

El problema de los tres cuerpos: algoritmo de Runge-Kutta. Voluntario 2.

Álvaro Royán González

Física computacional. Grupo A1

1 Fundamento teórico

En este problema se nos pide realizar una simulación del viaje de un cohete desde la Tierra hasta Marte, considerando las interacciones gravitatorias del Sol, la Tierra y Marte. Para ello, el cohete describirá una órbita de transferencia de Hohmann con perihelio a una distancia $d_T = 1,496 \cdot 10^{11}m$ del Sol y un afelio a $d_M = 2,2739 \cdot 10^{11}m$. Una vez el cohete está suficientemente cerca del planeta rojo se realiza un nuevo cambio de velocidad que se aplica en forma de pulso instantáneo.

Únicamente vamos a calcular la trayectoria de la nave, podemos considerar que el Sol permanece inmóvil en el (0,0) y que tanto la Tierra como Marte describen órbitas circulares de frecuencias angulares $\omega_T = 1.99 \cdot 10^{-7}rad/s$ y $\omega_M = 1.06 \cdot 10^{-7}rad/s$ respectivamente. Las órbitas de estos planetas tienen una excentricidad próxima a 0 (la órbita es elíptica realmente pero los ejes son similares) y son mucho más masivos que el cohete por lo que su efecto es despreciable.

Al considerar estas simplificaciones solo necesitamos obtener las ecuaciones de movimiento del cohete, empleamos la mecánica de Hamilton. La lagrangiana del sistema es:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2) + Gm \left[\frac{M_S}{r} + \frac{M_M}{\sqrt{r^2 + d_M^2 + 2rd_M \cos(\varphi - \varphi_M)}} + \frac{M_T}{\sqrt{r^2 + d_T^2 + 2rd_T \cos(\varphi - \varphi_T)}} \right] \quad (1)$$

Donde las masas del cohete, el Sol, la Tierra y Marte son m , M_S , M_M y M_T respectivamente, r es la distancia del cohete al Sol. Se deduce fácilmente que los momentos generalizados toman la forma $p_r = m\dot{r}$ y $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$. A partir de este resultado podemos calcular la hamiltoniana.

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - Gm \left[\frac{M_S}{r} + \frac{M_M}{\sqrt{r^2 + d_M^2 + 2rd_M \cos(\varphi - \varphi_M)}} + \frac{M_T}{\sqrt{r^2 + d_T^2 + 2rd_T \cos(\varphi - \varphi_T)}} \right] \quad (2)$$

Luego las ecuaciones de movimiento son (para el caso $m = 1$):

$$\dot{r} = p_r \quad (3)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{r^2} \quad (4)$$

$$\dot{p}_r = \frac{p_\varphi^2}{r^3} - G \left[\frac{M_S}{r^2} + \frac{M_M(r - d_M \cos(\varphi - \varphi_M))}{(r^2 + d_M^2 + 2rd_M \cos(\varphi - \varphi_M))^{3/2}} + \frac{M_T(r - d_T \cos(\varphi - \varphi_T))}{(r^2 + d_T^2 + 2rd_T \cos(\varphi - \varphi_T))^{3/2}} \right] \quad (5)$$

$$\dot{p}_\varphi = -G \left[\frac{M_M r d_M \sin(\varphi - \varphi_M)}{(r^2 + d_M^2 - 2r d_M \cos(\varphi - \varphi_M))^{3/2}} + \frac{M_T r d_T \sin(\varphi - \varphi_T)}{(r^2 + d_T^2 - 2r d_T \cos(\varphi - \varphi_T))^{3/2}} \right] \quad (6)$$

Para que el programa funcione correctamente es necesario realizar una escala de las distancias, consideramos unas unidades tales que $10^9 m = 1 u$. Además eliminamos la variable m ya que no tiene ningún efecto sobre la trayectoria.

