MARIOTTI
MARCELLO

ROVERA
VANNI

TRONI
ALESSIO

COMPLEMENTI DI ANALISI

TEORIA DELLA MISURA

Complementi di Analisi

Teoria della misura

M. Mariotti, V. Rovera, A. Troni

4 settembre 2009

Indice

1 Incipit **1**
1.1 Prima di cominciare bisogna sapere che... 1

2 Misure **7**
2.1 La misura degli insiemi elementari 7
2.2 Misura esterna 11
2.3 Misura di Lebesgue 13

3 Complementi **19**
3.1 Ulteriori concetti sulla misura di Lebesgue 19
3.1.1 Misura interna 19
3.1.2 Misurabilità degli insiemi illimitati 20
3.1.3 Misure complete e assolutamente continue 21
3.2 Teoria generale della misura 22
3.2.1 Prolungamento della misura su semianelli dotati di unità 26
3.3 $(\text{Complementi})^2$ 28
3.3.1 L'insieme di Cantor 28
3.3.2 Misurabilità di un insieme secondo Peano-Jordan 31

4 Funzioni misurabili **35**
4.1 Un nuovo punto di vista sulle funzioni 35
4.2 Convergenza di funzioni 40

5 Integrale di Lebesgue **47**
5.1 Definizione dell'integrale 47
5.2 Proprietà dell'integrale 51
5.3 Teoremi di passaggio al limite sotto segno di integrale 61
5.3.1 Funzioni integrali parametriche 66
5.4 Henry Lebesgue vs Bernard Riemann 68
5.5 Misura prodotto. Teoremi di Fubini e Tonelli 69

6 Appendice **77**
6.1 Misura del conteggio 77
6.2 Usi notevoli di Fubini-Tonelli 78
6.3 Ma cosa cambia se la misura è infinita? 80

Capitolo 1

Incipit

IN QUESTO PREAMBOLO diamo alcune definizioni fondamentali per il seguito, esibendo anche qualche esempio ed alcune proposizioncine utili per poter assimilare adeguatamente questi concetti.

1.1 Prima di cominciare bisogna sapere che...

Cominciamo con una serie di definizioni e di conseguenze delle medesime, la cui utilità sarà evidente molto presto:

Definizione 1.1.1. Sia X un insieme qualsiasi. Un sottoinsieme $\mathfrak{S}$ di 2^X (insieme delle parti) si dice *semianello* se per ogni $A, B \in \mathfrak{S}$ si ha $A \cap B \in \mathfrak{S}$.

Esempio 1.1.1. L'insieme $\mathfrak{R}$ composto da tutti i rettangoli e da $\varnothing$ è un semianello; siano infatti $P = I_1 \times I_2$ e $Q = J_1 \times J_2$ due rettangoli tali che $I_1 \cap J_1 \neq \varnothing$ e $I_2 \cap J_2 \neq \varnothing$ (se così non è $P \cap Q = \varnothing \in \mathfrak{R}$). Allora $P \cap Q = (I_1 \cap J_1) \times (I_2 \cap J_2)$, e siccome l'intersezione di due intervalli è un intervallo, $P \cap Q$ è un rettangolo.

Occupiamoci ora di due operazioni tra insiemi, che vanno ad aggiungersi alle gia note unione $\cup$, intersezione $\cap$ e differenza $\setminus$. La prima di fatto è solo un caso particolare dell'unione:

Definizione 1.1.2. Dati due insiemi A e B, diciamo che C è l'*unione disgiunta di A e B*, e scriviamo $C = A \uplus B$, se $C = A \cup B$ e $A \cap B = \varnothing$.

Adesso invece introduciamo una nuova operazione sugli insiemi:

Definizione 1.1.3. Dati due insiemi A e B si dice *differenza simmetrica di A e B*, e si indica con $A \triangle B$, l'insieme

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \uplus (B \setminus A).$$

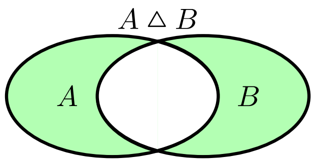


Figura 1.1: La differenza simmetrica $A \triangle B$.

Definizione 1.1.4. Sia X un insieme qualsiasi. Un sottoinsieme $\mathfrak{A}$ di 2^X si dice *anello* se valgono le seguenti condizioni:

i) per ogni $A, B \in \mathfrak{A}$ si ha che $A \cap B \in \mathfrak{A}$;

ii) per ogni $A, B \in \mathfrak{A}$ si ha che $A \triangle B \in \mathfrak{A}$.

Se inoltre $X \in \mathfrak{A}$, si dice che $\mathfrak{A}$ è un'*algebra*. In tal caso X si dice *unità dell'algebra*.

Definizione 1.1.5. Sia X un insieme qualsiasi; preso un semianello $\mathfrak{S}$ di 2^X, definiamo *anello minimale costruito sopra* $\mathfrak{S}$ l'intersezione $\mathfrak{A}(\mathfrak{S})$ di tutti gli anelli di X contenenti $\mathfrak{S}$.

Proposizione 1.1.1. Sia X un insieme e sia $\mathfrak{A} \subset 2^X$. Allora $\mathfrak{A}$ è un anello se e solo se per ogni $A, B \in X$ si ha che $A \cup B \in \mathfrak{A}$ e $A \setminus B \in \mathfrak{A}$

Dimostrazione: ($\Rightarrow$) Se $\mathfrak{A}$ è un anello, per ogni $A, B \in \mathfrak{A}$ si ha che $A \cap B \in \mathfrak{A}$ e $A \triangle B \in \mathfrak{A}$; valgono allora le uguaglianze $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$ e $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$, e ci siamo.
($\Leftarrow$) Viceversa sapendo che per ogni $A, B \in \mathfrak{A}$ si ha che $A \cup B \in \mathfrak{A}$ e $A \setminus B \in \mathfrak{A}$, si ricavano le relazioni $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ e $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

c.v.d.

Osservazione 1.1.1. Grazie alla proposizione 1.1.1 possiamo dare un'altra definizione, equivalente, di algebra: un insieme $\mathfrak{A} \subset 2^X$ è un'algebra su X se

i) $\varnothing \in \mathfrak{A}$, $X \in \mathfrak{A}$;

ii) Se $\{A_i\}_{i=1}^n$ è una famiglia finita di elementi di $\mathfrak{A}$, allora $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{A}$;

iii) Se $A \in \mathfrak{A}$ allora $X \setminus A \in \mathfrak{A}$.

Osservazione 1.1.2. Se $\mathfrak{A}$ è chiuso rispetto a unione e intersezione, non necessariamente è un anello: ad esempio gli aperti di $\mathbb{R}$ sono chiusi per unioni qualsiasi e intersezioni finite, ma non costituiscono un anello (infatti scelti $a < c < b < d$ in $\mathbb{R}$, allora $(a, b) \triangle (c, d) = (a, c] \cup [b, d)$ non è aperto in $\mathbb{R}$).

Definizione 1.1.6. Sia X un qualsiasi insieme. Un sottoinsieme $\mathfrak{M} \subset 2^X$ si dice *σ-anello* se valgono le seguenti condizioni:

i) per ogni $A, B \in \mathfrak{M}$ si ha che $A \triangle B \in \mathfrak{M}$;

ii) Se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ è una famiglia numerabile di elementi di $\mathfrak{M}$, allora $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}$.

Se in più $X \in \mathfrak{M}$, allora $\mathfrak{M}$ si dice *σ-algebra* e, in tal caso, X si dice *unità della σ-algebra.* [1]

Osservazione 1.1.3. Come visto nel caso delle algebre, possiamo dare una definizione equivalente di σ-algebra in tal modo: un insieme $\mathfrak{M} \subset 2^X$ è una σ-algebra su X se

i) $\varnothing \in \mathfrak{M}$, $X \in \mathfrak{M}$;

ii) Se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ è una famiglia numerabile di elementi di $\mathfrak{M}$, allora $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}$;

iii) Se $A \in \mathfrak{M}$, allora $X \setminus A \in \mathfrak{M}$.

Esempio 1.1.2. L'insieme

$$\mathfrak{E} := \left\{ E \subset \mathbb{R} \middle| E = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \quad \text{per certi } I_i \text{ intervalli reali} \right\}$$

è un'algebra (ovvio e quindi esercizio) ma non una σ-algebra: infatti gli insiemi del tipo $E_k := (k, k+1) \in \mathfrak{E}$, ma $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \notin \mathfrak{E}$.

Esempio 1.1.3. Sia X un insieme non numerabile. Allora l'insieme

$$\mathfrak{F} := \{F \subset x \mid \text{ solo uno tra } F \text{ e } X \setminus F \text{ è al più numerabile}\}$$

è una σ-algebra. Dimostriamo che è chiuso rispetto all'unione numerabile (le altre proprietà vengono lasciate come esercizio): sia quindi $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di elementi di $\mathfrak{F}$ e proviamo che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathfrak{F}$; ci sono due possibilità:

i) gli F_n sono tutti numerabili: in tal caso $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ è numerabile e quindi sta in $\mathfrak{F}$;

ii) esiste $\bar{n}$ tale che $F_{\bar{n}}$ non è numerabile: in tal caso $X \setminus F_{\bar{n}}$ è numerabile e quindi

$$X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = (X \setminus F_{\bar{n}}) \cap \bigcap_{n \neq \bar{n}} (X \setminus F_n) \subset X \setminus F_{\bar{n}},$$

per cui $X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ è un insieme numerabile, ergo $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ sta in $\mathfrak{F}$.

[1] il lettore maestro nella lessicografia si chiederà sicuramente perchè si usi la lettera σ nella definizione di questi insiemi; la ragione è che in matematica, per convenzione, essa assurge a prefisso segnalatore del fatto che lavoriamo con quantità numerabili di oggetti. Troveremo spesso delle σ-qualcosa nel seguito.

Osservazione 1.1.4. Si noti che, in generale, l'unione di σ-algebre non è una σ-algebra: a titolo di esempio sull'insieme $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ si considerino le σ-algebre $\mathfrak{N}_1 := \{A\times\mathbb{N}|A\subset\mathbb{N}\}$ e $\mathfrak{N}_2 := \{\mathbb{N}\times B|B\subset\mathbb{N}\}$ (verificare come esercizio che tali insiemi sono effettivamente delle σ-algebre). L'insieme

$$\mathfrak{N}_1\cup\mathfrak{N}_2 = \{A\times\mathbb{N} \quad\vee\quad \mathbb{N}\times B|A,B\subset\mathbb{N}\}$$

non è però una σ-algebra: ad esempio non contiene $(\mathbb{N}\times\{0\})\cup(\{0\}\times\mathbb{N})$.

Tuttavia le σ-algebre si comportano bene rispetto all'intersezione:

Proposizione 1.1.2. Sia X un insieme e $\{\mathfrak{M}_j\}_{j\in J}$ una famiglia qualsiasi di σ-algebre di X. Allora $\bigcap_{j\in J}\mathfrak{M}_j$ è una σ-algebra.

Dimostrazione: è un fatto ovvio.

c.v.d.

Grazie a questo risultato, possiamo giustificare la seguente definizione:

Definizione 1.1.7. Sia X un insieme qualsiasi e sia $\mathcal{C}$ un sottoinsieme di 2^X. Si dice *σ-algebra generata da $\mathcal{C}$* la più piccola σ-algebra che contiene $\mathcal{C}$ (i.e. l'intersezione di tutte le σ-algebre che contengono $\mathcal{C}$), e si indica con $\sigma(\mathcal{C})$.

Esempio 1.1.4. Sia X un insieme e E un qualsivoglia suo sottoinsieme. Allora

$$\sigma(E) = \{\varnothing, X, E, X\setminus E\}.$$

Dimostriamolo: poniamo $\mathfrak{L} := \{\varnothing, X, E, X\setminus E\}$. Questa è una σ-algebra contenente E (esercizio banalissimo) e quindi $\mathfrak{L}\supseteq\sigma(E)$. Viceversa $\sigma(E)$ è una σ-algebra e quindi possiamo affermare i seguenti fatti:

i) $E\in\sigma(E)$ e quindi $X\setminus E\in\sigma(E)$;

ii) $E\cup(X\setminus E) = X\in\sigma(E)$ e $E\cap(X\setminus E) = \varnothing\in\sigma(E)$.

Per cui $\mathfrak{L}\subseteq\sigma(E)$, da cui segue l'uguaglianza.

Definiamo adesso una σ-algebra di vitale importanza in matematica:

Definizione 1.1.8. Sia $\mathcal{T}$ la famiglia degli aperti di $\mathbb{R}$ (i.e. la topologia metrica reale). Definiamo *boreliani* di $\mathbb{R}$ (da Émile Borel, matematico francese) l'insieme

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathcal{T}),$$

cioè la σ-algebra generata dagli intervalli aperti.

Lemma 1.1.1. Sia X un qualsiasi insieme e siano $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sottoinsiemi di 2^X tali che $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$. Allora $\sigma(\mathcal{C}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{C}_2)$.

Dimostrazione: Si ha $\mathcal{C}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{C}_2)$ e quindi $\sigma(\mathcal{C}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{C}_2)$.

c.v.d.

Proposizione 1.1.3. Vale la seguente uguaglianza:

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \sigma\{(a, +\infty) | a \in \mathbb{Q}\}.$$

Dimostrazione: Sia $\mathcal{T}$ la topologia euclidea e $\mathcal{Q} := \{(a, +\infty) | a \in \mathbb{Q}\}$; siccome $\mathcal{T} \supset \mathcal{Q}$, il lemma precedente ci assicura che $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \supseteq \sigma(\mathcal{Q})$. Viceversa possiamo scrivere ogni elemento di $\mathcal{T}$ come combinazione di elementi di $\mathcal{Q}$:

$$(a, +\infty) = \bigcup_{\substack{b>a \\ b\in\mathbb{Q}}} (b, +\infty) \in \sigma(\mathcal{Q});$$

$$[a, +\infty) = \bigcap_{\substack{b<a \\ b\in\mathbb{Q}}} (b, +\infty) \in \sigma(\mathcal{Q});$$

$$(-\infty, a) = \mathbb{R} \setminus [a, +\infty) \in \sigma(\mathcal{Q});$$

$$(-\infty, a] = \mathbb{R} \setminus (a, +\infty) \in \sigma(\mathcal{Q});$$

$$(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, +\infty) \in \sigma(\mathcal{Q}).$$

Pertanto $\mathcal{T} \subseteq \sigma(\mathcal{Q})$ da cui $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{Q})$. Valendo l'inclusione in entrambi i sensi, si ha l'uguaglianza.

c.v.d.

Osservazione 1.1.5. Il lettore più intraprendente avrà notato il comportamento alquanto esotico dell'insieme $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$: nonostante quest'ultimo abbia potenza superiore al continuo, esso ammette un sistema di generatori numerabile! Tuttavia possiamo generarlo anche con un insieme con la potenza del continuo: infatti si verifica subito che vale anche

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \sigma\{(a, +\infty) | a \in \mathbb{R}\}.$$

E se ne possono trovare molti altri, di generatori (il lettore potrà divertirsi a cercarli, non ci vuole particolare fantasia). In generale questa versatilità è comune alle σ-algebre generate, che risultano essere quindi oggetti decisamente maneggevoli.

Vediamo infine quest'ultimo risultato:

Proposizione 1.1.4. La σ-algebra generata dagli intervalli reali coincide con $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Dimostrazione: Sia $\mathcal{T}$ la topologia euclidea e poniamo

$$\mathcal{I} := \{I \subset \mathbb{R} | I \text{ è un intervallo}\};$$

allora $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{I}$ implica che $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{I})$. Viceversa, presi $a < b$ reali, seguono le relazioni

$$[a, b) = \bigcap_n \left(a - \frac{1}{n}, b\right) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),$$

$$(a, b] = \bigcap_n \left(a, b + \frac{1}{n}\right) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),$$

$$[a, b] = \bigcap_n \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}).$$

Pertanto $\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ da cui $\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{R})$; segue l'uguaglianza.

c.v.d.

Capitolo 2

Misure

COMINCIAMO ORA ad addentrarci nella teoria della misura. Introdurremo dapprima alcuni strumenti molto semplici e intuitivi che faranno da base per il seguito; tali risultati hanno validità in $\mathbb{R}^n$, ma spesso e volentieri per semplicità di comprensione converrà ragionare in $\mathbb{R}^2$.

2.1 La misura degli insiemi elementari

Definizione 2.1.1. Si dice *rettangolo n-dimensionale* il prodotto cartesiano di n intervalli reali I_k:

$$R = \bigtimes_{k=1}^{n} I_k.$$

Si noti che la definizione non richiede che gli intervalli siano necessariamente tutti dello stesso tipo (aperti o chiusi), il generico I_k può essere anche semichiuso o semiaperto; per esempio $(2,3]$ in $\mathbb{R}$ e $(3,5) \times [7,9]$ in $\mathbb{R}^2$ sono rettangoli.

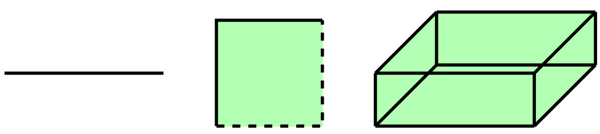


Figura 2.1: Esempi di rettangoli 1,2,3-dimensionali.

Una volta denotato con $\mathfrak{R}$ l'insieme dei rettangoli secondo la definizione 2.1.1, introduciamo ora un concetto di misura che generalizza le familiari nozioni di area e volume.

Definizione 2.1.2. Sia $R \in \mathfrak{R}$; si definisce *misura* di R la quantità

$$m(R) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k),$$

ove a_k e b_k sono gli estremi degli intervalli I_k della definizione 2.1.1.

Segue immediatamente dalla definizione che la misura m gode delle seguenti proprietà:

i) $m(R) \geq 0$ per ogni $R \in \mathfrak{R}$; (*non negatività*)

ii) se $R = \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} R_k$, allora $m(R) = \sum_{k=1}^{n} m(R_k)$. (*additività*)

La dimostrazione di questi fatti di per sè intuitivi è lasciata come esercizio al lettore. Introduciamo ora un nuovo concetto che generalizza quello di rettangolo:

Definizione 2.1.3. Si dice *insieme elementare* l'unione di un numero finito di rettangoli disgiunti; indicheremo l'insieme degli insiemi elementari con $\mathfrak{E}$.

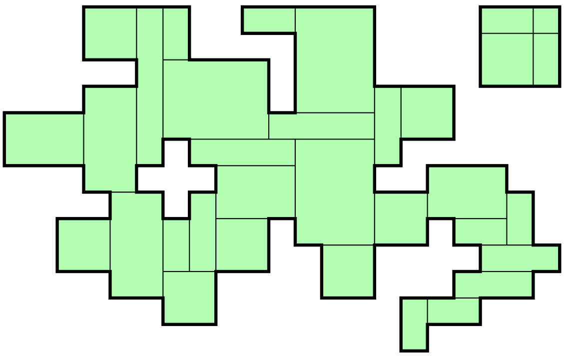


Figura 2.2: Esempio di insieme elementare bidimensionale.

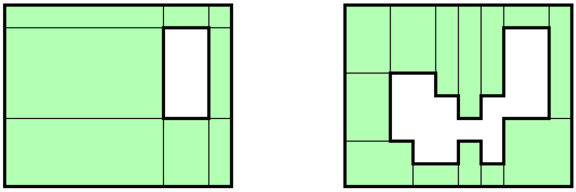
Teorema 2.1.1. Siano A, $B \in \mathfrak{E}$; allora:

$$A \cup B,\ A \cap B,\ A \smallsetminus B,\ A \vartriangle B \in \mathfrak{E}.$$

Dimostrazione. Innanzitutto sappiamo che l'intersezione di due rettangoli è un rettangolo (vedi l'esempio 1.1.1). Siano ora A, B due insiemi elementari, ovvero $A = \dot{\bigcup}_i P_i$, $B = \dot{\bigcup}_j Q_j$; segue immediatamente

$$A \cap B = \Big(\dot{\bigcup_i} P_i\Big) \cap \Big(\dot{\bigcup_j} Q_j\Big) = \dot{\bigcup_{i,j}} (P_i \cap Q_j),$$

e i $P_i \cap Q_j$, per quanto visto, sono rettangoli, sicché $A \cap B \in \mathfrak{E}$.
Osserviamo ora che sottraendo un rettangolo Q a un rettangolo P si ottiene un insieme elementare, da cui segue che sottraendo un insieme elementare ad un rettangolo si ottiene ancora un insieme elementare.



Dati due insiemi elementari A e B è sempre possibile trovare un rettangolo R che li contenga entrambi, e quindi avremo

$$\begin{gathered} A \cup B = R \setminus ((R \setminus A) \cap (R \setminus B)), \\ A \setminus B = A \cap (R \setminus B), \\ A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{gathered}$$

da cui segue la tesi.

c.v.d.

Possiamo ora introdurre una misura su $\mathfrak{E}$, estendendo il concetto di misura espresso nella precedente definizione:

Definizione 2.1.4. Si definisce *misura di un insieme elementare*, e si indica con m', la quantità

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m(R_k),$$

ove $A \in \mathfrak{E}$ e $A = \dot\bigcup_{k=1}^{n} R_k$.

Mostriamo che questa definizione è ben posta, nel senso che non dipende dalla particolare decomposizione in rettangoli di A. Sia dunque

$$A = \dot\bigcup_i P_i = \dot\bigcup_j Q_j;$$

poiché per opportuni P_i e Q_j vale $P_i = \dot\bigcup_j (P_i \cap Q_j)$ e $Q_j = \dot\bigcup_i (P_i \cap Q_j)$, per ogni i, j si ha subito

$$m(P_i) = \sum_j m(P_i \cap Q_j), \quad m(Q_j) = \sum_i m(P_i \cap Q_j);$$

allora

$$\sum_i m(P_i) = \sum_{i,j} m(P_i \cap Q_j) = \sum_j m(Q_j) = m'(A).$$

Osservazione 2.1.1. Essendo m' univocamente determinata da m, essa ne eredita le proprietà di non-negatività e additività.

Definizione 2.1.5. Sia A un insieme e sia $\{A_n\}_n$ una famiglia al più numerabile di insiemi tale che $A \subseteq \bigcup_n A_n$. Si dice che una misura $\mathfrak{m}$ è *subadditiva* se per ogni A e $\{A_n\}_n$ definiti come sopra vale

$$\mathfrak{m}(A) \le \sum_n \mathfrak{m}(A_n).$$

Teorema 2.1.2. (di subadditività di m') La misura m' è subadditiva.

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ sia $C \subseteq A$ elementare e chiuso tale che valga

$$m'(A) \ge m'(C) \ge m'(A) - \frac{\varepsilon}{2}; \tag{2.1}$$

un tale C esiste sempre: poiché possiamo scrivere $A = \dot\bigcup_k P_k$, basta sostituire ogni P_k con un Q_k tale che $Q_k \subseteq P_k$, con $m(P_k) \ge m(Q_k) \ge m(P_k) - \varepsilon/2^k$, e porre $C = \dot\bigcup_k Q_k$. Per motivi analoghi per ogni n si trova $\tilde{A}_n$ elementare aperto tale che $\tilde{A}_n \supseteq A_n$ e che verifichi $m'(A_n) \le m'(\tilde{A}_n) \le m'(A_n) + \varepsilon/2^n$.

