



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

**Escuela Técnica Superior
de Ingeniería de Diseño**

VALENCIA

TRABAJO FIN DE MÁSTER EN
INGENIERÍA AERONÁUTICA

Solución numérica de problemas aerodinámicos
no estacionarios mediante el método de la malla de
torbellinos



Autor:
Fernández Villar, Álvaro

Tutor:
Lázaro Navarro, Mario

Septiembre-2018





*“Los científicos estudian el mundo tal como es;
los ingenieros crean el mundo que nunca ha sido”*

Theodore Von Kármán





Resumen

El objetivo de este trabajo es obtener un código numérico para determinar las condiciones de sustentación generadas en un ala por un fluido incompresible, no viscoso, irrotacional y no estacionario y utilizarlo posteriormente para estudiar las condiciones que desencadenan el flameo aeroelástico en la misma.

Para ello, en una primera fase, se ha desarrollado el método de la malla de torbellinos no estacionaria, más conocido como Vortex-Lattice no estacionario o UVLM y se ha programado en lenguaje Matlab. Este ha permitido calcular la distribución de presiones, la distribución de sustentación y la variación del coeficiente de sustentación total en el tiempo para un ala en flecha, de geometría conocida y ante unas condiciones de flujo impuestas.

En una segunda fase, se ha realizado el acoplamiento fluido-estructura, determinando la matriz de fuerza aerodinámica generalizada y resolviendo el conocido como determinante de flameo del ala modelando las cargas aerodinámicas mediante el UVLM programado anteriormente. Esto ha permitido determinar las condiciones de velocidad y frecuencia para las que se produce el fenómeno del flameo aeroelástico de un ala en voladizo, inestabilidad que tiene lugar únicamente a bajas velocidades aerodinámicas y que es imprescindible tener en cuenta en la fase de diseño conceptual de un ala de una aeronave.

Finalmente, se ha integrado todo el código en la interfaz gráfica FVortexAero 1.0, una herramienta que, sin llegar al nivel de los códigos comerciales, puede servir de apoyo en la resolución de problemas aerodinámicos y aeroelásticos para las primeras fases de diseño.





Abstract

Abstract

The goal of this dissertation is obtaining a numerical code in order to determine the lift created in a wing by an incompressible, non-viscous, irrotational and unsteady fluid and in order to study the wing's aeroelastic flutter conditions.

With this in mind in a first phase, the Unsteady Vortex-Lattice Method (UVLM) has been developed and programmed in Matlab, which has allowed calculating both pressure and lift distribution plus the total lift coefficient for a geometrically known, swept wing with imposed flow conditions.

In a second phase, the fluid structure coupling has been performed determining the generalized aerodynamic force matrix and solving the wing's flutter determinant by modeling the aerodynamic loads through the previously programmed UVLM. This has allowed establishing speed and frequency conditions for which the aeroelastic flutter is produced in a cantilever wing. This instability only occurs at low-speed aerodynamics and it must be taken into account during the conceptual design of an aircraft's wing.

Eventually, the entire code has been integrated at FVortexAero 1.0 graphic interface, a tool that, without reaching the level of commercial codes, could provide support as an aerodynamic and aeroelastic troubleshooter for a first stage of designing a wing.





Agradecimientos

En estas líneas me gustaría expresar mi agradecimiento en primer lugar, al tutor de este proyecto, Mario Lázaro Navarro, por su dedicación y sus consejos sin los cuales no hubiera sido posible la realización del mismo. Ha sido un honor haberle tenido de profesor.

En segundo lugar, quiero expresar mi agradecimiento a mi familia, en especial a mi madre Iluminada, a mi padre Santiago y a mis hermanos Ana y Borja quienes siempre han estado ahí, ofreciendo su apoyo incondicional tanto en los buenos como en los malos momentos, y sin los que no hubiera podido superar los retos y dificultades que me he ido encontrando a lo largo del camino y, más especialmente, en este último curso.

En tercer lugar, también quiero agradecer el apoyo recibido por parte de mis amigos incondicionales Lleir y David, quienes siempre ha estado ahí para escucharme, apoyarme y hacerme ver el vaso medio lleno cuando está vacío.

En cuarto lugar, y sin embargo más importante, quiero agradecer a mi novia Lorena todo el tiempo que me ha dedicado durante estos últimos años, los buenos momentos que me ha hecho disfrutar y su apoyo y ayuda día a día que hace que mi vida sea mucho mejor.

Finalmente, agradezco y dedico este trabajo a Dios, por haberme dado la sabiduría y las fuerzas para llevarlo a cabo, por haberme hecho sentir acompañado en los momentos de soledad y porque creer en Él es lo que me hace luchar y ser mejor persona cada día.



Índice

Resumen.....	v
Abstract	vii
Agradecimientos.....	ix
Índice	xi
Lista de Figuras	xiii
Lista de Tablas	xvii
Lista de símbolos.....	xix
Introducción	xxi
<i>Antecedentes.....</i>	xxi
<i>Objetivos.....</i>	xxii
<i>Estructura</i>	xxiii
Ecuaciones de la dinámica de fluidos	1
1.1. <i>Descripción del movimiento fluido</i>	1
1.2. <i>Sistema de coordenadas.....</i>	2
1.3. <i>Líneas de trayectoria, de traza y de corriente.....</i>	2
1.4. <i>Forma integral de las ecuaciones fluido-dinámicas</i>	2
1.5. <i>Forma diferencial de las ecuaciones fluido-dinámicas.....</i>	4
Flujo incompresible no viscoso.....	7
2.1. <i>Velocidad angular, vorticidad y circulación.....</i>	7
2.2. <i>Tasa de variación de la vorticidad</i>	9
2.3. <i>Tasa de variación de la circulación. Teorema de Kelvin</i>	9
2.4. <i>Flujo irrotacional y potencial de velocidades. Ecuación de Laplace.....</i>	10
2.4.1. <i>Condición en la frontera y en el infinito</i>	11
2.5. <i>Ecuación de Bernoulli para la presión</i>	12
2.6. <i>Regiones simples y múltiples conectadas</i>	13
2.7. <i>Unicidad de la solución</i>	15
2.8. <i>Torbellinos</i>	17
2.9. <i>Torbellinos bidimensionales</i>	20
2.10. <i>Ley de Biot-Savart</i>	21
2.11. <i>Velocidad inducida por un segmento recto de torbellino</i>	23
2.12. <i>Resolución de la ecuación de Laplace mediante soluciones elementales</i>	24
2.12.1. <i>Principio de superposición.....</i>	25
2.12.2. <i>Torbellino discreto para el caso bidimensional</i>	25
2.12.3. <i>Anillos de torbellino para el caso tridimensional</i>	27
Solución para el caso bidimensional estacionario.....	31
3.1. <i>Introducción al problema</i>	31
3.1.1. <i>Condición de contorno</i>	32
3.2. <i>Solución numérica.....</i>	34
3.2.1. <i>Algoritmo numérico para el caso bidimensional estacionario</i>	35
3.2.2. <i>Validación del código numérico</i>	39
3.2.2.1. <i>Perfil delgado sin curvatura con ángulo de ataque</i>	39
3.2.2.2. <i>Perfil delgado con pequeña curvatura de tipo parabólica</i>	41
Solución para el caso bidimensional no estacionario	45
4.1. <i>Fundamentos del flujo incompresible no estacionario</i>	45
4.1.1. <i>Formulación del problema y elección de coordenadas.....</i>	46
4.1.2. <i>Condiciones físicas adicionales</i>	50
4.1.3. <i>Cálculo de las presiones</i>	50
4.2. <i>Algoritmo numérico para el caso bidimensional no estacionario.....</i>	51
4.3. <i>Soluciones analíticas cerradas para el caso bidimensional no estacionario</i>	57
4.3.1. <i>Cambio instantáneo en el ángulo de ataque. Función de Wagner</i>	58
4.3.2. <i>Perfil oscilante con desplazamiento vertical. Función de Theodorsen.....</i>	59



4.3.3. Perfil entrando en una ráfaga. Función de Küssner	60
4.4. <i>Validación del código numérico</i>	61
Solución para el caso tridimensional no estacionario	67
5.1. <i>Unsteady Vortex-Lattice Method</i>	67
5.2. <i>Validación del código numérico.....</i>	75
5.2.1. Aceleración repentina de un ala rectangular sin curvatura en vuelo velocidad constante 76	
5.2.2. Movimiento oscilante de un ala rectangular con desplazamiento vertical.....	77
5.2.3. Analogía con el caso tridimensional estacionario.....	78
5.3. <i>Estudio de diversas configuraciones alares.....</i>	79
5.3.1. Influencia del estrechamiento del ala	79
5.3.2. Influencia de la flecha en el ala	81
Acoplamiento aeroelástico y flameo en un ala	87
6.1. <i>Acoplamiento aeroelástico</i>	87
6.1.1. Formulación en el dominio de la frecuencia	87
6.1.2. Formulación en el dominio del tiempo.....	103
6.2. <i>Caso práctico del flameo aeroelástico para un ala</i>	106
6.2.1. Etapas de la resolución.....	106
6.2.2. Solución del código.....	107
Herramienta de análisis <i>FVortexAero 1.0</i>.....	119
7.1. <i>Estructura principal de la interfaz</i>	119
7.2. <i>Interfaz del módulo “Aceleración repentina de la corriente en el ala”.....</i>	120
7.3. <i>Interfaz del módulo “Movimiento oscilante con desplazamiento vertical”</i>	125
7.4. <i>Interfaz del módulo “Flameo en un ala”</i>	127
Presupuesto	135
8.1. <i>Presupuesto inicial</i>	135
8.1.1. Coste de personal.....	135
8.1.2. Coste de equipo y software.....	136
8.1.3. Coste total del proyecto	136
8.2. <i>Presupuesto final</i>	136
8.2.1. Coste de personal.....	137
8.2.2. Coste de equipo y software.....	137
8.2.3. Coste total del proyecto	137
8.3. <i>Equipo y software utilizado.....</i>	138
8.3.1. PC portátil.....	138
8.3.2. Matlab.....	138
8.3.3. SolidWorks	138
8.3.4. Office 365 Enterprise Premium	138
Línea del tiempo	139
Conclusiones, aportaciones y desarrollo futuro	141
10.1. <i>Conclusiones</i>	141
10.2. <i>Aportaciones</i>	142
10.3. <i>Desarrollo futuro</i>	143
Referencias	145
Código para el caso bidimensional estacionario.....	149
Código para el caso bidimensional no estacionario	151
Código para el caso tridimensional no estacionario (UVLM).....	163
Código aeroelástico del flameo	175
Diagrama de flujo del UVLM.....	195

Listado de Figuras

Figura 1.1. Volumen de control en el fluido.....	3
Figura 1.2. Velocidad tangencial y normal cerca de los límites del sólido.....	6
Figura 2.1. Relación entre superficie e integral de línea.....	8
Figura 2.2. Circulación en un perfil en movimiento.....	10
Figura 2.3. Flujo exterior a un perfil en una región conectada de forma “doble”	14
Figura 2.4. Línea de integración a lo largo de una región conectada de forma simple.	15
Figura 2.5. Región exterior conectada de forma “doble” al perfil	17
Figura 2.6. Línea de torbellino.....	18
Figura 2.7. Tubo de torbellinos.....	19
Figura 2.8. Campo de flujo bidimensional alrededor de un cilindro en rotación.....	21
Figura 2.9. Velocidad en el punto P debida a una distribución de torbellinos	22
Figura 2.10. Velocidad inducida por un segmento de torbellino	24
Figura 2.11. Ángulos para el cálculo de la velocidad inducida.....	24
Figura 2.12. Distribución de torbellinos discretos	27
Figura 2.13. Distribución de anillos de torbellinos	28
Figura 2.14. Discretización de un ala y de su estela mediante anillos de torbellinos	29
Figura 3.1. Perfil delgado curvado con ángulo de ataque α	31
Figura 3.2. Distribución de torbellinos para el perfil de sustentación delgado.....	34
Figura 3.3. Diagrama de flujo algoritmo bidimensional estacionario	35
Figura 3.4. Discretización de la geometría del perfil.....	36
Figura 3.5. Perfil delgado de placa plana con ángulo de ataque	39
Figura 3.6. Coeficiente de presiones. Perfil sin curvatura, $\alpha = 10^\circ$	39
Figura 3.7. Perfil con curvatura parabólica	40
Figura 3.8. Coeficiente de presiones. Perfil con curvatura, $\alpha = 0^\circ, \epsilon = 0,1c$	41
Figura 3.9. Coeficiente de presiones. Perfil con curvatura, $\alpha = 10^\circ, \epsilon = 0,1c$	41
Figura 4.1. Coordenadas del cuerpo e inerciales	48
Figura 4.2. Discretización del perfil y de la estela.....	52
Figura 4.3. Cambio en la sustentación del perfil debido a un cambio repentino del ángulo de ataque	58
Figura 4.4. Perfil oscilante con desplazamiento vertical	59
Figura 4.5. Perfil entrando en una ráfaga	61
Figura 4.6. Salto del ángulo de ataque $\Delta\alpha=5^\circ$	62
Figura 4.7. Salto del ángulo de ataque $\Delta\alpha=10^\circ$	62
Figura 4.8. Perfil oscilando para frecuencia reducida $\kappa = 0$	64
Figura 4.9. Perfil oscilando para frecuencia reducida $\kappa=0,5$	64
Figura 4.10. Perfil oscilando para frecuencia reducida $\kappa=0,8$	65
Figura 4.11. Perfil entrando en una ráfaga de intensidad $w_0=0,3$	66
Figura 4.12. Perfil entrando en una ráfaga de intensidad de aire $w_0=0,6$	66
Figura 5.1. Superficie de curvatura del ala	68
Figura 5.2. Anillo de torbellino.....	68
Figura 5.3. Discretización del ala y de la estela.....	70
Figura 5.4. Solución obtenida por el código numérico desarrollado. Primera validación....	76
Figura 5.5. Solución disponible en la literatura: Primera validación	77
Figura 5.6. Comparación con la solución bidimensional: Segunda validación	78



Lista de Figuras

Figura 5.7. Comparación con la solución tridimensional estacionaria. Tercera validación.	79
Figura 5.8. Forma en planta de alas con diferentes estrechamientos.....	80
Figura 5.9. Evolución del C_L para AR=3 y diferentes estrechamientos del ala.....	81
Figura 5.10. Evolución del C_L para AR=7 y diferentes estrechamientos del ala.....	82
Figura 5.11. Planta de un ala con ángulo de flecha.....	82
Figura 5.12. Forma en planta de alas con diferentes ángulos de flecha.....	84
Figura 5.13. Evolución del C_L para AR=3, E=1 y diferentes ángulos de flecha	84
Figura 5.14. Efecto del ángulo de flecha en el perfil.....	85
Figura 5.15. Plano de la componente normal de velocidad que ven los perfiles del ala.	85
Figura 6.1. Ala estructural	108
Figura 6.2. Ala aerodinámica	109
Figura 6.3. Forma modal 1 del ala.....	109
Figura 6.4. Forma modal 2 del ala.....	110
Figura 6.5. Forma modal 3 del ala.....	110
Figura 6.6. Forma modal 4 del ala.....	111
Figura 6.7. Forma modal 5 del ala.....	111
Figura 6.8. Forma modal 1 del ala obtenido con FEA.....	112
Figura 6.9. Forma modal 2 del ala obtenido con FEA.....	112
Figura 6.10. Forma modal 3 del ala obtenido con FEA.....	113
Figura 6.11. Forma modal 4 del ala obtenido con FEA.....	113
Figura 6.12. Forma modal 5 del ala obtenido con FEA.....	114
Figura 6.13. Diagrama U-I(λ)	116
Figura 6.14. Diagrama U-R(λ)	116
Figura 6.15. Curva de flameo U- ω_n	116
Figura 6.16. Curva de flameo U- ζ	116
Figura 7.1. Interfaz principal de <i>FVortexAero 1.0</i>	120
Figura 7.2. Interfaz del módulo “ <i>Aceleración repentina de la corriente en el ala</i> ”	121
Figura 7.3. Entradas de la interfaz	121
Figura 7.4. Panel “ <i>Ejecutar</i> ”	122
Figura 7.5. Discretización del ala sin estela	123
Figura 7.6. Discretización del ala con estela	123
Figura 7.7. Panel “ <i>Mostrar Resultados</i> ”	124
Figura 7.8. Ejemplo de cálculo del C_L en la interfaz.....	124
Figura 7.9. Distribución de la sustentación para un instante de tiempo determinado	125
Figura 7.10. Panel “ <i>Guardar Gráficas</i> ”	125
Figura 7.11. Interfaz del módulo “ <i>Movimiento oscilante con desplazamiento vertical</i> ”.....	126
Figura 7.12. Panel “ <i>Entradas</i> ”	126
Figura 7.13. Interfaz principal del módulo “ <i>Flameo en un ala</i> ”	127
Figura 7.14. Panel “ <i>Entradas</i> ”	127
Figura 7.15. Panel “ <i>Entradas</i> ”	129
Figura 7.16. Discretización del ala estructural sin estela	130
Figura 7.17. Discretización del ala aerodinámica con estela	130
Figura 7.18. Panel “ <i>Resultados Modos</i> ”	131
Figura 7.19. Panel “ <i>Gráficas Resultados</i> ”	131
Figura 7.20. Panel “ <i>Resultados de Flameo</i> ”	131
Figura 7.21. Diagrama “U-I(λ)”	132
Figura 7.22. Diagrama “U-R(λ)”	132
Figura 7.23. Panel “ <i>Curvas de Flameo</i> ”	133



Lista de Figuras

Figura 7.24. Panel “*Gráficas de Resultados*”.....133



Lista de Figuras



Listas de Tablas

Tabla 3.1. Resultados del perfil sin curvatura.....	40
Tabla 3.2. Resultados del perfil con curvatura.....	41
Tabla 6.1. Resultados del flameo del ala rectangular en el dominio de la frecuencia	108
Tabla 6.2. Cinco primeras frecuencias naturales de vibración del ala en voladizo	114
Tabla 6.3. Variación de la velocidad y frecuencia de flameo y velocidad de divergencia con el número de paneles (1)	115
Tabla 6.4. Variación de la velocidad y frecuencia de flameo y velocidad de divergencia con el número de paneles (2)	115
Tabla 6.4. Variación de la velocidad y frecuencia de flameo y velocidad de divergencia con el número de paneles (3)	115
Tabla 8.1. Presupuesto inicial - Coste de personal	135
Tabla 8.2. Presupuesto inicial – Costes de equipo y software	136
Tabla 8.3. Presupuesto inicial – Coste total	136
Tabla 8.4. Presupuesto final - Coste de personal.....	137
Tabla 8.5. Presupuesto final – Costes de equipo y software	137
Tabla 8.6. Presupuesto final – Costes totales	138



Lista de símbolos

- Φ : Función de Wagner [-]
 τ : Tiempo adimensional [-]
 U_∞ : Velocidad aerodinámica [m/s]
 c : Cuerda del perfil [m]
 b : Semicuerda del perfil [m]
 ψ : Función de Kussner [-]
 C : Función de Theodorsen [-]
 κ : Frecuencia reducida [-]
 ω : Frecuencia [Hz]
 u : Velocidad eje x [m/s]
 v : Velocidad eje y [m/s]
 w : Velocidad eje z [m/s]
 \mathbf{U} : Vector velocidad [m/s]
 $d\mathbf{l}$: Elemento diferencial línea de corriente [m]
 $m_{c.v.}$: Masa volumen de control [kg]
 ρ : Densidad fluido [kg/m³]
 dV : Diferencial de volumen [m³]
 \mathbf{n} : Vector unitario que apunta hacia afuera del volumen de control [-]
 dS : Diferencial de superficie [m²]
 \mathbf{F} : Fuerzas sobre el volumen de control [Newton]
 μ : Viscosidad dinámica [kg/m · s]
 p : Presión [Newton/m²]
 δ_{ij} : Delta de Kronecker [-]
 U_n : Componente normal de la velocidad [m/s]
 U_t : Componente tangencial de la velocidad [m/s]
 t : tiempo [s]
 ω : Velocidad angular del fluido [rad/s]
 ζ : Vector vorticidad [rad/s]
 Φ : Potencial de velocidades [-]
 U_θ : Velocidad tangencial [m/s]
 r : radio [m]
 η_c : Línea de curvatura media del perfil [-]
 \mathbf{U} : Vector velocidad de corriente de flujo en el infinito [m/s]
 U : Modulo de la corriente del flujo aguas arriba en el infinito [m/s]
 U_∞ : Componente x de U [m/s]
 W_∞ : Componente z de U [m/s]
 $\mathbf{R}_o(t)$: Localización del marco de referencia fijado al cuerpo [m]
 $\Theta(t)$: Orientación instantánea del marco de referencia fijado al cuerpo [rad]
 ϕ, θ, ψ : Ángulos de Euler [rad]
 \mathbf{r} : Vector de posición del marco de referencia del cuerpo [m]
 $\mathbf{\Omega}$: Vector velocidad del marco de referencia del cuerpo [m/s]



Lista de símbolos

- AR : Alargamiento del ala [m]
 α : Ángulo de ataque [rad]
 c_r : Cuerda en el encastre del ala [m]
 c_t : Cuerda en la punta del ala [m]
 E : Estrechamiento alar [–]
 Ψ : Ángulo de flecha del ala [rad]
 Γ : Circulación [m^2/s]
 m_r : Número de modos fuera del plano del ala [–]
 w_m : Formas modales [–]
 r_m : Coordenadas generalizadas en z [–]
 m_w : Número de paneles en la dirección de la cuerda en la estela [–]
 n_v : Número de paneles en la dirección de la envergadura [–]
 m_v : Número de paneles en la dirección de la cuerda en el ala [–]
 A_b : Matriz de coeficientes de influencia aerodinámicos en el ala [–]
 A_w : Matriz de coeficientes de influencia aerodinámicos en la estela [–]
 Γ_b : Vector circulación en el ala [m^2/s]
 Γ_w : Vector circulación en la estela [m^2/s]
 L : Función Lagrangiana [J]
 T : Energía cinética [J]
 U : Energía total elástica [J]
 ρ_m : Densidad del ala [kg/m^3]
 m_m : Masa del ala [kg]
 s : Envergadura del ala
 h : Espesor del ala
 Q : Fuerzas aerodinámicas generalizadas [*Newton*]
 E : Módulo de Young [Pa]
 v : Coeficiente de Poisson [–]
 i : Unidad imaginaria [–]
 I : Matriz identidad [–]
 L : Sustentación [*Newton*]
 C_L : Coeficiente de sustentación [–]
 J : Jacobiano [–]
 det : Determinante [–]
 γ_i : Retardo aerodinámico [–]
 m_x : Número de modos en dirección x [–]
 n_y : Número de modos en dirección y [–]
 w : Matriz de transformación modal [–]

Introducción

Antecedentes

La aeroelasticidad es la ciencia que investiga la interacción entre las fuerzas inerciales, elásticas y aerodinámicas y su estudio es anterior al primer vuelo realizado por el hombre en un avión a motor. Unos días antes de que tuviera lugar el primer vuelo de los hermanos Wright, Samuel Langley trató de convertirse en el primer hombre en volar un avión a motor. Este intento resultó en un fallo estructural del avión, atribuido a la divergencia torsional. Nueve días más tarde, los hermanos Wright utilizaron los efectos aeroelásticos en su exitoso vuelo para controlar su avión [33].

Hoy en día, la aeroelasticidad sigue siendo una parte crucial del diseño de las aeronaves. En el esfuerzo por diseñar aeronaves más eficientes, se ha observado una tendencia hacia aeronaves estructuralmente más flexibles. Esto se debe a un aumento en la relación de aspecto, la utilización de nuevos materiales direccionales y la optimización estructural [34-36]. A su vez, esto puede conducir a una menor separación entre las frecuencias dinámicas estructurales y de vuelo [37], que puede alterar significativamente las facilidades de manejo de la aeronave [38].

Tales alas flexibles podrían abrir posibilidades para el diseño de la ley de control de alivio de carga, lo que puede conducir a reducir la resistencia (drag) significativamente.

Los efectos aeroelásticos no solo afectan a la sencillez de manejo de la aeronave, sino que también producen un aumento de peso. Esto se debe al requisito de evitar el flameo y la divergencia [39]. Dado que esta flexibilidad estructural tiene un efecto significativo en la aeronave, es importante considerarla en las primeras etapas del proceso de diseño. Esto puede aumentar la fiabilidad del proceso [34,40]. Por esta razón se desea tener un marco de diseño capaz de modelar aeronaves teniendo en cuenta la aeroelasticidad.

Con el fin de determinar la aerodinámica en una situación donde la aeroelasticidad es importante, la aerodinámica no estacionaria es necesaria. Esto se debe a que los modelos estacionarios no son capaces de capturar los efectos dependientes del tiempo que se encuentran durante las maniobras rápidas, tras una ráfaga o cuando el análisis del flameo es requerido [30,41]. Con un modelo aerodinámico de este tipo es posible calcular las cargas que actúan sobre el ala del avión.

La aerodinámica no estacionaria tiene como objeto de estudio los fenómenos aerodinámicos variables en el tiempo. Estos fenómenos son importantes cuando se tratan aceleraciones de superficies en el aire, lo cual es el caso de deflexiones en las alas, ráfagas o turbulencias.

Los trabajos en aerodinámica no estacionaria comenzaron a principios del siglo XX. En 1925, Wagner estudió el crecimiento de la estela de vorticidad y la sustentación en un perfil sometido a una aceleración repentina [42], obteniendo la función de Wagner $\Phi(\tau)$, con $\tau = 2U_\infty/c$, el tiempo adimensional. Esta es una de las clásicas expresiones analíticas en el campo de la aerodinámica no estacionaria.



Las otras dos ecuaciones importantes se deben a los trabajos de Theodorsen y Küssner. La función de Küssner $\psi(\tau)$ describe la sustentación de un perfil atravesando una ráfaga de aire ascendente [43]. Theodorsen por su parte, describió la sustentación de un perfil con movimiento oscilante [44], obteniendo la función de Theodorsen $C(\kappa)$, función de un parámetro adimensional κ conocido como la frecuencia reducida $\kappa = \omega c / 2U_\infty$. Este parámetro es muy importante en aerodinámica no estacionaria pues determina la no estacionariedad del flujo. Cuando esta es $\kappa > \mathcal{O}(0.01)$ el flujo debe ser modelado con aerodinámica no estacionaria para obtener resultados precisos [22].

Para diseños preliminares, las funciones de Wagner, Theodorsen y Küssner todavía son usadas [45]. Sin embargo, debido al incremento computacional, las herramientas analíticas están siendo desplazadas por los métodos numéricos. En aerodinámica no estacionaria esto se hace utilizando la teoría de bandas [46], en su mayoría utilizando la teoría de Peters [47,48]. Si bien la teoría de bandas es un método computacionalmente eficiente, tiene el inconveniente de que no predice correctamente los efectos tridimensionales, como los torbellinos de punta de ala [1].

También están en uso actualmente los métodos de flujo potencial como el método de la malla de dobletes (DLM) [49] y el método de la malla de torbellinos no estacionaria (UVLM) [50]. Mientras que el DLM se plantea en el dominio de la frecuencia y está limitado a modelar pequeñas deflexiones en la superficie sustentadora, el UVLM se plantea en el dominio del tiempo y es capaz de modelar superficies de sustentación con grandes deflexiones. Este último se ha utilizado en aerodinámica biológica (ver [51,52]) y cada vez más se utiliza en aerodinámica de las aeronaves [53].

Junto a los métodos potenciales, también los métodos computacionales de dinámica de fluidos (CFD) han sido utilizados en aerodinámica no estacionaria [54]. Si bien estos métodos pueden predecir la aerodinámica no estacionaria con gran precisión en superficies de sustentación arbitrarias, el gasto computacional de estos es demasiado elevado aún como para utilizarlos en etapas preliminares de diseño.

En este trabajo veremos cómo modelar los efectos aeroelásticos presentes en aerodinámica no estacionaria mediante el método de la malla de torbellinos no estacionarios o (UVLM) que si bien no es el utilizado como el estándar en la industria (aún se utiliza más el DLM por ser el primero en implementarse) al estar planteado en el dominio del tiempo y no tener en cuenta los efectos viscosos, el tiempo de cálculo computacional que requiere lo hace el más idóneo para ser utilizado en las primeras fases de diseño aerodinámico.

Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es doble: por un lado, estudiar y calcular la sustentación y las presiones que generan los flujos incompresibles, no viscosos e irrotacionales, tanto estacionarios como no estacionarios en perfiles alas bidimensionales y alas tridimensionales con una geometría dada y unas condiciones de flujo definidas y, por otro lado, estudiar y calcular las condiciones en las que se produce el fenómeno del flameo aeroelástico en alas tridimensionales en voladizo.



Para llevar a cabo esta tarea ha sido necesario programar distintos códigos numéricos capaces de modelar las geometrías de los cuerpos bidimensionales y tridimensionales objetos de estudio, resolver las ecuaciones que gobiernan los flujos que tienen lugar en la aerodinámica de bajas velocidades y calcular las condiciones del flameo aeroelástico resolviendo el acoplamiento fluido-estructura.

Para abordar este problema se ha subdividido el trabajo en varios apartados con el fin de llevar a cabo la resolución del mismo de la forma más eficaz posible:

- Estudiar y analizar los conceptos fundamentales de la dinámica de fluidos y determinar las ecuaciones que describen el movimiento de estos, es decir, las ecuaciones de Navier-Stokes.
- Particularizar las ecuaciones generales que gobiernan la dinámica de los fluidos para determinar las ecuaciones que gobiernan los flujos aerodinámicos de bajas velocidades, es decir la ecuación de Laplace para el potencial de velocidades y la ecuación de Bernoulli para las presiones.
- Presentar las soluciones elementales de los torbellinos y los anillos de torbellino como las herramientas matemáticas esenciales para resolver la ecuación de Laplace y por tanto la sustentación.
- Desarrollar los algoritmos numéricos necesarios para resolver el problema de la sustentación tanto para el caso bidimensional como para el caso tridimensional no estacionario.
- Programar en la plataforma de Matlab y validar los algoritmos numéricos mediante soluciones analíticas disponibles en la literatura o por medio de otras soluciones ya validadas.
- Desarrollar la teoría del acoplamiento aeroelástico para alas tridimensionales y resolver el problema del flameo aeroelástico.
- Programar en la plataforma de Matlab y validar un algoritmo numérico para el cálculo del flameo aeroelástico.
- Desarrollar una interfaz gráfica en la plataforma de Matlab que agrupe los códigos desarrollados en el trabajo y que permita un uso más eficiente e intuitivo de ellos.

Estructura

El desarrollo y la consecución de los objetivos mencionados se ha estructurado en los diferentes capítulos que integran este trabajo. A continuación, se describe brevemente cada uno de ellos.

En el primer capítulo “Ecuaciones de la dinámica de fluidos” se introducen las ecuaciones de la conservación de la masa y la ecuación de momentos y a partir de ellas se derivan las ecuaciones de Navier-Stokes.



En el segundo capítulo “Flujo incompresible no viscoso” se deriva la ecuación de Laplace y se introducen los conceptos de torbellinos bidimensionales y anillos de torbellinos como las soluciones elementales que permitirán obtener la sustentación en perfiles y alas. Además, se enuncia el teorema de Kelvin para flujos incompresibles no estacionarios y se deriva la ecuación de Bernoulli para el cálculo de las presiones.

En el tercer capítulo “Solución para el caso bidimensional estacionario” se presenta un algoritmo numérico para resolver la sustentación de un perfil alar inmerso en un flujo incompresible para el caso de flujo estacionario y se comparan las soluciones obtenidas por el código numérico programado con las soluciones analíticas dadas por el método de Glauert.

En el cuarto capítulo “Solución para el caso bidimensional no estacionario” se presentan los fundamentos de los flujos incompresibles no estacionarios para perfiles y alas y se desarrolla una versión actualizada del algoritmo numérico presentado en el capítulo anterior, pero para flujos no estacionarios. Posteriormente se valida el código numérico programado con las soluciones analíticas cerradas de aerodinámica no estacionaria bidimensional.

En el quinto capítulo “Solución para el caso tridimensional no estacionario” se presenta un algoritmo numérico para resolver la sustentación de un ala en un flujo incompresible no estacionario (UVLM) y se valida el código numérico mediante soluciones ya validadas disponibles en la literatura y mediante analogías con el caso tridimensional estacionario y bidimensional no estacionario. Además, se realiza un estudio acerca de cómo influyen distintos parámetros geométricos del ala en la sustentación de la misma.

En el sexto capítulo “Acoplamiento aeroelástico y flameo en un ala” se desarrollan los fundamentos teóricos del acoplamiento aeroelástico en un ala en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo modelando las cargas aerodinámicas mediante el algoritmo (UVLM) desarrollado en el capítulo anterior. Además, se determina una expresión para la matriz de fuerza aerodinámica generalizada y se resuelve el determinante del flameo. Finalmente se valida el código programado para el acoplamiento aeroelástico y se realiza el estudio de un caso para un ala en voladizo.

En el séptimo capítulo “Herramienta de análisis FVortexAero 1.0” se presenta una interfaz gráfica que surge de la agrupación de los códigos desarrollados en este trabajo y que permite realizar los diferentes estudios aerodinámicos y aeroelásticos desarrollados en este trabajo de una forma sencilla e intuitiva.

En el octavo capítulo “Presupuesto” se estiman los costes económicos (tanto de personal como de equipos y software) que habría supuesto este trabajo si se hubiese tenido que llevar a cabo por una empresa.

En el noveno capítulo “Línea del tiempo” se muestra la secuencia de tareas en el tiempo seguida para poder llevar a cabo este trabajo en el tiempo establecido.

En el décimo capítulo “Conclusiones, Aportaciones y desarrollo futuro” se exponen unas breves conclusiones que se pueden derivar del trabajo realizado, las contribuciones que este trabajo puede aportar a la aerodinámica y las posibles líneas de investigación futuras que podrían seguirse para continuar de una forma natural este trabajo.



Introducción

Finalmente, el trabajo se completa con cinco apéndices en los que se proporciona el código (programado y validado) más relevante tanto por su complejidad como por su utilidad empleado en las distintas fases de este trabajo y un diagrama de flujo del UVLM. En el apéndice A se proporciona el código numérico para resolver el caso bidimensional estacionario. En el apéndice B se proporciona el código numérico para resolver el caso bidimensional no estacionario. En el apéndice C se proporciona el código numérico completo para resolver el caso tridimensional no estacionario. En el apéndice D se proporciona el código para resolver el problema aeroelástico del flameo. Finalmente, en el apéndice E, se proporciona el diagrama de flujo del algoritmo del UVLM.



Introducción



Capítulo 1

Ecuaciones de la dinámica de fluidos

Las ecuaciones diferenciales utilizadas en la resolución de problemas relevantes a bajas velocidades aerodinámicas, son una versión simplificada de las ecuaciones que gobiernan la dinámica de los fluidos. La mayoría de los ingenieros cuando se enfrentan a la búsqueda de una solución a un problema aerodinámico práctico, se encuentran con enormes códigos de computación en lugar de desarrollar modelos analíticos más simples que puedan guiarlos en su análisis.

Por esta razón, es importante comenzar con un breve desarrollo de los principios sobre los que se basan las ecuaciones dinámicas generales de los fluidos y una vez conocidas, estaremos en condiciones de considerar los razonamientos físicos detrás de las suposiciones introducidas para generar versiones simplificadas de las ecuaciones que todavía modelarán de una forma adecuada los fenómenos aerodinámicos que están siendo estudiados. Esto nos permitirá apreciar tanto el poder, como las limitaciones de las técnicas que sean aplicadas en el presente trabajo.

Siguiendo esta línea de trabajo, en este capítulo derivaremos las ecuaciones de la conservación de la masa y la ecuación de momentos, y a partir de estas, veremos cómo es posible reducirlas para obtener las ecuaciones que utilizaremos en el resto del trabajo con el objeto de modelar flujos de interés en aerodinámica de bajas velocidades.

1.1. Descripción del movimiento fluido

El modelo de fluido que estudiaremos será un fluido continuo y las regiones infinitesimales del fluido se denominarán partículas fluidas. El movimiento del fluido puede describirse por dos métodos diferentes. El método lagrangiano y el método euleriano.

El método lagrangiano adopta el punto de vista de la partícula y sigue el movimiento de las partículas individuales. Por su parte, el método euleriano, adopta el punto de vista del campo fluido y proporciona las variables de flujo como funciones de posición en el espacio y en el tiempo.

Mientras que la formulación lagrangiana requiere la evaluación del movimiento de cada una de las partículas fluidas dando lugar a un análisis engorroso por su gran cantidad de información poco útil desde un punto de vista práctico, la formulación euleriana proporciona información sobre las variables fluidas de una forma apropiada desde el punto de vista de las aplicaciones prácticas. Por esta razón, esta segunda formulación es la que se seguirá en el presente trabajo.



1.2. Sistema de coordenadas

El sistema de coordenadas que se utilizará principalmente será el sistema de coordenadas cartesiano debido a que este sistema nos simplificará desde un punto de vista cinemático la solución del problema. Siguiendo el enfoque de vista euleriano, las componentes de la velocidad del fluido en este sistema de coordenadas vendrán dadas por:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z, t) \\ v &= v(x, y, z, t) \\ w &= w(x, y, z, t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.3. Líneas de trayectoria, de traza y de corriente

Normalmente, la descripción gráfica del movimiento de un fluido lleva asociada tres conjuntos de curvas: las líneas de trayectoria, las líneas de traza y las líneas de corriente. Estas pueden definirse como:

- Línea de trayectoria: Es el lugar geométrico de los puntos recorridos por una partícula que viaja en el campo fluido.
- Línea de traza: Línea instantánea cuyos puntos están ocupados por todas las partículas que se originan en un punto específico del campo fluido.
- Línea de corriente: Es una línea de flujo donde el vector velocidad de cada partícula que ocupa un punto en la línea de corriente es tangente a dicha línea de corriente.

Analíticamente, la ecuación de una línea de corriente para un cierto instante de tiempo, en cualquier punto P del fluido, siendo $\mathbf{U} = (u, v, w)$ el vector velocidad y $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz)$ un elemento diferencial de la línea de corriente, puede expresarse en forma diferencial como:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \tag{1.2}$$

En la ecuación (1.2), la velocidad es función de las coordenadas y del tiempo. Para flujos estacionarios, las líneas de corriente son independientes del tiempo, y las líneas de trayectoria, las líneas de traza y las líneas de corriente son idénticas.

1.4. Forma integral de las ecuaciones fluido-dinámicas

Para desarrollar las ecuaciones integrales y diferenciales que describen el movimiento fluido, vamos a investigar diversas propiedades del fluido en un volumen de control estacionario y sumergido en el fluido.

Estas propiedades van a ser: la densidad del fluido, el momento que genera el fluido, la energía del fluido, etc., y cualquier cambio en el tiempo de cada una de ellas para el fluido que fluye a través del volumen de control es la suma de una parte acumulada de la propiedad en el volumen de control y una parte transferida a través de sus fronteras.

En la figura 1.1 podemos ver el volumen de control.

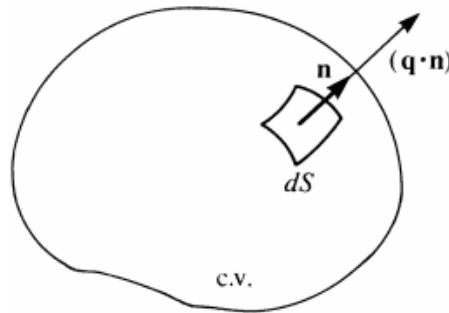


Figura 1.1. Volumen de control en el fluido. Fuente [16].

Podemos analizar, por tanto, la conservación de la masa, observando los cambios en la densidad del fluido ρ en el volumen de control (*c.v.*). La masa contenida en el volumen de control $m_{c.v.}$ es entonces

$$m_{c.v.} = \int_{c.v.} \rho \, dV \quad (1.3)$$

donde dV es el elemento diferencial de volumen. La acumulación de masa dentro del volumen de control es

$$\frac{\partial m_{c.v.}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{c.v.} \rho \, dV \quad (1.4)$$

El cambio en la masa dentro del volumen de control, debido a la salida de masa m_{out} y a la entrada de masa m_{in} a través de las fronteras *c.s.* es:

$$m_{out} - m_{in} = \int_{c.s.} \rho (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) \, dS \quad (1.5)$$

donde \mathbf{U} es el vector velocidad y $\rho(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})$ es la tasa de salida de masa perpendicular al elemento diferencial de superficie dS .

Puesto que existe conservación de masa, y que no se está produciendo masa, entonces la suma de las ecuaciones (1.4) y (1.5) deben ser cero, es decir

$$\frac{\partial m_{c.v.}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{c.v.} \rho \, dV + \int_{c.s.} \rho (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) \, dS = 0 \quad (1.6)$$

La ecuación (1.6) representa en forma integral la conservación de la masa. Simplemente establece que cualquier cambio en la masa del fluido en el volumen de control es igual a la tasa de masa que está siendo transportada a través de las fronteras de la superficie de control (*c.s.*).

De forma similar, la tasa de variación del momento del fluido que fluye a través del volumen de control en cada instante es la suma del momento acumulado por unidad de volumen dentro del volumen de control y del cambio del momento que atraviesa las fronteras de la superficie de control:

$$\frac{d(m\mathbf{U})_{c.v.}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{c.v.} \rho \mathbf{U} dV + \int_{c.s.} \rho \mathbf{U} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (1.7)$$

Este cambio en el momento, dado por la ecuación (1.7) de acuerdo a la segunda ley de Newton, debe ser igual a las fuerzas aplicadas al fluido dentro del volumen de control:

$$\frac{d(m\mathbf{U})_{c.v.}}{dt} = \sum \mathbf{F} \quad (1.8)$$

Las fuerzas que actúan en el volumen de control en la dirección x_i son las fuerzas de cualquier otro cuerpo por unidad de volumen ρf_i o las fuerzas de superficies por unidad de área $n_j \tau_{ij}$:

$$(\sum \mathbf{F})_i = \int_{c.v.} \rho f_i dV + \int_{c.s.} n_j \tau_{ij} dS \quad (1.9)$$

donde \mathbf{n} es el vector unitario que apunta hacia afuera del volumen de control.

Sustituyendo las ecuaciones (1.7) y (1.9) dentro de la ecuación (1.8), obtenemos la forma integral de la ecuación de momento en la dirección i como

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{c.v.} \rho U_i dV + \int_{c.s.} \rho U_i (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{c.v.} \rho f_i dV + \int_{c.s.} n_j \tau_{ij} dS \quad (1.10)$$

Este enfoque puede utilizarse para desarrollar ecuaciones adicionales como la ecuación de la energía. Sin embargo, para los casos que consideraremos en este trabajo, las ecuaciones de masa y momento son suficientes para describir el movimiento fluido.

1.5. Forma diferencial de las ecuaciones fluido-dinámicas

Las ecuaciones (1.6) y (1.10) son las ecuaciones de la conservación de la masa y del momento en su forma integral. Sin embargo, la representación diferencial nos será más útil en nuestro caso.

Según [18], haciendo uso del teorema de la divergencia y de la derivada material, la ecuación de continuidad para un fluido incompresible se reduce a:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.11)$$

Aunque la ecuación de continuidad para un flujo incompresible no tiene derivadas en el tiempo, la dependencia temporal puede introducirse mediante condiciones de frontera dependientes en el tiempo.



De forma similar, podemos obtener la ecuación de momento en su forma diferencial haciendo uso del teorema de la divergencia y de la ecuación de continuidad como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U_i) + \nabla \cdot (\rho U_i \mathbf{U}) = q_i \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{U} \right] + \rho \left[\frac{\partial U_i}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla U_i \right] = \rho \frac{DU_i}{Dt} \quad (1.12)$$

Finalmente, observando que el término $\rho \frac{DU_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$ para $i = 1, 2, 3$, podemos establecer la ecuación de momento para las coordenadas cartesianas como:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \sum F_x = \rho f_x + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \sum F_y = \rho f_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \sum F_z = \rho f_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Ahora, sabiendo que para un fluido Newtoniano las componentes de esfuerzos están relacionados con el campo de velocidades (ver [4]) por medio de la ecuación (1.14)

$$\tau_{ij} = \left(-p - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.14)$$

donde μ es la viscosidad del fluido, p es la presión, k toma valores desde 1 hasta 3 y δ_{ij} es la función de Kronecker definida por

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (1.15)$$

la ecuación (1.13) da lugar a las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla U_i \right) = \rho f_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p + \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{U} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.16)$$

para $i = 1, 2, 3$.

Las condiciones de frontera típicamente para este problema requieren que, en las fronteras de los sólidos estacionarios, las componentes de la velocidad normal y tangencial sean cero (ecuación (1.17)) como se indican en la figura 1.2, es decir,

$$\begin{aligned} U_n &= 0 \\ U_t &= 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

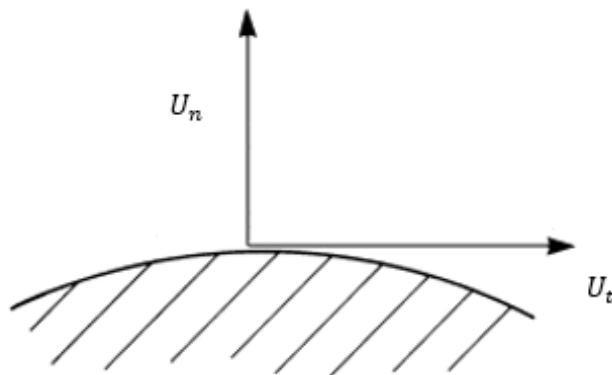


Figura 1.2. Velocidad tangencial y normal cerca de los límites del sólido. Fuente [16]

Asumiendo constante el coeficiente de viscosidad μ y que el fluido es incompresible, ($\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$), la ecuación (1.16) se simplifica a

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} \right) = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{U} \quad (1.18)$$

En el caso de fluido incompresible no viscoso, obtenemos la conocida como ecuación de Euler:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = \mathbf{f} - \frac{\nabla p}{\rho} \quad (1.19)$$

Hasta aquí se han obtenido las ecuaciones fundamentales de la dinámica de los fluidos en su forma diferencial. En el próximo capítulo se particularizarán estas ecuaciones para el caso incompresible, no viscoso e irrotacional, que son las características de los fluidos presentes en aerodinámica de bajas velocidades.



Capítulo 2

Flujo incompresible no viscoso

Una vez introducidas las ecuaciones fundamentales que gobiernan la dinámica de los fluidos, vamos a centrarnos en este segundo capítulo en desarrollar las leyes que rigen los flujos incompresibles y no viscosos, por ser este tipo de flujos los que nos vamos a encontrar en aerodinámica de bajas velocidades.

Enunciadas dichas ecuaciones, se expondrán las herramientas matemáticas que se utilizarán en los próximos capítulos para atacar la resolución de las mismas.

Para ello, se comenzarán estudiando algunos conceptos de la mecánica de fluidos como son la rotación del fluido y mostraremos la relación existente entre esta y la viscosidad. Se desarrollarán matemáticamente los conceptos de velocidad angular, vorticidad y circulación, se enunciará el teorema de Kelvin y se derivará la ecuación que gobierna la velocidad de un flujo no viscoso, incompresible e irrotacional: la ecuación de Laplace.

Se continuará presentando las condiciones de contorno de dicha ecuación diferencial, estudiando la unicidad de la solución y se terminará el capítulo presentando las singularidades de los torbellinos que se utilizarán en los siguientes capítulos para obtener una solución al problema bidimensional y tridimensional de flujos incompresibles sobre perfiles y alas.

2.1. Velocidad angular, vorticidad y circulación

El movimiento arbitrario de un elemento de fluido puede definirse mediante una traslación, una rotación y una deformación.

El vector velocidad angular de un elemento fluido puede describirse como

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{U} \quad (2.1)$$

La vorticidad se define como el doble de la velocidad angular, es decir,

$$\zeta \equiv 2\omega = \nabla \times \mathbf{U} \quad (2.2)$$

y en las tres coordenadas cartesianas, la expresión (2.2) puede expresarse como

$$\begin{aligned} \zeta_x &\equiv 2\omega_x = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \zeta_y &\equiv 2\omega_y = \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \zeta_z &\equiv 2\omega_z = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ahora se va a considerar una superficie abierta S como la que se muestra en la figura 2.1, la cual, tiene una curva cerrada C como frontera. Según la referencia [18], utilizando el teorema de Stokes, la vorticidad en la superficie S puede relacionarse con una integral de línea alrededor de C mediante la expresión

$$\int_S \nabla \times \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \zeta \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{U} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.4)$$

donde \mathbf{n} es perpendicular a S . La integral del lado derecho se llama circulación y se denota por Γ .

El incremento en la circulación $\Delta\Gamma$ se obtiene por la evaluación de la integral de línea cerrada de la componente de velocidad tangencial alrededor del elemento fluido:

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma &\equiv \oint_C \mathbf{U} \cdot d\mathbf{l} = u\Delta x + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y - \left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x - v\Delta y \\ &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y = \int_S \zeta_z dS \end{aligned} \quad (2.5)$$

Generalizando para tres dimensiones, estas conclusiones pueden resumirse en la ecuación

$$\Gamma \equiv \oint_C \mathbf{U} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \zeta \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.6)$$

Se puede ver que, de alguna manera, la circulación está relacionada con la rotación del fluido. En el caso de que $\nabla \times \mathbf{U} \neq 0$ el flujo será rotacional. Si por el contrario este producto vectorial es cero, el flujo será irrotacional.

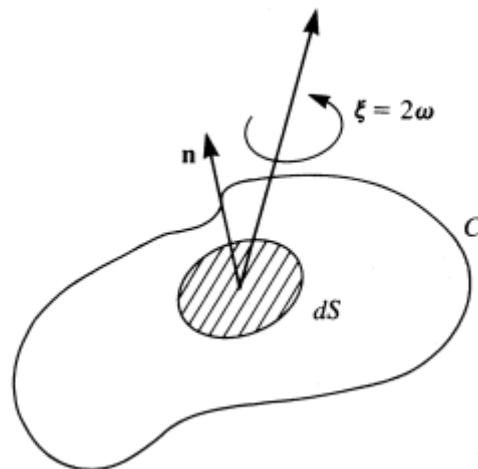


Figura 2.1. Relación entre superficie e integral de línea. Fuente [16]



2.2. Tasa de variación de la vorticidad

Para obtener una ecuación que gobierne la tasa de variación de la vorticidad de un elemento de fluido, vamos a partir de las ecuaciones incompresibles de Navier-Stokes en coordenadas cartesianas, es decir, de la ecuación (1.18)

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} \right) = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{U} \quad (1.18)$$

El término de aceleración convectiva se puede reescribir utilizando el vector identidad

$$\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = \nabla \frac{U^2}{2} - \mathbf{U} \times \boldsymbol{\zeta} \quad (2.7)$$

Combinando ahora la ecuación (1.18) y la ecuación (2.7), utilizando la ecuación de continuidad y asumiendo que la fuerza que actúa sobre el cuerpo es conservativa (irrotacional, como la gravedad), la ecuación de tasa de cambio de vorticidad se transforma en:

$$\frac{D\boldsymbol{\zeta}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla \mathbf{U} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\zeta} \quad (2.8)$$

La versión para fluido incompresible no viscoso de la ecuación de transporte de la vorticidad es entonces:

$$\frac{D\boldsymbol{\zeta}}{Dt} = \boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla \mathbf{U} \quad (2.9)$$

2.3. Tasa de variación de la circulación. Teorema de Kelvin

Se va a considerar ahora la circulación alrededor de una curva de fluido (que siempre pasa a través de las mismas partículas de fluido) en un flujo incompresible no viscoso con fuerzas conservativas actuando. La tasa de velocidad de cambio de la circulación de esta curva de fluido C viene dada por:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint_C \mathbf{U} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{D\mathbf{U}}{Dt} \cdot d\mathbf{l} + \oint_C \mathbf{U} \cdot \frac{D}{Dt} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.10)$$

Como C es una curva de fluido, tendremos que $\frac{D\mathbf{U}}{Dt} = \mathbf{a}$ y que $\frac{D}{Dt} \cdot d\mathbf{l} = d\mathbf{U}$. Además, $\oint_C \mathbf{U} \cdot d\mathbf{U} = 0$. Teniendo todo esto en cuenta, y combinando la ecuación (2.10) con la ecuación (1.19), concluimos que la circulación de una curva fluida permanece constante:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 = \oint_C d \left(\frac{p}{\rho} \right) + \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.11)$$

El resultado de la ecuación (2.11) es una forma de conservación del momento angular y se conoce como teorema de Kelvin. Este teorema establece que la variación temporal de la circulación a lo largo de una curva cerrada de los mismos elementos de fluido es cero.

Supongamos por ejemplo que un perfil como el de la figura 2.2 que se encuentra en reposo en $t = 0$ y se impone un movimiento uniforme repentinamente para $t > 0$. A medida que el perfil se mueve a través del fluido se genera una circulación alrededor del mismo Γ_{perfil} . Para que se cumpla el teorema de Kelvin, un torbellino inicial Γ_{estela} debe existir de forma que la circulación total de una línea que rodea tanto el perfil aerodinámico como la estela permanezca sin cambios:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{1}{\Delta t} (\Gamma_{perfil} + \Gamma_{estela}) = 0 \quad (2.12)$$

Esto sólo es posible si la circulación del torbellino de partida es igual a la circulación del perfil, pero con rotación en la dirección opuesta.



Figura 2.2. Circulación en un perfil en movimiento. Fuente [16]

2.4. Flujo irrotacional y potencial de velocidades. Ecuación de Laplace

Consideremos la siguiente integral de línea en una región simplemente conectada a lo largo de la línea C :

$$\oint_C \mathbf{U} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C u \, dx + v \, dy + w \, dz \quad (2.13)$$

Si el flujo es irrotacional en esta región, $u \, dx + v \, dy + w \, dz$ es una diferencial exacta (según [19]) de un potencial Φ que es independiente del camino de integración C y es una función de localización del punto $P(x, y, z)$:

$$\Phi(x, y, z) = \int_{P_0}^P u \, dx + v \, dy + w \, dz \quad (2.14)$$

donde P_0 es un punto de referencia arbitrario.



Φ es conocido como el potencial de velocidades y la velocidad en cada punto puede obtenerse como su gradiente:

$$\mathbf{U} = \nabla\Phi \quad (2.15)$$

Sustituyendo la ecuación (2.15) dentro de la ecuación de continuidad (1.11) obtenemos la siguiente ecuación diferencial para la velocidad potencial:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \nabla \cdot \nabla\Phi = \nabla^2\Phi = 0 \quad (2.16)$$

Esta ecuación se conoce como ecuación de Laplace. Es un enunciado de la ecuación de continuidad para un fluido incompresible e irrotacional.

Dado que la viscosidad del fluido se ha despreciado, la condición de contorno establece que la componente normal de la velocidad relativa entre el fluido y la superficie sólida (la cual puede tener una velocidad \mathbf{U}_B) es cero en la frontera:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{U} - \mathbf{U}_B) = 0 \quad (2.17)$$

Para un flujo irrotacional, no viscoso e incompresible, este desarrollo demuestra que el campo de velocidades puede obtenerse a partir de la solución de la ecuación de Laplace para el potencial de velocidades. Una vez obtenido el campo de velocidades, será necesario obtener la distribución de presiones en la superficie del cuerpo para calcular las fuerzas y momentos aerodinámicos.

2.4.1. Condición en la frontera y en el infinito

La ecuación de Laplace para el potencial de velocidades es la ecuación diferencial que gobierna la velocidad de un flujo no viscoso, incompresible e irrotacional. Es una ecuación elíptica que da como resultado un problema de valor de frontera.

Para los problemas aerodinámicos, las condiciones de frontera deben especificarse en todas las superficies sólidas y en el infinito. Una forma de condición de frontera en una interfaz sólido-fluido viene dada por la ecuación (2.17). Otro enunciado de esta condición de frontera que será útil desde un punto de vista práctico se obtiene mediante el siguiente razonamiento:

Sea la superficie del sólido definida en coordenadas cartesianas mediante

$$F(x, y, z, t) = 0 \quad (2.18)$$

Las partículas de la superficie se mueven con velocidad \mathbf{U}_B de forma que F sigue siendo cero. Por lo tanto, la derivada de F debe ser cero:

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_B F \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{U}_B \cdot \nabla F = 0 \quad (2.19)$$

La ecuación (2.19) puede reescribirse como:

$$\mathbf{U} \cdot \nabla F = \mathbf{U}_B \cdot \nabla F \quad (2.20)$$

Puesto que la normal a la superficie \mathbf{n} es proporcional al gradiente de F ,

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \quad (2.21)$$

Sustituyendo ahora la ecuación (2.20) en la ecuación (2.21) la condición de contorno se transforma en:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla F = \frac{DF}{Dt} = 0 \quad (2.22)$$

En el infinito, la perturbación \mathbf{U} debida al cuerpo que se mueve a través del fluido que inicialmente se encontraba en reposo decía a cero. En un marco de referencia fijo en el espacio, la velocidad de dicho fluido (en reposo) es por lo tanto cero en el infinito (lejos de las fronteras sólidas del cuerpo):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{U} = 0 \quad (2.23)$$

2.5. Ecuación de Bernoulli para la presión

La ecuación de Euler incompresible (1.19) puede reescribirse utilizando la ecuación (2.7) como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \mathbf{U} \times \boldsymbol{\zeta} + \nabla \frac{U^2}{2} = \mathbf{f} - \nabla \frac{p}{\rho} \quad (2.24)$$

Para un fluido irrotacional ($\boldsymbol{\zeta} = 0$) la derivada temporal de la velocidad puede escribirse como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi = \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (2.25)$$

Vamos a asumir que la fuerza del cuerpo es conservativa con un potencial E de forma que:

$$\mathbf{f} = -\nabla E \quad (2.26)$$

Si la gravedad es la fuerza que actúa sobre el cuerpo y el eje z apunta hacia arriba, entonces $E = gz$.

La ecuación de Euler para flujo incompresible e irrotacional con una fuerza de cuerpo conservativa se puede obtener sustituyendo las ecuaciones (2.25) y (2.26) en la ecuación (2.24):

$$\nabla \left(E + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.27)$$

Esta ecuación es sólo válida si la cantidad entre paréntesis es función del tiempo, es decir,

$$E + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = C(t) \quad (2.28)$$

Esta es la ecuación de Bernoulli para flujo no viscoso, incompresible e irrotacional. Una forma más práctica de esta ecuación puede obtenerse comparando las cantidades de la izquierda de la ecuación (2.28) en dos puntos del fluido; el primero es un punto arbitrario y el segundo es un punto de referencia situado en el infinito. La ecuación se convierte en:

$$\left[E + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] = E + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\infty} \quad (2.29)$$

Si la condición de referencia se elige de forma que $E_{\infty} = 0$, $\Phi_{\infty} = \text{const.}$, y $\mathbf{U}_{\infty} = 0$, entonces la presión p en cualquier punto del fluido puede calcularse a partir de la expresión:

$$\frac{p_{\infty} - p}{\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + E + \frac{U^2}{2} \quad (2.30)$$

2.6. Regiones simples y múltiples conectadas

La región exterior de un perfil aerodinámico bidimensional y ese perfil exterior a un ala o cuerpo tridimensional son fundamentalmente diferentes en un sentido matemático y conducen a potenciales de velocidades con propiedades diferentes. Para mostrar esta diferencia debemos introducir algunas definiciones.

Una curva reducible en una región se puede contraer a un punto sin salirse de la región. Por ejemplo, en un perfil aerodinámico, cualquier curva que rodee al perfil no es reducible y cualquier curva que no lo rodee sí que lo es.

Una región conectada de forma “simple” es aquella donde todas las curvas cerradas son reducibles (como por ejemplo la región exterior a un cuerpo tridimensional). Cualquier curva que rodea al cuerpo puede separarse de este y luego contraerse.

Una barrera es una región que se inserta en una región, pero no es parte de la región modificada resultante. La inserción de barreras en una región puede hacer que esta cambie de estar conectada de forma “múltiple” a estarlo de forma “simple”.

El grado de conectividad de una región es $n + 1$ donde n es el número mínimo de barreras necesarias para hacer que la región restante esté conectada de forma “simple”.

Consideremos por ejemplo la región exterior al perfil aerodinámico de la figura 2.3. Si dibujamos una barrera desde el borde de fuga hasta la corriente aguas abajo en el infinito, la región original menos la barrera está ahora conectada de forma “simple”: Por lo tanto, $n = 1$ y la región original está conectada de forma “doble”.



Figura 2.3. Flujo exterior a un perfil en una región conectada de forma “doble”. Fuente [16].

Consideremos el movimiento irrotacional en una región conectada de forma “simple”. La circulación alrededor de cualquier curva vendrá dada por:

$$\Gamma = \oint \mathbf{U} \cdot d\mathbf{l} = \oint \nabla \Phi \cdot d\mathbf{l} = \oint d\Phi \quad (2.31)$$

Usando la ecuación (2.6) y $\zeta = 0$ vemos que la circulación es cero. También, como la integral de $d\Phi$ alrededor de cualquier curva es cero (2.31) el potencial de velocidad tiene valor único.

