I PARTE: LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA. PRINCIPIOS EN QUE SE SUSTENTA

ANA BRESSAN, BETINA ZOLKOWER, MA. FERNANDA GALLEGO

En este artículo nos centraremos en una línea didáctica, más bien pensada por su autor como "una filosofía de la educación", que se mantiene bastante al margen del tratamiento habitual de los especialistas en didáctica de la matemática. Esta corriente se identifica con el nombre de Educación Matemática Realista y reconoce como fundador al Dr. Hans Freudenthal (1905-1990). Nace en Holanda como reacción al movimiento de la Matemática Moderna de los años 70´s y al enfoque mecanicista de la enseñanza de la matemática, generalizado en ese entonces en las escuelas holandesas.

Hans Freudenthal[1], matemático y educador de origen alemán doctorado en la Universidad de Berlín, desarrolló su carrera académica y sus teorías pedagógicas en Holanda, por haber tenido que emigrar por su origen judío a causa de la llegada de los nazis al poder en 1933. Posteriormente, este hecho lo afectó también en este país, en el cual debió permanecer oculto durante los años de la II Guerra Mundial.

Fue un incansable propulsor de un cambio en la enseñanza tradicional de la matemática y mucha de su popularidad proviene de su amplia actuación como fundador y participante activo en grupos tales como el Grupo Internacional de Psicología y Educación Matemática (PME) y la Comisión International para el Estudio y Mejoramiento de la Enseñanza de las Matemáticas (CIEAEM) en cuyas reuniones manifestaba su oposición a las corrientes pedagógico-didácticas y a las "innovaciones" en la enseñanza vinculadas a la matemática, que se propiciaban a mediados del siglo pasado (teoría de los objetivos operacionales, test estructurados de evaluación, investigación educativa estandarizada, la aplicación directa del estructuralismo y el constructivismo de Piaget en el aula, la separación entre investigación educativa, desarrollo curricular y práctica docente y la matemática "moderna" en la escuela).

Las oposiciones de Freudenthal a la psicología, la pedagogía y la didáctica de la época, no eran gratuitas sino fundamentadas en su conocimiento profundo de la disciplina matemática, en su interés por su enseñanza y su experiencia recogida en las aulas.

Freudenthal señalaba el carácter artificial de las categorías de objetivos educativos y dominios de aprendizaje realizada por Bloom diciendo que tienen un efecto negativo, tanto en los tests escolares como en los de desarrollo, acusándolo de concebir el aprendizaje como un proceso en el que el conocimiento se vierte en la cabeza de los estudiantes.

Sobre Gagné opinaba que el aprendizaje no es un proceso continuo (como ese autor declara) que va de las estructuras simples a las complejas. Para Freudenthal el aprendizaje presenta discontinuidades, es decir saltos repentinos de reinvención (evidenciados por los alumnos en las "experiencias de ajá", en la toma de atajos en sus estrategias, los cambios de puntos de vista, el uso de modelos de distintos niveles de formalización) y va de estructuras complejas y ricas del mundo real a las más generales, abstractas y formales de la matemática. (Freudenthal, 1991: 65)

[1] Se anexa su biografía al final de este artículo.

Los puntos de partida del proceso de aprendizaje deben encontrarse en situaciones que "piden ser organizadas" donde (1991, p.30), las categorías no están predefinidas sino que son desarrolladas por los aprendices por sí mismos, y necesitan ser acomodadas a sus necesidades (Gravemeijer y Terwuel, 2000: 778).

En relación con esto, Freudenthal criticaba a Piaget por forzar el desarrollo sicológico al sistema de categorías con que Bourbaki organiza la matemática, tomando además, la terminología matemática y usándola con otros significados. De sus experiencias (Freudenthal, 1973: 46; 662) opina que las mismas *están relacionadas no con el desarrollo cognoscitivo sino con el lingüístico* (Freudenthal, 1982: 19). Lo que más le preocupa es cómo los trabajos de Piaget seducen y llevan a los metodólogos de la enseñanza a trasladar los hallazgos de sus investigaciones a un conjunto de instrucciones para la educación matemática (Freudenthal, 1973: 662), transformando una teoría epistemológica en una teoría pedagógica.

Discutía con Chevallart (1985) su teoría de transposición. Decía que toma como punto de partida el conocimiento experto de los matemáticos *"Las matemáticas que la mayoría de nuestros futuros ciudadanos aprenden en la escuela no debe reflejar ninguna clase de interpretación, con propósitos didácticos o de otra clase, de ideas filosóficas o científicas, a menos que sean de una época muy anterior (1986: 326)*

Criticaba la investigación empirista - estadística, focalizada en metodologías cuya fuerza consiste en *"conocer todo acerca de investigación, pero nada acerca de educación"* (1991, pág.151)

A pesar de sus escasas referencias a autores no matemáticos, reconoce influencias de Decroly, de quien valoriza sus centros de interés (que se asemejan a su propia teoría de aprendizaje de la matemática en el contexto de la vida real), de Dewey, a quien también reconoce similitudes con su idea de reinvención guiada, de Pierre y Dina Van Hiele de los cuales toma los niveles de matematización en función de su trabajo de tesis acerca del Desarrollo del pensamiento geométrico y su didáctica (1957). También se notan en él influencias de las ideas pedagógicas de Lagenveld (pedagogía fenomenológica), Castelnuovo E. (didáctica intuitiva), Petersen (educación progresiva), Kry Van Perreren y las teorías socioculturales de la Europa del Este.