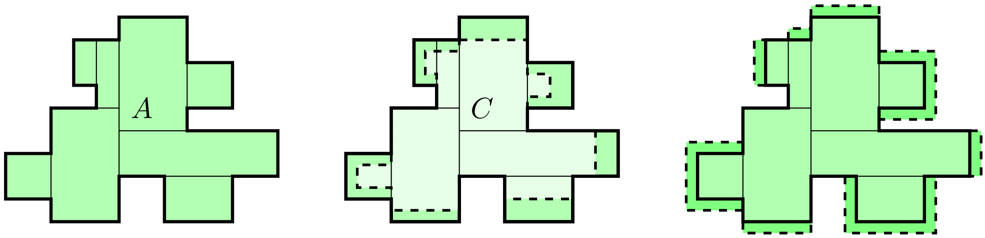


Figura 2.3: L'insieme A ed un esempio di costruzione di C e degli $\tilde{A}_n$.

Ovviamente da $C \subseteq A$ segue $C \subseteq \bigcup_n \tilde{A}_n$; ma C è chiuso e limitato, ed in forza del teorema di Heine-Borel è compatto, quindi possiamo estrarre dalla copertura aperta $\bigcup_n \tilde{A}_n$ una sottocopertura finita $\bigcup_{k=1}^r \tilde{A}_{n_k}$; è allora chiaro che $m'(C) \le \sum_{k=1}^r m'(\tilde{A}_{n_k})$, da cui, sfruttando la formula 2.1, si conclude

$$\begin{aligned} m'(A) &\le m'(C) + \frac{\varepsilon}{2} \le \sum_{k=1}^{r} m'(\tilde{A}_{n_k}) + \frac{\varepsilon}{2} \le \\ &\le \sum_n m'(\tilde{A}_n) + \frac{\varepsilon}{2} \le \sum_n m'(A_n) + \sum_n \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} \le \sum_n m'(A_n) + \varepsilon, \end{aligned}$$

e la tesi segue dall'arbitrarietà di ε.

c.v.d.

Definizione 2.1.6. Sia $\{A_n\}_n$ una famiglia numerabile di insiemi elementari; si dice che una misura $\mathfrak{m}$ è *σ-additiva* se

$$\mathfrak{m}\Big(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_n).$$

Teorema 2.1.3. (di σ-additività di m') La misura m' è σ-additiva.

Dimostrazione. Sia A un insieme elementare e $\{A_n\}_n$ una famiglia numerabile di insiemi elementari tale che $A = \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n$; dobbiamo mostrare che $m'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n)$. Anzitutto segue dal teorema precedente che

$$m'(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n);$$

viceversa per ogni N fissato risulta $A \supset \dot{\bigcup}_{k=1}^{N} A_k$, da cui

$$m'(A) \geq m'\Big(\dot{\bigcup_{k=1}^{N}} A_n\Big) = \sum_{k=1}^{N} m'(A_n),$$

dove l'ultima eguaglianza è dovuta all'additività di m' ereditata da m; così, passando al limite per $N \to +\infty$, otteniamo

$$m'(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n).$$

c.v.d.

Abbiamo così mostrato esaurientemente che la misura m' gode delle proprietà di *non-negatività*, *additività*, *subadditività* e *σ-additività*. Sfortunatamente (o per fortuna) però il mondo non è fatto di soli rettangoli e unioni al più numerabili di essi, per cui si rende irrinunciabile l'introduzione di ulteriori misure, magari più esotiche, che ne estendano la classe di applicazione.

2.2 Misura esterna

Definizione 2.2.1. Sia A un insieme qualunque; si dice *misura esterna di A*, e si indica con μ^*, la quantità

$$\mu^*(A) = \inf_{\substack{A \subseteq \dot{\bigcup}_k R_k \\ R_k \in \mathfrak{R}}} \sum_k m(R_k).$$

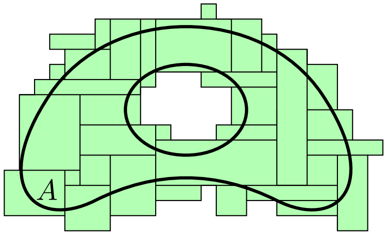


Figura 2.4: L'idea che sta sotto la misura esterna.

Osservazione 2.2.1. Siccome un insieme elementare è unione disgiunta di rettangoli, la definizione precedente può essere riformulata come segue:

$$\mu^*(A) = \inf_{\substack{A \subseteq \bigcup_k E_k \\ E_k \in \mathfrak{E}}} \sum_k m'(E_k).$$

Notiamo che μ^* è un'estensione di m', cioé che se ristretta agli insiemi elementari coincide con essa. Sia infatti $A = \dot{\bigcup}_{k=1}^N R_k$; si ha allora

$$m'(A) = m'\Big(\dot{\bigcup_{k=1}^{N}} R_k\Big) = \sum_{k=1}^{N} m(R_k),$$

e poiché gli R_k costituiscono una copertura per A deve valere, per definizione,

$$\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{N} m(R_k) = m'(A);$$

ora prendiamo delle famiglie al più numerabili $\{Q_j^h\}_j$ di rettangoli disgiunti tali che $A \subseteq \dot{\bigcup}_j Q_j^h$; per subadditività segue $m'(A) \leq \sum_j m(Q_j^h)$, e quindi

$$m'(A) \leq \inf_h \sum_j m(Q_j^h) = \mu^*(A).$$

Pertanto deve valere l'uguaglianza.

Estenderemo ora la nozione di subadditività agli insiemi qualsiasi.

Teorema 2.2.1. (di subadditività di μ^*) La misura μ^* è subadditiva.

Dimostrazione. Rifacendoci alla definizione 2.1.5 prendiamo per ogni n una famiglia di rettangoli $\{R_k^n\}_k$ tale che $A_n \subseteq \bigcup_k R_k^n$; per la definizione 2.2.1, è possibile scegliere gli R_k^n in modo tale che valga, con $\varepsilon > 0$,

$$\sum_k m(R_k^n) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n},$$

e da questo si ricava

$$\mu^*(A) \le \sum_{n,k} m(R_k^n) \le \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

e la tesi segue dall'arbitrarietà di ε.

c.v.d.

Dal teorema precedente segue che, se $A \subseteq B$, allora $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$.

2.3 Misura di Lebesgue

Definizione 2.3.1. Un insieme A si dice *misurabile secondo Lebesgue* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme elementare E tale che

$$\mu^*(A \triangle E) \le \varepsilon.$$

D'ora in poi con il termine *misurabile*, intenderemo secondo Lebesgue.

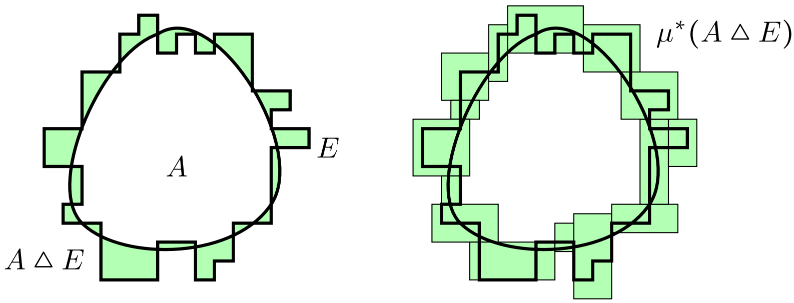


Figura 2.5: L'idea che sta sotto la misurabilità secondo Lebesgue.

Come si nota nella figura, la misurabilità di un insieme si esprime nell'esistenza di almeno un insieme elementare tale da approssimare arbitrariamente bene A, nel senso che l'area di $A \triangle B$, quantificata mediante la μ^* e che rappresenta una sorta di scarto tra i due insiemi, è arbitrariamente piccola.

Definizione 2.3.2. Si dice *misura di Lebesgue*, e si denota con μ, la misura μ^* ristretta all'insieme degli insiemi misurabili secondo Lebesgue.

Denoteremo con $\mathfrak{M}_R$ l'insieme degli insiemi misurabili contenuti in un insieme limitato R che identificheremo per semplicità con un rettangolo. Ogni insieme nel seguito sarà tacitamente preso, salvo diverso avviso, da $\mathfrak{M}_R$.

Lemma 2.3.1. Il complementare di un insieme misurabile è misurabile.

Dimostrazione. Sia A un insieme misurabile; allora per definizione esiste E elementare tale che per ogni $\varepsilon > 0$ si abbia $\mu^*(A \triangle E) < \varepsilon$. Ma allora considerando A^C basta prendere E^C come insieme elementare e notare che $A^C \triangle E^C = A \triangle E$, da cui otteniamo

$$\mu^*(A^C \triangle E^C) = \mu^*(A \triangle E) < \varepsilon.$$

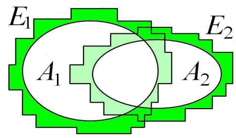
c.v.d.

Teorema 2.3.1. Unione, intersezione, differenza e differenza simmetrica di un numero finito di insiemi misurabili sono insiemi misurabili.

Dimostrazione. Ovviamente basta dimostrare il teorema per due soli insiemi A_1 e A_2. Per definizione esistono E_1 e E_2 elementari tali che, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\mu^*(A_1 \triangle E_1) < \varepsilon/2,$$
$$\mu^*(A_2 \triangle E_2) < \varepsilon/2;$$

ora, $(A_1 \cup A_2) \triangle (E_1 \cup E_2) \subseteq (A_1 \triangle E_1) \cup (A_2 \triangle E_2)$, come si dimostra facilmente per esercizio, e da questo segue (ricordando il teorema 2.2.1) immediatamente



$$\mu^*((A_1 \cup A_2) \triangle (E_1 \cup E_2)) \leq \mu^*(A_1 \triangle E_1) + \mu^*(A_2 \triangle E_2) < \varepsilon,$$

e poiché $E_1 \cup E_2$ è elementare ci siamo: $A_1 \cup A_2$ è misurabile. Dunque, grazie a questo risultato ed al lemma precedente, $A_1^C \cup A_2^C$ è misurabile; questo ci serve perchè vale $A_1 \cap A_2 = (A_1^C \cup A_2^C)^C$ e otteniamo così, usando nuovamente il lemma 2.3.1, che $A_1 \cap A_2$ è misurabile. Valgono inoltre

$$A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap A_2^C,$$
$$A_1 \triangle A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1),$$

dalle quali identità, sfruttando quanto esposto sopra, segue la tesi.

c.v.d.

Ora che abbiamo dimostrato il comportamento "buono" degli insiemi misurabili rispetto alla misura μ^*, per poter lavorare in modo ottimale con essa introduciamo il seguente

Lemma 2.3.2. Per ogni A e B vale

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \triangle B).$$

Dimostrazione. Sia dapprima $\mu^*(A) \geq \mu^*(B)$; dal momento che possiamo scrivere $A \subseteq A \cup B = B \cup (A \triangle B)$, al solito si ha $\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A \triangle B)$, e quindi

$$\mu^*(A) - \mu^*(B) \leq \mu^*(A \triangle B);$$

Se invece $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, si ripete il ragionamento con $B \subseteq A \cup (A \triangle B)$ e si perviene a

$$\mu^*(B) - \mu^*(A) \leq \mu^*(A \triangle B).$$

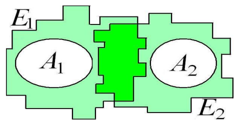
c.v.d.

Teorema 2.3.2. (di additività di μ) La misura μ è additiva.

Dimostrazione. Consideriamo per semplicità il caso $k = 2$; la dimostrazione è assolutamente analoga per valori più grandi di k.
Poichè A_1 e A_2 sono misurabili, dato $\varepsilon > 0$ ci sono E_1 e E_2 elementari tali che

$$\mu^*(A_1 \triangle E_1) < \varepsilon, \quad \mu^*(A_2 \triangle E_2) < \varepsilon.$$

A_1 e A_2 sono disgiunti per ipotesi, quindi deve necessariamente valere l'inclusione $E_1 \cap E_2 \subseteq (A_1 \triangle E_1) \cup (A_2 \triangle E_2)$ da cui segue per subadditività



$$m'(E_1 \cap E_2) \leq \mu^*(A_1 \triangle E_1) + \mu^*(A_2 \triangle E_2) < 2\varepsilon, \tag{2.2}$$

ed in forza del lemma 2.3.2 si ha anche

$$|m'(E_1) - \mu^*(A_1)| \leq \mu^*(A_1 \triangle E_1) < \varepsilon, \tag{2.3}$$
$$|m'(E_2) - \mu^*(A_2)| \leq \mu^*(A_2 \triangle E_2) < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Ora, grazie alle formule 2.2, 2.3 e 2.4, ponendo $E = E_1 \cup E_2$ vale [1]

$$m'(E) = m'(E_1 \cup E_2) = m'(E_1) + m'(E_2) - m'(E_1 \cap E_2) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\varepsilon;$$

sfruttando la relazione $(A_1 \cup A_2) \triangle (E_1 \cup E_2) \subseteq (A_1 \triangle E_1) \cup (A_2 \triangle E_2)$, già vista nel teorema 2.3.1 si ha, ponendo $A = A_1 \cup A_2$,

$$\mu^*(A \triangle E) = \mu^*((A_1 \cup A_2) \triangle (E_1 \cup E_2)) \leq \mu^*(A_1 \triangle E_1) + \mu^*(A_2 \triangle E_2) < 2\varepsilon.$$

Ora, mettiamo insieme tutto ciò: applicando di nuovo il lemma 2.3.2 abbiamo

$$|m'(E) - \mu^*(A)| \leq \mu^*(A \triangle E) < 2\varepsilon,$$

[1] cercare per esercizio di dimostrare la seconda uguaglianza; se non ci si riesce, la dimostrazione generale è fornita nella proposizione 3.2.1

da cui segue, grazie alle uguaglianze su $m'(E)$ e $\mu^*(A \triangle E)$ ricavate prima,

$$\mu^*(A) \geq m'(E) - \mu^*(A \triangle E) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon.$$

Poiché ε è arbitrario segue $\mu^*(A) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$ e per la subadditività di μ^* deve valere anche la disuguaglianza opposta, da cui

$$\mu^*(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A_k).$$

Inoltre poiché A_1 e A_2 sono misurabili si conclude $\mu^*(A) = \mu(A)$.

c.v.d.

Da questo teorema segue che se A è misurabile, lo è anche $\mu(A^C)$:

$$\mu(R) = \mu((R \setminus A) \cup A) = \mu(R \setminus A) + \mu(A) = \mu(A^C) + \mu(A).$$

Teorema 2.3.3. Unione e intersezione di un'infinità numerabile di insiemi misurabili sono ancora insiemi misurabili.

Dimostrazione. Consideriamo una famiglia infinita numerabile $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di insiemi misurabili e sia $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Definiamo $\{\widehat{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ come segue:

$$\widehat{A}_1 = A_1,\ \widehat{A}_2 = A_2 \setminus A_1,\ \ldots,\ \widehat{A}_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \quad n = 2, \ldots$$

in modo tale che si abbia ancora $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widehat{A}_n$, però $\widehat{A}_i \cap \widehat{A}_j = \varnothing$ se $i \neq j$. Per i risultati ottenuti nei teoremi precedenti, gli $\widehat{A}_n$ sono ancora misurabili e vale

$$\sum_{n=1}^{k} \mu(\widehat{A}_n) = \mu\Big(\dot{\bigcup_{n=1}^{k}} \widehat{A}_k \Big) \leq \mu^*(A) < +\infty,$$

il che implica la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\widehat{A}_n)$,cioé

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \sum_{n \geq N} \mu(\widehat{A}_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

L'insieme $C = \dot{\bigcup}_{n=1}^{N} \widehat{A}_n$ è unione finita di insiemi misurabili e quindi è misurabile, cioé per definizione esiste E elementare tale che, per $\varepsilon > 0$, $\mu^*(C \triangle E) < \varepsilon/2$. Scrivendo l'inclusione opportuna $A \triangle E \subseteq (C \triangle E) \cup (\bigcup_{n>N}(\widehat{A}_n))$ ricaviamo

$$\mu^*(A \triangle E) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

e da questo segue che A è misurabile. Finiamo notando che $\bigcup_n A_n = (\bigcap_n A_n^C)^C$ e ricordando che il complementare di un insieme misurabile è misurabile.

c.v.d.

Osservazione 2.3.1. (Importante!) Notiamo che, quasi senza accorgercene, abbiamo dimostrato che $\mathfrak{M}_R$ è una σ-algebra: infatti $\varnothing$ e R sono misurabili; grazie al lemma 2.3.1 abbiamo la chiusura per complementazione; infine, il teorema testé dimostrato ci fornisce la chiusura per unioni numerabili. Dunque μ è definita su una σ-algebra. CONCLUDERE APPROPRIATAMENTE

Teorema 2.3.4. (di σ-additività di μ) La misura μ è σ-additiva.

Dimostrazione. Sappiamo che per ogni N fissato vale

$$\mu\Big(\dot{\bigcup_{k=1}^{N}} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{N} \mu(A_k) < \mu(A),$$

da cui passando al limite per $N \to +\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \mu(A),$$

ma il teorema 2.2.1 ci dice che $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$, e ci siamo.

c.v.d.

Ed ora un teorema uno e bino (nel senso che è contemporaneamente un teorema, ma anche una definizione):

Teorema 2.3.5. (di continuità di μ)

i) Siano $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$ insiemi misurabili e $A = \bigcap_n A_n$; allora $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$;

ii) Siano $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ insiemi misurabili e $A = \bigcup_n A_n$; allora $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Dimostrazione.

i) Anzitutto senza perdere in generalità possiamo ridurci al caso in cui $A = \varnothing$; in caso contrario basterebbe ridefinire gli A_n ponendo $\widehat{A}_n = A_n \setminus A$. Se $A = \varnothing$, $\mu(A) = \mu(\varnothing) = 0$. Possiamo scrivere

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots \cup (A_k \setminus A_{k+1}) \cup \ldots$$
$$A_n = (A_n \setminus A_{n+1}) \cup (A_{n+1} \setminus A_{n+2}) \cup \ldots \cup (A_{n+k} \setminus A_{n+k+1}) \cup \ldots$$

in modo tale che gli $A_k \setminus A_{k+1}$ siano disgiunti e quindi valga

$$\mu(A_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1}), \tag{2.5}$$

ed in generale

$$\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1}). \tag{2.6}$$

La serie 2.5 converge, perché $\mu(A_1) < +\infty$ e quindi la serie 2.6, essendo il resto di 2.5, tende a 0 per n che tende a $+\infty$, il che equivale a

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0 = \mu(A).$$

ii) Consideriamo i complementari degli A_n: $A = \bigcup_n A_n = (\bigcap_n A_n^C)^C$, da cui

$$\lim_{n\to\infty} \mu\Big(\Big(\bigcap_n A_n^C\Big)^C\Big) = \mu(R) - \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcap_n A_n^C\Big) = \mu(R) - \mu(A^C) = \mu(A).$$

c.v.d.

A questo punto abbiamo descritto in maniera esauriente (perlomeno, per quanto ci serve operativamente) il primo dei tre concetti fondamentali che ci siamo proposti di trattare. Partendo dai rettangoli, siamo arrivati a definire una misura "universale"; nel capitolo successivo completeremo questo discorso e lo generalizzeremo, trattando di misure *qualsiasi*.

Capitolo 3

Complementi

In questo capitolo ci occuperemo di caratterizzare ulteriormente (giusto quattro concetti) la misura di Lebesgue; principalmente, però, esporremo gli elementi base della teoria della misura in generale (perchè la misura di Lebesgue sarà pure bella, simpatica ed educata, ma non è mica l'unica su questa terra!), per trattare in modo dettagliato, infine, un caso "patologico" della matematica sul quale non anticipiamo nulla per non infrangere la suspence dalla quale il lettore starà *indubbiamente* essendo divorato (...).

3.1 Ulteriori concetti sulla misura di Lebesgue

3.1.1 Misura interna

Definizione 3.1.1.1. Sia A un insieme contenuto in un rettangolo R. Si dice *misura interna* di A la quantità $\mu_*(A) = \mu^*(R) - \mu^*(R \setminus A)$.

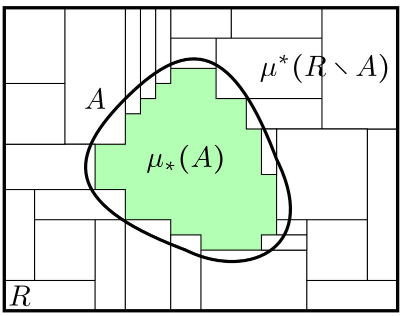


Figura 3.1: L'idea che sta sotto la misura interna

Possiamo caratterizzare gli insiemi Lebesgue-misurabili attraverso la misura esterna e quella interna; vale infatti il seguente risultato:

Proposizione 3.1.1.1. Sia A un qualsiasi insieme contenuto in un rettangolo R. Allora:

i) $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$;

ii) A è misurabile se e solo se $\mu_*(A) = \mu^*(A)$.

Dimostrazione: *i)* Siccome $R = A \cup (R \setminus A)$ allora la subadditivtà di μ^* implica che $\mu^*(R) \leq \mu^*(A) + \mu^*(R \setminus A)$, da cui $\mu^*(A) \geq \mu^*(R) - \mu^*(R \setminus A) = \mu_*(A)$.
ii) $(\Rightarrow)$ Se A è misurabile allora anche $R \setminus A$ è misurabile e vale la relazione

$$\mu^*(R \setminus A) = \mu(R \setminus A) = \mu(R) - \mu(A) = \mu^*(R) - \mu^*(A)$$

da cui segue $\mu^*(A) = \mu^*(R) - \mu^*(R \setminus A) := \mu_*(A)$.
$(\Leftarrow)$ Viceversa se $\mu_*(A) = \mu^*(A)$ allora valgono entrambe le relazioni

$$\mu^*(R) = \mu_*(A) + \mu^*(R \setminus A) = \mu^*(A) + \mu^*(R \setminus A)$$

$$\mu^*(R) = \mu^*(A \cup (R \setminus A)).$$

Siccome abbiamo scelto A arbitrariamente segue che la misura μ^* è additiva; per cui $\mu^* \equiv \mu$ e quindi A è misurabile.

c.v.d.