Las ecuaciones de movimiento las vamos a resolver empleando el algoritmo de Runge-Kutta. Este aproxima el valor de una determinada función transcurrido un tiempo h haciendo uso de una ecuación diferencial de primer orden $\dot{y}(t) = f(y, t)$.

$$y(t_0 + h) \approx y(t_0) + \frac{1}{6} \left(k^{(1)} + 2k^{(2)} + 2k^{(3)} + k^{(4)} \right) \quad (7)$$

Con los parámetros $k^{(n)}$ de la forma:

$$k^{(1)} = h \cdot f(y_0, t_0) \quad (8)$$

$$k^{(2)} = h \cdot f\left(y_0 + \frac{k^{(1)}}{2}, t_0 + \frac{h}{2}\right) \quad (9)$$

$$k^{(3)} = h \cdot f\left(y_0 + \frac{k^{(2)}}{2}, t_0 + \frac{h}{2}\right) \quad (10)$$

$$k^{(4)} = h \cdot f(y_0 + k^{(3)}, t_0 + h) \quad (11)$$

Este proceso debe aplicarse para las coordenadas y momentos generalizados de r y φ . El valor de h debe de ser pequeño pero como se trabaja con escalas astronómicas lo consideramos del orden de minutos.

El ciclo constituye el bloque principal del programa pero es necesario añadir una condición para proporcionar el impulso orbital. Para esto simplemente calculamos la distancia cohete-Marte $\sqrt{r^2 + d_M^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{d}_M}$ en cada iteración y si resulta ser menor que la distancia a la que se pretende orbitar d_{orb} se le proporciona un impulso.

El impulso consta de dos términos, la velocidad de Marte v_M (para que el cohete sea capaz de seguirlo) y la velocidad orbital v_{orb} respecto del mismo. El primer término tiene un valor $v_M = \omega_M d_M$ y se aplica en la dirección $(-\sin(\omega_M t + \varphi_{M0}), \cos(\omega_M t + \varphi_{M0}))$ (en cartesianas), en la misma dirección y sentido del planeta. El módulo del segundo término se obtiene considerando fuerza gravitatoria igual a fuerza centrípeta luego $v_{orb} = \sqrt{\frac{GM_M}{r_M}}$, en este caso la dirección debe de ser normal al vector $\vec{r} - \vec{d}_M$, tenemos dos posibilidades $\pm \left((\vec{r} - \vec{d}_M)_y, -(\vec{r} - \vec{d}_M)_x \right)$.

Con esto tenemos las componentes de la velocidad del cohete tras el impulso en coordenadas cartesianas. Podemos obtener los momentos generalizados a partir de $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y})$ mediante el siguiente desarrollo:

$$\vec{r} = r\hat{\rho} \Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\hat{\rho} + r\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \dot{r}\hat{\rho} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi} \quad (12)$$

Podemos proyectar teniendo en cuenta que $\hat{\rho} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ y $\hat{\varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$.

$$\dot{r} = \vec{v} \cdot \hat{\rho} = \dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi \quad (13)$$

$$r\dot{\varphi} = \vec{v} \cdot \hat{\varphi} = -\dot{x}\sin\varphi + \dot{y}\cos\varphi \quad (14)$$

Y con estas ecuaciones (teniendo en cuenta que como la masa no influye en la trayectoria del cohete tomamos $m = 1$) se obtienen los momentos lineal y angular de la nave tras el impulso.

$$p_r = \dot{r} = \dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi \quad (15)$$

$$p_\varphi = r^2\dot{\varphi} = r(-\dot{x}\sin\varphi + \dot{y}\cos\varphi) \quad (16)$$

Durante todo el proceso se le proporcionan dos impulsos al cohete, el inicial y el necesario para orbitar Marte. Para realizar un balance energético calculamos la variación de energía cinética en esos dos momentos (la potencial permanece invariante ya que la posición no cambia). Tomamos la energía por unidad de masa del cohete.

2 Resultados

Si nos ceñimos estrictamente a la órbita de transferencia de Hohmann solo tenemos unas condiciones iniciales posibles. El cohete parte de la Tierra (perihelio) y una vez llega al afelio coincide con Marte. Sin embargo, vamos a considerar velocidades mayores al caso anterior, solo necesitamos que las trayectorias del planeta rojo y la nave coincidan en un punto, aunque esto no sea tan eficiente en términos energéticos ni de tiempo.

