{l+1}),$$

$$b_{n+1} = \frac{-k - \lambda^{n+1}}{(n+1)[(1-\lambda^{n+1})(1-\lambda^{n+1}+k)-k]} \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{n-l} (l+1) (a_{l+1} + b_{l+1}).$$

Iterativo

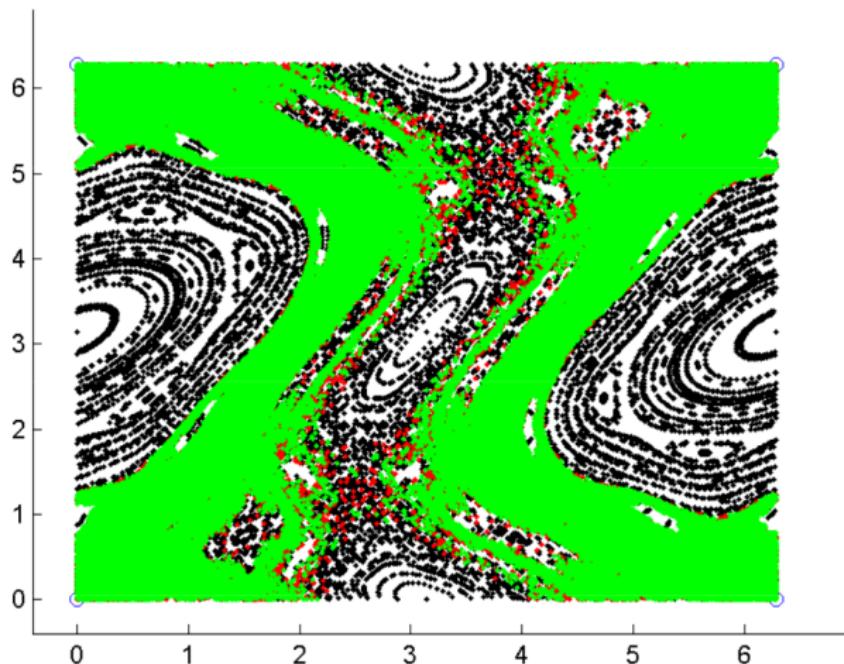


Figura: Variedades calculadas mediante iterar un conjunto de condiciones iniciales 300 veces. [12]

Ejemplos de aplicación: mapeo estándar

Usando el punto fijo $x_1 = (0, 0)$.

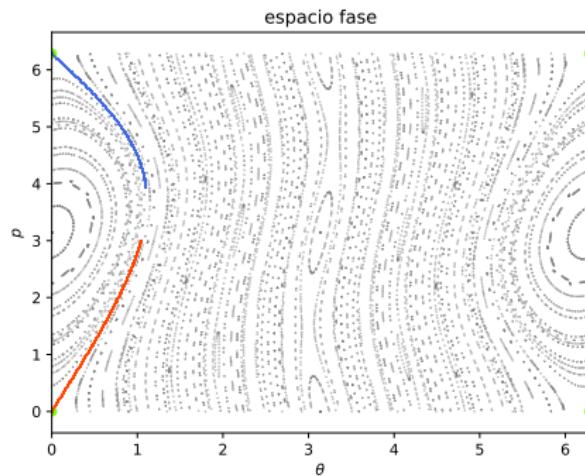


Figura: W^s, W^u de orden 25 en el mapeo estándar con $k = 0.3$ en el intervalo $t = [0., 3.]$

El error:

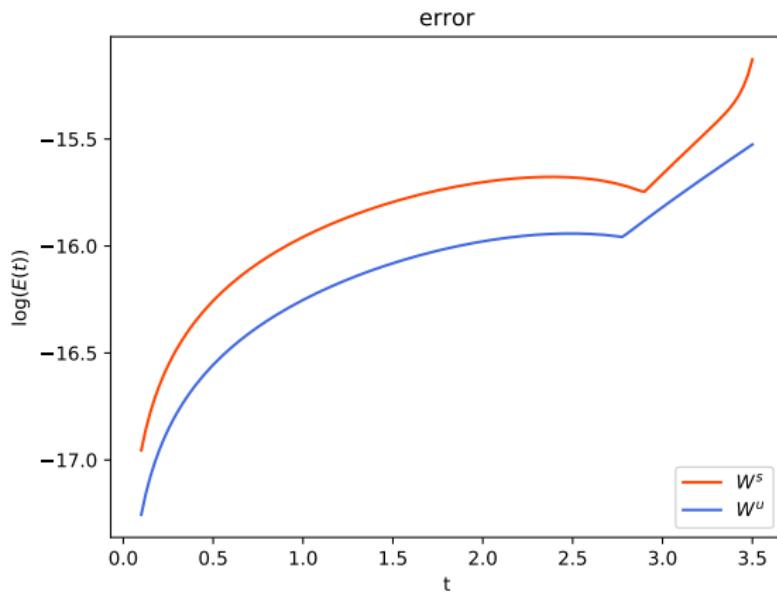


Figura: Error en las variedades de la figura 4.

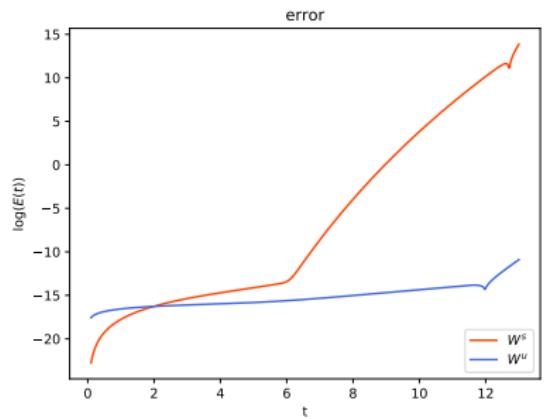
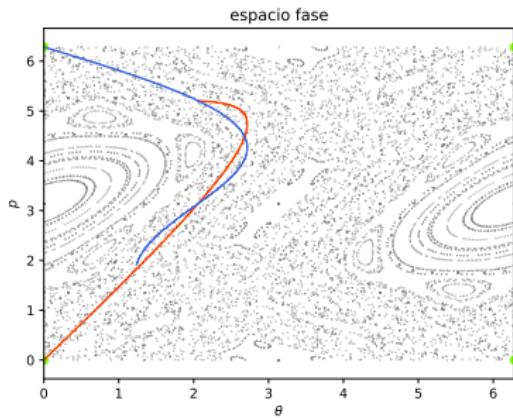


Figura: W^s , W^u de orden 80 en el mapeo estándar con $k = 1.5$ en el intervalo $t = [0., 13.]$ y su error.

Para observar cómo cambia el error con el orden de la parametrización.