3.1.2 Misurabilità degli insiemi illimitati

Acceniamo ora al concetto di insieme misurabile nel caso in cui questo sia illimitato (i.e. non esiste un rettangolo R di misura finita che contenga l'insieme):

Definizione 3.1.2.1. Sia A un insieme illimitato n-dimensionale. Partizioniamo $\mathbb{R}^n$ in un infinità numerabile di rettangoli di misura finita $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (per esempio, nel caso della figura a pagina 21 abbiamo "quadrettato" $\mathbb{R}^2$). Si dice che A è *misurabile* se per ogni n l'insieme $R_n \cap A$ è un misurabile; in tal caso si pone

$$\mu(A) := \sum_{n=1}^{\infty} \mu(R_n \cap A).$$

Osservazione 3.1.2.1. Come nel caso degli insiemi limitati, si indica con $\mathfrak{M}_\infty$ l'insieme degli insiemi illimitati misurabili. Affinchè la definizione 3.1.2.1 sia ben posta dobbiamo mostrare che $\mathfrak{M}_\infty$ è una σ-algebra: a titolo d'esempio proviamo che $\mathfrak{M}_\infty$ è chiusa rispetto all'unione numerabile; la verifica delle altre proprietà viene lasciata come esercizio. Siano allora $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di

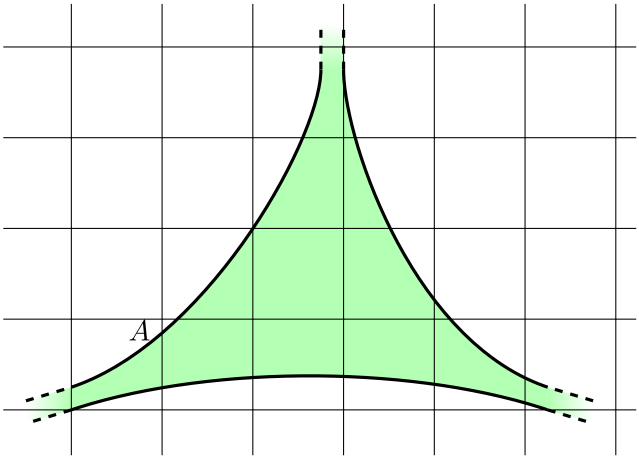


Figura 3.2: L'idea che sta sotto la misura degli insiemi illimitati

insiemi in $\mathfrak{M}_\infty$ e consideriamo l'insieme $\bigcup_n A_n$: allora per ogni rettangolo R di misura finita vale la relazione

$$R \cap \left(\bigcup_n A_n \right) = \bigcup_n (R \cap A_n)$$

e siccome $R \cap A_n$ è misurabile per ogni n, segue che $R \cap (\bigcup_n A_n)$ è misurabile. Da cui $\bigcup_n A_n \in \mathfrak{M}_\infty$.

3.1.3 Misure complete e assolutamente continue

In questa sezione esibiamo due nozioni essenziali in teoria della misura, che richiameremo spesso nel seguito:

Definizione 3.1.3.1. Si dice che una misura $\mathfrak{m}$ è *completa* se considerato un insieme A tale che $\mathfrak{m}(A) = 0$, allora per ogni $A' \subset A$ segue che A' è misurabile.

Osservazione 3.1.3.1. Dalla definzione di misura completa segue immediatamente che $\mathfrak{m}(A') = 0$: infatti deve essere che $0 \leq m(A') \leq \mathfrak{m}(A) = 0$ da cui $\mathfrak{m}(A') = 0$

Osservazione 3.1.3.2. La misura di Lebesgue μ è completa : infatti presi A e $A' \subset A$ con $\mu(A) = 0$, allora la subadditività di μ^* implica che $0 \leq \mu^*(A') \leq \mu^*(A) = 0$, da cui $\mu^*(A') = 0$. Siccome ogni insieme di misura esterna nulla è misurabile (il lettore è vivamente pregato di dimostrarlo per esercizio), segue che A' è misurabile (e in particolare $\mu(A') = 0$ per l'osservazione 3.1.3.1).

Definizione 3.1.3.2. Una misura $\mathfrak{m}$ si dice *assolutamente continua rispetto ad una misura* $\mathfrak{n}$ se per ogni A misurabile tale che $\mathfrak{n}(A) = 0$ segue che $\mathfrak{m}(A) = 0$.

Enunciamo ora una condizione equivalente a tale defínzione, la cui dimostrazione, piuttosto laboriosa, viene lasciata come esercizio:

Proposizione 3.1.3.1. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

i) La misura $\mathfrak{m}$ è assolutamente continua rispetto alla misura $\mathfrak{n}$;

ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni A misurabile con $\mathfrak{n}(A) < \delta$ segue che $\mathfrak{m}(A) < \varepsilon$

Abbiamo così concluso l'esposizione delle principali proprieta di μ; ora vogliamo ampliare ulteriormente il nostro bagaglio culturale sulle misure e questo ci spinge a vele spiegate verso la sezione successiva.

3.2 Teoria generale della misura

Fino ad ora abbiamo definito in maniera precisa solo *alcune* misure; ma cos'è *in generale* una misura?

Definizione 3.2.1. Sia X un insieme e $\mathfrak{S} \subset 2^X$ il semianello costruito sopra X. Si dice che una funzione $\mathfrak{m} : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ è una *misura* su X se è additiva, cioé presa una qualsiasi partizione finita $\{A_n\}_{i=1}^n$ di un elemento A di $\mathfrak{S}$, vale che $\mathfrak{m}(A) = \sum_{i=1}^n \mathfrak{m}(A_i)$.

Dalla definizione generale di misura si deducono le seguenti proprietà:

Proposizione 3.2.1. Sia $\mathfrak{m} : \mathfrak{S} \to \mathbb{R} \cup \{0\}$ una misura. Allora:

i) $\mathfrak{m}(\varnothing) = 0$

ii) $\mathfrak{m}(A_1 \cup A_2) = \mathfrak{m}(A_1) + \mathfrak{m}(A_2) - \mathfrak{m}(A_1 \cap A_2)$ per ogni $A_1, A_2 \in \mathfrak{S}$

Dimostrazione: i) L'additività di $\mathfrak{m}$ implica $\mathfrak{m}(\varnothing) = \mathfrak{m}(\varnothing \cup \varnothing) = 2\mathfrak{m}(\varnothing) = 0$.
ii) Notiamo che possiamo scrivere l'insieme $A_1 \cup A_2$ come segue:

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus A_2) \uplus (A_1 \cap A_2) \uplus (A_2 \setminus A_1)$$

e quindi dall'additività della misura $\mathfrak{m}$ segue che

$$\mathfrak{m}(A_1 \cup A_2) = \mathfrak{m}(A_1 \setminus A_2) + \mathfrak{m}(A_1 \cap A_2) + \mathfrak{m}(A_2 \setminus A_1) \tag{3.1}$$

Tuttavia anche A_1 e A_2 possono essere scritti come unioni disgiunte:

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \uplus (A_1 \cap A_2) \quad \text{e} \quad A_2 = (A_2 \setminus A_1) \uplus (A_1 \cap A_2)$$

e quindi nuovamente l'additività di $\mathfrak{m}$ implica che

$$\mathfrak{m}(A_1 \setminus A_2) = \mathfrak{m}(A_1) - \mathfrak{m}(A_1 \cap A_2) \tag{3.2}$$

$$\mathfrak{m}(A_2 \setminus A_1) = \mathfrak{m}(A_2) - \mathfrak{m}(A_1 \cap A_2) \tag{3.3}$$

Sostituendo le relazioni 3.2 e 3.3 nella formula 3.1 si ottiene la tesi.

c.v.d.

Esempio 3.2.1. Se si pone $\mathfrak{S} = \{\text{rettangoli in } \mathbb{R}^d\}$, allora si riconosce che $\mathfrak{S}$ è un semianello (esempio 1.1.1) e che la misura m definita sull'insieme dei rettangoli d-dimensonali è effettivamente una misura secondo la definizione 3.2.1.

Definizione 3.2.2. Siano $\mathfrak{m} : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ e $\mathfrak{m}' : \mathfrak{S}' \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ due misure. Si dice che $\mathfrak{m}'$ è un *prolungamento di* $\mathfrak{m}$ se:

i) $\mathfrak{S}' \supset \mathfrak{S}$

ii) $\mathfrak{m}'_{|\mathfrak{S}} \equiv \mathfrak{m}$, cioé $\mathfrak{m}'(A) = \mathfrak{m}(A)$ per ogni $A \in \mathfrak{S}$

Proposizione 3.2.2. Sia $\mathfrak{m} : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ una misura e sia $\mathfrak{A}(\mathfrak{S})$ l'anello minimale costruito sopra $\mathfrak{S}$. Allora esiste ed è unico un prolungamento $\mathfrak{m}'$ di $\mathfrak{m}$ che ammetta $\mathfrak{A}(\mathfrak{S})$ come dominio.

Dimostrazione: Preso un elemento $B \in \mathfrak{A}(\mathfrak{S})$, allora esistono degli insiemi $\{B_k\}_{k=1}^n, B_k \in \mathfrak{S}$, a due a due disgiunti, tali che $B = \bigcup_{k=1}^n B_k$. Allora è sufficiente definire $\mathfrak{m}'$ in tal modo:

$$\mathfrak{m}'(B) := \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{m}(B_k) \quad \text{per ogni } B \in \mathfrak{A}(\mathfrak{S})$$

Si verifica banalmente che $\mathfrak{m}'$ è una misura additiva che non dipende dalla decomposizione di B nei B_k (la dimostrazione di tal fatto è identica a quella fatta per la misura degli insiemi elementari). Inoltre $\mathfrak{m}'$ è unica poiché è univocamente determinata dalla misura dei B_k.

c.v.d.

Esempio 3.2.2. Nel caso in cui si scelga $\mathfrak{S} = \{\text{rettangoli in } \mathbb{R}^d\}$ e $\mathfrak{A}(\mathfrak{S}) = \{\text{insiemi elementari in } \mathbb{R}^d\}$ (esercizio facile: provare che in effetti l'insieme $\mathfrak{E}$ degli insiemi elementari è l'anello minimale costruito sull'insieme $\mathfrak{R}$ dei rettangoli), allora la misura m' definita sugli insiemi elementari prolunga la misura m secondo la definizione 3.2.2. In particolare la misura m' coincide esattamente con quella definita nella dimostrazione della proposizione 3.2.2.

Proposizione 3.2.3. Sia $\mathfrak{A}$ un anello e $\mathfrak{m}' : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ una misura. Valgono le seguenti condizioni:

i) Sia $\{A_i\}_{i=1}^n$ una famiglia finita di elementi di $\mathfrak{A}$ tale che $A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$; allora $\mathfrak{m}'(A) \leq \sum_{i=1}^n \mathfrak{m}'(A_i)$.

ii) Sia $\{A_i\}_{i=1}^n$ una famiglia finita di elementi di $\mathfrak{A}$ a due a due disgiunti tale che $A \supset \bigcup_{i=1}^n A_i$; allora $\mathfrak{m}'(A) \geq \sum_{i=1}^n \mathfrak{m}'(A_i)$.

Dimostrazione: *i*) Dalla proposizione 3.2.1 segue che $\mathfrak{m}'(A_1 \cup A_2) \leq \mathfrak{m}'(A_1) + \mathfrak{m}'(A_2)$; per induzione segue quindi che

$$\mathfrak{m}'\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^n \mathfrak{m}'(A_i) \tag{3.4}$$

Inoltre è evidente che possiamo scrivere l'insieme $\bigcup_{i=1}^n A_i$ come un'unione disgiunta:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A \cup \Big(\bigcup_{i=1}^n A_i \smallsetminus A\Big)$$

da cui, per l'additività della misura, segue che

$$\mathfrak{m}'(A) \leq \mathfrak{m}'\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) \tag{3.5}$$

Mettendo assieme le relazioni 3.4 e 3.5 segue subito il punto *i*).
ii) Possiamo scrivere A come unione disgiunta:

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i \cup \Big(A \smallsetminus \bigcup_{i=1}^n A_i\Big);$$

dall'additivtà di $\mathfrak{m}'$ deduciamo quindi che

$$\mathfrak{m}'(A) = \sum_{i=1}^n \mathfrak{m}'(A_i) + \mathfrak{m}'\Big(A \smallsetminus \bigcup_{i=1}^n A_i\Big)$$

da cui segue subito che $\sum_{i=1}^n \mathfrak{m}'(A_i) \leq \mathfrak{m}'(A)$, cioé la tesi.

c.v.d.

Definizione 3.2.3. Sia data una misura $\mathfrak{m} : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ sul semianello $\mathfrak{S}$. $\mathfrak{m}$ si dice *σ-additiva* se preso $A \in \mathfrak{S}$ e considerata una partizione al più numerabile $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ di A, allora $\mathfrak{m}(A) = \sum_{i=1}^\infty \mathfrak{m}(A_i)$.

Proposizione 3.2.4. Sia $\mathfrak{m} : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ una misura σ-additiva. Allora la misura $\mathfrak{m}' : \mathfrak{A}(\mathfrak{S}) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ che prolunga $\mathfrak{m}$ è σ-additiva.

Dimostrazione: Sia $A \in \mathfrak{A}(\mathfrak{S})$ e sia $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una partizione numerabile di A. Esistono allora $A_j \in \mathfrak{S}$, $B_{nk} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{S})$ a due a due disgiunti tali che

$$A = \bigcup_{j=1}^{t} A_j, \quad B_n = \bigcup_{k=1}^{s} B_{nk}$$

Poniamo allora $C_{nkj} = B_{nk} \cap A_j$: è facile vedere che i C_{nkj} sono a due a due disgiunti e che valgono le relazioni

$$A_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{s} C_{nkj}, \quad B_{nk} = \bigcup_{j=1}^{t} C_{nkj}$$

da cui, applicando la σ-additività di $\mathfrak{m}$, segue che

$$\mathfrak{m}(A_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{s} \mathfrak{m}(C_{nkj}) \tag{3.6}$$

$$\mathfrak{m}(B_{nk}) = \sum_{j=1}^{t} \mathfrak{m}(C_{nkj}) \tag{3.7}$$

Inoltre sfruttando la definizione di $\mathfrak{m}'$ sappiamo che:

$$\mathfrak{m}'(A) = \sum_{j=1}^{t} \mathfrak{m}(A_j) \tag{3.8}$$

$$\mathfrak{m}'(B_n) = \sum_{k=1}^{s} \mathfrak{m}(B_{nk}) \tag{3.9}$$

Mettendo assieme le relazioni 3.6, 3.7, 3.8, 3.9 segue immediatamente la tesi.

c.v.d.

Proposizione 3.2.5. Sia $\mathfrak{A}$ un anello e sia $\mathfrak{m}' : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ una misura σ-additiva. Allora:

i) Per ogni $A, \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $\mathfrak{A}$ tali che $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, segue che $\mathfrak{m}'(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}'(A_n)$.

ii) Per ogni $A \in \mathfrak{A}$ e $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ famiglia di elementi di $\mathfrak{A}$ a due a due disgiunti tali che $A \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, segue che $\mathfrak{m}'(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}'(A_n)$.

Dimostrazione: i) Poniamo $B_n := (A \cap A_n) \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$: ovviamente $B_n \in \mathfrak{A}$ e $B_n \subset A_n$; inoltre è facile verificare che i B_n sono a due a due disgiunti e che $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Da tutto ciò segue che

$$\mathfrak{m}'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}'(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}'(A_n)$$

e quindi il punto i) è provato.
ii) Per il punto ii) della proposizione 3.2.3 sappiamo che

$$\mathfrak{m}'(A) \geq \sum_{n=1}^{t} \mathfrak{m}'(A_n)$$

Passando al limite quando $t \to +\infty$ segue il punto ii).

c.v.d.

Corollario 3.2.1. L'affermazione ii) della proposizione 3.2.5 è equivalente alla σ-additività di $\mathfrak{m}'$.

Dimostrazione: Se $\mathfrak{m}'$ è σ-additiva, per la proposizione 3.2.5 vale ii).
Viceversa supponiamo che valga ii), e consideriamo una partizione al più numerabile $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ di A: siccome deve valere che

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

allora dall'ipotesi segue che

$$\mathfrak{m}'(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}'(A_n) \tag{3.10}$$

Inoltre il punto i) della proposizione 3.2.5 implica che

$$\mathfrak{m}'(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}'(A_n) \tag{3.11}$$

Mettendo assieme 3.10 e 3.11 segue che $\mathfrak{m}'$ è σ-additiva.

c.v.d.

3.2.1 Prolungamento della misura su semianelli dotati di unità

In questo paragrafo non effettueremo dimostrazioni poiché queste sono identiche parola per parola a quelle già viste nei capitoli 1 e 2, apportando ovviamente le generalizzazioni del caso. Ci limiteremo quindi a riportare una serie noiosa (ma necessaria!) di risultati che il lettore è vivamente invitato a provare per esercizio: anche se al pigro e indolente studente questo esercizio di ricopiatura potrà sembrare inutile, in realtà esso è un utilissima ginnastica mentale che ha lo scopo prinicipale di far digerire meglio tali dimostrazioni.

Definizione 3.2.1.1. Sia $A \subset X$ un insieme qualsiasi e $\mathfrak{S}$ un suo semianello su cui è definita una misura $\mathfrak{m}$. Si dice *misura esterna* di A la quantità:

$$\mu^*(A) := \inf_{A \subset \bigcup_i A_i} \sum_i m(A_i).$$

Osservazione 3.2.1.1. Sia $A \subset X$ tale che $A \in \mathfrak{A}(\mathfrak{S})$. Allora $\mu^*(A) = \mathfrak{m}'(A)$

Teorema 3.2.1.1. (Subaddività di μ^*) Siano $A, A_1, A_2 \dots$ sottoinsiemi di X tali che $A \subset \bigcup_i A_i$. Allora

$$\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

Definizione 3.2.1.2. Un insieme $A \subset X$ si dice *misurabile (secondo Lebesgue)* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme $B \in \mathfrak{A}(\mathfrak{S})$ tale che

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$$

La funzione μ^* ristretta all'insieme degli insiemi misurabili (il quale si indica con $\mathfrak{M}_X$) si chiama misura di Lebesgue e si indica con μ.

Osservazione 3.2.1.2. La misura di Lebesgue appena definita costituisce il prolungamento di Lebesgue della misura $\mathfrak{m}$ definita sul semianello $\mathfrak{S}$. In particolare ogni prolungamento di Lebesgue è completo per l'osservazione 3.1.3.2.

Proposizione 3.2.1.1. L'insieme $\mathfrak{M}_X$ è una σ-algebra con unità X.

Teorema 3.2.1.2. (σ-additività di μ) La misura di Lebesgue è σ-additiva.

Teorema 3.2.1.3. (Continuità della misura μ) Siano $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia di elementi di $\mathfrak{M}_X$ tali che $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$; allora

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \lim_{k \to +\infty} \mu(A_k) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k).$$

Siano $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia di elementi di $\mathfrak{M}_X$ tali che $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$; allora

$$\mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \lim_{k \to +\infty} \mu(A_k) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k)$$

3.3 (Complementi)^2

Ed eccoci a discutere del "mostro" matematico cui avevamo accennato all'inizio di questo capitolo, l'insieme di Cantor, forse a qualcuno già familiare (è, tutto sommato, piuttosto noto essendo anche un frattale, ma noi non ci soffermeremo oltre su questa proprietà). Dopo esserci occupati di lui, seguirà a ruota a pagina 31 un interessante un confronto tra il concetto di misura secondo Peano-Jordan e secondo Lebesgue.

3.3.1 L'insieme di Cantor

Consideriamo l'insieme $C_0 = [0,1] \subset \mathbb{R}$ e dividiamolo in 3 intervalli di ugual ampiezza come segue:

$$C_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right];$$

ciò fatto, eliminiano l'intervallo aperto centrale ottenendo così l'insieme

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Operiamo ora come fatto sopra sugli intervalli chiusi $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, così da ottenere l'insieme

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Iteriamo ora questa procedura indefinitamente: l'insieme così ottenuto, sia esso C, prende il nome di *insieme di Cantor*.

Figura 3.3: La costruzione dell'insieme di Cantor (primi 7 passi)

Adesso che abbiamo costruito C, vediamone prima di tutto le proprietà topologiche essenziali:

i) C è chiuso (nella topologia metrica di $\mathbb{R}$): infatti, per costruzione, il complementare di C in C_0 è un'unione numerabile di intervalli aperti, e quindi è un aperto;

ii) C è compatto: infatti $C \subset C_0$ è limitato e chiuso per *i*), quindi compatto per il teorema di Heine-Borel;

iii) C è perfetto: [1] siccome C è chiuso e non ha punti non isolati, deve essere $C = \mathrm{Der}(C)$, cioè coincide con il suo insieme derivato (che è l'insieme dei punti di accumulazione); proviamo inoltre che $\partial C = C$: se, per assurdo, esistesse $x_0 \in C$ tale che x_0 non è di frontiera per C, allora esisterebbe un intorno U_{x_0} di x_0 tale che $U_{x_0} \subset C$. Tuttavia tale intorno ha misura positiva, e questo implica che $\mu(C) > 0$, assurdo (infatti, fra pochissimo, dimosteremo che l'insieme di Cantor ha misura nulla, il lettore più trepidante sappia attendere!).

iv) C è sconnesso: infatti C si può scrivere come unione di intervalli chiusi disgiunti e non vuoti.

Dimostrate tale semplici proprietà, passiamo al piatto forte, cioè al motivo per cui abbiamo discusso dell'insieme di Cantor in questa sede: ogni insieme numerabile è misurabile ed ha misura nulla (dimostrarlo per esercizio; suggerimento: si dimostri dapprima che i singletons sono misurabili ed hanno misura nulla, poi si generalizzi); tuttavia il viceversa non è vero, cioè esiste un insieme misurabile di misura nulla non numerabile. Dimostriamo ora che l'insieme di Cantor fornisce il controesempio cercato: proviamo quindi che

i) C è misurabile ed ha misura nulla;

ii) C non è numerabile.

Dimostrazione. *i*) Dalla definizione di C segue che $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ con i C_n tutti misurabili, e quindi C è misurabile. Notiamo ora che

$$\mu([0,1] \setminus C) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{2^n}{3^{n+1}} + \cdots = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1.$$

Per cui $\mu(C) = \mu([0,1]) - \mu([0,1] \setminus C) = 0$.
ii) Proviamo che C ha la potenza del continuo: per far ciò sarà sufficiente mostrare che esiste una funzione suriettiva $F : C \to [0,1]$ (perchè? esercizio: dimostrare che se esiste una suriezione $f : B \to A$ e $B \subset A$, allora B ed A sono equipotenti). Per prima cosa, scriviamo ogni elemento di $[0,1]$ in base 3, cioè se $x \in [0,1]$, allora

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{3^k}$$

per certi $\xi_k \in \mathbb{R}$ (ad esempio $\frac{1}{3} = (0,1)_3$ oppure $\frac{2}{3} = (0,2)_3$); definiamo poi F attraverso i seguenti passi:

[1] un insieme si dice *perfetto* se tutti i suoi punti sono di accumulazione e di frontiera

(a) prendiamo il numero $(x)_3$ e sostituiamo il primo 1 con un 2, i successivi con 0;

(b) sostituiamo tutti i 2 con la cifra 1;

(c) interpretiamo il numero ottenuto nella base due, ottenendo così ancora un punto di $[0,1]$. Questo numero sarà il nostro $F((x)_3)$

Abbiamo così costruito una funzione $F : [0,1] \to [0,1]$, detta funzione di Cantor-Vitali (nota anche come scala di Cantor o scala del diavolo).