Ahora consideraremos el movimiento irrotacional en la región exterior conectada de forma “doble” a un perfil aerodinámico, como se muestra en la figura 2.4.

Para cualquier curva que no rodee al perfil aerodinámico, se aplican los resultados anteriores para la región conectada de forma “simple” y la circulación es cero.

Ahora insertemos una barrera como se muestra en la figura. Consideremos una curva que consiste en C_1 y C_2 , que rodea al perfil aerodinámico y los dos lados de la barrera. Como la región que excluye la barrera está conectada de forma “simple” la circulación alrededor de esta curva es cero. Esto se traduce en la expresión:

$$\oint_{C_1} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{l} - \oint_{C_2} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{l} + \int_A^B \mathbf{U} \cdot d\mathbf{l} + \int_B^A \mathbf{U} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (2.32)$$

El primer término es la circulación alrededor de C_1 y el segundo término es la circulación alrededor de C_2 . Además, las contribuciones de la barrera se cancelan si el flujo es estacionario (ya que la barrera no puede estar a lo largo de una lámina de torbellino). La circulación alrededor de las curvas C_1 y C_2 (y cualquier otra curva que rodee al perfil aerodinámico una vez) son las mismas y pueden ser distintas de cero. Podemos ver a partir de la ecuación (2.32), que el potencial de velocidades no toma un valor único si hay circulación distinta de cero.

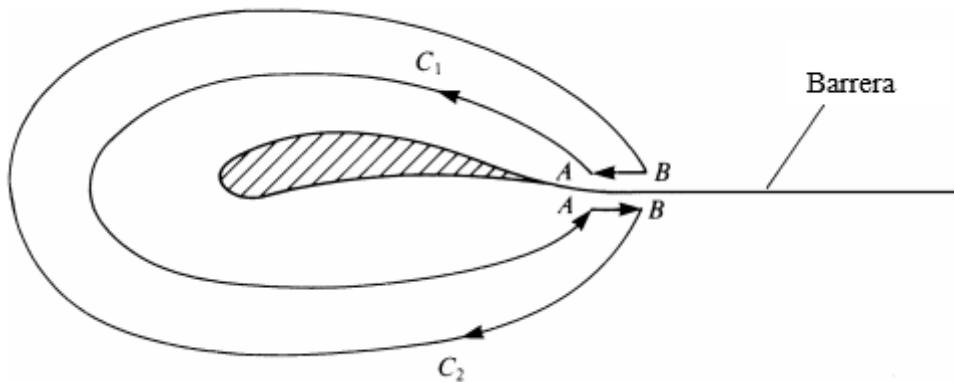


Figura 2.4. Línea de integración a lo largo de una región conectada de forma simple. Fuente [16]

2.7. Unicidad de la solución

El problema físico de encontrar un campo de velocidades para el flujo generado, por ejemplo, por el movimiento de un perfil o de un ala, se ha reducido al problema matemático de resolver la ecuación de Laplace para el potencial de velocidades con las condiciones de contorno adecuadas para la velocidad en el cuerpo y en el infinito.

En un marco de referencia fijo en el espacio, este problema matemático es:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_B \quad \text{en el cuerpo} \\ \nabla \Phi &\rightarrow 0 \quad \text{en } r \rightarrow \infty \end{aligned} \tag{2.33}$$

Como la condición de contorno en el cuerpo está en la derivada del potencial con respecto a la normal y dado que el flujo está en la región exterior del cuerpo, el problema matemático de la ecuación (2.33) se conoce como problema exterior de Neumann. Debemos ahora determinar si existe alguna solución única para este problema.

Consideraremos primeramente el caso de una región conectada de manera “simple”. Esto será aplicable a la región exterior a un cuerpo tridimensional, pero se debe tener cuidado al extender los resultados de perfiles a alas debido a que el campo fluido no es irrotacional en todas partes (por ejemplo, en la estela). Supongamos inicialmente que hay dos soluciones Φ_1 y Φ_2 para el problema matemático de la ecuación (2.33). Entonces

$$\Phi_1 - \Phi_2 \equiv \Phi_D \tag{2.34}$$

satisface la ecuación (2.33).

Una forma del teorema de Green se obtiene aplicando el teorema de la divergencia a la función $\Phi \nabla \Phi$, donde Φ es una solución de la ecuación de Laplace, R es la región fluida y S es la frontera.



El resultado es:

$$\int_R \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi dV = \int_S \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS \quad (2.35)$$

Ahora, aplicando la ecuación (2.35) a Φ_D para la región R entre el cuerpo B y una superficie arbitraria Σ que rodea B obtenemos:

$$\int_R \nabla \Phi_D \cdot \nabla \Phi_D dV = \int_B \Phi_D \frac{\partial \Phi_D}{\partial n} dS + \int_{\Sigma} \Phi_D \frac{\partial \Phi_D}{\partial n} dS \quad (2.36)$$

Si dejamos que Σ llegue al infinito la integral sobre Σ desaparece y como $\partial \phi_D / \partial n = 0$ en B , llegamos a:

$$\int_R \nabla \Phi_D \cdot \nabla \Phi_D dV = 0 \quad (2.37)$$

Como el integrando siempre es mayor o igual que cero, debe ser cero, y en consecuencia, la diferencia $\Phi_1 - \Phi_2$ puede ser como máximo una constante. Por lo tanto, la solución al problema exterior de Neumann en una región conectada de forma “simple” es única.

Ahora consideremos la región exterior conectada de forma “doble” al perfil C de la figura 2.5. De nuevo permitamos a Φ_1 y a Φ_2 ser soluciones para el problema matemático de la ecuación (2.33) y tomemos $\Phi_D = \Phi_1 - \Phi_2$.

El teorema de Green es aplicado ahora a la función Φ_D en la región σ entre el perfil C y la curva Σ . Insertemos una barrera b de unión de C y Σ . La ecuación (2.35) se transforma en la ecuación (2.38) si tenemos en cuenta que la integral alrededor de C es cero debido a la condición de frontera y que en el infinito la integral alrededor de Σ también es cero llegamos a que:

$$\int_{\sigma} \nabla \Phi_D \cdot \nabla \Phi_D dV = \int_{b^-} \Phi_D^- \frac{\partial \Phi_D^-}{\partial n} dS - \int_{b^+} \Phi_D^+ \frac{\partial \Phi_D^+}{\partial n} dS \quad (2.38)$$

Teniendo en cuenta que la derivada de Φ_D es continua a través de la barrera y reintroduciendo los términos Φ_1 y Φ_2 , la ecuación (2.38) se transforma en:

$$\int_{\sigma} \nabla \Phi_D \cdot \nabla \Phi_D dV = \int_{barrera} (\Phi_1^- - \Phi_1^+ + \Phi_2^+ - \Phi_2^-) \frac{\partial \Phi_D^-}{\partial n} dS \quad (2.39)$$

Viendo que las circulaciones asociadas con los flujos 1 y 2 son constantes y vienen dados por $\Gamma_1 = \Phi_1^+ - \Phi_1^-$ y por $\Gamma_2 = \Phi_2^+ - \Phi_2^-$, la ecuación (2.38) puede escribirse finalmente como:

$$\int_{\sigma} \nabla \Phi_D \cdot \nabla \Phi_D dV = (\Gamma_2 - \Gamma_1) \int_{barrera} \frac{\partial \Phi_D^-}{\partial n} dS \quad (2.40)$$

Dado que en general no podemos exigir que la integral a lo largo de la barrera sea cero, la solución al problema exterior de Neumann sólo se determina como una constante cuando $\Gamma_1 = \Gamma_2$ (cuando la circulación se especifica como parte del enunciado del problema). Este resultado puede generalizarse para múltiples regiones conectadas de forma similar. El valor de la circulación no se puede especificar mediante razones puramente matemáticas, pero se determinará más adelante en base a consideraciones físicas.

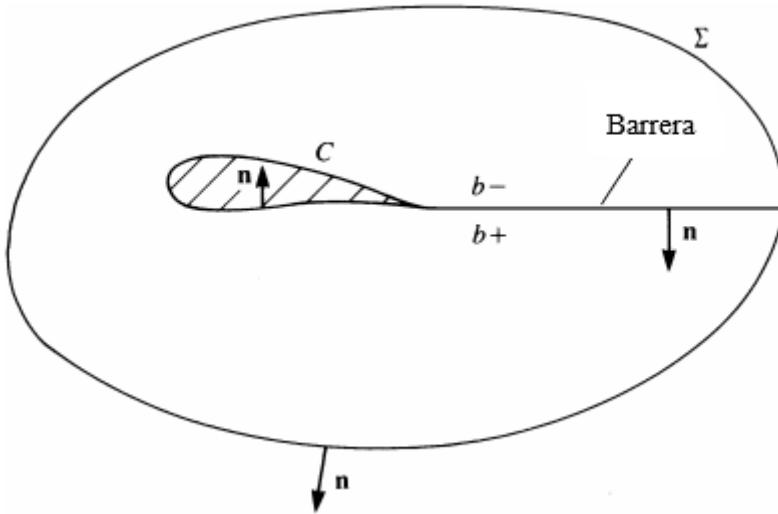


Figura 2.5. Región exterior conectada de forma “doble” al perfil. Fuente [16]

2.8. Torbellinos

Junto con el vector velocidad podemos definir diversas “cantidades”, como las líneas de corriente, tubos de corriente y superficies de flujo. Las cantidades correspondientes pueden definirse para el vector vorticidad y estas resultarán útiles más adelante para modelar los flujos de sustentación. Las líneas de campo (por ejemplo, las de la figura 2.6) paralelas al vector vorticidad son llamadas líneas de vórtices (o líneas de torbellino) y son descritas por:

$$\zeta \times d\mathbf{l} = 0 \quad (2.41)$$

donde $d\mathbf{l}$ es el segmento a lo largo de la línea de torbellino (como se muestra en la figura 2.6). En coordenadas cartesianas, esta ecuación proporciona las ecuaciones diferenciales de las líneas de torbellinos:

$$\frac{dx}{\zeta_x} = \frac{dy}{\zeta_y} = \frac{dz}{\zeta_z} \quad (2.42)$$

Las líneas de torbellino que pasan a través de una curva abierta en el espacio forman una superficie de torbellino y las líneas que pasan a través de una curva cerrada en el espacio forman un tubo de torbellino.

Un filamento de torbellino se define como un tubo de torbellino de sección de área transversal infinitesimal. La divergencia de la vorticidad es cero debido a que la divergencia del rotacional de cualquier vector es cero.

$$\nabla \cdot \zeta = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{U} = 0 \quad (2.43)$$

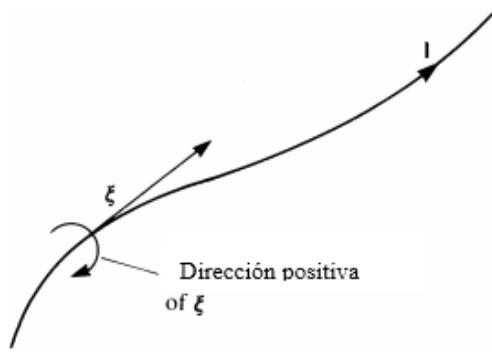


Figura 2.6. Línea de torbellino. Fuente [16]

Considerando en cualquier instante una región del espacio R encerrado por una superficie S , una aplicación del teorema de la divergencia postula que:

$$\int_S \zeta \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \nabla \cdot \zeta dV = 0 \quad (2.44)$$

Aplicando la ecuación (2.44) al tubo de torbellinos como el de la figura 2.7, (región encerrada por la superficie lateral del tubo S_w y las superficies S_1 y S_2), debido a que en S_w la vorticidad es paralela a la superficie, se anula dando lugar a

$$\int_S \zeta \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \zeta \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \zeta \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (2.45)$$

Si denotamos como \mathbf{n}_v al vector normal \mathbf{n} en la dirección positiva de la vorticidad, entonces la ecuación (2.47) se convierte en

$$\int_{S_1} \zeta \cdot \mathbf{n}_v dS + \int_{S_2} \zeta \cdot \mathbf{n}_v dS = const. \quad (2.46)$$

En cada instante temporal, la cantidad de la ecuación (2.46) es la misma para cualquier superficie transversal del tubo. Sea C cualquier curva cerrada que rodea el tubo y se encuentra en su pared. La circulación alrededor de C viene dada por la ecuación (2.6) como:

$$\Gamma_C = \int_S \zeta \cdot \mathbf{n}_v dS = const. \quad (2.47)$$

y se ve que es constante a lo largo del tubo. El resultado de las ecuaciones (2.46) y (2.47) expresa la conservación espacial de la vorticidad y son puramente cinemáticas.

Si la ecuación (2.47) se aplica a un filamento de torbellino y \mathbf{n}_v se elige paralelo al vector vorticidad, entonces:

$$\Gamma_c = \zeta dS = \text{const.} \quad (2.48)$$

y la vorticidad en cualquier sección de un filamento de torbellino se ve que es inversamente proporcional a su sección transversal de área. Una consecuencia de este resultado es que un filamento de torbellino no puede terminar en el fluido ya que un área de valor cero daría lugar a una vorticidad de valor infinito. Este caso límite, sin embargo, es útil para el modelado, y, por tanto, es conveniente definir un filamento de torbellino con una circulación fija, área de sección transversal cero y vorticidad infinita como un filamento de torbellino con vorticidad concentrada.

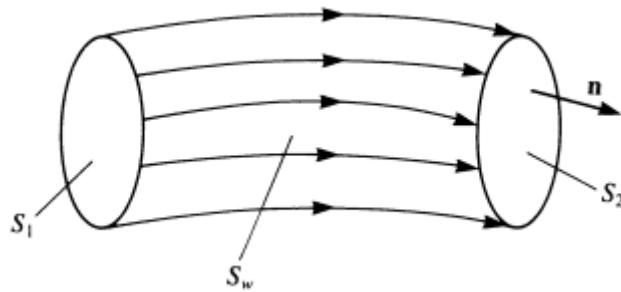


Figura 2.7. Tubo de torbellinos. Fuente [16]

Basándose en resultados a los enunciados, el alemán Hermann von Helmholtz desarrolló sus teoremas de torbellinos para flujos incompresible y no viscosos que se pueden resumir en los tres enunciados siguientes:

1. La circulación de un filamento de torbellino es constante a lo largo de su longitud.
2. Un filamento de torbellino no puede empezar o terminar en un fluido (debe formar un camino cerrado o extenderse hasta el infinito).
3. El fluido que forma un tubo de torbellinos continúa formando un tubo de torbellinos y la circulación del tubo de torbellinos permanece constante a medida que el tubo se mueve (por lo tanto, tanto los elementos del torbellino, como las líneas de torbellinos, los tubos de torbellinos, las superficies de torbellinos, etc. permanecen como elementos de torbellinos en el tiempo).

El primer teorema está basado en la ecuación (2.48) mientras que el segundo teorema se deriva de este. El tercer teorema, es en realidad, una combinación de los teoremas tercero y cuarto de Helmholtz y es una consecuencia de la ecuación de transporte de vorticidad no viscosa (2.9).

2.9. Torbellinos bidimensionales

Para ilustrar un campo fluido frecuentemente llamado vórtice o torbellino bidimensional, consideremos un cilindro rígido bidimensional de radio R rotando en un fluido viscoso a una velocidad angular constante ω_y , como se muestra en la figura 2.8. Este movimiento da lugar a un flujo con líneas de corriente circulares y, por lo tanto, la componente de velocidad radial es cero. Como consecuencia, la ecuación de continuidad en el plano $r - \theta$ se convierte en:

$$\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (2.49)$$

Integrando esta ecuación obtenemos

$$U_\theta = U_\theta(r) \quad (2.50)$$

La ecuación de Navier-Stokes en la dirección r , después de despreciar los términos de fuerza de cuerpo se transforma en:

$$-\rho \frac{U_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (2.51)$$

A causa de que U_θ es una función de r , y debido a la simetría radial del problema, la presión debe ser una función de r o una constante. Por tanto, la ecuación de momento en la dirección θ puede escribirse como:

$$0 = \frac{d^2 U_\theta}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left(\frac{U_\theta}{r} \right) \quad (2.52)$$

e integrando con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} r = R, \quad U_\theta &= -R\omega_y \\ r = \infty, \quad U_\theta &= 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

obtenemos que la velocidad tangencial es

$$U_\theta = -\frac{R^2 \omega_y}{r} \quad (2.54)$$

A partir de los resultados de filamentos de torbellinos (2.48), vemos que la circulación tiene el mismo signo que la vorticidad, y es positivo en el sentido de las agujas del reloj. La circulación alrededor del círculo concéntrico de radio r (y mayores que este) del cilindro puede encontrarse por medio de la ecuación (2.6) como

$$\Gamma = \int_{2\pi}^0 U_\theta r d\theta = 2\omega_y \pi R^2 \quad (2.55)$$

y es constante. La velocidad tangencial puede reescribirse como:

$$U_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (2.56)$$

La distribución de velocidad que puede verse en la figura 2.8 se llama flujo de torbellino. Si $r \rightarrow 0$ entonces la velocidad se hace muy grande cerca del sólido. Además, es fácil demostrar que este flujo de torbellino es irrotacional en todos los sitios excepto en la frontera del cilindro rotatorio donde se genera toda la vorticidad.

Cuando el radio del cilindro se aproxima a cero, este flujo se llama torbellino irrotacional (excluyendo el punto central, donde la velocidad se acerca al infinito).

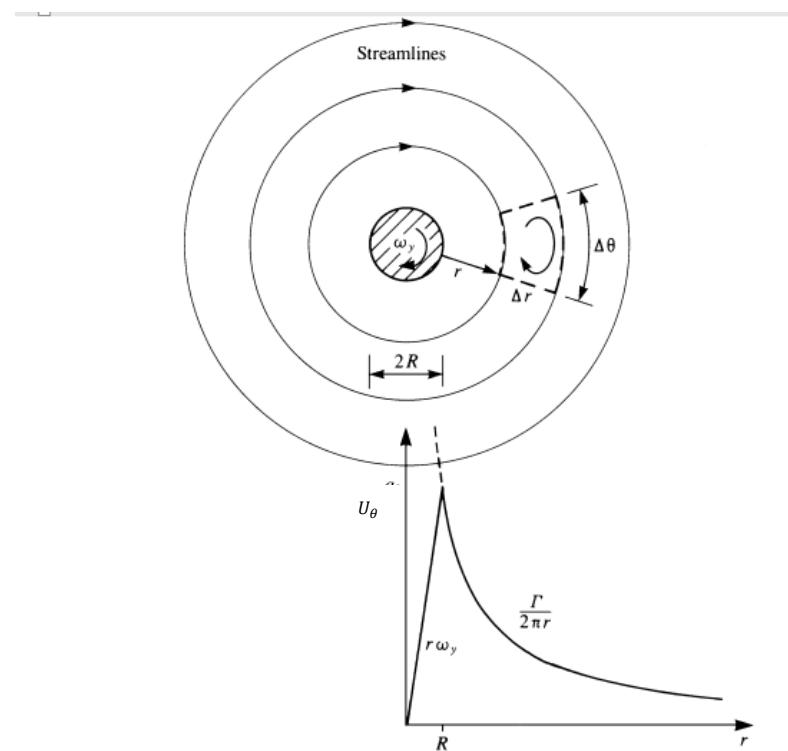


Figura 2.8. Campo de flujo bidimensional alrededor de un cilindro en rotación. Fuente [16]

2.10. Ley de Biot-Savart

Vamos a expresar el campo de velocidades como el rotacional de un campo vectorial desconocido \mathbf{B} tal que:

$$\mathbf{U} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (2.57)$$

Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad (1.11) y que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.58)$$

podemos expresar la vorticidad como

$$\zeta = \nabla \times \mathbf{U} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.59)$$

Según [14], utilizando el teorema de Green puede resolverse esta ecuación para \mathbf{B} como:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\zeta}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|} dV \quad (2.60)$$

Aquí \mathbf{B} es evaluado en el punto P situado a una distancia \mathbf{r}_0 desde el origen y es un resultado de integrar la vorticidad en el punto \mathbf{r}_1 dentro del volumen V (ver figura 2.9).

El campo de velocidades será, por tanto:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{4\pi} \int_V \nabla \times \frac{\zeta}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|} dV \quad (2.61)$$

Utilizando la ecuación (2.48) de la circulación, podemos ver que el integrando de la ecuación (2.61) se transforma en:

$$\nabla \times \frac{\zeta}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|} dV = \nabla \times \Gamma \frac{d\mathbf{l}}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|} = \Gamma \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (2.62)$$

Finalmente, la ecuación (2.62) da lugar a la conocida como ley de Biot-Savart:

$$\mathbf{U} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_V \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (2.63)$$

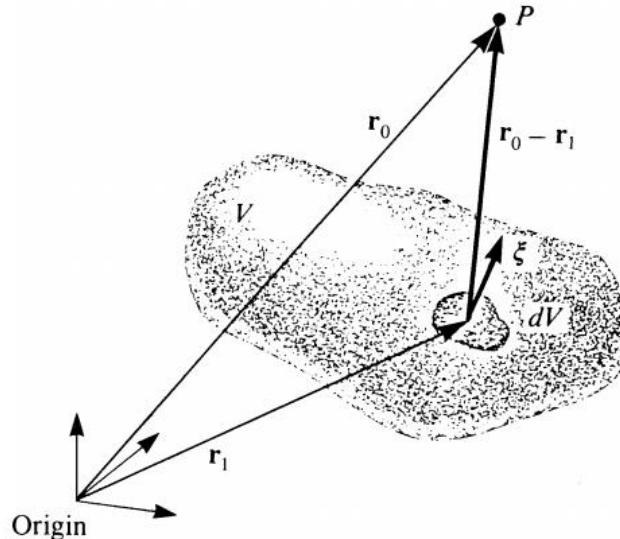


Figura 2.9. Velocidad en el punto P debida a una distribución de torbellinos. Fuente [16]



2.11. Velocidad inducida por un segmento recto de torbellino

Vamos a derivar ahora la velocidad inducida por un segmento recto de torbellino como el de la figura 2.10 partiendo de la ley de Biot-Savart. Vemos que el segmento de torbellino estará localizado en un marco de orientación arbitraria (x, y, z) con una circulación constante Γ .

La velocidad inducida por este segmento tendrá componentes tangenciales únicamente como se indica en la figura 2.10. También, la distancia $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1$ entre el segmento de torbellino y el punto P es \mathbf{r} .

Partiendo de la ley de Biot-Savart, la velocidad inducida por un segmento $d\mathbf{l}$ en el punto P es:

$$\Delta \mathbf{U} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (2.64)$$

En forma escalar, la ecuación (2.64) adopta la forma:

$$\Delta U_\theta = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin \beta}{r^2} dl \quad (2.65)$$

De la figura 2.10 vemos que $l = -\frac{d}{\tan \beta}$. Por tanto, podemos reescribir la ecuación como:

$$\Delta U_\theta = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin^2 \beta}{d^2} \sin \beta = \frac{\Gamma}{4\pi d} \sin \beta \, d\beta \quad (2.66)$$

Integrando ahora la ecuación (2.65) en la sección 1 → 2 vemos que obtenemos:

$$\Delta U_\theta = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta \, d\beta = \frac{\Gamma}{4\pi d} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2) \quad (2.67)$$

Siguiendo la referencia [25], expresando el valor de d , β_1 y β_2 en forma vectorial teniendo en cuenta la figura 2.11, obtenemos finalmente:

$$\mathbf{U}_{1,2} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|^2} \mathbf{r}_0 \cdot \left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2} \right) \quad (2.68)$$

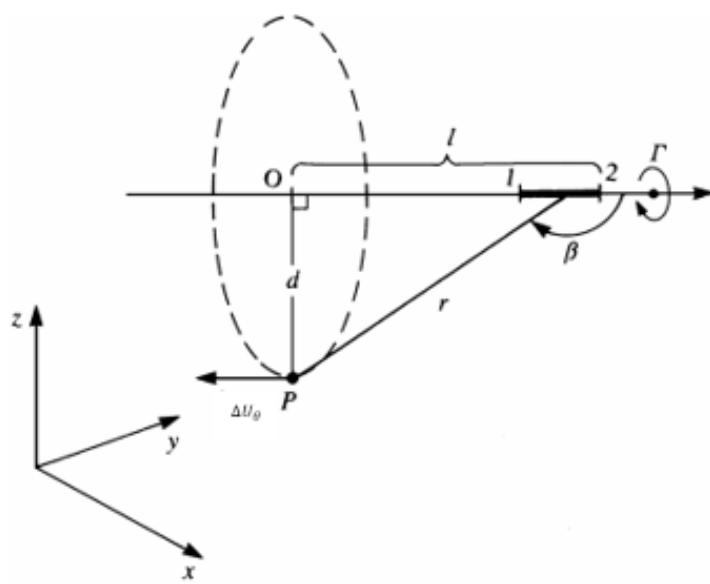


Figura 2.10. Velocidad inducida por un segmento de torbellino. Fuente [16]

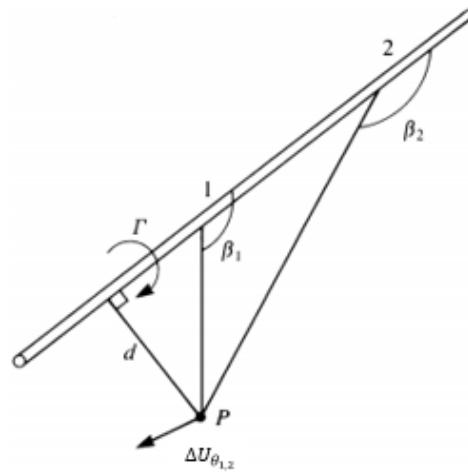


Figura 2.11. Ángulos para el cálculo de la velocidad inducida. Fuente [16]

2.12. Resolución de la ecuación de Laplace mediante soluciones elementales

En este punto desarrollaremos una metodología básica para obtener soluciones elementales al problema que estamos estudiando de flujo potencial.

Debido a la naturaleza lineal del problema de flujo potencial, la ecuación diferencial no tiene que resolverse individualmente para campos fluidos con geometrías diferentes en sus fronteras.

En lugar de esto, se propondrá una distribución de soluciones elementales que satisfagan individualmente las condiciones de contorno.

Este enfoque de distribuir soluciones elementales con circulación desconocida nos permitirá desarrollar una metodología sistemática para resolver el campo fluido tanto por el método clásico como por métodos numéricos.

2.12.1. Principio de superposición

Una solución general de la ecuación de Laplace puede encontrarse a partir de la superposición de soluciones elementales que satisfagan las condiciones de frontera. Esto se deriva del principio de superposición de la ecuación de Laplace que dice lo siguiente:

Si $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ son soluciones de la ecuación de Laplace, entonces

$$\Phi = \sum_{k=1}^n c_k \Phi_k \quad (2.69)$$

es también una solución de la ecuación en esa región. Aquí c_1, c_2, \dots, c_n son constantes arbitrarias y por lo tanto

$$\nabla^2 \Phi = \sum_{k=1}^n c_k \nabla^2 \Phi_k = 0 \quad (2.70)$$

Este principio de superposición es una propiedad muy importante de la ecuación de Laplace, y allana el camino en la búsqueda de soluciones para el campo fluido cerca de complejas fronteras.

En teoría, utilizando un conjunto de soluciones elementales, el proceso de solución (de satisfacer un conjunto de condiciones de frontera dadas) puede reducirse a una búsqueda algebraica de una combinación lineal correcta de dichas soluciones elementales.

Existen principalmente tres tipos de soluciones elementales: fuentes, dobletes y torbellinos. La solución elemental que se utilizará en el presente trabajo será la de los torbellinos (torbellinos discretos para el caso bidimensional y anillos de torbellino para el caso tridimensional).

2.12.2. Torbellino discreto para el caso bidimensional

De esta forma, comenzaremos formulando la velocidad potencial y sus derivadas para un torbellino discreto en el espacio bidimensional.

Partiendo de la ecuación (2.56) con la que definímos la velocidad tangencial y , sabiendo que la velocidad radial es cero, $U_r = 0$, la velocidad potencial de un elemento de torbellino en el origen puede obtenerse integrando $U_r = 0$ y $U_\theta = -\Gamma / 2\pi r$ obteniéndose:

$$\Phi = \int U_\theta r d\theta + C = -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta + C \quad (2.71)$$

donde C es una constante arbitraria que puede establecerse como cero. En coordenadas cartesianas para un torbellino situado en (x_0, z_0) , la ecuación (2.69) puede escribirse como:

$$\Phi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \tan^{-1} \frac{z - z_0}{x - x_0} \quad (2.72)$$

y las componentes cartesianas de la velocidad en los ejes (x, z) serán (u, w) respectivamente, que vendrán dadas por:

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{z - z_0}{(z - z_0)^2 + (x - x_0)^2}$$

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x - x_0}{(z - z_0)^2 + (x - x_0)^2} \quad (2.73)$$

El principio de superposición indica que una solución del flujo sobre cuerpos arbitrarios puede obtenerse mediante la distribución de soluciones elementales singulares sobre las superficies modeladas.

Por simplicidad, los torbellinos discretos serán distribuidos de forma continua a lo largo del eje x desde $x_1 \rightarrow x_2$ como se indica en la figura 2.12.

La influencia de una distribución de vórtices o torbellinos en un punto $P(x, z)$ será la integral de las influencias de cada uno de los torbellinos entre $x_1 \rightarrow x_2$, y vendrán dadas por las ecuaciones:

$$\Phi(x, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \gamma(x_0) \tan^{-1} \frac{z}{x - x_0} dx_0 \quad (2.74)$$

$$u(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \gamma(x_0) \frac{z}{(x - x_0)^2 + z^2} dx_0 \quad (2.75)$$

$$w(x, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \gamma(x_0) \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + z^2} dx_0 \quad (2.76)$$

Hay un salto entre la componente u de velocidad como $z \pm$. La componente tangencial de la velocidad es entonces:

$$u(x, 0 \pm) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, 0 \pm) = \pm \frac{\gamma(x)}{2} \quad (2.77)$$

La contribución de este salto de velocidad al salto de potencial, asumiendo que $\Phi = 0$ antes de la distribución de torbellinos, es:

$$\Delta \Phi(x) = \Phi(x, 0+) - \Phi(x, 0-) = \int_{x_1}^x \frac{\gamma(x_0)}{2} dx_0 - \int_{x_1}^x \frac{-\gamma(x_0)}{2} dx_0 \quad (2.78)$$

La circulación Γ es la integral cerrada de $u(x, 0)dx$. Por lo tanto,

$$\Gamma(x) = \Phi(x, 0+) - \Phi(x, 0-) = \Delta\Phi(x) \quad (2.79)$$

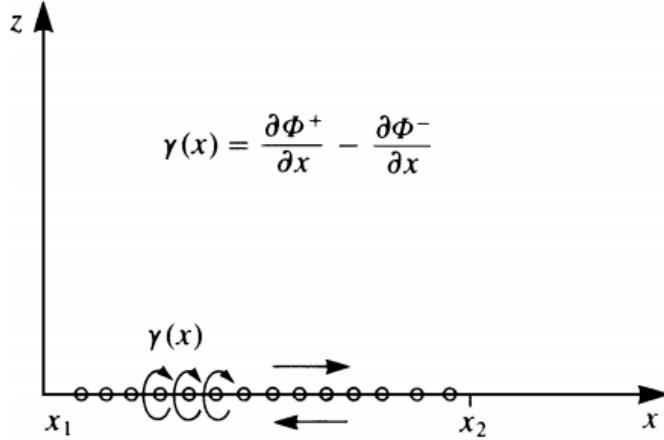


Figura 2.12. Distribución de torbellinos discretos. Fuente [16]

2.12.3. Anillos de torbellino para el caso tridimensional

En el caso tridimensional, las soluciones elementales que se utilizarán para llevar a cabo la resolución de la ecuación de Laplace serán anillos de torbellino. En la figura 2.13 podemos ver gráficamente esta solución elemental.

La velocidad inducida por cada segmento de torbellino de circulación Γ viene dada por la ecuación (2.64). Además, si este segmento de torbellino va desde el punto 1 hasta el punto 2, entonces la velocidad en un punto arbitrario puede obtenerse empleando la ecuación (2.68).

En el sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) los valores de los puntos 1, 2 y P vienen dados, y la velocidad podrá calcularse mediante los siguientes pasos:

- Cálculo de $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ y de $|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|^2$.

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_x &= (y_p - y_1) \cdot (z_p - z_2) - (z_p - z_1) \cdot (y_p - y_2) \\
 (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_y &= -(x_p - x_1) \cdot (z_p - z_2) + (z_p - z_1) \cdot (x_p - x_2) \\
 (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_z &= (x_p - x_1) \cdot (y_p - y_2) - (y_p - y_1) \cdot (x_p - x_2) \\
 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|^2 &= (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_x^2 + (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_y^2 + (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_z^2
 \end{aligned}$$

- Cálculo de las distancias r_1 y r_2 :

$$r_1 = \sqrt{(x_p - x_1)^2 + (y_p - y_1)^2 + (z_p - z_1)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x_p - x_2)^2 + (y_p - y_2)^2 + (z_p - z_2)^2}$$

3. Evitar la singularidad en el cálculo: Debido a que la solución del torbellino es singular cuando el punto P se encuentra en el torbellino, es necesario calcular la ecuación de forma especial en la vecindad del segmento del torbellino. En los cálculos numéricos se asumen que si r_1, r_2 o $|r_1 \times r_2|^2$ son más pequeños que un cierto valor ϵ muy pequeño, entonces $u = v = w = 0$
4. Cálculo del producto escalar:

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1)(x_p - x_1) + (y_2 - y_1)(y_p - y_1) + (z_2 - z_1)(z_p - z_1)$$

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_2 = (x_2 - x_1)(x_p - x_2) + (y_2 - y_1)(y_p - y_2) + (z_2 - z_1)(z_p - z_2)$$

5. Finalmente, cálculo de las componentes de la velocidad

$$\begin{aligned} u &= K \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_x \\ v &= K \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_y \\ w &= K \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_z \end{aligned} \quad (2.80)$$

donde

$$K = \frac{\Gamma}{4\pi|\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2|^2} \left(\frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_1}{r_1} - \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_2}{r_2} \right)$$

Si implementamos estos 5 pasos en una rutina de cálculo podremos calcular la velocidad inducida por el anillo del torbellino llamando a la rutina una vez para cada uno de los cuatro segmentos del torbellino y sumando las contribuciones de los cuatro. De esta forma tendremos que la velocidad en el punto $P(x, y, z)$ debida a los cuatro segmentos de torbellino será:

$$(u, v, w) = (u_1, v_1, w_1) + (u_2, v_2, w_2) + (u_3, v_3, w_3) + (u_4, v_4, w_4) \quad (2.81)$$

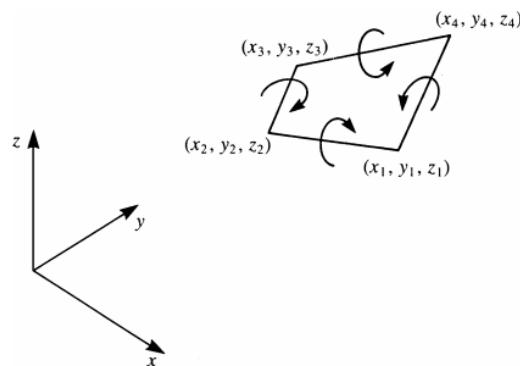


Figura 2.13. Distribución de anillos de torbellinos. Fuente [16]

En la figura 2.14 podemos ver una discretización de un ala y de su estela mediante anillos de torbellinos. Se corresponde con la discretización de la geometría que lleva a cabo el método de la malla de anillos de torbellinos no estacionarios y que implementaremos con detalle en el capítulo 5.

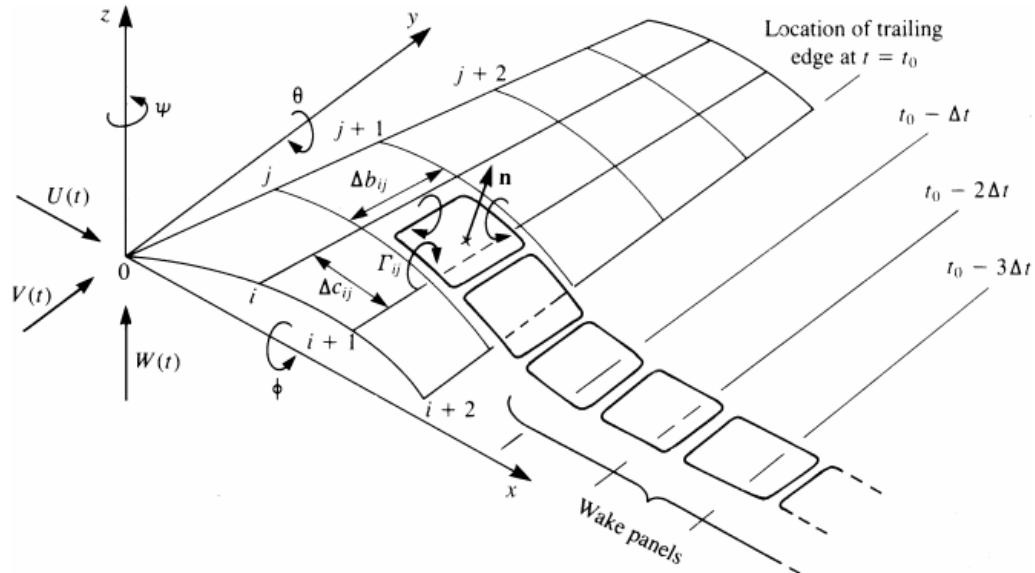


Figura 2.14. Discretización de un ala y de su estela mediante anillos de torbellinos. Fuente [16]



Capítulo 3

Solución para el caso bidimensional estacionario

Una vez presentada la ecuación que gobierna la aerodinámica de bajas velocidades y que deberemos resolver para determinar los campos de velocidades y de presiones tanto en perfiles como en alas, el objetivo de este capítulo es presentar una solución numérica para el caso más sencillo de la aerodinámica de bajas velocidades: flujo incompresible estacionario alrededor de un perfil alar.

Para ello comenzaremos introduciendo el problema de un perfil delgado en una corriente de flujo estacionaria y desarrollando una metodología de solución que posteriormente extenderemos para el caso bidimensional no estacionario y para el caso tridimensional.

Esta metodología será plasmada en forma de algoritmo numérico que se programará en la plataforma de cálculo de Matlab, y que posteriormente, se validará por medio de soluciones teóricas que pueden encontrarse en la literatura.

3.1. Introducción al problema

Para introducir el problema, vamos a considerar un perfil delgado y curvado con un ángulo de ataque α como se muestra esquemáticamente en la figura 3.1.

Un sistema de coordenadas cartesianas está unido al perfil y las componentes de la velocidad del flujo libre \mathbf{U} en el marco de referencia (x, z) son (U_∞, W_∞) , respectivamente, siendo U el módulo de \mathbf{U} . El ángulo de ataque α se define como el ángulo entre la velocidad de corriente de flujo libre y el eje x según la ecuación (3.1):

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{W_\infty}{U_\infty} \quad (3.1)$$

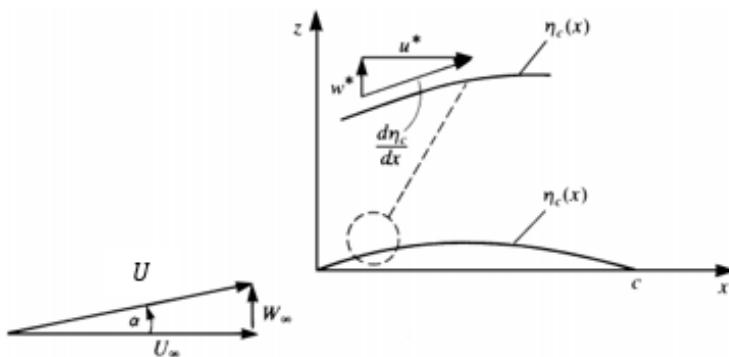


Figura 3.1. Perfil delgado curvado con ángulo de ataque α . Fuente [16]



Se asume que el flujo es no viscoso, incompresible e irrotacional, de forma que el campo de velocidades debido al movimiento del perfil puede obtenerse resolviendo la ecuación de continuidad

$$\nabla^2 \Phi^* = 0 \quad (3.2)$$

donde Φ^* es el potencial de velocidades, definido en el marco de referencia del perfil. La condición de frontera requiere que la perturbación inducida por el perfil desaparezca en la lejanía del perfil, lo que se traduce matemáticamente como:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \nabla \Phi^* = \mathbf{U} \quad (3.3)$$

lo cual se cumple automáticamente con la solución elemental del torbellino.

También, la componente normal de velocidad en las fronteras del sólido del perfil debe ser cero. Por lo tanto, en un marco de referencia unido al perfil

$$\nabla \Phi^* \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.4)$$

donde \mathbf{n} es el vector normal al perfil que apunta hacia afuera de la página. De esta forma, el problema se reduce a encontrar una distribución de soluciones elementales que satisfagan la ecuación (3.4).

3.1.1. Condición de contorno

Para satisfacer la condición de frontera en el perfil necesitamos información geométrica sobre la forma de la frontera del perfil. La línea de curvatura media del perfil va a venir dada por la función $\eta_c(x)$. La normal apuntando hacia afuera del perfil se obtiene utilizando la ecuación (2.21) obteniéndose

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{1}{|\nabla F|} \left(-\frac{\partial \eta_c}{\partial x}, 1 \right) \quad (3.5)$$

El potencial de velocidades debido al flujo de la corriente libre puede obtenerse como:

$$\Phi_\infty = U_\infty x + W_\infty z \quad (3.6)$$

Por lo tanto, la ecuación (3.2) es lineal y su solución puede dividirse en dos partes:

$$\Phi^* = \Phi + \Phi_\infty \quad (3.7)$$

Sustituyendo ahora la ecuación (3.5) y las derivadas de (3.6) y (3.7) dentro de la condición de contorno de la ecuación (3.4) obtenemos:

$$\nabla \Phi^* \cdot \mathbf{n} = \nabla \Phi^* \cdot \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + U_\infty, \frac{\partial \Phi}{\partial z} + W_\infty \right) \cdot \frac{1}{|\nabla F|} \left(-\frac{\partial \eta_c}{\partial x}, 1 \right) = 0 \quad (3.8)$$



donde \mathbf{n} en términos de la línea de curvatura media η_c puede escribirse como:

$$\mathbf{n} = \frac{(-\partial\eta_c/\partial x, 1)}{\sqrt{(\partial\eta_c/\partial x)^2 + 1}} \quad (3.9)$$

Ahora, utilizando la hipótesis de pequeñas perturbaciones, $W_\infty = U \sin \alpha \approx U\alpha, \partial\Phi/\partial x \ll U_\infty$, y $U_\infty = U \cos \alpha \approx U$, la condición de frontera de la ecuación (3.8) podemos expresarla finalmente en $z = 0$ como:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(x, 0 \pm) = U \left(\frac{d\eta_c}{dx} \cos \alpha - \sin \alpha \right) \approx U \left(\frac{d\eta_c}{dx} - \alpha \right) \quad (3.10)$$

Al considerar una solución basada en una distribución de soluciones elementales, se debe observar la naturaleza antisimétrica del problema (con relación al eje x), como en la figura 3.1.

Tradicionalmente, la solución basada en una distribución de torbellinos se ha utilizado debido a su fácil derivación e interpretación física. Además, la condición de frontera que requiere que la perturbación debida al perfil desaparezca lejos de este se cumple de forma automática con los elementos de torbellino.

Como se muestra en la figura 3.2, este problema está siendo modelado por una distribución de torbellinos localizada en el eje x con las condiciones de contorno de pequeñas perturbaciones que se cumplen también en el eje x . Recordando las ecuaciones (2.74), (2.75) y (2.76), el potencial de velocidad y el campo de velocidades resultante, debido a dicha distribución de torbellinos (entre el borde de ataque del perfil en $x = 0$ y el borde de fuga en $x = c$) vienen dados por:

$$\Phi(x, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^c \gamma(x_0) \tan^{-1} \frac{z}{x - x_0} dx_0 \quad (3.11)$$

$$u(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \gamma(x_0) \frac{z}{(x - x_0)^2 + z^2} dx_0 \quad (3.12)$$

$$w(x, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^c \gamma(x_0) \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + z^2} dx_0 \quad (3.13)$$

Aquí, $\gamma(x_0)$ es la circulación del torbellino por unidad de longitud en x_0 .

Como la condición de frontera se cumplirá en $z = 0$, es útil evaluar las componentes de velocidad en este lugar.

La componente x de la velocidad por encima (+) y por debajo (-) de una distribución de torbellino ya se derivó en el capítulo anterior, y venía dada por:

$$u(x, 0 \pm) = \lim_{z \rightarrow \pm 0} u(x, z) = \pm \frac{\gamma(x)}{2} \quad (3.14)$$

para $0 < x < c$.

La componente w de la velocidad en $z = 0$ puede obtenerse directamente de la ecuación (3.13):

$$w(x, 0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^c \gamma(x_0) \frac{dx_0}{x - x_0} \quad (3.15)$$

La distribución de torbellinos desconocida $\gamma(x)$ tiene que satisfacer la condición de contorno de flujo normal cero en el perfil. Por lo tanto, la sustitución de la componente de velocidad normal desde la ecuación (3.15) en la condición de frontera de la ecuación (3.10) da como resultado:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^c \gamma(x_0) \frac{dx_0}{x - x_0} = U \left(\frac{d\eta_c}{dx} - \alpha \right), \quad 0 < x < c \quad (3.16)$$

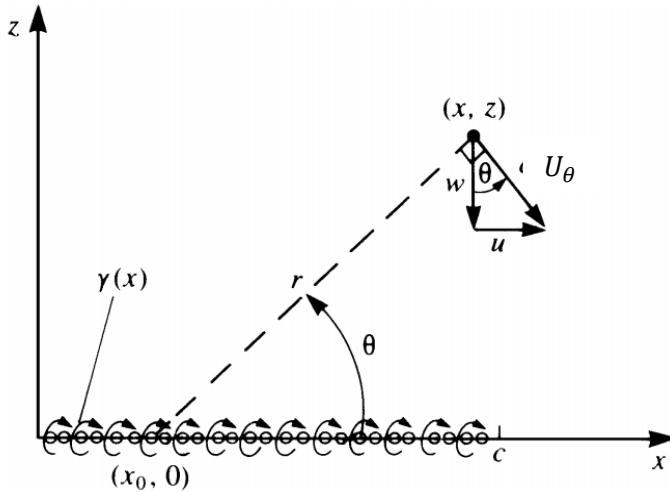


Figura 3.2. Distribución de torbellinos para el perfil de sustentación delgado. Fuente [16]

Esta es la ecuación integral para $\gamma(x)$. Sin embargo, la solución a esta ecuación no es única y una condición física adicional debe ser añadida para obtener una solución única. Tal condición requiere que el flujo abandone suavemente el borde fuga del perfil y la velocidad aquí sea finita, es decir,

$$\nabla \Phi < \infty \quad (3.17)$$

Esta es la conocida como condición de Kutta. Puede ser interpretada como el requisito de que la diferencia de presiones o de que $\gamma(x)$ debe ser cero en el borde de fuga del perfil:

$$\gamma(x = c) = 0 \quad (3.18)$$

3.2. Solución numérica

El objetivo de esta sección es desarrollar una metodología numérica que nos permita resolver la ecuación integral (3.16) utilizando una distribución de torbellinos discretos a lo largo del perfil.

Existe en la literatura soluciones analíticas para este problema por medio de expansiones trigonométricas como la conocida solución que proporciona Glauert haciendo uso de la

hipótesis de pequeñas perturbaciones y que puede encontrarse en la referencia [16]. Nosotros propondremos una solución numérica por medio de un algoritmo implementable en cualquier lenguaje de programación (por ejemplo, Matlab).

El algoritmo que desarrollaremos, en esencia, es similar al que proponen Katz & Plotkin en la referencia [16] pero con una pequeña variante: utiliza unos ejes ligados al perfil y los torbellinos del perfil estarán situados en el eje $z = 0$, de acuerdo a la teoría linealizada puesto que se ha comprobado que este método es más estable computacionalmente.

Finalmente, en la siguiente sección, compararemos los resultados obtenidos mediante este algoritmo con la solución analítica dada por Glauert para problemas sencillos que pueden encontrarse en la literatura.

De esta forma, validaremos el código numérico que extenderemos posteriormente para el caso bidimensional no estacionario.

3.2.1. Algoritmo numérico para el caso bidimensional estacionario

El diagrama de flujo del algoritmo que implementaremos puede verse en la figura 3.3.

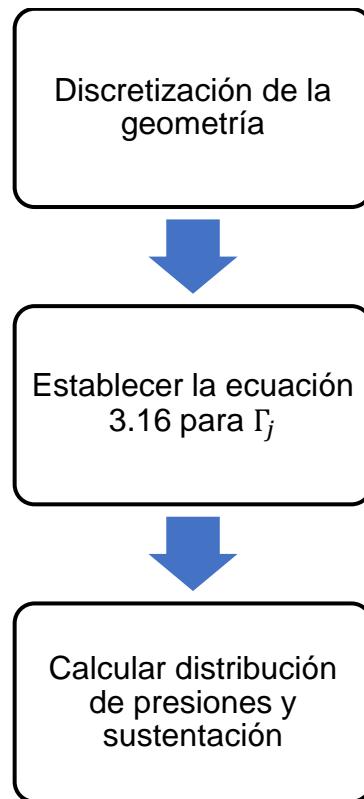


Figura 3.3. Diagrama de flujo algoritmo bidimensional estacionario

Paso 1: Discretización de la geometría

El primer paso de nuestro algoritmo será realizar una discretización de la geometría del perfil. Para obtener la distribución de presiones en el perfil y la sustentación, dividiremos la línea de curvatura media en N paneles de la misma longitud (por simplicidad). Consideraremos que el perfil tiene una geometría $z = \eta_c(x)$ de la línea de curvatura media, lo cual es una función conocida. Siguiendo la teoría linealizada, podemos considerar que la geometría es una ligera

perturbación de la situación horizontal inicial y, por tanto, podemos asumir que las pendientes de la función $\eta_c(x)$. De esta forma, los cosenos de dichas pendientes se aproximan a la unidad y, por lo tanto, considerar los paneles sobre el perfil (línea de curvatura) o considerarlos sobre la cuerda (eje x) será lo mismo a efectos matemáticos. En la figura 3.4 podemos ver la discretización del perfil en paneles.

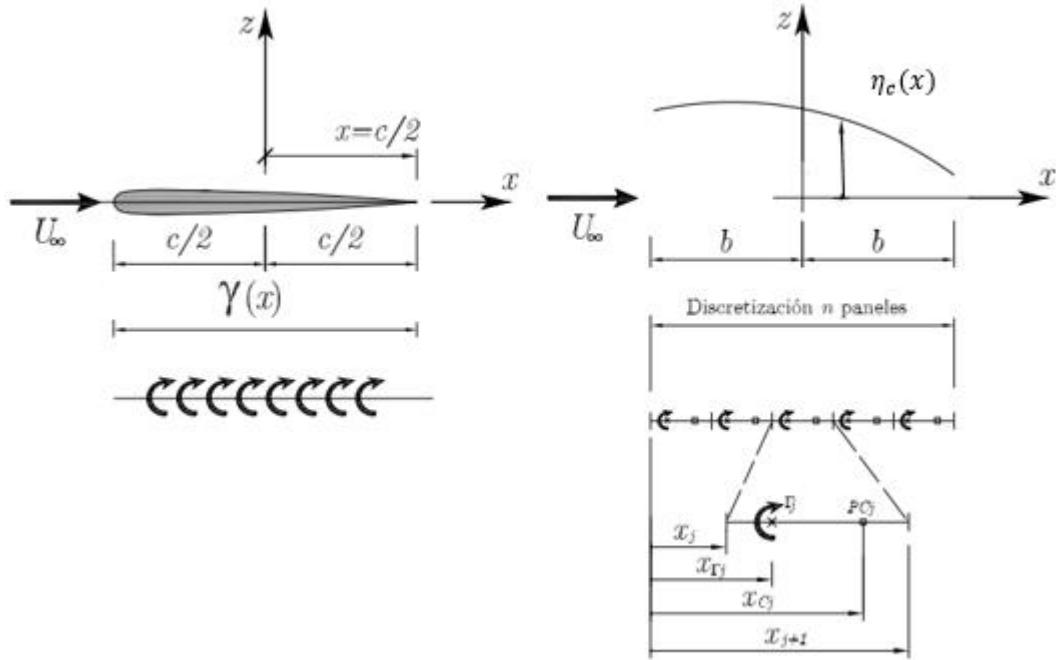


Figura 3.4. Discretización de la geometría del perfil

Llamaremos x_j a los puntos extremos de los paneles, de forma que tendremos la lista de puntos

$$x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1} \quad (3.19)$$

verificándose que $x_j = x_{j-1} + \Delta x$, donde $\Delta x = c/N$ es la longitud de cada panel (siendo c la cuerda del perfil). Si suponemos que en un perfil alar b es la semicuerda, podemos escribir que:

$$x_j = -b + \frac{2b}{N}(j-1), \quad j = 1, 2, \dots, N+1 \quad (3.20)$$

En cada panel localizamos dos puntos característicos. El centro aerodinámico de cada panel localizado a $\Delta x/4$ del borde de ataque del panel y cuya coordenada es $x_{\Gamma j}$ y el punto de control de cada panel, localizado a $3\Delta x/4$ del borde de ataque del panel y cuya coordenada es x_{Cj} . Matemáticamente podemos expresar esto como:

$$x_{\Gamma j} = \frac{3}{4}x_j + \frac{1}{4}x_{j+1} \quad (3.21)$$

$$x_{cj} = \frac{1}{4}x_j + \frac{3}{4}x_{j+1}$$

Paso 2: Resolver la ecuación 3.16 para Γ_j

En cada panel localizamos un torbellino de intensidad Γ_j en el punto de control. Las N intensidades de los torbellinos serán las incógnitas del problema. Recordemos que el campo de velocidades generado por el cada torbellino en un punto de control arbitrario (x_{ci}, z_{ci}) con circulación Γ_j localizado en $(x_{\Gamma j}, z_{\Gamma j})$, viene dado por la ecuación (2.73) que en forma matricial puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}_{ij} = \frac{\Gamma_j}{2\pi r_{ij}^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{ci} - x_{\Gamma j} \\ z_{ci} - z_{\Gamma j} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

donde $r_{ij}^2 = (x_{ci} - x_{\Gamma j})^2 + (z_{ci} - z_{\Gamma j})^2$.

Al haber considerado que los paneles están sobre $z = 0$, los torbellinos solamente proporcionarán componente de velocidad w_{ij} , de forma que la ecuación (3.22) se transformará en

$$w_{ij} = -\frac{1}{2\pi(x_{ci} - x_{\Gamma j})} \Gamma_j \quad (3.23)$$

Ahora estamos en disposición de reescribir la ecuación (3.16) en función de las velocidades inducidas por los torbellinos de cada panel. En esta línea, la ecuación (3.16) se transforma en

$$\mathbf{A}\mathbf{g} = \mathbf{a} \quad (3.24)$$

donde

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{x_{c1} - x_{\Gamma 1}} & \frac{1}{x_{c1} - x_{\Gamma 2}} & \dots & \frac{1}{x_{c1} - x_{\Gamma N}} \\ \frac{1}{x_{c2} - x_{\Gamma 1}} & \frac{1}{x_{c2} - x_{\Gamma 2}} & \dots & \frac{1}{x_{c2} - x_{\Gamma N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_{cN} - x_{\Gamma 1}} & \frac{1}{x_{cN} - x_{\Gamma 2}} & \dots & \frac{1}{x_{cN} - x_{\Gamma N}} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \vdots \\ \Gamma_N \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -U_\infty \alpha_1 \\ -U_\infty \alpha_2 \\ -U_\infty \alpha_3 \\ \vdots \\ -U_\infty \alpha_4 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Podemos determinar la circulación en el perfil resolviendo la ecuación 3.24 para \mathbf{g} como:

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a} \quad (3.28)$$

Paso 3: Calcular distribución de presiones y sustentación

Obtenida la distribución de circulación de todos los torbellinos, ahora podremos calcular las presiones, la sustentación y el coeficiente de sustentación total en el perfil.

Para calcular la distribución de la sustentación en cada panel, utilizaremos el teorema de Kutta-Joukowski para cada panel:

$$L_j = \rho U_\infty \Gamma_j \quad (3.29)$$

A partir de este teorema podemos calcular la distribución de presiones para cada panel como:

$$\Delta p_j = \frac{L_j}{\Delta x} = \frac{\rho U_\infty \Gamma_j}{\Delta x} \quad (3.30)$$

donde Δx es la longitud de cada panel que recordemos es igual a $\Delta x = c/N$.

El coeficiente de presiones de cada panel podemos calcularlo a partir de la distribución de presiones como:

$$\Delta c_{pj} = \frac{\Delta p_j}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} \quad (3.31)$$

La sustentación total podrá calcularse sumando las contribuciones de sustentación de todos los paneles como:

$$L = \sum_{j=1}^N L_j \quad (3.32)$$

y, a partir de esta expresión, podemos calcular el coeficiente de sustentación total como:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 c} \quad (3.33)$$

Finalmente, el momento aerodinámico en un punto x_A podrá calcularse como:

$$M_A = - \sum_{j=1}^N L_j (x_{\Gamma j} - x_A) \quad (3.34)$$

y el coeficiente de momento aerodinámico vendrá entonces dado por la expresión

$$C_{MA} = \frac{M_A}{\left(\frac{1}{2}\right) \rho U_\infty^2 c^2} \quad (3.35)$$

3.2.2. Validación del código numérico

El objetivo de esta última sección del capítulo es validar el código numérico programado (disponible en el apéndice A) siguiendo los pasos del algoritmo desarrollado en la sección anterior.

Para llevar a cabo nuestro objetivo, se compararán las soluciones obtenidas por medio del código numérico con las soluciones analíticas que proporciona el método de la expansión trigonométrica de Glauert mencionado ya con anterioridad.

Las configuraciones geométricas que estudiaremos con el fin de validar el código numérico serán dos: perfil delgado sin curvatura con ángulo de ataque y perfil delgado con curvatura parabólica.

3.2.2.1. Perfil delgado sin curvatura con ángulo de ataque

El primer caso que vamos a estudiar podemos verlo esquematizado en la figura 3.5. En este caso particular no hay curvatura, de forma que $\eta_c(x) = 0$. En consecuencia, todos los términos derivados de la línea de curvatura serán cero.

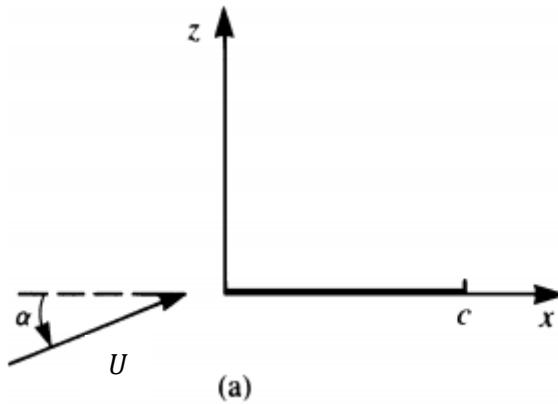


Figura 3.5. Perfil delgado de placa plana con ángulo de ataque. Fuente [16]

En la figura 3.6 se ha representado la distribución del coeficiente de presiones obtenido por medio del método analítico (línea continua azul) y por medio del código numérico implementado (línea discontinua negra) para un ángulo de ataque $\alpha = 10^\circ$ y un número de paneles $N = 200$.

Podemos ver que en este caso las soluciones coinciden perfectamente. Desde un punto de vista físico, observamos que en el borde de ataque del perfil, en este caso $x = 0$, justo donde el perfil se encuentra con el flujo, se produce un elevado salto de presiones (mayor cuanto mayor es el ángulo de ataque), y esta distribución va disminuyendo suavemente por el perfil hasta hacerse cero en el borde de salida.

Vemos, por tanto, que para el primer caso la solución para la distribución del coeficiente de presiones que proporciona el código numérico es muy precisa.

Adicionalmente, se han calculado en la tabla 3.1 los coeficientes de sustentación total y de momento de cabeceo en el borde de ataque tanto por el método analítico como por el código numérico. Vemos que las soluciones concuerdan para el caso del perfil sin curvatura.