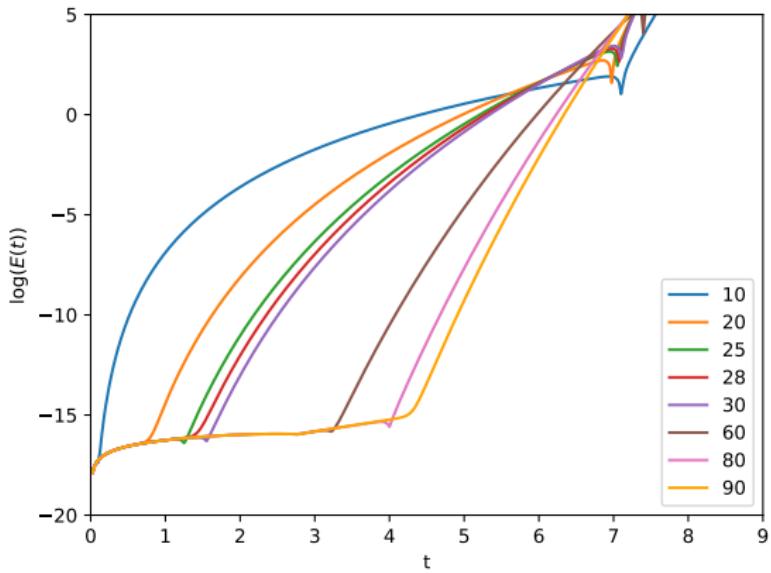


Figura: Curvas de error para diferentes órdenes en el mapeo estándar, $k = 0.3$.

Usando números de presición extendida

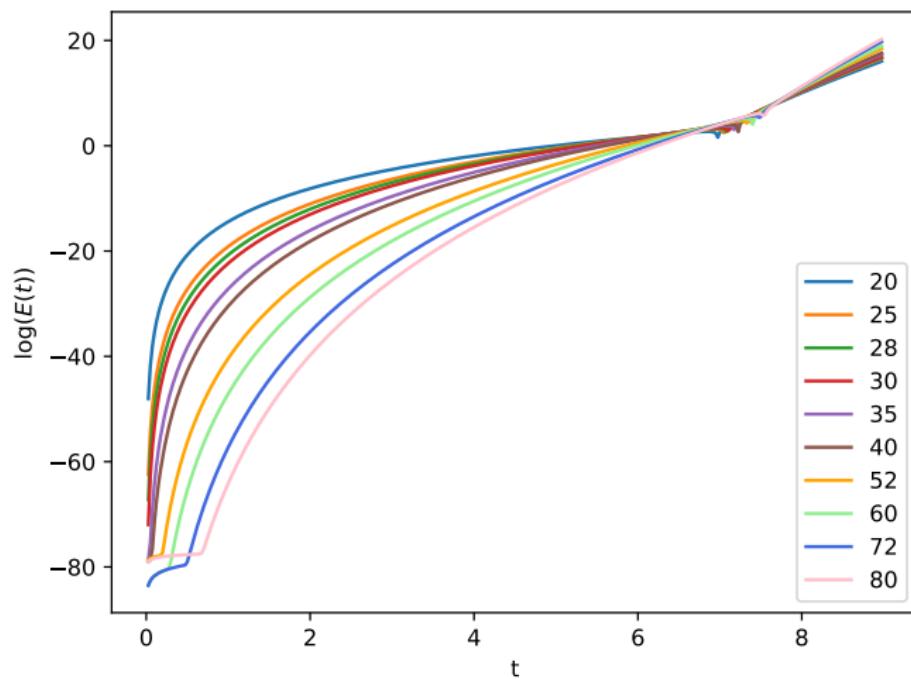


Figura: Curvas de error para diferentes órdenes usando precisión extendida

Usando mapeo estándar inverso

$$f_k^{-1}(p, \theta) = \begin{bmatrix} p - k \sin(\theta) \\ \theta - p + k \sin \theta \end{bmatrix} \pmod{2\pi}, \quad (25)$$

podemos calcular la variedad estable

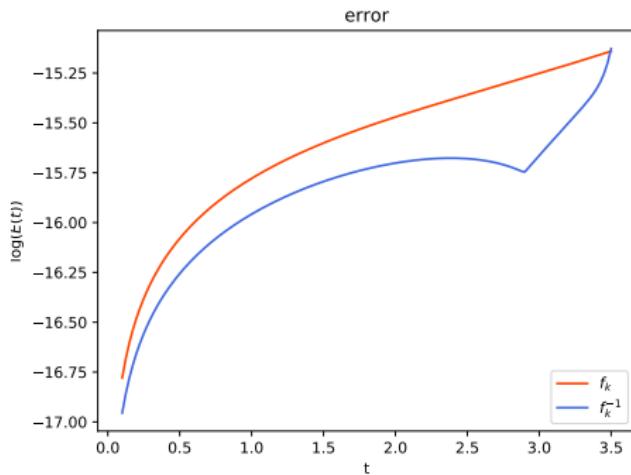


Figura: Error para las parametrizaciones usando el mapeo y el mapeo inverso con polinomios de orden 20 y $k = 0.3$.

Mapeo de Hénon

El mapeo de Hénon se define como:

$$\mathbf{f}_{a,b}(x, y) = \begin{pmatrix} a - by - x^2 \\ x \end{pmatrix}, \quad (26)$$

y su inverso:

$$\mathbf{f}_{a,b}^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ (a - x - y^2)/b \end{pmatrix}. \quad (27)$$

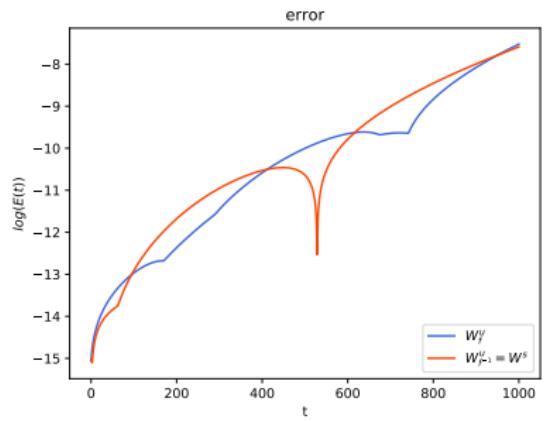
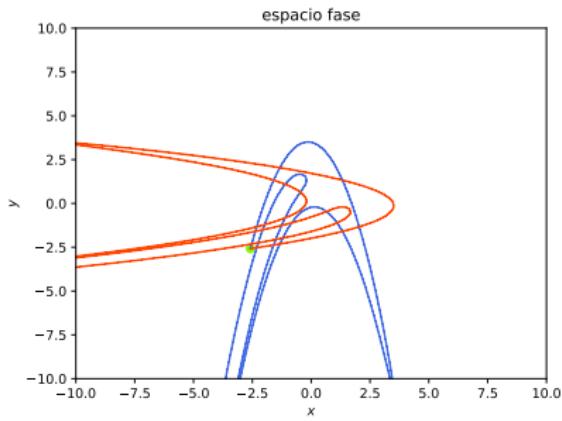


Figura: W^u y W^s de orden 45 en el intervalo $t = [0., 900.]$ para el mapeo de Hénon con $a = 1.5, b = 1$.