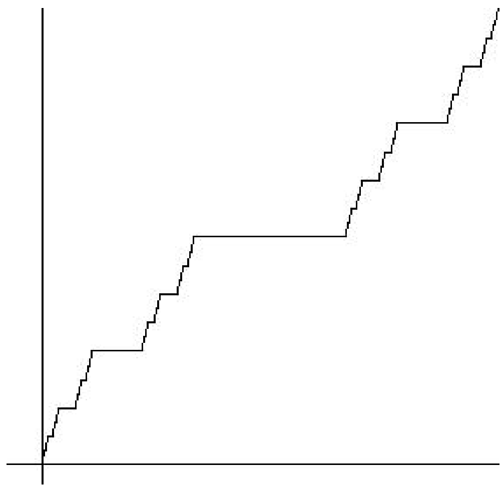


Figura 3.4: La funzione di Cantor-Vitali

Dimostriamo che tale F è una suriezione da C in $[0,1]$: dato che ogni numero in $[0,1]$ ammette rappresentazione binaria, sarà sufficiente mostrare che ogni elemento di C ha una rappresentazione in base 3 del tipo $(0,\xi_1\xi_2\xi_3\ldots)_3$ con $\xi_i = 0$ oppure $\xi_i = 2$ (infatti il passo (a) definisce proprio un elemento di questo tipo; risulta così semplice costruire un'inversa destra di F con una procedura che applichi i punti $(a),(b),(c)$ in ordine inverso rispetto alla procedura che definisce F). Procediamo: al primo passso nella costruzione di C abbiamo eliminato l'aperto $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, i cui estremi hanno rappresentazione ternaria $\frac{1}{3} = (0,1)_3 = (0,0\bar{2})_3$ e $\frac{2}{3} = (0,2)_3 = (0,1\bar{2})_3$ (questo perchè il periodo 2 in base 3 è equivalente al periodo 9 in base 10), e quindi in C_1 sono rimasti solo i numeri del tipo $(0,0xxx\ldots)_3$ e $(0,2xxx\ldots)_3$; procedendo allo stesso modo al passo successivo, gli elementi in C_2 saranno del tipo $(0,00xxx\ldots)_3$ o $(0,02xxx\ldots)_3$ o $(0,20xxx\ldots)_3$ o ancora $(0,22xxx\ldots)_3$; iterando la procedura si arriva alla tesi. Abbiamo così provato che F è suriettiva e quindi C ha la potenza del continuo.

3.3.2 Misurabilità di un insieme secondo Peano-Jordan

Diamo ora una definizione ulteriore di misurabilità per gli insiemi, senza dubbio già familiare a chi ha avuto a che fare con l'integrazione riemanniana:

Definizione 3.3.1. Sia $\mathfrak{A}$ un anello costruito su un insieme X e sia $\mathfrak{m}' : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ una misura su X. Un insieme $A \subset X$ si dice *Peano-Jordan misurabile* se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $A', A'' \in \mathfrak{A}$ tali che $A' \subset A \subset A''$ e $\mathfrak{m}'(A'' \setminus A') < \varepsilon$.

Nel caso dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ si può anche procedere in altro modo per definire la Peano-Jordan-misurabilità: consideriamo i soliti insiemi elementari[2] e un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$, indi consideriamo gli insiemi di tutti i plurirettangoli contenuti e contenenti A; una volta definita la misura m' dei plurirettangoli attraverso quella dei rettangoli nel solito modo, definiamo misura esterna e misura interna secondo Peano-Jordan ponendo rispettivamente:

$$\overline{m}(A) := \inf_{i \in I} \{m'(E_i) | E_i \text{ è un plurirettangolo che contiene } A\};$$

$$\underline{m}(A) := \sup_{i \in I} \{m'(E_i) | E_i \text{ è un plurirettangolo contenuto in } A\}.$$

A questo punto diciamo che A è misurabile secondo Peano-Jordan se $\underline{m}(A) = \overline{m}(A)$: è chiaro che questa definizione coincide con quella data sopra, più generale, nel caso in cui si prenda come anello $\mathfrak{P}$ l'insieme dei plurirettangoli (dimostreremo comunque questo fatto nel caso più generale alla fine di tale paragrafo). In particolare possiamo riassumere entrambe le definizioni in questo modo: un insieme A è Peano-Jordan misurabile se e solo se la sua frontiera ha misura nulla (infatti per ogni $\varepsilon > 0$ esistono A', A'' plurirettangoli tali che $\partial A \subset A'' \setminus A'$ e $m'(A'' \setminus A') < \varepsilon$).

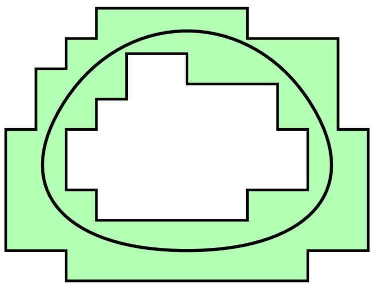


Figura 3.5: L'idea che sta sotto la misurabilità secondo Peano-Jordan

Per completare il discorso, diamo anche le definizioni più generali di misura esterna e interna secondo Peano-Jordan:

[2]in questo contesto gli insiemi elementari vengono spesso chiamati *plurirettangoli*

Definizione 3.3.2. Sia $m' : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ come nella definizione precedente. Si dice *misura esterna secondo Peano-Jordan* di $A \subset X$ la quantità

$$\overline{m}(A) := \inf_{B \in \mathfrak{A}} \{m'(B) | B \supset A\}.$$

Si definisce invece *misura interna secondo Peano-Jordan* di A la quantità

$$\underline{m}(A) := \sup_{B \in \mathfrak{A}} \{m'(B) | B \subset A\}.$$

Nel caso in cui $\overline{m}(A) = \underline{m}(A)$, si dice che A è *Peano-Jordan misurabile* e si chiama *misura di Peano-Jordan* la funzione $m := \overline{m} = \underline{m}$.

è chiaro che queste definizioni coincidono con quelle date in $\mathbb{R}^n$ nel caso in cui si prenda come anello $\mathfrak{P}$ l'insieme di tutti i plurirettangoli. Dimostriamo ora a livello generale quanto promesso in precedenza, cioè che le due definizioni di misurabilità enunciate in questa sezione sono equivalenti:

Proposizione 3.3.1. Le definizioni 3.3.1 e 3.3.2 sono equivalenti.

Dimostrazione: ($\Leftarrow$) Supponiamo che valga la definizione 3.3.1: sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $A', A'' \in \mathfrak{A}$ tali che $A' \subset A \subset A''$ e $m'(A'' \setminus A') = m'(A'') - m'(A') < \varepsilon$; dalla definizione di $\underline{m}$ e di $\overline{m}$ deduciamo immediatamente che $\underline{m}(A) \leq \overline{m}(A)$, e dalle definizioni di estremo superiore ed inferiore seguono le seguenti diseguaglianze:

$$m'(A') \leq \underline{m}(A) \leq \overline{m}(A) \leq m'(A''),$$

da cui segue che

$$|\overline{m}(A) - \underline{m}(A)| \leq |m'(A'') - m'(A')| < \varepsilon,$$

cioè abbiamo raggiunto la definizione 3.3.2.
($\Rightarrow$) Viceversa valga la definizione 3.3.2, cioè supponiamo che $\overline{m}(A) = \underline{m}(A)$. Sempre dalle definizioni di estremo superiore ed inferiore, deduciamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due insiemi A', A'' tali che:

$$\begin{aligned}\underline{m}(A) - \varepsilon/2 < m'(A') \leq \underline{m}(A)& \\ = \overline{m}(A) \leq m'(A'') < \overline{m}(A) + \varepsilon/2;&\end{aligned}$$

segue quindi che

$$|m'(A'') - m'(A')| < |\overline{m}(A) + \varepsilon/2 - \underline{m}(A) + \varepsilon/2| = \varepsilon.$$

Ne discende quindi la definizione 3.3.1.

c.v.d.

Osservazione 3.3.1. Esattamente come accade per la misura interna di Lebesgue, la misura interna di Peano-Jordan si può scrivere attraverso la seguente espressione:

$$\underline{m}(A) = \overline{m}(X) - \overline{m}(X \smallsetminus A).$$

Infatti, considerato un plurirettangolo E_i contenuto in A, segue che il suo complementare $X \smallsetminus E_i$ sarà un plurirettangolo che contiene $X \smallsetminus A$. Passando alle misure, si ottiene la formula scritta sopra.

Confronto fra la misurabilità di un insieme secondo Peano-Jordan e secondo Lebesgue

In questa sezione cercheremo di capire se ci sono dei legami fra questi due concetti di misurabilità, ed in caso affermativo quali. Consideriamo l'insieme $A := [0,1] \cap \mathbb{Q} = \{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$: tale insieme è numerabile, per cui è misurabile secondo Lebesgue ed ha misura nulla; in particolare $\mu^*(A) = 0$; tuttavia non è misurabile secondo Peano-Jordan visto che

$$\overline{m}(A) = m'([0,1]) = 1 \quad \text{e} \quad \underline{m}(A) = m'(\{r_k\}_k) = 0$$

Questo esempio prova che, dato un certo insieme A, vale che $\mu^*(A) \leq \overline{m}(A)$. Viceversa, vale il seguente risultato:

Proposizione 3.3.2.1. Se un insieme $A \subset X$ è Peano-Jordan misurabile, allora è Lebesgue misurabile e la sua misura secondo Peano-Jordan coincide con quella secondo Lebesgue.

Dimostrazione: Se A è Peano-Jordan misurabile, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esistono A', A'' plurirettangoli tali che $A' \subset A \subset A''$ e $m'(A'' \smallsetminus A') < \varepsilon$; ne segue che

$$\begin{aligned} \mu^*(A \triangle A'') &\leq \overline{m}(A \triangle A'') \leq \overline{m}(A'' \smallsetminus A') \\ &= m'(A'' \smallsetminus A') < \varepsilon, \end{aligned}$$

per cui A è Lebesgue-misurabile. Inoltre vale la seguente catena di diseguaglianze:

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu^*(A) \leq \overline{m}(A) = \underline{m}(A) \\ &= \overline{m}(X) - \overline{m}(X \smallsetminus A) \leq \mu^*(X) - \mu^*(x \smallsetminus A) = \mu_*(A), \end{aligned}$$

e ricordando che si ha sempre $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$, segue che $\mu \equiv m$.

c.v.d.

Esempio 3.3.2.1. Concludiamo col seguente esempio: definiamo la successione $A_n := [0,1] \setminus \{r_1, \ldots, r_n\}$, ove $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è la successione dei razionali in $[0,1]$. Consideriamo ora l'insieme

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

cioè l'insieme $[0,1]$ privato di tutti i razionali. Notiamo che si verificano i seguenti fatti:

i) $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$;

ii) A è misurabile e $\mu(A) = 1$;

iii) Gli A_n sono Peano-Jordan misurabili per ogni n fissato, e quindi $\mu(A_n) = m(A_n) = 1$;

iv) A non è Peano-Jordan misurabile, poichè $1 = \overline{m}(A) > \underline{m}(A) = 0$.

Per la proprietà di continuità di μ segue che

$$1 = \mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty} m(A_n).$$

Risulterebbe quindi che A è Peano-Jordan misurabile ed ha misura 1, falso dato che vale *iv*). Si conclude quindi che la misura m di Peano-Jordan non soddisfa la proprietà di continuità.

Capitolo 4

Funzioni misurabili

SIAMO COSÌ GIUNTI al secondo argomento cardine della nostra trattazione. Abbandonato lo studio delle misure, ci occupiamo ora di una classe particolare di funzioni che aprono le porte ad un gran numero di applicazioni.

4.1 Un nuovo punto di vista sulle funzioni

Definizione 4.1.1. Siano $(X, \mathfrak{S}_X)$ e $(Y, \mathfrak{S}_Y)$ due spazi misurabili[1] con σ-algebre $\mathfrak{S}_X$ e $\mathfrak{S}_Y$ rispettivamente. Una funzione $f : (X, \mathfrak{S}_X) \to (Y, \mathfrak{S}_Y)$ si dice *misurabile* se per ogni $A \in \mathfrak{S}_Y$ segue che $f^{-1}(A) \in \mathfrak{S}_X$. In particolare se f è definita sul dominio [2] $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ allora si dice che f è una funzione *μ-misurabile.*

Proposizione 4.1.1. Siano $(X, \mathfrak{S}_X)$, $(Y, \mathfrak{S}_Y)$, $(Z, \mathfrak{S}_Z)$ spazi misurabili, e siano $f : (X, \mathfrak{S}_X) \to (Y, \mathfrak{S}_Y)$, $g : (Y, \mathfrak{S}_Y) \to (Z, \mathfrak{S}_Z)$ due funzioni misurabili. Allora la funzione $f \circ g : (X, \mathfrak{S}_X) \to (Z, \mathfrak{S}_Z)$ è una funzione misurabile.

Dimostrazione. Siccome g è misurabile segue che per ogni $A \in \mathfrak{S}_Z$ allora $f^{-1}(A) \in \mathfrak{S}_Y$; inoltre f è misurabile, e quindi $f^{-1}(g^{-1}(A)) = (g \circ f)^{-1}(A) \in \mathfrak{S}_X$, cioé $g \circ f$ è misurabile.

c.v.d.

Ora dimostriamo dei lemmi che useremo varie volte nel seguito:

Lemma 4.1.1. Siano $(X, \mathfrak{S}_X)$ e $(Y, \mathfrak{S}_Y)$ due spazi misurabili e $f : (X, \mathfrak{S}_X) \to (Y, \mathfrak{S}_Y)$ funzione. Esista $\mathcal{C}$ tale che $\mathfrak{S}_Y = \sigma(\mathcal{C})$. Allora f è misurabile se e solo

[1] Per spazi misurabili intendiamo dire spazi dove è possibile definire il concetto di misura; ecco perché risulta necessario definrli con delle σ-algebre (vedi l'osservazione 2.3.1)

[2] $\mathfrak{M}$ è la σ-algebra degli insiemi Lebesgue-misurabili e μ è la misura di Lebesgue

se per ogni $A \in \mathcal{C}$ segue che $f^{-1}(A) \in \mathfrak{S}_X$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Segue subito dalla definizione.
($\Leftarrow$) Viceversa definiamo l'insieme

$$\mathfrak{L} = \{A \in \mathfrak{S}_Y | f^{-1}(A) \in \mathfrak{S}_X\}.$$

Si verifica facilmente che $\mathfrak{L}$ è una σ-algebra (esercizio); inoltre dall'ipotesi segue subito che $\mathfrak{L} \supset \mathcal{C}$. Ma allora $\mathfrak{L} \supset \mathfrak{S}_Y = \sigma(\mathcal{C})$, da cui la tesi.

c.v.d.

Lemma 4.1.2. Siano $(X, \mathfrak{B}(X))$ e $(Y, \mathfrak{B}(Y))$ spazi topologici misurabili e sia $f : (X, \mathfrak{B}(X)) \to (Y, \mathfrak{B}(Y))$ una funzione continua. Allora f è misurabile.

Dimostrazione. Siccome f è continua, sappiamo che per ogni aperto $A \in \mathfrak{B}(Y)$ segue che $f^{-1}(A) \in \mathfrak{B}(X)$ (poiché $f^{-1}(A)$ è aperto). Alla luce del fatto che $\mathfrak{B}(Y) = \sigma\{A \subset Y | A \text{ è aperto in } Y\}$, segue subito la tesi per il lemma 4.1.1.

c.v.d.

Da questi lemmi scende un corollario banalissimo, ma importante:

Corollario 4.1.1. La composizione di una funzione misurabile con una funzione continua è ancora una funzione misurabile.

Da ora in poi prenderemo in considerazione solo funzioni μ-misurabili a valori reali, cioé prenderemo $(X, \mathfrak{S}_X) = (X, \mathfrak{M}, \mu)$ e $(Y, \mathfrak{S}_Y) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. Possiamo ora mostrare una condizione equivalente alla misurabilità di una funzione μ-misurabile di variabile reale:

Proposizione 4.1.2. Sia $f : (X, \mathfrak{M}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ una funzione. Allora f è misurabile se e solo se l'insieme $\{x \mid f(x) < c\}$ è misurabile per ogni $c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Se f è misurabile, per ogni $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ si ha che $f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}$; siccome per ogni $c \in \mathbb{R}$ troviamo che $(-\infty, c) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, si ha che $f^{-1}(-\infty, c) = \{x \mid f(x) < c\} \in \mathfrak{M}$, cioé $\{x \mid f(x) < c\}$ è un insieme misurabile.
($\Leftarrow$) Viceversa supponiamo che l'insieme $\{x \mid f(x) < c\}$ sia misurabile per ogni $c \in \mathbb{R}$: risulta quindi che per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha

$$f^{-1}(-\infty, c) = \{x \mid f(x) < c\} \in \mathfrak{M}.$$

Ricordando che $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \sigma\{(-\infty, c) | c \in \mathbb{R}\}$ e applicando il lemma 4.1.1, segue immediatamente la tesi.

c.v.d.

Vediamo ora che le funzioni misurabili si comportano bene rispetto alle quattro operazioni:

Proposizione 4.1.3. Somma, differenza, prodotto e quoziente (laddove ben definito) di funzioni misurabili sono misurabili.

Dimostrazione. La dimostrazione si articola in più passi:

passo *i*) dimostriamo che se f è misurabile, allora $f+a$ e kf sono misurabili per ogni $a, k \in \mathbb{R}$: sappiamo che per la proposizione 4.1.2, l'insieme $\{x \mid f(x) < c\}$ è misurabile per ogni $c \in \mathbb{R}$, da cui segue che sono misurabili gli insiemi $\{x \mid f(x) < c - a\}$ e $\{x \mid f(x) < c/k\}$ rispettivamente per ogni $a \in \mathbb{R}$ e per ogni $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; ma $\{x \mid f(x) < c-a\} = \{x \mid f(x)+a < c\}$ e $\{x \mid f(x) < c/k\} = \{x \mid kf(x) < c\}$ e quindi sempre per la proposizione 4.1.2 segue che $f+a$ e kf sono misurabili. Nel caso in cui $k=0$, si ha che $f(x) = 0$ è una funzione misurabile (infatti $f^{-1}(0) = \mathbb{R} \in \mathfrak{M}$).

passo *ii*) dimostriamo che, prese f, g misurabili, allora $f+g$ è una funzione misurabile. Per farlo proviamo che l'insieme $\{x \mid f(x) < g(x)\}$ è misurabile: a tal scopo scriviamo prima l'uguaglianza

$$\{x \mid f(x) < g(x)\} = \bigcup_{r_k \in \mathbb{Q}} \{x \mid f(x) < r_k\} \cap \{x \mid g(x) > r_k\}, \tag{4.1}$$

ove $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è la successione dei razionali (lasciamo la dimostrazione della disuguaglianza, facile, e quella della misurabilità, facilissima, per esercizio). Ciò premesso risulta subito che per ogni $c \in \mathbb{R}$ vale l'uguaglianza

$$\{x \mid f(x) + g(x) < c\} = \{x \mid f(x) < c - g(x)\}$$

e quindi dall'equazione 4.1 e dal passo *i*) segue pedissequamente che $f+g$ è misurabile; analogamente si procede per $f-g$.

passo *iii*) dimostriamo che se f, g sono misurabili allora fg è misurabile: anzitutto vale l'ovvia identità (detta identità di polarizzazione)

$$fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]; \tag{4.2}$$

inoltre il passo *ii*) e il corollario 4.1.1 implicano che le funzioni $(f+g)^2$ e $(f-g)^2$ sono misurabili. Se combiniamo quanto appena detto con l'equazione 4.2, otteniamo che fg è misurabile.

passo *iv*) dimostriamo che se f, g sono misurabili, allora $\frac{f}{g}$ è misurabile per ogni x tale che $g(x) \neq 0$: a tal proposito dimostriamo anzitutto che $\frac{1}{g(x)}$ è misurabile per ogni x tale che $g(x) \neq 0$. Sfruttiamo allora le seguenti banali identità (che il lettore è pregato di verificare per esercizio): se $c > 0$ allora

$$\left\{x \middle| \frac{1}{g(x)} < c\right\} = \{x \mid g(x) < 0\} \cup \left\{x \middle| g(x) > \frac{1}{c}\right\}; \tag{4.3}$$

se $c = 0$ allora

$$\left\{x \middle| \frac{1}{g(x)} < c\right\} = \{x \mid g(x) < c\}; \tag{4.4}$$

infine se $c < 0$ allora

$$\left\{x \middle| \frac{1}{g(x)} < c\right\} = \{x \mid g(x) < 0\} \cap \left\{x \middle| g(x) > \frac{1}{c}\right\}; \tag{4.5}$$

A questo punto mettendo assieme le relazioni 4.3, 4.4, 4.5 ed il lemma 4.1.2, segue che $\frac{1}{g(x)}$ è misurabile per ogni x tale che $g(x) \neq 0$. Infine il passo *iii*) ci conduce alla tesi.

c.v.d.

Introduciamo ora due concetti che ci semplificheranno spesso la vita nel seguito (in particolare quando tratteremo l'integrazione astratta):

Definizione 4.1.2. Sia $\mathscr{P}$ una generica proprietà e sia X un insieme. Si dice che X soddisfa $\mathscr{P}$ *quasi ovunque* (e si scrive X soddisfa $\mathscr{P}$ *q.o.*) se

$$\mu\{x \in x \mid x \text{ non soddisfa } \mathscr{P}\} = 0.$$

Definizione 4.1.3. Siano f, g definite su uno stesso insieme misurabile. Si dice che f è *equivalente* a g (e si scrive $f \sim g$) se vale la seguente proprietà:

$$\mu\{x \mid f(x) \neq g(x)\} = 0.$$

Esempio 4.1.1. Alla luce della definizione 4.1.2, la definizione 4.1.3 si può riscrivere così: due funzioni f, g definite su uno stesso insieme misurabile si dicono equivalenti se e solo se sono quasi ovunque uguali.

Esempio 4.1.2. La nozione di equivalenza tra funzioni permette di semplificare notelvomente funzioni molto complicate, addiritura il cui grafico è intracciabile: si consideri la ben nota funzione di Dirichlet (estesa a tutta la retta reale):

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Tale funzione è equivalente alla funzione banale $f(x) = 0$ (poiché $\mathbb{Q}$ ha misura nulla; vedi la sottosezione 3.3.1).

Osservazione 4.1.1. L'attento lettore avrà notato che la simbologia $f \sim g$ ed il termine equivalenza sono lessicograficamente correlati alla terminologia utilizzata quando si lavora con le relazioni di equivalenza. In effetti definiamo la relazione $\sim$ sull'insieme $\mathcal{M}$ di tutte le funzioni aventi dominio su uno stesso insieme misurabile ponendo

$$f \sim g \iff f \text{ è equivalente a } g$$

Si prova che tale relazione è di equivalenza: la riflessività e la simmetria sono ovvie, e pertanto vengono lasciate come esercizio. Verichiamo la transitività: prendiamo tre funzioni f, g, h in $\mathcal{M}$ tali che $f \sim g$ e $g \sim h$; allora vale la relazione

$$\{x \mid f(x) \neq h(x)\} \subseteq \{x \mid f(x) \neq g(x)\} \cup \{x \mid g(x) \neq h(x)\} \tag{4.6}$$

Infatti se esistesse $x_0 \in \{x \mid f(x) \neq h(x)\}$ tale da sooddifare la condizione $x_0 \notin \{x \mid f(x) \neq g(x)\} \cup \{x \mid g(x) \neq h(x)\}$, allora per tale x_0 avremmo che $f(x_0) = g(x_0) = h(x_0)$, contro l'ipotesi. Pertanto abbiamo provato la relazione 4.6, la quale implica che

$$\mu\{x \mid f(x) \neq h(x)\} \leq \mu\{x \mid f(x) \neq g(x)\} + \mu\{x \mid g(x) \neq h(x)\},$$

da cui segue che $\mu\{x \mid f(x) \neq h(x)\} = 0$. Questo prova la transitività.

Osservazione 4.1.2. Per funzioni continue la nozione di equivalenza è inessenziale: precisamente due funzioni $f, g \in \mathcal{M}$ continue sono equivalenti se e solo se coincidono. L'implicazione $(\Leftarrow)$ è ovvia. Viceversa se, per assurdo, esistesse x_0 tale che $f(x_0) \neq g(x_0)$, allora esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x \in B(x_0, \varepsilon)$ si avrebbe che $f(x_0) \neq g(x_0)$; siccome $\mu(B(x_0, \varepsilon)) > 0$, segue che f e g non sono equivalenti, assurdo.