Sus publicaciones sobre Educación Matemática se remontan a 1948[2] y en el curso del tiempo desarrolla a través de ellas, junto con otros colaboradores del *Instituto para el desarrollo de la Educación Matemática,* IOWO, fundado por él en 1970 en la Universidad de Utrech, renombrado hoy como Instituto Freudenthal, las bases sobre las que hoy trabaja la corriente conocida como Educación Matemática Realista (EMR).

Los participantes del grupo se integraban e integran a las escuelas, trabajan en clases comunes, con docentes comunes, estudiando los saberes informales de los alumnos y viendo cómo conectarlos con propuestas de actividades y creación de modelos, diseñando secuencias, que prueban y mejoran a partir del análisis de su implementación.

[2] Una reseña de sus publicaciones sobre educación matemática puede encontrarse en H. Freudenthal (1980): *Weeding and Sowing. Preface to a Science of Mathematical Education.* Reidel Publishers Company. Dordrecht. Holland-Boston. 2º Edition.

LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA

La EMR no pretende ser una teoría general del aprendizaje (como lo es, por ejemplo, el constructivismo), sino que es más bien una teoría global (una “filosofía” según Freudenthal) que se concretiza en un conjunto de teorías locales de enseñanza de tópicos de la matemática y que se basa en las siguientes ideas centrales:

- Pensar la matemática como una actividad humana (a la que Freudenthal denomina *matematización*) y que, siendo así, debe existir una matemática para todos.
- Aceptar que el desarrollo de la comprensión matemática pasa por distintos niveles donde los *contextos* y los *modelos* poseen un papel relevante y que ese desarrollo se lleva a cabo por el proceso didáctico denominado *reinvención guiada*, en un ambiente de heterogeneidad cognitiva.
- Que desde el punto de vista curricular, *la reinvención guiada* de la matemática en tanto actividad de matematización, requiere de la *fenomenología didáctica* como metodología de investigación, esto es, la búsqueda de contextos y situaciones que generen la necesidad de ser organizados matemáticamente, siendo las dos fuentes principales de esta búsqueda la *historia de la matemática* y las *invenciones y producciones matemáticas espontáneas de los estudiantes.*

A continuación se detallan estos conceptos que suelen ser presentados bajo el nombre de Principios de la Educación Matemática Realista:

Principio de actividad. La matemática es pensada como una actividad humana a la que todas las personas pueden acceder y puede ser mejor aprendida haciéndola.

Dice Freudenthal : *Las cosas están al revés si se parte de enseñar el resultado de una actividad más que de enseñar la actividad misma* (hecho que caracteriza de *inversión antididáctica*) (1983: IX).

Para Freudenthal, como matemático-investigador, hacer matemática (matematizar) es más importante que aprenderla como producto terminado. Para él el énfasis no está en aprender algoritmos, sino en el proceso *de algoritmización*, no en el álgebra sino en la actividad de *algebrizar,* no en las abstracciones sino en la acción de *abstraer,* no en la *forma y la estructura* sino en *formalizar y estructurar…* (1991)[3].

Coherente con esto propicia una *matemática para todos*, reconociendo que no todos los estudiantes han de llegar a ser matemáticos, luego, lo importante es que aprendan a abordar matemática y críticamente los problemas que se presentan en situaciones cotidianas (Freudenthal, 1968;5; 1982 : 8). Se trata de posibilitar el acceso a estos conocimientos, destrezas y disposiciones mediante situaciones

[3] Freudenthal no elabora en detalle su noción de actividad sino que sólo hace uso de este término para señalar la necesidad, imperiosa desde el punto de vista didáctico, de reconstruir el proceso oculto dentro del producto (en términos gramaticales, recuperar el verbo encapsulado dentro del sustantivo) (1991). Toma como punto de partida la actividad de los matemáticos, ya sea pura o aplicada, de resolver problemas, buscar problemas y organizar el contenido, sea contenido matemático o información de la realidad. (Gravemeijer, 1994:82)

problemáticas que generen la necesidad de utilizar herramientas matemáticas para su organización y solución.

> *En un sentido objetivo la matemática más abstracta es, sin duda, también la más flexible. Pero no subjetivamente, desde que es desechada por individuos que no están en condiciones de aprovechar por sí mismos esta flexibilidad* (Freudenthal 1968: 5)

Desde la perspectiva realista, se propone que la matemática posee valor educativo[4] en la medida que permite comprender y participar de los modos en que esta disciplina organiza distintas esferas de nuestro entorno social y natural.

La imagen de la matemática se enmarca dentro de la imagen del mundo, la imagen del matemático dentro de la del hombre y la imagen de la enseñanza de la matemática dentro de la de la sociedad (Freudenthal, 1991: 132)[3].