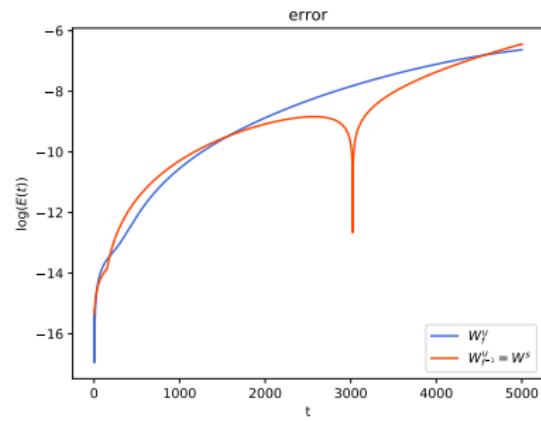
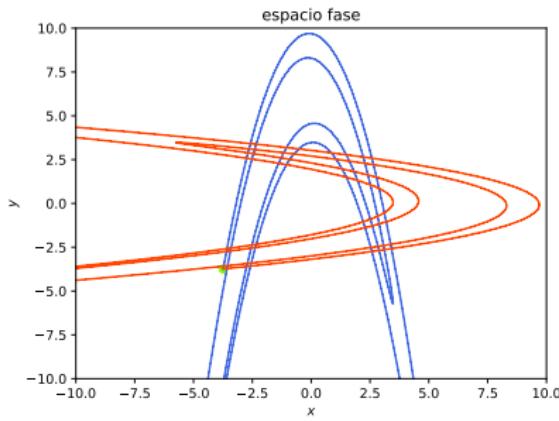


Figura: W^u , W^s de orden 78 en el intervalo $t = [0., 4000.0]$ para el mapeo de Hénon con $a = 6.5, b = 1..$

Mapeo exponencial

El mapeo exponencial se define como:

$$\mathbf{j}_a(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ y + af(x + y) \end{pmatrix}, \quad f(x) = x(x - 1)e^{-x}. \quad (28)$$

y su inverso

$$\mathbf{j}_a^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} x - y + ax(x - 1)e^{-x} \\ y - ax(x - 1)e^{-x} \end{pmatrix} \quad (29)$$

Los puntos fijos del sistema son:

- $\mathbf{x}_0 = (1, 0) \rightarrow$ hiperbólico
- $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$
 - ▶ elíptico si $a < 4$
 - ▶ inverso hiperbólico si $a \geq 4$

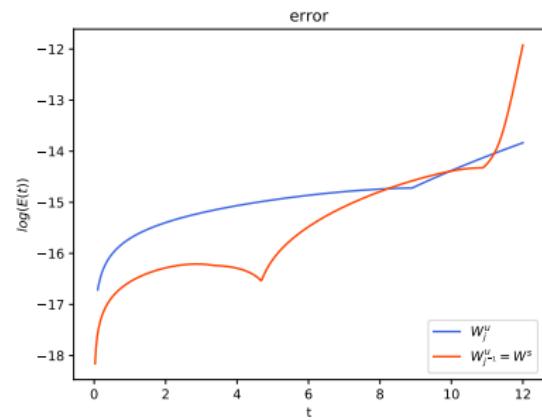
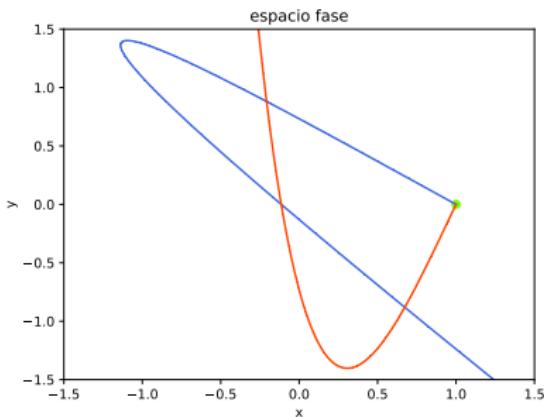


Figura: W^s y W^u de orden 93 en el intervalo $t = [0., 6.5]$, con $a = 5.7$ en el punto fijo x_0 .

Convergencia

Usando el criterio de Hadamard

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}, \quad (30)$$

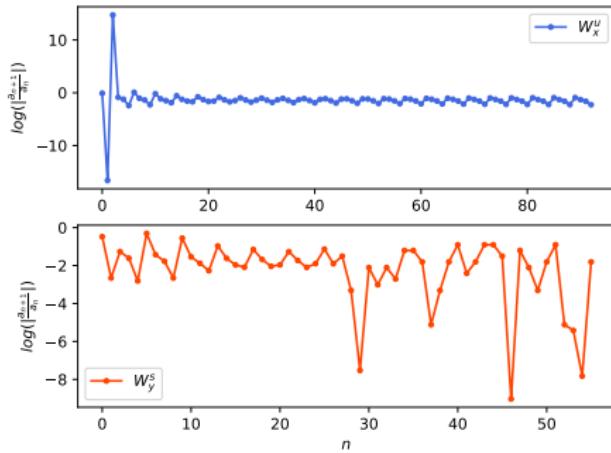


Figura: Convergencia de Hadamard asociada a las variedades mostradas en la figura 12.

Usando el criterio de los tres términos:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left[i \left(\frac{a_{i+1}}{a_i} \right) - (i-1) \left(\frac{a_i}{a_{i-1}} \right) \right]. \quad (31)$$

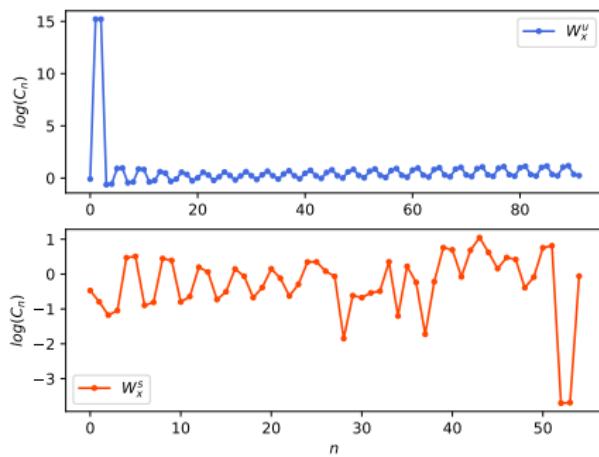


Figura: Convergencia de tres términos asociada a las variedades en la figura 12.