Osservazione 4.1.3. Ogni funzione è misurabile se ristretta ad un insieme di misura nulla. Infatti sia $f : (X, \mathfrak{M}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ con $\mu(X) = 0$: allora per ogni $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ si ha che $f^{-1}(B) \subset X$ e quindi $\mu(f^{-1}(B)) = 0$ a causa della completezza di μ. Siccome ogni sottoinsieme di misura nulla è misurabile, segue che $f^{-1}(B) \in \mathfrak{M}$, cioé f è misurabile.

Proposizione 4.1.4. Siano f, g due funzioni equivalenti definite su un insieme X misurabile. Se f è una funzione misurabile, allora g è una funzione misurabile.

Dimostrazione. Sia $A \subset X$ l'insieme ove $f(x) = g(x)$: allora su A vale

$$\{x \mid f(x) < c\} = \{x \mid g(x) < c\}, \quad \forall c \in \mathbb{R},$$

e quindi g è misurabile su A per il lemma 4.1.2. Inoltre su $X \setminus A$ g è misurabile per l'osservazione 4.1.3. Quindi g è misurabile su X.

c.v.d.

4.2 Convergenza di funzioni

Le funzioni misurabili si comportano bene rispetto all'operatore limite:

Proposizione 4.2.1. Il limite puntuale di funzioni misurabili è una funzione misurabile.

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili e poniamo $f := \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$: si tratta allora di mostrare che f è una funzione misurabile. A tal scopo è sufficiente provare la relazione

$$\{x \mid f(x) < c\} = \bigcup_k \bigcup_n \bigcap_{m\geq n} \Big\{x \mid f_n(x) < c - \frac{1}{k}\Big\}. \tag{4.7}$$

Se prendiamo un x nell'insieme a sinistra, allora segue dalla definizione di limite che esistono $k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ tali che per ogni $m \geq n$ si ha che $f_n(x) < c - \frac{1}{k}$; viceversa se prendiamo un x nell'insieme a destra dell'uguale, allora vuol dire che esistono $k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $m \geq n$ si ha che $f_n(x) < c - \frac{1}{k}$, e quindi sempre dalla definizione di limite segue che, definitivamente, $f(x) < c - \frac{1}{k} < c$. A questo punto mettendo insieme l'equazione 4.7 e il lemma 4.1.2, otteniamo la tesi.

c.v.d.

Vediamo ora una definizione di convergenza più debole di quella puntuale:

Definizione 4.2.1. Sia $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni. Si dice che f_n *converge quasi ovunque* ad una funzione f (e si scrive $f_n \to f$ *q.o.*) se

$$\mu\{x \mid \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \neq f(x)\} = 0$$

Proposizione 4.2.2. Sia $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili definite su X tali che $f_n \to f$ *q.o.* Allora $f(x)$ è una funzione misurabile.

Dimostrazione. Sia $A \subset X$ l'insieme ove $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. Allora, sull'insieme A, risulta che f è una funzione misurabile per la proposizione 4.2.1. Inoltre f è misurabile su $X \setminus A$ per l'osservazione 4.1.3, e quindi f è misurabile su X.

c.v.d.

Proposizione 4.2.3. Sia $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili definite su X convergente quasi ovunque a $f(x)$. Allora f_n converge quasi ovunque a g se e solo se f è equivalente a g.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Se, per assurdo, $f \not\to g$, allora esistono un insieme $B \subset X$ con $\mu(B) \neq 0$ e un $x_0 \in B$ tale che $f(x_0) \neq g(x_0)$. Allora, per tale x_0, si ha che $f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = g(x_0)$ con $f(x_0) \neq g(x_0)$, contro l'unicità del limite. ($\Leftarrow$) Viceversa sia $A \subset X$ l'insieme ove $f(x) = g(x)$: allora su A accade che $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = g(x)$. Su $X \smallsetminus A$ l'uguaglianza precedente può anche essere falsa, e quindi, complessivamente, si ha che f_n converge a g quasi ovunque

c.v.d.

Ci accingiamo ora a dimostrare un importante risultato che ci fornisce un fruttuoso legame tra convergenza uniforme e convergenza quasi ovunque.

Teorema 4.2.1. (di Egorov) Sia $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili definite su un insieme E misurabile convergenti ad una funzione $f(x)$ quasi ovunque; allora

i) esistono $\delta > 0$ ed $E_\delta \subset E$ misurabile tale che $\mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta$;

ii) la successione $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su E_δ .

Dimostrazione. Definiamo gli insiemi

$$E_n^m := \bigcap_{i\geq n} \Big\{x \mid |f_i(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m}\Big\};$$

abbiamo che gli E_n^m sono misurabili e vale la catena ascendente di inclusoni

$$E_1^m \subseteq E_2^m \subseteq \ldots \subseteq E_n^m \subseteq \ldots \tag{4.8}$$

Definiamo inoltre l'insieme misurabile

$$E^m := \bigcup_m E_n^m.$$

Alla luce delle inclusioni 4.8, possiamo scrivere un'altra catena ascendente di inclusioni:

$$E^m \smallsetminus E_1^m \supseteq E^m \smallsetminus E_2^m \supseteq \ldots \supseteq E^m \smallsetminus E_n^m \supseteq \ldots \tag{4.9}$$

A questo punto possiamo applicare la proprietà di continuità della misura grazie alle inclusioni 4.9 e concludere che

$$\mu(\bigcap_n E^m \smallsetminus E_n^m) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E^m \smallsetminus E_n^m) = 0, \tag{4.10}$$

visto che

$$\bigcap_n E^m \smallsetminus E_n^m = E^m \smallsetminus \bigcup_n E_n^m = \varnothing.$$

Nella terminologia dei limiti, possiamo riscrivere la relazione 4.10 in tal modo:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall m \in \mathbb{N} \quad \exists n_0(m): \quad \forall n \geq n_0(m) \quad \mu(E^m \setminus E_n^m) < \frac{\delta}{2^m}.$$

Poniamo ora

$$E_\delta := \bigcap_m E^m_{n_0(m)};$$

risulta che E_δ è un insieme misurabile contenuto in E che soddisfa la tesi: innanzitutto dalla definizione di E_δ segue subito l'affermazione ii) poiché se $x \in E_\delta$ allora

$$\forall m \quad \exists n_0(m): \quad \forall i \geq n_0(m), \forall x \in E, \quad |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m};$$

scegliendo quindi $m_0 < 1/\varepsilon$ segue che le f_n convergono uniformemente ad f su E_δ. Per provare invece la relazione i), cominciamo col provare che $\mu(E \setminus E^m) = 0$: infatti se $x \in E \setminus E^m$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste sempre un i abbastanza grande tale che $|f_i(x) - f(x)| \geq \varepsilon$, cioé le f_n non convergono ad f su $E \setminus E^m$; dall'ipotesi di convergenza quasi ovunque delle f_n ad f segue quindi che $\mu(E \setminus E^m) = 0$. Risulta quindi che

$$\mu(E \setminus E^m_{n_0(m)}) \leq \mu(E \setminus E^m) + \mu(E^m \setminus E^m_{n_0(m)}) \leq \frac{\delta}{2^m}$$

Allora possiamo calcolare la misura di $E \setminus E_\delta$:

$$\mu(E \setminus E_\delta) = \mu(\bigcup_m E \setminus E^m_{n_0(m)}) \leq \sum_m \mu(E \setminus E^m_{n_0(m)}) < \delta.$$

Ma E_δ è misurabile, per cui $\mu(E \setminus E_\delta) = \mu(E) - \mu(E_\delta) < \delta$, da cui la tesi.

c.v.d.

Vediamo ora una nuova definizione di convergenza:

Definizione 4.2.2. Sia $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili convergenti ad una funzione $f(x)$. Si dice che $f_n(x)$ *converge in misura* a $f(x)$ se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Proposizione 4.2.4. Sia $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili convergenti ad una funzione $f(x)$ in misura. Allora f_n converge a g in misura se e solo se f è equivalente a g.

Dimostrazione. (⇒) Sia f_n convergente in misura a g ; notiamo che vale la seguente identità (figlia della diseguaglianza triangolare)

$$\{x \mid |f-g| \geq \delta\} \subseteq \left\{x \;\middle|\; |f-f_n| \geq \frac{\delta}{2}\right\} \cup \left\{x \;\middle|\; |f_n-g| \geq \frac{\delta}{2}\right\},$$

da cui possiamo immediatamente dedurre che

$$\mu\{x \mid |f-g| \geq \delta\} \leq \mu\left\{x \;\middle|\; |f-f_n| \geq \frac{\delta}{2}\right\} + \mu\left\{x \;\middle|\; |f_n-g| \geq \frac{\delta}{2}\right\};$$

si conclude quindi che

$$\mu\{x \mid |f-g| \geq \delta\} = 0. \tag{4.11}$$

Si noti inoltre che vale l'ovvia identità (pregasi verificare per esercizio!)

$$\{x \mid f(x) \neq g(x)\} = \bigcup_n \left\{x \;\middle|\; |f(x)-g(x)| \geq \frac{1}{n}\right\} \tag{4.12}$$

Ponendo $\{\delta_n\} := \frac{1}{n}$ e osservando le relazioni 4.11 e 4.12 otteniamo che:

$$\mu\{x \mid |f(x) \neq g(x)\} \leq \sum_n \left\{x \;\middle|\; |f(x)-g(x)| \geq \frac{1}{n}\right\} = 0,$$

da cui segue che f è equivalente a g.
(⇐) Viceversa sia $f \sim g$; nello stesso modo di prima si prova che

$$\mu\{x \mid |f_n-g| \geq \delta\} \leq \mu\left\{x \;\middle|\; |f_n-f| \geq \frac{\delta}{2}\right\} + \mu\left\{x \;\middle|\; |f-g| \geq \frac{\delta}{2}\right\},$$

da cui segue subito la tesi.

c.v.d.

I diligenti lettori si chiederanno: ci saranno del legami tra convergenza quasi ovunque e convergenza in misura? La risposta a tale quesito è affermativa, e verrà esauriantemente fornita nei successivi teoremi. Vediamo:

Teorema 4.2.2. Sia $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni convergente a $f(x)$ quasi ovunque. Allora f_n converge a f in misura.

Dimostrazione. Sia A l'insieme ove $f_n \nrightarrow f$; definiamo inoltre i seguenti insiemi:

$$E_k(\varepsilon) := \{x \mid f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\},$$

$$R_n(\varepsilon) := \bigcup_{k\geq n} E_k(\varepsilon),$$

$$M := \bigcap_n R_n(\varepsilon).$$

Notiamo che

$$R_1(\varepsilon) \supseteq R_2(\varepsilon) \supseteq \ldots \supseteq R_n(\varepsilon) \supseteq \ldots$$

e, conseguentemente, possiamo applicare la proprietà di continuità della misura all'insieme M:

$$\mu(M) = \lim_{n\to+\infty} \mu(R_n(\varepsilon)). \tag{4.13}$$

Dimostriamo ora che $M \subset A$: infatti se $x_0 \in M$ allora per ogni n esiste $k \geq n$ tale che $|f_k(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, cioé per tale x_0 si ha che $f_n(x_0) \nrightarrow f_(x_0)$, o, in altri termini, $x_0 \in A$. A questo punto, da quanto appena dimostrato e dalla relazione 4.13, deduciamo che $\mu(R_n(\varepsilon)) \to 0$. Infine dal fatto che $E_k(\varepsilon) \subseteq R_n(\varepsilon)$ deduciamo che $\mu(E_k(\varepsilon)) \to 0$, cioé la tesi.

c.v.d.

Osservazione 4.2.1. Il viceversa del teorema precedente è falso: come controesempio consideriamo la successione di funzioni

$$f_k^{(i)} := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Evidentemente si ha che le $f_k^{(i)}$ non convergono in alcun punto (per convincersi di questo è sufficiente tracciare il grafico di tali funzioni); tuttavia esse convergono in misura a 0 visto che

$$\mu\{x \mid f_k^{(i)} \geq \varepsilon\} = \mu\{x \mid f_k^{(i)} = 1\} = \mu\Big(\frac{1}{k}\Big) \to 0$$

Tuttavia vale una sorta di viceversa del teorema 4.2.2

Teorema 4.2.3. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite in E convergenti ad $f(x)$ in misura. Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente ad f quasi ovunque.

Dimostrazione. Sia $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una succesione tale che $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_k = 0$ e sia $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $\sum_k \eta_k$ sia una serie convergente. Grazie all'ipotesi possiamo definire ricorsivamente la successione $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in tal modo: esiste n_1 tale che

$$\mu\{x \mid f_{n_1}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_1\} < \eta_1,$$

successivamente esiste $n_2 > n_1$ tale che

$$\mu\{x \mid f_{n_2}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_2\} < \eta_2$$

e, in generale, esite $n_k > n_{k-1}$ tale che

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \mu\{x \mid f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\} < \eta_k$$

Definiamo ora gli insiemi

$$E_k(\varepsilon_k) := \{x \mid f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\},$$

$$R_n := \bigcup_{k \geq n} E_k(\varepsilon_k), \qquad M := \bigcap_n R_n.$$

Alla luce del fatto che

$$R_1 \supseteq R_2 \supseteq \ldots \supseteq R_n \supseteq \ldots$$

possiamo applicare la proprietà di continuità della misura all'insieme M e concludere che

$$\mu(M) = \lim_{n \to +\infty} \mu(R_n); \tag{4.14}$$

inoltre possiamo stimare la misura degli R_n :

$$\mu(R_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k(\varepsilon_k)) < \sum_{k=n}^{\infty} \eta_k \to 0. \tag{4.15}$$

In conclusione da 4.14 e 4.15 segue che $\mu(M) = 0$. A questo punto ci rimane solo da dimostrare che $f_{n_k}(x)$ convergono su $E \setminus M$: infatti se $x_0 \in E \setminus M$ allora esiste n tale che per ogni $k \geq n$ si ha che $|f_k(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon_k$; siccome avevamo scelto gli $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in modo tale che $\varepsilon_k \to 0$, segue la tesi.

c.v.d.

Capitolo 5

Integrale di Lebesgue

Ed eccoci arrivati a quello che indubbiamente costituisce il nucleo della teoria della misura e dei complementi di analisi: l'integrale di Lebesgue. Si tratta di un'integrazione la cui idea di base è molto, molto simile a quella di Riemann (la quale, siamo ragionevolmente certi, il lettore non sentiva impellentemente il bisogno insopprimibile di ridefinire), ma che la estende, allargando non di poco un campo di utilità già piuttosto vasto; insomma, tanto fumo, ma anche tanto arrosto.

5.1 Definizione dell'integrale

Definizione 5.1.1. Una funzione si dice *semplice* se assume una quantità al più numerabile di valori, ovvero se il suo codominio è discreto:

$$Y = \{y_1, \ldots, y_n, \ldots\}.$$

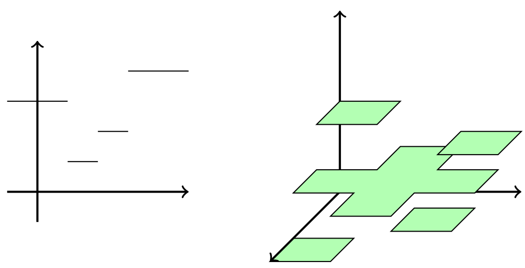


Figura 5.1: Esempi di funzioni semplici

Enunciamo e dimostriamo ora due teoremi che caratterizzano le funzioni semplici.

Teorema 5.1.1. Sia f una funzione semplice definita sullo spazio di misura $(X, \mathfrak{S}_X)$ a valori in $Y = \{y_1, \dots, y_n, \dots\}$; f è misurabile se e solo se

$$f^{-1}(y_i) \in \mathfrak{S}_X, \quad \forall y_i \in Y.$$

Dimostrazione. Se f è misurabile, la tesi è ovvia; viceversa poiché l'insieme $\{y_i\}_i$ è un sistema di generatori per la σ-algebra dei singleton $\mathfrak{S}_Y = \sigma(\{y_i\})$ definita su Y, la tesi segue subito dal lemma 4.1.1

c.v.d.

Risulta chiaro che, se f è una funzione semplice definita su un insieme A, definendo degli insiemi A_n come

$$A_n = \{x \in A | f(x) = y_n\}$$

otteniamo una partizione di A, ovvero $A = \dot\bigcup_n A_n$, e quindi ogni funzione semplice si può sempre scrivere in modo unico come

$$f(x) = \sum_n y_n \chi_{A_n}(x).$$

D'ora in avanti chiameremo *partizione canonica rispetto a f* questa particolare partizione di A.

Teorema 5.1.2. Una funzione f è misurabile se e solo se esiste una successione $\{f_n\}_n$ di funzioni semplici misurabili che converge uniformemente ad f.

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Segue subito dalla proposizione 4.2.1.
($\Rightarrow$) Viceversa, definiamo le f_n come segue:

$$f_n^m = \frac{m}{n} \chi_{\{x \ | \frac{m}{n} \leq f(x) \leq \frac{m+1}{n}\}}(x), \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

è evidente che le f_m^m sono semplici; inoltre per il teorema precedente sono misurabili (infatti si ha $A_n^m = \{x \in A | \frac{m}{n} \leq f(x) \leq \frac{m+1}{n}\}$, i quali sono misurabili). Infine si ha per costruzione $f_n^m(x) \leq f(x) \leq f_n^m(x) + \frac{1}{n}$ e dunque

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0, \forall x \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

che è la definizione di convergenza uniforme.

c.v.d.

Ora possiamo finalmente introdurre il concetto di integrale di Lebesgue per le funzioni semplici su insiemi di misura finita.

Definizione 5.1.2. Sia f una funzione semplice, definita su un insieme A con $\mu(A) < +\infty$, che prenda valori in $\{y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$ e sia $\{A_n\}_n$ la partizione canonica di A rispetto a f. Risulta naturale porre [1]

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_n y_n \mu(A_n). \tag{5.1}$$

f si dice *integrabile secondo Lebesgue* su A, o più semplicemente *L-integrabile*, se la serie 5.1 è assolutamente convergente, cioé se

$$\sum_n |y_n| \mu(A_n) < +\infty.$$

In tal caso l'*integrale di Lebesgue* di f su A è dato dalla somma della serie 5.1.

Notiamo esplicitamente che se invece di considerare la partizione canonica $\{A_n\}_n$ di A usata sinora si definisce una seconda partizione $\{B_k\}_k$ (e ciò comporta la possibilità di avere più indici k corrispondenti ad uno stesso valore y_n), il valore dell'integrale 5.1 non cambia, come mostra il seguente

Teorema 5.1.3. L'integrale di Lebesgue per funzioni semplici definite su un insieme A di misura finita non dipende dalla partizione scelta su A.

Dimostrazione. Scriviamo

$$f(x) = \sum_n y_n \chi_{A_n}(x) = \sum_k y_k \chi_{B_k}(x),$$

ove $\{A_n\}_n$ è la partizione canonica di A e $\{B_k\}_k$ è la partizione definita poc'anzi; allora risulta

$$A_n = A_n \cap A = A_n \cap (\dot{\bigcup_k} B_k) = \dot{\bigcup_k}(A_n \cap B_k),$$

e analogamente $B_k = \dot{\bigcup}_n (A_n \cap B_k)$, da cui si conclude che

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_n y_n \mu(A_n) = \sum_{n,k} y_n \mu(A_n \cap B_k) = \sum_k y_k \mu(B_k).$$

c.v.d.

Similmente a quanto fatto per la misura di Lebesgue, definita dapprima su rettangoli e insiemi elementari ed estesa successivamente ad una categoria più ampia di insiemi, così avviene per l'*integrale* di Lebesgue: dopo aver analizzato il caso delle funzioni semplici, considereremo le funzioni qualsiasi definite su insiemi di misura finita e successivamente su insiemi di misura arbitraria.

[1] Si noti che il simbolo di integrale $\int$ si è conservato, ma invece di essere seguito da dx, ci troviamo con un $d\mu$; la ragione di questa notazione è evidente dalla definizione (e i più audaci possono avanzare anche un parallelismo tra le due notazioni ...).

Definizione 5.1.3. Sia f una funzione qualsiasi definita su un insieme A di misura finita; f si dice *L-integrabile* su A se esiste una successione $\{f_n\}_n$ di funzioni semplici L-integrabili su A che converga uniformemente ad f. In tal caso si pone

$$\int_A f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu. \tag{5.2}$$

Affinchè tale definizione sia ben posta, dobbiamo verificare alcune condizioni.

i) Il limite 5.2 deve esistere finito per ogni scelta della successione $\{f_n\}_n$ che soddisfi la definizione; ma infatti dalla convergenza uniforme segue che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha definitivamente $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, da cui

$$\Big| \int_A f_n(x)d\mu - \int_A f_m(x)d\mu \Big| \leq \int_A |f_n(x) - f_m(x)|d\mu \leq$$
$$\leq \sup_x \mid f_n(x) - f_m(x)|\mu(A) < \varepsilon\mu(A);$$

la tesi segue dal fatto che $L^1(A)$, l'insieme delle funzioni integrabili, è completo (e qui facciamo un atto di fede).

ii) Il limite 5.2 non deve dipendere dalla particolare scelta della successione $\{f_n\}_n$; supponiamo per assurdo che esistano due successioni $\{f_n\}_n$, $\{\tilde{f}_n\}_n$ tali che

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu \neq \lim_{n\to\infty} \int_A \tilde{f}_n(x)d\mu;$$

allora la successione $\{g_n\}_n = \{f_n\}_n \cup \{\tilde{f}_n\}_n$ non ammette limite, il che è assurdo perché contraddice *i*).

iii) Se f è semplice, la definizione data coincide con quella precedente; infatti basta considerare $\{f_n\}_n = f$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Le prime due proprietà ci assicurano che il limite 5.2 non dipende in alcun modo dalla particolare scelta di $\{f_n\}_n$ e che quindi affinchè f sia L-integrabile su A è sufficiente trovarne una sola che soddisfi le richieste della definizione; la terza invece ci mostra come questa nuova definizione sia effettivamente un'estensione di quella vecchia. Dunque la definizione di L-integrabilità di funzioni qualsiasi su insiemi di misura finita è ben posta.
Consideriamo ora insiemi X di misura infinita e diamo la seguente

Definizione 5.1.4. Sia X un insieme di misura infinita; si dice *successione esaustiva* per X una successione $\{X_n\}_n$ di sottoinsiemi di X tale che:

i) $\mu(X_n) < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

ii) $X = \bigcup_n X_n$.

In tal caso diremo che una misura μ definita su X è *σ-finita*.

Per semplicità considereremo solo spazi X che ammettono una rappresentazione mediante successione esaustiva, come appena indicato nella definizione.

Definizione 5.1.5. Sia f una funzione qualsiasi definita su un insieme X di misura infinita; f si dice *L-integrabile* su X se lo è su ogni $A \subset X$ tale che $\mu(A) < +\infty$, e se per ogni successione esaustiva $\{X_n\}_n$ esiste finito il limite

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_{X_n} f(x)d\mu, \tag{5.3}$$

ed esso non dipende dalla particolare scelta di $\{X_n\}_n$. In tal caso si pone

$$\int_X f(x)d\mu = I.$$

Il motivo di questa differenza tra le due definizioni di *L-integrabilità* su un insieme sta nel fatto che, se $\mu(X) = +\infty$, in generale dalla convergenza uniforme di $\{f_n\}_n$ a f non deriva la convergenza uniforme della successione degli integrali $\int_X f_n(x)d\mu$ (si veda l'appendice per un controesempio).