Freudenthal entiende que el término educación encierra tanto el logro de los objetivos de la instrucción formal como el desarrollo de actitudes de toda clase: morales, sociales, emocionales, religiosas y cognitivas. Todo esto hará del ser humano un hombre culto, formado, que es uno de los objetivos más relevantes de la educación. (Freudenthal, 1980:35-38). Esto lo aleja de una mirada netamente vocacional, instrumental o profesional de la educación, donde la didáctica prioritariamente atiende a teorías de propósitos y contenidos de instrucción.

En particular, le importa desarrollar en los alumnos una *actitud matemática*, desde edades tempranas (Freudenthal, 1981:142-3; 1991: 122-3) la que incluye las siguientes disposiciones o estrategias como base para lograr otras en edades mayores:

- Desarrollar un lenguaje que suba de nivel desde lo ostensible (por ejemplo, señalar, indicar con artículos demostrativos) y lo relativo (específico a un contexto o a una situación determinada) hasta el uso de variables convencionales y lenguaje funcional.
- Cambiar de perspectiva o punto de vista y reconocer cuando un cambio de perspectiva es incorrecto dentro de una situación o problema dado.
- Captar cuál es el nivel de precisión adecuado para la resolución de un problema dado.
- Identificar estructuras matemáticas dentro de un contexto (si es que las hay) y abstenerse de usar la matemática cuando esta no es aplicable.
- Tratar la propia actividad como materia prima para la reflexión, con miras a alcanzar un nivel más alto.

Principio de realidad. La matemática surge como *matematización* (organización) de la realidad, luego el aprendizaje matemático debe originarse

[4] *Bildung* se refiere al ideal de formación de la personalidad, y no conlleva simplemente la transmisión de conocimiento, sino también el desarrollo de conocimientos, normas y valores asociados con ser un "buen" ciudadano y/o miembro de una elite cultural e intelectual. (Freudenthal, 1980)

también en esa realidad. Esto no significa mantener a esta disciplina solo conectada al mundo real o existente sino también a lo realizable, imaginable o razonable para las alumnos (la traducción de "imaginar" en holandés es "zich REALIS-Eren", de allí el término de matemática "realista").

Dice Freudenthal: *Yo prefiero aplicar el término realidad a lo que la experiencia del sentido común toma como real en un cierto escenario (1991: 17).*

Desde este punto de vista resultará tan ´real` para un estudiante de primer ciclo trabajar sobre el colectivo al que diariamente aborda para venir a la escuela, como, posteriormente, hacerlo sobre el lenguaje de flechas que representa lo que en el colectivo acontece, o en estudiantes más avanzados, recurrir a lo que se sabe sobre números y operaciones para resolver mentalmente problemas tales como 39 x 41, 252 ÷ 12 o 60 ÷ ¼ o inventar un método para predecir las dos últimas cifras de una potencia de 7 dado el exponente.

De lo que se trata es de presentar los problemas de modo tal que los alumnos puedan imaginar las situaciones en cuestión y, a partir de ahí, utilizar su sentido común, y poner en juego los procedimientos de cálculo, las estrategias de resolución y los modelos matemáticos que mejor sirvan para organizarlas. Desde este punto de vista el contexto debe ser considerado como un aspecto intrínseco al problema y no como un mero ropaje a eliminar:

Enfocar el contexto como un ruido, susceptible de perturbar la claridad del mensaje matemático, es un error; el contexto por sí mismo es el mensaje, siendo las matemáticas un medio para decodificarlo (Freudenthal, 1973)

Los contextos en la EMR al ser significativos para el aprendiz (Freudenthal, 1981:144), se constituyen en puntos abiertos de partida de su actividad matemática, promoviendo el uso de su sentido común y sus estrategias informales, usándose en profundidad. Sin embargo, para no generalizar y banalizar el concepto de contexto realista[5] es importante tener en cuenta el carácter relativo del mismo, ya que un contexto sea o no realista depende de la experiencia previa de los alumnos y/o de su capacidad para imaginarlo o visualizarlo.

En oposición al abordaje de la adquisición de conceptos matemáticos que implica la "corporalización" de los mismos en materiales, la fenomenología didáctica (Freudenthal 1983) se encarga de buscar e investigar situaciones (fenómenos)[6] que puedan ser organizadas por los objetos matemáticos que se supone que los alumnos deben construir. *Si vemos a la matemática, cómo históricamente ha evolucionado a partir de la resolución de problemas prácticos, sería razonable*

[5] Vale subrayar que no se trata de utilizar la realidad percibible o experimentada, como única fuente de actividades en el aula de matemática. Hacer esto limitaría seriamente las oportunidades para que los alumnos aprendan a matematizar, es decir, a operar dentro del ámbito mismo de la matemática. De lo que se trata es de incorporar en el aula un modo de trabajo donde haya espacio para preguntas, para que los alumnos contribuyan a la discusiones no sólo acerca de sus estrategias y las soluciones sino también y sobre todo en lo que respecta a la interpretación de las situaciones problemáticas mismas.