Existencia de puntos homoclínicos

Siendo que el resultado son polinomios, se puede aplicar el método de Newton, o cualquier otro, en dos dimensiones para resolver $\mathcal{P}^u = \mathcal{P}^s$. Concretamente se tienen

$$W^s(t) = (\mathcal{P}_x(t), \mathcal{P}_y(t)), \quad W^u(\tau) = (\mathcal{P}_x(\tau), \mathcal{P}_y(\tau)) \quad (32)$$

$$W^s(t) = W^u(\tau), \quad (33)$$

la intersección se encontrará en $I_t \times I_\tau$. En el espacio fase la intersección se verá como el producto cartesiano de $W^s(I_t) \times W^u(I_\tau)$ formando una sección en la que se garantiza hay un punto homoclínico o heteroclínico.

Estándar

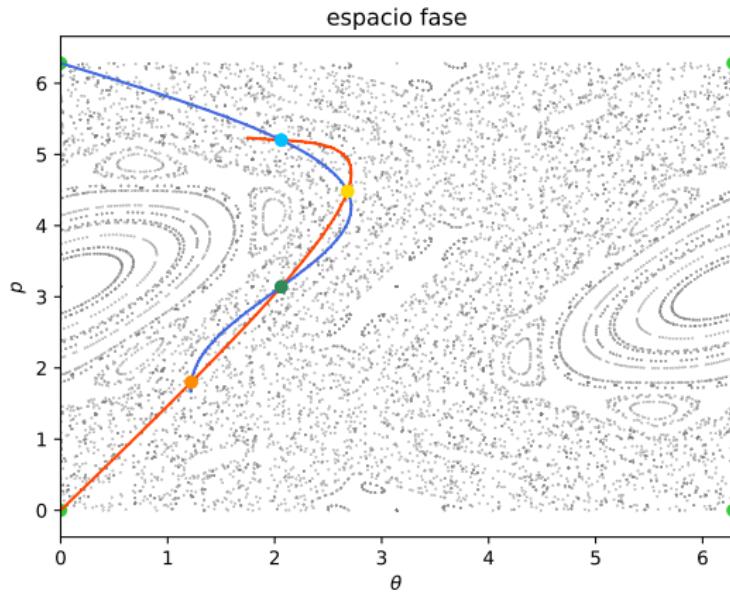


Figura: Cruces de W^u , W^s de orden 120 para el mapeo estándar con $k = 1.5$, usando una tolerancia de 10^{-6} .

Hénon

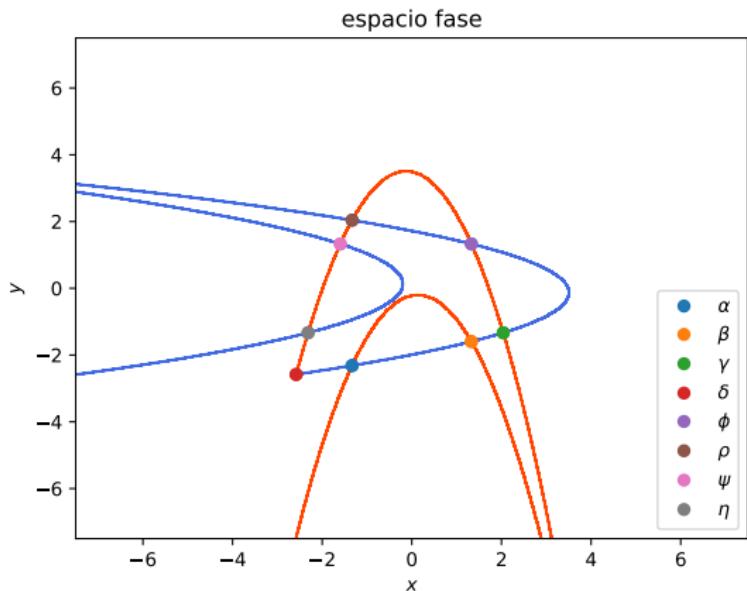


Figura: Cruces de W^u , W^s , con una tolerancia de 10^{-6} .

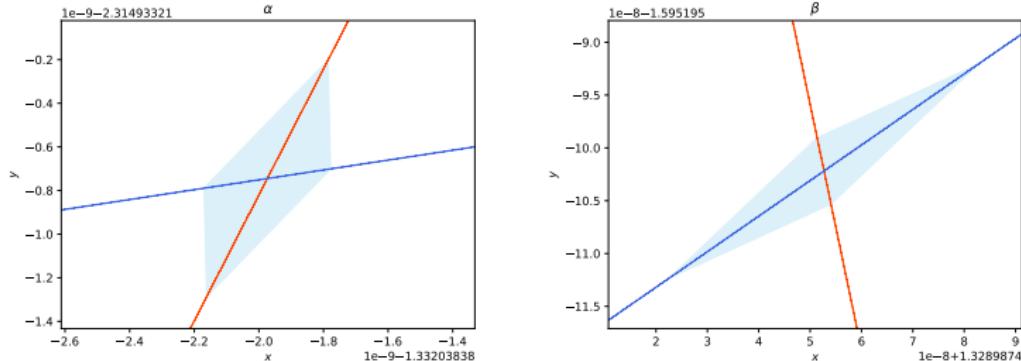


Figura: Intervalos de intersecciones entre las variedades estable e inestable del mapeo de Hénon.

Exponencial

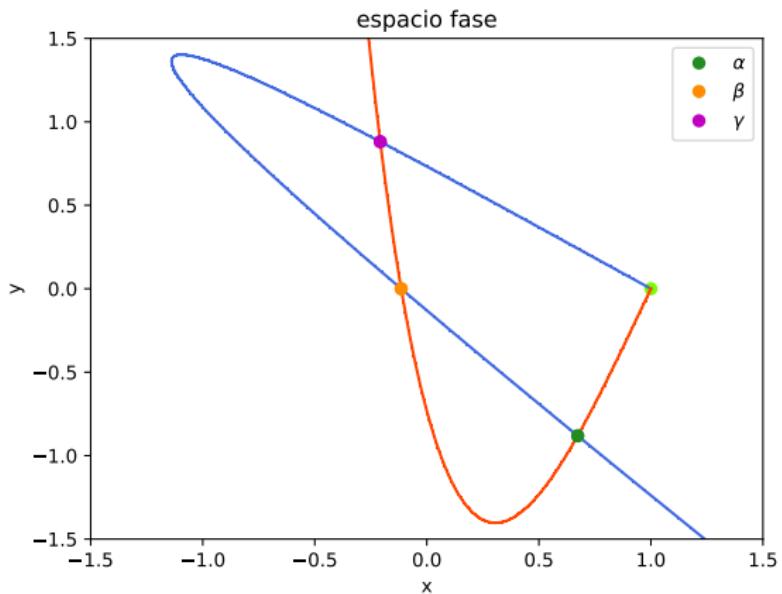


Figura: Intersecciones en el mapeo exponencial con $a = 5.7$, con una tolerancia de 10^{-6} .