5.2 Proprietà dell'integrale

Illustreremo in questa sezione le principali proprietà dell'integrale di Lebesgue, cominciando da quelle più ovvie; anche in questo caso partiremo per comodità con il mostrarle per funzioni semplici, estendendo poi la dimostrazione al caso di funzioni definite su insiemi di misura finita e infinita.

1. **Se f, g sono L-integrabili su A, allora lo è anche $f+g$, e vale:**

$$\int_A (f(x)+g(x))d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu.$$

a. Siano dapprima f e g semplici, $f(x) = \sum_i \alpha_i \chi_{A_i}(x)$, $g(x) = \sum_j \beta_j \chi_{B_j}(x)$, da cui segue subito:

$$f(x)+g(x) = \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j)\chi_{A_i \cap B_j}(x);$$

allora si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_A (f(x)+g(x))d\mu &= \sum_{i,j} (\alpha_i+\beta_j)\mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i,j} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i,j} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_i \alpha_i \mu(A_i) + \sum_j \beta_j \mu(B_j) \\
&= \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu.
\end{aligned}$$

In forza di queste uguaglianze, dalla convergenza assoluta delle serie $\sum_i(\alpha_i)\mu(A_i)$ e $\sum_j(\beta_j)\mu(B_j)$ si ricava la convergenza assoluta di $\sum_{i,j}(\alpha_i+\beta_j)\mu(A_i\cap B_j)$, e quindi $f+g$ è L-integrabile su A.

b. Siano ora f, g generiche e siano $\{f_n\}_n$, $\{g_n\}_n$ due successioni di funzioni semplici L-integrabili su A che convergono uniformemente rispettivamente a f e g. Allora la successione $\{f_n+g_n\}_n$ converge uniformemente a $f+g$ su A, e pertanto

$$\begin{aligned}\int_A (f(x)+g(x))d\mu &= \lim_{n\to\infty}\int_A (f_n(x)+g_n(x))d\mu\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu + \lim_{n\to\infty}\int_A g_n(x)d\mu\\ &= \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu < +\infty.\end{aligned}$$

c. Se infine siamo su un insieme X tale che $\mu(X)=+\infty$, sfruttando la definizione e i risultati precedenti si ha

$$\begin{aligned}\int_X (f(x)+g(x))d\mu &= \lim_{k\to\infty}\int_{X_k}(f(x)+g(x))d\mu\\ &= \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{X_k}(f_n(x)+g_n(x))d\mu\\ &= \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\Big(\int_{X_k} f_n(x)d\mu + \int_{X_k} g_n(x)d\mu\Big)\\ &= \lim_{k\to\infty}\Big(\int_{X_k} f(x)d\mu + \int_{X_k} g(x)d\mu\Big)\\ &= \int_X f(x)d\mu + \int_X g(x)d\mu < +\infty.\end{aligned}$$

2. **Se f è L-integrabile su A e $k\in\mathbb{R}$, allora lo è anche kf e vale:**

$$\int_A kf(x)d\mu = k\int_A f(x)d\mu.$$

La dimostrazione di questo asserto è del tutto analoga alla precedente e viene pertanto lasciata come esercizio per il lettore.

3. **Se f è misurabile e limitata su A, ovvero $|f(x)|\le M$, allora f è L-integrabile su A.**

a. Sia dapprima f semplice, $f(x)=\sum_i \alpha_i\chi_{A_i}(x)$; dalla limitatezza di f si deduce che $|\alpha_i|\le M$, $\forall i$, e quindi

$$\sum_i |\alpha_i|\mu(A_i) \le M\sum_i \mu(A_i) = M\mu(A) < +\infty.$$

b. Sia ora f generica; per il teorema 5.1.2 possiamo trovare una successione $\{f_n\}_n$ di funzioni semplici misurabili che converge uniformemente a f. Da questo segue che definitivamente $|f_n(x)| \leq M$, il che implica l'integrabilità delle f_n, da cui segue per definizione l'integrabilità di f.

c. Se invece siamo su un insieme X, con $\mu(X) = +\infty$, questa proprietà perde di validità. Infatti se ad esempio $f(x) = c$ è una funzione costante, risulta

$$\int_X f(x)d\mu = c\mu(X) = +\infty.$$

4. **Se f è non negativa integrabile su un insieme A, allora**

$$\int_A f(x)d\mu \geq 0.$$

a. Se f è semplice è del tipo $f(x) = \sum_i \alpha_i \chi_{A_i}(x)$, con $\alpha_i > 0$. Dunque

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_i \alpha_i \mu(A_i) \geq 0.$$

b. Se f è qualsiasi, esiste una successione $\{f_n\}_n$ di funzioni semplici e integrabili su A che converge uniformemente a f; poiché $f \geq 0$ si avrà definitivamente $f_n \geq 0$. Ma le f_n sono semplici e quindi per quanto appena visto vale $\int_A f_n(x)d\mu \geq 0$, da cui si conclude

$$\int_A f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu \geq 0.$$

c. Se infine X è un insieme di misura infinita basta scrivere

$$\int_X f(x)d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{X_k} f(x)d\mu \geq 0.$$

Osservazione 5.2.1. Da quanto appena mostrato segue che, se f e g sono due funzioni integrabili su un insieme A tali che $f(x) \leq g(x)$, allora

$$\int_A f(x)d\mu \leq \int_A g(x)d\mu.$$

Infatti basta notare che $g(x) - f(x) \geq 0$ e applicare la proprietà 4.

5. **Sia f integrabile su un insieme A tale che $\mu(A) = 0$; allora**

$$\int_A f(x)d\mu = 0.$$

a. Se f è semplice, $f(x) = \sum_i \alpha_i \chi_{A_i}(x)$, si ha $\int_A f(x)d\mu = \sum_i \alpha_i \mu(A_i)$. Siccome $\mu(A) = \sum_i \mu(A_i) = 0$, si deve avere $\mu(A_i) = 0$ per ogni i e dunque $\int_A f(x)d\mu = 0$.

b. Se f è qualsiasi, esiste una successione $\{f_n\}_n$ di funzioni semplici e integrabili su A che converge uniformemente ad f. Siccome per ogni n $\int_A f_n(x)d\mu = 0$ per quanto appena mostrato, si conclude che

$$\int_A f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu = 0.$$

c. MANCA IL PEZZO DI MISURA INFINITA

Osservazione 5.2.2. Da quanto appena mostrato segue che, se f e g sono due funzioni integrabili su A tali che $f(x) = g(x)$ quasi ovunque, allora

$$\int_A f(x)d\mu = \int_A g(x)d\mu.$$

Abbiamo $f(x) - g(x) = 0$ quasi ovunque; sia A' l'insieme su cui $f(x) = g(x)$. Si deduce subito che $\mu(A \setminus A') = 0$, da cui

$$\int_A (f(x) - g(x))d\mu = \int_{A'} (f(x) - g(x))d\mu + \int_{A\setminus A'} (f(x) - g(x))d\mu;$$

il primo integrale è nullo in quanto $f(x) - g(x) = 0$, il secondo è pure nullo grazie alla proprietà 5 appena illustrata.

Osservazione 5.2.3. In generale se una certa proprietà vale quasi ovunque, passando all'integrale essa vale ovunque. La dimostrazione di ciò si ottiene come nella precedente osservazione, grazie alla proprietà 5.

6. **Se f è integrabile su A, allora**

$$\left| \int_A f(x)d\mu \right| \leq \int_A |f(x)|d\mu.$$

a. Se f è semplice, $f(x) = \sum_i \alpha_i \chi A_i(x)$, si ha subito

$$\left| \int_A f(x)d\mu \right| = \left| \sum_i \alpha_i \mu(A_i) \right| \leq \sum_i |\alpha_i| \mu(A_i) = \int_A |f(x)|d\mu,$$

dato che $|f(x)| = \sum_i |\alpha_i| \chi_{A_i}(x)$.

b. Se f è qualsiasi e $\mu(A) < +\infty$, esiste una successione $\{f_n\}_n$ di funzioni semplici e integrabili su A che converge uniformemente a f; allora

$$\left| \int_A f(x)d\mu \right| = \left| \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu \right| \leq \lim_{n\to\infty} \int_A |f_n(x)|d\mu = \int_A |f(x)|d\mu.$$

c. Infine se siamo su un insieme X di misura infinita si ha
$$\left|\int_X f(x)d\mu\right| = \left|\lim_{k\to\infty}\int_{X_k} f(x)d\mu\right| \leq \lim_{k\to\infty}\int_{X_k}|f(x)|d\mu = \int_x |f(x)|d\mu.$$

7. **Siano f e ϕ definite su un insieme A tali che ϕ sia ivi integrabile e $|f(x)| \leq \phi(x)$ per quasi ogni $x \in A$. Allora f è integrabile su A.**

   a. Se f e ϕ sono semplici possiamo scriverle come $f(x) = \sum_i \alpha_i \chi_{A_i}(x)$, $\phi(x) = \sum_i \beta_i \chi_{A_i}(x)$, con $|\alpha_i| \leq \beta_i$ per ogni i, ove $\{A_i\}_i$ è una generica partizione di A. Allora
   $$\left|\int_A f(x)d\mu\right| \leq \int_A |f(x)|d\mu = \sum_i |\alpha_i|\mu(A_i) \leq \sum_i |\beta_i|\mu(A_i) < +\infty,$$
   ovvero f è integrabile su A.

   b. Se f e ϕ sono qualsiasi e $\mu(A) < +\infty$, esiste una successione $\{f_n\}_n$ di funzioni semplici e misurabili che converge uniformemente ad f, ed esiste una successione $\{\phi_n\}_n$ di funzioni semplici e integrabili su A che converge uniformemente a ϕ. poiché $|f(x)| \leq \phi(x)$ quasi ovunque, si deve avere definitivamente $|f_n(x)| \leq \phi_n(x)$ quasi ovunque, da cui deduciamo dal caso precedente che le f_n sono integrabili su A, e quindi per definizione lo è anche f.

   c. Nel caso generale di un insieme X di misura infinita vale
   $$\left|\int_X f(x)d\mu\right| \leq \int_x |f(x)|d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_{X_k}|f(x)|d\mu \leq$$
   $$\leq \lim_{k\to\infty}\int_{X_k}\phi(x)d\mu = \int_X \phi(x)d\mu < +\infty,$$
   e quindi f è integrabile su X.

8. **f misurabile su A è integrabile su A se e solo se lo è $|f|$.**
   ($\Leftarrow$) segue subito dalla proprietà 6, a prescindere dal tipo di funzione in questione e dalla misura dell'insieme su cui integriamo.
   ($\Rightarrow$) Viceversa, sia al solito f semplice, $f(x) = \sum_i \alpha_i \chi_{A_i}$; poiché f è integrabile per ipotesi, abbiamo
   $$\int_x |f(x)|d\mu = \sum_i |\alpha_i|\mu(A_i) < +\infty,$$
   cioé $|f|$ è integrabile su A.
   Se f è qualsiasi e $\mu(A) < +\infty$, esiste una successione $\{f_n\}_n$ di funzioni semplici e integrabili su A che converge uniformemente ad f. Ma allora $|f_n|$ converge uniformemente ad $|f|$, la quale è quindi integrabile su A.
   Se infine siamo su un insieme X di misura infinita *MANCA DEL TESTO*

Esistono poi una serie di proprietà non banali dell'integrale che ci accingiamo ad enunciare e dimostrare; in particolare l'integrale di Lebesgue è σ-additivo e assolutamente continuo rispetto alla misura di Lebesgue. Porremo poi l'accento su alcuni teoremi di vitale importanza di passaggio al limite sotto il segno di integrale, molto utili in innumerevoli situazioni pratiche. Ordunque mettiamoci al lavoro.

Teorema 5.2.1. (di σ-additività dell'integrale) Sia f una funzione integrabile su un insieme A e sia $\{A_n\}_n$ una partizione di tale insieme. Allora f è integrabile su ciascun A_n e vale

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu,$$

ove la serie a secondo membro è assolutamente convergente.

Dimostrazione. Sia dapprima f semplice, cioé $f(x) = \sum_k \beta_k \chi_{B_k}(x)$, ove $\{B_k\}_k$ è la partizione canonica di A, e definiamo

$$B_{n,k} = \{x \in A_n | f(x) = \beta_k\} = A_n \cap B_k.$$

Allora valgono le uguaglianze $A_n = \dot{\bigcup}_k B_{n,k}$, $B_k = \dot{\bigcup}_n B_{n,k}$, e quindi

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_k \beta_k \mu(B_k) = \sum_k \beta_k \sum_n \mu(B_{n,k}) = \sum_{n,k} \beta_k \mu(B_{n,k}) = \sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu.$$

Quindi segue subito che f è integrabile su ogni A_n, e la serie $\sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu$ converge assolutamente.

Se f è qualsiasi, il fatto che f è integrabile su A implica che essa è approssimabile con funzioni semplici ed integrabili su A; esisterà quindi $\tilde{f}$ semplice e integrabile su A tale che

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| < \varepsilon.$$

Siccome $\tilde{f}$ è semplice, per quanto dimostrato poc'anzi essa dev'essere integrabile su ogni A_n e deve valere

$$\int_A \tilde{f}(x)d\mu = \sum_n \int_{A_n} \tilde{f}(x)d\mu.$$

Inoltre dal fatto che $\Big||f(x)| - |\tilde{f}(x)|\Big| \le |f(x) - \tilde{f}(x)| < \varepsilon$ (la cui facile verifica è lasciata per esercizio) segue che $|f(x)| < |\tilde{f}(x)| + \varepsilon$, e siccome $|\tilde{f}(x)| + \varepsilon$ è integrabile su A_n lo è anche $|f|$, e quindi anche f. Inoltre

$$\Big|\sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu\Big| \le \sum_n \int_{A_n} |f(x)|d\mu \le \sum_n \int_{A_n} |\tilde{f}(x)|d\mu + \varepsilon\mu(A) < +\infty,$$

ed ecco che $\sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu$ converge assolutamente. Infine consideriamo le seguenti formule:

$$\Big|\sum_n \int_{A_n} (f(x) - \tilde{f}(x))d\mu\Big| \leq \sum_n \int_{A_n} |f(x) - \tilde{f}(x)|d\mu < \varepsilon \sum_n \mu(A_n) = \varepsilon\mu(A),$$

$$\Big|\int_A (f(x) - \tilde{f}(x))d\mu\Big| \leq \int_A |f(x) - \tilde{f}(x)|d\mu < \varepsilon\mu(A);$$

combinandole opportunamente si ottiene

$$\begin{aligned}\Big|\int_A f(x)d\mu - \sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu\Big| &= \\ &= \Big|\int_A f(x)d\mu - \int_A \tilde{f}(x)d\mu + \sum_n \int_{A_n} \tilde{f}(x)d\mu - \sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu\Big| \leq \\ &\leq \Big|\int_A (f(x) - \tilde{f}(x))d\mu\Big| + \Big|\sum_n \int_{A_n} (f(x) - \tilde{f}(x))d\mu\Big| < 2\varepsilon\mu(A),\end{aligned}$$

da cui la tesi nel caso in cui $\mu(A) < +\infty$. Se invece consideriamo un insieme X tale che $\mu(X) = +\infty$, si ha

$$\begin{aligned}\int_X f(x)d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{X_k} f(x)d\mu = \lim_{k\to\infty} \sum_n \int_{X_{n,k}} f(x)d\mu &= \\ = \sum_n \lim_{k\to\infty} \int_{X_{n,k}} f(x)d\mu &= \sum_n \int_{X_n} f(x)d\mu,\end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione.

c.v.d.

Corollario 5.2.1. Se f è una funzione integrabile su un insieme A, lo è anche su ogni sottoinsieme $A' \subseteq A$ misurabile.

Dimostrazione. Basta notare che $A = A' \cup (A \setminus A')$ e poi applicare il teorema precedente.

c.v.d.

Notiamo che vale una specie di viceversa a questo teorema, ove però tra le ipotesi è contemplata la convergenza della serie $\sum_n \int_{A_n} |f(x)|d\mu$ anzichè la convergenza assoluta di $\sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu$.

Teorema 5.2.2. Sia f una funzione definita su A misurabile e sia $\{A_n\}_n$ una partizione di tale insieme. Sia f integrabile su ciascun A_n e sia $\sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu$ convergente. Allora f è integrabile su tutto A e vale la formula precedente:

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu.$$

Dimostrazione. Sia $f(x) = \sum_k \beta_k \chi_{B_k}(x)$ semplice; poniamo $B_{n,k} = B_k \cap A_n$ come prima, così che anche stavolta si abbia $A_n = \dot{\bigcup}_k B_{n,k}$, $B_k = \dot{\bigcup}_n B_{n,k}$, da cui

$$\sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu = \sum_{n,k} \beta_k \mu(B_{n,k}) = \sum_k \beta_k \sum_n \mu(B_{n,k}) \quad = \sum_k \beta_k \mu(B_k) = \int_A f(x)d\mu$$

e quindi f è integrabile su A.
Se ora f è generica, esiste $\tilde{f}$ semplice e integrabile su ogni A_n tale che valga $|f(x) - \tilde{f}(x)| < \varepsilon$. Allora vale

$$\sum_n \int_{A_n} |\tilde{f}(x)|d\mu \leq \sum_n \int_A |f(x)|d\mu + \varepsilon\mu(A) < +\infty,$$

e quindi dal caso precedente si deduce che $\tilde{f}$ è integrabile su A. Segue quindi che anche f è integrabile su A, grazie alla relazione $|f(x)| \leq |\tilde{f}(x)| + \varepsilon$. La dimostrazione della formula

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu$$

è identica a quella effettuata nel teorema precedente, sia nel caso di un insieme di misura finita, sia nel caso di un insieme di misura infinita, e non la ripetiamo qui.

c.v.d.

A questo punto vale la pena illustrare una condizione di *non* integrabilità che, sebbene possa sembrare un'idea un po' esotica a prima vista, si rivelerà estremamente preziosa nello svolgimento di alcuni esercizi.

Teorema 5.2.3. Sia f una funzione misurabile su un insieme A e supponiamo che esista una successione $\{f_n\}_n$ di funzioni misurabili e non integrabili su A che converge uniformemente ad f. Allora anche f non è integrabile su A.

Dimostrazione. Cominciamo dal caso in cui le f_n siano semplici, cioé sia $f_n(x) = \sum_i \alpha_{i,n} \chi_{A_{i,n}}(x)$; allora avremo definitivamente $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ in virtù della convergenza uniforme di f_n a f. Inoltre $|f_n(x)| \leq |f(x)| + \varepsilon$, e quindi

$$+\infty = \int_A |f_n(x)|d\mu \leq \int_A |f(x)|d\mu + \varepsilon\mu(A),$$

il che ci dice che $\int_A |f(x)|d\mu = +\infty$, ovvero f non è integrabile su A.
Se le f_n sono generiche, per ogni n esiste una successione $\{f_{n,k}\}_k$ di funzioni semplici, misurabili e non integrabili che converge uniformemente a f_n, da cui

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n,k} f_{n,k}(x),$$

e quindi la tesi segue dal punto precedente.
Infine consideriamo il solito insieme X di misura infinita; notiamo che la restrizione $f_n|_{X_k}$ delle f_n a ciascun insieme X_k della successione esaustiva converge uniformemente alla restrizione $f|_{X_k}$, ovvero per quanto appena visto vale $\int_{X_k} |f(x)| d\mu = +\infty$, così possiamo concludere che

$$\int_X f(x) d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{X_k} f(x) d\mu = +\infty.$$

c.v.d.

Dopo questo breve ma fruttuoso excursus torniamo a concentrare le nostre energie sulle proprietà dell'integrale e prima di mostrarne l'assoluta continuità rispetto a μ illustriamo un risultato propedeutico dovuto al matematico russo Pafnutij L'vovič Čhëbyšhev.

Teorema 5.2.4. (Disuguaglianza di Čhëbyšhev) Sia f una funzione non negativa integrabile su A. Allora per ogni $c \in \mathbb{R}$ positiva vale la disuguaglianza

$$\mu\{x \mid f(x) \geq c\} \leq \frac{1}{c} \int_A f(x) d\mu.$$

Dimostrazione. Poniamo $A' = \{x \mid f(x) \geq c\}$; allora per la σ-additività dell'integrale abbiamo

$$\int_A f(x) d\mu = \int_{A'} f(x) d\mu + \int_{A \setminus A'} f(x) d\mu \geq \int_{A'} f(x) d\mu \geq c\mu(A'),$$

da cui $\mu(A') \leq \frac{1}{c} \int_A f(x) d\mu$.

c.v.d.

Corollario 5.2.2. Sia f integrabile su A tale che $\int_A |f(x)| d\mu = 0$; allora $f(x) = 0$ quasi ovunque.

Dimostrazione. Dobbiamo provare che $\mu\{x \mid f(x) \neq 0\} = 0$; notiamo che vale l'uguaglianza

$$\{x \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_n \left\{x \mid f(x) > \frac{1}{n}\right\},$$

che per la sua facilità nell'essere verificata è lasciata per esercizio al volenteroso lettore. Dunque grazie alla disuguaglianza di Čhëbyšhev risulta

$$\mu\{x \mid f(x) \neq 0\} \leq \sum_n \mu\left\{x \mid |f(x)| \geq \frac{1}{n}\right\} \leq n \int_A |f(x)| d\mu,$$

da cui la tesi.

c.v.d.

Teorema 5.2.5. (di assoluta continuità dell'integrale) Sia f integrabile su un insieme misurabile A. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni insieme $A_\delta \subset A$ tale che $\mu(A_\delta) < \delta$ si ha

$$\left| \int_{A_\delta} f(x) d\mu \right| < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$A_n = \{x \mid n \leq |f(x)| < n+1\};$$

evidentemente risulta $A_i \cap A_j = \varnothing$ ogni volta che $i \neq j$, e $A = \dot\bigcup_n A_n$. Definiamo inoltre degli insiemi opportuni:

$$B_N = \dot\bigcup_{n=0}^{N} A_n, \quad C_N = A \setminus B_N.$$

Grazie alla σ-additività dell'integrale si ha

$$\int_A |f(x)| d\mu = \sum_n \int_{A_n} |f(x)| d\mu < +\infty,$$

e quindi possiamo trovare un N sufficientemente grande per cui

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)| d\mu = \int_{C_N} |f(x)| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Scegliamo ora δ tale che $0 < \delta < \varepsilon/(2(N+1))$, prendiamo $A_\delta \subset A$ tale che $\mu(A_\delta) < \delta$ e notiamo che

$$A_\delta = A_\delta \cap A = A_\delta \cap (B_N \,\dot\cup\, C_N) = (A_\delta \cap B_N) \,\dot\cup\, (A_\delta \cap C_N),$$

in modo tale che

$$\begin{aligned} \left| \int_{A_\delta} f(x) d\mu \right| \leq \int_{A_\delta} |f(x)| d\mu = \int_{A_\delta \cap B_N} |f(x)| d\mu + \int_{A_\delta \cap C_N} |f(x)| d\mu \leq \\ \leq (N+1)\mu(A_\delta) + \int_{C_N} |f(x)| d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

dove per maggiorare il primo dei due integrali abbiamo usato la diseguaglianza di Čhëbyšhev.

c.v.d.