[6] Para Freudenthal algo es considerado como un fenómeno cuando tenemos experiencia de ello, y incluye como fenómenos los mismos medios de organización de matemática (estrategias, conceptos, notaciones) cuando se los torna objetos de experiencia. (Ver Puig, 1997:63-64).

esperar encontrar los problemas que dieron origen a este proceso en las aplicaciones diarias actuales. Después podríamos imaginar que a la matemática formal le correspondió ser un proceso de generalización y formalización de procedimientos de resolución de problemas en situaciones específicas y conceptos sobre una variedad de situaciones. El objetivo de una investigación fenomenológica es, por lo tanto, encontrar situaciones problemáticas a partir de las cuales se pueden generalizar enfoques específicos, y encontrar situaciones que puedan evocar procedimientos paradigmáticos de solución como base para la matematización vertical. Para encontrar fenómenos que puedan ser matematizados, podemos buscar entender cómo fueron inventados.(Gravemeijer y Terwuel, 2000)

Principio de reinvención. Como se expresara**,** según Freudenthal, la matemática no es otra cosa que una forma de sentido común sólo que más organizada.

"Para transformarlo en matemática genuina y para progresar, el sentido común debe ser sistematizado y organizado. Las experiencias del sentido común cristalizan en reglas (por ejemplo la conmutatividad de la suma) y estas reglas se transforman de nuevo en sentido común, pero a un nivel más alto, constituyendo así la base para una matemática de orden aún mayor -una jerarquía tremenda construida gracias a un notable interjuego de fuerzas" (1991: 9).

Este proceso se hará a través de la *reinvención guiada* como

> *…un balance sutil entre la libertad de inventar y la fuerza de guiar.* (1991:55)

La educación matemática debe dar a los alumnos la oportunidad *guiada* por el maestro de reinventar la matemática (no crean, ni descubren, sino reinventan modelos, conceptos, operaciones y estrategias matemáticas con un proceso similar al que usan los matemáticos al inventarlas). Aquí el docente posee un papel bien definido en tanto sujeto que media entre los alumnos y las situaciones problemáticas en juego, entre los alumnos entre si, entre las producciones informales de los alumnos y las herramientas formales, ya institucionalizadas, de la matematica como disciplina.

Para orientar adecuadamente este proceso es importante la capacidad de anticipación, observación (y auto-obsevación) y reflexión de los docentes acerca de los aprendizajes a corto y largo plazo de sus alumnos (por ejemplo, una "experiencia de ajá!" en un momento dado de una lección, la trayectoria de aprendizaje de un grupo de una clase con relación a un tema determinado, o el desarrollo de una "actitud matemática" de los alumnos durante el transcurso del año lectivo). Esto le permitirá conocer las comprensiones y habilidades de los mismos, para organizar la actividad en el aula y dar lugar a esta reinvención y a los cambios de nivel que pretende lograr en esas comprensiones.

Principio de niveles. Freudenthal completa el proceso de reinvención con lo que Treffers (1987) llama *matematización progresiva*. Los alumnos deben comenzar por matematizar un contenido o tema de la realidad para luego cambiar a analizar su propia actividad matemática. Este proceso de matematización, fue elaborado por Treffers (1978, 1987) y retomado por Freudenthal (1991) bajo dos formas:

- *la de matematización horizontal, que consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación, la experimentación inductiva, y*

- *la de matematización vertical, ya dentro de la matemática misma, que conlleva estrategias de reflexión, generalización, prueba, rigorización (limitando interpretaciones y validez), simbolización y esquematización con el objeto de lograr mayores niveles de formalización matemática*[7].

En este proceso de matematización progresiva la EMR admite que los alumnos pasan por distintos niveles de comprensión[8] (caracterizados por distintos tipos de actividades mentales y lingüísticas)

Estos niveles según Gravemeijer (2002:2; 1994:100) son*: situacional, referencial, de generalización y de formalización,* están ligados al uso de estrategias, modelos y lenguajes de distinta categoría cognitiva y no constituyen una jerarquía estrictamente ordenada.

En el nivel *situacional*, el conocimiento de la situación y las estrategias son utilizadas en el contexto de la situación misma (generalmente con recursos de fuera de la escuela).

El nivel *referencial* es donde aparecen los modelos, descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema, pero siempre referidos a la situación particular.

El nivel *general* se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización[9] de lo aparecido en el nivel anterior pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias que supera la referencia al contexto.

En el nivel *formal*, se trabaja con los procedimientos y notaciones convencionales.

La evolución entre niveles se da cuando *la actividad en un nivel es sometida a análisis en el siguiente, el tema operatorio en un nivel se torna objeto del siguiente*

---

[7] La distinción entre matemática informal y formal conviene al diseñador curricular. En la EMR la matemática formal no se entiende como un producto externo con el cual el alumno debe conectarse, sino como algo que crece de su propia actividad. "Nosotros hablaremos de un ´razonamiento matemático más formal´ en el contexto de la secuencia instruccional, cuando los estudiantes construyen argumentos que se localizan en una nueva realidad matemática"…"la cual puede llamarse formal en relación con los puntos de partida originales de los estudiantes" (Gravemeijer, 2002:3)

[8] La noción de *niveles en los procesos de aprendizaje* tal como es utilizada en EMR, proviene en gran medida de las ideas de Dina van Hiele (1957) y Pierre van Hiele (1973, 1985) y difiere considerablemente de la noción de *etapas de desarrollo* que aparece en los trabajos de Piaget, en particular en el sentido de que la noción de niveles está estrechamente vinculada al uso externo instrumental del lenguaje y otros medios de simbolización (por ejemplo, modelos y formas de notación), mientras que la noción de etapas remite a una tranformación interna, esto es, a nivel de las estructuras cognitivas o mentales.

