Álvaro Fernández García

1.- $\boldsymbol{T(n)=2T\left(\frac{n}{2}\right)+1}$

Realizamos el cambio de variable : $n=2^m \rightarrow m=\log_2(n)$

$$T(2^m)=2T(2^{m-1})+1 \;=$$
$$T(2^{m-1})=2T(2^{m-2})+1$$
$$2*[2T(2^{m-2})+1]+1 \;=\; 4T(2^{m-2})+3 \;=$$
$$T(2^{m-2})=2T(2^{m-3})+1$$
$$4*[2T(2^{m-3})+1]+3 \;=\; 8T(2^{m-3})+7$$

El patrón general es el siguiente:

$$2^i T(2^{m-i})+(2^i-1)$$

Caso base : $T(1)=1$, el cual se cumple para $i=m$:

$$2^m T(2^0)+(2^m-1) \;=\; 2^m+2^m-1 \;=\; 2^{m+1}-1$$

Deshacemos el cambio:

$$2^{m+1}-1 \;=\; 2^{\log_2(n)+1}-1 \;=\; 2n-1 \;\in\; O(n)$$

2.- $\boldsymbol{T(n)=2T(\frac{n}{2})+n}$

Realizamos el cambio de variable : $n=2^m \;\rightarrow\; m=\log_2(n)$

$$T(2^m)=2T(2^{m-1})+2^m \;=$$
$$T(2^{m-1})=2T(2^{m-2})+2^{m-1}$$
$$2*[2T(2^{m-2})+2^{m-1}]+2^m \;=\; 4T(2^{m-2})+2^m+2^m \;=\; 4T(2^{m-2})+2*2^m \;=$$
$$T(2^{m-2})=2T(2^{m-3})+2^{m-2}$$
$$4*[2T(2^{m-3})+2^{m-2}]+2*2^m \;=\; 8T(2^{m-3})+3*2^m \;=$$
$$T(2^{m-3})=2T(2^{m-4})+2^{m-3}$$
$$8*[2T(2^{m-4})+2^{m-3}]+3*2^m \;=\; 16*T(2^{m-4})+4*2^m$$

El patrón general es el siguiente:

$$2^i T(2^{m-i})+(2^m*i)$$

Caso base : $T(1)=1$, el cual se cumple para $i=m$:

$$2^m T(2^0)+(2^m*m) \;=\; 2^m+2^m*m$$

Deshacemos el cambio:

$$2^m+2^m*m \;=\; n+n\log_2(n) \;\in\; O(n*\log(n))$$