Coeficiente	Analítico	Numérico	Diferencia Relativa
C_L	1,0966	1,0911	0,5%
C_{Mo}	-0,2742	-0,2686	2,06%

Tabla 3.1. Resultados del perfil sin curvatura

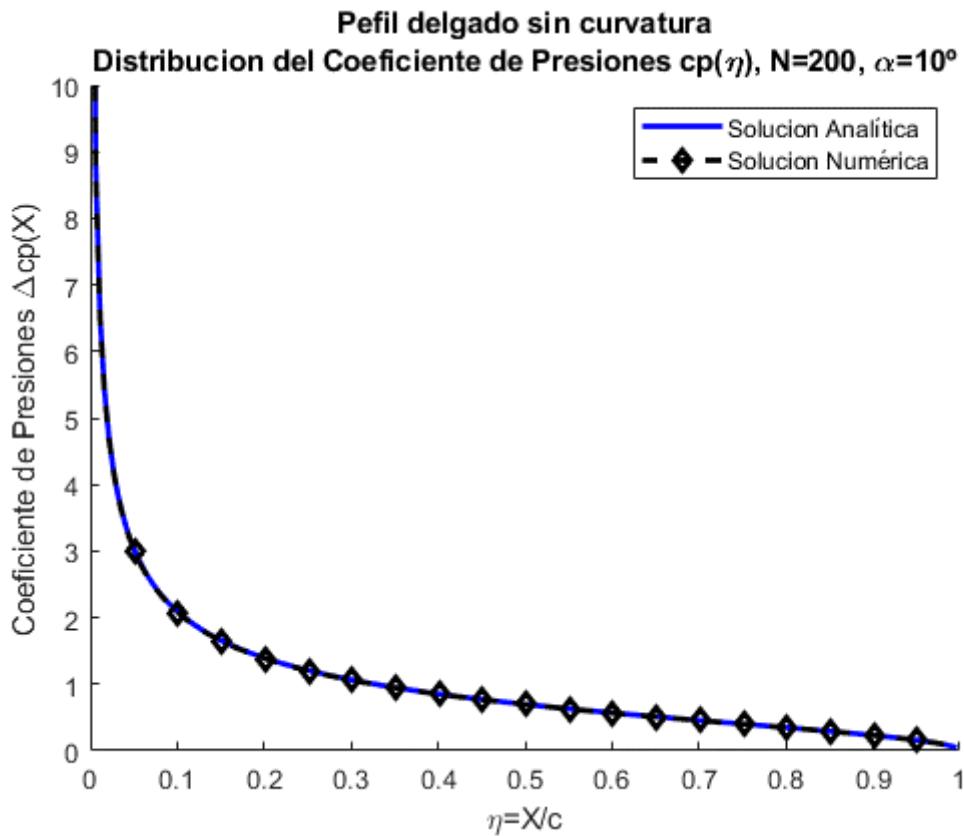


Figura 3.6. Coeficiente de presiones. Perfil sin curvatura, $\alpha=10^\circ$

3.2.2.2. Perfil delgado con pequeña curvatura de tipo parabólica

El segundo problema que utilizaremos para validar el código numérico será el flujo en un perfil con curvatura parabólica como el que aparece representado en la figura 3.7.

En este caso, vemos que la mayor altura de la línea de curvatura es ϵ .

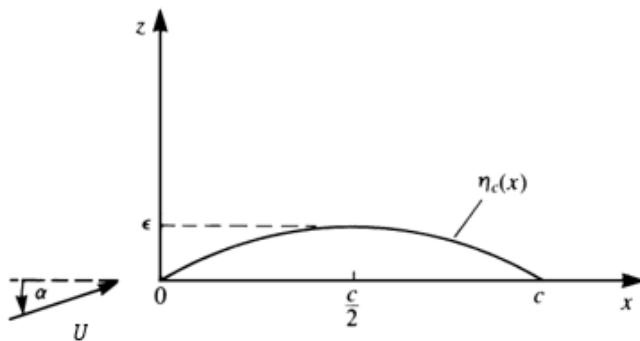


Figura 3.7. Perfil con curvatura parabólica. Fuente [16]

En este caso, la línea de curvatura media viene dada por la expresión

$$\eta_c(x) = 4\epsilon \frac{x}{c} \left[1 - \frac{x}{c} \right] \quad (3.36)$$

y la pendiente de la línea de curvatura es:

$$\frac{d\eta_c(x)}{dx} = 4 \frac{\epsilon}{c} \left[1 - 2 \frac{x}{c} \right] \quad (3.37)$$

En las figuras 3.8 y 3.9 podemos ver la distribución del coeficiente de presiones dado por el método analítico y por el código numérico para un ángulo de ataque $\alpha = 0^\circ$ y un ángulo de ataque $\alpha = 10^\circ$ respectivamente, para un valor de $\epsilon = 0,1c$, con c el valor de la cuerda del perfil.

La comparación entre los coeficientes de sustentación total y de momento de cabecero en el borde de ataque obtenidos por el método analítico y por el método numérico para los distintos casos se comparan en la tabla 3.2.

Ángulo de ataque (α)	ϵ	Coeficiente	Analítico	Numérico	Diferencia relativa
0°	$0,1c$	C_L	1,2566	1,2333	1,89%
		C_{Mo}	-0,6283	-0,6167	1,89%
10°	$0,1c$	C_L	2,3533	2,3061	2,05%
		C_{Mo}	-0,9025	-0,8617	4,73%

Tabla 3.2. Resultados del perfil con curvatura

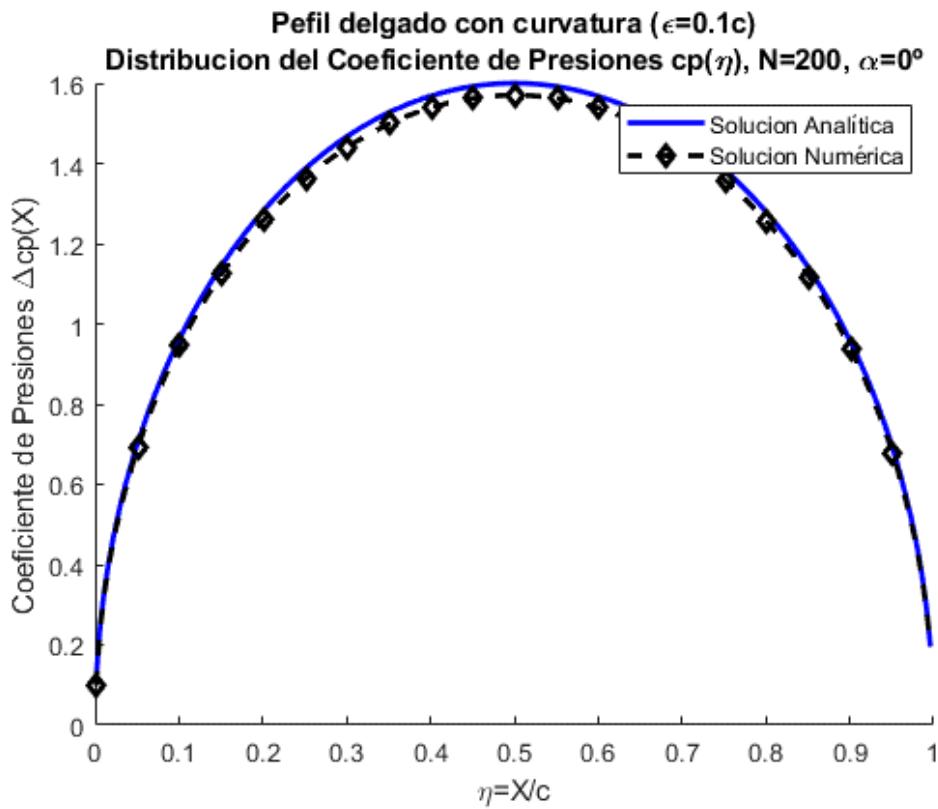


Figura 3.8. Coeficiente de presiones. Perfil con curvatura, $\alpha=0^\circ$, $\epsilon=0.1c$

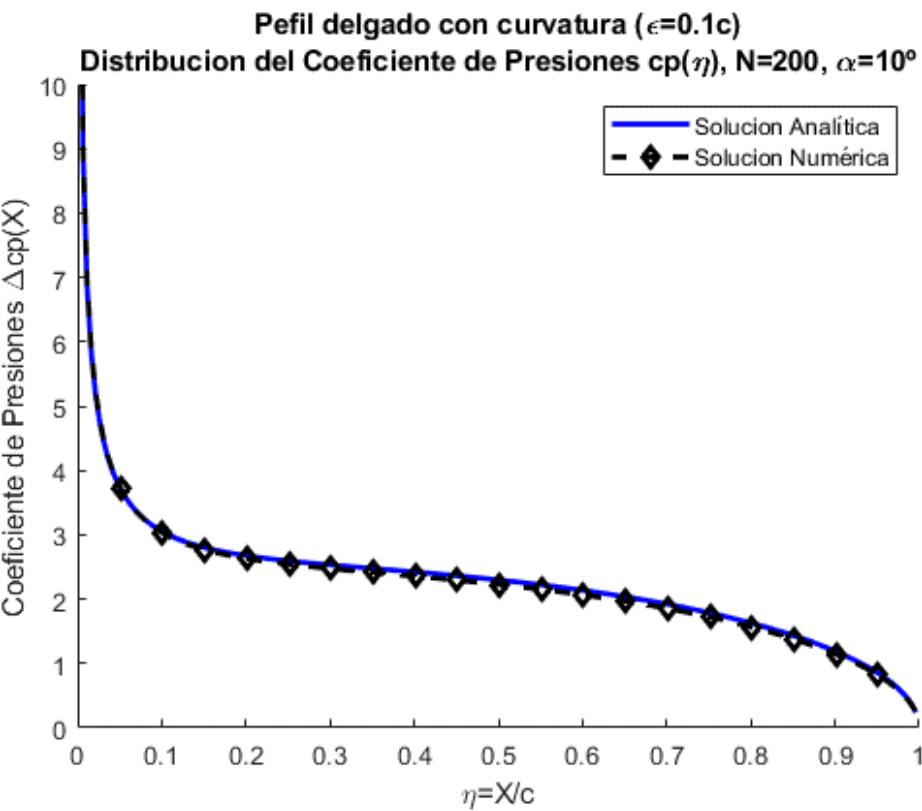


Figura 3.9. Coeficiente de presiones. Perfil con curvatura, $\alpha=10^\circ$, $\epsilon=0.1c$



De nuevo observamos que los resultados numéricos concuerdan perfectamente con los resultados analíticos para ángulos de ataque y curvaturas pequeñas. Además, desde un punto de vista físico, en el caso de ángulo de ataque cero y curvatura pequeña, observamos que el valor mayor del coeficiente de presiones se alcanza justo en el centro del perfil, allí donde la curvatura es mayor.

De esta forma queda terminada la validación del primer código, con unos resultados que nos permiten valorar el código programado como un código robusto que podrá utilizarse para calcular otros flujos bidimensionales estacionarios, y lo que es más importante, podremos actualizarlo con pequeñas modificaciones para resolver el caso no estacionario, como veremos en el próximo capítulo.





Capítulo 4

Solución para el caso bidimensional no estacionario

En el capítulo anterior se describió con detalle la solución de problemas para perfiles bidimensionales en condiciones de flujo incompresible, no viscoso, irrotacional y estacionario.

El objetivo siguiente es extender la teoría sobre flujos bidimensionales estacionarios para estudiar flujos no estacionarios en problemas bidimensionales en este capítulo y tridimensionales en el siguiente.

Para ello, comenzaremos el capítulo realizando una descripción matemática de los flujos incompresibles no estacionarios en las tres dimensiones (sin más que añadir una coordenada más) con carácter general.

Continuaremos el capítulo desarrollando un algoritmo para el cálculo numérico de flujos no estacionarios sobre perfiles bidimensionales.

Terminaremos el capítulo validando el código programado siguiendo el algoritmo numérico desarrollado previamente y comparando la solución proporcionada por el código numérico para tres problemas de aerodinámica no estacionaria estudiados en la literatura de los que se conoce una solución analítica cerrada para el caso bidimensional.

4.1. Fundamentos del flujo incompresible no estacionario

Hemos visto ya que el campo de velocidades de un fluido irrotacional e incompresible puede obtenerse resolviendo la ecuación de continuidad. Sin embargo, la ecuación de continuidad incompresible no incluye directamente términos dependientes del tiempo. Esta dependencia deberá introducirse por medio de las condiciones de frontera.

Es por ello que el primer paso será modificar los métodos desarrollados para la solución estacionaria incluyendo las condiciones de frontera no estacionarias y la ecuación de Bernoulli para el caso no estacionario.

Describiremos el método no estacionario en el sistema de coordenadas tridimensional (x, y, z) de forma que este tratamiento nos sirva por un lado para el caso bidimensional (x, z) sin más que eliminar de las ecuaciones los términos dependientes de la coordenada de profundidad y , y por otro lado para el caso tridimensional que trataremos más en profundidad en el siguiente capítulo.

En el caso general de un movimiento arbitrario de un sólido rígido sumergido en un fluido, la trayectoria del movimiento viene determinada por la combinación de las ecuaciones de la dinámica y de la fluido-dinámica. Sin embargo, sólo tendremos en este caso las cargas generadas por el fluido y por lo tanto la trayectoria a lo largo de la cual se mueve el cuerpo se supone prescrita.



4.1.1. Formulación del problema y elección de coordenadas

Cuando tratamos el movimiento de los cuerpos dependientes del tiempo, la selección del sistema de coordenadas es importante. Es útil describir el movimiento no estacionario del cuerpo en el que se aplica la condición de frontera de flujo normal nulo en unas coordenadas fijas al perfil (x, y, z) . El movimiento del origen O en este sistema de coordenadas (x, y, z) se prescribe luego en un marco de referencia inercial (X, Y, Z) y se asume conocido. Por simplicidad, supondremos que en $t = 0$, el movimiento relativo del origen O_0 del marco de referencia fijado al cuerpo se prescribe por su localización $\mathbf{R}_0(t)$, y su orientación instantánea $\Theta(t)$, donde (ϕ, θ, ψ) son los ángulos de rotación de Euler (ver [7]):

$$(X_0, Y_0, Z_0) = \mathbf{R}_0(t) \quad (4.1)$$

$$(\phi, \theta, \psi) = \Theta(t) \quad (4.2)$$

Como el fluido que rodea al cuerpo es no viscoso, irrotacional e incompresible, puede definirse un potencial de velocidad $\Phi(X, Y, Z)$ en el marco inercial y la ecuación de continuidad en este marco de referencia es

$$\nabla^2 \Phi = 0 \text{ (en } X, Y, Z) \quad (4.3)$$

y la primera condición de frontera que se requiere para que la velocidad normal a las fronteras del sólido sea cero es:

$$(\nabla \Phi + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ (en } X, Y, Z) \quad (4.4)$$

Aquí $-\mathbf{v}$ es la velocidad de la superficie y $\mathbf{n} = \mathbf{n}(X, Y, Z, t)$ es el vector normal a esta superficie en movimiento, vista desde el marco de referencia inercial.

Es interesante señalar que Φ es el potencial de velocidad total, pero como resultado de su definición en un marco unido al fluido no perturbado su magnitud es pequeña.

La segunda condición de frontera requiere que la perturbación del flujo debida al movimiento del cuerpo a través del fluido debería tender a cero a medida que se aleje de este:

$$\lim_{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0| \rightarrow \infty} \nabla \Phi = 0 \quad (4.5)$$

donde $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$.

Para el caso del flujo no estacionario, el uso de la condición de Kelvin proporcionará una ecuación que se puede utilizar para determinar la circulación de los torbellinos de la estela.

En general, la condición de Kelvin establece que, en la región del flujo potencial, el momento angular no cambia, y por lo tanto, la circulación Γ alrededor de una curva de fluido que encierra al cuerpo y su estela se conserva. Esto quiere decir que para cualquier instante de tiempo t se cumple que:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \quad (4.6)$$



La solución de este problema, que se vuelve dependiente del tiempo a causa de la condición de frontera (4.4) es más fácil de determinar en el sistema de coordenadas fijado al cuerpo.

En consecuencia, se debe establecer una transformación f entre los dos sistemas de coordenadas, basándonos en la información de la trayectoria de vuelo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f(X_0, Y_0, Z_0, \phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Dicha transformación debería incluir la traslación y rotación del sistema (x, y, z) y por ejemplo, podría tener la forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi(t) & \sin \phi(t) \\ 0 & -\sin \phi(t) & \cos \phi(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & 0 & -\sin \theta(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta(t) & 0 & \cos \theta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi(t) & \sin \psi(t) & 0 \\ -\sin \psi(t) & \cos \psi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

De forma similar, la velocidad cinemática ν del fluido no perturbado debida al movimiento del cuerpo, vista en el marco de referencia del cuerpo, viene dada por:

$$\nu = -[\mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}] \quad (4.9)$$

donde \mathbf{V}_0 es la velocidad del origen del sistema (x, y, z) y debe resolverse en las direcciones instantáneas (x, y, z) ,

$$\mathbf{V}_0 = (\dot{X}_0, \dot{Y}_0, \dot{Z}_0) \quad (4.10)$$

Aquí $\mathbf{r} = (x, y, z)$ es el vector de posición y $\boldsymbol{\Omega} = (p, q, r)$ es la velocidad de rotación del marco de referencia del cuerpo como se muestra en la figura 4.1, donde (p, q, r) son las componentes de la velocidad angular.

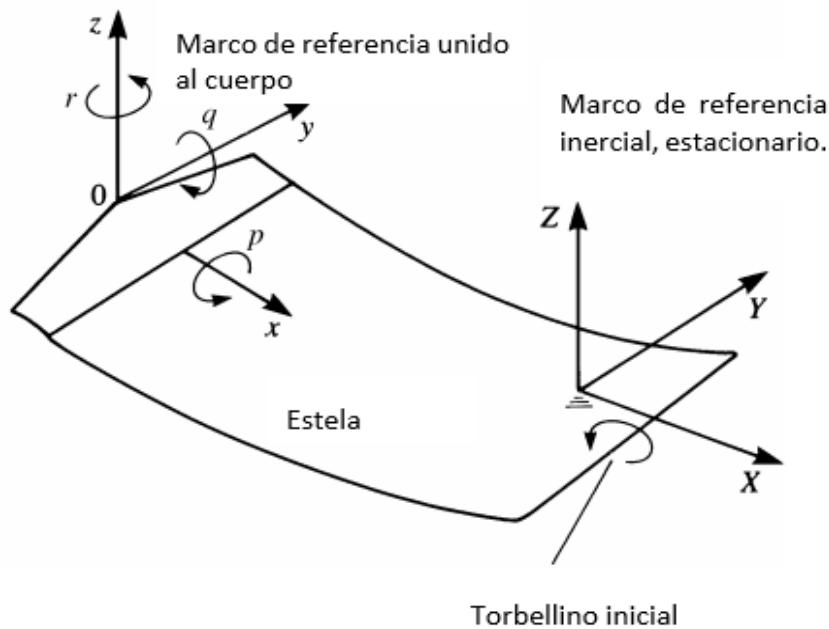


Figura 4.1. Coordenadas del cuerpo e inerciales. Fuente [16]

En situaciones en las que se deseé un movimiento relativo adicional \mathbf{v}_{rel} en el sistema (x, y, z) , como por ejemplo un movimiento oscilatorio de pequeña amplitud del ala o del perfil, además del movimiento promedio del sistema del cuerpo, entonces la ecuación (4.9) se transforma en

$$\mathbf{v} = -[V_0 + \mathbf{v}_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}] \quad (4.11)$$

$$\text{y } \mathbf{v}_{rel} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

La transformación apropiada de las ecuaciones (4.3) y (4.4) en el marco de referencia del cuerpo requiere la evaluación de varias derivadas en el sistema (x, y, z) . Estas pueden encontrarse utilizando la regla de la cadena. Supongamos por ejemplo que el cuerpo de la figura 4.1 se traslada hacia la izquierda y solamente una rotación en θ está permitida. En esta situación, la ecuación (4.7) proporcionará la transformación entre las coordenadas (x, y, z) y (X, Y, Z) que dependerán de una rotación únicamente y tendremos entonces que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial Z} &= -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.12)$$

La derivada temporal en el sistema (x, y, z) puede ser obtenida por la regla de la cadena (y es similar a la ecuación (4.9) menos el término de velocidad relativa \mathbf{v}_{rel}):



$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{inercial} = -[\mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}] \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{cuerpo} \quad (4.13)$$

Pero es posible transformar las ecuaciones (4.3) y (4.4) en el marco de referencia del cuerpo sin conocer explícitamente la ecuación (4.7) y llegar a la misma conclusión. Por ejemplo, en cualquier momento la ecuación de continuidad es independiente de la orientación del sistema de coordenadas y la masa debería conservarse. Por lo tanto, la cantidad $\nabla^2\Phi$ es independiente del sistema de coordenadas instantáneo y la ecuación de continuidad en términos de (x, y, z) permanece invariable. En las coordenadas (x, y, z) tendremos por tanto:

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (4.14)$$

También las dos condiciones de frontera dadas por (4.4) y (4.5) deben establecer las mismas condiciones físicas. El gradiente $\nabla\Phi$ tendrá la misma magnitud y la velocidad cinemática v vendrá dada por la ecuación (4.9).

Por lo tanto, la condición de frontera de velocidad normal cero a la superficie del sólido en el marco del cuerpo se convierte en coordenadas (x, y, z) en:

$$(\nabla\Phi + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.15)$$

Aquí \mathbf{n} es el vector normal a la superficie del cuerpo en términos de las coordenadas del cuerpo (x, y, z) .

Si usamos la ecuación (4.11) con \mathbf{v}_{rel} representando el movimiento del cuerpo en las coordenadas (x, y, z) la ecuación (4.15) se convierte en:

$$(\nabla\Phi - \mathbf{V}_0 - \mathbf{v}_{rel} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.16)$$

La conclusión más importante de las ecuaciones (4.14) y (4.15) es que, para flujos incompresibles, la solución instantánea es independiente de las derivadas en el tiempo, es decir, ya que se supone que la velocidad del sonido es infinita, la influencia de la condición de frontera instantánea es inmediatamente irradiada a través de toda la región de fluido.

Por lo tanto, las técnicas de solución del estado estacionario pueden utilizarse para tratar el caso no estacionario sustituyendo la condición de frontera instantánea (ecuación (4.15)) en cada instante de tiempo.

Por su parte, la forma de la estela dependerá de la historia temporal del movimiento y, en consecuencia, es necesario desarrollar un modelo apropiado de estela de torbellinos.

Para la mayoría de las situaciones se debe prescribir la línea que separa la estela. Como en el caso de flujos estacionario, se supone que la condición de Kutta es válida para el caso no estacionario (en flujos con frecuencias reducidas menores que 1, según [27], donde la frecuencia reducida $k = \omega U_\infty / b$). Por lo tanto, a lo largo de los bordes de fuga de las superficies de sustentación o del borde de fuga en el caso de los perfiles, la velocidad debe ser finita y, por tanto:

$$\nabla\Phi < \infty \quad (4.17)$$

en el borde de fuga.



4.1.2. Condiciones físicas adicionales

La solución de la ecuación de Laplace aún después de considerar una combinación de torbellinos y de cumplir las condiciones de contorno, no es única. Para unas condiciones de flujo sustentador, la magnitud de la circulación depende de la forma de la estela y la localización de la línea de vertido a la estela y, por lo tanto, se debe establecer un modelo apropiado para la misma.

Para encontrar este modelo vamos a seguir algunas consideraciones físicas adicionales:

1. Intensidad de la estela

La solución más simple de este problema es aplicar la condición bidimensional de Kutta a lo largo del borde de fuga (trailing edge) de la superficie sustentadora:

$$\gamma_{T.E.} = 0 \quad (4.18)$$

La validez de esta hipótesis depende de la componente normal de la velocidad cinemática al borde de fuga, que debe ser mucho menor que U .

También puede utilizarse la condición de Kelvin para calcular el cambio en la circulación de la estela:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \quad (4.19)$$

2. Forma de la estela

Debido a que la estela no debe originar fuerzas (sustentación) la condición de Kutta-Joukowski establece que:

$$\mathbf{U} \times \boldsymbol{\gamma}_w = 0 \quad (4.20)$$

Cuando la estela se modela por medio de una distribución de torbellinos de fuerza $\boldsymbol{\gamma}_w$, este requisito puede interpretarse como que la velocidad debería ser paralela al vector circulación:

$$\boldsymbol{\gamma}_w \parallel \mathbf{U} \quad (4.21)$$

4.1.3. Cálculo de las presiones

La solución de la ecuación (4.14) proporcionará el potencial de velocidades y las componentes de velocidad. Una vez hayan sido determinadas estas, podrá calcularse la distribución de presiones por medio de la ecuación de Bernoulli.

En el marco de referencial inercial (X, Y, Z), esta ecuación puede escribirse como

$$\frac{p_\infty - p}{\rho} = \frac{(\nabla\Phi)^2}{2} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial Z} \right)^2 \right] + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (4.22)$$



y permanecerá invariable, la derivada temporal de la velocidad potencial estará afectada por el marco de referencia y debe evaluarse por medio de la ecuación (4.13). Por lo tanto, según la referencia [17], la ecuación (4.22) se transformará en el marco de coordenadas (x, y, z) en:

$$\frac{p_\infty - p}{\rho} = \frac{(\nabla\Phi)^2}{2} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial Z} \right)^2 \right] - (\mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (4.23)$$

A partir del conocimiento de las presiones es posible calcular las fuerzas de sustentación y el coeficiente de sustentación total en el tiempo como ya se estudió en el capítulo anterior.

4.2. Algoritmo numérico para el caso bidimensional no estacionario

Una vez expuestos los fundamentos de los flujos incompresibles no estacionarios, vamos a desarrollar un algoritmo numérico que nos permita obtener la solución de $\gamma(t, x)$ y obtener luego otras variables del campo fluido. El algoritmo que expondremos aquí, al igual que para el caso estacionario, es una adaptación del método de Katz-Plotkin de la referencia [16] suponiendo unos ejes ligados al perfil y los vórtices tanto del perfil como de la estela, situados en el eje $z = 0$.

De esta manera vamos a suponer un perfil en el que se impone un movimiento definido por la función $z_p(x, t)$ y discretizaremos

Mientras que $\nabla\Phi$ es independiente del marco de referencia tanto la geometría del perfil como de la estela. Posteriormente, aplicando la condición de contorno no estacionaria y la condición de Kutta podremos determinar la circulación en el perfil y en la estela para cada instante temporal.

De esta manera los pasos de los que se compondrá nuestro algoritmo serán los siguientes:

Paso 1: Discretización de la geometría

El primer paso será la discretización de la geometría del perfil. En la figura 4.2 podemos ver un esquema de esta discretización.

Por un lado dividiremos la cuerda del perfil c en n paneles, iguales (por simplicidad). Por otro lado, discretizaremos la estela situada detrás del perfil en m paneles, iguales por hipótesis y de longitud Δx . Asumiremos por tanto que los torbellinos situados más allá de $m\Delta x$ del borde de fuga no tienen influencia.

También discretizaremos el tiempo, considerando m instantes temporales de duración Δt segundos: $t = \{\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, m\Delta t\}$. La razón de que coincida el número de paneles en la estela y el número de puntos en el tiempo es la siguiente: cada variación en el tiempo genera una variación en la vorticidad del perfil y hace que se desprenda un torbellino. En cada instante el torbellino que se arroja a la estela ocupa el primer panel de esta desplazando al que estaba al segundo panel. Los torbellinos en la estela no aparecen de forma espontánea, sino que son desplazados por ella corriente abajo. Por ello, tras m instantes se han generado m torbellinos que ocupan respectivamente m paneles en la estela. De ahí que el número de paneles en la estela y el número de instantes de tiempo considerados coincidan.

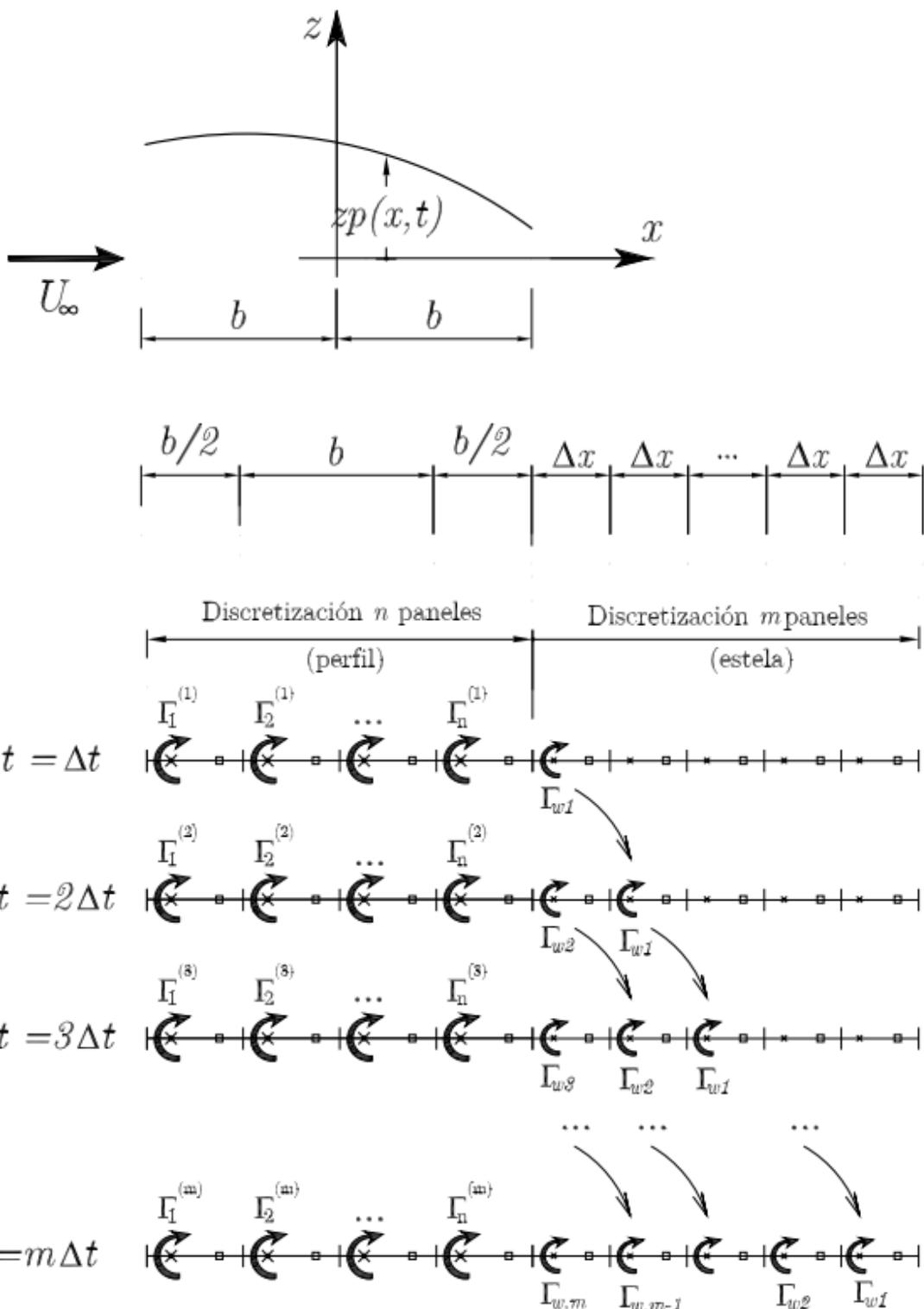


Figura 4.2. Discretización del perfil y de la estela

Llamaremos Γ_k^j al torbellino localizado en el centro aerodinámico del panel k del perfil, en el instante $t = j\Delta t$. La coordenada del centro aerodinámico se representará por $x_{\Gamma k}$ mientras que el punto de control se representará por x_{ck} . Los puntos $x_{\Gamma k}, x_{ck}$ verifican la regla 1/4-3/4 de la ecuación (3.21). Llamaremos Γ_{wj} al torbellino desprendido en el instante $t = j\Delta t$, localizado a

su vez en el punto x_{wj} que a su vez se encuentra a $\Delta x/4$ del inicio del correspondiente panel. Nótese que los torbellinos en la estela se van desplazando hacia la derecha haciendo sitio al que se desprende. Lo hacen a la velocidad U_∞ de forma que recorren Δx metros en el tiempo Δt , por lo que la longitud de los paneles en la estela se relaciona con el incremento de tiempo mediante la expresión:

$$\Delta x = U_\infty \Delta t \quad (4.24)$$

Paso 2: Determinación de la circulación en el perfil y en la estela

Las incógnitas del problema son los valores de los n torbellinos del perfil en cada instante y los m torbellinos de la estela. Los torbellinos del perfil se pueden organizar en m vectores columna adimensionales de la forma:

$$\mathbf{g}^{(j)} = \left\{ \frac{\Gamma_1^{(j)}}{bU_\infty}, \frac{\Gamma_2^{(j)}}{bU_\infty}, \dots, \frac{\Gamma_n^{(j)}}{bU_\infty} \right\}^T \equiv \left\{ g_1^{(j)}, g_2^{(j)}, \dots, g_n^{(j)} \right\}^T, \quad 1 \leq j \leq m \quad (4.25)$$

Los torbellinos de la estela adimensionales los denotaremos por

$$g_{wj} = \frac{\Gamma_{wj}}{bU_\infty} \quad 1 \leq j \leq m \quad (4.26)$$

Tenemos por tanto un total de $nm + m = m(n + 1)$ incógnitas que se resolverán mediante un procedimiento iterativo que describiremos a continuación.

Los datos conocidos son los desplazamientos de los puntos del perfil en cada instante, es decir la función $z_p(x, t)$.

Las ecuaciones que deben cumplirse para todos los instantes de tiempo son dos: la condición de contorno no estacionaria (4.16) y la condición de conservación de la vorticidad (4.19).

La condición de contorno no estacionaria recordemos que establece que en cada instante el flujo queda adherido al perfil y que las velocidades llevan la dirección de este. Estas ecuaciones deben ser comprobadas en los puntos de control. En términos de la discretización geométrica podemos escribir:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{x=x_{ci}, z=0, t=j\Delta t} = \left[\frac{\partial z_p}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial z_p}{\partial x} \right]_{x=x_{ci}, t=j\Delta t}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m \quad (4.27)$$

Por su parte, la condición de conservación de vorticidad puede expresarse como:

$$\sum_{k=1}^n \Gamma_k^j + \Gamma_{w1} + \Gamma_{w2} + \dots + \Gamma_{wj} \quad 1 \leq j \leq m \quad (4.28)$$

Veamos ahora como obtener las incógnitas en cada paso temporal usando las ecuaciones planteadas. Consideraremos para ello que el estado en $t = 0$ es estacionario.



Instante $t = t_1 = \Delta t$

Comienza el movimiento y en el perfil aparecen n torbellinos $\Gamma_1^{(1)}, \dots, \Gamma_n^{(1)}$. Se desprende el primer torbellino a la estela Γ_{w1} que queda localizado en el punto $x_{w1} = b + \Delta x/4$ centro aerodinámico del primer panel de la estela). Tenemos pues en total $n + 1$ incógnitas. Planteamos la primera ecuación de conservación de vorticidad:

$$\Gamma_1^{(1)} + \dots + \Gamma_n^{(1)} + \Gamma_{w1} = 0 \quad (4.29)$$

El resto de ecuaciones se obtienen de las condiciones de contorno (n ecuaciones) aplicadas en cada punto de control, $1 \leq i \leq n$. Así se tiene que

$$-\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k^{(1)}}{x_{ci} - x_{\Gamma k}} - \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma_{w1}}{x_{ci} - x_{w1}} = \left[\frac{\partial z_p}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial z_p}{\partial x} \right]_{x=x_{ci}, t=j\Delta t} \equiv w_a(x_{ci}, j\Delta t) \quad (4.30)$$

Introducir las variables adimensionales

$$\begin{aligned} \xi_{ci} &= \frac{x_{ci}}{b}, & \xi_{\Gamma k} &= \frac{x_{\Gamma k}}{b}, & \xi_{wj} &= \frac{x_{wj}}{b}, & g_k^{(j)} &= \frac{\Gamma_k^{(j)}}{bU_\infty}, & g_{wj} &= \frac{\Gamma_{wj}}{bU_\infty}, \\ v_k^{(j)} &= \frac{w_a(x_{ci}, j\Delta t)}{U_\infty} \end{aligned} \quad (4.31)$$

nos permite poner las $n + 1$ ecuaciones en forma matricial como

$$\mathbf{r}^T \mathbf{g}^{(1)} + g_{w1} = 0 \quad (4.32)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{g}^{(1)} + \mathbf{a}_{w1} g_{w1} = \mathbf{v}^{(1)} \quad (4.33)$$

donde los torbellinos en el perfil se han organizado en el vector columna $\mathbf{g}^{(1)}$ introducido en la ecuación (4.25). Además la matriz \mathbf{A} y los vectores columna \mathbf{r} , \mathbf{a}_{w1} y $\mathbf{v}^{(1)}$ se definen como:

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{\xi_{c1} - \xi_{\Gamma 1}} & \frac{1}{\xi_{c1} - \xi_{\Gamma 2}} & \dots & \frac{1}{\xi_{c1} - \xi_{\Gamma n}} \\ \frac{1}{\xi_{c2} - \xi_{\Gamma 1}} & \frac{1}{\xi_{c2} - \xi_{\Gamma 2}} & \dots & \frac{1}{\xi_{c2} - \xi_{\Gamma n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\xi_{cn} - \xi_{\Gamma 1}} & \frac{1}{\xi_{cn} - \xi_{\Gamma 2}} & \dots & \frac{1}{\xi_{cn} - \xi_{\Gamma n}} \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Y

$$\mathbf{r} = \{1, 1, \dots, 1\}^T, \quad \mathbf{a}_{wj} = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\xi_{c1} - \xi_{wj}}, \dots, \frac{1}{\xi_{cn} - \xi_{wj}} \right\}^T \quad (4.35)$$

$$\mathbf{v}^{(j)} = \left\{ v_1^{(j)}, \dots, v_n^{(j)} \right\}^T = \frac{1}{U_\infty} \{ w_a(x_{c1}, j\Delta t), \dots, w_a(x_{cn}, j\Delta t) \}^T \quad (4.36)$$

De la ecuación (4.32) se puede extraer g_{w1} como

$$g_{w1} = -\mathbf{r}^T \mathbf{g}^{(1)} \quad (4.37)$$

Al introducir esta expresión en la ecuación (4.33) y tras algunas operaciones se tiene un sistema de ecuaciones para obtener $\mathbf{g}^{(1)}$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{a}_{w1} \mathbf{r}^T) \mathbf{g}^{(1)} = \mathbf{v}^{(1)} \quad (4.38)$$

Instante $t = t_j = j\Delta t$

En el instante $t = j\Delta t$ suponemos conocidos los torbellinos desprendidos en todos los instantes de tiempo anteriores $\Gamma_{w1}, \Gamma_{w2}, \dots, \Gamma_{w,j-1}$ y que pasan al siguiente panel y estarán localizados en las coordenadas $x_{wj}, x_{w,j-1}, \dots, x_{w2}$ respectivamente. El torbellino desprendido en este instante, Γ_{wj} (incógnita), se localiza en el primer panel, en $x = x_{w1}$.

Los torbellinos en el perfil valen ahora $\mathbf{g}^{(j)} = \left\{ \Gamma_1^{(j)}, \dots, \Gamma_n^{(j)} \right\}^T / bU_\infty$. La ecuación de la conservación de vorticidad se escribe como:

$$\Gamma_1^j + \dots + \Gamma_n^j + \Gamma_{w1} + \Gamma_{w2} + \dots + \Gamma_{w,j-1} + \Gamma_{wj} = 0 \quad (4.39)$$

mientras que las condiciones de contorno (n ecuaciones) en los puntos de control se escribirán como:

$$-\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k^{(j)}}{x_{ci} - x_{\Gamma k}} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\Gamma_{wk}}{x_{ci} - x_{w,j-k+1}} - \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma_{wj}}{x_{ci} - x_{w1}} = w_a(x_{ci}, j\Delta t) \quad (4.40)$$

Las ecuaciones en forma matricial y adimensional quedarían en el caso general como:

$$\mathbf{r}^T \mathbf{g}^{(j)} + \sum_{k=1}^{j-1} g_{wk} + g_{wj} = 0, \quad 2 \leq j \leq m \quad (4.41)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{g}^{(j)} + \sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{a}_{w,j-k+1} g_{wk} + \mathbf{a}_{w1} g_{wj} = \mathbf{v}^{(j)} \quad 2 \leq j \leq m \quad (4.42)$$

De nuevo, despejando g_{wj} de la ecuación (4.41) e introduciéndolo en la ecuación (4.42) obtenemos:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{a}_{w1}\mathbf{r}^T)\mathbf{g}^{(j)} = \mathbf{v}^{(j)} + \sum_{k=1}^{j-1} (\mathbf{a}_{w1} - \mathbf{a}_{w,j-k+1})\mathbf{g}_{wk} \quad (4.43)$$

De cara al cálculo numérico es interesante resaltar que en cada instante se resuelve un sistema de ecuaciones de tamaño n basado en la misma matriz de coeficientes de valor $\mathbf{A} - \mathbf{a}_{w1}\mathbf{r}^T$ lo cual permite ahorrar cálculos pues se puede obtener su inversa, almacenarla y resolver simplemente usando productos matriciales.

El resultado del análisis en el tiempo da lugar a los $m(n+1)$ valores \mathbf{g}^j , g_{wj} , $1 \leq j \leq m$, pero lo realmente interesante es obtener a partir de estos datos información dinámica relevante, como la distribución del coeficiente de presiones en cada instante, la sustentación y el momento.

Trabajaremos de forma adimensional de forma que el intervalo donde se encuentra el perfil es $\xi \in [-1,1]$. Se tomará un tiempo de referencia T_r respecto del cual se medirán los tiempos del problema. En general este valor se toma igual al tiempo que tarda una partícula de fluido en atravesar la semicuerda, $T_r = b/U_\infty$. Por tanto, el tiempo adimensional será $\tau = t/T_r$. Los incrementos de tiempo adimensional serán $\Delta\tau = \Delta t/T_r$. Vemos que es fácil deducir que $\Delta\xi = \frac{\Delta x}{b} = \Delta\tau$.

El coeficiente de presiones tiene la expresión general:

$$\Delta c_p(x, t) = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = \frac{2}{U_\infty^2} \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right] \quad (4.44)$$

Integrando en el panel k , y trabajando con la integral, se puede obtener la sustentación en dicho panel en función del tiempo como:

$$L_k(t) \int_{x=x_k}^{x_{k+1}} \Delta p(x, t) dx = \rho U_\infty \Gamma_k + \rho \left(x_{k+1} \sum_{j=1}^k \dot{\Gamma}_j - x_k \sum_{j=1}^{k-1} \dot{\Gamma}_j - x_{\Gamma k} \dot{\Gamma}_k \right) \quad (4.45)$$

Esta expresión puede escribirse en función de variables adimensionales como:

$$L_k(\tau) = \rho U_\infty^2 b \left[g_k(\tau) + \xi_{k+1} \sum_{j=1}^k g'_j(\tau) - \xi_k \sum_{j=1}^{k-1} g'_j(\tau) - \xi_{\Gamma k} g'_k(\tau) \right] \quad (4.46)$$

donde $(\blacksquare)' = d(\blacksquare)/d\tau$. Por tanto, el coeficiente de presiones en el panel k se puede calcular como la fuerza (por unidad de envergadura) en dicho panel dividido por la longitud del panel.

$$\Delta c_{pk}(\tau) = \frac{L_k(\tau)/\Delta x_k}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \quad 1 \leq k \leq n \quad (4.47)$$

Trabajando con esta ecuación puede obtenerse una expresión simplificada como:

$$\Delta c_{pk}(\tau) = \frac{2}{\Delta \xi_k} g_k(\tau) + \frac{3}{2} g'_{\cdot k}(\tau) + 2 \sum_{j=1}^{k-1} g'_{\cdot j}(\tau) \quad 1 \leq k \leq n \quad (4.48)$$

Además, como todos los paneles tienen la misma longitud, podemos escribir esta última ecuación como:

$$\Delta c_{pk}(\tau) = n g_k(\tau) + \frac{3}{2} g'_{\cdot k}(\tau) + 2 \sum_{j=1}^{k-1} g'_{\cdot j}(\tau) \quad 1 \leq k \leq n \quad (4.49)$$

En forma matricial se puede poner, para cada instante $\tau_j = j\Delta\tau$, los coeficientes de presiones para cada panel en función del vector de torbellinos adimensionales y de sus derivadas (respecto a τ).

$$\Delta \mathbf{c}_p^{(j)} = n \mathbf{g}^{(j)} + \mathbf{T} \frac{d\mathbf{g}^{(j)}}{d\tau} \quad 1 \leq j \leq m$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 3/2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3/2 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{n \times n} \quad (4.50)$$

$$\Delta \mathbf{c}_p^{(j)} = \{\Delta c_{p1}(\tau_j), \dots, \Delta c_{pn}(\tau_j)\}^T$$

Del análisis no estacionario se obtienen los torbellinos en los diferentes instantes $\tau = \Delta\tau, 2\Delta\tau, \dots, m\Delta\tau$ lo cual permite obtener la derivada de la serie temporal $g_k(\tau)$ mediante diferencias finitas y a partir de ella los coeficientes de presiones. Por otro lado, a partir de la expresión de la sustentación total y del momento se pueden obtener el coeficiente de sustentación total y el de momento en un punto x_a como:

$$C_L(\tau) = \frac{L(\tau)}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 c} = \sum_{j=1}^n g_j(\tau) + \sum_{j=1}^n g'_{\cdot j}(\tau)(1 - \xi_{\Gamma j}) \quad (4.51)$$

$$C_{ma} = \frac{M_a(\tau)}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 c^2} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n g_j(\tau)(\xi_{\Gamma j} - \xi_a) - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n g'_{\cdot j}(\tau)(1 - \xi_{\Gamma j})(1 + \xi_{\Gamma j} - 2\xi_a) \quad (4.52)$$

4.3. Soluciones analíticas cerradas para el caso bidimensional no estacionario

Una vez desarrollado el algoritmo numérico, vamos a ver en esta sección tres problemas de aerodinámica no estacionaria estudiados en la literatura de los que se conocen una solución

cerrada para el caso bidimensional y cuyas expresiones analíticas serán utilizadas para validar el código programado.

Los problemas son: cambio instantáneo en el ángulo de ataque o problema de Wagner, perfil oscilante con desplazamiento vertical o problema de Theodorsen y perfil entrando en una ráfaga o problema de Küssner.

4.3.1. Cambio instantáneo en el ángulo de ataque. Función de Wagner

Consideremos un perfil bidimensional de cuerda c , inicialmente con un pequeño ángulo de ataque α y moviéndose a la velocidad U . Asumiremos como siempre que el flujo es no viscoso, incompresible e irrotacional. El perfil es entonces sometido a un cambio instantáneo en el ángulo de ataque $\Delta\alpha$. Si el modelo aerodinámico cuasi-estacionario fuese utilizado, la sustentación se incrementaría instantáneamente al nuevo valor cuasi-estacionario para el nuevo ángulo de incidencia. Sin embargo, esto no es lo que sucede en la realidad.

La figura 4.3 muestra como la sustentación no estacionaria cambia instantáneamente a la mitad de la diferencia entre los valores estacionarios inicial y final y luego aumenta asintóticamente hacia el valor final estacionario. Aproximadamente el 90% del cambio en la sustentación se consigue después de que el perfil ha recorrido una distancia igual a 15 veces el valor de la semi-cuerda; sin embargo, es evidente que hay un retraso considerable después del cambio en el ángulo de ataque antes de que el valor cuasi-estacionario se alcance.

El retraso hasta lograr el nuevo valor de la sustentación estacionaria sucede debido al tiempo que tarda la circulación alrededor del perfil aerodinámico en cambiar a la nueva condición de flujo estacionario y del tiempo que tarda alrededor de la estela en alcanzar un estado estacionario (ver referencia [30]).

Dado que los resultados se expresan en términos de semi-cuerdas, una medida no dimensional, este comportamiento es independiente del tamaño de la cuerda o de la velocidad aerodinámica. Hay que tener en cuenta que el mismo efecto sucedería si la velocidad aerodinámica cambiase repentinamente.

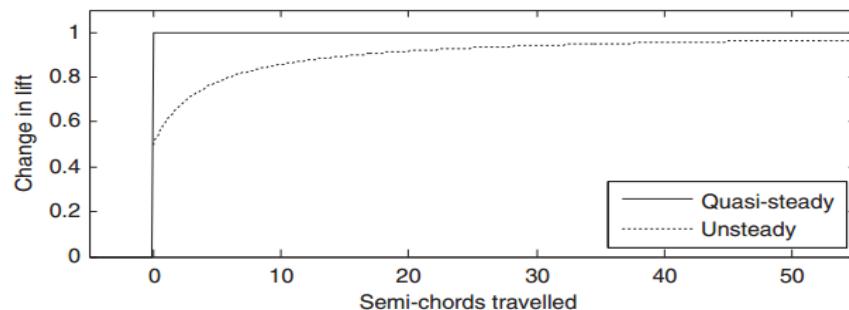


Figura 4.3. Cambio en la sustentación del perfil debido a un cambio repentino del ángulo de ataque. Fuente [30].

La función de Wagner Φ es la herramienta matemática que modela este comportamiento. En términos no dimensionales, $\tau = 2U_\infty t/c = U_\infty/b$, la sustentación por unidad de envergadura después del cambio de ataque $\Delta\alpha$ puede expresarse como:

$$L(\tau) = \rho U_\infty^2 c \pi \alpha_0 \Phi(\tau) \quad (4.53)$$

donde $\Phi(\tau)$ es la función de Wagner y está relacionada con la función de Theodorsen $C(\kappa)$ y la frecuencia reducida κ que veremos en la siguiente sección. Puede calcularse como:

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\kappa=-\infty}^{\infty} \frac{C(\kappa)}{i\kappa} e^{i\kappa\tau} d\kappa \approx 1 - 0,165e^{-0,045\tau} - 0,335e^{-0,3\tau} \quad (4.54)$$

Esta aproximación por función exponencial es muy útil para incluir en un código de programación y comparar soluciones numéricas. El valor exacto de la función de Wagner puede ser obtenida utilizando funciones de Bessel.

Finalmente, el coeficiente de sustentación puede expresarse como:

$$C_L(\tau) = 2\pi\alpha_0\Phi(\tau) \quad (4.55)$$

4.3.2. Perfil oscilante con desplazamiento vertical. Función de Theodorsen

El segundo problema no estacionario que puede encontrarse con solución analítica en la literatura puede verse esquematizado en la figura 4.4. Es el problema del perfil oscilante con desplazamiento vertical:

$$h(t) = h_0 e^{i\omega t} \quad (4.56)$$

donde h_0 representa la amplitud de oscilación y ω la frecuencia de oscilación dimensional.

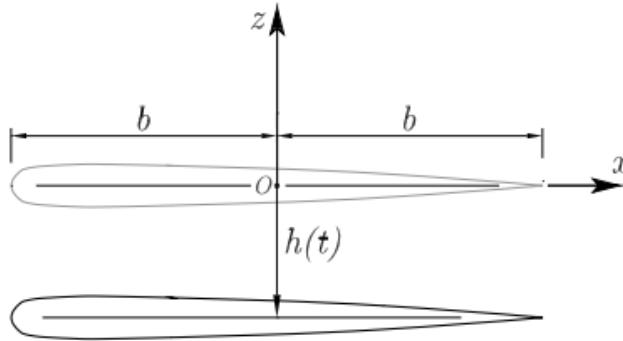


Figura 4.4. Perfil oscilante con desplazamiento vertical

La solución de la sustentación no estacionaria para este problema viene dada a partir de la función de Theodorsen $C(\kappa)$. La función de Theodorsen suele venir expresada en función de la frecuencia reducida κ , que se relaciona con la frecuencia por medio de la expresión:

$$\kappa = \frac{\omega b}{U_\infty} \quad (4.57)$$

Según [30], la función de Theodorsen $C(\kappa)$ es una función compleja que puede expresarse como una suma de su parte real y su parte imaginaria:

$$C(\kappa) = F(\kappa) + iG(\kappa) = \frac{H_1^{(2)}(\kappa)}{H_1^{(2)}(\kappa) + iH_0^{(2)}(\kappa)} = \frac{K_1(i\kappa)}{K_0(i\kappa) + K_1(i\kappa)} \quad (4.58)$$

donde los términos $K_j(i\kappa)$ ($j = 0, 1, \dots$) son las funciones de Bessel de segundo orden y $H_n^{(2)}(\kappa)$ son las funciones de Hankel de segundo orden.

La sustentación para este problema en función del tiempo adimensional τ viene dado por la ecuación:

$$L(\tau) = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 c C_L(\kappa) e^{i\kappa\tau} \quad (4.59)$$

y el coeficiente de sustentación en función de la frecuencia reducida será:

$$C_L(\kappa) = 2\pi \left(\frac{h_0}{b} \right) \left(i\kappa C(\kappa) - \frac{\kappa^2}{2} \right) \quad (4.60)$$

Podemos observar además que la frecuencia reducida κ y la frecuencia ω se pueden relacionar a partir del tiempo t y del tiempo adimensional τ como:

$$\omega t = \kappa\tau \quad (4.61)$$

4.3.3. Perfil entrando en una ráfaga. Función de Küssner

El tercer y último problema de aerodinámica no estacionaria que vamos a estudiar consiste en un perfil que se mueve a una velocidad U y de repente en $t = 0$ comienza a entrar en una ráfaga vertical de aire de velocidad w_0 de forma que en el instante $t = 2b/U_\infty$ toda la cuerda del perfil ha entrado en la ráfaga. Este problema se esquematiza en la figura 4.5.

La función que modela este problema es la función de Küssner ψ , la cual permite resolver el problema de forma analítica. La sustentación en el tiempo adimensional puede calcularse por medio de la expresión:

$$L(\tau) = \rho U_\infty c \pi w_0 \psi(\tau) \quad (4.62)$$

siendo la función de Küssner, según [30], $\psi(\tau)$:

$$\psi(\tau) = \frac{\tau^2 + \tau}{\tau^2 + 2,82\tau + 0,80} \quad (4.63)$$

Finalmente, el coeficiente de sustentación viene dado por la ecuación (4.64):

$$C_L(\tau) = 2\pi \frac{w_0}{U_\infty} \psi(\tau) \quad (4.64)$$

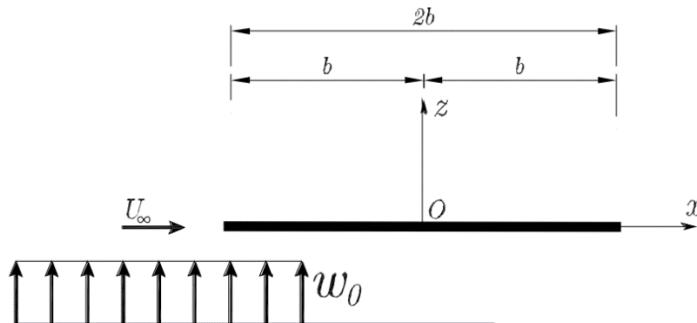


Figura 4.5. Perfil entrando en una ráfaga

4.4. Validación del código numérico

Una vez presentadas las soluciones analíticas a tres de los problemas más famosos de aerodinámica no estacionaria bidimensional que pueden encontrarse en la literatura, ha llegado el momento de comparar las soluciones que proporciona el código numérico programado basado en el algoritmo expuesto de la sección 4.2 con las soluciones analíticas que se derivan de lo expuesto en la sección anterior. De esta forma validaremos el código.

Los resultados que se exponen a continuación se han expresado en unidades adimensionales. El número de paneles en los que se ha discretizado el perfil es $n = 100$ paneles y el número en los que se ha discretizado la estela es $m = 150$ paneles para todas las soluciones que se van a presentar a continuación. Esto es así porque es un número de paneles suficiente como para que el mallado no afecte en la solución. El tamaño de los paneles de la estela es $\Delta\xi = 0,33$ y coincide con el valor del tiempo representado entre el número de paneles de la estela.

Para el caso del problema del perfil con variación repentina del ángulo de ataque, en la figura 4.6 se ha representado la variación obtenida para el coeficiente de sustentación total en función del tiempo adimensional mediante el código numérico programado para un salto en el ángulo de ataque desde $\alpha = 0^\circ$ hasta $\alpha = 5^\circ$ (en línea continua roja) y la solución analítica que proporciona la función de Wagner (en línea negra).

Aunque no es imprescindible, en aras de la representación, la solución numérica en el salto brusco del ángulo de ataque, es decir, en el instante $t = 0$, se ha modelado mediante una rampa lineal para evitar posibles errores numéricos debido a que la derivada $\dot{\alpha}$ en $t = 0$ tiene valor infinito.

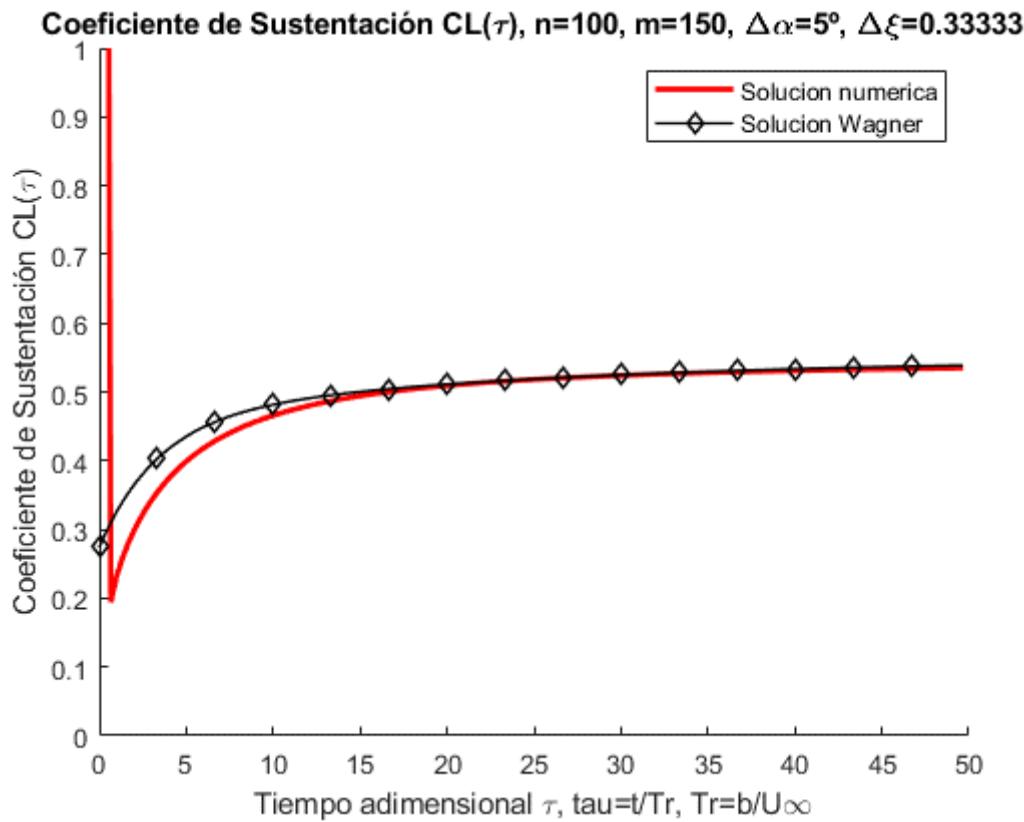


Figura 4.6. Salto del ángulo de ataque $\Delta\alpha=5^\circ$

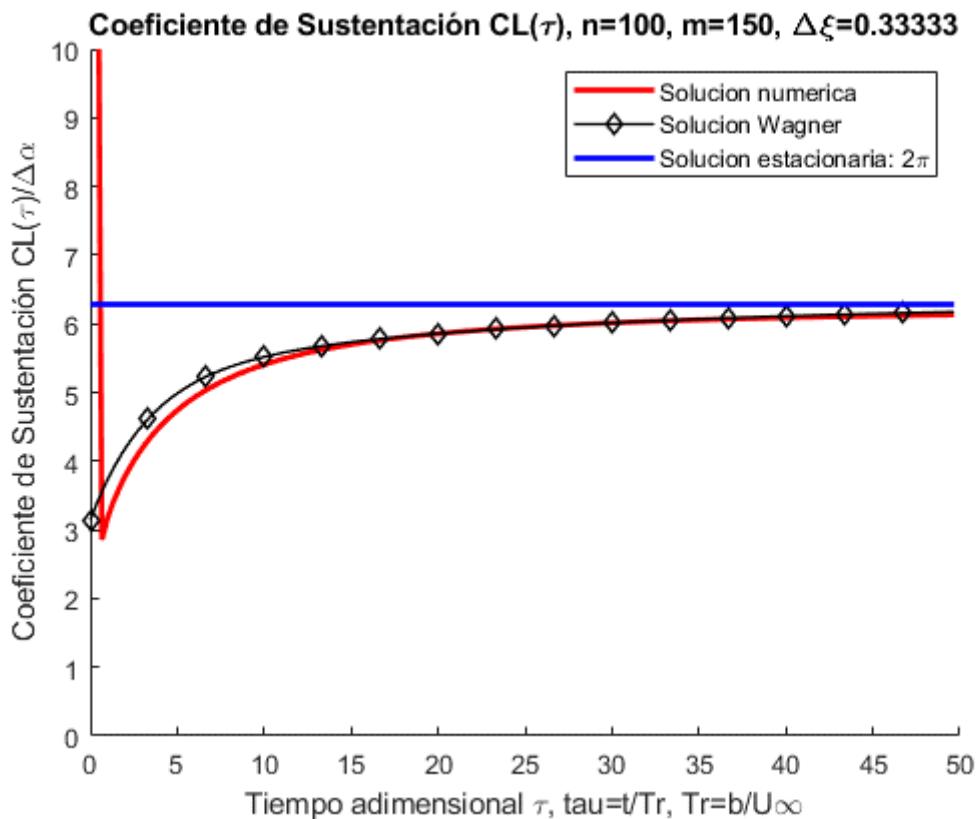


Figura 4.7. Salto del ángulo de ataque $\Delta\alpha=10^\circ$



Por su parte en la figura 4.7 se ha representado la variación del coeficiente de sustentación total en función del tiempo adimensional, adimensionalizado con el salto en el ángulo de ataque (en línea continua roja), la solución proporcionada por la función de Wagner (en línea continua negra) y el valor del coeficiente de sustentación total para el caso estacionario (azul).