Vamos a calcular la velocidad de lanzamiento del cohete para realizar la órbita de Hohmann. La energía del sistema se conserva, usamos que la energía total en una órbita de este tipo es de la forma $E = -GM/2a$, con a el semieje mayor de la elipse (coincide con $(d_M + d_T)/2$).

$$E = \frac{v_o^2}{2} - G\frac{M_S}{d_T} = -G\frac{M_S}{2d_M} \quad (17)$$

Despejamos v_o obteniéndose:

$$v_o = \sqrt{2GM_s \left[\frac{1}{d_T} - \frac{1}{d_M + d_T} \right]} \quad (18)$$

Es decir, unos 32,700 km/s. En el programa consideramos una velocidad algo mayor (32,800 km/s) ya que el cohete debe de escapar de la atracción de la Tierra, frenando en el proceso. Cabe destacar que en esta deducción hemos ignorado los efectos gravitatorios de la Tierra y Marte. Con esto tenemos nuestras condiciones iniciales $\vec{v} = d_T\hat{i}$ y $\vec{v} = v_o\hat{j}$. Únicamente falta determinar el radio orbital y la posición de Marte durante el lanzamiento.

Para el radio orbital tomamos 50.000 km teniendo en cuenta que un satélite geoestacionario en la Tierra orbita a unos 35.000 km, tomamos un valor del mismo orden de magnitud. La posición de Marte se obtiene probando distintos valores y calculando la distancia de máximo acercamiento. Con estas condiciones es válido un valor de $\varphi_{M0} = 0,2502\pi \text{ rad}$ ($\varphi_{T0} = 0$ por simplicidad).

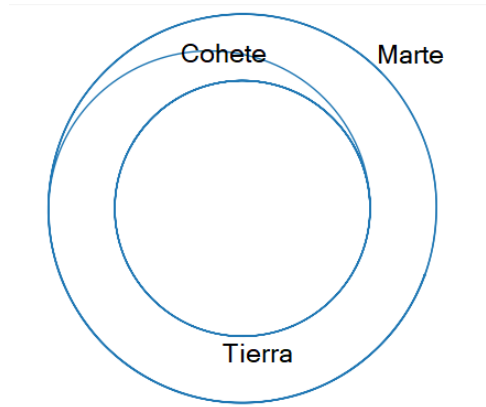


Figura 1: Órbitas de los tres cuerpos.

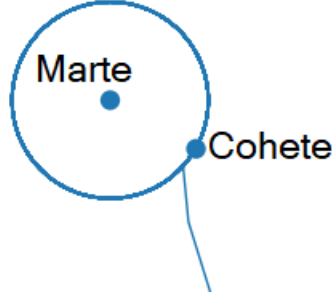


Figura 2: Órbita del cohete en torno a Marte.

Podemos ver como efectivamente se consigue una órbita de transferencia de Hohmann y el impulso para órbitar Marte es correcto, se obtiene un movimiento circular.

En cuanto a la energía empleada en el proceso (tomando siempre la cinética únicamente, la potencial no cambia en los impulsos) partimos de una órbita circular en torno al Sol con frecuencia angular $\omega_T = 1.99 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}$ con radio $d_T = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$ a una velocidad v_o dada por 18. La variación de energía es:

$$\Delta E_1 = \frac{1}{2}v_o^2 - \frac{1}{2}\omega_T^2 d_T^2 = 9,45 \cdot 10^7 \text{ J/kg} \quad (19)$$

Para el segundo impulso consideramos que el impulso orbital en torno a Marte y el impulso en torno al Sol son perpendiculares y calculamos la velocidad de llegada a Marte mediante conservación del momento angular (posición y velocidad normales tanto en el afelio como en el perihelio).

$$L = vr = cte \implies v' = v_o \frac{d_T}{d_M} \quad (20)$$

$$\Delta E_2 = \frac{1}{2} [v_{orb}^2 + \omega_M^2 d_M^2] - \frac{1}{2}v'^2 = 5,81 \cdot 10^7 \text{ J/kg} \quad (21)$$

Este último valor es aproximado, estamos considerando que una serie de vectores son proporcionales cuando no necesariamente lo son, va a depender de la velocidad del cohete y la posición de tanto Marte como el cohete una vez se proporciona el impulso. Sin embargo, proporciona un valor que va a poder compararse con el del programa para verificar su validez.