[9] Generalizar implica para Freudenthal un concepto distinto de transferir. Cuando se habla de generalizar en la EMR no se entiende como la aplicación de un procedimiento conocido a situaciones nuevas (esto sería aplicar o transferir según su característica de novedad para el alumno) sino que implica conectar varias situaciones reconociendo características similares que permiten que se las clasifique dentro de un determinado tipo. Al mismo tiempo el proceso de solución (abarcativo) puede ser estructurado y por lo tanto la generalización toma forma de una actividad de organización, como una forma de matematización (Gravemeijer, 1994:104)

nivel (Freudenthal, 1971:417). Estos niveles son dinámicos y un alumno puede funcionar en diferentes niveles de comprensión para contenidos distintos o partes de un mismo contenido. Más que describir en forma exacta qué puede hacer el alumno en cada uno sirven para monitorear sus procesos de aprendizaje.

Los modelos y la reflexión colectiva son los instrumentos básicos para el cambio de nivel. Ellos son representaciones de las situaciones donde se reflejan aspectos esenciales de los conceptos y relaciones matemáticas que son relevantes para solucionar la situación dada[10]. Se respetan los modelos que surgen de los propios alumnos y se acercan otros inspirados en las estrategias informales ya sea utilizadas por los estudiantes o que aparecen en la historia de la matemática (estudiados a partir de la fenomenología didáctica).

Esto dista de ser una traducción de situaciones problemáticas a expresiones matemáticas que pueden funcionar como modelos (modelización matemática). En esta corriente el modelo es el resultado de organizar una actividad por parte del sujeto, sosteniendo una profunda implicación constitutiva entre modelo y situación. (Gravemeijer, 2002)

Ellos sirven como puentes importantes para sortear la distancia entre la matemática contextualizada e informal y la formal[11], permitiendo por su flexibilidad avanzar en los distintos niveles, cambiar en el tiempo e integrar contenidos. Los modelos que aparecen en el nivel situacional (***modelos de*** situaciones particulares) se van generalizando a otras situaciones y con otros lenguajes tornándose entidades en sí mismos como herramientas (***modelos para***) para resolver situaciones variadas, posibilitando un razonamiento matemático más formal.

Los modelos así pensados favorecen la matematización vertical sin obstruir, si es necesario, la vuelta a la situación que le dio origen.

Este proceso de matematización debe basarse en el *análisis reflexivo* del trabajo oral y escrito de los alumnos, con particular atención a los momentos claves (búsqueda de atajos, cambios de punto de vista, creación o apropiación de modelos más elaborados, etc.) en los procesos de esquematización o formalización progresivas, y en organizar o estructurar las discusiones en torno a las soluciones propuestas por los mismos, de modo tal de hacer visible y explícita la trayectoria hacia niveles de generalización, más formales, eficientes y sofisticados.

La historia de la matemática en los orígenes de cada conocimiento ejemplifica y brinda situaciones que dan pie a este proceso de reinvención y matematización,

[10] La noción de *modelo* que utilizan los investigadores de RME difiere tanto de la noción de modelo de las corrientes cognitivistas y constructivistas (las cuales se basan en una teoría representacional de la mente, donde el lenguaje cumple una función de representación y comunicación de ideas que el sujeto primero construye en su mente) como de la que se usa dentro de la corriente socio-cultural y la teoria de la actividad -las dos vertientes que surgen de los trabajos de Vigotski, Galperin y Davidov- la cual, según Freudenthal (1991), se basa en la noción de aprendizaje como apropiación de saberes histórica y culturalmente constituidos. Lo que a Freudenthal (1991) le interesa, desde el punto de vista didáctico, no son los modelos como sistemas axiomáticos o estructuras cognitivas sino como el resultado de la modelización en tanto actividad de idealización que ocupa un lugar central en los procesos de matematización. *El modelo es simplemente un intermediario, a menudo indispensable, a través del cual una realidad o teoría compleja es idealizada o simplificada a fines de volverla susceptible de un tratamiento matemático formal* (p. 34)

[11]

tanto como las producciones libres de los alumnos con sus procedimientos informales.