Como ya sabemos, el valor del coeficiente de sustentación total para un perfil sin curvatura en flujo incompresible es $C_L = 2\pi\alpha$. Por tanto, la solución estacionaria para el coeficiente de sustentación total adimensionalizada con el ángulo de ataque será 2π y es a este valor al que debe tender la solución numérica no estacionaria del $C_L/\Delta\alpha$ a medida que el tiempo tienda a ∞ . Vemos que esto efectivamente es lo que sucede.

A la vista de los resultados obtenidos en las dos figuras, podemos destacar que la solución que proporciona el código numérico programado concuerda perfectamente con la solución analítica que proporciona la función de Wagner y además tiende al valor estacionario como cabía esperar para tiempos altos.

Además, desde un punto de vista físico del problema si comparamos las soluciones de las figuras 4.6 y 4.7 podemos extraer la conclusión de que para mayores saltos en el ángulo de ataque, mayor será el incremento en el coeficiente de sustentación, como es lógico pensar.

Para el caso del problema del perfil oscilatorio con desplazamiento vertical, en las figuras 4.8, 4.9 y 4.10 se ha representado el valor del coeficiente de sustentación total en función del tiempo adimensional para valores de la frecuencia reducida adimensional igual a $\kappa = 0$, $\kappa = 0,5$ y $\kappa = 0,8$ respectivamente. En cada una de las figuras se ha representado la solución que proporciona el código numérico (solución numérica), la solución analítica que proporciona la función de Theodorsen y la solución según el modelo cuasi-estacionario.

A partir de estas figuras podemos extraer varias conclusiones:

Primeramente, vemos que la solución que proporciona el código numérico concuerda muy bien con la solución analítica que proporciona la función de Theodorsen.

En segundo lugar, vemos que la solución cuasi-estacionaria, es válida tanto más cuanto menor es la frecuencia reducida.

Finalmente vemos también que, para valores más altos de frecuencia reducida, entre más altos son los valores del coeficiente de sustentación entre los que oscila la solución.

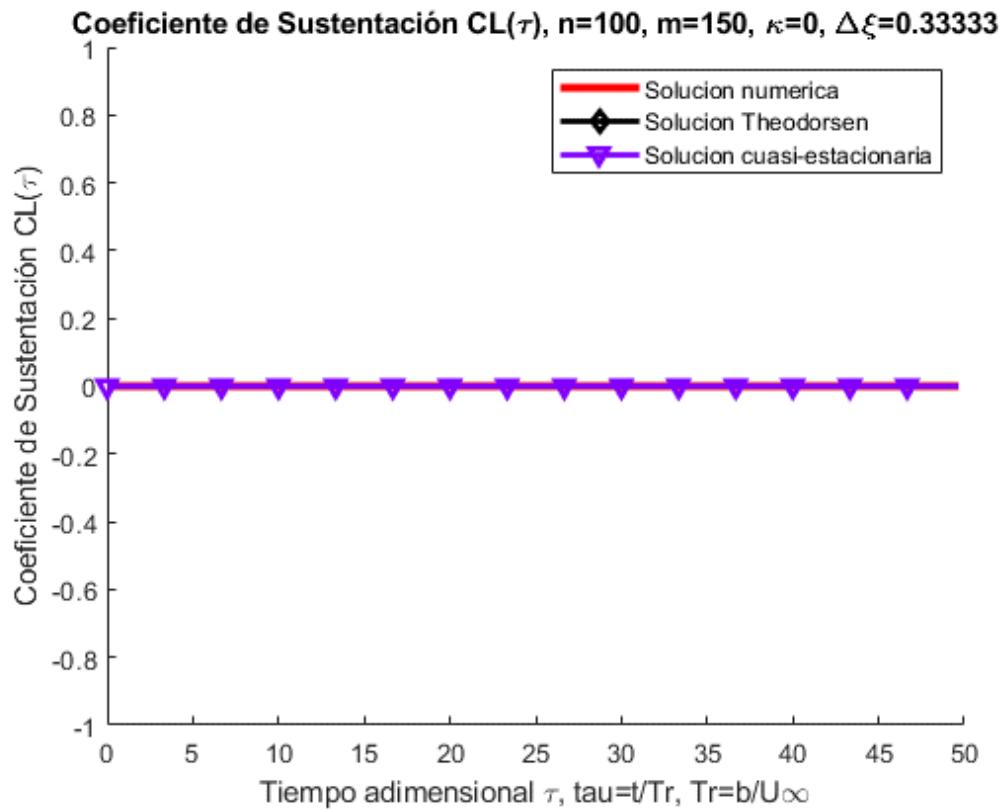


Figura 4.8. Perfil oscilando para frecuencia reducida $\kappa = 0$.

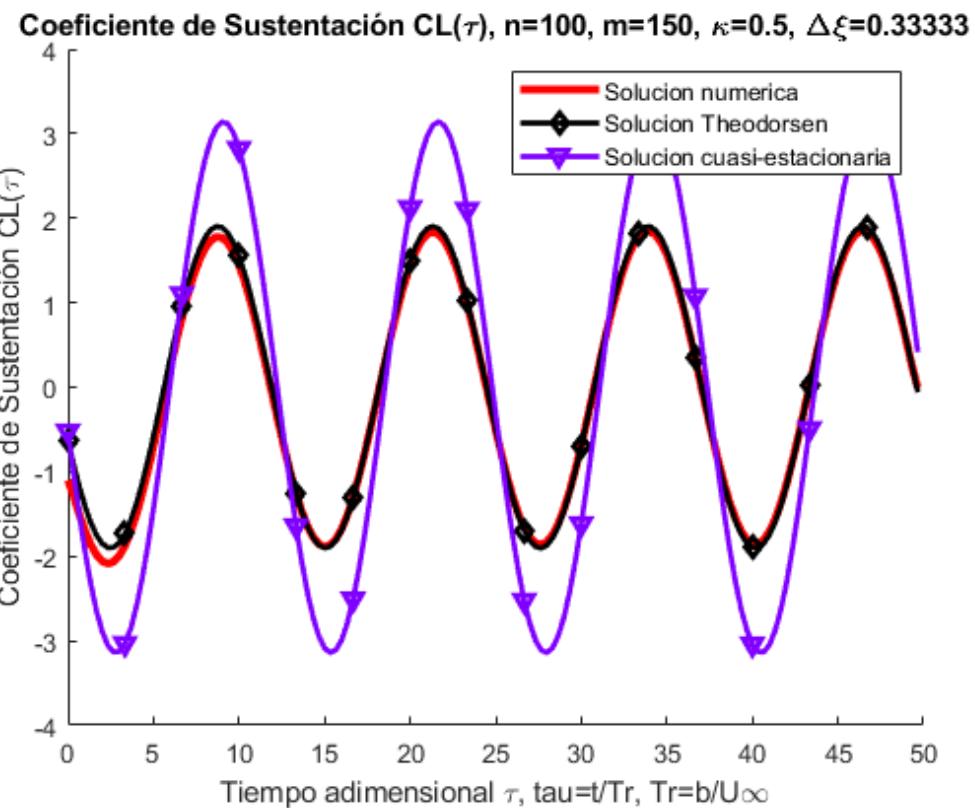


Figura 4.9. Perfil oscilando para frecuencia reducida $\kappa=0.5$.

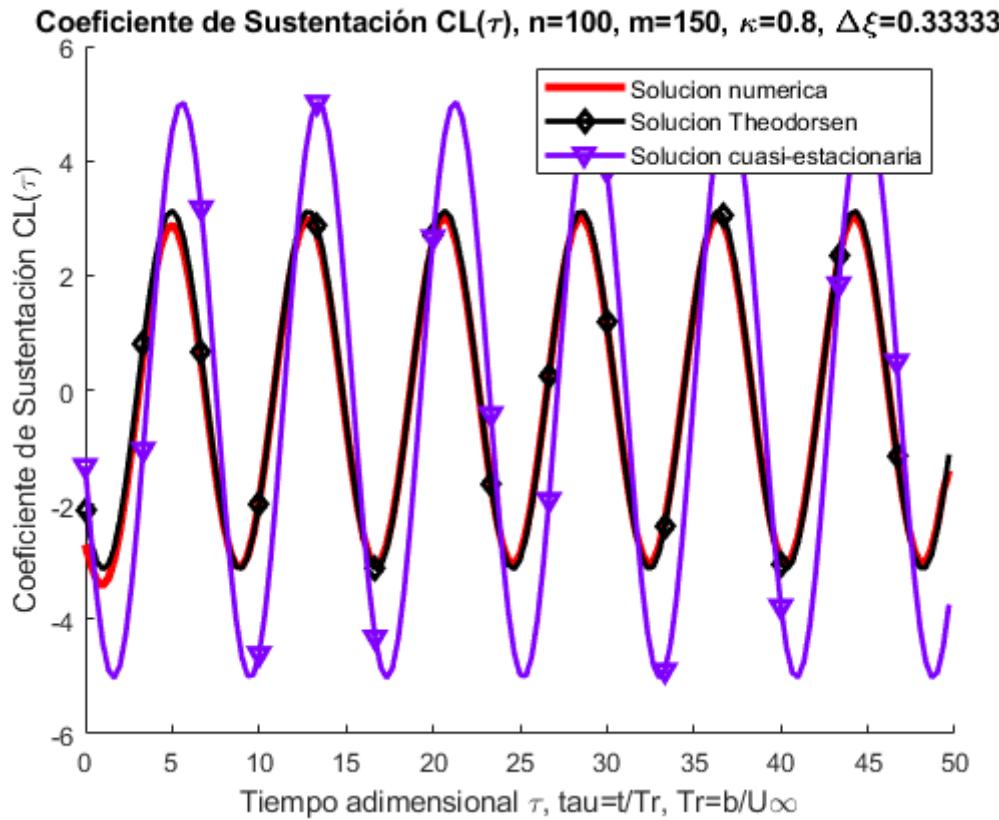


Figura 4.10. Perfil oscilando para frecuencia reducida $\kappa=0,8$.

Para el tercer y último problema, el del perfil entrando en una ráfaga de aire de intensidad constante ascendente w_0 , en las figuras 4.11 y 4.12 se ha representado el valor del coeficiente de sustentación total en función del tiempo adimensional para valores de intensidad adimensional $w_0 = 0,3$ y $w_0 = 0,6$, respectivamente.

Podemos destacar de las soluciones obtenidas que la solución que proporciona el código numérico concuerda muy bien con la solución que proporciona la función de Küssner.

Además también podemos observar, como es lógico pensar, que cuanta mayor intensidad w_0 tiene la ráfaga de aire, mayor es el valor del coeficiente de sustentación total que se alcanza.

Para terminar esta sección, podemos concluir que el código numérico programado para la resolución de flujos no estacionarios incompresibles, irrotacionales y no viscosos alrededor de cuerpos bidimensionales proporciona resultados precisos.

Por tanto, el código queda validado y estamos en disposición de desarrollar uno de los objetivos principales de este trabajo: un código numérico que permita resolver este tipo de flujos, pero ahora alrededor de cuerpos tridimensionales, y más específicamente de alas.

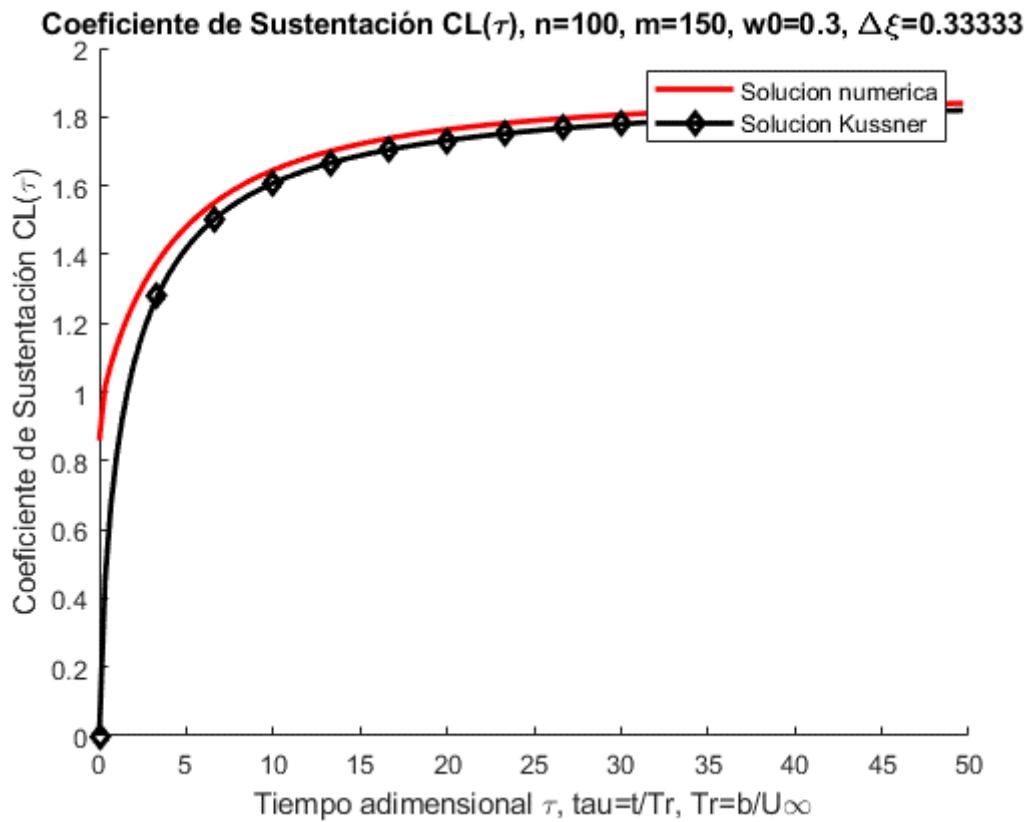


Figura 4.11. Perfil entrando en una ráfaga de intensidad $w_0=0.3$.

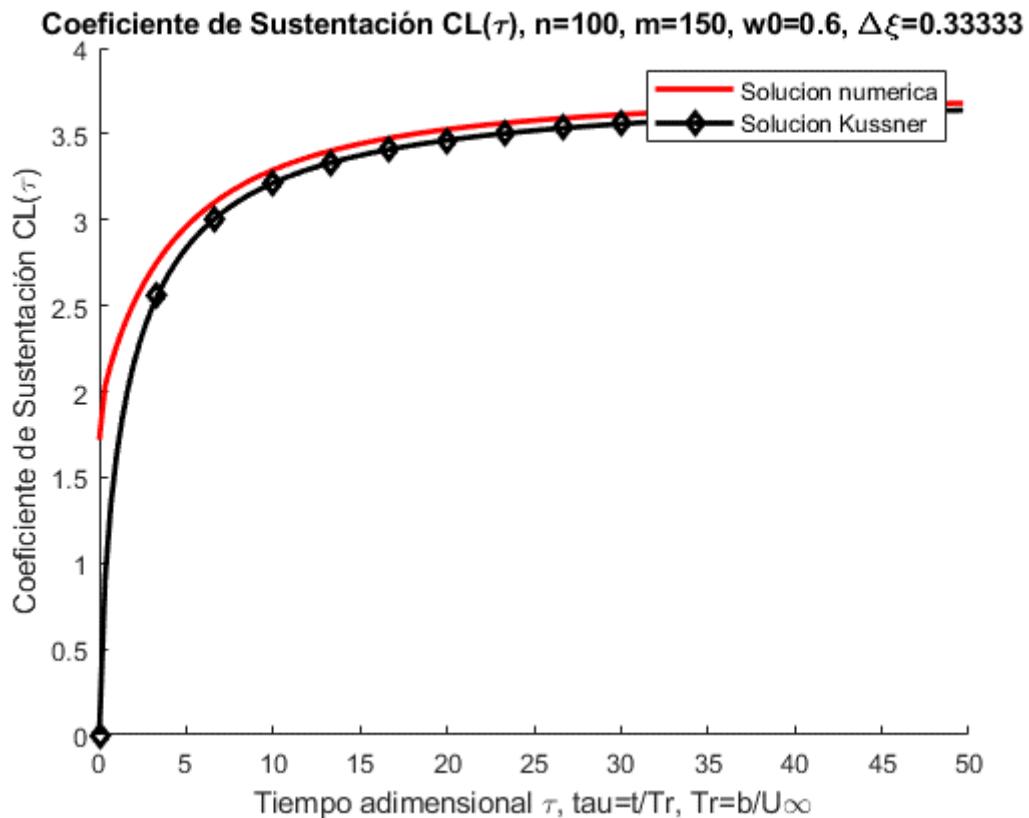


Figura 4.12. Perfil entrando en una ráfaga de intensidad de aire $w_0=0.6$.



Capítulo 5

Solución para el caso tridimensional no estacionario

En el capítulo anterior se describieron con detalle los fundamentos del flujo incompresible, no viscoso, irrotacional y no estacionario y se desarrolló un código numérico para la resolución de este tipo de flujos alrededor de cuerpos bidimensionales (perfiles alas). Este código fue posteriormente validado mediante las soluciones más conocidas y estudiadas de la aerodinámica no estacionaria que pueden encontrarse en la literatura.

El objetivo para este capítulo es desarrollar un código para el caso tridimensional no estacionario para estudiar este tipo de flujos sobre cuerpo tridimensionales, y más concretamente en alas. Este constituye uno de los objetivos centrales del trabajo y la consecución del mismo nos permitirá en el capítulo posterior estudiar uno de los fenómenos más importantes de la aeroelasticidad dinámica y que sólo tiene lugar a bajas velocidades aerodinámicas: el flameo.

Por tanto, comenzaremos en este capítulo desarrollando un algoritmo conocido como método de la malla de torbellinos no estacionarios, conocido popularmente como Unsteady Vortex-Lattice Method (UVLM).

En un segundo paso llevaremos a cabo la validación del código como se ha hecho en casos anteriores.

Terminaremos el capítulo estudiando algunas configuraciones alas y obteniendo conclusiones físicas sobre aerodinámica no estacionaria de alas a partir de los estudios que se realizarán mediante el código programado.

5.1. Unsteady Vortex-Lattice Method

El método del Vortex-Lattice no estacionario (UVLM) es una de las técnicas más extensamente aplicadas para el modelado de aerodinámica tridimensional. Fue desarrollado primeramente en 1940 aunque versiones anteriores ya habían aparecido en la década de 1930. La base del método es el modelado del ala como una lámina delgada de vorticidad, compuesta por anillos de torbellinos (rectangulares, en su versión más simple). Anillos de torbellinos adicionales se desprenden en el borde de fuga para crear una segunda vorticidad con la que se modela la estela del ala.

El método que describiremos a continuación es desarrollado con gran detalle por Katz & Plotkin en la referencia [16]. Nos enfocaremos en este trabajo en desarrollar y programar la versión linealizada del UVLM para, en el siguiente capítulo, construir un modelo aeroelástico que lo utilicen. Para ello seguiremos el método desarrollado por Murua en la referencia [50], principalmente.

El primer principio del UVLM es que modela alas delgadas, es decir, ignora el espesor de esta. Solamente hace uso de la información de la curvatura, por tanto, la información del espesor del ala va en su superficie de curvatura, como se muestra en la figura 5.1. La superficie

de curvatura es el resultado de las superficies superior e inferior del ala en cada punto en la dirección de la envergadura.

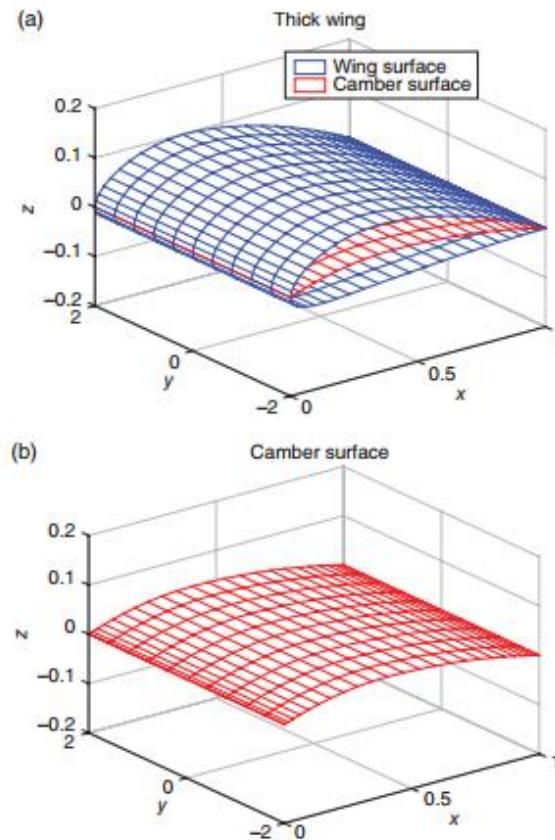


Figura 5.1. Superficie de curvatura del ala

El primer paso para modelar la superficie de curvatura por medio de torbellinos, es construir una malla de anillos de torbellinos. Podemos observar en la figura 5.2. el anillo de torbellino que se utilizará para modelar el ala y que ya fue descrito con gran detalle en la sección 2.12.3.

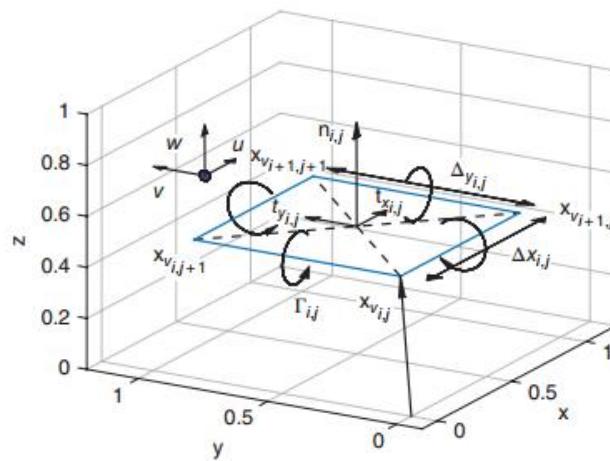


Figura 5.2. Anillo de torbellino

En la figura 5.2 vemos que los vértices del anillo de torbellino son $\mathbf{x}_{v_{i,j}}$, $\mathbf{x}_{v_{i+1,j}}$, $\mathbf{x}_{v_{i+1,j+1}}$ y $\mathbf{x}_{v_{i,j+1}}$ donde \mathbf{x}_v es el vector $[x_v, y_v, z_v]^T$.

La cuerda del anillo es $\Delta x_{i,j} = \mathbf{x}_{v_{i+1,j}} - \mathbf{x}_{v_{i,j}}$ y la envergadura del anillo $\Delta y_{i,j} = y_{v_{i,j+1}} - y_{v_{i,j}}$.

Los cuatro segmentos del anillo de torbellino, tendrán la misma intensidad de torbellino constante, $\Gamma_{i,j}$ como ya se vio en la sección 2.12.3.

El punto de control del panel se localiza en la intersección de las dos diagonales y se define por $\mathbf{x}_c = (\mathbf{x}_{v_{i+1,j}} - \mathbf{x}_{v_{i,j}})/2 + (\mathbf{x}_{v_{i,j+1}} - \mathbf{x}_{v_{i,j}})/2$.

Esta definición será apropiada puesto que solamente tenemos anillos rectangulares planos. En los puntos de control definimos vectores unitarios normales al anillo, $\mathbf{n}_{i,j}$, tangentes al anillo en la dirección de la cuerda, $\mathbf{t}_{x_{i,j}}$, y tangentes al anillo en la dirección de la envergadura, $\mathbf{t}_{y_{i,j}}$. Como el anillo es horizontal, rectangular y paralelo a los ejes x , y y z , sus vectores unitarios son simplemente

$$\mathbf{t}_{x_{i,j}} = [1 \ 0 \ 0]^T, \quad \mathbf{t}_{y_{i,j}} = [0 \ 1 \ 0]^T, \quad \mathbf{n}_{i,j} = [0 \ 0 \ 1]^T \quad (5.1)$$

Como vimos en la sección 2.12.3, la velocidad inducida por el anillo venía dada por la ecuación (2.81). Esta podemos reescribirla en términos de nuestras coordenadas del anillo como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{(i,j),(i,j+1)} + \mathbf{u}_{(i,j),(i,j+1)} + \mathbf{u}_{(i+1,j+1),(i+1,j)} + \mathbf{u}_{(i+1,j),(i,j)} \quad (5.2)$$

donde cada una de las componentes eran las contribuciones individuales de cada uno de los cuatro segmentos del anillo y venían dadas por la ley de Biot y Savart como

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(i,j),(i,j+1)} &= \frac{\Gamma_{ij}}{4\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{v_{i,j}}) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{v_{i,j+1}})}{|(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{v_{i,j}}) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{v_{i,j+1}})|^2} (\mathbf{x}_{v_{i,j+1}} - \mathbf{x}_{v_{i,j}}) \\ &\cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_{v_{i,j}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{v_{i,j}}|} - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_{v_{i,j+1}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{v_{i,j+1}}|} \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

De forma similar podemos escribir las contribuciones para los demás segmentos cambiando los índices donde corresponda. Estas deben calcularse de forma consistente moviéndonos según las manecillas del reloj o en contra rodeando el anillo de torbellino.

En la figura 5.3 se muestra una discretización de un ala y de su estela mediante anillos de torbellinos. Se ha dividido la superficie del ala en $m_v = 2$ paneles en la dirección de la cuerda y $n_v = 5$ paneles en la dirección de la envergadura.

Posteriormente localizaremos las fronteras de los anillos de torbellinos con dimensiones iguales a los paneles geométricos a un cuarto de la cuerda de cada panel. El borde de salida del anillo i,jth se localiza a un cuarto de la cuerda del panel geométrico $i+1,jth$. Los puntos

de control del anillo de torbellino se localizan a tres cuartos de la cuerda de cada panel geométrico.

La estela también es modelada mediante anillos de torbellinos. La cuerda de cada anillo de torbellino de la estela es igual a c/m_v , y su envergadura es igual a la de los anillos de torbellino corriente arriba, en el ala. Los segmentos de salida de la última fila de los anillos del ala y los segmentos de ataque de la primera fila de los anillos de la estela coinciden y se localizan a $c/4/m_v$, detrás del borde de fuga geométrico. La intensidad de los torbellinos de la última fila de los anillos del ala y la primera fila de los anillos de la estela son iguales:

$$\Gamma_{b_{m_v,j}} = \Gamma_{w_{1,j}} \quad (5.4)$$

para $j = 1, \dots, n_v$, donde $\Gamma_{b_{i,j}}$ y $\Gamma_{w_{i,j}}$ son las intensidades de los anillos de torbellino del ala y de la estela, respectivamente.

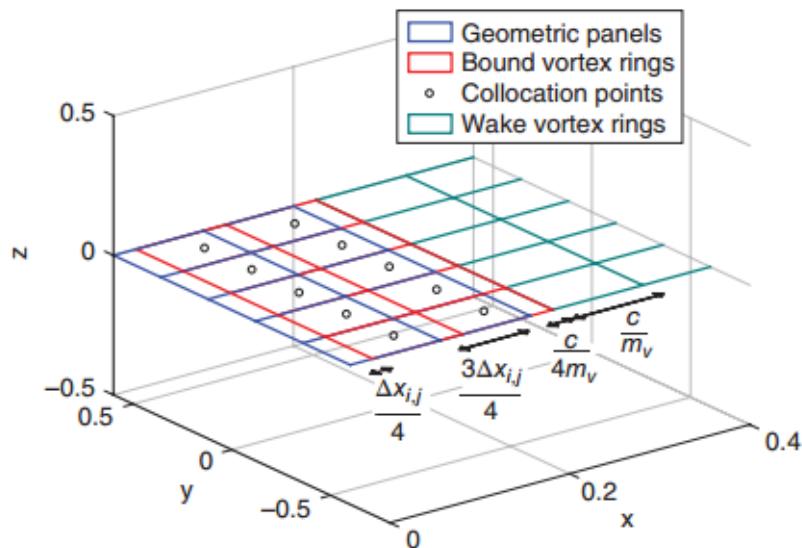


Figura 5.3. Discretización del ala y de la estela

Este esquema de posicionamiento de anillos de torbellino se ha diseñado especialmente para cumplir de forma implícita la condición de Kutta [16]. Los segmentos de anillo de salida de la última fila de los anillos del ala y los segmentos de ataque de la primera fila de los anillos de la estela son contra-rotatorios y tienen intensidad de torbellino similar por lo que la vorticidad total en $c + c/4/m_v$ es baja. En otras palabras, el requisito de Kutta de que el flujo abandone suavemente el borde de fuga se reemplaza por el requisito de que la vorticidad sea muy pequeña a una distancia $c/4/m_v$ corriente abajo del borde de fuga. El esquema es una extensión en 3D del enfoque de modelado de torbellinos puntuales 2D, para el cual se puede demostrar que la condición de Kutta se satisface automáticamente si se coloca un torbellino puntual a un cuarto de la cuerda del perfil y la condición de frontera se fuerza a tres cuartos de la cuerda.

Las incógnitas en el modelo del UVLM son las intensidades de los torbellinos del ala que son función del tiempo y los denotaremos por $\Gamma_{b_{i,j}}(t)$. Las intensidades de los torbellinos de la

estela son conocidos puesto que son iguales a los torbellinos de salida del ala en los instantes anteriores.

El paso temporal se define como:

$$\Delta t = \frac{c}{m_v U} \quad (5.5)$$

De esta forma, la intensidad de los anillos de torbellinos de la estela vendrá dada por

$$\Gamma_{w_{i,j}}(t) = \Gamma_{w_{i-1,j}}(t - \Delta t) \quad (5.6)$$

En otras palabras, la vorticidad de la estela viaja corriente abajo a la velocidad del flujo libre a una velocidad c/m_v metros por paso temporal.

El número de anillos de torbellinos en la estela en la dirección de la envergadura es n_v ; el número en la dirección de la cuerda depende de la longitud de la estela que se requiera. Normalmente, la longitud de la estela se especifica en número de cuerdas; por ejemplo, se puede elegir un modelo de estela de longitud $c_w = 10c$. Entonces, el número de anillos de torbellino en la estela será igual a $m_w = c_w m_v / c = 10m_v$.

Las incógnitas de las intensidades de los torbellinos en el ala son calculadas imponiendo la condición de frontera en los puntos de control de los anillos de torbellino del ala. El cálculo se repite en cada instante de tiempo para determinar la respuesta temporal de $\Gamma_{b_{i,j}}(t)$. Recordemos que la condición de frontera establece que la velocidad normal del flujo a la superficie debe ser cero. La velocidad del flujo total en cada punto de control es la suma de cuatro componentes:

1. La corriente libre U con ángulo de ataque α .
2. La suma de la influencia de todos los segmentos de torbellino de todos los anillos de torbellino del ala.
3. La suma de la influencia de todos los segmentos de torbellino de todos los anillos de torbellino de la estela.
4. La deflexión hacia arriba en el borde de ataque del ala causada por el movimiento de la superficie del ala.

El flujo inducido por el anillo de torbellino del ala k, l en el panel de control i, j viene dado por:

$$\mathbf{u}_{b_{(i,j),(k,l)}} = \mathbf{u}_{b_{(i,j),(k,l),(k,l+1)}} + \mathbf{u}_{b_{(i,j),(k,l+1),(k+1,l+1)}} + \mathbf{u}_{b_{(i,j),(k+1,l+1),(k+1,l)}} + \mathbf{u}_{b_{(i,j),(k+1,l),(k,l)}} \quad (5.7)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{b_{(i,j),(k,l),(k,l+1)}} &= \frac{\Gamma_{b_{k,l}}}{4\pi} \frac{(\mathbf{x}_{c_{i,j}} - \mathbf{x}_{V_{k,l}}) \times (\mathbf{x}_{c_{i,j}} - \mathbf{x}_{V_{k,l+1}})}{\left|(\mathbf{x}_{c_{i,j}} - \mathbf{x}_{V_{k,l}}) \times (\mathbf{x}_{c_{i,j}} - \mathbf{x}_{V_{k,l+1}})\right|^2} (\mathbf{x}_{V_{i,j+1}} - \mathbf{x}_{V_{i,j}}) \\ &\cdot \left(\frac{(\mathbf{x}_{c_{i,j}} - \mathbf{x}_{V_{k,l}})}{\left|(\mathbf{x}_{c_{i,j}} - \mathbf{x}_{V_{k,l}})\right|} - \frac{(\mathbf{x}_{c_{i,j}} - \mathbf{x}_{V_{k,l+1}})}{\left|(\mathbf{x}_{c_{i,j}} - \mathbf{x}_{V_{k,l+1}})\right|} \right) \end{aligned} \quad (5.8)$$



y expresiones similares pueden escribirse para los otros tres segmentos de anillo k, l . El flujo inducido por los anillos de la estela k, l En la línea que hemos marcado al comienzo del capítulo comenzaremos desarrollando el a en el panel de control i, j es:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{w(i,j),(k,l)} = & \mathbf{u}_{w(i,j),(k,l),(k,l+1)} + \mathbf{u}_{w(i,j),(k,l+1),(k+1,l+1)} + \mathbf{u}_{w(i,j),(k+1,l+1),(k+1,l)} \\ & + \mathbf{u}_{w(i,j),(k+1,l),(k,l)} \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde $\mathbf{u}_{w(i,j),(k,l),(k,l+1)}$, etc. puede ser obtenido a partir de la ecuación (5.8) tras reemplazar $\Gamma_{w_{k,l}}$ por $\Gamma_{b_{k,l}}$, $\mathbf{x}_{w_{k,l}}$ por $\mathbf{x}_{v_{k,l}}$ y $\mathbf{x}_{v_{k,l+1}}$ por $\mathbf{x}_{v_{k,l+1}}$.

Finalmente, la deflexión del flujo causada en el punto $\mathbf{x}_{c_{i,j}}$ por el movimiento del ala viene dado por:

$$-U \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x_{c_{i,j}}} - \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{x_{c_{i,j}}} \quad (5.10)$$

Asumiendo que el movimiento $z(x, y, t)$ es una función de x, y, t . La velocidad total del flujo en el panel i, j es entonces calculada como:

$$\mathbf{u}_{i,j} = \begin{pmatrix} U \cos \alpha \\ 0 \\ U \sin \alpha \end{pmatrix} - U \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x_{c_{i,j}}} - \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{x_{c_{i,j}}} + \sum_{k=1}^{m_v} \sum_{l=1}^{n_v} \mathbf{u}_{b(i,j),(k,l)} + \sum_{k=1}^{m_w} \sum_{l=1}^{n_w} \mathbf{u}_{w(i,j),(k,l)} \quad (5.11)$$

y la condición de frontera es simplemente

$$\mathbf{u}_{i,j} \cdot \mathbf{n}_{i,j} = 0 \quad (5.12)$$

Esta ecuación es un conjunto de $m_v n_v$ ecuaciones lineales algebraicas que pueden resolverse para $\Gamma_{b_{i,j}}(t)$ para cada instante temporal.

Como el ala se encuentra situada en el plano $x - y$ y $\mathbf{n}_{i,j} = [0 \ 0 \ 1]^T$ podemos reescribir la ecuación (5.12) como

$$U \sin \alpha \mathbf{n}_z + \mathbf{A}_b \Gamma_b(t) + \mathbf{A}_w \Gamma_w(t) = \mathbf{0} \quad (5.13)$$

donde $\mathbf{n}_{i,j} = [n_{x_{i,j}} \ n_{y_{i,j}} \ n_{z_{i,j}}]$ y

$$\mathbf{n}_z = \left(n_{z_{1,1}} \ n_{z_{1,1}} \dots \ n_{z_{1,n_v}} \ n_{z_{m_v,1}} \ n_{z_{m_v,2}} \ \dots \ n_{z_{m_v,n_v}} \right)^T \quad (5.14)$$

$$\Gamma_b = \left(\Gamma_{b_{1,1}} \ \Gamma_{b_{1,1}} \ \dots \ \Gamma_{b_{1,n_v}} \ \Gamma_{b_{m_v,1}} \ \Gamma_{b_{m_v,2}} \ \dots \ \Gamma_{b_{m_v,n_v}} \right)^T \quad (5.15)$$

$$\Gamma_w = \left(\Gamma_{w_{1,1}} \ \Gamma_{w_{1,1}} \ \dots \ \Gamma_{w_{1,n_v}} \ \Gamma_{w_{m_v,1}} \ \Gamma_{w_{m_v,2}} \ \dots \ \Gamma_{w_{m_v,n_v}} \right)^T \quad (5.16)$$



Por lo tanto, hemos adoptado un esquema de numeración de paneles por el cual la primera fila de paneles corresponde a los paneles $k = 1$ hasta n_v , la segunda fila corresponde desde $k = n_v$ hasta $2n_v$ y así sucesivamente, como recomienda Katz & Plotkin en la referencia [16]. Como consecuencia, el k, l th elemento de la matriz \mathbf{A}_b consiste en el flujo normal a la superficie inducida por el anillo de torbellino del ala k con intensidad de torbellino $\Gamma_{b_k} = 1$ en el punto de control 1 para $k = 1, \dots, m_v n_v$, $l = 1, \dots, m_v n_v$. De forma similar, el elemento k, l th de la matriz \mathbf{A}_w consiste en el flujo normal a la superficie inducida por el anillo de torbellino de la estela k con intensidad de torbellino $\Gamma_{w_k} = 1$ en el punto de control l .

El primer paso es calcular las posiciones de las esquinas de los anillos de torbellino, \mathbf{x}_{v_k} y \mathbf{x}_{w_k} . Entonces podemos construir las matrices \mathbf{A}_b y \mathbf{A}_w utilizando las ecuaciones (5.7) y (5.8) recordando multiplicar todas las velocidades de los flujos por \mathbf{n}_k . Las matrices \mathbf{A}_b y \mathbf{A}_w son conocidas como las matrices de coeficientes de influencia aerodinámicas. Ahora podemos calcular la vorticidad en el ala en cada paso temporal resolviendo la ecuación (5.13)

$$\boldsymbol{\Gamma}_b(t) = \mathbf{A}_b^{-1}(-U \sin \alpha \mathbf{n}_z - \mathbf{A}_w \boldsymbol{\Gamma}_w(t)) \quad (5.17)$$

Supondremos que en $t = 0$ no hay estela aún del ala y podemos calcular por tanto $\boldsymbol{\Gamma}_b$ como:

$$\boldsymbol{\Gamma}_b(0) = -U \sin \alpha \mathbf{A}_b^{-1} \mathbf{n}_z \quad (5.18)$$

Vemos que en este instante la vorticidad en el ala no satisface la condición de Kutta, puesto que la vorticidad en el borde de fuga no es igual a 0 debido a la falta de vorticidad en la estela. Esta situación hace que se genere un torbellino de gran intensidad en el borde de fuga en el primer instante conocido como torbellino de arranque.

En el siguiente instante temporal, $t = \Delta t$, la vorticidad de la frontera de salida se arroja a la estela de forma que

$$\boldsymbol{\Gamma}_{w_{1,j}}(\Delta t) = \boldsymbol{\Gamma}_{b_{m_v,j}}(0) \quad (5.19)$$

para $j = 1, \dots, n_v$. En los siguientes pasos temporales toda la vorticidad ya existente en la estela se mueve corriente abajo por c/m_v de la estela. Una vez que las intensidades de los torbellinos del ala son conocidas, podemos sin variación de valor y por tanto:

$$\boldsymbol{\Gamma}_{w_{1,j}}(t) = \boldsymbol{\Gamma}_{b_{m_v,j}}(t - \Delta t), \quad \boldsymbol{\Gamma}_{w_{i,j}}(t) = \boldsymbol{\Gamma}_{w_{i-1,j}}(t - \Delta t) \quad (5.20)$$

Este cálculo se conoce como propagación de la estela y puede representarse en forma de matriz según la referencia [50] como:

$$\boldsymbol{\Gamma}_w(t) = \mathbf{P}_b \boldsymbol{\Gamma}_b(t - \Delta t) + \mathbf{P}_w \boldsymbol{\Gamma}_w(t - \Delta t) \quad (5.21)$$

La matriz \mathbf{P}_b es una matriz $m_w n_v \times m_v n_v$ y se define como:

$$\mathbf{P}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n_v \times (m_w-1)n_v} & \mathbf{0}_{n_v \times n_v} \\ \mathbf{I}_{(m_w-1)n_v} & \mathbf{0}_{(m_w-1)n_v \times n_v} \end{pmatrix} \quad (5.22)$$



Según el teorema de Kutta-Joukovsky y la ecuación de Bernoulli no estacionaria, distribución de presiones en el ala en cada punto de control i,j va a venir dada por

$$\Delta p_{i,j}(t) = \rho U \cos \alpha \frac{\Gamma_{b_{i,j}}(t)}{\Delta x_{i,j}} + \rho \dot{\Gamma}_{b_{i,j}}(t) \quad (5.23)$$

y la distribución de sustentación en el ala en cada punto de control i,j puede calcularse como:

$$L_{i,j}(t) = (\rho U \cos \alpha (\Gamma_{b_{i,j}}(t) - \Gamma_{b_{i-1,j}}(t)) \Delta y_{i,j} + \rho \dot{\Gamma}_{b_{i,j}}(t) \Delta S_{i,j}) \cos \alpha \quad (5.24)$$

donde $\Delta S_{i,j} = \Delta x_{i,j} \Delta y_{i,j}$. El primer término de la ecuación (5.14) proviene del teorema de Kutta-Joukovsky y el segundo término de la ecuación no estacionaria de Bernoulli vista en el capítulo anterior. Para la primera fila de anillos de torbellinos del ala, $i = 1$, la ecuación (5.24) se reduce a

$$L_{i,j}(t) = (\rho U \cos \alpha \Gamma_{b_{i,j}}(t) \Delta y_{i,j} + \rho \dot{\Gamma}_{b_{i,j}}(t) \Delta S_{i,j}) \cos \alpha \quad (5.25)$$

A partir de esta distribución de sustentación, es posible calcular la distribución de sustentación total en cada instante de tiempo sumando todas las contribuciones de sustentación de todos los anillos del ala como:

$$L(t) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N L_{i,j}(t) \quad (5.26)$$

Y el coeficiente de sustentación total para cada instante temporal podrá calcularse a partir de la sustentación como:

$$C_L(t) = \frac{L(t)}{\frac{1}{2} \rho U S} \quad (5.27)$$

siendo S el área total del ala, que es igual a la suma de las áreas de todos los anillos de torbellinos en el ala

$$S = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \Delta S_{i,j} \quad (5.28)$$

En forma matricial podemos calcular la distribución de la sustentación como:

$$\mathbf{L}_{i,j}(t) = (\rho U \cos \alpha \mathbf{G}_y \boldsymbol{\Gamma}_b(t) + \rho \mathbf{G}_S \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_b(t)) \cos \alpha \quad (5.29)$$

donde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L} &= (L_{1,1} \quad L_{1,2} \quad \cdots \quad L_{1,n_v} \quad \cdots \quad L_{m_v,1} \quad L_{m_v,2} \quad \cdots \quad L_{m_v,n_v})^T \\
 \mathbf{G}_y &= \left[\mathbf{I}_{m_v n_v} + \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n_v \times (m_v-1)n_v} & \mathbf{0}_{n_v \times n_v} \\ \mathbf{0}_{(m_v-1)n_v \times n_v} & \mathbf{0}_{(m_v-1)n_v \times n_v} \end{pmatrix} \right] \circ (\Delta \mathbf{y} \quad \Delta \mathbf{y} \quad \cdots \quad \Delta \mathbf{y}) \\
 \Delta \mathbf{y} &= (\Delta y_{1,1} \quad \Delta y_{1,2} \quad \cdots \quad \Delta y_{1,n_v} \quad \cdots \quad \Delta y_{m_v,1} \quad \Delta y_{m_v,2} \quad \cdots \quad \Delta y_{m_v,n_v})^T \tag{5.30} \\
 \mathbf{G}_S &= \mathbf{I}_{m_v n_v} \circ (\Delta \mathbf{S} \quad \Delta \mathbf{S} \quad \cdots \quad \Delta \mathbf{S}) \\
 \Delta \mathbf{S} &= (\Delta S_{1,1} \quad \Delta S_{1,2} \quad \cdots \quad \Delta S_{1,n_v} \quad \cdots \quad \Delta S_{m_v,1} \quad \Delta S_{m_v,2} \quad \cdots \quad \Delta S_{m_v,n_v})^T
 \end{aligned}$$

y \circ denota la multiplicación elemento a elemento entre dos matrices.

La completa integración del algoritmo en el tiempo es entonces:

1. En el instante t , $\Gamma_b(t - \Delta t)$ y $\Gamma_w(t - \Delta t)$ son conocidos.
2. Propagación de la estela mediante la ecuación (5.21) para calcular $\Gamma_w(t)$
3. Usar la ecuación (5.17) para calcular $\Gamma_b(t)$.
4. Usar diferencias hacia atrás para calcular $\dot{\Gamma}_b(t)$, es decir,

$$\dot{\Gamma}_b(t) = \frac{\Gamma_b(t) - \Gamma_b(t - \Delta t)}{\Delta t} \tag{5.31}$$

5. Utilizar la ecuación (5.29) para calcular la sustentación, la ecuación (5.23) para calcular la diferencia de presiones, la ecuación (5.26) para calcular la sustentación total y la ecuación (5.27) para calcular el coeficiente de sustentación total para cada instante de tiempo.
6. Ir al siguiente paso temporal.

En el apéndice E puede verse un diagrama de flujo del algoritmo del UVLM.

5.2. Validación del código numérico

Antes de llevar a cabo el estudio para distintas configuraciones de alas y condiciones de contorno, vamos a llevar a cabo la validación del código numérico programado en el que se ha implementado el algoritmo desarrollado en la sección anterior.

A diferencia del caso bidimensional, no existen soluciones analíticas sencillas para el caso tridimensional no estacionario, ver [13] y [5]. Es por ello que la validación del código se realizará por un lado con las soluciones disponibles en la referencia [16] y por otro lado por medio de una analogía con el caso bidimensional cuando el alargamiento del ala tienda a infinito. También se buscará encontrar una comparación con el caso estacionario al igual que se hizo para el caso bidimensional.

5.2.1. Aceleración repentina de un ala rectangular sin curvatura en vuelo velocidad constante

En esta primera fase de validación del código se va a comparar la solución para el coeficiente de sustentación total de nuestro código numérico con el de la referencia [16] para el problema de un ala rectangular (sin flecha) y sin curvatura, que se encuentra en reposo en $t < 0$ y que en $t = 0$ recibe un impulso de forma que adquiere una velocidad U_∞ .

El ángulo de ataque del ala es $\alpha = 5^\circ$ y la solución para el C_L se dará en función de $U_\infty t/c$ para diferentes alargamiento del ala, de forma que puedan compararse ambas soluciones.

Además, la relación adicional que se cumplirá en la simulación será $U_\infty t/c = 1/16$.

En la figura 5.4 puede verse el resultado obtenido por el código numérico programado. En la figura 5.5 se muestra la solución proporcionada por [16] en las mismas condiciones y para los mismos parámetros de simulación.

Podemos observar que los resultados de una y otra figura guardan una gran similitud. Existe una pequeña diferencia (ya comentada en el caso bidimensional) para los primeros instantes temporales, puesto que en la figura 5.5 se decidió modelar el salto mediante una rampa lineal y en el código desarrollado no se ha visto necesario realizarlo puesto que no se han encontrado inestabilidades numéricas en el cálculo de la solución.

De esta forma queda concluida la primera validación del código con resultados favorables.

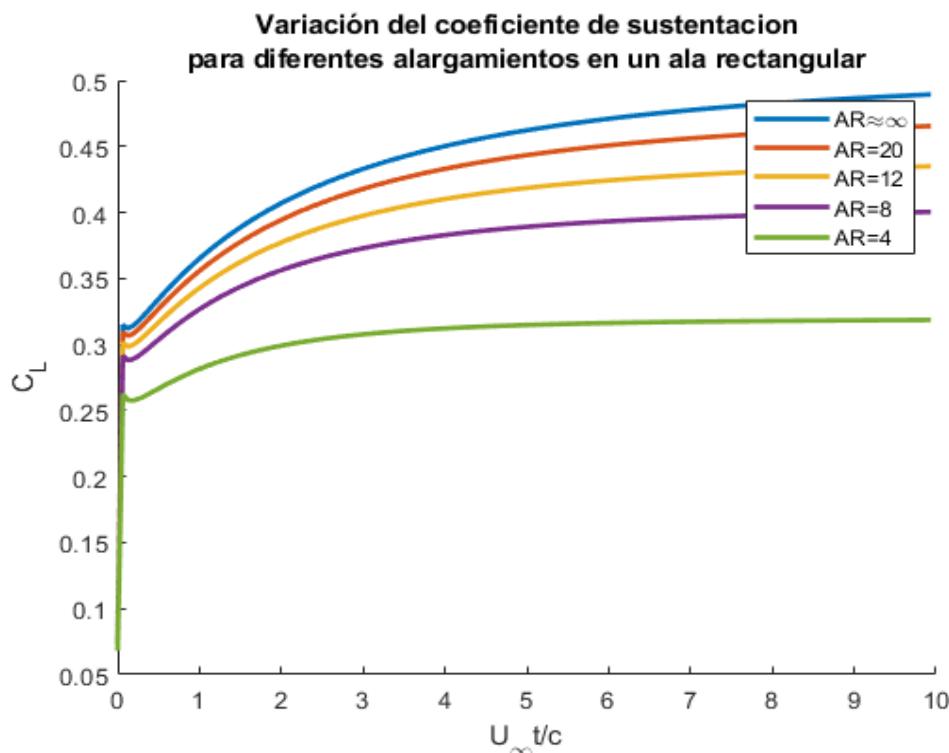


Figura 5.4. Solución obtenida por el código numérico desarrollado. Primera validación

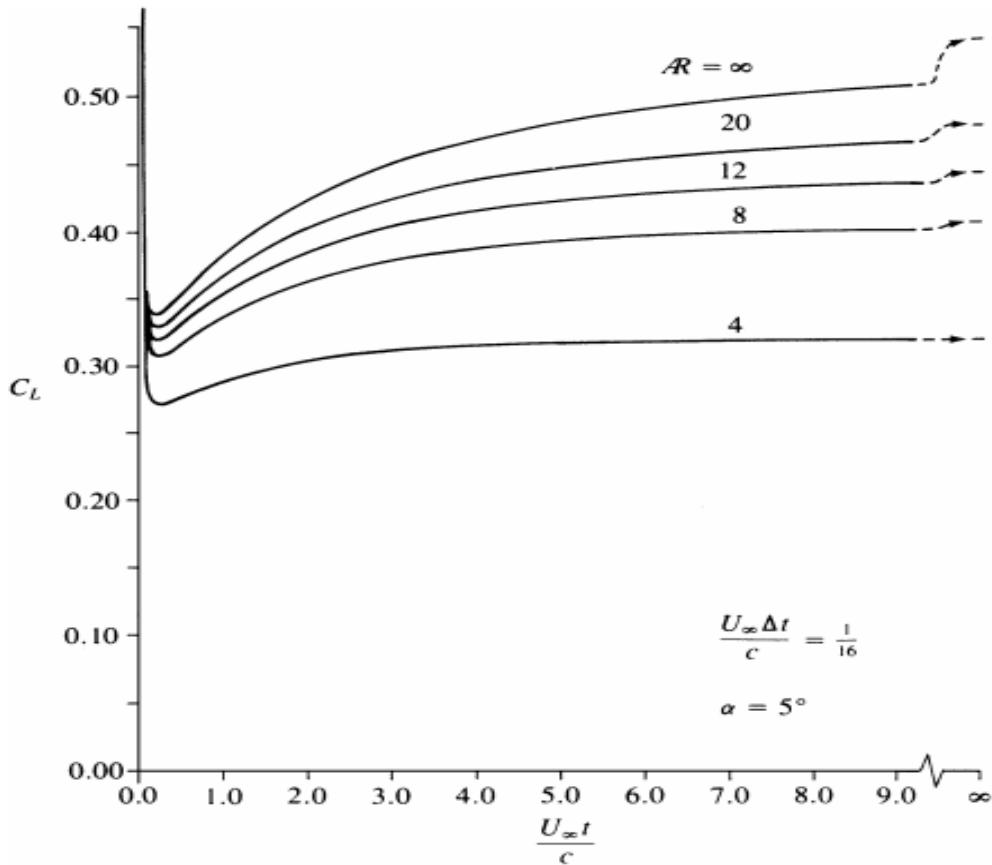


Figura 5.5. Solución disponible en la literatura: Primera validación. Fuente [16]

5.2.2. Movimiento oscilante de un ala rectangular con desplazamiento vertical

En esta segunda fase de la validación del código, vamos a ver cómo varía el coeficiente de sustentación de un ala en la que se impone un movimiento vertical $h(t)$ con oscilaciones de frecuencia reducida κ . Este movimiento ya fue estudiado para el caso bidimensional y se utilizará ahora para intentar validar el caso tridimensional utilizando la solución de la función de Theodorsen sabiendo que la solución tridimensional debe tender a esta cuando el alargamiento tienda a infinito.

Al igual que en el caso anterior, la solución del coeficiente de sustentación se dará en función de $U_\infty t/c$ para diferentes alargamientos. El ángulo de ataque del ala será $\alpha = 5^\circ$ y la relación que se debe cumplir es que $U_\infty \Delta t/c = 1/5$.

Además, $h_0 = 0.4$ y la frecuencia reducida ensayada es 0.2. El resultado obtenido puede ver en la figura 5.6. Podemos observar que a medida que el alargamiento se hace mayor, la solución tiende a la solución bidimensional de Theodorsen y para alargamientos bastante elevados ($AR > 20$) la solución tridimensional converge a esta.

De esta manera queda concluida la segunda fase de la validación con resultados bastante favorables.

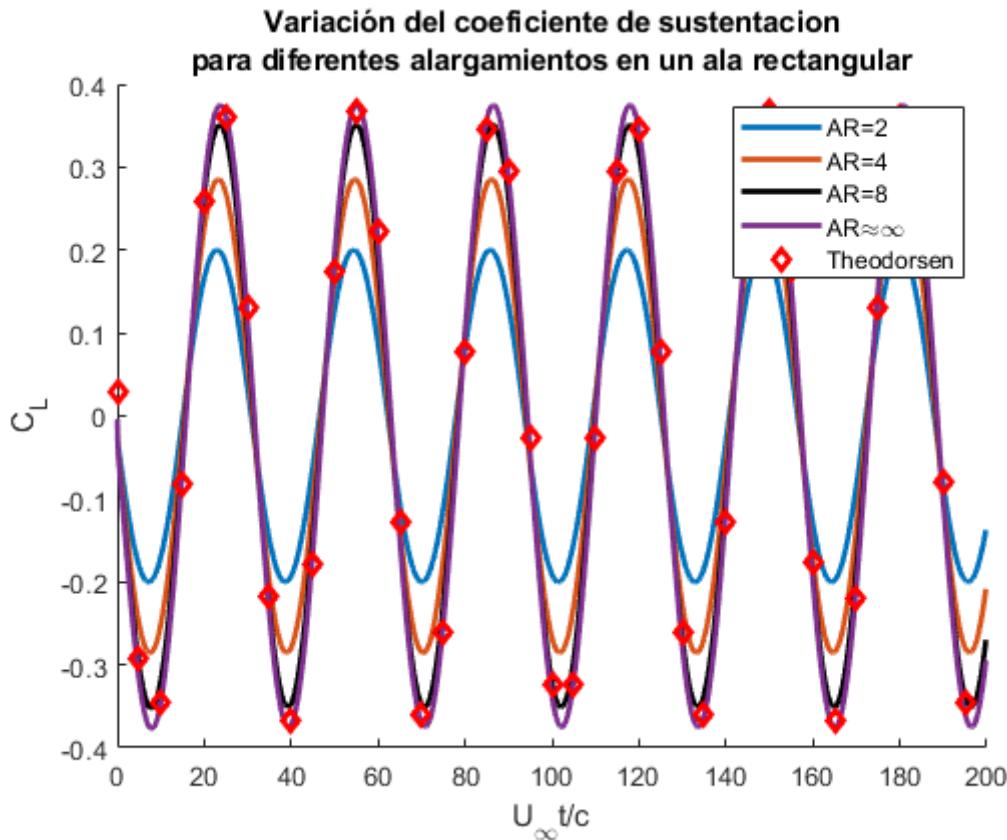


Figura 5.6. Comparación con la solución bidimensional: Segunda validación

5.2.3. Analogía con el caso tridimensional estacionario

Al igual que para el caso bidimensional, es bien sabido que la solución tridimensional no estacionaria debe tender a la solución estacionaria a medida que el tiempo se hace más grande. Es por ello que vamos a intentar en esta tercera fase de la validación, comparar la solución obtenida para la evolución del coeficiente de sustentación total para una aceleración repentina de un ala rectangular de $AR = 12$ y ángulo de ataque $\alpha = 5^\circ$ con el valor que proporciona el código del Vortex-Lattice estacionario [55] y con la solución en términos de una expansión de Glauert para la ecuación de la línea de sustentación que proporciona la teoría de la línea de sustentación de Prandtl, particularizada para un ala rectangular [55] en flujo estacionario.

Esta comparación puede verse en la figura 5.7. Vemos que efectivamente el valor del coeficiente de sustentación no estacionario dado por el (UVLM) tiende a la solución numérica estacionaria proporcionada por el (VLM) y a la solución de Glauert a medida que el tiempo se hace más grande.

Con los resultados que se han obtenido en las tres fases de la validación podemos afirmar que nuestro código numérico programado para el caso tridimensional no estacionario es un código fiable y preciso.

Es por ello que lo utilizaremos en las siguientes secciones para obtener algunos resultados interesantes desde el punto de vista de la aerodinámica tridimensional no estacionaria y en el capítulo siguiente para estudiar el conocido problema aeroelástico del flameo.

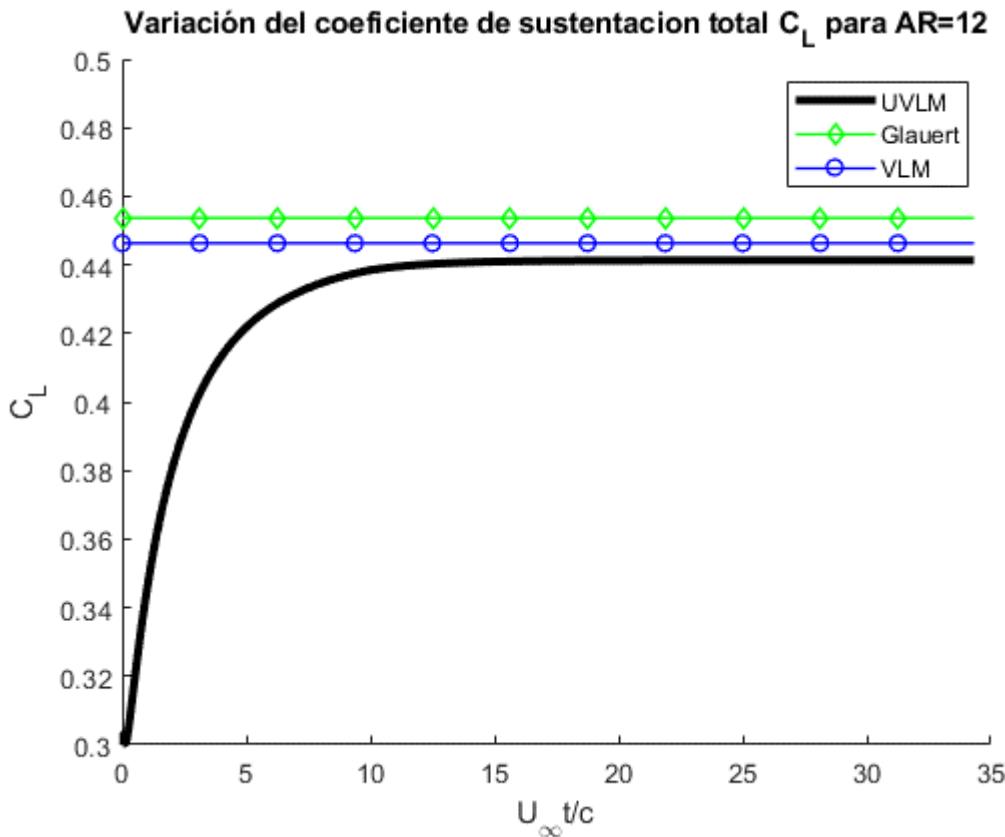


Figura 5.7. Comparación con la solución tridimensional estacionaria. Tercera validación

5.3. Estudio de diversas configuraciones alares

Una vez que el código ha sido validado vamos a utilizarlo para estudiar diferentes configuraciones alares y estudiar el comportamiento que tienen algunos parámetros del ala en sobre el coeficiente de sustentación en el tiempo. Habiendo visto ya en la primera validación y en la segunda el efecto que tenía el alargamiento en el coeficiente de sustentación, vamos a ver en las siguientes secciones cómo afecta el estrechamiento del ala y el ángulo de flecha del ala a la sustentación por medio de distintas simulaciones.