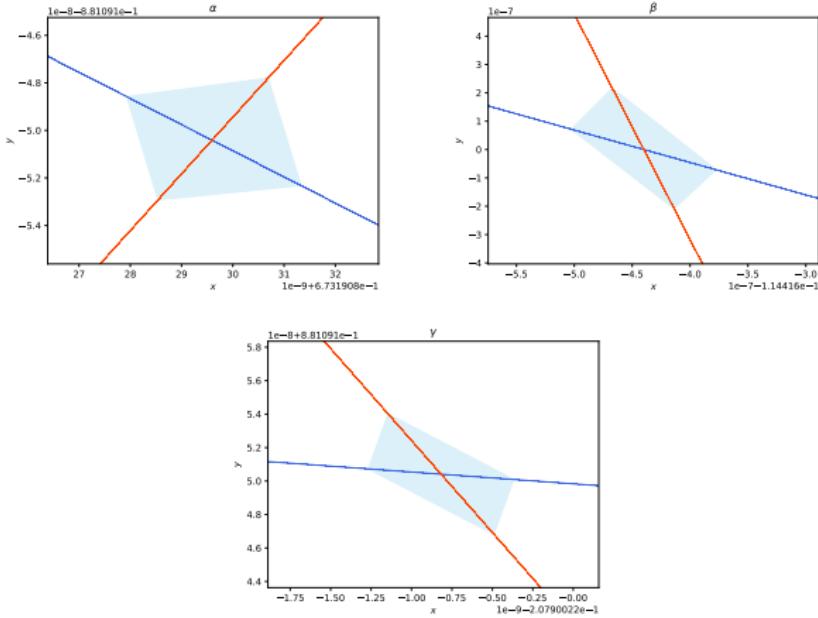


Figura: Intervalo de intersección de las variedades estable e inestable en el mapeo exponencial.

Rectángulo fundamental

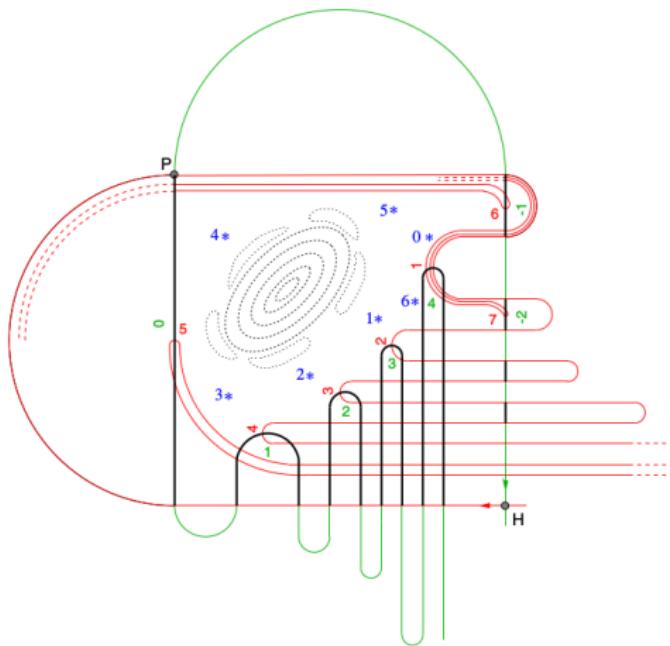


Figura: Diagrama ilustrativo de la topología de una herradura en un sistema Hamiltoniano de dos dimensiones.[8]

Reescribiendo la ecuación de invariancia (7) para el caso de la variedad estable, se obtiene:

$$f_{a,b}^{-1}(W_0^s(t)) = W_0^s(\lambda^s t). \quad (34)$$

Aplicando el mapeo de Hénon (26) a la ecuación (34) resulta

$$W_0^s(t) = f_{a,b}(W_0^s(\lambda^s t)), \quad (35)$$

que se reescribe como (35),

$$W_0^s\left(\frac{t}{\lambda^s}\right) = f_{a,b}(W_0^s(t)). \quad (36)$$

Como $|\lambda^s| < 1$ la ecuación (36) muestra que aplicar el mapeo es análogo a tener la variedad estable evaluada en un valor mayor del parámetro, puesto que $1/\lambda^s > 1$.

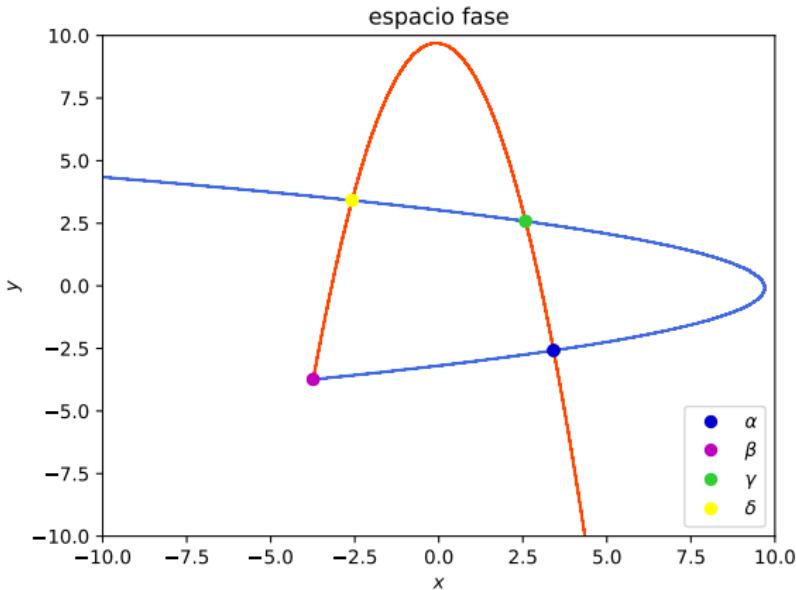


Figura: Variedades estable e inestable de orden 250, para el mapeo de Hénon con $a = 6.5$, $b = 1.$, en el intervalo $t = [0., 100.]$. El punto ω denota el punto fijo mientras que α, β, γ son las primeras intersecciones de las variedades.