Principio de interacción. En la EMR el aprendizaje de la matemática esta considerado como una actividad social. Como se expresa en el párrafo anterior, la discusión sobre las interpretaciones de la situación problema, de las distintas clases de procedimientos y justificaciones de solución y de la adecuación y eficiencia de los mismos es central en la EMR. La interacción lleva a la reflexión y a capacitar a los alumnos para llegar a niveles de comprensión más elevados. No se piensa en una clase homogénea en sus trayectos de aprendizaje, sino en individuos que siguen senderos propios. Sin embargo, esto no lleva a partir la clase en grupos con procesos similares, sino más bien a mantener la clase general junta como una unidad de organización o al trabajo co-operativo en grupos heterogéneos - lo que fue defendido por Freudenthal desde los años 45 (Freudenthal 1987,1991). Dado que los problemas se seleccionan de manera que den lugar a soluciones apelando a diferentes niveles de comprensión todos los alumnos pueden trabajar en ellos.

Principio de interconexión (estructuración). La resolución de situaciones problemáticas realistas a menudo exige establecer conexión y la aplicación de un amplio rango de comprensiones y herramientas matemáticas. La EMR no hace profundas distinciones entre los ejes curriculares, lo cual da una mayor coherencia a la enseñanza y hace posibles distintos modos de matematizar las situaciones, bajo distintos modelos y lenguajes, logrando alta coherencia a través del currículo.

Lo que realmente importa es saber cómo encaja el tema en todo el cuerpo de la enseñanza matemática, si se puede, o no, integrar con todo o si es tan estrafalario o aislado que, finalmente, no dejaría ninguna huella en la educación (Freudenthal, 1982)

Acerca del currículo, la investigación didáctica y la capacitación desde la EMR

Esta corriente concibe al currículo como un proceso que requiere del diseño de secuencias didácticas que, lejos de ser elaboraciones académicas restringidas a objetivos instruccionales, se enmarquen dentro de una filosofía educativa que busca explícitamente promover cambios en la enseñanza de la matemática en las aulas. El motor de este proceso es la *investigación para el desarrollo*, una metodología cualitativa/ interpretativa[12] basada en experiencias de aulas donde se ponen a prueba secuencias didácticas y se observan, registran y analizan hitos, saltos y discontinuidades en el aprendizaje de los alumnos. Su objetivo es llevar a la conciencia el proceso de desarrollo y explicarlo.

Volver conciente por la experiencia el proceso cíclico de desarrollo e

[12] Se coloca a sí mismo contra el ideal de investigación educativa como modelado por la investigación en ciencias naturales. Argumenta que en las Ciencias Naturales, es fácil presentar el conocimiento nuevo como el resultado de experimentos, ya que los experimentos son fácilmente replicables. En educación, la replicación es imposible en el estricto sentido de la palabra. Un experimento educativo jamás puede ser repetido de idéntica manera, bajo idénticas condiciones. (Freudenthal; 1991)

investigación, e informarlo tan claramente que se justifique por sí mismo, y que esta experiencia pueda ser trasmitida a otros como para que la hagan propia (Freudenthal 1991:161)

La reflexión conjunta de investigadores, diseñadores curriculares y profesores acerca de estos fenómenos, lleva a mejorar las secuencias didácticas, con miras a guiar de modo efectivo los procesos de matematización generándose así *desarrollos educativos.* Mientras que el desarrollo curricular, según Freudenthal, se centra en el desarrollo de materiales curriculares, el desarrollo educativo es mucho más que un diseño instruccional; es una innovación estratégica total fundada, por una parte, en una filosofía educativa explícita, y por otra, incorpora el desarrollo de toda clase de materiales (adaptándolos) *como parte* de esa estrategia. (Freudenthal, 1991; Gravemeijer, 1994)

Inicialmente Freudenthal fue renuente a llamar investigación a lo que hacía el IOWO. "En nuestro instituto observamos por nosotros mismos, no como investigadores sino como ingenieros". Además, considera (1973a) a la teoría como un producto del desarrollo educativo. Sin embargo, luego (1988) argumenta que esta metáfora separa la investigación del desarrollo educativo, y por tanto no puede hacer justicia con el carácter de entretejido del desarrollo en la "investigación del desarrollo"[13].

La didáctica realista invita a reemplazar la visión del alumno como receptor pasivo de una matemática prefabricada, por la de un sujeto que participa, junto con otros, en la organización matemática de fenómenos imaginables.

Si la actividad primordial de los alumnos es matematizar, ¿cuál es la actividad primordial de los profesores? Según Freudenthal (1991) es la de *didactizar*, entendida ésta como una actividad organizadora que se da tanto a nivel horizontal como a nivel vertical. Horizontalmente, los docentes trabajan en torno a fenómenos de enseñanza-aprendizaje que emergen en sus aulas y en las de otros; verticalmente, reflexionan[14] y generalizan a partir de estas situaciones hasta reinventar su propia caja de herramientas didácticas para facilitar la matematización.