En el programa estamos trabajando con los momentos generalizados por lo que la energía cinética toma la forma de 22, simplemente evaluamos la expresión antes y después del impulso para calcular la variación energética.

$$T = \frac{1}{2}p_r^2 + \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{r^2} \quad (22)$$

Se obtienen $\Delta E_1 = 9,45 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$ y $\Delta E_2 = 5,24 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$, en ambos casos valores similares a los calculados teóricamente siendo mejor el primero ya que no se realizan aproximaciones.

El cálculo del tiempo se puede realizar partiendo de la tercera ley de Kepler y considerando la mitad del periodo orbital (para el caso de la transferencia elíptica) resultando en la ecuación 23. En el programa se lleva un conteo del tiempo en cada paso, simplemente sacamos su valor por pantalla cuando se proporciona el impulso.

$$\Delta t = \frac{\tau}{2} = \pi \sqrt{\frac{(d_T + d_M)^3}{8GM_S}} \quad (23)$$

El resultado teórico es de $\Delta t = 258,3 \text{ días}$ mientras que el dado por el programa es $\Delta t = 219,3 \text{ días}$, hay una diferencia considerable pero son del mismo orden de magnitud. El resultado teórico no considera

las interacciones con la Tierra ni con Marte, el valor del programa puede ser mayor ya que inicialmente el cohete va muy rápido, de forma que pasa poco tiempo cerca de la Tierra, pero cuando esta cerca de Marte este empieza a atraerlo durante un tiempo mayor ya que en esta región la velocidad es más baja, resultando en un tiempo de transferencia menor. Además hemos tomado una velocidad mayor a v_o en el programa, con lo que el proceso va a ser más rápido.

Con estos mismos parámetros puede darse que el cohete no sea capaz de seguir al planeta rojo. Esto ocurre si consideramos un valor demasiado grande del radio orbital, entonces empieza a hacerse más relevante el efecto del Sol y el cohete escapa.

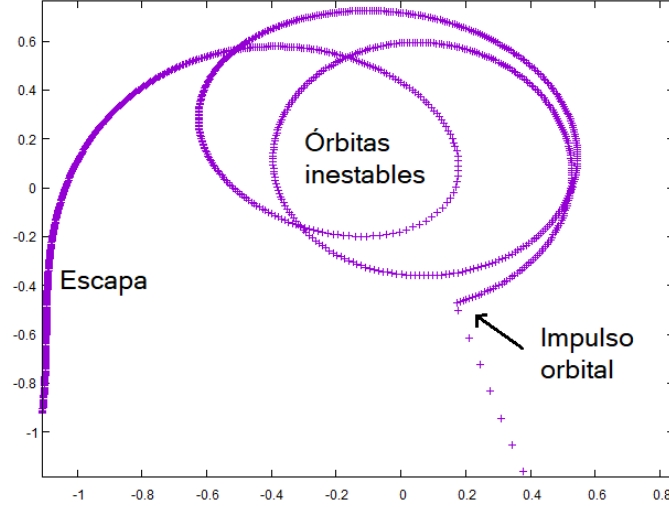


Figura 3: Trayectoria en la proximidad de Marte para $d_{orb} = 500.000$ km.

La figura 3 está centrada en Marte, si miramos el sistema al completo no se aprecia el movimiento. Podemos ver como la nave se aproxima mucho al planeta rojo pero no es capaz de mantenerse cerca durante mucho tiempo, da un total de tres vueltas para finalmente alejarse y orbitar en torno al Sol.

Hasta aquí solo hemos considerado el caso particular de la órbita de transferencia de Hohmann, vamos a considerar distintas condiciones iniciales en las que las trayectorias de Marte y el cohete coincidan en algún punto para observar comportamientos distintos. Por contra, ya no podemos considerar las expresiones teóricas de la variación de energía ni de tiempo, las suposiciones anteriores dejan de ser ciertas.

El primer caso es un lanzamiento con una velocidad inicial de 35.000 km/s, debe de cumplirse $\varphi_{M0} = 0,215\pi$ rad. El radio orbital considerado es de 500.000 km. El resultado es el de la figura 4.