Osservazione 5.2.4. Si noti che nella dimostrazione di quest'ultimo risultato non abbiamo utilizzato il fatto che la misura di A fosse finita, e quindi esso vale automaticamente su insiemi di misura qualsiasi.

Sia $f(x)$ una funzione non negativa integrabile su un insieme X. Per ogni $A \subseteq X$ definiamo la funzione $F : \mathfrak{M}_X \mapsto \mathbb{R}$ come

$$F(A) = \int_A f(x) d\mu,$$

ove μ è la misura di Lebesgue su $\mathfrak{M}_X$, cioé sostanzialmente vediamo l'integrale di Lebesgue come una funzione reale di insiemi L-misurabili. Le proprietà ed i teoremi provati in questo capitolo mostrano che F è ben definita e non negativa; inoltre è σ-additiva, cioé vale

$$F(\dot{\bigcup_n} A_n) = \sum_n \int_{A_n} f(x) d\mu = \sum_n F(A_n).$$

In altre parole F gode di tutte le proprietà delle quali una funzione necessita per essere ritenuta un'onesta misura σ-additiva definita su $(X, \mathfrak{M}_X, \mu)$, e quindi l'integrale di Lebesgue può essere visto come una misura a tutti gli effetti, che conserva tra l'altro la proprietà di essere assolutamente continua rispetto a μ, ovvero

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \forall A \subseteq X, \quad \mu(A) < \delta \to |f(A)| < \varepsilon.$$

5.3 Teoremi di passaggio al limite sotto segno di integrale

Teorema 5.3.1. (di Lebesgue o di convergenza dominata) Consideriamo una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni misurabili su un insieme A che converga quasi ovunque ad una funzione f e tale che $|f_n(x)| \leq \phi(x)$ per ogni n, ove ϕ è una funzione integrabile su A. Allora anche f è integrabile su A e vale

$$\lim_{n \to +\infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu.$$

Dimostrazione. Ovviamente dev'essere $|f(x)| \leq \phi(x)$, da cui otteniamo subito l'integrabilità della f grazie alla proprietà 7. Ora serviamoci dell'assoluta continuità dell'integrale e del teorema di Egorov: in virtù della prima, preso $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\int_B \phi(x) d\mu < \frac{\varepsilon}{4} \tag{5.4}$$

per ogni $B \subset A$ tale che $\mu(B) < \delta$; grazie al secondo possiamo scegliere B in modo tale che $\{f_n\}_n$ converga uniformemente su $A \setminus B$. Questo equivale a poter trovare un N sufficientemente grande tale che, per ogni $n \geq N$, valga

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(A \setminus B)}. \tag{5.5}$$

Ma allora combinando insieme 5.4 e 5.5 otteniamo

$$
\begin{aligned}
\Big|\lim_{n\to+\infty}\int_A f_n(x)d\mu - \int_A f(x)d\mu\Big| \leq \int_A |f_n(x) - f(x)|d\mu = \\
= \int_{A\setminus B} |f_n(x) - f(x)|d\mu + \int_B |f_n(x) - f(x)|d\mu < \\
< \frac{\varepsilon}{2\mu(A\setminus B)}\mu(A\setminus B) + 2\int_B \phi(x)d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

che è la tesi.

c.v.d.

Corollario 5.3.1. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni limitate e integrabili su X insieme di misura finita, convergente ad una funzione $f(x)$ quasi ovunque. Allora f è integrabile su X e vale la formula

$$\int_X f(x)d\mu = \lim_{n\to+\infty}\int_X f_n d\mu.$$

Dimostrazione. Siccome le f_n sono limitate, esiste $M > 0$ tale che $|f_n(x)| \leq M$. Allora basta porre $\phi(x) = M$ ed applicare il teorema di Lebesgue per giungere alla tesi.

c.v.d.

Teorema 5.3.2. (di Beppo Levi o di convergenza monotona) Consideriamo una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni integrabili su un insieme A tali che

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq f_n(x) \leq \ldots, \tag{5.6}$$

$$\int_A f_n(x)d\mu \leq K \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Allora quasi ovunque esiste la quantità $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$; inoltre tale f è integrabile su A e vale la relazione

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu = \int_A f(x)d\mu.$$

Dimostrazione. Anzitutto notiamo che, senza perdere in generalità, possiamo assumere che $f_1(x) \geq 0$; infatti se così non fosse basterebbe considerare $\tilde{f}_n = f_n - f_1$ e si otterrebbe lo stesso risultato. Definiamo poi

$$\Omega = \{x\in A | \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\};$$

l'idea è di mostrare che questo insieme ha misura zero e che quindi il limite della nostra successione esiste quasi ovunque, come richiesto nel teorema. A tal proposito notiamo che possiamo riscrivere $\Omega = \bigcap_r \bigcup_n \Omega_n^{(r)}$, ove

$$\Omega_n^{(r)} = \{x\in A | f_n(x) > r\},$$

e quindi, per la condizione 5.6, si ha per ogni r che

$$\Omega_1^{(r)} \subseteq \Omega_2^{(r)} \subseteq \ldots \subseteq \Omega_n^{(r)} \subseteq \ldots \tag{5.7}$$

Grazie alla diseguaglianza di Čhëbyšhev sappiamo che $\mu(\Omega_n^{(r)}) \leq K/r$, da cui, grazie a 5.7, segue che $\mu(\bigcup_n \Omega_n^{(r)}) \leq K/r$; ma poiché ovviamente si ha che $\Omega \subseteq \bigcup_n \Omega_n^{(r)}$ deve anche essere $\mu(\Omega) \leq K/r$, il che deve valere per ogni r e quindi $\mu(\Omega) = 0$, proprio quello che volevamo mostrare.
Ora dedichiamoci alla seconda parte del teorema; invece che mostrare direttamente l'enunciato ci limiteremo a trovare una funzione ϕ integrabile su A che maggiori f la tesi seguirà subito dal teorema di Lebesgue. Sia dunque

$$A_r = \{x \in A | r - 1 \leq f(x) < r\}$$

e definiamo

$$\phi(x) = \sum_{r=1}^{\infty} r\chi_{A_r}(x).$$

Poniamo inoltre $B_s = \bigcup_{r=1}^{s} A_r$ e notiamo immediatamente che $\phi(x) \leq f(x) + 1$; siccome f ed f_n sono limitate su B_s, possiamo applicare il teorema di Lebesgue e concludere che

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{s} r\mu(A_r) = \int_{B_s} \phi(x)d\mu \leq \int_{B_s} f(x)d\mu + \mu(B_s) \leq \\ \leq \int_{B_s} f(x)d\mu + \mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \int_{B_s} f_n(x)d\mu + \mu(A) \leq K + \mu(A),\end{aligned}$$

ovvero le somme $\sum_{r=1}^{s} r\mu(A_r)$ sono limitate per ogni s. Ma allora la serie

$$\sum_{r=1}^{\infty} r\mu(A_r) = \int_A \phi(x)d\mu$$

converge, ovvero ϕ è integrabile su A. Per quanto osservato in precedenza, la tesi si ottiene applicando il teorema di Lebesgue.

c.v.d.

Osservazione 5.3.1. Al posto della condizione 5.6 si può equivalentemente considerare il caso in cui

$$f_1(x) \geq f_2(x) \geq \ldots \geq f_n(x) \geq \ldots,$$

Infatti in questo caso è sufficiente porre $\tilde{f}_n = -f_n$ ed applicare a questa nuova successione, che soddisfa 5.6, il teorema appena dimostrato.

Corollario 5.3.2. Siano $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funzioni non negative definite in X tali che la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n(x)d\mu$$
sia convergente. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ conerge quasi ovunque e vale la relazione
$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n(x)d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)d\mu.$$

Dimostrazione. Poniamo $S_k := \sum_{n=1}^{k} f_k(x)$: dall'ipotesi si deduce immediatamente che
$$S_1(x) \leq S_2(x) \leq S_3(x) \leq \ldots \leq S_k(x) \leq \ldots,$$
$$\int_X S_k(x)d\mu \leq K$$
per un qualche $K \in \mathbb{R}^+$. Quindi il teorema di Beppo Levi implica che $S_k(x)$ ammette limite quasi ovunque e

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n(x)d\mu = \lim_{k\to+\infty}\int_X \sum_{n=1}^{k} f_n(x)d\mu =$$
$$= \int_X \lim_{k\to+\infty}\sum_{n=1}^{k} f_n(x)d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)d\mu.$$

Abbiamo così ottenuto la tesi.

c.v.d.

Teorema 5.3.3. (di Fatou) Consideriamo una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni misurabili non negative su un insieme A che converga quasi ovunque ad una funzione f; supponiamo inoltre che le f_n soddisfino la condizione

$$\int_A f_n(x)d\mu \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora f è integrabile su A e

$$\int_A f(x)d\mu \leq K.$$

Dimostrazione. Per dimostrare questo teorema vogliamo metterci nella condizione di poter applicare il teorema di Beppo Levi. Definiamo quindi una successione opportuna $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ come segue:

$$\phi_n(x) := \inf_{k\geq n} f_k(x);$$

anzitutto le ϕ_n sono misurabili, in quanto possiamo scrivere

$$\{x \in A | \phi_n(x) < c\} = \bigcup_{k \geq n} \{x \in A | f_k(x) < c\},$$

(verificalo per esercizio!). Inoltre, per costruzione, valgono le seguenti proprietà:

$$\phi_1(x) \leq \phi_2(x) \leq \ldots \leq \phi_n(x) \leq \ldots,$$

$$\lim_{n \to \infty} \phi_n(x) = f(x).$$

Infine $0 \leq \phi_n(x) \leq f_n(x)$, da cui segue che le ϕ_n sono integrabili e

$$\int_A \phi_n(x) d\mu \leq \int_A f_n(x) d\mu \leq K.$$

Ora possiamo applicare il teorema di Beppo Levi alle ϕ_n e ottenere la tesi.

c.v.d.

Corollario 5.3.3. Siano $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ integrabili su X e non negative. Allora

$$\int_X \liminf_n f_n(x) d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n(x) d\mu.$$

Dimostrazione. Poniamo nuovamente $\phi_n := \inf_{k \geq n} f_k(x)$; siccome per ogni $k \geq n$ si ha che $\phi_n \leq f_k$, allora vale in particolare che

$$\int_X \phi_n(x) d\mu \leq \inf_{k \geq n} \int_X f_k(x) d\mu.$$

Notiamo che la seguente relazione:

$$\lim_{n \to +\infty} \phi_n(x) = \sup_n \inf_{k \leq n} \phi_n(x) = \liminf_n f_n(x);$$

Inoltre $\phi_1 \leq \phi_2 \leq \phi_3 \leq \ldots$ e quindi dal teorema di Beppo Levi segue che

$$\begin{aligned}
\int_X \liminf_n f_n(x) d\mu &= \int_X \lim_{n \to +\infty} \phi_n(x) d\mu \\
&= \lim_{n \to +\infty} \int_X \phi_n(x) d\mu \leq \lim_{n \to +\infty} \inf_{k \geq n} \int_X f_k(x) d\mu \\
&= \sup_n \inf_{k \geq n} \int_X f_k(x) d\mu = \liminf_n \int_X f_n(x) d\mu.
\end{aligned}$$

c.v.d.

Osservazione 5.3.2. Si noti che i teoremi di Beppo Levi, Lebesgue e Fatou si possono agevolmente generalizzare agli insiemi di misura infinita. A titolo d'esempio verifichiamo quello di Beppo Levi, gli altri due vengono lasciati come esercizio all'esimio lettore. Si tratta di fatto di provare che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n(x)d\mu = \int_X f(x)d\mu,$$

ove $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ quasi ovunque. Presa la solita successione esaustiva $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di X, segue che

$$\begin{aligned}\int_X f(x)d\mu &= \lim_{k\to+\infty}\int_{X_k} f(x)d\mu = \lim_{k\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\int_{X_k} f_n(x)d\mu\\ &= \lim_{n\to+\infty}\lim_{k\to+\infty}\int_{X_k} f_n(x)d\mu = \lim_{n\to+\infty}\int_X f_n(x)d\mu,\end{aligned}$$

e la formula di passaggio al limite è verificata.

5.3.1 Funzioni integrali parametriche

In questa sezione discuteremo riguardo ad un utile applicazione del teorema di Lebesgue. Vediamo: siano A un insieme misurabile e $f(x,y) : A \times (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile per ogni $x \in A$ e per quasi ogni $y \in (a,b)$. Per funzione integrale parametrica intendiamo una funzione del tipo:

$$\xi(y) = \int_A f(x,y)d\mu_x \tag{$*$}$$

ove μ_x è la misura definita su A. Vediamo allora di caratterizzare la continuità e la derivabilità di funzioni del tipo $(*)$ sfruttando proprio il benemerito teorema di convergenza dominata:

Proposizione 5.3.1.1. Consideriamo una funzione $\xi(y)$ del tipo $(*)$ e supponiamo che valgano le seguenti condizioni:

i) Esista $\varphi : A \to \mathbb{R}$ integrabile su A tale che $|f(x,y)| \leq \varphi(x)$ per quasi ogni $x \in A$ e per ogni $y \in (a,b)$ fissato;

ii) $f(x,y)$ sia continua in (a,b) per quasi ogni $x \in A$ fissato.

Allora $\xi(y)$ è continua in (a,b).

Dimostrazione. Proviamo che presa una qualunque successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in (a,b) convergente ad un certo y_0, allora $\lim_{n\to+\infty}\xi(y_n) = \xi(y_0)$. A tal scopo, definiamo la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ ponendo $f_n(x) := f(x,y_n)$. Siccome f è misurabile per ogni $x \in A$,e per quasi ogni $y \in (a,b)$, segue che anche le f_n soddisfano questa proprietà; inoltre dall'ipotesi *i)* segue che le f_n sono anche integrabili su A. Infine da *ii*) si arguisce che $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x, y_0)$ per quasi ogni $x \in A$. Grazie ancora alla provvidenziale ipotesi *i*), possiamo applicare l'annunciato teorema di convergenza dominata e concludere che:

$$\lim_{n\to+\infty} g(y_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_A f(x, y_n) d\mu_x =$$
$$= \int_A \lim_{n\to+\infty} f(x, y_n) d\mu_x = \int_A f(x, y_0) d\mu_x = g(y_0).$$

E la tesi è raggiunta.

c.v.d.

Proposizione 5.3.1.2. Sia $\xi(y)$ una funzione del tipo $(*)$. Supponiamo che si verifichino i seguenti fatti:

i) $f(x, y)$ sia derivabile per ogni $y \in (a, b)$ e per quasi ogni $x \in A$,

ii) esista $\varphi(x)$ integrabile su A tale che $|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)| \le \varphi(x)$ per quasi ogni $x \in A$ e per ogni $y \in (a, b)$ fissato. Allora $\xi(y)$ è derivabile su (a, b) e vale la formula:
$$\xi'(y) = \int_A \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) d\mu_x.$$

Dimostrazione. Fissato un certo $y_0 \in (a, b)$, definiamo la funzione

$$F(x, h) := \begin{cases} \frac{f(x, y_0+h) - f(x, y_0)}{h} & \text{se } h \ne 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) & \text{se } h = 0 \end{cases}$$

Per dimostrare che ξ è derivabile si tratta di provare che esiste finito

$$\lim_{h\to 0} \frac{\xi(y_0 + h) - \xi(y_0)}{h} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\xi(y_0 + h_n) - \xi(y_0)}{h_n},$$

ove $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione tale che $h_n \to 0$. Facciamo ora un po' di conti:

$$\frac{\xi(y_0 + h_n) - \xi(y_0)}{h_n} = \int_A \frac{f(x, y_0 + h_n) - f(x, y_0)}{h_n} d\mu_x = \int_A F(x, h_n) d\mu_x.$$

Notando ora che la funzione F è continua rispetto alla variabile h e sfruttando l'ipotesi *ii*), possiamo applicare il teorema di Lebesgue e concludere che

$$\xi'(y_0) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\xi(y_0 + h_n) - \xi(y_0)}{h_n} = \lim_{n\to+\infty} \int_A F(x, h_n) d\mu_x =$$
$$= \int_A \lim_{n\to+\infty} F(x, h_n) d\mu_x = \int_A \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) d\mu_x < +\infty.$$

Abbiamo pertanto mostrato che ξ è derivabile e che vale la formula della tesi.

c.v.d.

5.4 Henry Lebesgue vs Bernard Riemann

Abbiamo visto una serie di comode proprietà di cui gode l'integrale di Lebesgue, da quelle più banali a quelle meno intuitive, fino a dimostrare degli importanti teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Abbiamo addirittura visto che esso si comporta esattamente come una misura σ-additiva. Cosa si può volere di più da un integrale? Ebbene, la teoria di Lebesgue non smette mai di stupire: come ci accingiamo a mostrare, qualora una funzione f sia integrabile secondo Riemann su un dato insieme A, essa è anche integrabile secondo Lebesgue su tale insieme, e nondimeno i due integrali coincidono. In altre parole, l'integrale di Lebesgue estende il defezionario integrale di Riemann.
Per questioni di semplicità daremo una dimostrazione di questo fatto nel caso in cui f sia una funzione reale di variabile reale, ma il risultato ha validità generale.

Teorema 5.4.1. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione Riemann-integrabile su $[a, b]$; allora f è anche Lebesgue-integrabile su $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)d\mu,$$

ovvero gli integrali di Riemann e Lebesgue coincidono.

Dimostrazione. Poniamo $\int_a^b f(x)dx = I$ e partizioniamo l'intervallo $[a, b]$ in 2^n parti uguali, scegliendo $x_k = a + \frac{k}{2^n}(b - a)$; definiamo poi le quantità $M_{n,k} = \sup_{x_{k-1} \le x \le x_k} f$, $m_{n,k} = \inf_{x_{k-1} \le x \le x_k} f$, e consideriamo

$$\Omega_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} M_{n,k}, \quad \omega_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} m_{n,k}.$$

poiché Ω_n e ω_n rappresentano rispettivamente l'area sottesa da una funzione maggiorante e da una funzione minorante di f, e poiché le successioni $\{\Omega_n\}_n$, $\{\omega_n\}_n$ sono rispettivamente non crescente e non decrescente, la Riemann-integrabilità di f su $[a, b]$ ci dice che

$$\lim_{n\to\infty} \Omega_n = I = \lim_{n\to\infty} \omega_n.$$

Dopo questi banali richiami di Analisi I, definiamo due funzioni che maggiorano e minorano la f:

$$\phi_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} M_{n,k} \chi_{x_{k-1} \le x < x_k}(x), \quad \psi_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} m_{n,k} \chi_{x_{k-1} \le x < x_k}(x);$$

è più che evidente che per costruzione si ha

$$\int_{[a,b]} \phi_n(x) d\mu = \Omega_n, \quad \int_{[a,b]} \psi_n(x) d\mu = \omega_n.$$

Inoltre notiamo che le successioni $\{\phi_n\}_n$, $\{\psi_n\}_n$ sono rispettivamente non crescente e non decrescente, e pertanto valgono quasi ovunque i limiti $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \phi(x) \geq f(x)$, $\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = \psi(x) \leq f(x)$. Questo ci dice che possiamo applicare il teorema di Beppo Levi, ottenendo

$$\int_{[a,b]} \phi(x) d\mu = \lim_{n\to\infty} \Omega_n = I == \lim_{n\to\infty} \omega_n = \int_{[a,b]} \psi(x) d\mu,$$

da cui segue subito che $\int_{[a,b]} (\phi(x) - \psi(x)) d\mu = 0$, cioé $\phi(x) = \psi(x) = f(x)$ quasi ovunque e quindi

$$\int_{[a,b]} f(x) d\mu = I.$$

c.v.d.

5.5 Misura prodotto. Teoremi di Fubini e Tonelli

Iniziamo col dare qualche cenno riguardo alla definizione di misura prodotto ed alle sue peculiari proprietà: innanzitutto considerati due spazi misurabili $(X, \mathfrak{S}_X, \mu_x)$ e $(Y, \mathfrak{S}_Y, \mu_y)$, possiamo definire una σ-algebra sullo spazio $X \times Y$ ponendo

$$\mathfrak{S}_X \otimes \mathfrak{S}_Y := \sigma\{A \times B | A \in \mathfrak{S}_X, B \in \mathfrak{S}_Y\}.$$

L'arguto (ma disattento!) lettore si chiederà immediatamente perché non si è posto $\mathfrak{S}_X \otimes \mathfrak{S}_Y = \{A \times B | A \in \mathfrak{S}_X, B \in \mathfrak{S}_Y\}$: il motivo è lapalissiano visto che l'insieme $\{A \times B | A \in \mathfrak{S}_X, B \in \mathfrak{S}_Y\}$ è un semianello ma non un anello (e quindi figuriamoci una σ-algebra). Possiamo ora trasformare l'insieme $(X \times Y, \mathfrak{S}_X \otimes \mathfrak{S}_Y)$ in uno spazio misurabile ponendo:

$$\mu_x \otimes \mu_y(A \times B) := \mu_x(A)\mu_y(B) \quad \text{per ogni } A \times B \in \mathfrak{S}_X \otimes \mathfrak{S}_Y.$$

Si può dimostrare che tale misura è ben definita, completa e σ-additiva in quanto costituisce il prolungamento di Lebesgue della misura additiva

$$m_x \otimes m_y := m_x(A) m_y(B) \quad \text{per ogni } A \times B \in S_1 \times S_2,$$

ove $S_1 \times S_2$ è il semianello prodotto definita dalla relazione

$$S_1 \times S_2 := \{A \times B | A \in \mathfrak{S}_X, B \in \mathfrak{S}_Y\}.$$

Se esistesse qualcuno interessato a questa tematica, può fare riferimento al libro “Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale” degli esimi autori

Kolmogorov e Fomin, il quale, a nostro giudizio, dovrebbe essere posseduto da ogni buon studente con ambizioni di laurea in matematica. Vediamo ora alcuni lemmi:

Lemma 5.5.1. Sia A un insieme misurabile. Allora esiste un insieme B misurabile tale che $B \supset A$ e $\mu(B) = \mu(A)$ costruibile in tal modo:

$$B = \bigcap_n B_n \quad \text{con } B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots,$$

$$B_{nk} = \bigcup_k B_{nk} \quad \text{con } B_{n1} \subset B_{n2} \subset \ldots \subset B_{nk} \subset \ldots,$$

e i B_{nk} insiemi elementari.

Dimostrazione. Essendo A misurabile, esiste $C_n = \bigcup_r \Delta_{nr}$ per certi [2] $\Delta_{nr} \in \mathfrak{R}$ tale che $C_n \supset A$ e $\mu(A) \geq \mu(C_n) - 1/n$. Poniamo ora

$$B_n := \bigcap_{k=1}^{n} C_k;$$

per costruzione risulta che $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$, e inoltre dalla definizione dei C_n segue subito che esistono $\delta_{ns} \in \mathfrak{R}$ tali che $B_n = \bigcup_s \delta_{ns}$. Definiamo ora

$$B_{nk} := \bigcup_{s=1}^{k} \delta_{ns};$$

per costruzione i B_{nk} sono elementari e $B_{n1} \subset B_{n2} \subset \ldots \subset B_{nk} \subset \ldots$; inoltre

$$B_n = \bigcup_k \bigcup_{s=1}^{k} \delta_{ns} = \bigcup_k B_{nk}.$$

Da ultimo poniamo

$$B = \bigcap_n B_n;$$

siccome $A \subset C_n$ per ogni n, allora segue che $B \supset A$, e quindi $\mu(B) \geq \mu(A)$. Inoltre $B \subset C_n$ per ogni n, e quindi, ricordando l'ipotesi iniziale, otteniamo che $\mu(A) \geq \mu(C_n) - 1/n \geq \mu(B) - 1/n$ per ogni n, e quindi $\mu(A) \geq \mu(B)$. Abbiamo pertanto dimostrato tutto quello che c'era da dimostrare.

c.v.d.