5.3.1. Influencia del estrechamiento del ala

Ya hemos comprobado en la figura 5.4 que a medida que el alargamiento del ala es mayor, el coeficiente de sustentación alcanza valores más altos. Vamos a ver ahora en qué medida influye el estrechamiento del ala.

Mientras que el alargamiento del ala se definía como la envergadura entre la longitud de la cuerda del ala, el estrechamiento se va a definir como la relación que existe entre la cuerda en el encastre c_r y la cuerda en la punta c_t :

$$E = \frac{c_t}{c_r} \quad (5.32)$$

En la figura 5.8 podemos ver las geometrías en planta de alas con distintos estrechamientos (desde 0 hasta 1) que será simuladas. Como alargamiento alar se ha elegido $AR = 3$, con una cuerda en el encastre de 1 metro y una envergadura de 3 metros.

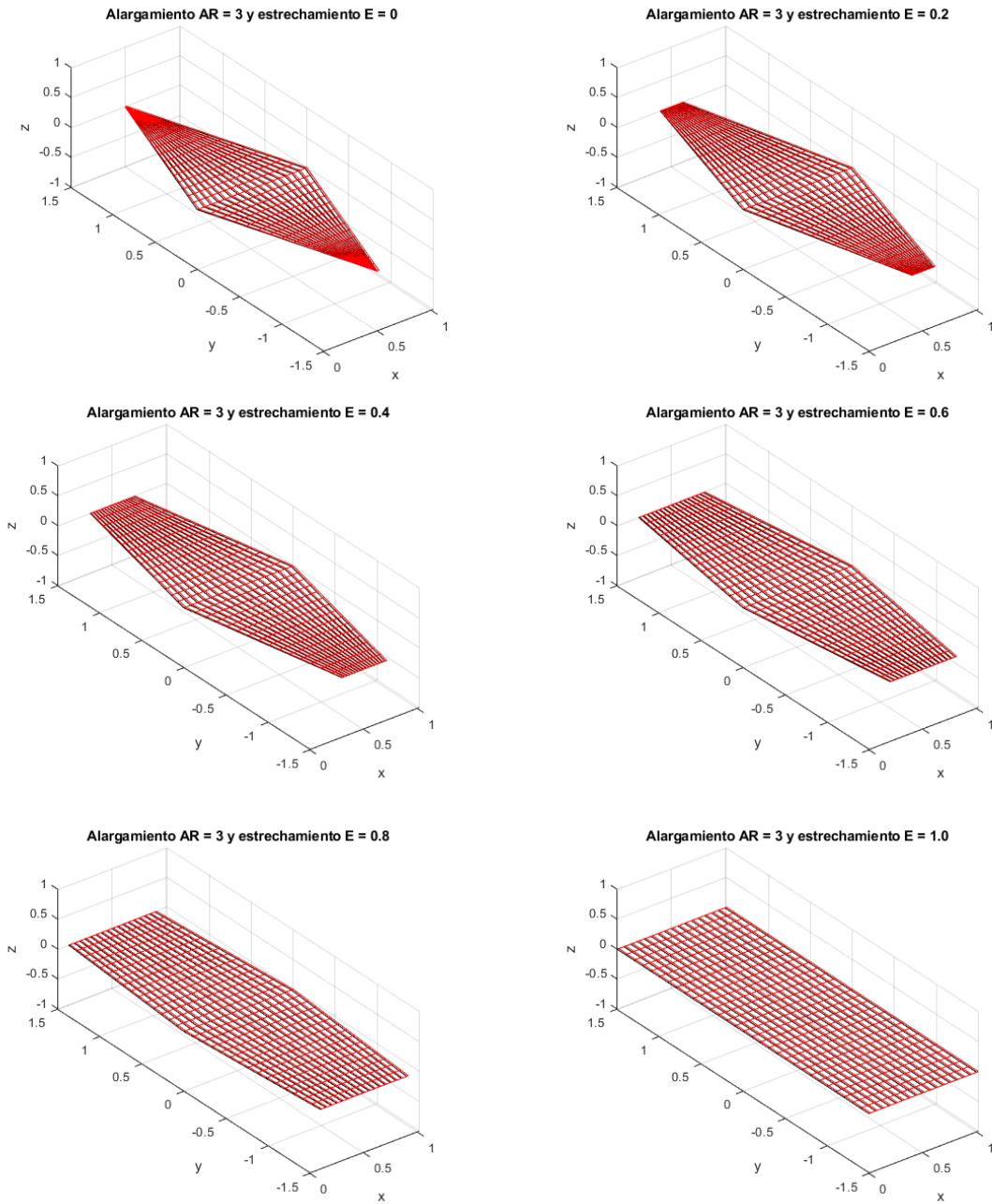


Figura 5.8. Forma en planta de alas con diferentes estrechamientos

El número de paneles con el que se ha llevado a cabo la simulación para determinar el coeficiente de sustentación es de 16 paneles a lo largo de la cuerda y de 30 paneles a lo largo de la envergadura.

El resultado obtenido para la evolución del coeficiente de sustentación en el tiempo ante un aumento repentino de la velocidad U_∞ y para un ángulo de ataque $\alpha = 5^\circ$ puede verse en la figura 5.9.

Podemos observar que a medida que el estrechamiento del ala es mayor desde el encastre hasta la punta del ala, (valores de E cercanos a 0) el coeficiente de sustentación total que se puede conseguir es mayor con estrechamientos más pequeños (E cercanos a 1).

Además, si nos fijamos en la figura 5.10, en la que se han representado los mismos valores de estrechamientos pero esta vez para un alargamiento de ala mayor ($AR = 7$), podemos ver que a medida que el alargamiento crece, la influencia del estrechamiento en la diferencia del coeficiente de sustentación que se puede lograr disminuye.

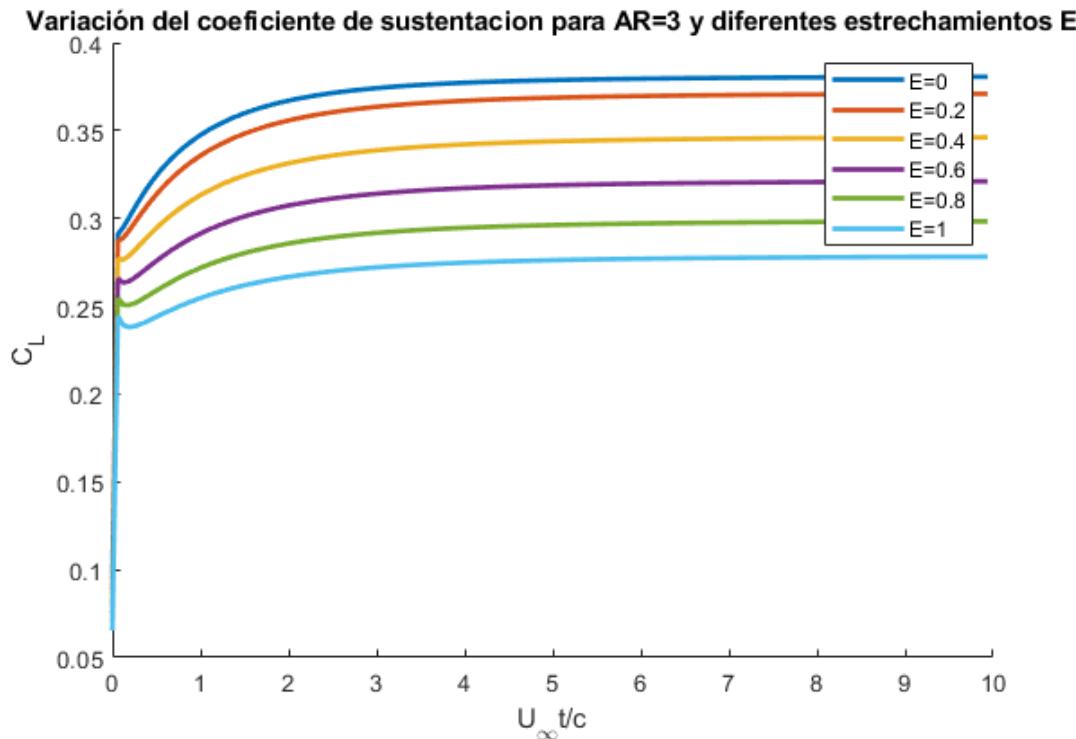


Figura 5.9. Evolución del C_L para $AR=3$ y diferentes estrechamientos del ala

5.3.2. Influencia de la flecha en el ala

Una vez visto cómo influye el estrechamiento en la sustentación, vamos a ver ahora de qué manera lo hace el ángulo de flecha.

Como sabemos, el ángulo de flecha Ψ es el ángulo que forma el eje y con el borde del ala. En la figura 5.11 podemos ver un ala con flecha en el borde frontal Λ_F y con flecha en el borde posterior Λ_R . Para saber que efecto tiene este ángulo sobre el coeficiente de sustentación total C_L simularemos distintas configuraciones de alas en flecha. Aunque el código numérico desarrollado tiene la opción de generar alas con diferente valor para el ángulo de flecha en el borde frontal y en el borde posterior, en las simulaciones que se han realizado para estudiar este efecto se ha supuesto un ángulo en flecha Ψ igual tanto para el borde frontal como para el borde trasero.

En la figura 5.12 pueden verse las distintas geometrías de alas simuladas. En todas ellas se ha escogido un alargamiento $AR = 3$ al igual que en las simulaciones anteriores, un estrechamiento $E = 1$ y varios ángulos de flecha: $0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ$ y 45° . El ángulo de ataque sigue siendo $\alpha = 5^\circ$.

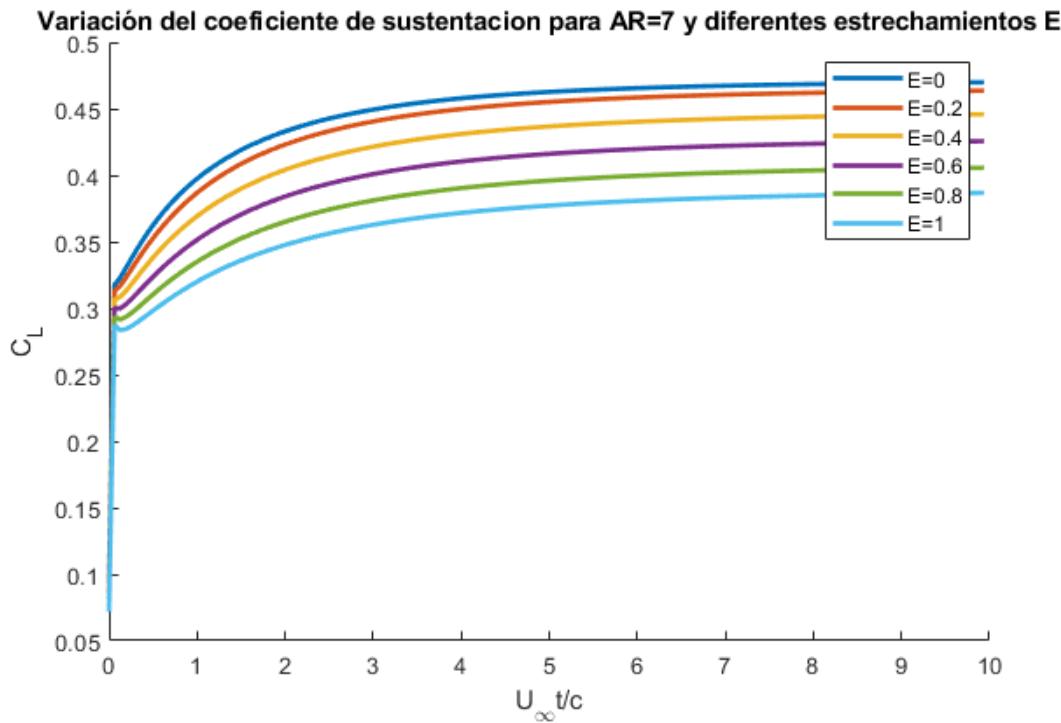


Figura 5.10. Evolución del C_L para AR=7 y diferentes estrechamientos del ala

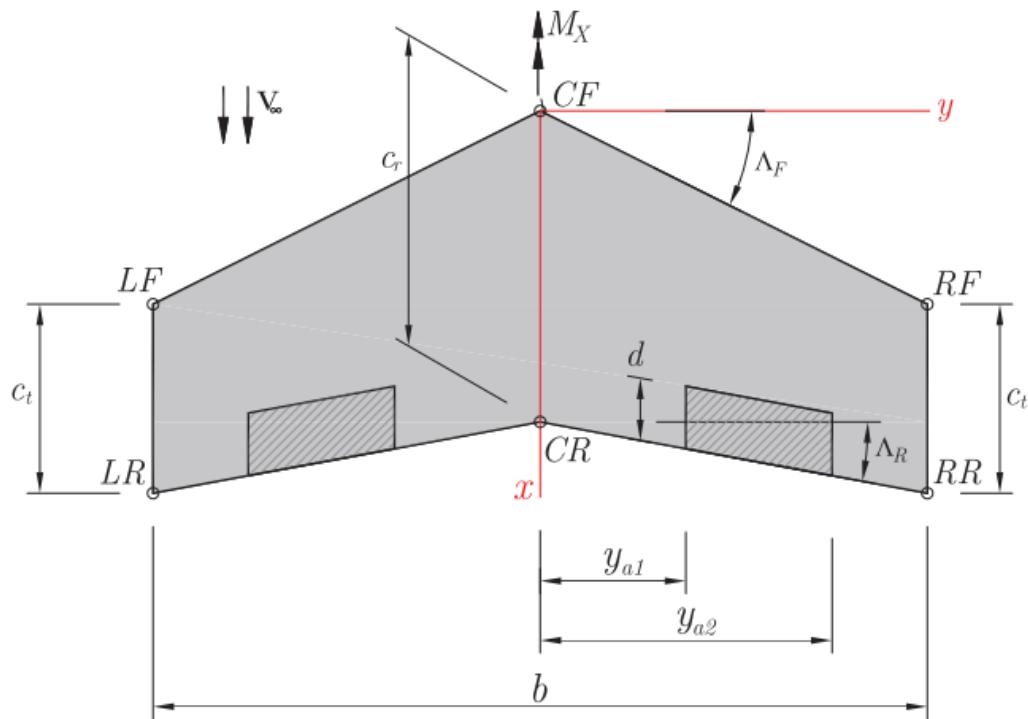
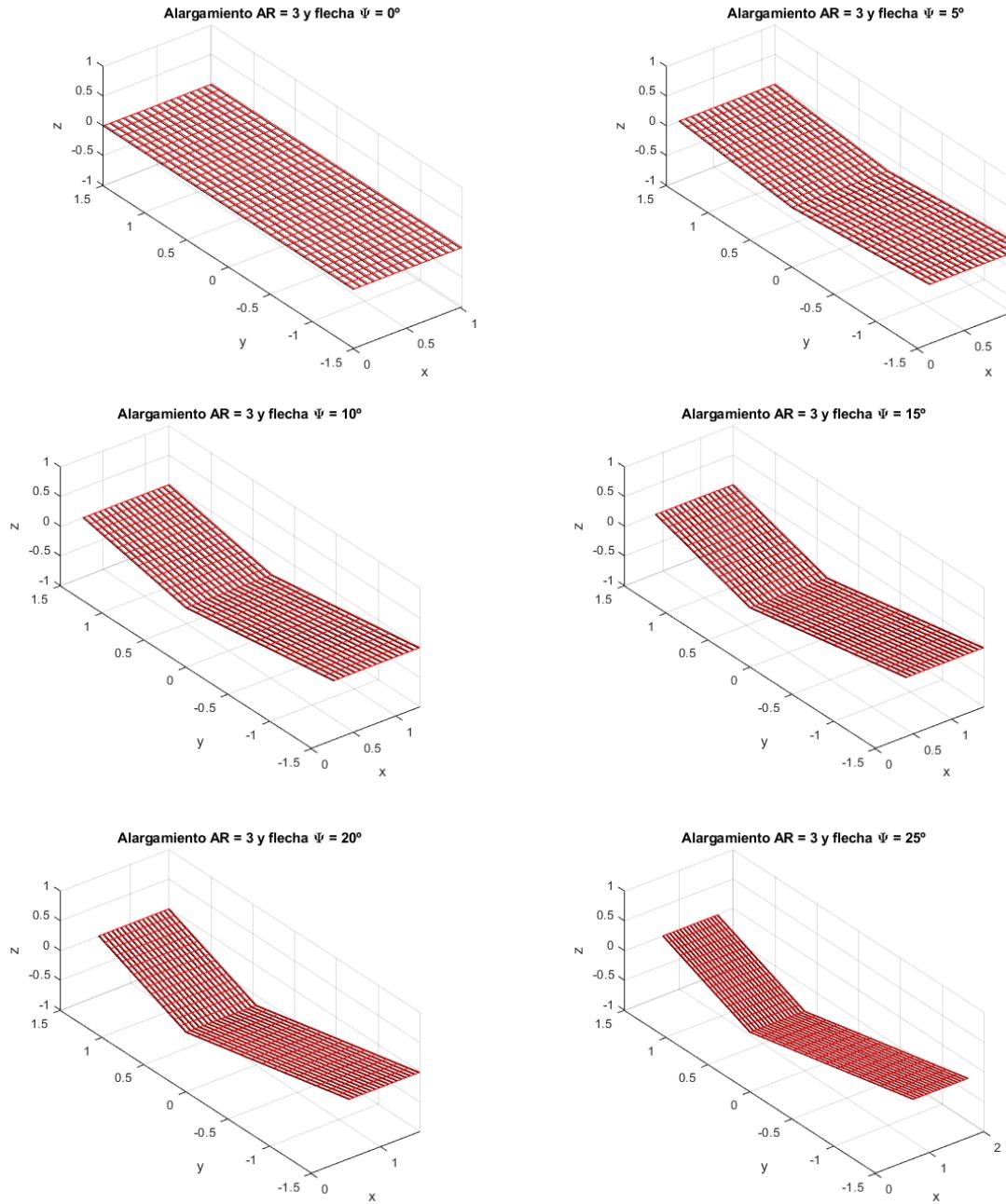


Figura 5.11. Planta de un ala con ángulo de flecha

Los resultados obtenidos de la variación del coeficiente de sustentación total C_L en el tiempo para los diferentes ángulos de flecha pueden verse en la figura 5.12. Podemos observar que a

medida que aumenta el ángulo de flecha se obtienen valores del coeficiente de sustentación total menores. La causa de este fenómeno guarda una estrecha relación con el hecho de que la corriente incidente normal que ve cada perfil del ala ahora ha cambiado debido a la introducción de la flecha.



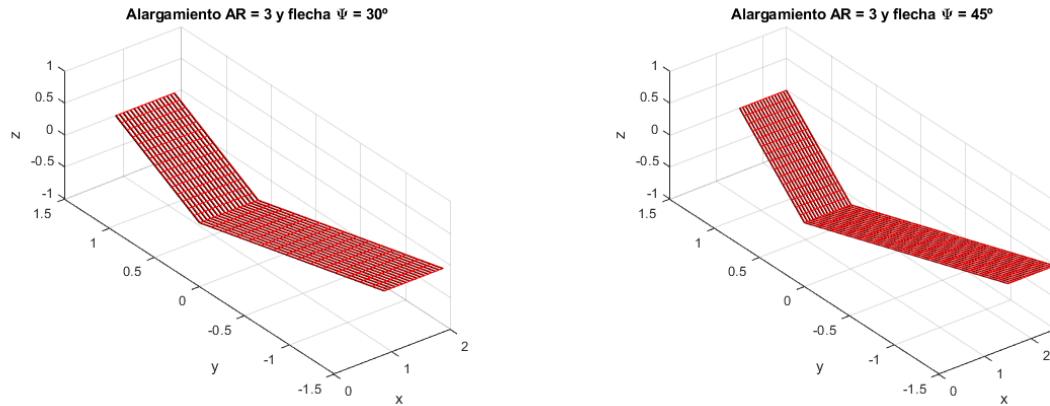


Figura 5.12. Forma en planta de alas con diferentes ángulos de flecha

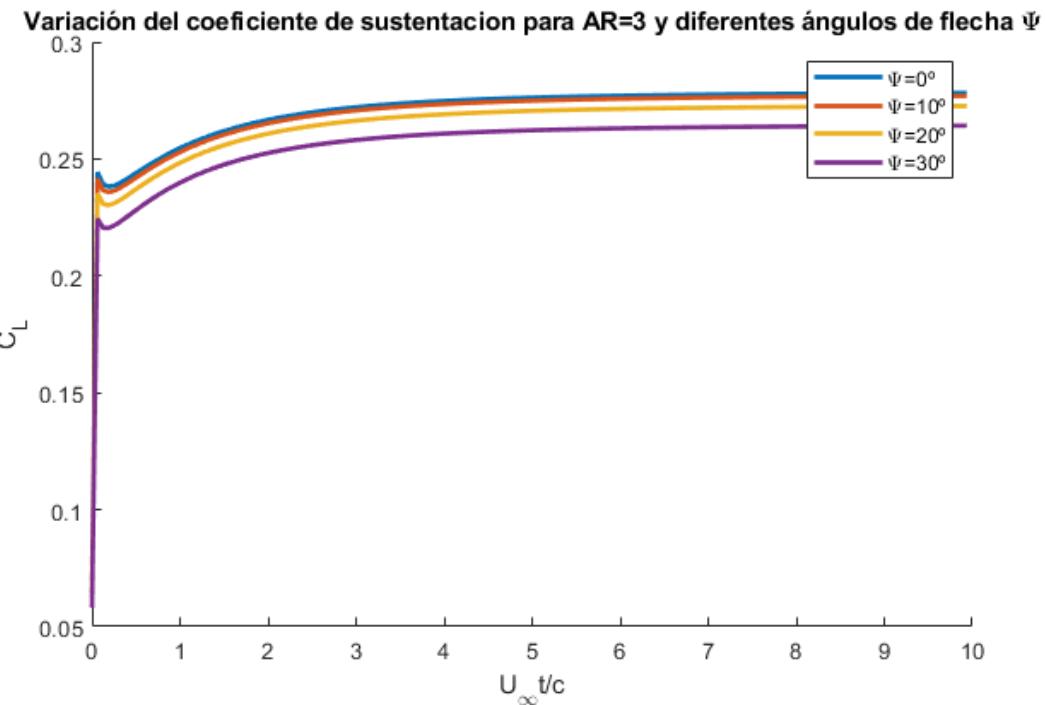


Figura 5.13. Evolución del C_L para $AR=3$, $E=1$ y diferentes ángulos de flecha

Para analizar este efecto podemos centrarnos en el caso bidimensional escogiendo alargamientos muy altos $AR \approx \infty$. En la figura 5.14 se ha representado el coeficiente de sustentación total C_L para un alargamiento muy grande para el ángulo de flecha $\Psi = 0^\circ$ y 10° y el coeficiente de sustentación total para el ángulo de flecha $\Psi = 0^\circ$ multiplicado por el coseno de 10° , es decir, $C_{L(\Psi=0^\circ)} \cdot \cos 10^\circ$. Podemos ver que los valores para este último caso son una buena aproximación del ala con ángulo de flecha 10° .

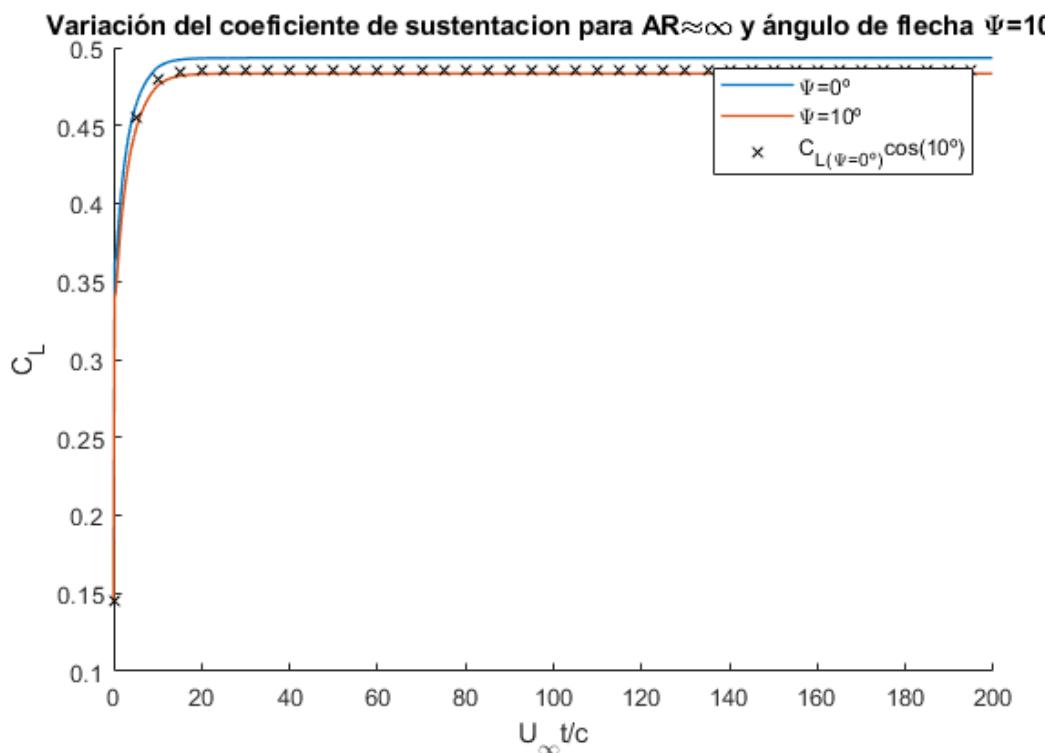


Figura 5.14. Efecto del ángulo de flecha en el perfil

Esta aproximación puede justificarse en el hecho de que la corriente incidente normal que ve cada perfil del ala ahora ha cambiado debido a la introducción de un ángulo de flecha. La componente normal de velocidad que ve ahora cada perfil del ala está contenida en un plano que forma un ángulo Ψ con el eje x tal y como se puede observar en la figura 5.15. Por esta razón, el ángulo de ataque α_{eff} que forma el ala con la corriente incidente es algo menor que α .

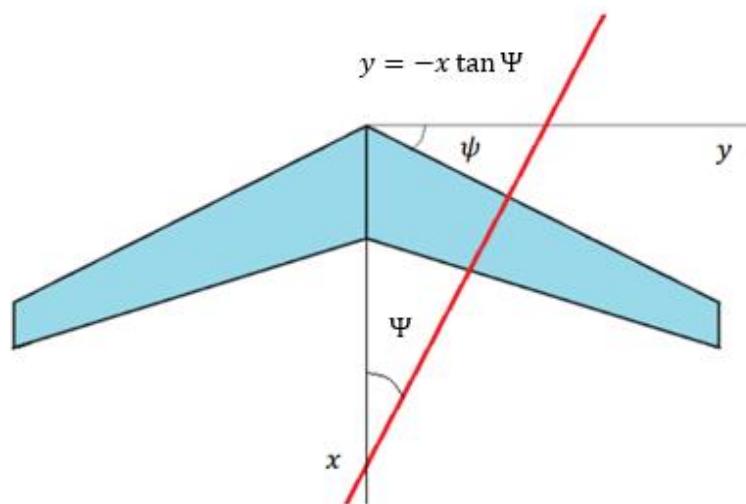


Figura 5.15. Plano de la componente normal de velocidad que ven los perfiles del ala.



A partir de la geometría de la figura 5.15 podemos ver que:

$$\sin \alpha_{eff} = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \Psi + \tan^2 \alpha}} \quad (5.33)$$

Utilizando la aproximación de pequeños ángulos de ataque podemos expresar esta relación geométrica como:

$$\alpha_{eff} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \Psi}} = \alpha \cos \Psi \quad (5.34)$$

De esta manera podemos concluir que el C_L al que tenderá el ala en flecha si esta tiene alargamientos muy altos será $C_L(\Psi) = C_{L(\Psi=0^\circ)} \times \cos \Psi$, es decir, aproximadamente el resultado obtenido en la figura 5.14.

Aunque el ángulo de flecha genera una reducción en el coeficiente de sustentación total al que puede aspirar el ala, las alas de los aviones suelen construirse en flecha debido a los enormes beneficios que proporcionan como la reducción de los efectos transónicos perjudiciales en el ala que ocasionan pérdidas de sustentación y movimientos de cabeceo.

También ofrecen mayor estabilidad de alabeo y además tienden a retrasar el centro aerodinámico con respecto al centro de gravedad lo que garantiza una mayor estabilidad de cabeceo.



Capítulo 6

Acoplamiento aeroelástico y flameo en un ala

Hasta este momento, se han desarrollado y programado algoritmos numéricos que han permitido estudiar el comportamiento aerodinámico de perfiles y alas en flujos incompresibles no estacionarios. Ahora podemos utilizar el algoritmo numérico del Vortex-Lattice no estacionario para estudiar un fenómeno estructural de inestabilidad que se produce únicamente a bajas velocidades aerodinámicas en el ala conocido como flameo aeroelástico.

El flameo aeroelástico en términos generales, consiste es una inestabilidad aeroelástica por la cual una estructura al vibrar absorbe energía del fluido circundante, de tal forma que es incapaz de disipar en un ciclo de vibración toda la energía que absorbe. La superficie sustentadora (ala) está bajo la acción de la carga inducida por la sustentación. Una deformación le lleva a un punto donde se reduce la carga total, llevando al ala de nuevo a la posición original restaurando la carga total y entrando por tanto en un ciclo de vibración. Esto lleva a una situación de vibración autosostenida que puede llegar a desgastar la estructura. En su forma más inofensiva puede aparecer como un zumbido en la estructura del ala del avión, pero puede llegar a convertirse en una vibración completamente autosostenida que hace vibrar todo el avión creando problemas de aeronavegabilidad y posibles roturas.

Para llevar a cabo su estudio, es necesario deducir las ecuaciones del acoplamiento aeroelástico. A continuación, y partiendo de la teoría ya vista del método del Vortex-lattice descrito en el capítulo anterior, describiremos un modelo para obtener la matriz de fuerza aerodinámica generalizada en función de la geometría del ala y de la frecuencia reducida, y resolveremos la ecuación del acoplamiento tanto en el dominio de la frecuencia (en una primera fase) como en el dominio del tiempo (en una segunda) obteniendo las condiciones de flameo (velocidad y frecuencia) del ala.

6.1. Acoplamiento aeroelástico

Con el fin de llevar a cabo la integración de las ecuaciones del acoplamiento aeroelástico, primeramente, realizaremos la formulación en el dominio de la frecuencia y posteriormente realizaremos una transformación al dominio del tiempo.

6.1.1. Formulación en el dominio de la frecuencia

Vamos a considerar un ala en voladizo no deformada inmersa en un flujo incompresible. Modelaremos las cargas aerodinámicas mediante el método del Vortex-Lattice (UVLM). Si la placa se deforma, entonces los anillos de torbellinos de la misma también se deformarán, de forma que las posiciones de los vértices de los anillos variarán en función del tiempo $x_{v_{i,j}}(t)$. Las posiciones de los puntos de control también variarán de posición en el tiempo y serán $x_{c_{i,j}}(t)$.

De aquí en adelante, las deflexiones estructurales en la dirección de la cuerda, en la dirección de la envergadura y fuera del plano del ala en voladizo se nombrarán por $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$ y $w(x, y, z, t)$ respectivamente.

De esta forma, si establecemos que $x_{v_{i,j}}(0)$ es la forma no deflectada del ala, entonces las componentes $x_{v_{i,j}}(t)$ serán:

$$\begin{aligned} x_{v_{i,j}}(t) &= x_{v_{i,j}}(0) + u(x_{v_{i,j}}(0), t) \\ y_{v_{i,j}}(t) &= y_{v_{i,j}}(0) + v(x_{v_{i,j}}(0), t) \\ z_{v_{i,j}}(t) &= z_{v_{i,j}}(0) + w(x_{v_{i,j}}(0), t) \end{aligned} \quad (6.1)$$

La deformación de los anillos de torbellino precisa recalcular las matrices de coeficientes de influencia para cada paso temporal, lo cual es demasiado costoso computacionalmente. Para acelerar los cálculos asumiremos que en el plano del ala en voladizo las deflexiones son muy pequeñas, de forma que $x_{v_{i,j}}(t) = x_{v_{i,j}}(0)$ y $y_{v_{i,j}}(t) = y_{v_{i,j}}(0)$ para todos los pasos temporales. Además, $z_{v_{i,j}}(0) = 0$ puesto que el ala no deformada es plana. Como consecuencia, la ecuación (6.1) se reduce a:

$$z_{v_{i,j}}(t) = w(x_{v_{i,j}}, y_{v_{i,j}}, t) \quad (6.2)$$

Que es el ala deformándose sólo en la dirección z . En cualquier punto del ala, la deflexión del flujo hacia arriba debida al movimiento es:

$$-U \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial t} = -U \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial t} \quad (6.3)$$

O bien, como

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{m_r} w_m(x, y) r_m(t) \quad (6.4)$$

donde m_r es el número de modos fuera del plano del ala, $w_m(x, y)$ son las formas modales en la dirección z y r_m son las coordenadas generalizadas en la dirección z y que:

$$\dot{w} = \sum_{m=1}^{m_r} w_m \dot{r}_m \quad (6.5)$$

podemos escribir la ecuación (6.3) como una expansión modal:

$$-U \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial t} = - \left(\sum_{m=1}^{m_r} U w_m(x, y) r_m(t) + w_m(x, y) \dot{r}_m(t) \right) \quad (6.6)$$

Recordando la condición de frontera (5.12)

$$\mathbf{u}_{i,j} \cdot \mathbf{n}_{i,j} = 0 \quad (5.12)$$

donde $\mathbf{u}_{i,j}$ es la velocidad total inducida del flujo en el panel i,j y $\mathbf{n}_{i,j}$ es el vector normal del panel con respecto al flujo, podemos escribir esta velocidad como

$$\mathbf{u}_{ij} = \begin{pmatrix} U \cos \alpha \\ 0 \\ U \sin \alpha \end{pmatrix} - U \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x_{c_{i,j}}} - \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{x_{c_{i,j}}} + \sum_{k=1}^{m_v} \sum_{l=1}^{n_v} \mathbf{u}_{b_{(i,j),(k,l)}} + \sum_{k=1}^{m_w} \sum_{l=1}^{n_v} \mathbf{u}_{w_{(i,j),(k,l)}} \quad (6.7)$$

donde α es el ángulo de ataque con respecto al flujo, U es la velocidad del flujo libre, \mathbf{u}_b es el flujo inducido por cada anillo de torbellino del ala, \mathbf{u}_w es el flujo inducido por cada anillo de torbellino de la estela, m_v es el número de paneles en la dirección de la cuerda del ala, n_v es el número de paneles en la dirección de la envergadura del ala y m_w es el número de paneles en la dirección de la cuerda en la estela del ala.

Combinando ahora la ecuación (6.6) y (6.7) podemos escribir la velocidad total inducida del flujo como:

$$\mathbf{u}_{ij} = \begin{pmatrix} U \cos \alpha \\ 0 \\ U \sin \alpha \end{pmatrix} - \left(\sum_{m=1}^{m_r} U w_{m_x}(x, y) r_m(t) + w_m(x, y) \dot{r}_m(t) \right) + \sum_{k=1}^{m_v} \sum_{l=1}^{n_v} \mathbf{u}_{b_{(i,j),(k,l)}} + \sum_{k=1}^{m_w} \sum_{l=1}^{n_v} \mathbf{u}_{w_{(i,j),(k,l)}} \quad (6.8)$$

Debido a que el ala plana se encuentra posicionada en el plano x-y, $\mathbf{n}_{i,j} = [0 \ 0 \ 1]^T$ y la ecuación (6.7) la podremos escribir utilizando la ecuación (6.8) como:

$$U \sin \alpha \mathbf{n}_z - U \mathbf{w}_x \mathbf{r}(t) - \mathbf{w} \dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{A}_b \boldsymbol{\Gamma}_b(t) + \mathbf{A}_w \boldsymbol{\Gamma}_w(t) = \mathbf{0} \quad (6.9)$$

donde \mathbf{A}_b y \mathbf{A}_w van a ser nuestras matrices de coeficientes de influencia aerodinámicas del ala y de la estela respectivamente, $\boldsymbol{\Gamma}_b$ es el vector de fuerzas de los anillos de torbellinos del ala, $\boldsymbol{\Gamma}_w$ es el vector de fuerzas de los anillos de torbellinos de la estela, $\mathbf{r}(t)$ y $\dot{\mathbf{r}}(t)$ son los desplazamientos y velocidades modales y \mathbf{w} y \mathbf{w}_x son las matrices $m_v n_v \times m_r$ que van a venir dadas por:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1(x_{c_1}, y_{c_1}) & w_2(x_{c_1}, y_{c_1}) & \cdots & w_{m_r}(x_{c_1}, y_{c_1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1(x_{c_1}, y_{c_{n_v}}) & w_2(x_{c_1}, y_{c_{n_v}}) & \cdots & w_{m_r}(x_{c_1}, y_{c_{n_v}}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1(x_{c_{m_n}}, y_{c_1}) & w_2(x_{c_{m_n}}, y_{c_1}) & \cdots & w_{m_r}(x_{c_{m_n}}, y_{c_1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1(x_{c_{m_n}}, y_{c_{n_v}}) & w_2(x_{c_{m_n}}, y_{c_{n_v}}) & \cdots & w_{m_r}(x_{c_{m_n}}, y_{c_{n_v}}) \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

$$\mathbf{w}_x = \begin{pmatrix} w_{1x}(x_{c_1}, y_{c_1}) & w_{2x}(x_{c_1}, y_{c_1}) & \cdots & w_{m_{rx}}(x_{c_1}, y_{c_1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{1x}(x_{c_1}, y_{c_{n_v}}) & w_{2x}(x_{c_1}, y_{c_{n_v}}) & \cdots & w_{m_{rx}}(x_{c_1}, y_{c_1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{1x}(x_{c_{m_n}}, y_{c_1}) & w_{2x}(x_{c_{m_n}}, y_{c_1}) & \cdots & w_{m_{rx}}(x_{c_{m_n}}, y_{c_1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{1x}(x_{c_{m_n}}, y_{c_{n_v}}) & w_{2x}(x_{c_{m_n}}, y_{c_{n_v}}) & \cdots & w_{m_{rx}}(x_{c_{m_n}}, y_{c_{n_v}}) \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

La matriz \mathbf{w} es una matriz de transformación modal que transforma los desplazamientos modales en desplazamientos físicos. La matriz \mathbf{w}_x transforma los desplazamientos modales en pendientes físicas con respecto a x.

La ecuación (6.9) es un conjunto de ecuaciones lineales algebraicas que pueden ser fácilmente resueltas para $\Gamma_b(t)$ si $\mathbf{r}(t)$ y $\dot{\mathbf{r}}(t)$ son conocidos. Recordando que nuestra primera hipótesis era que no existirían deformaciones en la malla aerodinámica, las posiciones de los anillos de torbellinos y de la estela permanecerán constantes en todos los instantes de tiempo por lo que no tenemos que recalcular las matrices de coeficientes de influencia aerodinámicas.

El acoplamiento entre la estructura y el fluido se lleva a cabo adaptando la deflexión del flujo (downwash) debida al movimiento a la condición de frontera del método del Vortex-Lattice no estacionario.

Una vez que $\Gamma_b(t)$ haya sido calculado podremos calcular la sustentación. Sin embargo, en orden a introducir la sustentación en las ecuaciones estructurales del movimiento, necesitamos calcular el trabajo virtual realizado por las cargas aerodinámicas en los modos estructurales. Partiendo de la metodología Rayleigh-Ritz derivaremos las ecuaciones del movimiento a partir de las ecuaciones de la energía tal y como se hace en [21].

Recordando los fundamentos de la mecánica Lagrangiana, sabemos que la función Lagrangiana es:

$$L = T - U \quad (6.12)$$

donde T es la energía cinética del ala en la dirección z y U es la energía total elástica del ala. La energía cinética del ala puede expresarse mediante la ecuación:

$$T = \frac{m_m}{2} \int_0^s \int_0^c \dot{w}^2 dx dy \quad (6.13)$$

donde $m_m = \rho_m h$ es la masa del ala por unidad de área, ρ_m es la densidad del material del ala, h es el espesor del ala, s es la envergadura del ala y \dot{w} es la derivada de las deformaciones fuera del plano del ala.

A su vez, la energía total elástica se puede escribir como una suma de la energía elástica U_s y la energía de flexión U_b dadas por:

$$U_s = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^s \int_0^c \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (6.14)$$

$$U_b = \frac{D}{2} \int_0^s \int_0^c \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (6.15)$$

donde $D = Eh/2(1 - \nu^2)$ es la rigidez del ala y ν es el coeficiente de Poisson del material del ala.

Partiendo de la ecuación de la función Lagrangiana (6.12) podemos expresar las ecuaciones de Lagrange como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial p_i} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial q_i} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial r_i} &= Q_i \end{aligned} \quad (6.16)$$

donde Q_i son las fuerzas generalizadas en la dirección z (que coinciden con las cargas aerodinámicas) para $i = 1, \dots, m_r$.

Haciendo uso del Vortex-Lattice, podemos expresar la carga aerodinámica como una suma de fuerzas de sustentación discretas actuando sobre los puntos de control. De esta manera, el trabajo virtual aerodinámico total puede ser calculado como la suma del trabajo virtual realizado por todos los vectores de sustentación. Por tanto, la parte derecha de la tercera ecuación de la expresión (6.16) puede expresarse como:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{m_v} \sum_{j=1}^{n_v} l(x_{c_i}, y_{c_i}) \frac{\partial w}{\partial r_k} \Big|_{(x_{c_i}, y_{c_i})} \quad (6.17)$$

para $k = 1, \dots, m_r$.

Por otro lado, debemos evaluar el resto de los términos de las ecuaciones para obtener el modelo aeroelástico. De la misma manera que en la ecuación (6.4) describimos el desplazamiento en la dirección z , $w(x, y, t)$, podemos hacerlo ahora también en las otras direcciones. De esta manera tendremos que:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= \sum_{j=1}^{m_p} u_j(x, y) p_j(t) \\
 v(x, y, t) &= \sum_{j=1}^{m_q} v_j(x, y) q_j(t) \\
 w(x, y, t) &= \sum_{j=1}^{m_r} w_j(x, y) p_j(t)
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

donde u, v y w son los desplazamientos en función del tiempo y de las coordenadas x, y , $u_j(x, y), v_j(x, y)$ y $w_j(x, y)$ son las formas modales para cada una de las direcciones, $p_j(t), q_j(t)$ y $r_j(t)$ son las coordenadas generalizadas y m_p, m_q y m_r son los modos de coordenadas generalizadas y m_p, m_q y m_r son los modos de u_j, v_j y w_j respectivamente.

Por su parte tendremos que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{j=1}^{m_p} u_{jx} p_j, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \sum_{j=1}^{m_q} v_{jyy} q_j, \quad \dot{w} = \sum_{j=1}^{m_r} w_j \dot{r}_j \tag{6.19}$$

Si nos fijamos ahora en la forma de T, U_s y U_b , vemos claro que T no es una función de r_i , y U_s y U_b no son funciones de \dot{r}_i . Además, T y U_b no son funciones de p_i o q_i . Por tanto, las ecuaciones de Lagrange (6.16) pueden simplificarse a:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_s}{\partial p_i} &= 0 \\
 \frac{\partial U_s}{\partial q_i} &= 0 \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}_i} \right) + \frac{\partial U_s}{\partial r_i} + \frac{\partial U_b}{\partial r_i} - Q_i &= 0
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Trabajando ahora con las ecuaciones (6.14) y (6.18) podemos obtener una expresión para la primera ecuación de la expresión (6.20):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_s}{\partial p_i} = & \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \int_0^s \int_0^c \left\{ u_{ix} \left(\sum_{j=1}^{m_p} u_{jx} p_j + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{m_r} w_{jx} r_j \right)^2 \right) \right. \\
 & + \nu u_{ix} \left(\sum_{j=1}^{m_q} v_{jy} q_j + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{m_r} w_{jy} r_j \right)^2 \right) \\
 & \left. + \frac{1-\nu}{2} u_{jx} \left(\sum_{j=1}^{m_q} v_{jx} q_j + \sum_{j=1}^{m_p} u_{jy} p_j + \sum_{j=1}^{m_r} w_{jx} r_j + \sum_{j=1}^{m_r} w_{jy} r_j \right) \right\} dx dy = 0
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

Mientras que la segunda ecuación de la expresión (6.20) puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_s}{\partial q_i} = & \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \int_0^s \int_0^c \left\{ v_{iy} \left(\sum_{j=1}^{m_q} v_{jy} q_j + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{m_r} w_{jy} r_j \right)^2 \right) \right. \\
 & + \nu v_{iy} \left(\sum_{j=1}^{m_p} u_{jx} p_j + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{m_r} w_{jx} r_j \right)^2 \right) \\
 & \left. + \frac{1-\nu}{2} v_{ix} \left(\sum_{j=1}^{m_q} v_{jx} q_j + \sum_{j=1}^{m_p} u_{jy} p_j + \sum_{j=1}^{m_r} w_{jx} r_j + \sum_{j=1}^{m_r} w_{jy} r_j \right) \right\} dx dy \\
 = & 0
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Por otro lado, necesitamos expresar la tercera ecuación de la expresión (6.20) en términos de formas modales. Por un lado, tenemos que el primer término puede expresarse como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}_i} \right) = m_m \int_0^s \int_0^c w_i \sum_{j=1}^{m_r} w_j \ddot{r}_j dx dy \tag{6.23}$$

De forma similar, podemos expresar el segundo y tercer término como:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_b}{\partial r_i} = & D \int_0^s \int_0^c \left\{ w_{ixx} \sum_{j=1}^{m_r} w_{jxx} r_j + w_{iyy} \sum_{j=1}^{m_r} w_{jyy} r_j \right. \\
 & + \nu \left(w_{ixx} \sum_{j=1}^{m_r} w_{jyy} r_j + w_{iyy} \sum_{j=1}^{m_r} w_{jxx} r_j \right) \\
 & \left. + 2(1-\nu) w_{ixy} \sum_{j=1}^{m_r} w_{jxy} r_j \right\} dx dy
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_s}{\partial r_i} = & \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \int_0^s \int_0^c \left\{ w_{i_x} \left(\sum_{j=1}^{m_p} u_{j_x} p_j \sum_{j=1}^{m_r} w_{j_x} r_j + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{m_r} w_{j_y} r_j \right)^3 \right) \right. \\
 & + w_{i_y} \left(\sum_{j=1}^{m_q} v_{j_y} q_j \sum_{j=1}^{m_r} w_{j_y} r_j + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{m_r} w_{j_y} r_j \right)^3 \right) \\
 & + \nu \left[w_{i_x} \left(\sum_{j=1}^{m_q} v_{j_y} q_j + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{m_r} w_{j_y} r_j \right)^2 \right) \sum_{j=1}^{m_r} w_{j_x} r_j \right. \\
 & \left. + w_{i_y} \left(\sum_{j=1}^{m_p} u_{j_x} p_j + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{m_r} w_{j_x} r_j \right)^2 \right) \sum_{j=1}^{m_r} w_{j_y} r_j \right] + \frac{1-\nu}{2} \left(\sum_{j=1}^{m_q} v_{j_x} q_j \right. \\
 & \left. + \sum_{j=1}^{m_p} u_{j_y} p_j + \sum_{j=1}^{m_r} w_{j_x} r_j \sum_{j=1}^{m_r} w_{j_y} r_j \right) \\
 & \times \left. \left(w_{i_x} \sum_{j=1}^{m_r} w_{j_y} r_j + w_{i_y} \sum_{j=1}^{m_r} w_{j_x} r_j \right) \right\} dx dy
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

mientras que el término de fuerza generalizada Q_i viene dado por la ecuación (6.17).

Como vemos, las ecuaciones anteriores están escritas en función de unas supuestas formas modales que permiten modelar los desplazamientos estructurales. Antes de proceder con su selección, vamos a intentar reescribir las ecuaciones (6.21) a (6.25) de forma que sean más sencillas de entender.

En forma matricial, la ecuación (6.21) puede escribirse como:

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{p} + \mathbf{B}_1 \mathbf{q} + \mathbf{C}_1 (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) = \mathbf{0} \tag{6.26}$$

donde $\mathbf{p} = [p_1 \dots p_{m_p}]^T$, $\mathbf{q} = [q_1 \dots q_{m_q}]^T$, $\mathbf{r} = [r_1 \dots r_{m_r}]^T$ y el símbolo \otimes denota el producto de Kronecker entre dos vectores. Por ejemplo:

$$[a_1 \ a_2] \otimes [b_1 \ b_2] = [a_1 b_1 \ a_1 b_2 \ a_2 b_1 \ a_2 b_2] \tag{6.27}$$

Tengamos en cuenta que \mathbf{r} es un vector columna, por lo que $\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}$ es también un vector columna. La fila i de las matrices \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_1 y \mathbf{C}_1 vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_{1i} &= \int_0^s \int_0^c \left(2u_{i_x} \mathbf{u}_x + (1-\nu)u_{i_y} \mathbf{u}_y \right) dx dy \\
 \mathbf{b}_{1i} &= \int_0^s \int_0^c \left(2v u_{i_x} \mathbf{v}_y + (1-\nu)u_{i_y} \mathbf{v}_x \right) dx dy
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

$$\mathbf{c}_{1_i} = \int_0^s \int_0^c \left(2u_{i_x}(\mathbf{w}_x \otimes \mathbf{w}_x) + \nu u_{i_y}(\mathbf{w}_y \otimes \mathbf{w}_y) + (1-\nu)u_{i_y}(\mathbf{w}_x \otimes \mathbf{w}_y) \right) dx dy$$

para $i = 1, \dots, m_p$, donde $\mathbf{u}_x = [u_{1_x} \ \cdots \ u_{m_p x}]$, $\mathbf{w}_y = [w_{1_y} \ \cdots \ w_{m_r y}]$ y así en adelante. Nota que hemos definido $\mathbf{u}_x, \mathbf{w}_y$ y así sucesivamente como vectores filas, así que los productos de Kronecker son también vectores fila. Las matrices \mathbf{A}_1 y \mathbf{B}_1 tienen dimensiones $m_p \times m_p$ pero \mathbf{C}_1 es una matriz $m_p \times m_r^2$. La ecuación (6.27) es una ecuación algebraica no lineal que relaciona los tres conjuntos de coordenadas generalizadas, \mathbf{p}, \mathbf{q} y \mathbf{r} .

La ecuación (6.22) puede escribirse en forma matricial como:

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{p} + \mathbf{B}_2 \mathbf{q} + \mathbf{C}_2 (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (6.29)$$

donde la fila i th de las matrices $\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2$ y \mathbf{C}_2 son calculadas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{2_i} &= \int_0^s \int_0^c \left(2\nu v_{i_y} \mathbf{u}_x + (1-\nu) v_{i_x} \mathbf{u}_y \right) dx dy \\ \mathbf{b}_{2_i} &= \int_0^s \int_0^c \left(2\nu v_{i_y} \mathbf{v}_y + (1-\nu) v_{i_x} \mathbf{v}_x \right) dx dy \\ \mathbf{c}_{2_i} &= \int_0^s \int_0^c \left(v_{i_y}(\mathbf{w}_y \otimes \mathbf{w}_y) + \nu v_{i_y}(\mathbf{w}_x \otimes \mathbf{w}_x) + (1-\nu) v_{i_x}(\mathbf{w}_x \otimes \mathbf{w}_y) \right) dx dy \end{aligned} \quad (6.30)$$

De nuevo, las matrices \mathbf{A}_2 y \mathbf{B}_2 son $m_q \times m_q$ y la matriz \mathbf{C}_2 $m_q \times m_r^2$. Finalmente, podemos sustituir las expresiones (6.23), (6.24), (6.25) y (6.17) en la tercera expresión de la ecuación (6.20) y escribir esta última en forma matricial como:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{E}\mathbf{r} + \mathbf{N}_1(\mathbf{p} \otimes \mathbf{r}) + \mathbf{N}_2(\mathbf{q} \otimes \mathbf{r}) + \mathbf{N}_3(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) = \mathbf{Q}(t) \quad (6.31)$$

Las filas i th de las matrices $\mathbf{A}, \mathbf{E}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ y \mathbf{N}_3 van a venir dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &= m_m \int_0^s \int_0^c w_i \mathbf{w} dx dy \\ \mathbf{e}_i &= D \int_0^s \int_0^c \left(w_{i_{xx}} \mathbf{w}_{xx} + w_{i_{yy}} \mathbf{w}_{yy} + \nu (w_{i_{xx}} \mathbf{w}_{yy} + w_{i_{yy}} \mathbf{w}_{xx}) \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\nu) w_{i_{xy}} w_{xy} \right) dx dy \\ \mathbf{n}_{1_i} &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^s \int_0^c 2w_{i_x}(\mathbf{u}_x \otimes \mathbf{w}_x) + 2vw_{i_y}(\mathbf{u}_x \otimes \mathbf{w}_y) + (1 \\ &\quad - \nu) \left(w_{i_x}(\mathbf{u}_y \otimes \mathbf{w}_y) + w_{i_y}(\mathbf{u}_y \otimes \mathbf{w}_x) \right) dx dy \\ \mathbf{n}_{2_i} &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^s \int_0^c 2w_{i_y}(\mathbf{v}_y \otimes \mathbf{w}_y) + 2vw_{i_x}(\mathbf{v}_y \otimes \mathbf{w}_x) + (1 \\ &\quad - \nu) \left(w_{i_x}(\mathbf{v}_x \otimes \mathbf{w}_y) + w_{i_y}(\mathbf{v}_x \otimes \mathbf{w}_x) \right) dx dy \end{aligned} \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{3i} = & \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^s \int_0^c w_{ix} (\mathbf{w}_x \otimes \mathbf{w}_x \otimes \mathbf{w}_x) + w_{iy} (\mathbf{w}_y \otimes \mathbf{w}_y \otimes \mathbf{w}_y) \\ & + \nu \left(w_{ix} (\mathbf{w}_y \otimes \mathbf{w}_y \otimes \mathbf{w}_x) + w_{iy} (\mathbf{w}_x \otimes \mathbf{w}_x \otimes \mathbf{w}_y) \right) + (1 \\ & - \nu) \left(w_{ix} (\mathbf{w}_x \otimes \mathbf{w}_y \otimes \mathbf{w}_y) + w_{iy} (\mathbf{w}_x \otimes \mathbf{w}_y \otimes \mathbf{w}_x) \right) dx dy \end{aligned}$$

En la ecuación (6.31) los términos no lineales son los que multiplican a las matrices \mathbf{N}_1 , \mathbf{N}_2 y \mathbf{N}_3 y los lineales al resto.

Finalmente, vamos a ver cómo podemos transformar la ecuación (6.17) de $\mathbf{Q}(t)$ para integrar la ecuación (6.31).

Antes de continuar, debemos elegir como llevar a cabo la integración en el tiempo de las ecuaciones aeroelásticas del movimiento. Una opción podría ser utilizar un esquema de diferencias centradas para las ecuaciones estructurales y un esquema de diferencias hacia atrás de primer orden para las aerodinámicas.

El problema con esta aproximación es que el solver estructural es preciso para segundo orden, mientras que el aerodinámico sólo lo es para primer orden y combinar solver de diferente orden es peligroso y puede acarrear problemas de inestabilidad numérica.

Otra opción sería utilizar un esquema de diferencias hacia atrás de primer orden tanto para las ecuaciones estructurales como para las ecuaciones aerodinámicas; esto requeriría un paso temporal muy pequeño puesto que las ecuaciones del movimiento estructural son muy rígidas y se vuelven aún más rígidas a altas amplitudes de vibración debido a su no linealidad. En el método del Vortex-Lattice no estacionario, el paso temporal está relacionado con el número de paneles en la dirección de la cuerda y si se quiere reducir mucho el paso temporal, los cálculos de las matrices de influencia aerodinámicas se volverían excesivamente lentos.

Utilizar un esquema de integración de orden alto en el Vortex-Lattice es complicado puesto que la estela se actualiza utilizando un esquema de integración de primer orden. En cada instante temporal $\Gamma_b(t - \Delta t)$ y $\Gamma_w(t - \Delta t)$ son utilizados para calcular $\Gamma_w(t)$. Como sólo los valores de los instantes de tiempo previo y actual son empleados, el cálculo tiene una precisión de primer orden.

El método clásico para resolver este problema es aplicar la transformada de Fourier a la ecuación (6.9) la cual proporciona la fuerza del anillo de torbellino.

Aplicando la transformada a esta ecuación obtenemos:

$$U \sin \alpha \mathbf{n}_z \delta(\omega) - U \mathbf{w}_x \mathbf{r}(\omega) - i\omega \mathbf{w} \mathbf{r}(\omega) + \mathbf{A}_b \Gamma_b(\omega) + \mathbf{A}_w \Gamma_w(\omega) = \mathbf{0} \quad (6.33)$$

donde $\delta(\omega)$ es la función delta de Dirac. Para continuar, necesitamos expresar la vorticidad de la estela $\Gamma_w(\omega)$ en términos de la vorticidad de los anillos del ala $\Gamma_b(\omega)$. En el dominio del tiempo, la vorticidad de la estela puede escribirse de una forma más conveniente como:

$$\boldsymbol{\Gamma}_w(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_{b_{(m_v-1)n_v+1}}(t - \Delta t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Gamma}_{b_{m_vn_v}}(t - \Delta t) \\ \boldsymbol{\Gamma}_{b_{(m_v-1)n_v+1}}(t - 2\Delta t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Gamma}_{b_{m_vn_v}}(t - 2\Delta t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Gamma}_{b_{(m_v-1)n_v+1}}(t - m_w\Delta t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Gamma}_{b_{m_vn_v}}(t - m_w\Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_c \boldsymbol{\Gamma}_b(t - \Delta t) \\ \mathbf{P}_c \boldsymbol{\Gamma}_b(t - 2\Delta t) \\ \vdots \\ \mathbf{P}_c \boldsymbol{\Gamma}_b(t - m_w\Delta t) \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

donde \mathbf{P}_c es una matriz $n_v \times m_v n_v$ definida como:

$$\mathbf{P}_c = (\mathbf{0}_{n_v \times (m_v-1)n_v} \quad \mathbf{I}_{n_v}) \quad (6.35)$$

donde \mathbf{I}_{n_v} denota una matriz identidad de tamaño n_v y $\mathbf{0}_{n_v \times (m_v-1)n_v}$ denota una matriz de ceros de tamaño $n_v \times (m_v - 1)n_v$ en la que recordamos que m_v son los paneles en la dirección de la cuerda en el ala y n_v son los paneles en la dirección de la envergadura en el ala.