Se subraya aquí la contradicción de pedir a los profesores que den a sus alumnos oportunidades para experimentar la matemática como actividad de reinvención, mientras que, en cursos de formación y capacitación, se les presentan a estos mismos profesores teorías, propuestas y materiales didácticos prefabricados. Esto priva a los profesores de la oportunidad de apropiarse de

[13] La investigación del desarrollo tiene un doble canal de salida: uno en el nivel de las teorías, y otro en el nivel de productos curriculares. Por tanto, el desarrollo de la investigación en RME, llevada a cabo fuera y dentro del IOWO y su sucesor OWandOC (el actual Instituto Freudenthal), dio como resultado una rica secuencia de prototipos instruccionales y otras publicaciones prácticas. En Holanda, estas publicaciones han tenido fuerte influencia en matemáticas en las escuelas. Con el correr del tiempo, en los '80 en las escuelas primarias de Holanda los seguidores voluntarios los llamaron textos "realísticos". En el nivel secundario, los cambios curriculares iniciados por el gobierno tuvieron muchas comisiones del Instituto Freudenthal para el desarrollo de sus nuevos currículos. Como una consecuencia, todos los currículos de Holanda son, o están siendo cambiados por currículos fundamentados en la filosofía RME.

[14] Muchas reflexiones teóricas de investigaciones del IF son dadas en forma de anécdotas de las clases y ellas juegan un rol importante entre la teoría y la práctica. Tienen propiedades ejemplificadoras. Suelen representar numerosas observaciones de un fenómeno dado y son de alto potencial teórico. Dan datos sobre fases, ideas intuitivas, niveles y niveles de avance en el proceso de aprendizaje y resultan fáciles de recordar.

herramientas fundamentales para el ejercicio de su profesión, incluidos los recursos teóricos y prácticos para *didactizar* a nivel horizontal y vertical.

La RME está lejos de ser un paradigma acabado sino que se trata de una propuesta en estado permanente de desarrollo y transformación (van den Heuvel-Panhuizen, 1999)

A continuación reseñamos algunas de las líneas actuales de trabajo, en el Instituto Freudenthal, a la luz de los resultados del diseño curricular y experiencias didácticas en diversos campos (álgebra, estadística, geometría, etc. cf. www.fi.uu.nl) y otros tipos de trabajo de investigación:

- estudios en el campo de la modelización y la simbolización (Gravemeijer 2000: "modelos emergentes", van Oers 2000: enfoque semiótico que intenta articular RME con la línea de Vigotski),
- evaluaciones de los efectos del uso de diferentes libros de texto (Gravemeijer 1994, Seegers y Gravemeijer 1997),
- el diseño y la implementación de pruebas de evaluación (van den Heuvel-Panhuizen 1996),
- las investigaciones en el área de formación y capacitación de docentes en la linea de la didáctica realista,
- la adaptación de secuencias didácticas y estilos de instrucción a las necesidades de sectores específicos de la población estudiantil (van den Heuvel Panhuizen 1996, Menne 2001), y los estudios comparativos que apuntan a explicar la aparente resilencia de diferencias de rendimiento con respecto a variables tales como género, nivel socio-económico, diferencias étnicas y culturales, y nivel de manejo del idioma holandés.

Referencias:

FREUDENTHAL, H. (1973). Mathematics as an educational task. Dordrecht: Reidel Publis. Co.

FREUDENTHAL, H. (1982). "Objetivos y empleo de la enseñanza matemática." Rev. *Conceptos de Matemática*. Año XVI. Octubre- Nov-Dic. Nº 64. Pág 5 a 25.

FREUDENTHAL, H. (1985). "Mathematics starting and staying in reality", In Wirzup and Streit (Eds.) *Developments in School Mathematics Education Around the World*. Reston, VA: NCTM.

FREUDENTHAL, H. (1991). Revisiting mathematics education: China Lectures, Dordrecht: Kluwer

FREUDENTHAL, H. (1993). Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht: Kluwer.

FREUDENTHAL, H. (1981): Major Problems of mathematics educations. Educational Studies in mathematics. 12: 133-150. Reidel P.C.

GOFFREE, F. (2000). Principios y paradigmas de una "educación matemática realista". En *Matemática y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Gorgorió N, J. DEULOFEU AND A. BISHOP (Coords) pág 151-168. ICE, Universidad de Barcelona, Ed. GRAÓ. España

GRAVEMEIJER, K. y TEWUEL J. (2000): Hans Freudenthal, a mathematician on didactics and curriculum theory. *Curriculum Studies*. Vol 32, 6: 777-796.