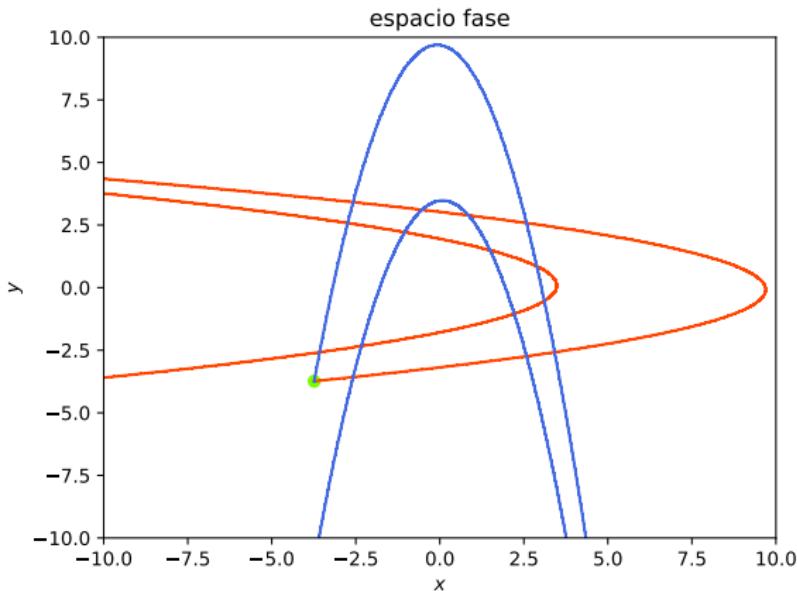


Figura: Primera aplicación del mapeo a los polinomios de orden 250, $t = [0, 100]$.

Para saber cuál es este error se usó la ecuación (36),

$$E_1(t) = \left\| W_0^s \left(\frac{t}{\lambda^s} \right) - f_{a,b}(W_0^s(t)) \right\|_{\infty}, \quad (37)$$

generalizando obtenemos

$$E_n(t) = \left\| (f_k)^n \left(W_0^s \left(\frac{t}{\lambda^s} \right) \right) - (f_k)^{n-1}(W_0^s(t)) \right\|_{\infty}. \quad (38)$$

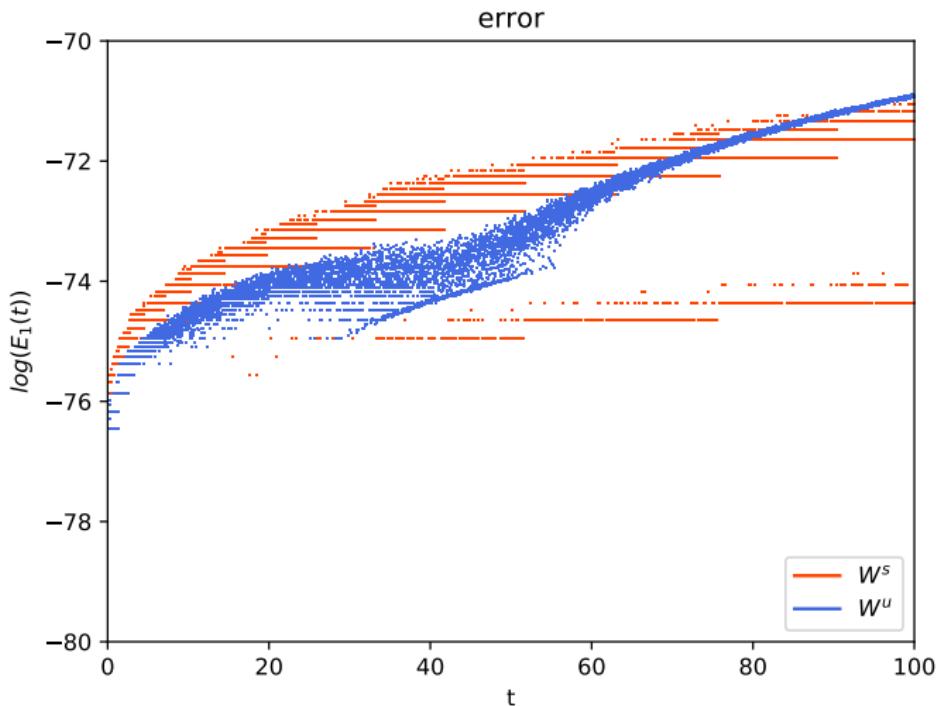
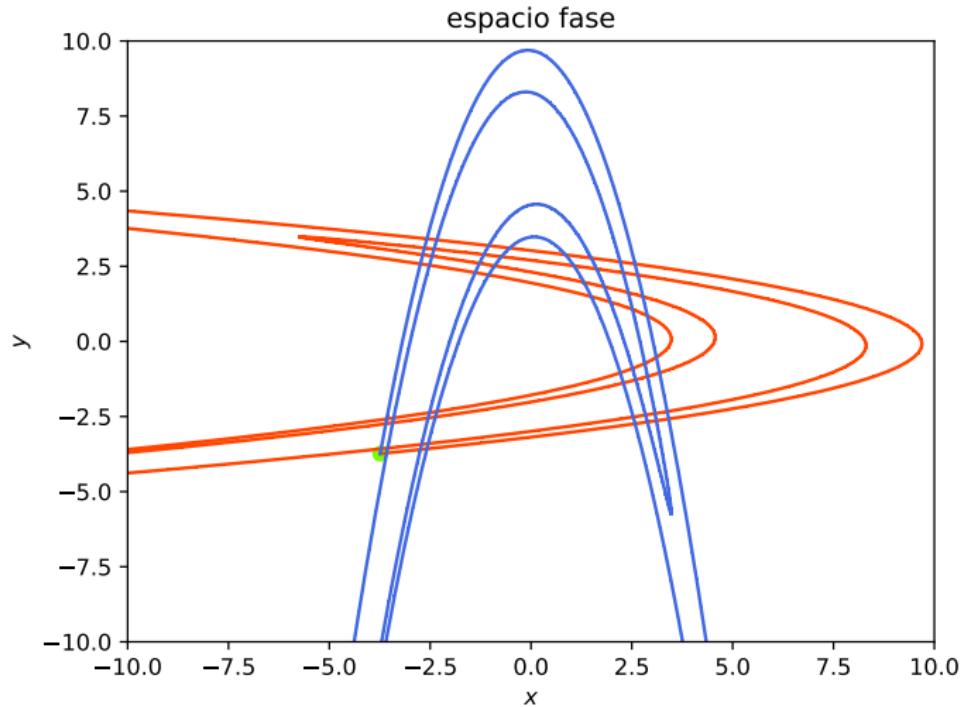


Figura: Error en el polinomio que resulta de aplicar el mapeo a la parametrización de orden 250.