Sabiendo ahora que la transformada de Fourier de $\boldsymbol{\Gamma}_b(t - \Delta t)$ es $e^{-i\omega\Delta t}\boldsymbol{\Gamma}_b(\omega)$, la vorticidad de la estela puede evaluarse ahora como:

$$\boldsymbol{\Gamma}_w(\omega) = \begin{pmatrix} e^{-i\omega\Delta t} \mathbf{P}_c \boldsymbol{\Gamma}_b(\omega) \\ e^{-i\omega 2\Delta t} \mathbf{P}_c \boldsymbol{\Gamma}_b(\omega) \\ \vdots \\ e^{-i\omega m_w\Delta t} \mathbf{P}_c \boldsymbol{\Gamma}_b(\omega) \end{pmatrix} = \mathbf{P}_e(\omega) \mathbf{P}_c \boldsymbol{\Gamma}_b(\omega) \quad (6.36)$$

donde $\mathbf{P}_e(\omega)$ es una matriz $m_w n_v \times n_v$ definida como:

$$\mathbf{P}_e(\omega) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_v} e^{-i\omega\Delta t} \\ \mathbf{I}_{n_v} e^{-i\omega 2\Delta t} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{n_v} e^{-i\omega m_w\Delta t} \end{pmatrix} \quad (6.37)$$

Sustituyendo la ecuación (6.36) dentro de la ecuación (6.33) y despejando para $\boldsymbol{\Gamma}_b(\omega)$ obtenemos:

$$\boldsymbol{\Gamma}_b(\omega) = -(A_b + A_w \mathbf{P}_e \mathbf{P}_c)^{-1} (U \sin \alpha \mathbf{n}_z \delta(\omega) - (U \mathbf{w}_x + i\omega \mathbf{w}) \mathbf{r}(\omega)) \quad (6.38)$$

Por otro lado, la sustentación dada por el método del Vortex-Lattice no estacionario venía dada por la ecuación (5.24). La fuerza aerodinámica perpendicular a la superficie del ala ($L_{ij}(t)/\cos \alpha_{ij}$) es:

$$l_{ij}(t) = \Delta p_{ij}(t) \Delta S_{ij} \quad (6.39)$$

que puede escribirse en términos de la vorticidad de la estela y del ala como:

$$l_{i,j}(t) = \rho U \cos \alpha (\Gamma_{b_{i,j}}(t) - \Gamma_{b_{i-1,j}}(t)) \Delta y_{i,j} + \rho \dot{\Gamma}_{b_{i,j}}(t) \Delta S_{i,j} \quad (6.40)$$

Esta puede reescribirse a su vez en términos matriciales como:

$$\mathbf{l}(t) = \rho U \cos \alpha \mathbf{G}_y \boldsymbol{\Gamma}_b(t) + \rho \mathbf{G}_S \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_b(t) \quad (6.41)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= (l_{1,1} \ l_{1,2} \ \dots \ l_{1,n_v} \ \dots \ l_{m_v,1} \ l_{m_v,2} \ \dots \ l_{m_v,n_v})^T \\ \mathbf{G}_y &= \left[\mathbf{I}_{m_v n_v} + \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n_v \times (m_v-1)n_v} & \mathbf{0}_{n_v \times n_v} \\ \mathbf{I}_{(m_v-1)n_v} & \mathbf{0}_{(m_v-1)n_v \times n_v} \end{pmatrix} \right] \circ (\Delta \mathbf{y} \ \Delta \mathbf{y} \ \dots \ \Delta \mathbf{y}) \\ \Delta \mathbf{y} &= (\Delta y_{1,1} \ \Delta y_{1,2} \ \dots \ \Delta y_{1,n_v} \ \dots \ \Delta y_{m_v,1} \ \Delta y_{m_v,2} \ \dots \ \Delta y_{m_v,n_v})^T \quad (6.42) \\ \mathbf{G}_S &= \mathbf{I}_{m_v n_v} \circ (\Delta \mathbf{S} \ \Delta \mathbf{S} \ \dots \ \Delta \mathbf{S}) \\ \Delta \mathbf{S} &= (\Delta S_{1,1} \ \Delta S_{1,2} \ \dots \ \Delta S_{1,n_v} \ \dots \ \Delta S_{m_v,1} \ \Delta S_{m_v,2} \ \dots \ \Delta S_{m_v,n_v})^T \end{aligned}$$

Aplicando ahora la transformada de Fourier a la ecuación (6.41) obtenemos:

$$\mathbf{l}(\omega) = \rho U \cos \alpha \mathbf{G}_y \boldsymbol{\Gamma}_b(\omega) + \rho i\omega \mathbf{G}_S \boldsymbol{\Gamma}_b(\omega) \quad (6.43)$$

y sustituyendo por $\boldsymbol{\Gamma}_b(\omega)$ desde la ecuación (6.38) obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}(\omega) &= -\rho (U \cos \alpha \mathbf{G}_y + i\omega \mathbf{G}_S) (\mathbf{A}_b + \mathbf{A}_w \mathbf{P}_e \mathbf{P}_c)^{-1} (U \sin \alpha \mathbf{n}_z \delta(\omega) \\ &\quad - (\mathbf{U} \mathbf{w}_x + i\omega \mathbf{w}) \mathbf{r}(\omega)) \quad (6.44) \end{aligned}$$

Este resultado es bastante útil porque relaciona directamente la fuerza aerodinámica perpendicular a la superficie del ala con los desplazamientos modales $\mathbf{r}(\omega)$. Si ahora introducimos la frecuencia reducida $k = \omega b/U$, donde $b = c/2$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}(k) &= -\rho U^2 \left(\cos \alpha \mathbf{G}_y + i \frac{k}{b} \mathbf{G}_S \right) (\mathbf{A}_b + \mathbf{A}_w \mathbf{P}_e \mathbf{P}_c)^{-1} (\sin \alpha \mathbf{n}_z \delta(k) \\ &\quad - \left(\mathbf{w}_x + i \frac{k}{b} \mathbf{w} \right) \mathbf{r}(k)) \quad (6.45) \end{aligned}$$

y puesto que en la programación del código del UVLM se eligió que $\Delta t = c/m_v U$, la matriz $\mathbf{P}_e(\omega)$ puede expresarse como:

$$\mathbf{P}_e(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_v} e^{-2ik/m_v} \\ \mathbf{I}_{n_v} e^{-4ik/m_v} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{n_v} e^{-2ikm_w/m_v} \end{pmatrix} \quad (6.46)$$

Podemos simplificar un poco la ecuación (6.45) agrupando términos como:

$$\mathbf{l}(k) = -\rho U^2 (\mathbf{l}_0(k) \sin \alpha - \mathbf{l}_1(k) \mathbf{r}(k)) \quad (6.47)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_0(k) &= \left(\cos \alpha \mathbf{G}_y + i \frac{k}{b} \mathbf{G}_S \right) (\mathbf{A}_b + \mathbf{A}_w \mathbf{P}_e \mathbf{P}_c)^{-1} \mathbf{n}_z \delta(k) \\ \mathbf{l}_1(k) &= \left(\cos \alpha \mathbf{G}_y + i \frac{k}{b} \mathbf{G}_S \right) (\mathbf{A}_b + \mathbf{A}_w \mathbf{P}_e \mathbf{P}_c)^{-1} (\mathbf{w}_x + i \frac{k}{b} \mathbf{w}) \end{aligned} \quad (6.48)$$

Finalmente, ya podemos calcular el trabajo virtual dado por la fuerza aerodinámica perpendicular a la superficie del ala en los modos a partir de la ecuación (6.17), la cual puede escribirse de forma matricial como:

$$\mathbf{Q}(t) = (\mathbf{l}(t)^T \mathbf{w})^T \quad (6.49)$$

Aplicando la transformada de Fourier y sustituyendo en la ecuación (6.47) obtenemos:

$$\mathbf{Q}(k) = -\rho U^2 (\mathbf{Q}_0(k) \sin \alpha - \mathbf{Q}_1(k) \mathbf{r}(k)) \quad (6.50)$$

donde

$$\mathbf{Q}_0(k) = (\mathbf{l}_0(k)^T \mathbf{w})^T \quad \mathbf{Q}_1(k) = (\mathbf{l}_1(k)^T \mathbf{w})^T \quad (6.51)$$

La matriz \mathbf{Q}_1 es conocida como la matriz de fuerzas aerodinámicas generalizada y es la base de la aeroelasticidad de alas más práctica en 3D. Es únicamente función de la geometría del ala y de la frecuencia reducida puesto que, en flujo incompresible, la condición de vuelo y, por tanto, el número de Mach no afecta. En flujo compresible, en cambio, también es función del número de Mach.

Ahora estamos ya en disposición de realizar el acoplamiento de cargas aerodinámicas con el modelo estructural. Aunque es posible resolver el modelo completo con términos lineales y no lineales, la resolución se escapa fuera de los objetivos de este proyecto. Por ello únicamente nos centraremos en resolver la ecuación (6.31) sin los términos no lineales, es decir,

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{E}\mathbf{r} = \mathbf{Q}(t) \quad (6.52)$$

No podemos escribir una expresión para $\mathbf{Q}(t)$ todavía, puesto que solamente tenemos $\mathbf{Q}(k)$ y no podemos llevar a cabo la inversa de la transformada de Fourier. En vez de esto, aplicamos la transformada de Fourier a la ecuación (6.52) y entonces sustituimos $\mathbf{Q}(k)$ desde la ecuación (6.50) para obtener:

$$\left(-\left(\frac{kU}{b}\right)^2 \mathbf{A} + \mathbf{E} - \rho U^2 \mathbf{Q}_1(k) \right) \mathbf{r}(k) = -\rho U^2 \mathbf{Q}_0(k) \sin \alpha \quad (6.53)$$

Esta es la clásica ecuación aeroelástica lineal en el dominio de la frecuencia. Esta ecuación es la que nos va a permitir, seleccionando unas formas modales adecuadas para nuestro problema, estudiar el problema del flameo en el ala. Es por ello que este es el momento de seleccionar aquellas formas modales que cumplan las condiciones de contorno adecuadas de nuestro problema, es decir, de nuestra estructura alar. En nuestro caso, como la raíz de la placa está sujeta (restringida) y los demás bordes están libres, las condiciones de contorno son:

$$\begin{aligned} \text{En } y = 0: u &= 0, w = 0, w_y = 0. \\ \text{En } y = s: w_{xx} &= 0, w_{yy} = 0. \\ \text{En } x = 0: w_{xx} &= 0. \\ \text{En } x = c: w_{xx} &= 0. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Usaremos las formas modales dadas por Rao en [23] que vienen dadas por:

$$\phi_m(x) = -\sinh \frac{\beta_m x}{c} - \sin \frac{\beta_m x}{c} - \frac{\sin \beta_m - \sinh \beta_m}{\cosh \beta_m - \cos \beta_m} \left(\cosh \frac{\beta_m x}{c} + \cos \frac{\beta_m x}{c} \right) \quad (6.55)$$

$$\psi_n(y) = \frac{\sin \beta_n - \sinh \beta_n}{\cos \beta_n + \cosh \beta_n} \left(\sin \frac{\beta_n y}{s} - \sinh \frac{\beta_n y}{s} \right) + \left(\cosh \frac{\beta_n y}{s} - \cos \frac{\beta_n y}{s} \right) \quad (6.56)$$

donde $\phi_m(x)$ son los modos libre-libre y $\psi_n(y)$ son los modos de viga en voladizo. Las ecuaciones 6-55 y 6-56 están escritas para $m = 1, \dots, m_x, n = 1, \dots, n_y$ y

$$\beta_m = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 1 \\ 4,730 & \text{si } m = 2 \\ 7,853 & \text{si } m = 3 \\ (2m - 1)\pi/2 & \text{si } m > 3 \end{cases} \quad (6.57)$$

$$\beta_n = \begin{cases} 1,875 & \text{si } n = 1 \\ 4,694 & \text{si } n = 2 \\ 7,856 & \text{si } n = 3 \\ (2n - 1)\pi/2 & \text{si } n > 3 \end{cases} \quad (6.58)$$

Las formas modales completas vendrán dadas entonces por:

$$w_j(x, y) = \phi_m(x) \psi_n(y) \quad (6.59)$$

para $j = 1, \dots, m_r$, donde $m_r = m_x n_y$. El primer modo libre-libre consiste en una traslación de un cuerpo rígido y todos los modos superiores son modos de flexión. No hay modos de rotación de cuerpo rígido para representar el primer modo de torsión del ala. Weiliang y Dowell introdujeron:

$$\phi_2 = 2 \left(1 - 2 \frac{x}{c} \right) \quad (6.60)$$

como forma de rotación de cuerpo rígido. Interpondremos esta forma entre el primer y el segundo de los modos ϕ_m de las ecuaciones (6.55) y (6.56). Las formas completas de los modos w_j se ensamblan desde la ecuación (6.59) tras sustituir las expresiones (6.55), (6.56) y (6.60).

Para los modos en el plano del ala, Attar demostró que la mejor elección es utilizar los modos lineales fuera del plano [3]. Estas formas conducen a una representación precisa de las frecuencias de vibración y deflexiones estáticas de un ala en voladizo utilizando relativamente un número pequeño de modos, precisamente debido a que ellos no satisfacen las condiciones de contorno lineales en el plano por lo que ellos tienen la capacidad de satisfacer las no lineales. Como consecuencia:

$$u_j(x, y) = v_j(x, y) = w_j(x, y) \quad (6.61)$$

para $j = 1, \dots, m_p$, donde $m_p = m_q = m_x n_y$.

Para resolver las integrales de las ecuaciones vistas será necesario por tanto elegir un número de modos fuera del plano $m_r = m_x \cdot n_y$ y dentro del plano $m_q = m_p = m_x \cdot n_y$. Además, en la resolución se establecerán vectores de puntos igualmente equispaciados $x_k = [0 \ \Delta x \ 2\Delta x \ \dots \ c]$ y $y_l = [0 \ \Delta y \ 2\Delta y \ \dots \ s]$ y entonces se evaluará $u_j(x, y)$, $w_j(x, y)$ y sus primeras y segundas derivadas para todas las combinaciones de x_k y de y_l . Si denotamos $w_j(x_k, y_l)$ por $w_{j,k,l}$ podemos aplicar la regla de Simpson para resolver de forma aproximada las integrales como:

$$\begin{aligned} & \int_0^c w_i(x, y) w_j(x, y) dx \\ & \approx \frac{\Delta x}{3} \left(w_{i_{0,l}} w_{j_{0,l}} + 4w_{i_{1,l}} w_{j_{1,l}} + 2w_{i_{2,l}} w_{j_{2,l}} + 4w_{i_{3,l}} w_{j_{3,l}} + 2w_{i_{4,l}} w_{j_{4,l}} \right. \\ & \quad \left. + \dots + w_{i_{n_k,l}} w_{j_{n_k,l}} \right) \end{aligned} \quad (6.62)$$

donde n_k es el número total de puntos en x_k . Una vez hayamos integrado a lo largo de x podemos repetir el proceso integrando sobre y .

De esta manera, hemos terminado nuestra selección de formas modales y estamos en disposición de trabajar con la ecuación (6.53) y resolver el problema del flameo.

Aplicando la suposición de $\alpha = 0^\circ$ para simplificar un proceso ya de por sí largo y complejo, la ecuación (6.54) se puede simplificar a:

$$\left(- \left(\frac{kU}{b} \right)^2 \mathbf{A} + \mathbf{E} - \rho U^2 \mathbf{Q}_1(k) \right) \mathbf{r}(k) = \mathbf{0} \quad (6.63)$$

Esta ecuación solo puede satisfacerse si $\mathbf{r}(k) = \mathbf{0}$, lo cual es la solución trivial, o si

$$\det \left(-\left(\frac{kU}{b} \right)^2 \mathbf{A} + \mathbf{E} - \rho U^2 \mathbf{Q}_1(k) \right) = 0 \quad (6.64)$$

El determinante en la expresión anterior se conoce como determinante del flameo porque se vuelve cero en la condición de flameo. Hemos sustituido las respuestas sinusoidales en la ecuación del movimiento, que solo puede ocurrir cuando la amortiguación es cero, esto es, el flameo. El determinante de flameo es complejo, de modo que tanto su parte real como su parte imaginaria debe ser igual a cero. Esto significa que podemos calcular la velocidad de flameo y frecuencia de flameo resolviendo:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \Re \left(\det \left(-\left(\frac{kU}{b} \right)^2 \mathbf{A} + \mathbf{E} - \rho U^2 \mathbf{Q}_1(k) \right) \right) \\ \Im \left(\det \left(-\left(\frac{kU}{b} \right)^2 \mathbf{A} + \mathbf{E} - \rho U^2 \mathbf{Q}_1(k) \right) \right) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.65)$$

Lo cual es un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, U y k . El sistema es no lineal para k y para U por lo que debe resolverse utilizando el procedimiento de Newton-Raphson. El Jacobiano debe ser calculado numéricamente utilizando un esquema de diferencias directas. Para llevar a cabo esta resolución será necesario por tanto, escoger una semilla tanto para U como para k que dependerán de las condiciones del problema. Unos valores bastante aceptables para estas semillas serían $U = 20 \text{ m/s}$ y $k = 0,2$.

Para realizar correctamente el estudio numérico es importante también como varían los resultados al aumentar o disminuir el número de paneles en la discretización de la geometría del problema. Es importante encontrar la solución para un número de paneles de tal forma que un aumento o disminución de estos afecte de forma insignificante a la solución del problema.

Finalmente es posible calcular la velocidad de divergencia estática utilizando una aproximación similar a la utilizada para la velocidad de flameo. La condición de divergencia estática puede obtenerse desde la ecuación (6.65) estableciendo $k = 0$

$$\det(\mathbf{E} - \rho U^2 \mathbf{Q}_1(0)) = 0 \quad (6.66)$$

De nuevo será necesario utilizar el procedimiento de Newton-Raphson calculando numéricamente el Jacobiano y utilizando una hipótesis para la U que puede de nuevo $U = 20 \text{ m/s}$.

Aunque el incremento de modos en la dirección de la envergadura y de la cuerda va a tener un pequeño efecto en la predicción de la velocidad de flameo y de divergencia estática, el incremento de m_x o de n_y dará lugar a problemas de inestabilidad numérica en el cálculo del determinante de flameo y de divergencia de forma que el problema aeroelástico ya no se podrá resolver utilizando el esquema básico presentado y serán necesarios enfoques alternativos como el método $p - k$ de la referencia [12].

6.1.2. Formulación en el dominio del tiempo

En el dominio de la frecuencia conseguimos derivar la matriz de fuerza aerodinámica generalizada. En esta sección veremos cómo resolver la ecuación del acoplamiento aeroelástico en el dominio del tiempo, puesto que una formulación en términos temporales puede ser más útil (aunque más compleja) si se quieren introducir posteriormente los términos no lineales (aunque como se dijo previamente, esto no será objeto de este trabajo).

La técnica estándar utilizada para llevar a cabo la transformación de la matriz de fuerza aerodinámica generalizada al dominio del tiempo es la Aproximación a la Función Racional (RFA), también llamada aproximación de Padé (ver referencia [8]).

Recordamos que la matriz de fuerza aerodinámica generalizada viene dada por

$$\mathbf{Q}(k) = -\rho U^2 (\mathbf{Q}_0(k) \sin \alpha - \mathbf{Q}_1(k) \mathbf{r}(k)) \quad (6.67)$$

Utilizando las propiedades de la función delta de Dirac, es sencillo demostrar que la transformada inversa de Fourier de $\mathbf{Q}_0(k)$ es la constante:

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{Q}(k)) = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{Q}(\omega)) = \mathbf{Q}_0 = (\mathbf{l}_0(0)^T \mathbf{w})^T$$

donde \mathcal{F}^{-1} representa la transformada inversa de Fourier y

$$\mathbf{l}_0(0) = \cos \alpha \mathbf{G}_y (\mathbf{A}_b + \mathbf{A}_w \mathbf{P}_e(0) \mathbf{P}_c)^{-1} \mathbf{n}_z$$

Desafortunadamente no existe una expresión analítica obvia de la transformada inversa de Fourier para $\mathbf{Q}_1(k) \mathbf{r}(k)$. En [26], se sugiere escribir $\mathbf{Q}_1(k)$ de la forma:

$$\mathbf{Q}_1(k) = \mathbf{S}_0 + ik\mathbf{S}_1 + (ik)^2\mathbf{S}_2 + \sum_{i=1}^{n_l} \mathbf{S}_{2+i} \frac{ik}{ik + \gamma_i} \quad (6.68)$$

donde \mathbf{S}_i son matrices reales $m_r \times m_r$, siendo m_r el número de modos. La aproximación de Roger [26] incluye n_l términos aerodinámicos de retardo diseñados para representar el efecto memoria de la aerodinámica no estacionaria, es decir, la vorticidad almacenada en la estela. Cada término aerodinámico de retardo se asocia con un coeficiente de retardo γ_i . Tras sustituir $k = \omega b/U$ obtenemos:

$$\mathbf{Q}_1(\omega) = \mathbf{S}_0 + i\omega \frac{b}{U} \mathbf{S}_1 + (i\omega)^2 \left(\frac{b}{U}\right)^2 \mathbf{S}_2 + \sum_{i=1}^{n_l} \mathbf{S}_{2+i} \frac{i\omega}{i\omega + \left(\frac{b}{U}\right) \gamma_i} \quad (6.69)$$

Podemos aplicar la transformada inversa de Fourier a $\mathbf{Q}_1(\omega) \mathbf{r}(\omega)$ usando la expresión de Roger para $\mathbf{Q}_1(\omega)$, dándonos cuenta de que al multiplicar por $i\omega$ transformamos a la derivada con respecto al tiempo, la multiplicación en el dominio de la frecuencia es convolución en el dominio del tiempo y que la inversa de la transformada de Fourier de $1/(i\omega + (\frac{b}{U}) \gamma_i)$ es un decrecimiento exponencial. Los resultados de la transformada inversa son:

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{Q}_1(\omega)\mathbf{r}(\omega)) \\
 &= \mathbf{S}_0\mathbf{r}(t) + \left(\frac{b}{U}\right)\mathbf{S}_1\dot{\mathbf{r}}(t) + \left(\frac{b}{U}\right)^2\mathbf{S}_2\ddot{\mathbf{r}}(t) \\
 &+ \sum_{i=1}^{n_l} \mathbf{S}_{2+i} \int_0^t \dot{\mathbf{r}}(\tau) e^{-U\gamma_i(t-\tau)/b} d\tau
 \end{aligned} \tag{6.70}$$

donde τ es una variable de integración. Podemos definir los términos integrales de esta expresión como los estados aerodinámicos:

$$\boldsymbol{\eta}_i(t) = \int_0^t \dot{\mathbf{r}}(\tau) e^{-U\gamma_i(t-\tau)/b} d\tau \tag{6.71}$$

Ahora podemos escribir una expresión completa en el dominio del tiempo para las fuerzas aerodinámicas generalizadas tras ensamblar las transformadas inversas de Fourier de $\mathbf{Q}_0(\omega)$ y $\mathbf{Q}_1(\omega)\mathbf{r}(\omega)$ en la ecuación (6.67)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}(t) = & -\rho U^2 \mathbf{Q}_0 \sin \alpha + \rho U^2 \mathbf{S}_0 \mathbf{r}(t) + \rho U b \mathbf{S}_1 \dot{\mathbf{r}}(t) + \rho b^2 \mathbf{S}_2 \ddot{\mathbf{r}}(t) \\
 & + \rho U^2 \sum_{i=1}^{n_l} \mathbf{S}_{2+i} \boldsymbol{\eta}_i(t)
 \end{aligned} \tag{6.72}$$

Sustituyendo dentro de las ecuaciones estructurales lineales (6.52) obtenemos la ecuación del movimiento aeroelástico en el dominio del tiempo:

$$(\mathbf{A} - \rho b^2 \mathbf{S}_2) \ddot{\mathbf{r}} + (-\rho U b \mathbf{S}_1) \dot{\mathbf{r}} + (\mathbf{E} - \rho U^2 \mathbf{S}_0) \mathbf{r} - \rho U^2 \sum_{i=1}^{n_l} \mathbf{S}_{2+i} \boldsymbol{\eta}_i = -\rho U^2 \mathbf{Q}_0 \sin \alpha \tag{6.73}$$

Este es un conjunto de m_r ODES con $(n_l + 1)m_r$ incógnitas, \mathbf{r} y $\boldsymbol{\eta}_i$ para $i = 1, \dots, n_l$. Podemos completar las ecuaciones del movimiento aplicando la regla integral de Leibniz

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t_0, t) dt_0 = \frac{db(t)}{dt} f(b(t), t) - \frac{da(t)}{dt} f(a(t), t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(t_0, t)}{\partial t} dt_0 \tag{6.74}$$

a la definición de los estados aerodinámicos, con el fin de obtener las ecuaciones de los estados aerodinámicos

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_i = \dot{\mathbf{r}} - \frac{U\gamma_i}{b} \boldsymbol{\eta}_i \tag{6.75}$$

De esta forma, el conjunto completo de ecuaciones aeroelásticas en el dominio del tiempo puede escribirse ahora como:

$$(\mathbf{A} - \rho b^2 \mathbf{S}_2) \ddot{\mathbf{r}} + (-\rho U b \mathbf{S}_1) \dot{\mathbf{r}} + (\mathbf{E} - \rho U^2 \mathbf{S}_0) \mathbf{r} - \rho U^2 \sum_{i=1}^{n_l} \mathbf{S}_{2+i} \boldsymbol{\eta}_i = -\rho U^2 \mathbf{Q}_0 \sin \alpha \tag{6.76}$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_i = \dot{\mathbf{r}} - \frac{U\gamma_i}{b} \boldsymbol{\eta}_i$$

Si de nuevo establecemos que $\alpha = 0$, entonces la forma de primer orden puede expresarse como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -\bar{\mathbf{M}}^{-1}\bar{\mathbf{C}} & -\bar{\mathbf{M}}^{-1}\bar{\mathbf{K}} & -\bar{\mathbf{M}}^{-1}\bar{\mathbf{S}}_3 & -\bar{\mathbf{M}}^{-1}\bar{\mathbf{S}}_4 & \cdots & -\bar{\mathbf{M}}^{-1}\bar{\mathbf{S}}_{n_l} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & -\left(\frac{U}{b}\right)\gamma_1\mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\left(\frac{U}{b}\right)\gamma_2\mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\left(\frac{U}{b}\right)\gamma_{n_l}\mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (6.77)$$

donde $\mathbf{x} = [\dot{\mathbf{r}}_1^T \quad \mathbf{r}_1^T \quad \boldsymbol{\eta}^T]^T$ es el vector de estado aeroelástico de tamaño $2m_r + n_l$, siendo $\boldsymbol{\eta}$ el $n_l m_r \times 1$ vector de estado aerodinámico $\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\eta}_1^T \quad \cdots \quad \boldsymbol{\eta}_{n_l}^T]^T$. Las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez totales se definen como:

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{A} - \rho b^2 \mathbf{S}_2, \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{A} - \rho b^2 \mathbf{S}_1, \quad \bar{\mathbf{K}} = \mathbf{E} - \rho b^2 \mathbf{S}_0, \quad (6.78)$$

mientras que

$$\bar{\mathbf{S}}_3 = -\rho U^2 \mathbf{S}_3, \quad \dots, \quad \bar{\mathbf{S}}_{n_l} = -\rho U^2 \mathbf{S}_{n_l} \quad (6.79)$$

Antes de resolver la ecuación matricial (6.77) necesitamos evaluar las matrices desde la \mathbf{S}_2 hasta la \mathbf{S}_{n_l} . Recordando la formulación de Roger de la ecuación (6.68), la matriz \mathbf{S}_0 puede evaluarse en $k = 0$:

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{Q}_1(0) \quad (6.80)$$

Las demás matrices pueden calcularse desde el ajuste de la curva $\mathbf{Q}_1(k)$ en varios valores no nulos de k .

El primer paso será evaluar $\mathbf{Q}_1(k)$ para las frecuencias reducidas k_1, k_2, \dots, k_p . Entonces escribiendo la ecuación (6.68) para todos los valores de k

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1(k_1) - \mathbf{S}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_1(k_p) - \mathbf{S}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Iik_1 & I(ik_1)^2 & I\frac{ik_1}{ik_1 + \gamma_1} & \cdots & I\frac{ik_1}{ik_1 + \gamma_{n_l}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Iik_p & I(ik_p)^2 & I\frac{ik_p}{ik_p + \gamma_1} & \cdots & I\frac{ik_p}{ik_p + \gamma_{n_l}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{S}_{2+n_l} \end{pmatrix} \quad (6.81)$$

El número de frecuencias p debe ser igual o mayor a $2 + n_l$. No hay una única solución a la ecuación matricial (6.81); diferentes valores de n_l y de γ_i darán lugar a diferentes estimaciones para \mathbf{S}_i .

El ajuste de la curva se convierte en un problema de minimización restringido ajustando n_l y γ_n hasta que el error sea minimizado en orden a las restricciones, por ejemplo, que todos los γ_i sean del mismo signo. Según [15] y [29] una aproximación simple es utilizar los valores por defecto para los coeficientes de retardos aerodinámicos dados por el profesor de aeroservoelasticidad M. Karpel en [32]:

$$\gamma_i = 1,7k_p \left(\frac{i}{n_l + 1} \right)^2 \quad (6.82)$$

donde k_p es la frecuencia reducida más alta en la cual la matriz de fuerza aerodinámica generalizada ha sido calculada. Utilizando estos coeficientes, la curva de ajuste de las ecuaciones (6.81) se simplifica a un problema lineal de mínimos cuadrados para diferentes valores de n_l . Podemos también utilizar esos coeficientes para empezar a estimar en el cálculo de minimización. Una vez que los valores de las matrices S_i han sido estimadas, la ecuación (6.77) se convierte en una ecuación de movimiento aeroelástico en el dominio del tiempo de primer orden que puede resolverse de la forma clásica.

6.2. Caso práctico del flameo aeroelástico para un ala

Una vez desarrollada toda la matemática del fenómeno del flameo en el ala en voladizo, ha llegado el momento de poner a prueba el código desarrollado para obtener los resultados de velocidad y frecuencia de flameo, de la velocidad de divergencia estática, así como las curvas representativas del flameo en un ala.

El estudio se realizará sobre un ala rectangular de aluminio ($\rho_{al} = 2770 \text{ kg/m}^3, E = 68,7 \times 10^9 \text{ N/m}, \nu = 0,33$) de cuerda en el encastre $c = 0,2$ metros, envergadura $s = 0,6$ metros y densidad a nivel del mar $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$ que se encuentra en condiciones de empotramiento en uno de los extremos. Puesto que el problema se ha linealizado, se despreciarán los modos del plano y las matrices A y E se calcularán con $m_x = 4$ y $n_y = 4$.

6.2.1. Etapas de la resolución

El método del UVLM no es capaz de modelar el ala empotrada a causa de que las condiciones de flujo en el encastre serían las mismas que las que se encontrarían en punta del ala, por lo que la sustentación local sería nula. Sin embargo, en el empotramiento, las condiciones locales del flujo son cercanas a las condiciones 2D y la sustentación local no tiende a cero.

La solución por la que optaremos será modelar un aerodinámico alar con el doble de envergadura de la estructura alar. El encastre estructural se posicionará en el medio de la envergadura del ala aerodinámica donde la sustentación local es máxima. La técnica del espejo o de la duplicación se basa en el hecho de que si el ala es simétrica y el flujo de corriente tiene deslizamiento lateral nulo el flujo será paralelo al eje x en el punto medio de la envergadura modelando las condiciones de una “pared” o un empotramiento.

El número de paneles con los que vamos a modelar la cuerda del ala “aerodinámica” serán $m_v = 30$ paneles y la envergadura $n_v = 30$ paneles y la longitud de la estela será $c_w = 10c$. Sin embargo, como solo la mitad de los paneles de n_v se encuentran en la dirección de la envergadura (la otra mitad es de la imagen especular) realmente el ala será modelada con 15 paneles en la dirección de la envergadura.

Una vez visto cómo debemos modelar el ala empotrada, los pasos resumidos a seguir para resolver este problema son los siguientes:

1. Calcular las matrices de coeficientes de influencia aerodinámicas A_b y A_w .
2. Ensamblar las matrices de transformación modales w y w_x .
3. Calcular las matrices G_y , G_s .
4. Calcular la matriz P_c
5. Seleccionar un valor de frecuencia reducida k
6. Calcular la matriz $P_e(k)$
7. Calcular la matriz $L_1(k)$
8. Calcular la matriz $Q_1(k)$

Es importante tener en cuenta que, puesto que se ha utilizado la técnica del espejo, realmente sólo la mitad de los vectores de sustentación están actuando en nuestra ala, tendremos que:

$$Q_k(t) = \sum_{i=1}^{m_v} \sum_{j=\frac{n_v}{2}+1}^{n_v} l(x_{c_i}, y_{c_i}) \frac{\partial w}{\partial r_k} \Big|_{(x_{c_i}, y_{c_j})}$$

Como el ala, las formas modales y la corriente libre son simétricas alrededor del plano $x - z$, podemos escribir:

$$Q_0(k) = \frac{1}{2} (\mathbf{l}_0(k)^T \mathbf{w})^T, \quad Q_1(k) = \frac{1}{2} (\mathbf{l}_1(k)^T \mathbf{w})^T$$

9. Formar el determinante de flameo y resolverlo para k y para U
10. Resolver la ecuación del movimiento en el dominio del tiempo y obtener las curvas características de flameo.

Para este último paso las frecuencias reducidas que se seleccionarán para calcular $Q_1(k)$ serán un vector de 100 frecuencias k desde 0 hasta 1 equiespaciadas. Además escogeremos 2 retardos aerodinámicos n_l , los valores γ_i dados por la ecuación 6.82 y resolveremos el problema lineal del flameo evaluando los autovalores del sistema matricial de la ecuación (6.77) y graficándolos para un vector de velocidades aerodinámicas. De esta forma obtendremos las curvas características de flameo y comprobaremos que los valores coinciden con los valores obtenidos en el dominio de la frecuencia.

6.2.2. Solución del código

A continuación, se exponen los resultados obtenidos con el código programado para el problema descrito en la sección anterior.

Por un lado, en la figura 6.1 podemos ver la geometría del “ala estructural”, mientras que en la figura 6.2 podemos ver la geometría del “ala aerodinámica” con el doble de envergadura utilizada para aplicar la técnica del espejo o duplicación descrita en el apartado anterior.

En la tabla 6.1 podemos ver los resultados obtenidos para la velocidad y frecuencia a la que se produce el fenómeno de flameo para el ala, así como la velocidad de divergencia estática.

Finalmente, desde la figura 6.3 hasta la figura 6.7 se han representado las primeras cinco formas modales fuera del plano del ala calculadas en los puntos de control de los anillos de torbellino. Para obtenerlos se han utilizado las ecuaciones (6.55) y (6.56) para evaluar las formas modales desde $y = 0$ hasta $y = 0,6$ y posteriormente se ha duplicado alrededor de $y = 0$ para los valores negativos de y , puesto que introducir valores negativos de y en la ecuación (6.55) no es recomendable.

Velocidad de flameo (m/s)	Frecuencia de flameo (Hz)	Velocidad de divergencia estática (m/s)
22,7045	8,2437	26,7885

Tabla 6.1. Resultados del flameo del ala rectangular en el dominio de la frecuencia

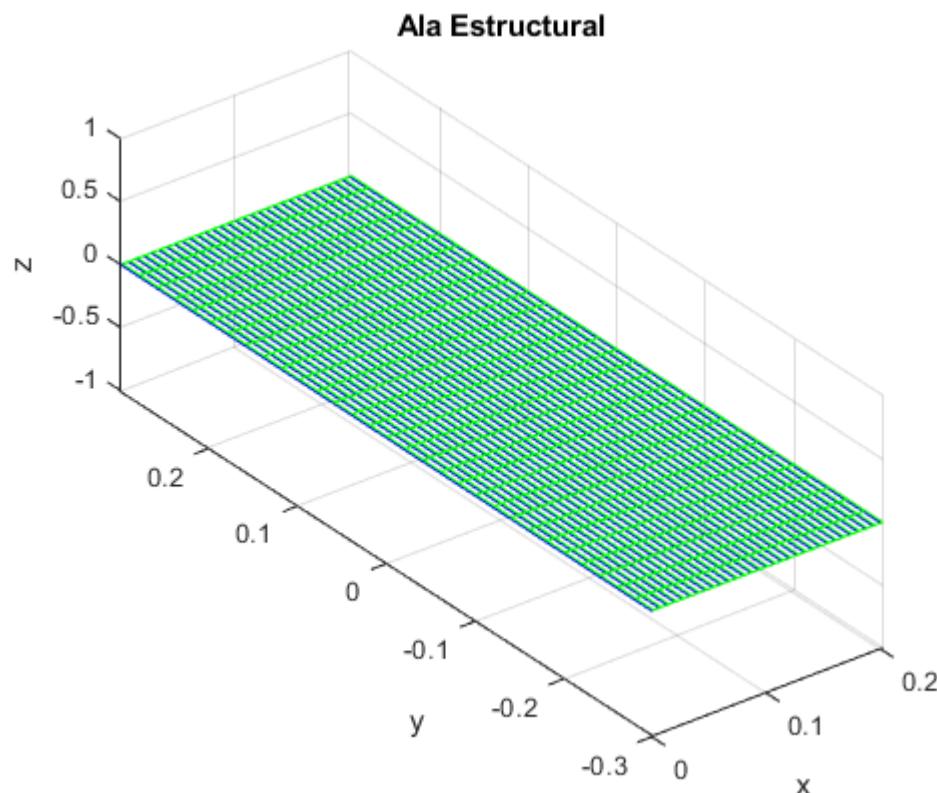


Figura 6.1. Ala estructural

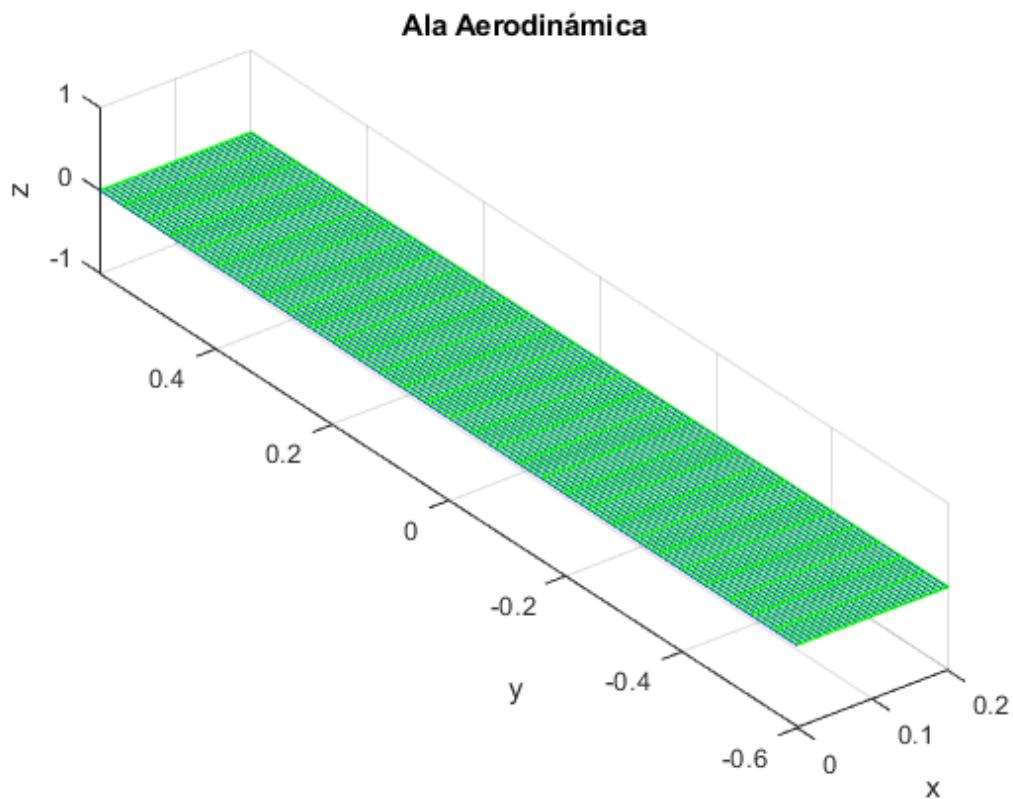


Figura 6.2. Ala aerodinámica

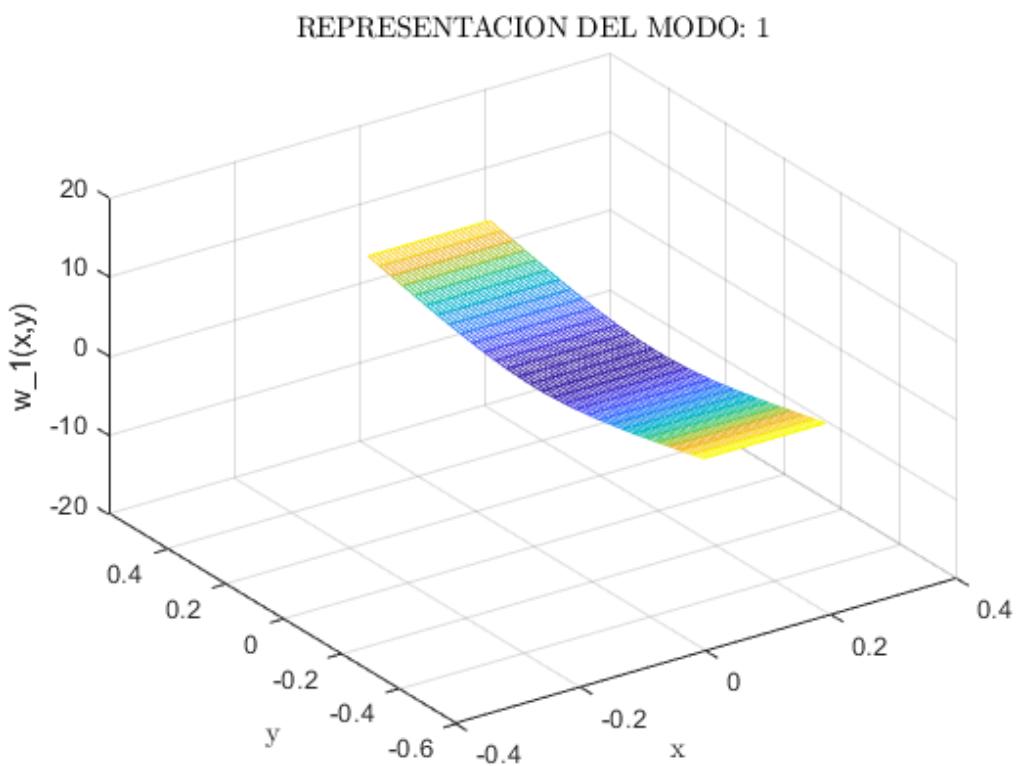


Figura 6.3. Forma modal 1 del ala

REPRESENTACION DEL MODO: 2

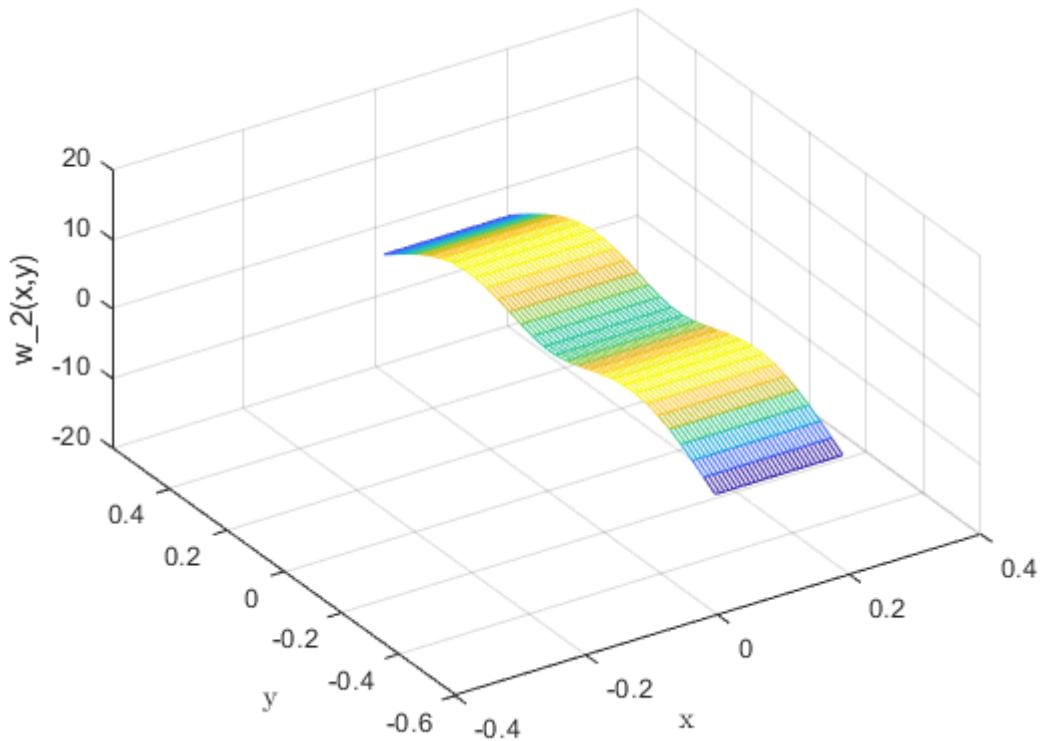


Figura 6.4. Forma modal 2 del ala

REPRESENTACION DEL MODO: 3

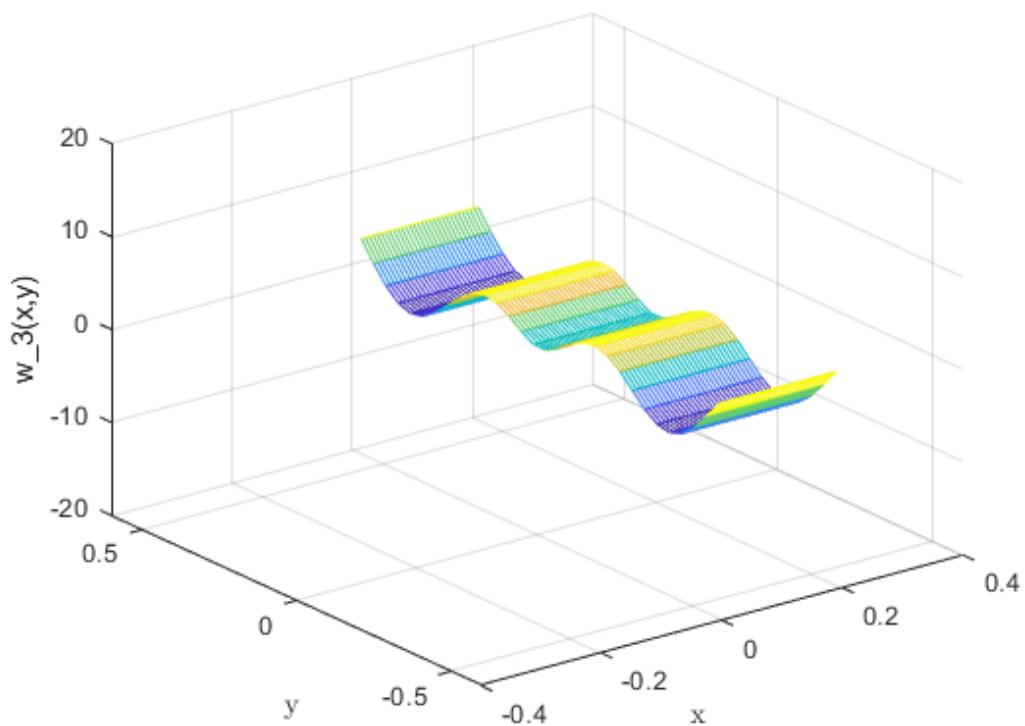


Figura 6.5. Forma modal 3 del ala

REPRESENTACION DEL MODO: 4

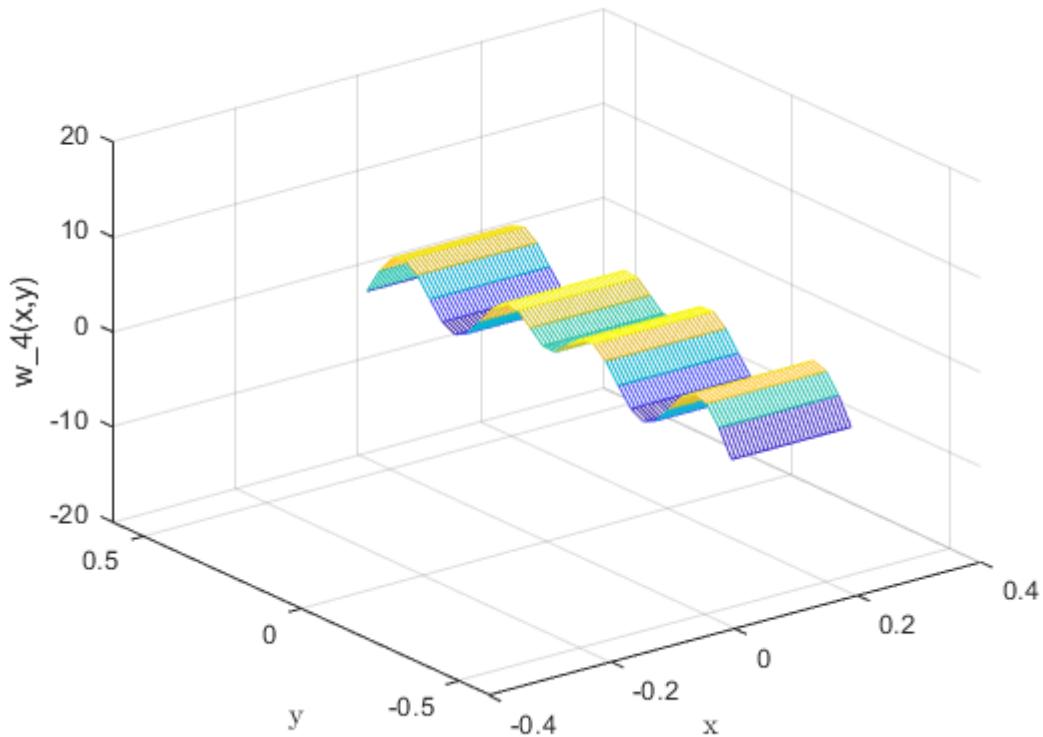


Figura 6.6. Forma modal 4 del ala

REPRESENTACION DEL MODO: 5

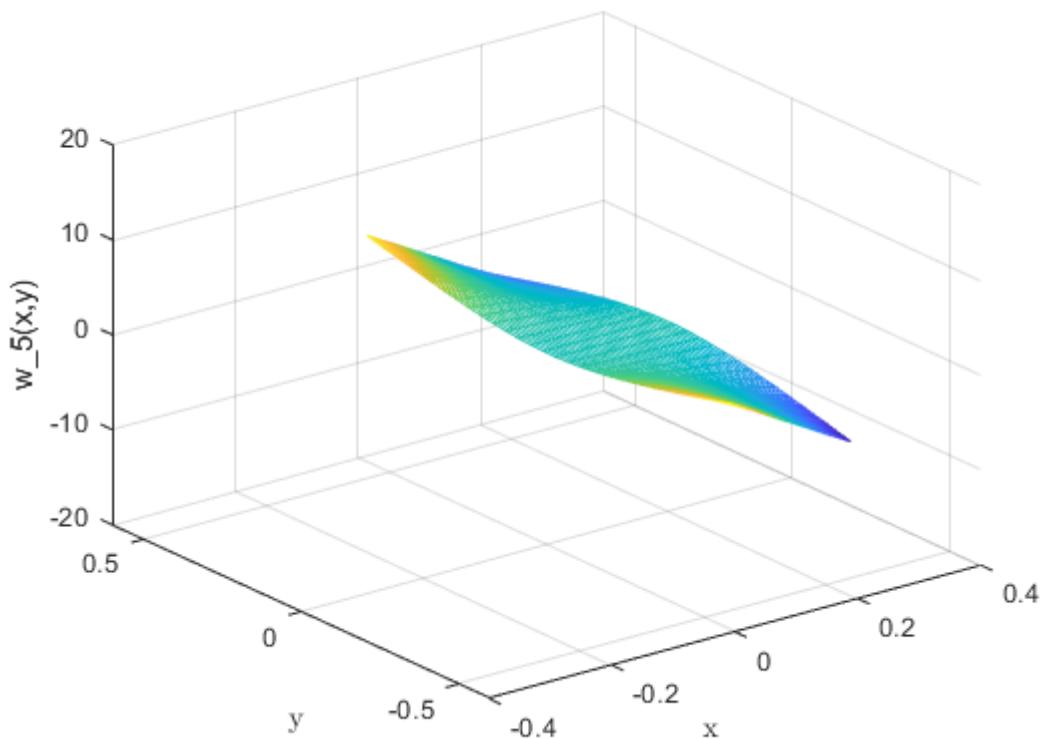


Figura 6.7. Forma modal 5 del ala

Para contrastar los resultados que proporciona nuestro código con los resultados que proporcionan los elementos finitos, se ha llevado a cabo paralelamente un estudio en frecuencia para el mismo ala por medio del método de los elementos finitos con SolidWorks. Los resultados obtenidos para las cinco primeras formas modales, así como para las frecuencias naturales de vibración pueden verse desde la figura 6.8 hasta la figura 6.13:

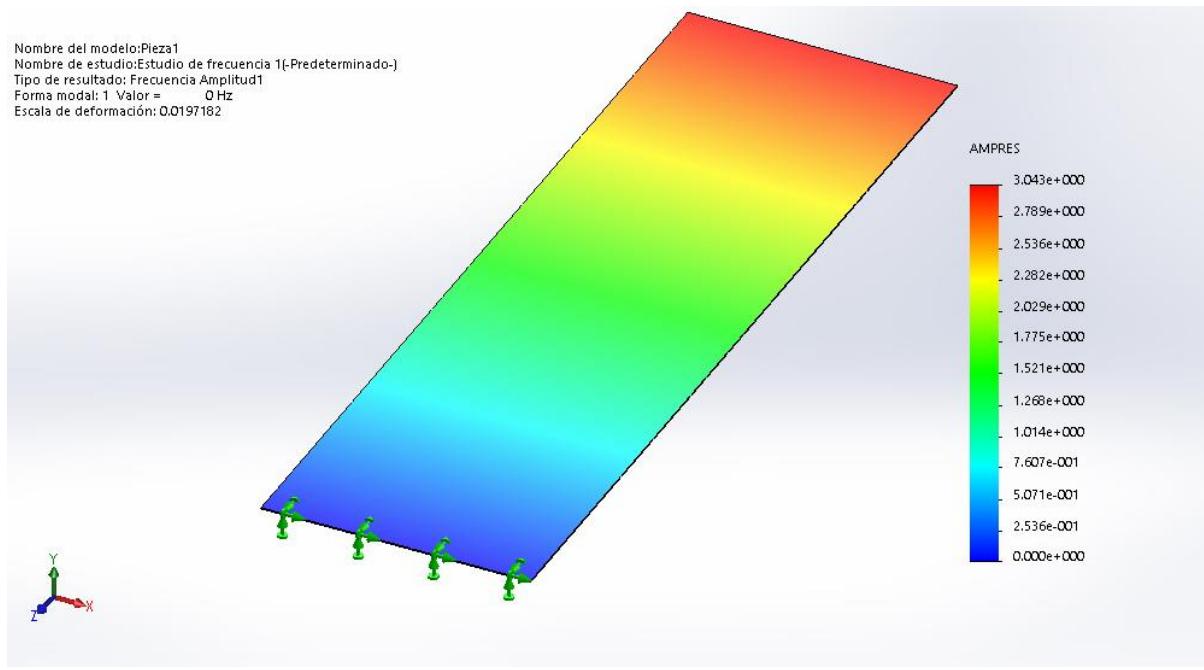


Figura 6.8. Forma modal 1 del ala obtenido con FEA

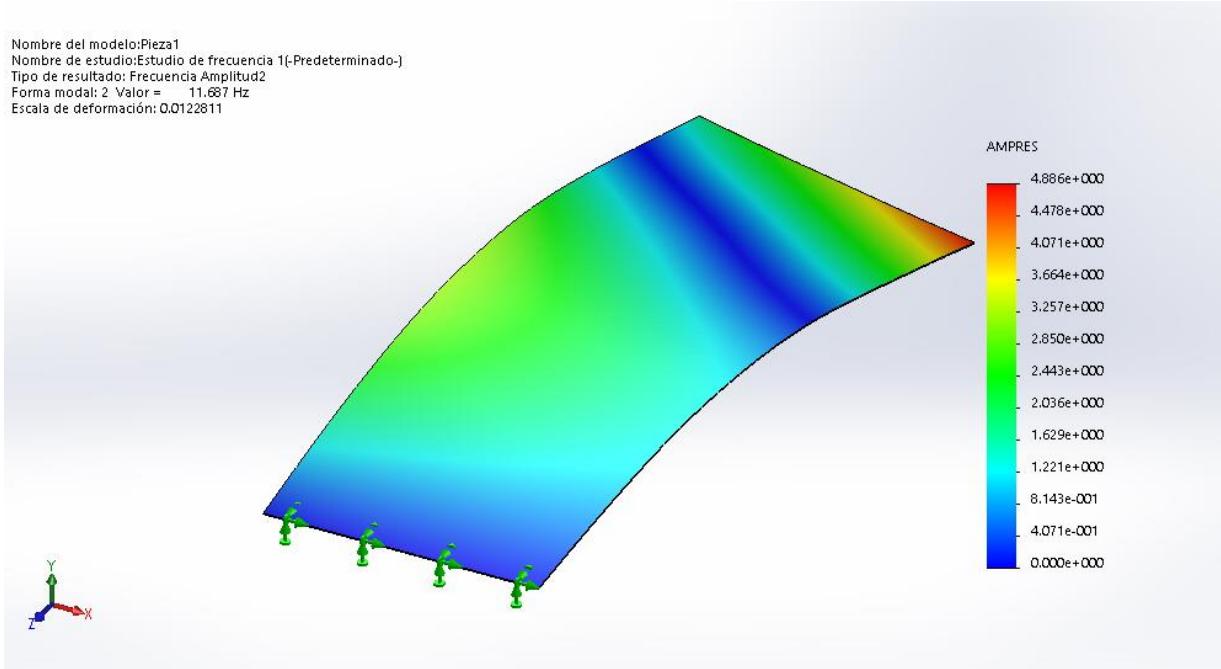


Figura 6.9. Forma modal 2 del ala obtenido con FEA

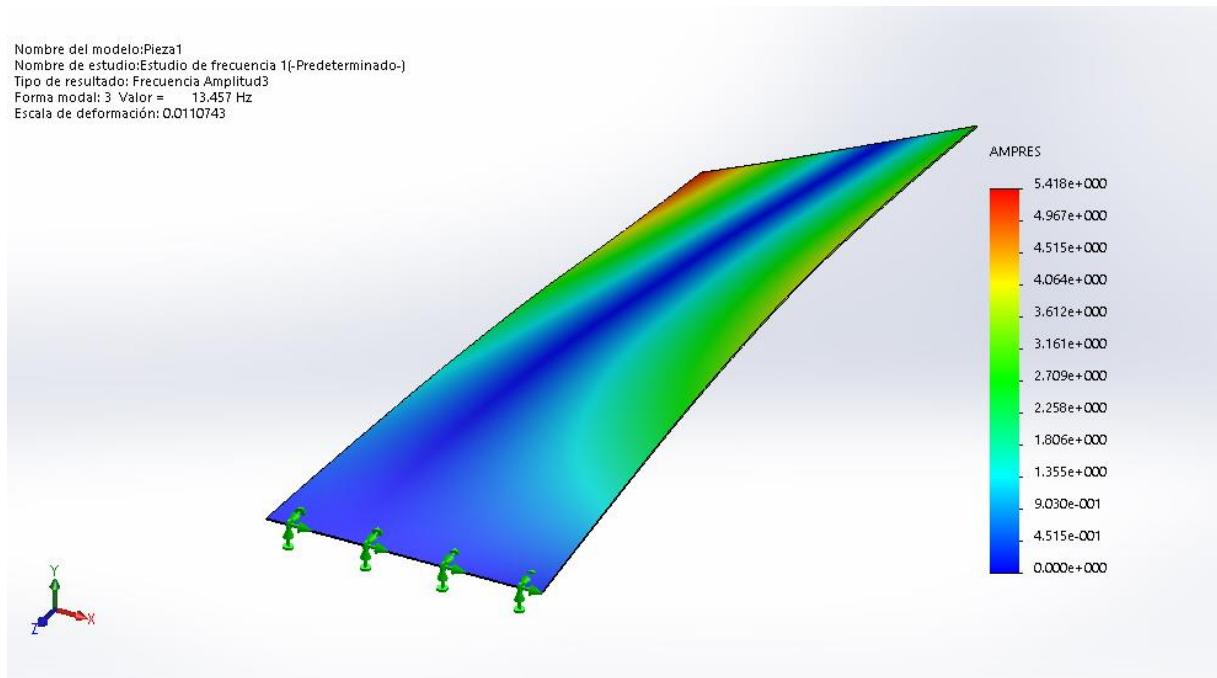


Figura 6.10. Forma modal 3 del ala obtenido con FEA

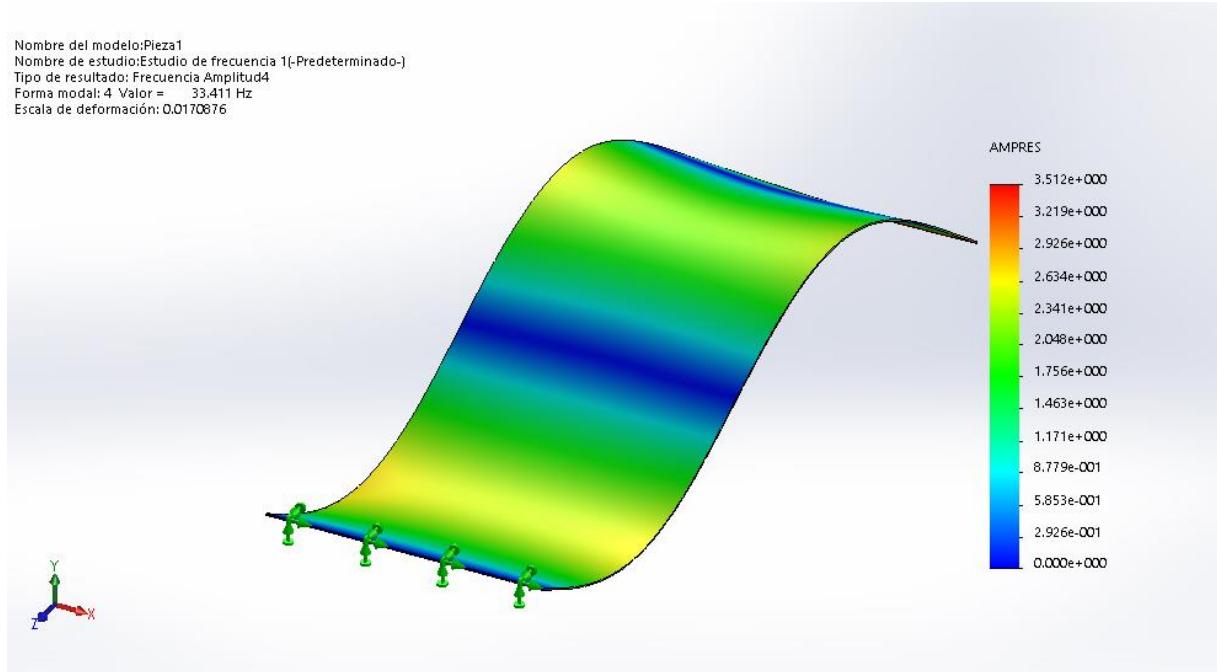


Figura 6.11. Forma modal 4 del ala obtenido con FEA

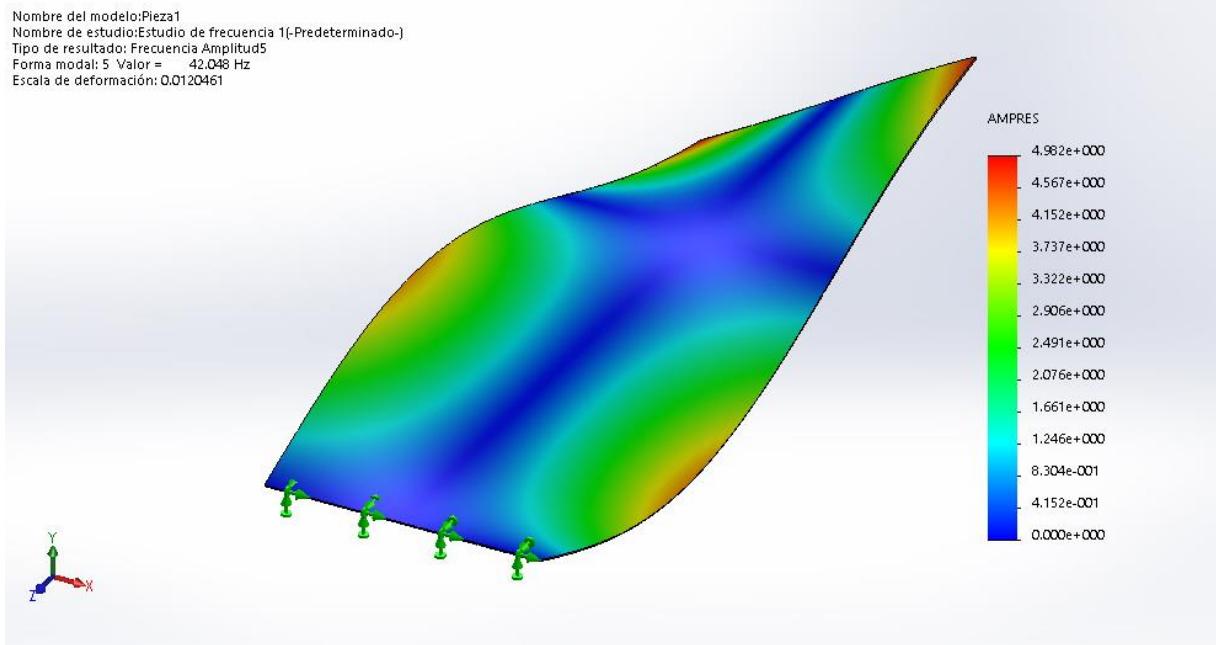


Figura 6.12. Forma modal 5 del ala obtenido con FEA

Vemos que, la primera, la cuarta y la quinta forma modal guardan un gran parecido. La segunda y la tercera forma modal de nuestro modelo utilizado se parecen menos al del análisis con FEA.