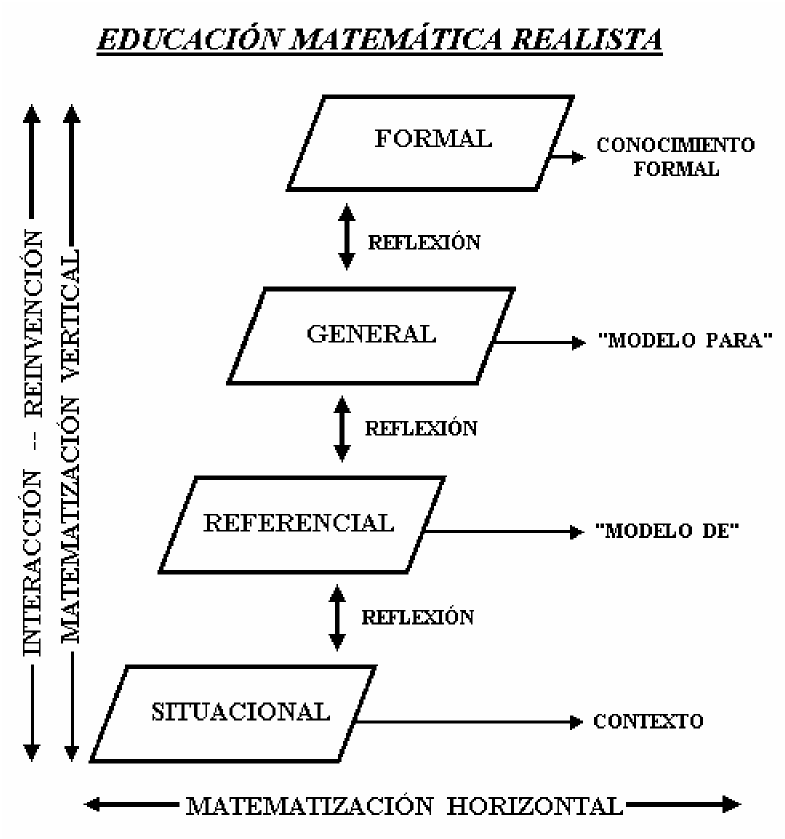
GRAVEMEIJER, K. (1994). Developing realistic mathematics education. Freudenthal Institute. Utrecht, The Netherlands

GRAVEMEIJER, K.et al. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. En Cobb, P., E. Yackel, and K. Mc Clain (Eds.) *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms*. Lawrence Erlbaum.
GRAVEMEIJER, K. (2002): Emergent Modelig as the Basis for an Instructional Sequence on Data Analisis. ICOTS6. www.fi.uu.nl.
VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN M. (2001): Realistic Mathematics Education in Netherlands. Cap. 4 del libro Principles and Practices in Arithmetic Teaching. Innovatives approaches for the primary classroom. Ed por Anghileri J. Open University Press. Filadelfia
PUIG, L. (1997): "Análisis Fenomenológico". Cap III del libro: La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Rico L. (eds). ICE. Ed. Síntesis.
STREEFLAND, L. (1990): "Free productions in the teaching and learning of mathematics. En Gravemeijer, K. et al (comp.) Contexts, free productions, tests, and geometry in realistic mathematics education. Utrecht: OW & OC, Utrecht University.
TREFFERS, A. (1987): Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education: The Wiskobas Project, Dordrecht: Kluwer.
VAN DEN BRINK F. J. (1984). Números en marcos contextuales. *Educational Studies in Mathematics* 15. Págs. 239-257. 1984. Traducción: Gallego Fernanda y Collado Ma.
van den HEUVEL-PANHUIZEN, M. (1999): Mathematics Education in The Netherlands: A Guided Tour, a Presentation at the Conference on the Teaching of Arithmetic in England and The Netherlands, University of Cambridge.
FREUDENTHAL H. 1982: Objetivos y empleo de la enseñanza matemática. En la Rev. Conceptos de Matemática. Nº 64. 5-25.
GOFFREE F. 2000: Principios y paradigmas de una "educación matemática realista". En Matemática y Educación. retos y cambios desde una perspectiva internacional. Gorgorió N, Deulofeu J., Bishop A (coords) pág 151-168 . ICE, Universidad de Barcelona, Ed. Grao. España

Publicaciones del GPDM:

Collado, M. Bressan, A. y Gallego F. (2003). La matemática realista en el aula: El colectivo y las operaciones de suma y resta. *Novedades Educativas, 15*, 14-19.
Martínez, M., Da Valle, N., Bressan, A.y Zolkower, B. (2002). La relevancia de los contextos en la resolución de problemas de matemática. *Paradigma, 22* (1), 59-94.
Pérez, S., Zolkower B. y Bressan, A. (2001). ¿Seño, es cierto eso? *Novedades Educativas*, *131*, 21-23 y *132*, 22-24.
Rabino, A., Bressan, A. y Zolkower, B. (2001) ¿Por qué en un caso sí y en otro no? *Novedades Educativas*, *13* (129), 16-20.
Zolkower, B. y Shreyar, S. (2002). Interaction and semiotic apprenticeship in a 6th grade mathematics classroom. *Proceedings of the 20th PANAMA Conference* (The Netherlands), 141-162.
Zolkower B., Bressan A. Gallego Ma. Fernanda (2004): La corriente realista de didáctica de la matemática: experiencias de aula de profesores y capacitadores. Sometido a consideración para su publicación en la *Rev. Infancia y Aprendizaje*. Julio 2004.
Pérez S., Bressan A., Gallego Ma. Fernanda, Zolkower B., (2004): Ver imágenes, plantear razones y calcular proporciones. En elaboración.

NIVELES EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA


EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA
FORMAL
CONOCIMIENTO FORMAL
REFLEXIÓN
GENERAL
"MODELO PARA"
REFLEXIÓN
REFERENCIAL
"MODELO DE"
REFLEXIÓN
SITUACIONAL
CONTEXTO
INTERACCIÓN -- REINVENCIÓN
MATEMATIZACIÓN VERTICAL
MATEMATIZACIÓN HORIZONTAL