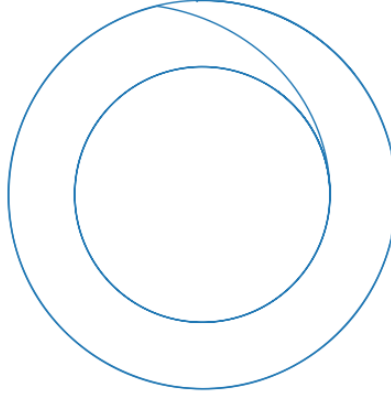


Figura 4: Órbita de transferencia para velocidades superiores.

Esta órbita no presenta ninguna característica relevante a comentar, simplemente se alcanza la órbita superior más rápidamente (123,3 días). La energía empleada en el proceso naturalmente es mayor, siendo $\Delta E_1 = 1,69 \cdot 10^8 J/kg$ y $\Delta E_2 = 2,58 \cdot 10^7 J/kg$.

Si miramos la trayectoria del cohete en la proximidad de Marte (figura 5) observamos una órbita que no es circular y que precesiona. La órbita tiene forma de elipse cuyos ejes rotan, esto no es apreciable del todo en la imagen pero si se representa la posición en función del tiempo resulta evidente. También podemos ver como aparecen dos círculos concéntricos en la figura, sus radios coinciden con los semiejes de la elipse.



Figura 5: Órbita respecto a Marte precesionando.

Si estudiamos las órbitas empleando la relatividad general se llega a este efecto, denominado precesión apsidal. Por contra, nuestro desarrollo sigue las leyes de Newton por lo que esto no debería de aparecer. Realmente se debe a la atracción gravitatoria del Sol que arrastra a la nave, en el caso anterior no se apreciaba ya que la órbita respecto a Marte era circular. Aunque se trata de algo anecdótico es curioso la similitud (aunque solo al inicio) entre una órbita estudiada con la relatividad general y una en la que se añade un tercer cuerpo, el Sol.

Otra posibilidad es un lanzamiento a 34.000 km/s con $\varphi_{M0} = 0,2266\pi rad$ y $d_{orb} = 50.000 km$. Los resultados de las trayectorias son similares a los del primer caso, únicamente hay diferencias en el momento en el que se alcanza Marte. El tiempo del viaje es de 146,75 días y las variaciones energéticas $\Delta E_1 = 1,35 \cdot 10^8 J/kg$ y $\Delta E_2 = -5,3 \cdot 10^6 J/kg$, en este caso el cohete necesita frenar para orbitar Marte.

En la tabla siguiente se muestran algunos casos que también llevan al planeta rojo, no se muestran las trayectorias ya que todas son del mismo tipo. Siempre se tiene $d_{orb} = 50.000 km$.

v_o km/s	φ_{M0}/π rad	Δt días	ΔE_1 J/kg	ΔE_2 J/kg
34.250	0,22318	139,8	$1,43 \cdot 10^7$	$-1,07 \cdot 10^7$
34.500	0,22000	133,8	$1,52 \cdot 10^8$	$-1,78 \cdot 10^7$
34.750	0,21723	128,6	$1,60 \cdot 10^8$	$-1,28 \cdot 10^7$
35.250	0,21275	119,7	$1,78 \cdot 10^8$	$-4,61 \cdot 10^7$

Tabla 1. Tiempo de viaje y variaciones energéticas para distintas condiciones iniciales.

También se ha observado el comportamiento de las órbitas en torno a Marte para distintas velocidades. Se muestran 5 casos en la figura 6, desde la órbita circular hasta la parabólica de escape. Podemos ver como en el primer caso se trata de una circunferencia perfecta y conforme se aumenta la velocidad la órbita se va estirando dando lugar a una elipse cada vez más grande hasta que va demasiado rápido para mantenerse junto a Marte.