Además, se han obtenido las frecuencias naturales de vibración exactas para cada uno de los modos. Pueden verse resumidas en la tabla 6.2.

ω_n	Valor (Hz)
1	0
2	11,687
3	13,457
4	33,411
5	42,048

Tabla 6.2. Cinco primeras frecuencias naturales de vibración del ala en voladizo

En las tablas 6.3, 6.4 y 6.5 puede verse un estudio de cómo afecta el número de paneles utilizado a lo largo de la cuerda y de la envergadura del ala en la velocidad y frecuencia de flameo y en la velocidad de divergencia estática para este problema. Vemos que claramente, incrementar el número de paneles a lo largo de la cuerda m_v tiene un efecto mucho más pronunciado que un incremento de los paneles a lo largo de la envergadura n_v . Sin embargo, la predicción del flameo converge alrededor de $U_F = 23 \text{ m/s}$ y $\omega_F = 8,2 \text{ Hz}$ y cualquier incremento más allá en el número de paneles tiene un efecto muy pequeño. Incrementar la longitud de la estela más allá de 10 veces la cuerda tiene un efecto despreciable también en la predicción del flameo.

m_v	n_v	U_F (m/s)	ω_F (Hz)	U_{div} (m/s)
5	10	27,0529	8,0980	38,4002
10	10	23,6544	8,2913	28,5576
15	10	22,7333	8,3677	27,1363
20	10	22,5022	8,4083	26,5248
25	10	22,0519	8,4335	26,1829
30	10	21,8883	8,4507	25,9643

Tabla 6.3. Variación de la velocidad y frecuencia de flameo y velocidad de divergencia con el número de paneles (1)

m_v	n_v	U_F (m/s)	ω_F (Hz)	U_{div} (m/s)
5	20	27,6087	7,9772	38,9843
10	20	24,2283	8,1576	29,1831
15	20	23,3097	8,2296	27,7420
20	20	22,8795	8,2681	27,1216
25	20	22,6297	8,2920	26,7747
30	20	22,4665	8,3083	26,5528

Tabla 6.4. Variación de la velocidad y frecuencia de flameo y velocidad de divergencia con el número de paneles (2)

m_v	n_v	U_F (m/s)	ω_F (Hz)	U_{div} (m/s)
5	30	27,8392	7,9245	39,3035
10	30	24,4640	8,0979	29,4376
15	30	23,5466	8,1676	27,9861
20	30	23,11	8,2048	23,3613
25	30	22,8675	8,2279	27,0119
30	30	22,7045	8,2437	26,7885

Tabla 6.5. Variación de la velocidad y frecuencia de flameo y velocidad de divergencia con el número de paneles (3)

Finalmente, se ha llevado a cabo la resolución del problema en el dominio del tiempo. Las curvas de los autovalores reales e imaginarios frente a la velocidad aerodinámica con la resolución en el dominio del tiempo se pueden ver en las figuras 6.13 y 6.14.

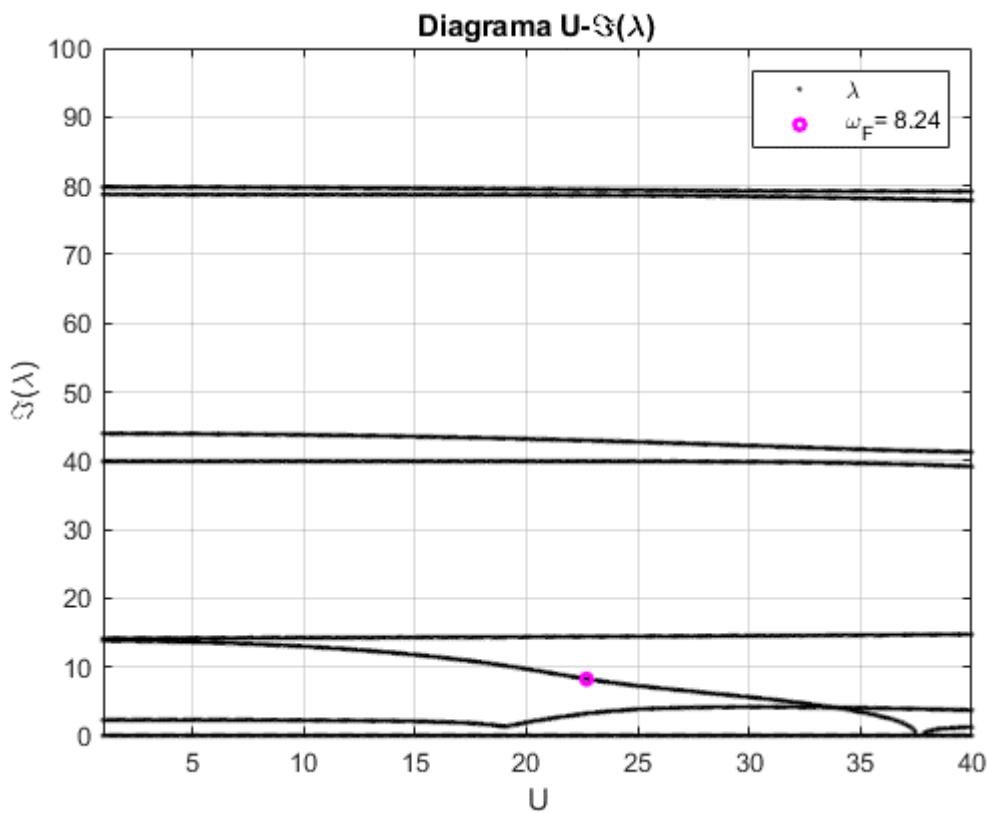


Figura 6.13. Diagrama $U - \Im(\lambda)$

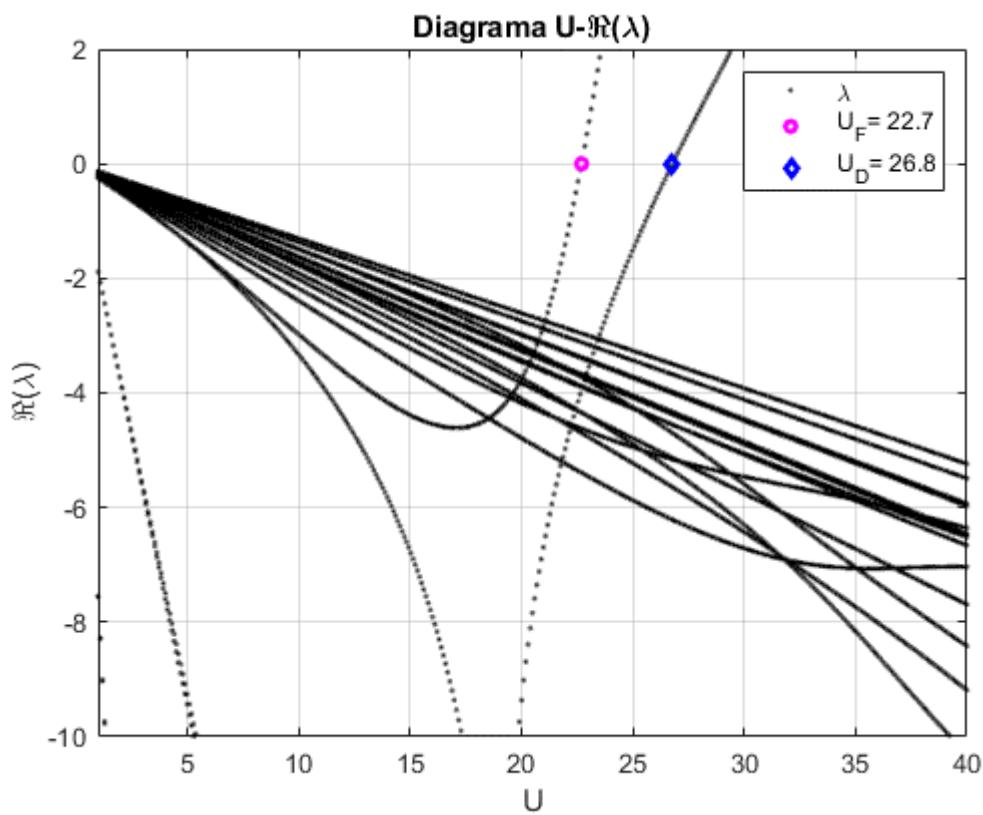


Figura 6.14. Diagrama $U - \Re(\lambda)$

En estas figuras se representan los autovalores del sistema matricial de la ecuación (6.77). De esta forma, las figuras muestran la variación de las partes reales e imaginarias de los autovalores con la velocidad aerodinámica. Observamos que en la primera figura, el diagrama $U - \Im(\lambda)$, se puede obtener la frecuencia de flameo como el autovalor del sistema para el cuál la velocidad U coincide con la velocidad de flameo.

Por su parte, en la segunda figura, el diagrama $U - \Re(\lambda)$, puede encontrarse la velocidad de flameo como la velocidad aerodinámica U donde el autovalor complejo se vuelve inestable. Este va seguido de un autovalor real: la velocidad de divergencia.

Si comparamos los valores obtenidos en el dominio del tiempo con los que se obtuvieron en el dominio de la frecuencia (tabla 6.1) vemos que los valores coinciden como es de esperar.

Estos diagramas nos permiten obtener la velocidad de flameo y la frecuencia de flameo graficando los autovalores. Sin embargo, los aerodinamistas suelen dar lo que se conoce como las curvas de flameo en vez de los autovalores, de forma que lo que se grafica es el coeficiente de amortiguamiento ζ y la frecuencia natural ω_n frente a la velocidad aerodinámica U . Estas variables vienen definidas en función de los autovalores del sistema como:

$$\omega_{n_i} = |\lambda_i|$$

$$\zeta_i = -\frac{\Re(\lambda_i)}{\omega_{n_i}}$$

Las curvas de frecuencia de flameo $U - \omega_n$ y de amortiguamiento de flameo $U - \zeta$ para todos los modos estructurales calculados pueden verse en las figuras 6.15 y 6.16.

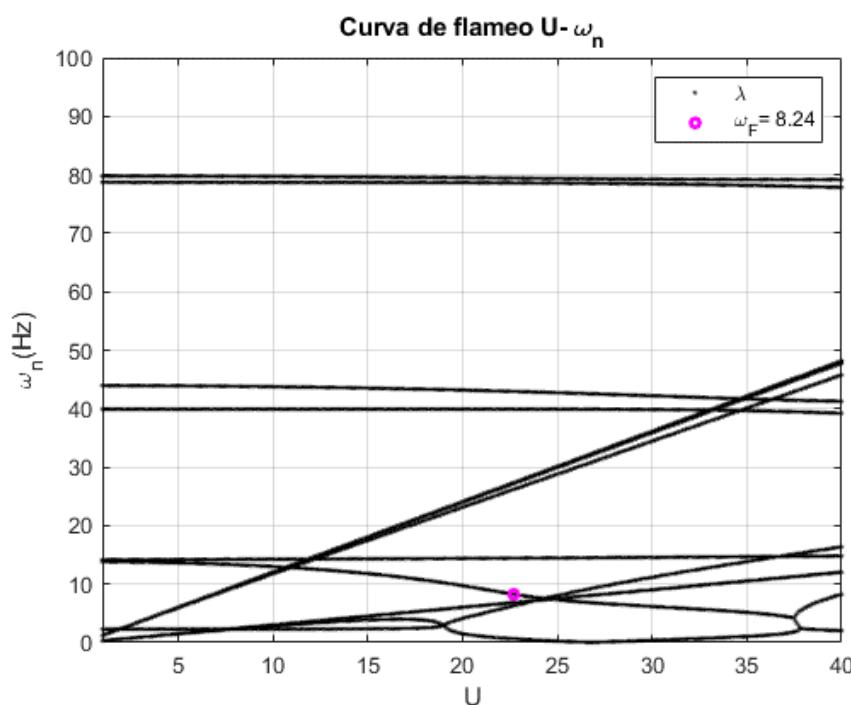


Figura 6.15. Curva de flameo $U - \omega_n$

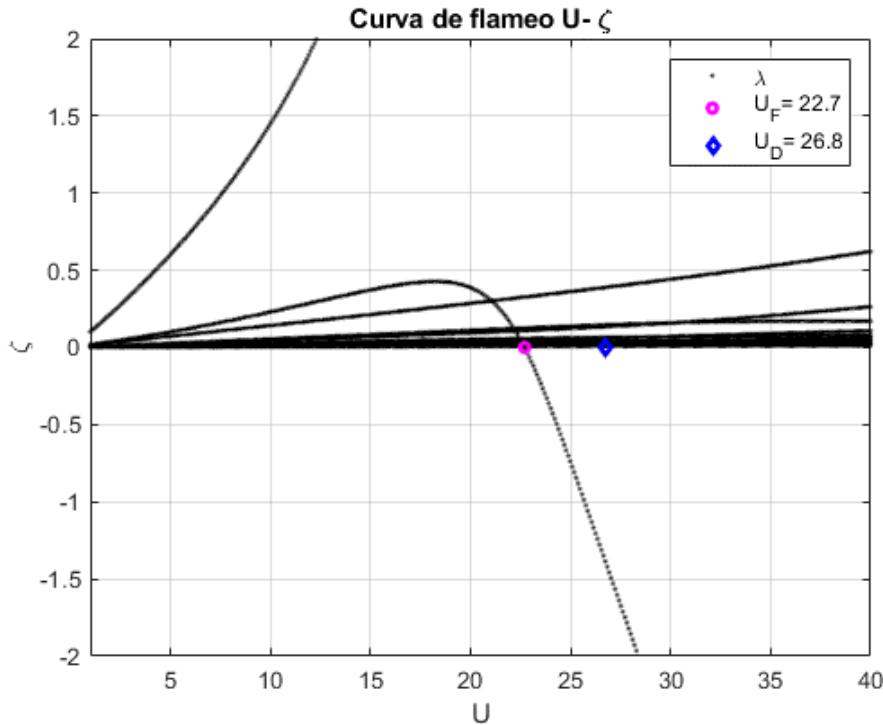


Figura 6.16. Curva de flameo $U - \zeta$

El código numérico desarrollado y utilizado para resolver el problema del flutter, ha sido validado mediante la realización de los estudios realizados en las referencias [31] y [56] obteniéndose unos resultados satisfactorios con errores inferiores al 5% y sin inestabilidades numéricas cuando se resuelven los problemas en el dominio del tiempo, a partir de los resultados dados por las curvas de flameo. La resolución en el dominio de la frecuencia ha dado alguna inestabilidad numérica debido a que el método aquí expuesto es sólo válido cuando se utiliza un número pequeño de anillos en la discretización del ala. Con todo esto, puede afirmarse que el código desarrollado, aunque posee limitaciones en cuanto a las inestabilidades numéricas asociadas al método de resolución en el dominio de la frecuencia aquí expuesto, si se utiliza el método de resolución en el dominio del tiempo, a partir de las curvas de flameo, para un estudio en las primeras etapas de diseño conceptual se pueden obtener unos resultados con un margen de precisión realmente bueno.



Capítulo 7

Herramienta de análisis *FVortexAero* 1.0

En los capítulos anteriores se han programado diferentes algoritmos numéricos que han permitido resolver algunos de los problemas más conocidos de aerodinámica no estacionaria incompresible tanto bidimensional como tridimensional, así como el problema del flameo aeroelástico tridimensional.

El objetivo para este último capítulo es presentar la interfaz gráfica que se ha desarrollado partiendo de los códigos validados a lo largo del trabajo.

Esta herramienta, a la que se le ha denominado *FVortexAero* 1.0, integra en una interfaz sencilla todos los códigos necesarios para resolver los dos problemas de aerodinámica no estacionaria tridimensional que se estudiaron en el capítulo 5, y el problema aeroelástico tanto en el dominio de la frecuencia como en el dominio del tiempo estudiados en el capítulo 6.

A continuación, se presentará la estructura principal de la interfaz y el manejo de la misma.

7.1. Estructura principal de la interfaz

La interfaz principal de *FVortexAero* 1.0 puede verse en la figura 7.1. A partir de ella se puede acceder a los tres módulos de cálculo que permiten hacer el estudio realizado en este trabajo.

El primero de ellos “ACELERACIÓN REPENTINA DE LA CORRIENTE EN EL ALA” permite calcular las condiciones de sustentación en el ala cuando hay una aceleración repentina del flujo en un ala con flecha como ya se estudió en el capítulo 5.

El segundo de ellos, “MOVIMIENTO OSCILANTE CON DESPLAZAMIENTO VERTICAL”, permite calcular las condiciones de sustentación ante oscilaciones en un ala con flecha y comparar los resultados con la solución dada por Theodorsen para perfiles 2D.

Finalmente, el tercer modo de cálculo, “FLAMEO EN EL ALA” permite calcular la sustentación en un ala rectangular a través del acoplamiento aeroelástico, así como las condiciones de flameo estudiadas en el capítulo 6, tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia, pudiendo obtenerse la velocidad y frecuencia de flameo, la velocidad de divergencia estática y las curvas de flameo.

En las siguientes secciones de este capítulo iremos desglosando cada una de las funciones de la interfaz gráfica.



Figura 7.1. Interfaz principal de *FVortexAero 1.0*

7.2. Interfaz del módulo “*Aceleración repentina de la corriente en el ala*”

En la figura 7.2 podemos ver la interfaz del módulo “*Aceleración repentina de la corriente en el ala*”. Este módulo será el encargado de calcular las condiciones de sustentación del ala en el seno de un flujo incompresible potencial ante un movimiento no estacionario del flujo dado por una aceleración repentina de la corriente.

Podemos observar que en ella existe un panel de arriba a la izquierda que nos permite introducir los parámetros que van a definir la geometría del ala y las condiciones de discretización de la misma, las condiciones de contorno del problema y el tiempo de simulación. Una imagen ampliada se puede ver en la figura 7.3.

Las entradas que son necesarias introducir al programa son las siguientes:

1. *Cuerda*: Cuerda del ala en el encastre en metros.
2. *Envergadura*: Envergadura del ala en metros.
3. *Flecha LE*: Ángulo de flecha delantera en grados.
4. *Flecha TE*: Ángulo de flecha trasera en grados.
5. *Velocidad*: Velocidad del flujo tras la aceleración de 0 a $U \text{ m/s}$.
6. *Ángulo Ataque*: Ángulo de ataque del ala con respecto a la corriente incidente en grados.
7. *Anillos Cuerda*: Número de anillos de discretización del ala en la dirección de la cuerda.

8. *Anillos Envergadura*: Número de anillos de discretización del ala en la dirección de la envergadura.
9. *Densidad*: Densidad del aire en kg/m^3 .
10. *Tiempo*: Tiempo de simulación en segundos.

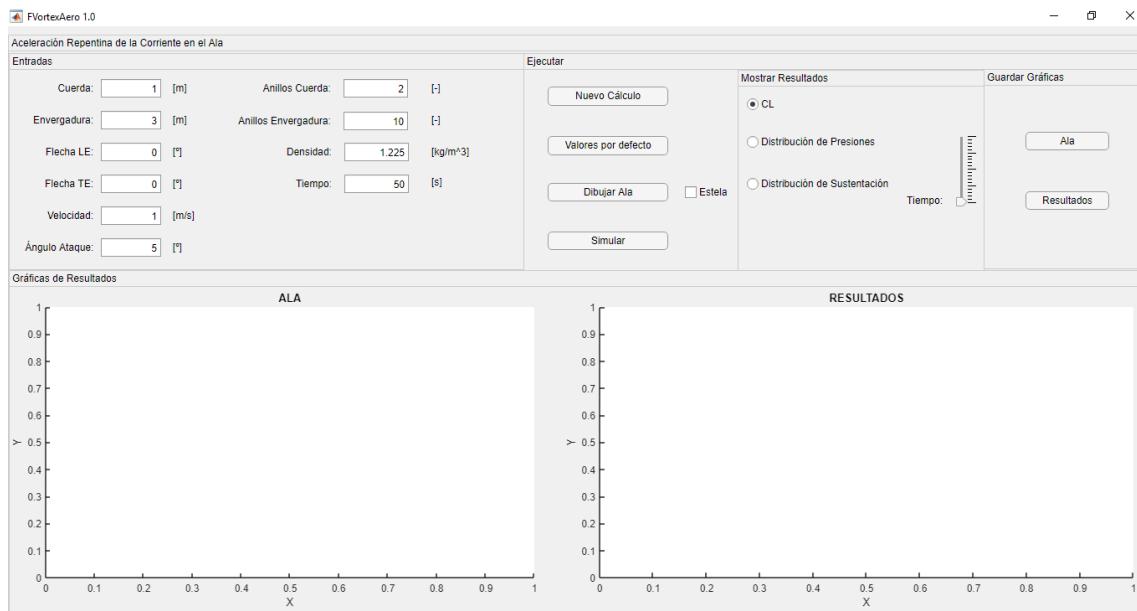


Figura 7.2. Interfaz del módulo “Aceleración repentina de la corriente en el ala”

Figura 7.3. Entradas de la interfaz

El siguiente panel que posee el programa es el panel “Ejecutar” que puede verse ampliado en la figura 7.4. Cuenta con cuatro botones.

1. *Nuevo Cálculo*: Permite eliminar los archivos de datos que genera el programa al realizar los cálculos y eliminar el contenido gráfico. Conviene utilizarlo al principio de cada nuevo estudio para evitar obtener resultados no deseados de posibles simulaciones anteriores que han quedado guardadas en disco, etc.

2. *Valores por defecto*: Permite introducir instantáneamente una serie de valores por defecto para generar una simulación que coinciden con alguno de los estudios realizados en el presente trabajo.
3. *Dibujar Ala y Casilla Estela*: El botón “*Dibujar Ala*” permite discretizar la geometría introducida por el usuario y representarla en el panel “*Gráfica de Resultados*”. A su vez, la casilla “*Estela*” permite representar o no los anillos de torbellinos de la estela junto al ala. En la figura 7.5 podemos ver un ejemplo de cómo sería esta representación con la casilla “*Estela*” desmarcada y en la figura 7.6 con la casilla “*Estela*” seleccionada.
4. *Simular*: permite lanzar la simulación del UVLM para calcular la distribución de presiones en el tiempo, el coeficiente de sustentación en el tiempo y la distribución de sustentación en el ala. Para ello, primeramente, debemos seleccionar en el panel “*Mostrar Resultados*” el resultado que queremos obtener y por medio del slider que aparece en la figura 7.7, seleccionar el instante temporal que queremos simular (una vez realizada la simulación podremos variar el instante temporal para mostrar el resultado sin tener que realizar de nuevo la simulación para acelerar la obtención de resultados).

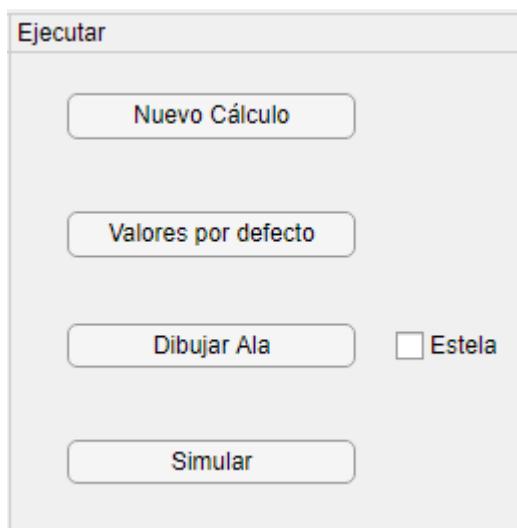


Figura 7.4. Panel “Ejecutar”

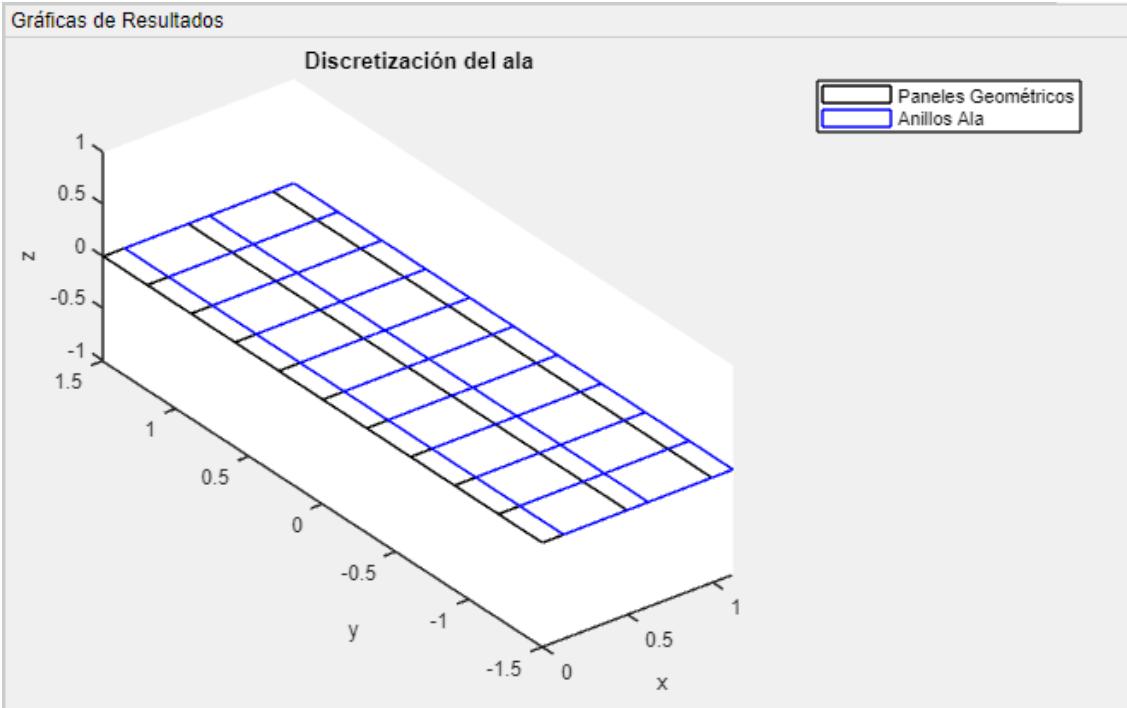


Figura 7.5. Discretización del ala sin estela

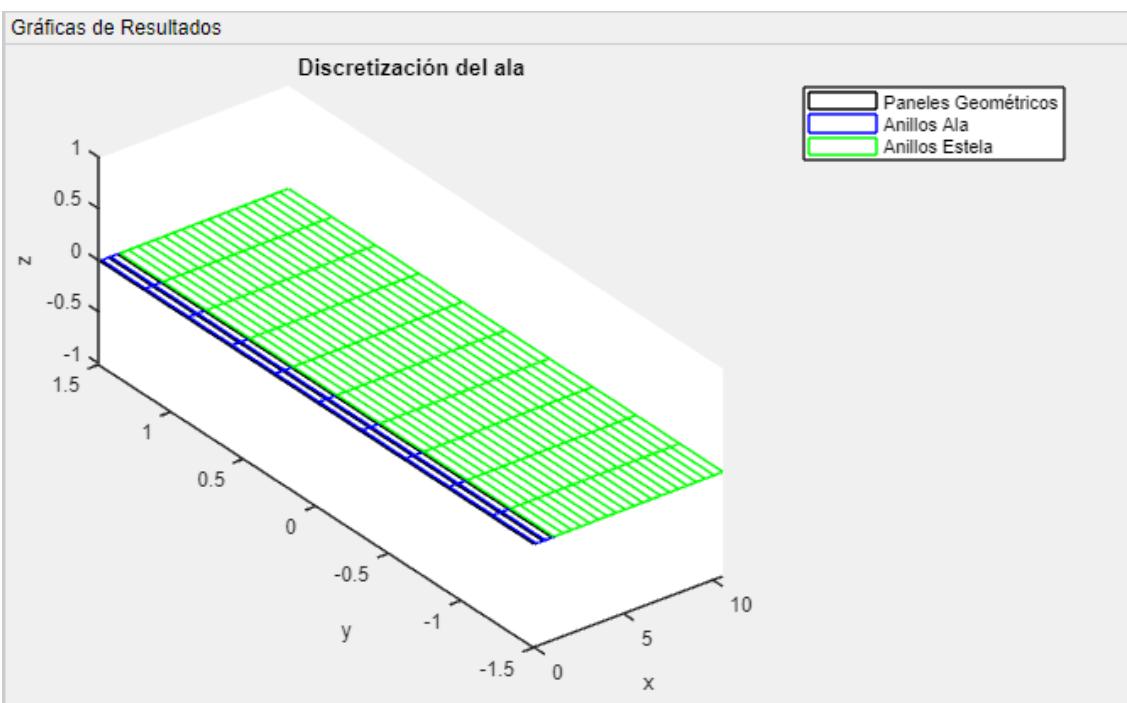


Figura 7.6. Discretización del ala con estela

De esta forma podemos ver en la figura 7.8 un ejemplo de la distribución del coeficiente de sustentación en el tiempo y en la figura 7.9 la distribución de sustentación para un instante temporal seleccionado.

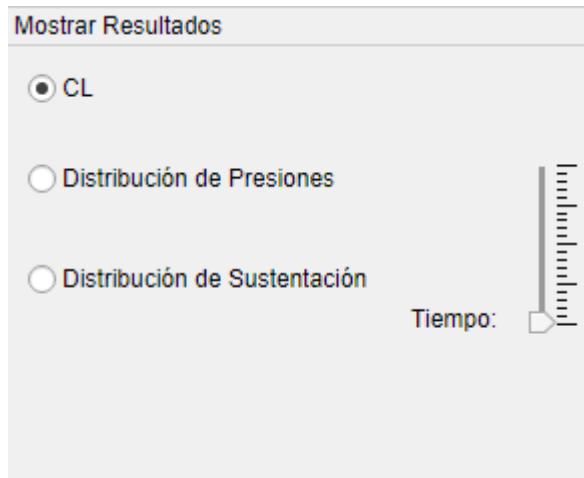


Figura 7.7. Panel “Mostrar Resultados”

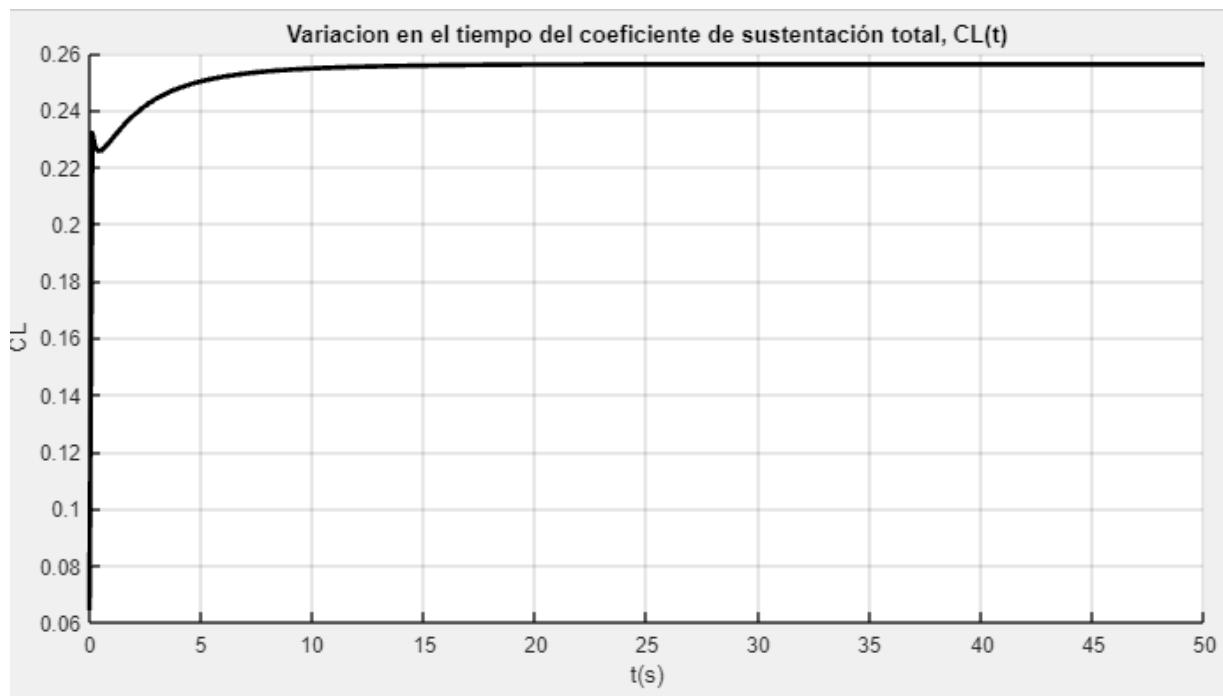


Figura 7.8. Ejemplo de cálculo del C_L en la interfaz

Como hemos comentado, una vez realizada la simulación para una distribución de presiones o sustentación podemos variar el slider para visualizar instantáneamente (dependiendo del procesador del pc) el valor para otro instante temporal.

Finalmente, nos encontramos con el último panel “Guardar Gráficas” (figura 7.10) que nos permite abrir una ventana de Matlab bien de la discretización del ala al pulsar el botón “Ala” o bien del resultado que tengamos en la ventana de “Resultados” al pulsar el botón “Resultados”.

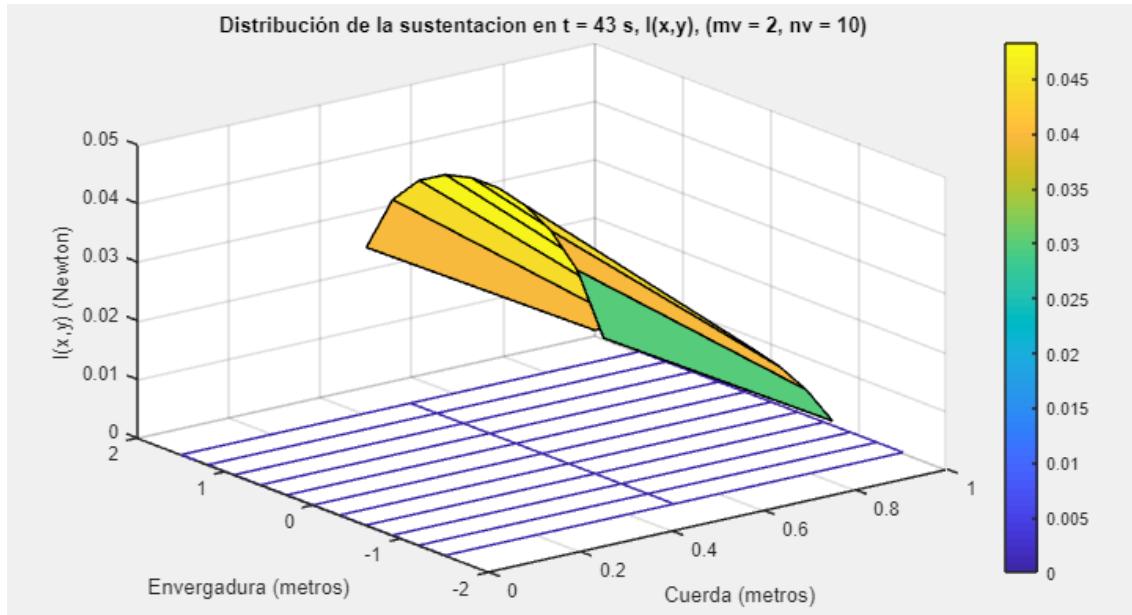


Figura 7.9. Distribución de la sustentación para un instante de tiempo determinado

Cabe destacar, que el programa necesita guardar algunos archivos de datos en formato “.mat” (el formato de Matlab) en cada simulación, por lo que para el correcto funcionamiento del programa, es necesario trabajar en un directorio en el que se puedan escribir datos desde la aplicación en disco.

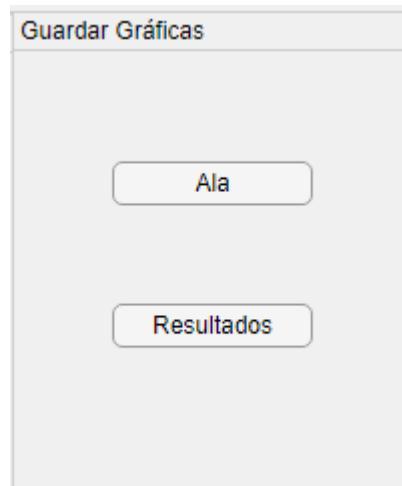


Figura 7.10. Panel “Guardar Gráficas”

7.3. Interfaz del módulo “Movimiento oscilante con desplazamiento vertical”

En la figura 7.11 podemos ver la interfaz del módulo “Movimiento oscilante con desplazamiento vertical”. Este módulo será el encargado de calcular las condiciones de sustentación del ala en el seno de un flujo incompresible potencial no estacionario con condiciones de contorno de movimiento oscilante en el ala como ya se estudió en el capítulo 5.

Podemos observar que la interfaz es prácticamente la misma que la del módulo anterior. La única diferencia apreciable es la que viene dada por las condiciones de frontera del problema que hace necesario introducir dos valores de entrada a mayores que en el problema anterior como puede verse en la figura 7.12. Estos son:

1. *Frecuencia*: Es el valor de la frecuencia reducida del problema.
2. *Amplitud/Cuerda*: Constante del movimiento vertical definido según el capítulo 7 entre el valor de la cuerda. Adimensional.

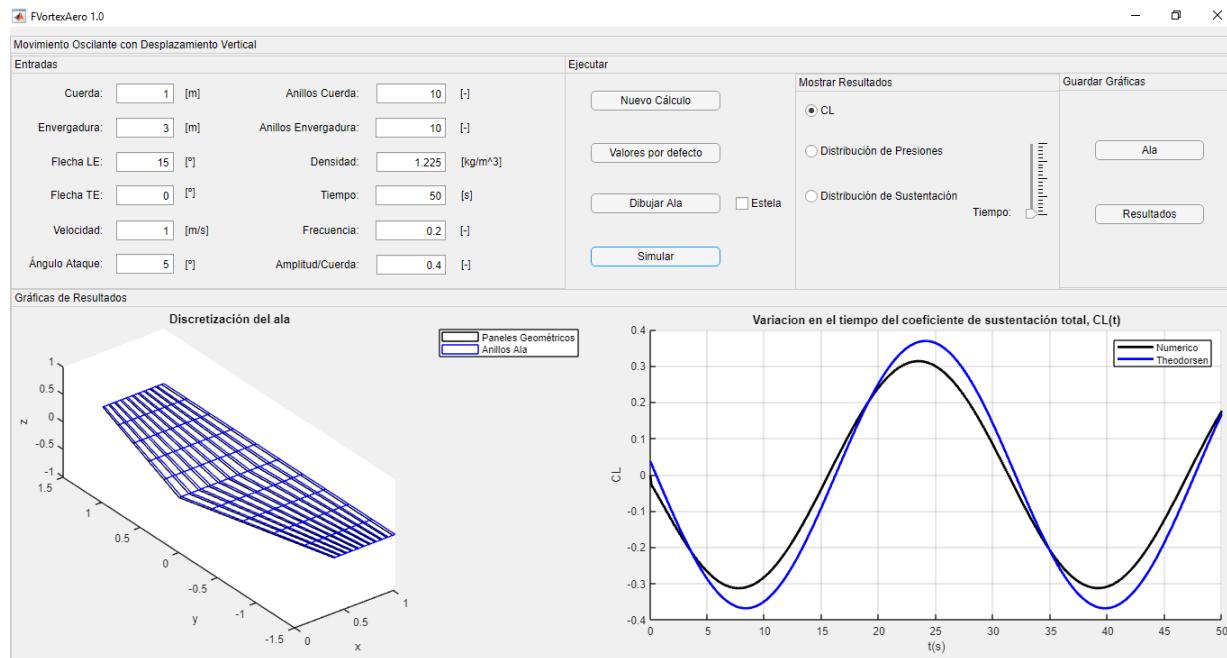


Figura 7.11. Interfaz del módulo “Movimiento oscilante con desplazamiento vertical”

Entradas			
Cuerda:	1 [m]	Anillos Cuerda:	10 [-]
Envergadura:	3 [m]	Anillos Envergadura:	10 [-]
Flecha LE:	15 [°]	Densidad:	1.225 [kg/m^3]
Flecha TE:	0 [°]	Tiempo:	50 [s]
Velocidad:	1 [m/s]	Frecuencia:	0.2 [-]
Ángulo Ataque:	5 [°]	Amplitud/Cuerda:	0.4 [-]

Figura 7.12. Panel “Entradas”

7.4. Interfaz del módulo “Flameo en un ala”

Finalmente, el tercer módulo de *FVortexAero 1.0*, “*Flameo en un ala*”, permite estudiar el comportamiento de un ala semiempotrada rectangular sin flecha ante el fenómeno de inestabilidad del flameo en el dominio de la frecuencia y del tiempo, así como la sustentación en el dominio de la frecuencia. La interfaz principal de este módulo podemos verla en la figura 7.13.

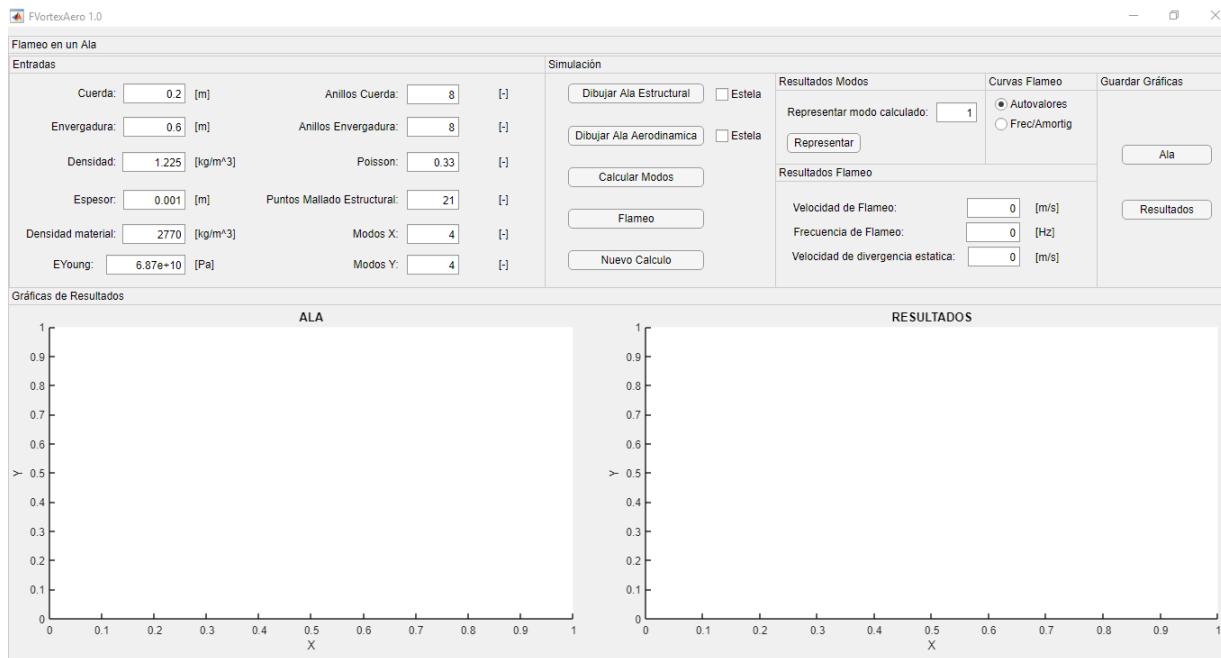


Figura 7.13. Interfaz principal del módulo “*Flameo en un ala*”

Esta interfaz está formada de varios paneles que iremos describiendo a continuación.

En primer lugar, tenemos el panel “*Entradas*”, en el que se deben introducir los valores de discretización del ala estructural. Los valores por defecto que trae el programa se corresponden con los del estudio realizado en el capítulo 6. Podemos ver una imagen ampliada de este panel en la figura 7.14.

Figura 7.14. Panel “*Entradas*”

Los valores de entrada que deben introducirse son los siguientes:

1. *Cuerda*: Cuerda del ala en el encastre en metros. Es la cuerda en toda el ala puesto que es un ala rectangular. No está implementada la opción de flecha en el ala.
2. *Envergadura*: Envergadura del ala en metros.
3. *Densidad*: Densidad del aire en kg/m^3 .
4. *Espesor*: Espesor del ala estructural en metros.
5. *Densidad material*: Densidad del material del ala. Por defecto se utiliza el del aluminio.
6. *Eyoung*: Módulo de Young del material del ala en Pascales. Por defecto se utiliza el del aluminio.
7. *Anillos Cuerda*: Número de paneles en la cuerda del ala aerodinámica (que coinciden con el del ala estructural).
8. *Anillos Envergadura*: Número de paneles en la envergadura del ala aerodinámica. Puede verse la diferencia entre ala aerodinámica y ala estructural utilizada en el trabajo en el estudio realizado del capítulo 6.
9. *Poisson*: Módulo de Poisson del material del ala.
10. *Puntos Mallado Estructural*: Número de puntos de discretización del ala estructural en la dirección de la cuerda y de la envergadura.
11. *Modos X*: Número de modos en la dirección x.
12. *Modos Y*: Número de modos en la dirección y.

El segundo panel de la interfaz es el panel “*Simulación*”. En la figura 7.15 podemos ver una imagen ampliada de este panel. Este panel está compuesto de varios botones que vamos a ir describiendo a continuación.

El primer botón, “*Dibujar Ala Estructural*” permite poner en marcha un código que discretiza el ala en paneles y lo muestra en la gráfica de resultados abajo a la izquierda. Si la casilla de “*Estela*” situada a la altura del botón está seleccionada, muestra la estela al lado del ala, y sino mostrará únicamente los paneles geométricos y los anillos de torbellinos del ala.

La misma función tiene el botón “*Dibujar Ala Aerodinámica*” sólo que este dibuja un ala con el doble de envergadura que el ala introducida que se quiere calcular, para utilizar la técnica del espejo en el cálculo de la sustentación y en el cálculo de los modos tal y como se explicó en el capítulo 6.

Un ejemplo de esto puede verse en las figuras 7.16. y 7.17. En la primera se ha representado el ala estructural sin la estela y en la segunda se ha representado el ala aerodinámica con la estela. Ambos resultados aparecen en la interfaz en el panel de “*Gráficas de resultados a la izquierda*”.

El tercer botón del panel “*Calcular modos*” permite realizar el cálculo de las formas modales del ala y representarlos en la gráfica de resultados. Tras el cálculo de las formas modales se genera un fichero de datos que permite un post-procesado mediante el panel “*Resultados Modos*” que se muestra en la figura 7.18. El panel “*Resultados Modos*” permite escoger qué forma modal queremos representar de las calculadas y al pulsar el botón “*Representar*” nos la representa sin tener que volver a realizar el cálculo de estas, para acelerar los resultados.

Como valor por defecto, la aplicación tiene el modo 1 pero podemos seleccionar otra forma modal según los modos que se hayan decidido calcular en los valores de entrada. En la figura 7.19 se muestra cómo se representa una de las formas modales calculadas.

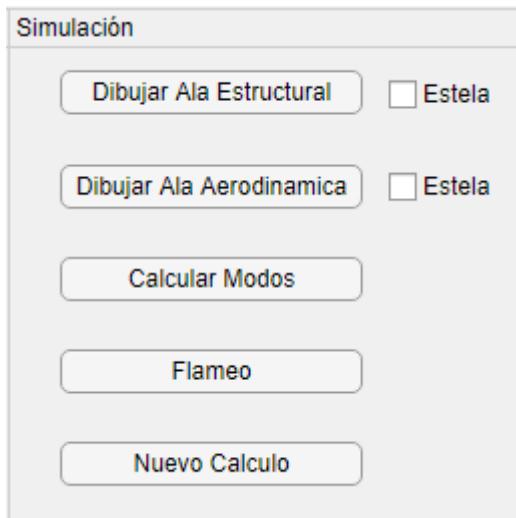


Figura 7.15. Panel “Entradas”

El cuarto botón, “*Flameo*”, permite determinar las condiciones para las cuáles en el ala se dará la inestabilidad conocida como flameo. Una vez pulsado el botón comenzará esta rutina de cálculo y al finalizar se mostrarán los resultados de velocidad de flameo, frecuencia de flameo y velocidad de divergencia estática en el panel “*Resultados de Flameo*” como se puede ver en la figura 7.20 para el cálculo del flameo para los valores por defecto. Este cálculo se llevará a cabo a partir de la resolución del sistema matricial en el dominio del tiempo y se mostrarán las curvas de autovalores en el panel “*Gráficas de Resultados*” como se muestra en las figuras 7.21 y 7.22 en el caso de que este activado el botón “*Autovalores*” o las curvas de flameo (frecuencia/amortiguamiento) como pueden verse en la figura 7.23 en el caso de que este activado el botón “*Frec/Amortig*” en el panel “*Curvas de Flameo*”, que podemos ver en la figura 7.24.

Finalmente, el botón “*Nuevo cálculo*” permite eliminar los datos generados en cada simulación y que permiten acelerar los cálculos. Es imprescindible utilizarlo cada vez que se quiera realizar una simulación con algún valor de entrada diferente para que el programa no de errores de cálculos. También es necesario utilizarlo cuando iniciemos sesión en el programa para eliminar posibles simulaciones anteriores. Para obtener distintos resultados con los mismos valores de entrada es recomendable no utilizar este botón para no tener que simular código innecesario puesto que podría volverse muy lento el programa dependiendo de los valores de discretización del ala que se quieran utilizar.