Lemma 5.5.2. Siano $(X, \mathfrak{S}_X, \mu_x)$,$(Y, \mathfrak{S}_Y, \mu_y)$ due spazi misurabili e consideriamo gli insiemi $A_x := \{y \in Y | (x,y) \in A\}$ e $A_y = \{x \in x \mid (x,y) \in A\}$ per un certo $A \subset X \times Y$. Allora, posto $\mu := \mu_x \otimes \mu_y$, vale la seguente relazione:

$$\mu(A) = \int_X \mu_y(A_x) d\mu_x = \int_Y \mu_x(A_y) d\mu_y.$$

[2] Ricordiamo che con $\mathfrak{R}$ indichiamo la famiglia di tutti i rettangoli.

Dimostrazione. La dimostrazione si articola in diversi passi: passo i): proviamo la tesi per gli insiemi del tipo $A = A_{y_0} \times A_{x_0}$ per certi $x_0 \in X, y_0 \in Y$ fissati. Definiamo le funzioni $\varphi_A(x) := \mu_y(A_x)$ e $\varphi_A(y) := \mu_x(A_y)$: è palese che per arrivare alla tesi basterà provare che $\mu(A) = \int_X \varphi_A(x) d\mu_x$ (l'altra formula seguirà per simmetria ed è lasciata come esercizio). Fissato allora un $x \in X$ abbiamo che

$$(A_{y_0} \times A_{x_0})_x = \begin{cases} A_{x_0} & \text{se } x \in A_{y_0} \\ \varnothing & \text{altrove} \end{cases}$$

da cui

$$\varphi_A(x) = \mu_y(A_{x_0}) \chi_{A_{y_0}}(x).$$

Integrando otteniamo quindi che

$$\int_X \varphi_A(x) d\mu_x = \mu_x(A_{y_0}) \mu_y(A_{x_0}) = \mu(A),$$

e la tesi è provata. Notiamo, in particolare, che la tesi è provata per i rettangoli.
passo ii): per la σ-additività di μ e per la linearità dell' integrale, la tesi segue subito per gli insiemi che si scrivono come unione disgiunta di quelli del passo i), ergo, in particolare, per gli insiemi elementari (dimostra questo fatto per esercizio.).
passo iii): proviamo la tesi per gli insiemi definiti nel lemma 5.5.1: anzitutto i B_{nk} sono elementari, e perciò la tesi è provata per il passo ii). Proviamola per i B_n: considerata la funzione $\varphi_{B_{nk}}(x) = \mu_y((B_{nk})_x)$, abbiamo che da $B_{n1} \subset B_{n2} \subset \ldots \subset B_{nk} \subset \ldots$ segue che $\varphi_{B_{n1}} \leq \varphi_{B_{n2}} \leq \ldots \leq \varphi_{B_{nk}} \leq \ldots$, e quindi dal teorema di Beppo Levi possiamo dedurre che esiste quasi ovunque $\lim_{k\to+\infty} \varphi_{B_{nk}}$; inoltre dalla continuità della misura sappiamo che $\mu_y(B_n) = \lim_{k\to+\infty} \mu_y(B_{nk})$, e pertanto possiamo concludere che per ogni $x \in X$ vale la formula

$$\varphi_{B_n} = \lim_{k\to+\infty} \varphi_{B_{nk}}.$$

Allo stesso modo si prova che per ogni $x \in X$ vale che $\varphi_B = \lim_{n\to+\infty} \varphi_{B_n}$. Sempre per Beppo Levi segue che

$$\lim_{k\to+\infty} \int_X \varphi_{B_{nk}}(x) d\mu_x = \int_X \varphi_{B_n}(x) d\mu_x,$$

e siccome $\mu(B_{nk}) = \int_X \varphi_{B_{nk}}(x) d\mu_x$, allora si conclude che

$$\mu(B_n) = \lim_{k\to+\infty} \mu(B_{nk}) = \int_X \varphi_{B_n} d\mu_x.$$

Nello stesso identico modo si prova che $\mu(B) = \int_X \varphi_B(x) d\mu_x$, e così si conclude il passo iii).
passo iv): verifchiamo la tesi per un qualsivoglia insieme di misura nulla: sia

quindi A misurabile con $\mu(A) = 0$ e consideriamo l'insieme $B \supset A$ del lemma 5.5.1; allora $\mu(B) = \mu(A) = 0$ e quindi $\varphi_B(x) = \mu_y(B_x) = 0$. Inoltre $A_x \subset B_x$ e quindi anche $\varphi_A(x)$ è nulla. Segue dunque che

$$0 = \mu(A) = \int_X \varphi_A(x) d\mu_x,$$

cioé la tesi.
passo v): quinto e ultimo passo, nel quale si prover'a la tesi per un insieme misurabile arbitrariamente scelto: sia allora A tale insieme, e, considerati il provvidenziale insieme B del lemma 5.5.1 ed un qualunque insieme C di misura nulla, segue che posso rappresentare A nella forma $A = B \setminus C$ (visto che $\mu(A) = \mu(B) - \mu(C) = \mu(B)$). Allora segue subito che $\varphi_A(x) = \varphi_B(x) - \varphi_C(x) = \varphi_B(x)$ da cui

$$\int_X \varphi_A(x) d\mu_x = \int_X \varphi_B(x) d\mu_x = \mu(B).$$

Ricordando per la k-esima volta che $\mu(B) = \mu(A)$, segue la tesi del teorema.

c.v.d.

Osservazione 5.5.1. Si noti che nel teorema precedente si devono sottointendere le seguenti ipotesi:

i) Gli insiemi A_x e A_y sono rispettivamente μ_y e μ_x misurabili per ogni x, y fissati.

ii) Le funzioni $\varphi_A(x)$ e $\varphi_A(y)$ sono misurabili.
Senza queste ipotesi aggiuntive, il teorema precedente sarebbe privo di significato.

Corollario 5.5.1. Siano $(X, \mathfrak{S}_X, \mu_x)$,$(Y, \mathfrak{S}_Y, \mu_y)$ due spazi misurabili e consideriamo l'insieme

$$A = \{(x, y) \in X \times Y | x \in M, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

ove f è una funzione da X in Y e M è un insieme μ_x-misurabile. Allora

$$\mu(A) = \int_M f(x) d\mu_x.$$

Dimostrazione. è una banale applicazione del lemma 5.5.2: in tal caso abbiamo

$$A_x = \begin{cases} [0, f(x)] & \text{se } x \in M \\ \varnothing & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi

$$\varphi_A(x) = f(x)\chi_M(x).$$

Applicando il lemma suddetto segue pedissequamente la tesi.

c.v.d.

Teorema 5.5.1. (di Fubini-Tonelli) Siano $(X, \mathfrak{S}_X, \mu_x)$,$(Y, \mathfrak{S}_Y, \mu_y)$ due spazi misurabili e $A \subset X \times Y$ un insieme misurabile. Sia inoltre $f(x,y)$ una funzione integrabile su A rispetto alla misura prodotto $\bar{\mu} := \mu_x \otimes \mu_y$. Allore vale che

$$\int_A f(x,y) d\bar{\mu} = \int_X d\mu_x \int_{A_x} f(x,y) d\mu_y = \int_Y d\mu_y \int_{A_y} f(x,y) d\mu_x.$$

Dimostrazione. Iniziamo a considerare il caso in cui $f(x,y) \geq 0$; nel caso generale basterà notare che $f(x,y) = f^+(x,y) - f^-(x,y)$, ove f^+ e f^- sono rispettivamente la parte positiva e negativa[3] di f, e applicare il risultato ottenuto per funzioni positive ad esse. Sia μ la misura di Lebesgue definita sulla retta reale, e consideriamo lo spazio $U := X \times Y \times \mathbb{R}$ equipaggiato con la misura $\tilde{\mu} = \mu_x \otimes \mu_y \otimes \mu = \bar{\mu} \otimes \mu$. Sia poi $W \subseteq U$ il seguente insieme:

$$W := \{(x,y,z) \in U | (x,y) \in A, 0 \leq z \leq f(x,y)\};$$

per il corollario precedente abbiamo che

$$\tilde{\mu}(W) = \int_A f(x,y) d\bar{\mu};$$

se ora poniamo $\xi := \mu_y \otimes \mu$ e $W_x = \{(y,z) | (x,y,z) \in W\}$ possiamo applicare il lemma 5.5.2 e concludere che

$$\tilde{\mu}(W) = \int_X \xi(W_x) d\mu_x.$$

Infine notiamo che vale l'uguaglianza

$$W_x = A_x \times [0, f(x,y)],$$

e pertanto, ancora fruendo del corollario precedente, possiamo affermare che

$$\xi(W_x) = \int_{A_x} f(x,y) d\mu_y.$$

A questo punto anche il lettore non troppo sveglio capirà senza particolari problemi che, combinando assieme le tre formule ottenute, si ottiene nientepopodimenoche la tesi.

c.v.d.

[3]Ricordiamo che cosa sono la parte positiva e la parte negativa di f:

$$f^+(x,y) = \frac{|f(x,y)| + f(x,y)}{2}, f^-(x,y) = \frac{|f(x,y)| - f(x,y)}{2}$$

Teorema 5.5.2. (di Tonelli) Siano $A \subset X \times Y$ e $f(x,y)$ come nel teorema precedente. Se esiste almeno una delle due quantità

$$\int_X d\mu_x \int_{A_x} |f(x,y)| d\mu_y, \int_Y d\mu_y \int_{A_y} |f(x,y)| d\mu_x,$$

allora f è integrabile su A (e in particolare vale il teorema di Fubini-Tonelli).

Dimostrazione. Senza perdere in generalità supponiamo che esista la prima delle due quantità menzionate nella tesi, e sia essa uguale ad I. Definiamo inoltre la successione

$$f_n(x,y) := \min\{|f(x,y)|, n\},$$

che, per costruzione, è una successione monotona non decrescente che converge quasi ovunque a $|f(x,y)|$. Inoltre le f_n sono funzioni misurabili e limitate, in quanto minori o uguali ad n, e quindi integrabili grazie alla proprietà (3) (in particolare per le f_n vale quindi il teorema di Fubini). poiché poi $f_n(x,y) \leq |f(x,y)|$, si ha

$$\int_A f_n(x,y) d\bar{\mu} = \int_X d\mu_x \int_{A_x} f_n(x,y) d\mu_y \leq I < +\infty.$$

Ma ora siamo nelle condizioni di poter applicare il teorema di Beppo Levi ed ottenere quindi l'integrabilità su A di $|f(x,y)|$. Ma allora basta ricordare la proprietà (8) per concludere che anche $f(x,y)$ è integrabile su A.

c.v.d.

Esempio 5.5.1. Dall'esistenza degli integrali

$$\int_X d\mu_x \int_{A_x} f(x,y) d\mu_y \quad \text{e} \quad \int_Y d\mu_y \int_{A_y} f(x,y) d\mu_x,$$

non possiamo generalmente dedurre alcunchè sull'integrabilità di f sull'insieme A rispetto alla misura $\bar{\mu}$. Consideriamo il seguente esempio: definiamo la funzione $f(x,y)$ sul quadrato chiuso $Q = [-1,1] \times [-1,1]$ ponendo

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} .$$

Siccome f è dispari rispetto ad entrambe le variabili, otteniamo che il suo integrale su intervalli simmetrici rispetto all'origine è nullo, cioé

$$\int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{1} f(x,y) dx = \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} f(x,y) dy = 0.$$

Tuttavia $\int_Q |f(x,y)|dxdy = +\infty$: infatti, siccome $Q \supsetneq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \le 1\}$, possiamo dire che

$$\int_Q |f(x,y)|dxdy \ge \int_{\{x^2+y^2\le 1\}} |f(x,y)|dxdy = +\infty,$$

ove l'ultimo conto è semplice ed è lasciato come esercizio. Pertanto f non è integrabile su Q per la proprietà 8 dell'integrale di Lebesgue.

Esempio 5.5.2. Sia $Q = [0,1] \times [0,1]$ e definiamo $f : Q \to \mathbb{R}$ ponendo

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

siccome valgono le formule

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right),$$

segue che

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx = -\frac{\pi}{4}.$$

Per il teorema di Fubini-Tonelli si conclude che $f(x,y)$ non è integrabile su Q; inoltre dal teorema di Tonelli segue anche che

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2} dy = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2} dx = +\infty.$$

Esempio 5.5.3. Vediamo ora un'applicazione del teorema di Fubini: definiamo le funzioni Γ e β di Eulero ponendo

$$\Gamma(p) := \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx, \beta(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

Proviamo che per ogni $p, q > 0$ vale la seguente formula:

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Per il teorema di Fubini-Tonelli abbiamo che

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}dxdy;$$

operiamo ora il seguente cambio diffeomorfo di coordinate:

$$\varphi(x,y) = (x, x+y) = (u,v),$$

il quale ammette come trasformazione inversa

$$\varphi^{-1}(u,v) = (u, v-u) = (x,y).$$

Applicando il teorema di cambiamento di variabile otteniamo che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}dxdy &= \int_{\{u>0, v-u>0\}} u^{p-1}(v-u)^{q-1}e^{-v}dudv = \\ &= \int_0^\infty e^{-v}dv \int_0^v u^{p-1}(v-u)^{q-1}du.\end{aligned}$$

Ponendo $u/v = t$ e risolvendo l'integrale scritto sopra ancora con la formula di cambiamento di variabile si giunge celermente alla tesi (questi ultimi calcoli li lasciamo al lettore come esercizio).

Capitolo 6

Appendice

NELL'APPENDICE SONO CONTENUTI esempi interessanti, applicazioni e chiarimenti della teoria, correzioni,etc.: insomma tutto quello che avreste voluto sapere su complementi di analisi ma non avete mai osato chiedere.

6.1 Misura del conteggio

Consideriamo una successione $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e un sottoinsieme $A \subset \mathbb{N}$. Si definisce la misura del conteggio su $\mathbb{N}$ ponendo

$$\mu_\omega(A) := \sum_{n_k \in A} \omega_{n_k}$$

Grazie a questa misura si può definire l'integrale per una qualsiasi funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu_\omega := \sum_n f(n)\omega_n$$

risulta quindi immediato definire l'integrale su A ponendo

$$\int_A f d\mu_\omega = \int_{\mathbb{N}} f \chi_A d\mu_\omega = \sum_{n_k \in A} f(n)\omega_{n_k}$$

Considerata una funzione $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, il teorema di Tonelli ci dice che, se esiste finito almeno uno degli integrali

$$\int_{\mathbb{N}} d\mu_\omega \int_{\mathbb{N}} f d\mu_\lambda \quad \text{oppure} \quad \int_{\mathbb{N}} d\mu_\lambda \int_{\mathbb{N}} f d\mu_\omega$$

allora f è integrabile su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e vale la formula di Fubini-Tonelli; in particolare quello che abbiamo detto si traduce, in termini di serie, dicendo che se almeno una tra le serie

$$\sum_n \omega_n \sum_m f(m,n)\lambda_m \quad \text{oppure} \quad \sum_m \lambda_m \sum_n f(m,n)\omega_n$$

esite finita (i.e. è una serie convergente), allora esiste finita la serie

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(m,n)\omega_n\lambda_m.$$

In particolare, sotto le ipotesi del teorema di Tonelli, possiamo affermare che la somma di una serie resta inalterata se si scambiano gli indici: infatti applicando Fubini-Tonelli otteniamo che

$$\int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} fd(\mu_\omega\otimes\mu_\lambda) = \int_{\mathbb{N}} d\mu_\omega \int_{\mathbb{N}} fd\mu_\lambda = \int_{\mathbb{N}} d\mu_\lambda \int_{\mathbb{N}} fd\mu_\omega$$

cosa che, tradotta in termini di serie, è equivalente a

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(m,n)\omega_n\lambda_m = \sum_n \omega_n \sum_m f(m,n)\lambda_m = \sum_m \lambda_m \sum_n f(m,n)\omega_n.$$

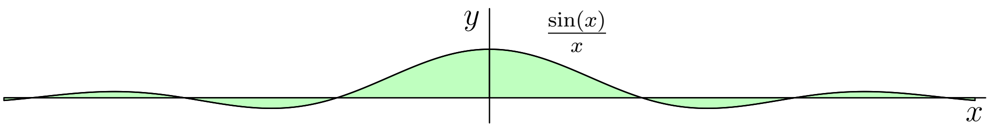
6.2 Usi notevoli di Fubini-Tonelli

Teorema 6.2.1. Vale la relazione

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi$$

Dimostrazione: Dimostriamo, cosa totalmente equivalente alla tesi, che

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$



Consideriamo la funzione $f(x,y) = \sin(x)e^{-xy}$ e l'insieme $E_A := (0,A)\times\mathbb{R}$ definito per $A>0$. Anzitutto proviamo che $f\in L^1(E_A)$: abbiamo che

$$\int_0^A dx \int_0^\infty |sin(x)|e^{-xy}dy = \int_0^A \frac{|sin(x)|}{x}dx \leq \int_0^A \frac{|x\ |}{x}dx < +\infty$$

e quindi il teorema di Tonelli ci assicura che f è integrabile su E_A. Ciò fatto possiamo applicare il teorema di Fubini-Tonelli per integrare f su E_A ottenendo che

$$\iint_{E_A} f(x,y)dxdy = \int_0^\infty dy \int_0^A \sin(x)e^{-xy}dx. \tag{6.1}$$

Risolvendo per parti si ottiene che

$$\int_0^A e^{-xy}\sin(x)dx = \frac{1 - e^{-Ay}\{\cos(A) + y\sin(A)\}}{1 + y^2}. \tag{6.2}$$

Mettendo assieme 6.1 e 6.2 si ottiene che

$$\int_{E_A} f(x,y)dxdy = \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}dy - \int_0^\infty \frac{e^{-Ay}\{\cos(A) + y\sin(A)\}}{1+y^2}dy =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty g_A(y)dy,$$

ove si è posto

$$g_A(y) := \frac{e^{-Ay}\{\cos(A) + y\sin(A)\}}{1+y^2}.$$

Otteniamo quindi l'equazione

$$\int_0^\infty \frac{|sin(x)|}{x}dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty g_A(y)dy. \tag{6.3}$$

Proviamo ora che

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^\infty g_A(y)dy = 0. \tag{6.4}$$

Sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $\lim_{n\to+\infty} A_n = +\infty$: allora provare la relazione 6.4 è equivalente a provare la relazione

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty g_{A_n}(y)dy = 0 :$$

siccome

$$g_A(y) \leq \frac{e^{-y}(1+y)}{1+y^2} \leq \frac{1}{1+y^2} \in L^1(0,+\infty),$$

il teorema di Lebesgue implica che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty g_{A_n}(y)dy = \int_0^\infty \lim_{n\to+\infty} g_{A_n}(y)dy = 0. \tag{6.5}$$

Mettendo assieme 6.3 e 6.5 otteniamo che

$$\int_0^\infty \frac{|sin(x)|}{x}dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{|sin(x)|}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

Abbiamo così concluso la dimostrazione.

c.v.d.

6.3 Ma cosa cambia se la misura è infinita?

In questo paragrafo diamo un esempio di una funzione $f(x)$ e di una successione $f_n(x)$ covergente uniformemente ad f tali che, su un insieme E di misura infinita, esista finito $\int_E f_n(x)d\mu$ ma si abbia che $\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n(x)d\mu = +\infty$. Ciò mostra che la definizione di integrale di Lebesgue per funzioni qualsiasi è ben posta solo su insiemi di misura finita: quando invece si desidera integrare su insiemi di misura infinita, bisogna ricorrere alla successioni esaustive. Sia quindi $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ definita sul dominio $E = (0,+\infty)$ e consideriamo la solita successione di funzioni semplici approssimanti f ponendo

$$f_n^m := \frac{m}{n}\chi_{\{x \;\mid\; \frac{m}{n}\le f(x)\le\frac{m+1}{n}\}}(x)$$

Otteniamo allora che

$$\int_E f_n^m d\mu = \sum_m \frac{m}{n}\mu(A_n^m) \tag{6.6}$$

ove si ha che

$$A_n^m = \left\{x \;\middle|\; 0 \le \left(\frac{n}{m+1}\right)^2 \le x \le \left(\frac{n}{m}\right)^2 < +\infty\right\} \tag{6.7}$$

Non sussistono quindi limitazioni sugli interi m, n, e mettendo assieme 6.6 e 6.7 si ottiene che

$$\int_E f_n^m d\mu = \sum_m \frac{m}{n}\left\{\left(\frac{n}{m+1}\right)^2 - \left(\frac{n}{m}\right)^2\right\} = n\sum_m \frac{2m+1}{m^2(m+1)^2} < +\infty$$

poiché l'ultima serie scritta ha lo stesso carattere di $\sum_m \frac{1}{m^3}$, che è convergente. Tuttavia la funzione f non è integrabile su E secondo la vecchia definizione poiché

$$\int_E f(x)d\mu = \lim_{n\to+\infty} n\sum_m \frac{2m+1}{m^2(m+1)^2} = +\infty.$$

Indice analitico

L-integrabilità
  di funzioni qualsiasi, 50
  di funzioni semplici, 49
  su insiemi di misura infinita, 51
σ-additività, 11, 24
σ-algebra, 3
  generata, 4
σ-anello, 3
σ-finitezza, 51

Additività, 8
Algebra, 2
Anello, 2
  minimale, 2

Boreliani di $\mathbb{R}$, 4

Convergenza
  quasi ovunque, 40
  in misura, 42

Differenza simmetrica, 1
Disuguaglianza di Čhëbyšhev, 59

Funzione
  μ-misurabile, 35
  di Dirichlet, 38
  Gamma di Eulero, 75
  Beta di Eulero, 75
  di Cantor-Vitali, 30
  equivalente, 38
  misurabile, 35
  semplice, 47

Identità di polarizzazione, 37
Insieme
  elementare, 8
  derivato, 29
  di Cantor, 28
  Lebesgue-misurabile, 13, 27
  Peano-Jordan-misurabile, 31, 32
  perfetto, 29

Misura, 22
  di Lebesgue, 13
  di un rettangolo, 8
  assolutamente continua, 22
  completa, 21
  del conteggio, 77
  di insiemi illimitati, 20
  di Peano-Jordan, 32
  di un insieme elementare, 9
  esterna, 11, 27
  esterna (di Peano-Jordan), 32
  interna, 19
  interna (di Peano-Jordan), 32

Non negatività, 8

Partizione canonica, 48
Plurirettangolo, 31
Prolungamento di una misura, 23

Quasi ovunque, 38

Rettangolo, 7

Semianello, 1
Spazio
  misurabile, 35
Subadditività, 10
Successione esaustiva, 50

Teorema
di Egorov, 41
della convergenza dominata, 61
della convergenza monotona, 62
di Beppo Levi, 62
di Fatou, 64
di Fubini-Tonelli, 73
di Lebesgue, 61
di Tonelli, 74
Topologia, 4

Unione disgiunta, 1
Unità
dell'algebra, 2
della σ-algebra, 3