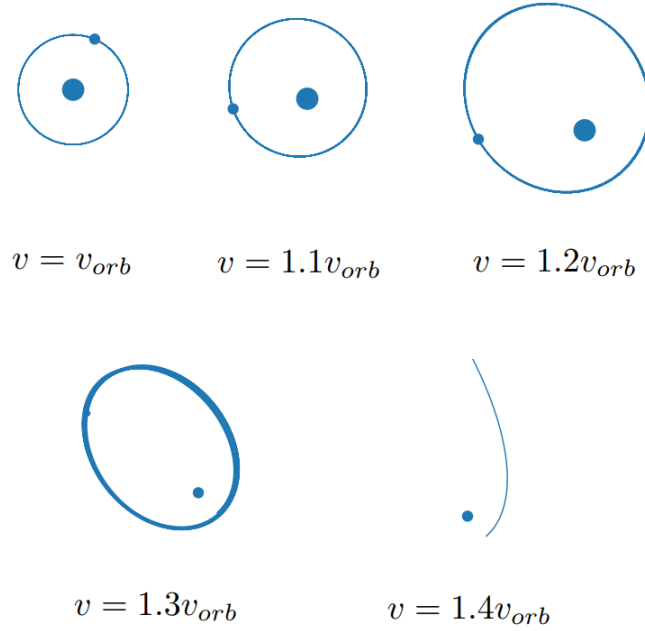


Figura 6: Órbitas en torno a Marte en función de la velocidad.

El aumento de la elipse es considerable, hay que tener en cuenta que en los últimos dos casos hay un cambio de escala (1:2) ya que la órbita salía del marco. También puede verse como en el cuarto caso la trayectoria ya no es estable y deja de ser cerrada (grosor de la línea), la interacción con Marte se debilita con la distancia.

En el programa el cohete escapa a menor velocidad de la teórica para la interacción de dos cuerpos ($v_{escape} = \sqrt{2}v_{orb}$, $1,4 < \sqrt{2}$), esto se debe de nuevo al efecto del Sol. En la figura 7 se muestra la órbita del cohete en torno al Sol una vez escapa de la atracción de Marte, tiene un radio algo mayor debido al impulso orbital.

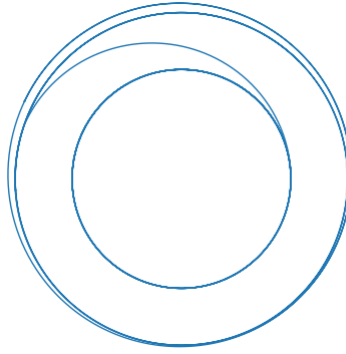


Figura 7: Caso $v = 1.4v_{orb}$ centrado en el Sol.

3 Conclusiones

Con esto se ha verificado la validez del algoritmo de Runge-Kutta en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales, habiendo aplicado el método en cuatro casos distintos.

También se ha observado el comportamiento de las órbitas de una masa ligera en un sistema de tres cuerpos masivos en función de la velocidad, tanto los casos estables como los inestables, mostrando un comportamiento similar a las órbitas relativistas en uno de los casos. Además se comprueba que la velocidad de escape de un cuerpo en órbita verifica la ecuación $v_{escape} = \sqrt{2}v_{orb}$, aunque en nuestro caso particular el valor sea un poco mayor ya que no se trata de un sistema aislado.

Además se han obtenido una serie de condiciones iniciales con las que es posible llevar una nave desde la Tierra hasta Marte, siendo unas más económicas que otras aunque también más lentas. Con esto se estima la duración de un viaje de este tipo, del orden de los cientos de días.

Aunque solo se resuelven las ecuaciones de movimiento del cohete el resto de cuerpos siguen movimientos bastante estables y son mucho mayores que el cohete por lo que resolver sus ecuaciones solo va a llevar a un mayor tiempo de ejecución.

4 Referencias

1. Órbita de transferencia de Hohmann. (2022, 5 de febrero). Wikipedia, La enciclopedia libre. Fecha de consulta: 16:26, junio 20, 2022 desde enlace.
2. Leyes de Kepler. (2022, 11 de mayo). Wikipedia, La enciclopedia libre. Fecha de consulta: 16:27, junio 20, 2022 desde enlace.
3. Precesión apsidal. (2022, 13 de junio). Wikipedia, La enciclopedia libre. Fecha de consulta: 17:27, junio 20, 2022 desde enlace.