La segunda aplicación del mapeo a los polinomios,
 $(W_{x2}^s, W_{y2}^s) = f_{a,b}(W_{x1}^s, W_{y1}^s)$



La tercera aplicación

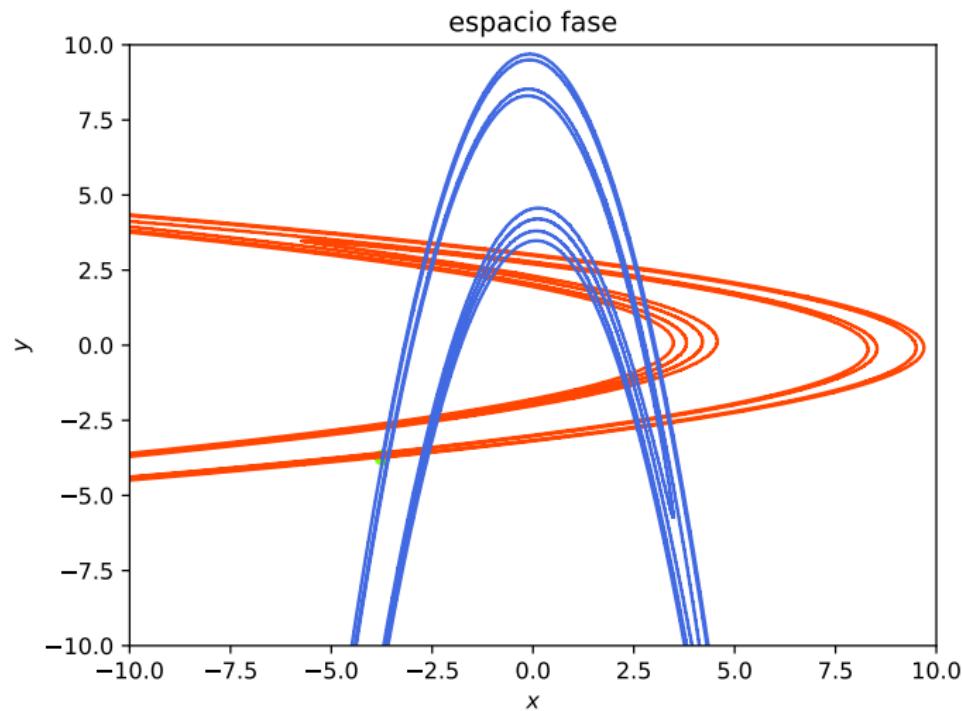


Figura: Tercer aplicación del mapeo a los polinomios de orden 250.

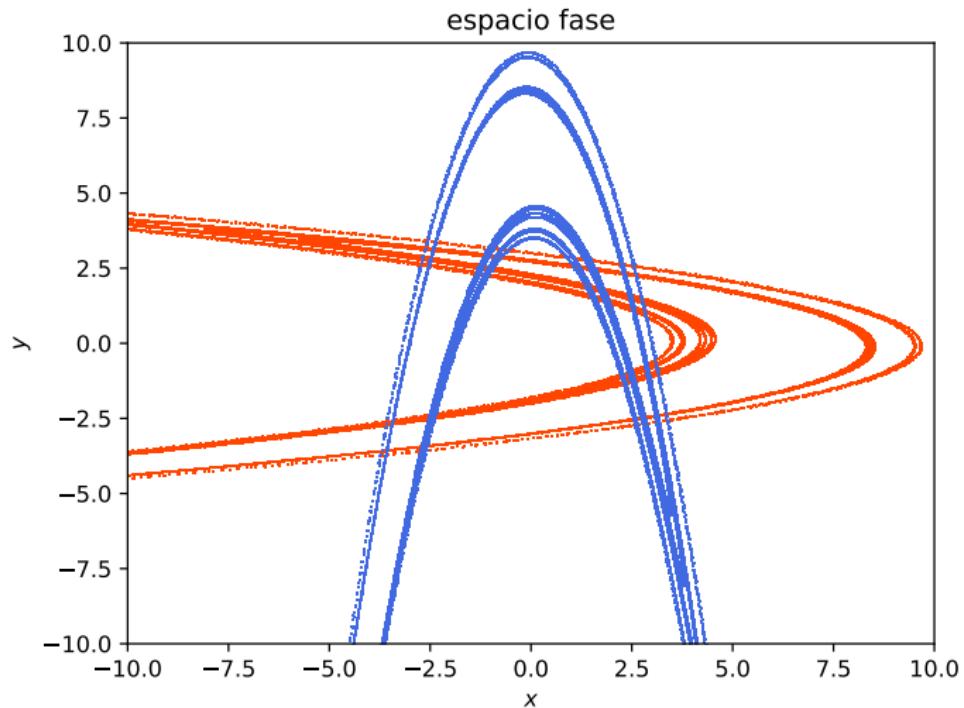


Figura: Cuarta aplicación del mapeo a los polinomios de orden 250.

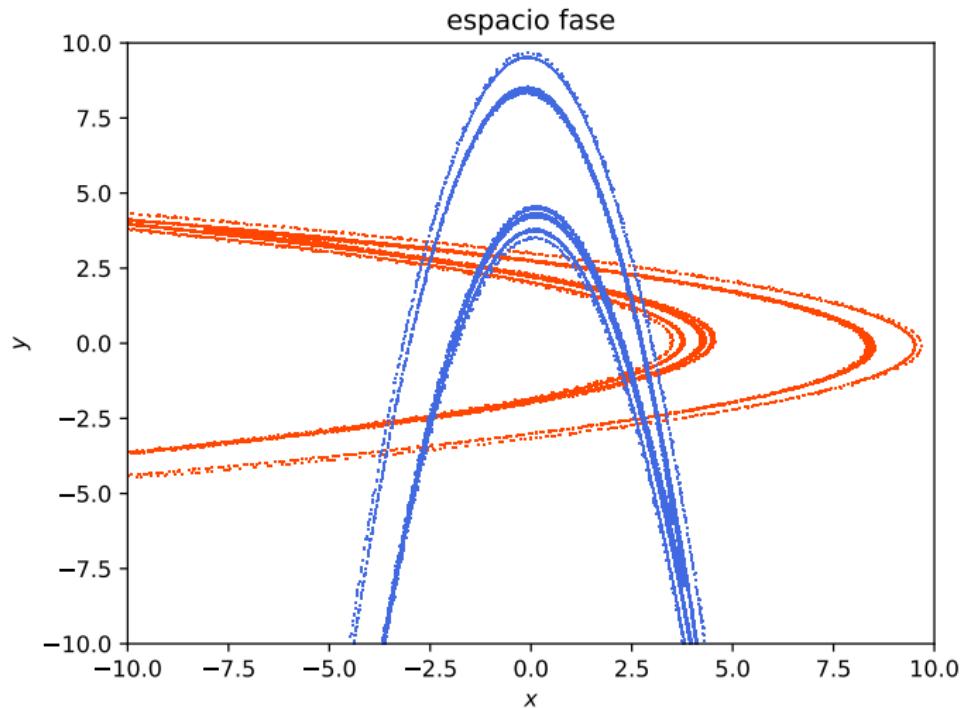


Figura: Quinta aplicación del mapeo a los polinomios de orden 250.

Conclusiones y perspectivas

- El método es eficiente para calcular variedades estables e inestables en comparación con los métodos iterativos.
- Se puede estudiar más sobre el comportamiento de las variedades.
- Es posible calcular puntos homoclínicos y heteroclínicos.
- Mediante la iteración de la parametrización bajo el mapeo es posible obtener más sobre las variedades.
- Generalizar el método para otro tipo de sistemas.
- Utilizar cómputo validado.

Bibliografía |

-  Interval Arithmetic (paquete de julia).
[https://juliaintervals.github.io/IntervalArithmetic.jl/stable/.](https://juliaintervals.github.io/IntervalArithmetic.jl/stable/)
-  Interval Root Finding (paquete de julia).
[https://github.com/JuliaIntervals/IntervalRootFinding.jl.](https://github.com/JuliaIntervals/IntervalRootFinding.jl)
-  Static Arrays (paquete de julia).
[https://github.com/JuliaArrays/StaticArrays.jl.](https://github.com/JuliaArrays/StaticArrays.jl)
v0.7.2.
-  Validated Numerics (paquete de julia).
[https://github.com/JuliaIntervals/ValidatedNumerics.jl.](https://github.com/JuliaIntervals/ValidatedNumerics.jl)

Bibliografía II

-  J. Figueras A. Luque y J. Mondelo Á. Haro, M. Canadell.
The Parameterization Method for Invariant Manifolds, volume 195 of
Applied Mathematical Sciences.
Springer, 1 edition, 2010.
-  Vladimir I. Arnol'd.
Mathematical Methods of Classical Mechanics, volume 1 of *Analytic Mechanics*.
Springer-Verlag, 2nd edition, 1992.
-  C. Lipp y T.H. Seligman C. Jung.
The inverse scattering problem for chaotic hamiltonian systems.
Annals of Physics, 275:151–189, 1999.

Bibliografía III

-  O. Merlo y T.H. Seligman C. Jung, C. Mejía-Monasterio.
Self-pushing effect in chaotic scattering.
New Journal of Physics, 6, 2004.
-  Robert L. Devaney.
An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.
Addison-Wesley, 2nd edition, 1989.
-  Jack K. Hale.
Ordinary Differential Equations.
Krieger Pub Co, 1980.
-  Charles P. Poole y John L. Safko Herbert Goldstein.
Classical Mechanics.
Addison-Wesley, 3 edition, 2000.

Bibliografía IV



J.D Mireles James.

Elementary example of the parametrization method; stable and unstable manifolds of the standard map.

[http:](http://cosweb1.fau.edu/~jmirelesjames/standardMapNotes.pdf)

[//cosweb1.fau.edu/~jmirelesjames/standardMapNotes.pdf](http://cosweb1.fau.edu/~jmirelesjames/standardMapNotes.pdf),
2007.



J.D. Mireles James y Christian Reinhardt Jan Bouwe van den Berg.
Computing (un)stable manifolds with validated error bounds:
non-resonant and resonant spectra.

[http://cosweb1.fau.edu/~jmirelesjames/parametrization_
draft9.pdf](http://cosweb1.fau.edu/~jmirelesjames/parametrization_draft9.pdf), 2015.

Bibliografía V



Glen R. Hall y Dan Offin Kenneth R. Meyerb.

Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem, volume 90 of *Applied Mathematical Sciences*.
Springer, 2nd edition, 2009.



James D. Meiss.

Differential Dynamical Systems, volume 14 of *Mathematical modeling and computation*.

Society for Industrial and Applied Mathematics ,Philadelphia, 1 edition, 2007.



Edward Ott.

Chaos in Dynamical Systems.

Cambridge University Press, 5th edition, 1993.

Bibliografía VI

-  Robert L. Devaney y Glen R. Hall Paul Banchard.
Ecuaciones diferenciales.
Thomson, 1th edition, 1998.
-  Juergen Quandt.
On the Hartman–Grobman theorem for maps.
Journal of Differential Equations, 64:154–164, 1986.
-  R.Baker Kearfott y Michael J. Cloud Ramon E. More.
Introduction to Interval Analysis.
SIAM, 2009.
-  A. J. Insel y L.E. Spence Stephen H. Friedberg.
Algebra lineal.
Publicaciones Culturales S.A., 1 edition.

Bibliografía VII



Gerald Teschl.

Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems.

Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society
Providence, Rhode Island, 1 edition, 2011.



Anthony M. Bloch y Melvin Leok Tomoki Ohsawa.

Discrete Hamilton-Jacobi theory.

SIAM J. Control Optim., 49:1822–1856, 2009.



W. Tucker.

Validated Numerics: A short introduction to Rigorous Computations.

Princeton University Press.



Ferdinand Verhulst.

Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems.

Springer, 1985.

Bibliografía VIII



Mateo Wirth.

Invariant manifolds of dynamical systems and an application to space exploration.

http://pi.math.cornell.edu/~templier/junior/final_paper/Mateo_Wirth.pdf.



Calvin D. Ahlbrandt y Allan C. Peterson (auth.).

Discrete Hamiltonian Systems: Difference Equations, Continued Fractions, and Riccati Equations.

Kluwer Texts in the Mathematical Sciences 16. Springer US, 1 edition, 1996.



B. Rückerl y C. Jung.

Hierarchical structure in the chaotic scattering off a magnetic dipole.

J. Phys A: Math., 27:6741–6758, 1994.

Bibliografía IX

-  B. Rückerl y C. Jung.
Scaling properties of a scattering system with an incomplete horseshoe.
J. Phys A: Math., 27:55–77, 1994.
-  Y.F. Chang y G. Corliss.
Ratio-like and recurrence relation tests for convergence of series.
J. Inst. Maths Applies., 25:349–359, 1980.
-  Stephen T. Thornton y Jerry B. Marion.
Classical Dynamics of Particles and Systems.
Thomson, 5th edition, 2004.
-  Vladimir I. Arnol'd y Roger Cooke.
Ordinary Differential Equations.
Springer-Verlag, 1991.

Bibliografía X



Tamás Tél Ying-Cheng Lai.

Transient Chaos, volume 173 of *Applied Mathematical Sciences*.
Springer, 1 edition, 2010.