Gráficas de Resultados

DISCRETIZACION DEL ALA ESTRUCTURAL

■	Paneles Geométricos
■	Anillos Ala

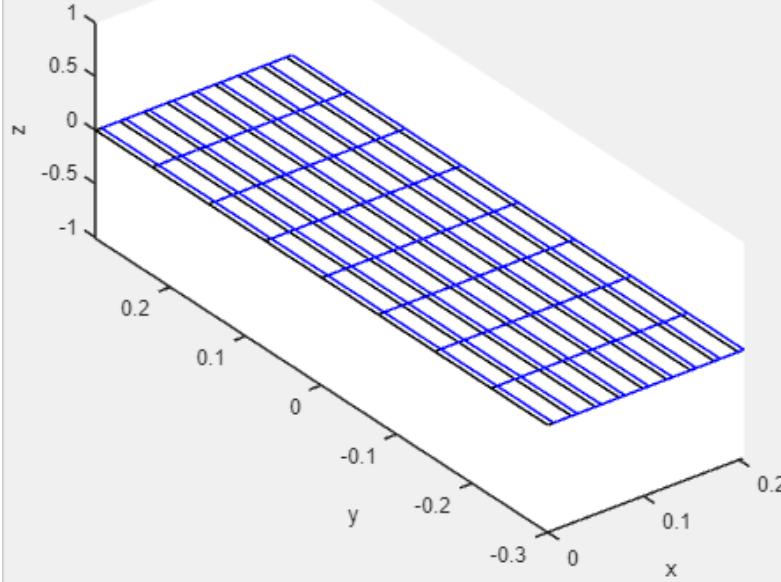


Figura 7.16. Discretización del ala estructural sin estela

Gráficas de Resultados

DISCRETIZACION DEL ALA AERODINAMICA

■	Paneles Geométricos
■	Anillos Ala
■	Anillos Estela

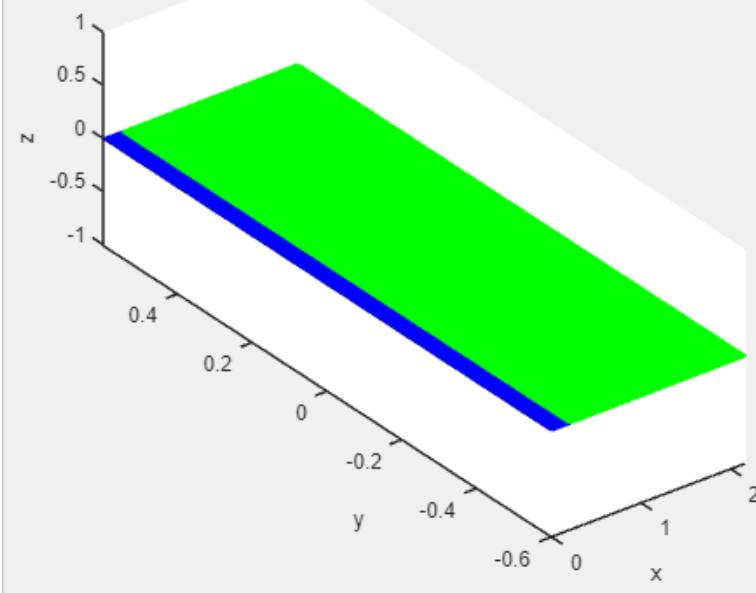


Figura 7.17. Discretización del ala aerodinámica con estela

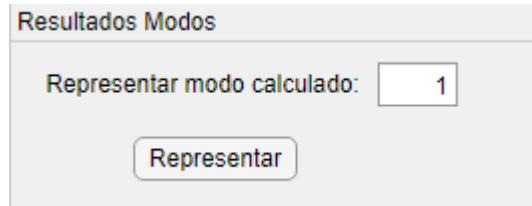


Figura 7.18. Panel “Resultados Modos”

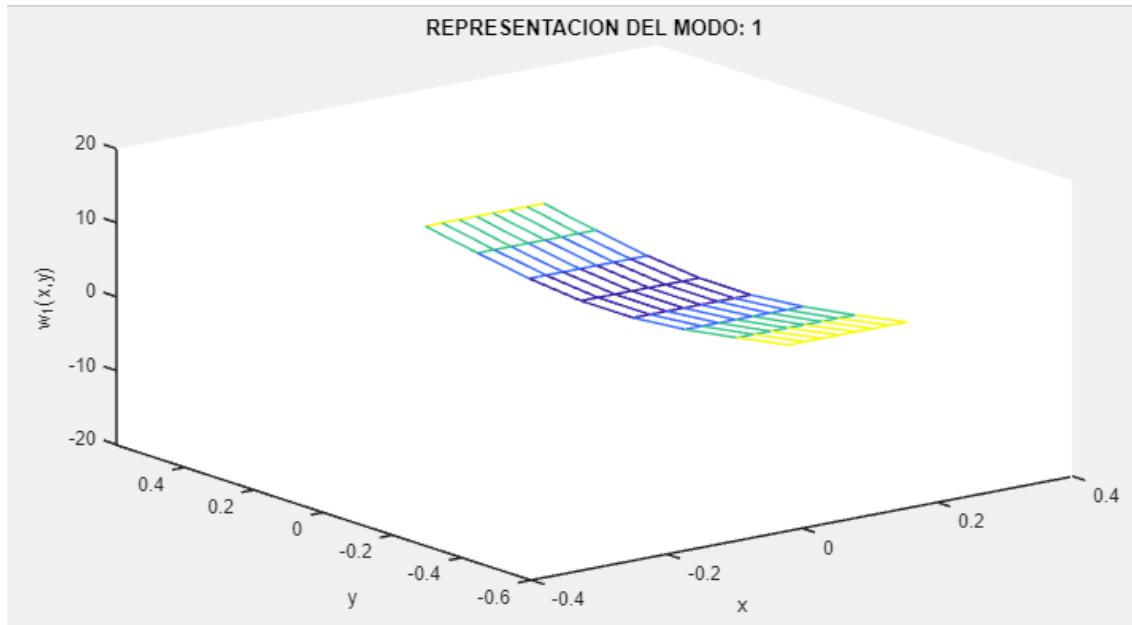


Figura 7.19. Panel “Gráficas Resultados”

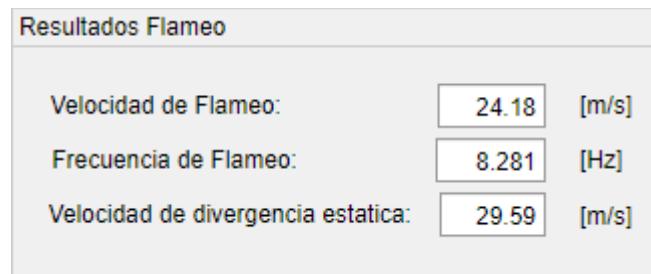
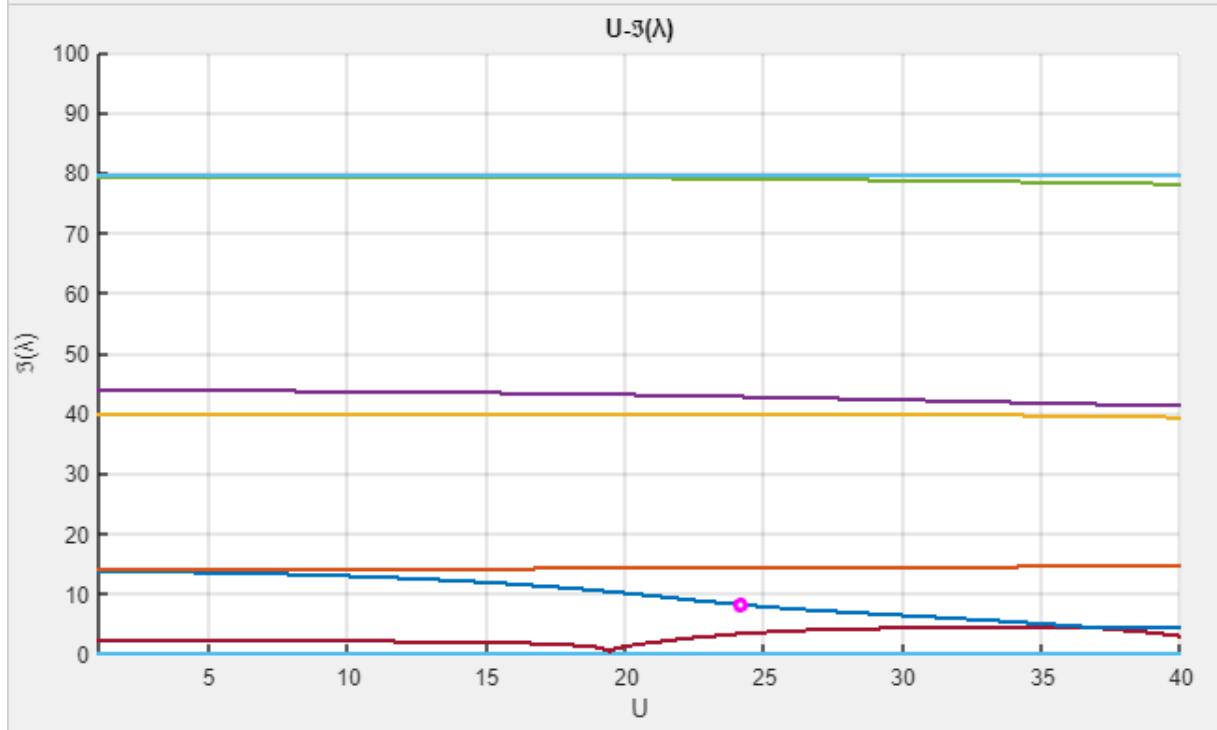
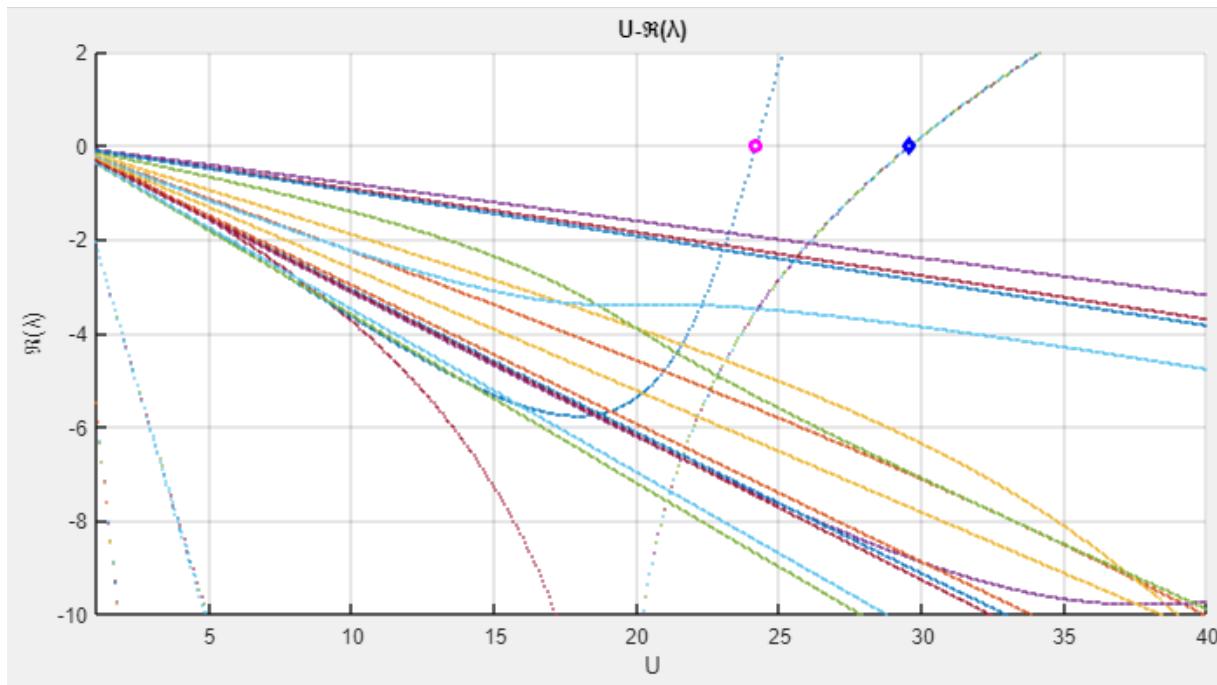


Figura 7.20. Panel “Resultados de Flameo”

Gráficas de Resultados

**Figura 7.21. Diagrama "U- $\Im(\lambda)$ "****Figura 7.22. Diagrama "U- $\Re(\lambda)$ "**

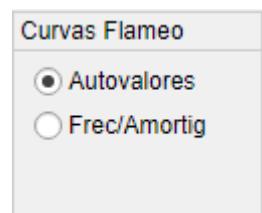


Figura 7.23. Panel “Curvas de Flameo”

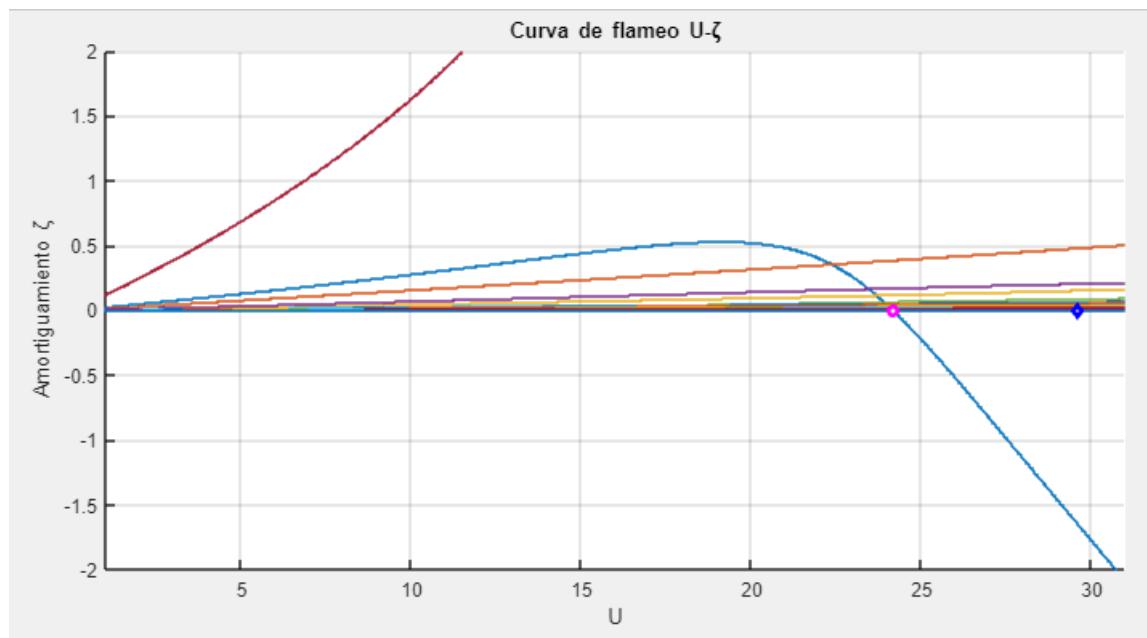
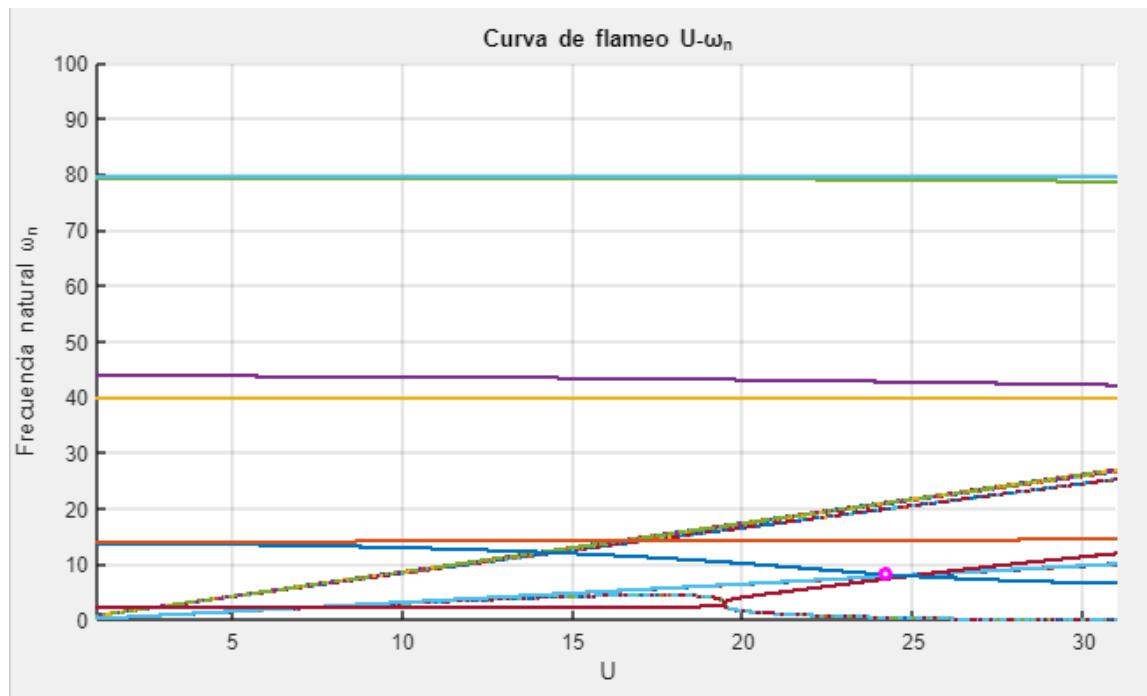


Figura 7.24. Panel “Gráficas Resultados”



Para terminar el módulo, y con él la aplicación, existe un último panel denominado “*Guardar Gráficas*” que con dos botones: “*Ala*” y “*Resultados*”.

El primero de ellos permite abrir una ventana de Matlab con las figuras calculadas del ala estructural y aerodinámica con o sin estela según este seleccionada en la interfaz para que puedan ser guardadas en disco.

El segundo de ellos permite hacer lo mismo que el primero, pero en este caso con las figuras de los modos estructurales, con las curvas de flameo y con las curvas de autovalores.



Capítulo 8

Presupuesto

El presupuesto de un proyecto consiste en una estimación del coste económico del proyecto completo y por tanto es uno de los principales factores que marcará la viabilidad del proyecto, es decir, de que este se lleve a cabo.

El principal objetivo de este capítulo es realizar un estudio económico de los costes que habría supuesto para una empresa la realización de este proyecto, incluyendo costes de materiales, de recursos humanos y utilización de equipos. Por tanto, es necesario para calcularlo, considerar todos los elementos y personas que han intervenido desde el comienzo del proyecto hasta su finalización.

Para el presente proyecto realizado, estos costes podrían dividirse principalmente en coste de personal y costes de equipo y software.

Todos los costes que se incluirán en este presupuesto serán expresados en euros €. Al final del presupuesto, se incluirá una descripción del equipo utilizado para realizar este trabajo.

8.1. Presupuesto inicial

Inicialmente se trazó un presupuesto en función de la estimación de la carga de trabajo y uso de equipos necesarios para desarrollar el TFM: el coste de personal y el coste de equipo y software, que desglosamos a continuación:

8.1.1. Coste de personal

Para la realización del proyecto, han estado involucradas dos personas, cada una de ellas con una participación en horas diferente y con un coste diferente según su categoría. En la tabla 8.1 aparece reflejado cada una de ellas con su categoría y el coste horario asociada a esta, el número de horas totales dedicadas y el coste correspondiente según la estimación que se hizo inicialmente.

Las dos personas que han trabajado en el proyecto han sido Álvaro Fernández Villar, el autor, y Mario Lázaro Navarro, el tutor, quién se ha encargado de dirigir y resolver las dudas que han ido surgiendo durante la realización del TFM.

Nombre	Descripción	€/h	Horas	Subtotal
Álvaro Fernández Villar	Ingeniero Aeronáutico	50	337,5	16875€
Mario Lázaro Navarro	Ingeniero Sénior de Caminos, Canales y Puertos.	60	7	420€
TOTAL				17295€

Tabla 8.1. Presupuesto inicial - Coste de personal

8.1.2. Coste de equipo y software

En la elaboración de este proyecto, el único equipo que ha sido necesario disponer ha sido un computador con la suficiente potencia como para trabajar bajo la plataforma de programación y cálculo Matlab.

Con respecto al software del que se precisó disponer en un principio, se encontraba, por un lado, la versión de Matlab 2018a con la que se han programado todos los códigos numéricos presentados en la memoria del proyecto, así como la interfaz gráfica final, y, por otro lado, las aplicaciones ofimáticas que han permitido la redacción de la memoria del TFM.

En la tabla 8.2 se muestra el material utilizado, con su precio en euros, el periodo de amortización en meses, el tiempo de uso estimado en meses y el precio que ha conllevado.

Material	Precio	Periodo de amortización	Tiempo de uso	Subtotal
PC portátil	500€	48	5	52,08€
Licencia de MathWorks Matlab	2000€	12	5	833,33€
Office 365 Enterprise Premium	126€	12	5	52,5€
TOTAL				937,92€

Tabla 8.2. Presupuesto inicial – Costes de equipo y software

8.1.3. Coste total del proyecto

En la tabla 8.3 se muestra el coste global de lo que en una estimación inicial habría costado llevar a cabo este proyecto.

Descripción	Coste total
Coste de personal	17295€
Costes de equipos y software	937,92€
TOTAL	18232,92€

Tabla 8.3. Presupuesto inicial – Coste total

Por tanto, el proyecto contaría, según una aproximación inicial, de un coste total de 18232,92€.

8.2. Presupuesto final

En esta sección se va a realizar el cálculo real del presupuesto del proyecto a partir de las horas que realmente se han invertido en realizar el proyecto, así como del material que ha sido necesario finalmente. Este presupuesto representaría el coste real que supondría llevar a cabo el proyecto por una empresa.



8.2.1. Coste de personal

En la tabla 8.4 aparecen reflejadas esta vez las horas reales invertidas en la realización del proyecto. Las horas extra necesarias realizadas por el alumno se debieron a que el proyecto fue ampliado (con el estudio aeroelástico) con respecto al estudio que en un principio se esperaba realizar. Aparece también el coste asociado a ellas.

Nombre	Descripción	€/h	Horas	Subtotal
Álvaro Fernández Villar	Ingeniero Aeronáutico	50	337,5	16875€
Horas extras Álvaro	Ingeniero Aeronáutico	60	200	12000€
Mario Lázaro Navarro	Ingeniero Sénior Industrial	60	8	480€
TOTAL				29355€

Tabla 8.4. Presupuesto final - Coste de personal

8.2.2. Coste de equipo y software

En cuanto al coste real del equipo y software, el coste final no ha coincidido con la estimación inicial puesto que, debido a la ampliación del trabajo, fue necesaria finalmente una licencia de SolidWorks para realizar simulaciones necesarias con las que se validó parcialmente el proyecto. Los costes reales aparecen reflejados en la tabla 8.5.

Material	Precio	Periodo de amortización	Tiempo de uso	Subtotal
PC portátil	500€	48	5	52,08€
Licencia de MathWorks Matlab	2000€	12	5	833,33€
Licencia de SolidWorks 2016 Premium	1680€	3	1	560€
Office 365 Enterprise Premium	126€	12	5	52,5€
TOTAL				1497,91€

Tabla 8.5. Presupuesto final – Costes de equipo y software

8.2.3. Coste total del proyecto

En la tabla 8.6 se muestra el coste total que supondría realizar este TFM sumando los costes de personal más los costes de material.



Descripción	Coste total
Coste de personal	29355€
Costes de equipos y software	1497,91€
TOTAL	30852,91€

Tabla 8.6. Presupuesto final – Costes totales

Por tanto, el coste total que tendría la realización de este TFM si fuese realizado por una empresa sería de 30852,91€. Esto supone un sobrecoste con respecto al presupuesto inicial del 69,21%.

8.3. Equipo y software utilizado

A continuación, se detallan brevemente las características del equipo y del software utilizado durante la realización del proyecto.

8.3.1. PC portátil

El ordenador utilizado para el desarrollo del TFM ha sido el modelo Asus X555L de 15" con las siguientes características técnicas:

- Procesador: 2,40 GHz Intel Core i7-5500U
- Memoria RAM: 8 GB DDR3
- Procesador Gráfico: nVidia GeForce 840M
- Sistema Operativo: Windows 10 Home 64 bits
- Disco duro: 1 Tb

8.3.2. Matlab

La licencia utilizada de Matlab incluye únicamente el núcleo del programa, no es necesario hacer uso de ninguna Toolbox adicional. El precio indicado en este capítulo corresponde con el de la licencia comercial. El software fue programado con la versión 2018a, la más reciente hasta el momento.

8.3.3. SolidWorks

La licencia utilizada de SolidWorks incluye también una licencia de SolidWorks Simulation, necesaria para realizar análisis en frecuencia. El precio indicado en este capítulo se corresponde con la licencia comercial para tres meses de uso. La versión utilizada fue la 2016.

8.3.4. Office 365 Enterprise Premium

La licencia utilizada del paquete de ofimática incluye las versiones de Microsoft Office Word, Excel y PowerPoint. La versión que se utilizó en el proyecto fue la 2016.



Capítulo 9

Línea del tiempo

En las siguientes tablas se muestra la “línea del tiempo” del proyecto, es decir, el tiempo en días que ha llevado desarrollar cada uno de los objetivos que integran este trabajo. El proyecto ha llevado aproximadamente unas 540 horas.

En rojo aparecen las actividades que más tiempo fue necesario invertir para poder finalizarlas con éxito, en azul las que menos tiempo y en morado las que llevaron un número de horas intermedio entre las azules y las rojas.

Vemos que claramente, aquellas actividades que requirieron un mayor esfuerzo fueron las destinadas a la programación del código (en especial el código aeroelástico, el código del Vortex-Lattice no estacionario y el código de la interfaz gráfica) y a la redacción de la presente memoria.

Las actividades que requirieron un esfuerzo intermedio fueron las actividades de búsqueda y recopilación bibliográfica, así como la programación de los dos códigos bidimensionales.

Finalmente, las tutorías con el profesor (tanto personales como por correo electrónico) para la resolución de dudas y problemas que fueron surgiendo a lo largo del trabajo, la validación de los diferentes códigos programados y los distintos estudios realizados con los códigos programados fueron las actividades que requirieron un tiempo menor en comparación con el resto de actividades.



Línea del tiempo

Nº Actividad	Inicio	Final
Tutoría	03/02/2018	08/02/2018
Búsqueda y Recopilación bibliográfica aerodinámica	09/02/2018	16/02/2018
Programación código bidimensional estacionario	17/02/2018	19/02/2018
Validación código bidimensional estacionario	20/02/2018	23/02/2018
Programación código bidimensional no estacionario	26/02/2018	03/03/2018
Validación código bidimensional no estacionario	03/03/2018	05/03/2018
Programación código tridimensional no estacionario	08/03/2018	25/03/2018
Validación código tridimensional no estacionario	25/03/2018	27/03/2018

Nº Actividad	Inicio	Final
Estudio de los casos realizados del capítulo cinco	28/03/2018	31/03/2018
Búsqueda y Recopilación bibliográfica aeroelásticidad	05/04/2018	10/04/2018
Tutoría	15/04/2018	15/04/2018
Programación código aeroelástico del flameo	16/04/2018	06/05/2018
Validación del código aeroelástico del flameo	07/05/2018	11/05/2018
Estudio del caso realizado del capítulo seis	12/05/2018	15/05/2018

Nº Actividad	Inicio	Final
Programación de la interfaz gráfica	16/05/2018	25/05/2018
Desarrollo de la memoria	26/05/2018	22/06/2018
Tutoría	24/06/2018	24/06/2018

Capítulo 10

Conclusiones, aportaciones y desarrollo futuro

10.1. Conclusiones

En este proyecto se ha desarrollado la aplicación “*FVortexAero 1.0*” con el objetivo de estudiar tanto la sustentación de alas en flujos incompresibles no estacionarios como el fenómeno del flameo aeroelástico en alas a bajas velocidades aerodinámicas.

Para hacer esto posible ha sido necesario realizar todo un recorrido por los fundamentos de la aerodinámica no estacionaria y aeroelasticidad numérica moderna.

De esta manera, comenzamos programando un algoritmo numérico para el estudio del caso bidimensional en flujos incompresibles, no viscosos, irrotacionales y estacionarios. Este código fue validado mediante soluciones analíticas cerradas encontradas en la literatura clásica (expansiones trigonométricas de Glauert) obteniendo unos resultados muy positivos.

En una segunda fase, este código fue actualizado para estudiar el caso bidimensional no estacionario, que sería posteriormente validado mediante las soluciones analíticas de aerodinámica no estacionaria bidimensional proporcionadas por Wagner, Theodorsen y Küssner obteniendo de nuevo unos resultados favorables.

Finalmente, en una tercera etapa, se llevó a cabo la programación del Vortex-Lattice no estacionario (UVLM) para cumplir lo que en un principio suponía el objetivo principal del proyecto: el desarrollo de un código numérico para el estudio de la sustentación en flujos incompresibles no estacionarios en alas 3D. Este código fue validado mediante tres formas: la solución de Katz & Plotkin, la solución bidimensional de Theodorsen en alas de alargamiento infinito y la solución del caso tridimensional estacionario para tiempos de simulación elevados. Los resultados señalaron que el código programado era robusto.

Además, este código nos serviría para estudiar la influencia de algunos parámetros geométricos del ala (flecha, alargamiento, estrechamiento) en la sustentación del ala.

Cumplidos los objetivos iniciales de este proyecto, y viendo las posibilidades que podría tener el código numérico programado en el cálculo aeroelástico tridimensional, se decidió continuar el trabajo para conseguir desarrollar un código que permitiera estudiar las condiciones de flameo a partir del acoplamiento aeroelástico en alas rectangulares con ángulo de ataque cero. Para ello se formularon y se integraron las ecuaciones del acoplamiento aeroelástico, modelando las cargas mediante el UVLM, primeramente, en el dominio de la frecuencia y, posteriormente, en el dominio del tiempo. y se resolvió el conocido como determinante de flameo para determinar la velocidad y frecuencia de flameo, la velocidad de divergencia estática y para obtener las curvas de flameo.

En esta línea se programó un código numérico para resolver el determinante de flameo aeroelástico y determinar la velocidad y frecuencia de flameo, la velocidad de divergencia



estática y las curvas de flameo. Este código sería validado y utilizado posteriormente para realizar el estudio sobre un ala en voladizo.

La validación dio como resultado un código preciso cuando no existe inestabilidad numérica en el cálculo del determinante. Es necesario por tanto probar distintos métodos para la resolución del determinante de flameo (como puede ser el método $p - k$) obtener resultados más precisos.

La culminación del proyecto fue el desarrollo de una interfaz gráfica a partir de todo el código previamente validado. El resultado fue “*FVortexAero 1.0*”, una herramienta que sin llegar a estar al nivel de complejidad de otras comerciales como ZAERO, puede ser útil como primer acercamiento en el cálculo numérico de alas a bajas velocidades para un curso universitario de aerodinámica y aeroelasticidad numérica o para su utilización como una primera estimación en las primeras fases de diseño conceptual.

10.2. Aportaciones

Seguidamente, se detallan las aportaciones más relevantes que se realizan en este Trabajo de Final de Máster.

1. Aportación de un código numérico programado en la plataforma de cálculo Matlab y validado para el cálculo de la sustentación en perfiles bidimensionales ante flujos incompresibles estacionarios. Se encuentra disponible en el apéndice A.
2. Aportación de un código numérico programado en la plataforma de cálculo Matlab y validado para el cálculo de la sustentación en perfiles bidimensionales ante flujos incompresibles no estacionarios. Se encuentra disponible en el apéndice B.
3. Aportación de un código numérico programado en la plataforma de cálculo Matlab y validado para el cálculo de la sustentación en alas en flecha tridimensionales ante flujos incompresibles no estacionarios. Se encuentra disponible en el apéndice C.
4. Desarrollo teórico de una metodología para el estudio del fenómeno aeroelástico del flameo en alas tridimensionales a partir del UVLM programado anteriormente.
5. Aportación de un código numérico en la plataforma de cálculo Matlab y validado para el cálculo de las condiciones de flameo en alas rectangulares tridimensionales en voladizo. Se encuentra disponible en el apéndice D.
6. Aportación de la interfaz gráfica “*FVortexAero 1.0*” para el cálculo numérico de aerodinámica no estacionaria y aeroelasticidad en condiciones de bajas velocidades aerodinámicas en alas tridimensionales.

Entre las seis aportaciones más relevantes podríamos destacar principalmente la cuarta y la sexta aportación.

La cuarta aportación destaca por el trabajo de intensa búsqueda, recopilación y estructuración de información bibliográfica realizado debido a la complejidad que tiene

encontrar textos en los que se exponga de una forma clara y con un enfoque práctico (numérico) el acoplamiento fluido-estructura para el caso tridimensional y una metodología desde el punto de vista de la programación para determinar las condiciones de flameo en el caso tridimensional.

Por otro lado, la sexta aportación, “*FVortexAero 1.0*” por un lado representa todo el trabajo práctico realizado en el proyecto al combinar todos los códigos numéricos programados en un entorno gráfico e intuitivo y por otro lado, como ya se comentó en las conclusiones, es una herramienta que aunque sencilla (para el nivel de complejidad de los códigos comerciales) puede ser muy útil como una sencilla y rápida herramienta en las primeras fases de diseño aerodinámico, para el cálculo de sustentaciones en flujos incompresibles no estacionarios de alas tridimensionales y para cálculos aeroelásticos como la inestabilidad de flameo.

10.3. Desarrollo futuro

Un trabajo como el que aquí se presenta, destinado a ofrecer aportaciones sobre una materia concreta, podría no tener fin, ya que cualquiera de los aspectos constituyentes de la citada materia siempre podría ser susceptible a un estudio de mejora.

En este trabajo, los esfuerzos se han concentrado en determinadas cuestiones específicas. Estas han sido principalmente desarrollar y programar algoritmos que permitan estudiar, en una primera aproximación, la aerodinámica de alas tridimensional y el fenómeno aeroelástico del flameo.

Sin embargo, bien es sabido que los métodos teóricos desarrollados y, por tanto, el código numérico programado, es susceptible de numerosas ampliaciones o mejoras que permitan, por un lado, un estudio más completo y por otro, códigos más precisos, eficientes y realistas.

Es por ello que a continuación veremos una serie de posibles desarrollos futuros que permitirían ampliar y mejorar el trabajo realizado en esta tesis de máster.

Con respecto al algoritmo del UVLM, las mejoras y los desarrollos futuros podrían ir en la siguiente dirección:

- En primer lugar, el modelado de anillos de torbellinos en el UVLM aquí programado, es el modelo más sencillo de forma que todos tienen la misma longitud. Sin embargo, bien es sabido que cerca de las dos puntas de alas las cargas aerodinámicas varían más rápidamente con la posición en la dirección de la envergadura. Es por ello que una posible mejora lógica para modelar estas cargas de forma más precisa sería que la longitud de los anillos en la dirección de la envergadura fuese menor a medida que nos acercamos hacia las puntas del ala.
- La segunda alternativa sería introducir mejoras en la definición de la geometría del ala para el cálculo de la sustentación no estacionaria. Una de ellas sería la posibilidad de modelar esta con un ángulo de diedro introducido por el usuario desde la interfaz.
- Como tercera opción podría introducirse la posibilidad de que el usuario fuese el que introdujese las condiciones de frontera a simular en el UVLM desde la interfaz gráfica.



Con respecto al algoritmo implementado para el estudio de flameo aeroelástico del ala rectangular, existen también posibles caminos para mejorar y completar el trabajo realizado.

- Primeramente, las formas modales elegidas para el ala en voladizo podrían sustituirse de alguna forma en el código por otras más realistas que vinieran dadas por un análisis de elementos finitos. De esta forma podría ampliarse el estudio también a alas con otras formas diferentes (en flecha, etc.).
- En segundo lugar, podrían utilizarse métodos más avanzados de resolución del determinante de flameo que el expuesto aquí (como el método $p - k$), de forma que se pudiesen lograr resultados más precisos y menos inestables numéricamente.
- Finalmente, también se propone la posibilidad de introducir los términos no lineales dentro del sistema aeroelástico lineal (ecuación 6.76), y, obtener de esta manera, el modelo aeroelástico completo. De esta forma podría determinarse de una forma más precisa el comportamiento real del ala y las condiciones de flameo aeroelástico.

Referencias

- [1] Albano E. and Rodden W.P. 1969. "A doublet-lattice method for calculating lift distributions on oscillating surfaces in subsonic flows". AIAA Journal 7(2), 279-285.
- [2] Attar P., Dowell E. and Tang D. "A theoretical and experimental investigation of the effects of a steady angle of attack on the nonlinear flutter of a delta wing plate model". Journal of Fluids and Structures 17(2), 243-259.
- [3] Attar P.J. "Cantilevered plate Rayleigh-Ritz trial function selection for von Kármán's plate equations". Journal of Aircraft 44 (2), 654-661.
- [4] Batchelor, G.K. "An Introduction to Fluid Dynamics". Cambridge University Press, 1967.
- [5] Drela M. "Integrated simulation model for Preliminary aerodynamic, structural and control-law design of aircraft. Proceedings of the 40th AIAA Structures", Structural Dynamics and Materials Conference number AIAA 1999-1934, St.Louis, MO.
- [6] Dunn H.J. "An analytical technique for approximating Unsteady aerodynamics in the time domain". Technical Paper NASA TP-1738, NASA.
- [7] Etkin, B., and Reid, L.D. "Dynamics of Flight: Stability and Control". John Wiley & Sons, 3rd edition, 1996, pp 98-99.
- [8] Eversman W. and Tewari A. "Consistent rational-function approximation for Unsteady aerodynamics". Journal of Aircraft 28(9), 545-552.
- [9] Fung Y.C. "An Introduction to the Theory of Aeroelasticity". Dover Publications, Inc.
- [10] Glauert H. "The Elements of Aerofoil and Airscrew Theory". 2nd edition, Cambridge University Press, 1959.
- [11] Gold P. and Karpel M. "Reduced-size aeroservoelastiv modeling and limit-cycle-oscillation". 2008
- [12] Hassig H. "An approximate true damping solution of the flutter equations by determinant iteration". Journal of Aircraft 8 (11), 885-889.
- [13] Jones R.T. "The unsteady lift of a finite wing". Technical Note NACA TN-682, NACA.
- [14] Karamcheti, K. "Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics". R. E. Krieger Publishing Co., 1980.
- [15] Karpel M. "Design for the active flutter suppression and gust alleviation using state-space aeroelastic modeling". Journal of Aircraft 19(3), 221-227.
- [16] Katz J. and Plotkin A. "Low Speed Aerodynamics". Cambridge University Press.
- [17] Katz, J., and Weihs, D. "Hydrodynamic Propulsion by Large Amplitude Oscillation of an Airfoil with Chordwise Flexibility". J. Fluid Mech., Vol. 88, Pt. 3, 1978, pp. 485-497.
- [18] Kellogg, O.D. "Foundation of Potential theory". Dover, 1953.
- [19] Kreyszig, E. "Advanced Engineering Mathematics". 8th edition. John Wiley & Sons, 1999.
- [20] Lee C.S. "Prediction of steady and unsteady performance of marine propellers with or without cavitation by numerical lifting-surface theory". PhD thesis Massachusetts Institute of Technology.
- [21] Meirovitch L. "Computational Methods in Structural Dynamics". Springer, Netherlands.
- [22] Murua J., Palacios R. and Graham JMR. "Applications of the unsteady Vortex-lattice method in aircraft aeroelasticity and flight dynamics". Progress in Aerospace Sciences 55, 46-72.
- [23] Rao S.S. "Mechanical Vibrations". 4th edn. Pearson Prentice Hall, International Edition.



Referencias

- [24] Reissner E. "Effect of finite span on the airload distributions for oscillating wings: I-aerodynamics theory of oscillating wings of finite span". Technical Note NACA TN-1194, NACA.
- [25] Robinson, A., and Laurmann, L. A. "Wing Theory". Cambridge University Press, 1956.
- [26] Roger K.L. "Airplane math modelling methods for active control design". Report AGARD-CP-228.
- [27] Satyanarayana B. and Davis S. "Experimental studies of unsteady trailing-edge conditions". AIAA Journal 16(2) 125-129.
- [28] Tewari A. and Brink-Spalink J. "Multiple pole rational-function approximations for unsteady aerodynamics". Journal of Aircraft 30 (3), 426-428.
- [29] Tewari A. "Aeroservoelasticity: Modeling and Control". 2nd edn. Springer, 2015.
- [30] Wright J.R. and Cooper J.E. "Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads". 2nd edn. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK.
- [31] Yaman Kemal. "Subsonic Flutter of Cantilever Rectangular PC Plate Structure". International Journal of Aerospace Engineering, Volume 16. Hindawi Publishing Corporation.
- [32] ZONA Technology Inc. 2004 ZAERO Version 7.2: User's Manual, 13th edn Scottsdale, Az.
- [33] I. E. Garrick and W. H. Reed III. "Historical Development of Aircraft Flutter". Journal of Aircraft 18, 897 (1981).
- [34] W. R. Krüger. "A multi-body approach for modelling manoeuvring aeroelastic aircraft during Preliminary design". Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering 222, 887 (2008).
- [35] M. J. Patil, D. H Hodges, and C. E. S. Cesnik. "Nonlinear Aeroelastic Analysis of Complete Aircraft in Subsonic Flow". Journal of Aircraft 37, 753 (2000).
- [36] A. L. da Silva, P. Paglione, and T. Yoneyama, Conceptual Flexible Aircraft Model for Modeling Analysis and Control Studies". AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, Guidance, Navigation, and Control and Co-located Conferences No. August (American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2010).
- [37] M. Bianchin, G. Quaranta, and P. Mantegazza. "State space reduced order models for static aeroelasticity and flight mechanics of flexible aircraft". Proceedings of the XVII Congresso Nazionale AIDAA (2003).
- [38] D. K. Schmidt and D. L. Raney. "Modeling and Simulation of Flexible Flight Vehicles". Journal of Guidance, Control, and Dynamics 24, 539 (2001).
- [39] E. Torenbeek. "Development and Application of a Comprehesive, Design-sensitive Weight Prediction Method for Wing Structures of Transport Category Aircraft". Tech. Rep. (Delft University of Technology, Delft 1992).
- [40] G. J. Kennedy and J. R. R. A. Martins. "A parallel aerostructural optimization framework for aircraft design studies". Structural and Multidisciplinary Optimization, 1079 (2014).
- [41] T. Kier. "Comparison of Unsteady Aerodynamic Modelling Methodologies wit Respect to Flight Loads Analysis". AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit (2005) pp. 1-14.
- [42] H. Wagner. "Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln". Journal of Applied Mathematics and Mechanics. (1925).
- [43] H. G. Küssner. "Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flügeln". Luftfahrtforschung 13, 410 (1936).
- [44] T. Theodorsen. "General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter. NACA Tech. Report (1935).



Referencias

- [45] J. G. Leishman. "Challenges in Modelling the Unsteady Aerodynamics of Wind Turbines". 21st ASME Wind Energy Symposium and the 40th AIAA Aerospace Sciences Meeting 132, 1 (2002).
- [46] R. N. Yurkovich, D. D. Liu, and P. C. Chen. "The State of the Art of Unsteady Aerodynamics for High Performance Aircraft". Proceedings of the 39th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit (2001).
- [47] D. A. Peters, S. Kuranamoorthy, and W. M. Cao. "Finite State Induced Flow Models Part I: Two-Dimensional Thin Airfoil". Journal of Aircraft 32 (1995).
- [48] D. A. Peters. "Finite State Induced Flow Models Part II: Three Dimensional Rotor Disk". Journal of Aircraft 32, 323 (1995).
- [49] R. Palacios, J. Murua, and R. Cook. "Structural and Aerodynamic Models in Nonlinear Flight Dynamics of Very Flexible Aircraft". IAA Journal 48 (2010).
- [50] J. Murua. "Flexible Aircraft Dynamics with a Geometrically-Nonlinear Description of the Unsteady Aerodynamics". Ph.D. thesis, Imperial College London (2012).
- [51] T. E. Fritz and L. N. Long. "Object- Oriented Unsteady Vortex Lattice Method for Flapping Flight". 42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting 41, 1275 (2004).
- [52] B. a. Roccia, S. Preidikman, J. C. Massa, and D. T. Mook. "Modified Unsteady Vortex-Lattice Method to Study Flapping Wings in Hover Flight". AIAA Journal 51, 2628 (2013).
- [53] K. Seywald, F. Hellmundt, A. Widschek, and F. Holzapfel. "Airworthiness Investigation of a Highly Nonplanar Flexible Wing Concept". 29th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences pp 1-10.
- [54] L. Cavagna, P. Masarati, and G. Quaranta. "Coupled Multibody/Computational Fluid Dynamics Simulation of Maneuvering Flexible Aircraft". Journal of Aircraft 48. 92 (2011).
- [55] G. D. McBain. "Theory of Lift. Introductory Computational aerodynamics in Matlab/Octave. School of Aerospace, Mechanical, & Mechatronic Engineering". University of Sydney, Australia.
- [56] Zheng Xin, Liu Yu-Bin, Chen Pu, Shen Feng, Zhang Sheng-Jun y Fu Xiang-Rong. "Flutter frequency based on bending-torsion coupling theory". University of Peking, China.



Referencias



Apéndice A

Código para el caso bidimensional estacionario

```
% SOLUCIÓN NUMÉRICA ESTACIONARIA PARA PERFILES DELGADOS. PERFIL SIN CURVATURA CON ANGULO
% DE ATAQUE

% Datos de entrada
% Número de paneles
n=200;
% Ángulo de ataque en grados
alpha0=10;
% Velocidad del flujo
U=1;
% Cuerda del perfil
c=1;
% Densidad
rho=1;
% Presión dinámica
Que=0.5*rho*u^2;

% cálculos intermedios
% Ángulo de ataque en radianes
alpha=deg2rad(alpha0);
% Semicuerda del perfil
b=c/2;
% Longitud del panel
dx=c/n;

% Inicialización de matrices
xc=zeros(n,1);
xg=zeros(n,1);
A=zeros(n,n);
dL=zeros(n,1);
dcp=zeros(n,1);
dM=zeros(n,1);
c1=zeros(n,1);
% Cálculo de los puntos característicos del perfil
% Puntos extremos de cada panel
xj = transpose(linspace(-b,b,n+1));
% Puntos de control de cada panel
for j=1:n
    xc(j) = 0.25*xj(j)+0.75*xj(j+1);
end
% Puntos de torbellino
for j=1:n
    xg(j) = 0.25*xj(j+1)+ 0.75*xj(j);
end

%
```



Código para el caso bidimensional estacionario

```
% Matriz A de coeficientes aerodinamicos
for i=1:n
    for j=1:n
        A(i,j)=-1/(2*pi)*(1/(xc(i)-xg(j)));
    end
end
% Vector a
a=-U*transpose(alpha*ones(1,n));

% Resolucion de la circulacion g
g=A\a;

% calculo de las presiones y la sustentacion
for i=1:n
    % Calculo diferencia de sustentacion
    dL(i)=rho*U*g(i);
    % Calculo distribucion coeficiente sustentacion
    cl(i)=dL(i)/(Que*c);
    % Calculo coeficiente de presiones
    dcp(i)=dL(i)/(dx*Que);
    % Calculo momento aerodinamico con respecto al borde de ataque
    dM(i)=-dL(i)*(xg(i)+b);
end

% Sustentacion total
L=sum(dL);
% Coeficiente de sustentacion total
cL=sum(cl);
% Coeficiente de momento aerodinamico con respecto al borde de ataque
Cm0=sum(dM)/(Que*c^2);

% Ploteo del coeficiente de presiones
% Distribucion de sustentacion teorica
plot(xg/c,dcp,'Linewidth',2,'color','blue')
title({'Pefil delgado sin curvatura',...
    ['Distribucion del Coeficiente de Presiones cp(\eta), N=' num2str(n)...
    ', \alpha=' num2str(alpha0) 'o']}])
xlabel('\eta=x/c')
ylabel('Coeficiente de Presiones \delta cp(x)')
legend('Solucion Numérica')
```



Apéndice B

Código para el caso bidimensional no estacionario

```
% SOLUCIÓN NUMÉRICA NO ESTACIONARIA PARA PERFILES DELGADOS.  
% VARIACION REPENTINA DEL ANGULO DE INCIDENCIA EN EL PERFIL. FUNCION WAGNER  
  
% Datos de entrada  
% Numero de paneles en el perfil  
n=100;  
% Numero de paneles en la estela  
m=150;  
% Tiempo de calculo adimensional  
taumax=50;  
% Incremento del angulo de ataque en el salto en grados  
alfa=10;  
  
% calculo de algunos valores necesarios  
% Longitud de los paneles en la estela  
dxw=taumax/m;  
% valor de alpha en radianes.  
alpha0=alfa*pi()/180;  
  
% Mallado del perfil y de la estela  
% Inicializacion de algunas matrices  
% Matriz de puntos de control  
xc = zeros(n,1);  
% Matriz de puntos de torbellino  
xg = zeros(n,1);  
% Vector de tiempos de simulacion  
tau=zeros(1,m);  
% Puntos extremos de los paneles  
xk=transpose(linspace(-1,1,n+1));  
  
% Puntos de control de cada panel  
for j=1:n  
    xc(j) = 1/4 * xk(j)+3/4 *xk(j+1);  
end  
  
% Puntos de torbellino de cada panel  
for j=1:n  
    xg(j) = 1/4 * xk(j+1)+3/4 *xk(j);  
end  
  
% Puntos de torbellino en la estela  
j=0:m-1;  
xkw=ones(1,m)+dxw/4;  
xgw=xkw(1:end)+j*dxw;  
xgw=transpose(xgw);
```



```
% Instantes de simulacion
dtau=dxw;
j=0:m-1;
%vector de instantes de simulacion
tau=tau+j*dtau;

% Matrices del sistema de ecuaciones
% Inicializacion de matrices
% Matriz de coeficientes aerodinamicos
A = zeros(n,1);
% Matriz aw de coeficientes de la estela
aw=zeros(n,m);
% vector velocidad de la condicion de frontera
wa=zeros(n,m);
% Vector de alpha(tau)
alpha=zeros(1,m);
% Vector derivada de alpha(tau)
dalpa=zeros(1,m);
% Matriz aw (Coeficientes aerodinamicos de la estela para un instante j)
for i=1:n
    for j=1:m
        aw(i,j)=(-1/(2*pi))*(1/(xc(i)-xgw(j)));
    end
end

% Matriz A (Coeficientes aerodinamicos del perfil)
for i=1:n
    for j=1:n
        A(i,j)=(-1/(2*pi))*(1/(xc(i)-xg(j)));
    end
end

% calculo del vector wa
% calculo de la variacion del angulo alpha(tau)
tau0=1*10^-12;
for i=1:length(tau)
    if tau(i)<tau0
        alpha(i)=-(1-cos(pi*tau(i)/tau0)*alpha0)*0.5;
    elseif tau (i)>= tau0
        alpha(i)=alpha0;
    end
end

for i=1:length(tau)

    if tau(i)<tau0
        dalpa(i)=-sin(pi*tau(i)/tau0)*pi/(2*tau0);
    elseif tau (i)>= tau0
        dalpa(i)=0;
    end
end

% Calculo de wa
for t=1:n
    for q=1:m
        wa(t,q)=-dalpa(q)*xc(t)-alpha(q);
    end
end
```



```
% Resolucion del sistema y calculo de los torbellinos Gamma
% Inicializacion de matrices
r=ones(n,1);
% Vector de torbellinos de la estela
Gammaw=zeros(1,m);
% Matriz de gradiente numerico de torbellinos
dGamma=zeros(n,m);
% Matriz intermedia para el calculo de las presiones
T=zeros(n,n);
% Matriz de coeficiente de presiones
dcp=zeros(n,m);
% vector intermedio calculo del cl
cluno=zeros(1,m);
% vector intermedio calculo del cl
cldos=zeros(1,m);
% Vector del coeficiente de sustentacion teorico
clexacto=zeros(1,m);
% Vector solucion del coeficiente de sustentacion estacionario
clesst=zeros(1,m);
% Primer instante de tiempo
Gamma(:,1)=(A-aw(:,1)*r')\wa(:,1);
Gammaw(1)=-r'*Gamma(:,1);

% Resto de instantes de tiempo
for j=2:m
    suma=0;
    for k=1:j-1
        suma=suma+(aw(:,1)-aw(:,j-k+1))*Gammaw(k);
    end
    Gamma(:,j)=(A-aw(:,1)*r')\ (wa(:,j)+suma);
    Gammaw(j)=-r'*Gamma(:,j);
    for k=1:j-1
        Gammaw(j)=Gammaw(j)-Gammaw(k);
    end
end

% Calculo del gradiente numerico de Gamma
for k=1:n
    dGamma(k,:)=gradient(Gamma(k,:))/dtau;
end

% Calculo del coeficiente de presiones y coeficientes aerodinamicos
for i=1:n
    for j=1:n
        if i==j
            T(i,j)=3/2;
        elseif i<j
            T(i,j)=0;
        elseif i>j
            T(i,j)=1;
        end
    end
end

% Coeficiente de presiones dcp
for j=1:m
    dcp(:,j)=n*Gamma(:,j)+T*dGamma(:,j);
```



Código para el caso bidimensional no estacionario

```
end

% Coeficiente de sustentacion numerico c1
for i=1:m
    % Primera parte
    cluno(i)=sum(Gamma(:,i));
    % Segunda parte
    cldos(i)=sum(dGamma(:,i).*(1-xg));
end
% Coeficiente de sustentacion numerico
c1=cluno+cldos;

% Coeficiente de sustentacion dado por Wagner
% Calculo de la funcion de Wagner
C=funcionWagner(tau);

for j=1:m
    % Coeficiente analitico
    clexacto(j)=(2*pi()*alpha0*c(j));
end

% C1 Estacionario
clest(1,:)=2*pi();
% Representacion de resultados
figure
hold on;
% Coeficiente de sustentacion obtenido por el metodo de los paneles
plot(tau,real(c1)/(deg2rad(10)), 'Linewidth',2,'color','red')
% Coeficiente de sustentacion obtenido por la funcion de Kussner
plot(tau,real(clexacto)/deg2rad(10), '-d','MarkerIndices',...
    1:10:length(clexacto), 'Linewidth',1,'color','black')
plot(tau,clest,'Linewidth',2,'color','blue')
title(['Coeficiente de Sustentación CL(\tau), n=' num2str(n)...
    ', m=' num2str(m) ', '\Delta\xi=' num2str(dxw) ] )
xlabel('Tiempo adimensional \tau, tau=t/Tr, Tr=b/u\infty')
ylabel('Coeficiente de Sustentación CL(\tau)/\Delta\alpha')
legend('Solucion numerica', 'solucion wagner', 'Solucion estacionaria: 2\pi')
axis([0,50,0,10])
```

```
function [C] = funcionWagner(tau)
%Calculo de la funcion de Wagner

% Inicializacion de matrices
C=zeros(1,length(tau));

for m=1:length(tau)
    C(m)=1-0.165*exp(-0.045*tau(m))-0.335*exp(-0.3*tau(m));
end
end
```

```
% SOLUCIÓN NUMÉRICA NO ESTACIONARIA PARA PERFILES DELGADOS.
% PERFIL OSCILANTE CON DESPLAZAMIENTO VERTICAL. FUNCION DE THEODORSEN

% Datos de entrada
```



Código para el caso bidimensional no estacionario

```
% Numero de paneles en el perfil
n=100;
% Numero de paneles en la estela
m=150;
% Tiempo de calculo adimensional
taumax=50;
% Frecuencia de oscilacion adimensional (omega*b/u_inf)
kappa=0.5;
% Amplitud de oscilacion
h0=1;

% calculo de algunos valores necesarios
% Longitud de los paneles en la estela
dxw=taumax/m;

% Mallado del perfil y de la estela
% Inicializacion de algunas matrices
% Matriz de puntos de control
xc = zeros(n,1);
% Matriz de puntos de torbellino
xg = zeros(n,1);
% Vector de tiempos de simulacion
tau=zeros(1,m);
% Puntos extremos de los paneles
xk=transpose(linspace(-1,1,n+1));

for j=1:n
    % Puntos de control de cada panel
    xc(j) = 1/4 * xk(j)+3/4 *xk(j+1);
end

for j=1:n
    % Puntos de torbellino de cada panel
    xg(j) = 1/4 * xk(j+1)+3/4 *xk(j);
end

% Puntos de torbellino en la estela
j=0:m-1;
xkw=ones(1,m)+dxw/4;
xgw=xkw(1:end)+j*dxw;
xgw=transpose(xgw);

% Instantes de simulacion
dtau=dxw;
j=0:m-1;
%vector de instantes de simulacion
tau=tau+j*dtau;

% Matrices del sistema de ecuaciones
% Inicializacion de matrices
% Matriz de coeficientes aerodinamicos
A = zeros(n,1);
% Matriz aw de coeficientes de la estela
aw=zeros(n,m);
% Vector velocidad de la condicion de frontera
wa=zeros(n,m);

% Matriz aw (Coeficientes aerodinamicos de la estela para un instante j)
```



```
for i=1:n
    for j=1:m
        aw(i,j)=(-1/(2*pi))*(1/(xc(i)-xgw(j)));
    end
end

% Matriz A (Coeficientes aerodinamicos del perfil)
for i=1:n
    for j=1:n
        A(i,j)=(-1/(2*pi))*(1/(xc(i)-xg(j)));
    end
end

% Calculo del vector wa
for t=1:n
    for q=1:m
        wa(t,q)=-h0*1i*kappa*exp(1i*kappa*q*dxw);
    end
end

% Resolucion del sistema y calculo de los torbellinos Gamma
% Inicializacion de matrices
r=ones(n,1);
% Vector de torbellinos de la estela
Gammaw=zeros(1,m);
% Matriz de gradiente numerico de torbellinos
dGamma=zeros(n,m);
% Matriz intermedia para el calculo de las presiones
T=zeros(n,n);
% Matriz de coeficiente de presiones
dcp=zeros(n,m);
% Vector intermedio calculo del cl
cluno=zeros(1,m);
% Vector intermedio calculo del cl
cldos=zeros(1,m);
% Vector del coeficiente de sustencion teorico
clexacto=zeros(1,m);
% Vector solucion del coeficiente de sustencion cuasi-estacionario
cquasi=zeros(1,m);
% Primer instante de tiempo
Gamma(:,1)=(A-aw(:,1)*r')\wa(:,1);
Gammaw(1)=-r'*Gamma(:,1);

% Resto de instantes de tiempo
for j=2:m
    suma=0;
    for k=1:j-1
        suma=suma+(aw(:,1)-aw(:,j-k+1))*Gammaw(k);
    end
    Gamma(:,j)=(A-aw(:,1)*r')\((wa(:,j)+suma));
    Gammaw(j)=-r'*Gamma(:,j);
    for k=1:j-1
        Gammaw(j)=Gammaw(j)-Gammaw(k);
    end
end

% Calculo del gradiente numerico de Gamma
for k=1:n
```



Código para el caso bidimensional no estacionario

```
dGamma(k,:)=gradient(Gamma(k,:))/dtau;
end

% calculo del coeficiente de presiones y coeficientes aerodinamicos
for i=1:n
    for j=1:n
        if i==j
            T(i,j)=3/2;
        elseif i<j
            T(i,j)=0;
        elseif i>j
            T(i,j)=1;
        end
    end
end

for j=1:m
    % Coeficiente de presiones dcp
    dcp(:,j)=n*Gamma(:,j)+T*dGamma(:,j);
end

% Coeficiente de sustentacion numerico cl
for i=1:m
    % Primera parte
    cluno(i)=sum(Gamma(:,i));
    % Segunda parte
    cldos(i)=sum(dGamma(:,i).*(1-xg));
end
% Coeficiente de sustentacion numerico
cl=cluno+cldos;

% Coeficiente de sustentacion dado por Theodorsen y quasi-estacionario
% calculo de la funcion de Theodorsen
C=funciontheodorsen(kappa);
for j=1:m
    % Coeficiente analitico
    clexacto(j)=(2*pi()*(1i*kappa*C-(kappa^2/2)))*exp(1i*kappa*dxw*j);
    % Coeficiente quasi-estacionario
    clquasi(j)=2*pi()*1i*kappa*exp(1i*kappa*dxw*j);
end

% Representacion de resultados
figure
hold on;
% Coeficiente de sustentacion obtenido por el metodo de los paneles
plot(tau,real(cl),'Linewidth',3,'color','red')
% Coeficiente de sustentacion obtenido por la funcion de Theodorsen
plot(tau,real(clexacto),'-d','MarkerIndices',1:10:length(clexacto),...
    'Linewidth',2,'color','black')
% Coeficiente de sustentacion quasi-estacionario.
plot(tau,real(clquasi),'-v','MarkerIndices',1:10:length(clquasi),...
    'color',[0.5,0,1],'Linewidth',2)
title(['Coeficiente de Sustentación CL(\tau), n=' num2str(n)...
    ', m=' num2str(m) ', \kappa=' num2str(kappa) ', \Delta\xi='...
    num2str(dxw)])
xlabel('Tiempo adimensional \tau, tau=t/Tr, Tr=b/u\infty')
ylabel('Coeficiente de Sustentación CL(\tau)')
```



Código para el caso bidimensional no estacionario

```
legend('Solucion numerica', 'Solucion Theodorsen', ...
    'Solucion cuasi-estacionaria')
```

```
function [C] = funciontheodorsen(k)

% Funciones de Hankel
H02 = besselh(0,2,k);
H12 = besselh(1,2,k);

% Funcion de Theodorsen
C = H12 / (H12 + (1i)* H02);
end
```

```
% SOLUCIÓN NUMÉRICA NO ESTACIONARIA PARA PERFILES DELGADOS.
% PERFIL ENTRANDO EN UNA RAFAGA. FUNCION DE KUSSNER
```

```
% Datos de entrada
% Número de paneles en el perfil
n=100;
% Número de paneles en la estela
m=150;
% Tiempo de calculo adimensional
taumax=50;
% Velocidad de rafaga vertical
w0=1;

% Calculo de algunos valores necesarios
% Longitud de los paneles en la estela
dxw=taumax/m;

% Mallado del perfil y de la estela
% Inicializacion de algunas matrices
% Matriz de puntos de control
xc = zeros(n,1);
% Matriz de puntos de torbellino
xg = zeros(n,1);
% Vector de tiempos de simulacion
tau=zeros(1,m);
% Puntos extremos de los paneles
xk=transpose(linspace(-1,1,n+1));

% Puntos de control de cada panel
for j=1:n
    xc(j) = 1/4 * xk(j)+3/4 *xk(j+1);
end

% Puntos de torbellino de cada panel
for j=1:n
    xg(j) = 1/4 * xk(j+1)+3/4 *xk(j);
end

% Puntos de torbellino en la estela
j=0:m-1;
xkw=ones(1,m)+dxw/4;
```



```
xgw=xkw(1:end)+j*dxw;
xgw=transpose(xgw);

% Instantes de simulacion
dtau=dxw;
j=0:m-1;
%vector de instantes de simulacion
tau=tau+j*dtau;

% Matrices del sistema de ecuaciones
% Inicializacion de matrices
% Matriz de coeficientes aerodinamicos
A = zeros(n,1);
% Matriz aw de coeficientes de la estela
aw=zeros(n,m);
% Vector velocidad de la condicion de frontera
wa=zeros(n,m);

% Matriz aw (Coeficientes aerodinamicos de la estela para un instante j)
for i=1:n
    for j=1:m
        aw(i,j)=(-1/(2*pi))*(1/(xc(i)-xgw(j)));
    end
end

% Matriz A (Coeficientes aerodinamicos del perfil)
for i=1:n
    for j=1:n
        A(i,j)=(-1/(2*pi))*(1/(xc(i)-xg(j)));
    end
end

% calculo del vector wa
for t=1:n
    for q=1:m
        wa(t,q)=-w0*heaviside((tau(t)-xc(t)-1));
    end
end

% Resolucion del sistema y calculo de los torbellinos Gamma
% Inicializacion de matrices
r=ones(n,1);
% Vector de torbellinos de la estela
Gammaw=zeros(1,m);
% Matriz de gradiente numerico de torbellinos
dGamma=zeros(n,m);
% Matriz intermedia para el calculo de las presiones
T=zeros(n,n);
% Matriz de coeficiente de presiones
dcp=zeros(n,m);
% Vector intermedio calculo del cl
cluno=zeros(1,m);
% Vector intermedio calculo del cl
cldos=zeros(1,m);
% Vector del coeficiente de sustencion teorico
clexacto=zeros(1,m);
% Vector solucion del coeficiente de sustencion cuasi-estacionario
clquasi=zeros(1,m);
```



```
% Primer instante de tiempo
Gamma(:,1)=(A-aw(:,1)*r')\wa(:,1);
Gammaw(1)=-r'*Gamma(:,1);

% Resto de instantes de tiempo
for j=2:m
    suma=0;
    for k=1:j-1
        suma=suma+(aw(:,1)-aw(:,j-k+1))*Gammaw(k);
    end
    Gamma(:,j)=(A-aw(:,1)*r')\((wa(:,j)+suma));
    Gammaw(j)=-r'*Gamma(:,j);
    for k=1:j-1
        Gammaw(j)=Gammaw(j)-Gammaw(k);
    end
end

% Calculo del gradiente numerico de Gamma
for k=1:n
    dGamma(k,:)=gradient(Gamma(k,:))/dtau;
end

% Calculo del coeficiente de presiones y coeficientes aerodinamicos
% Matriz T para el calculo del coeficiente de presiones
for i=1:n
    for j=1:n
        if i==j
            T(i,j)=3/2;
        elseif i<j
            T(i,j)=0;
        elseif i>j
            T(i,j)=1;
        end
    end
end

% Coeficiente de presiones dcp
for j=1:m
    dcp(:,j)=n*Gamma(:,j)+T*dGamma(:,j);
end

% Coeficiente de sustencion numerico c1
for i=1:m
    % Primera parte
    cluno(i)=sum(Gamma(:,i));
    % Segunda parte
    cldos(i)=sum(dGamma(:,i).*(1-xg));
end
% Coeficiente de sustencion numerico
c1=cluno+cldos;

% Coeficiente de sustencion dado por Kussner y quasi-estacionario
Chi=funcionkussner(tau); % calculo de la funcion de Kussner

% Coeficiente analitico
for j=1:m
    clexacto(j)=(2*pi()*w0*Chi(j));
end
```



```
% Representacion de resultados
figure
hold on;
% Coeficiente de sustentacion obtenido por el metodo de los paneles
plot(tau,real(c1),'Linewidth',2,'color','red')
% Coeficiente de sustentacion obtenido por la funcion de Kussner
plot(tau,real(clexacto),'-d','MarkerIndices',1:10:length(clexacto),...
    'Linewidth',2,'color','black')
title(['Coeficiente de Sustentación CL(\tau), n=' num2str(n) ...
    ', m=' num2str(m) ', w0=' num2str(w0) ', '\Delta\xi=' num2str(dxw)])
xlabel('Tiempo adimensional \tau, tau=t/Tr, Tr=b/u\infty')
ylabel('Coeficiente de Sustentación CL(\tau)')
legend('Solucion numerica', 'solucion Kussner')
```

```
function [Chi] = funcionkussner(tau)
%Calculo de la funcion de Kussner

% Inicializacion de matrices
Chi=zeros(1,length(tau));

% Funcion de Kussner
for m=1:length(tau)
    chi(m)=(tau(m).^2+tau(m))/(tau(m).^2+2.82*tau(m)+0.80);
end
end
```





Apéndice C

Código para el caso tridimensional no estacionario (UVLM)

```
% SOLUCION NUMERICA NO ESTACIONARIA PARA EL CASO TRIDIMENSIONAL. (UVLM)
% CONDICIÓN DE FRONTERA: SALTO DE VELOCIDAD
% Parámetros geométricos del ala
% Dimensiones del ala
% Longitud de la cuerda en el encastre
cr=1;
% Longitud de la envergadura alar
b=3;
% Flecha en el borde frontal (grados)
LF=0;
% Flecha en el borde posterior (grados)
LR=0;
% Salto de velocidad (condicion de frontera)
Usalto=1;
% Ángulo de ataque
alpha=5*pi/180;

% Parámetros de discretización de la geometría alar y de la estela
% Número de paneles en la dirección de la envergadura
nv=20;
% Número de paneles en la dirección de la cuerda
mv=16;
% Densidad del aire
rho=1.225;
% Longitud de la estela en términos de cuerda en el encastre
cw=10*cr;

% Parámetros de discretización temporal
% Número de pasos temporales
ntimes=160;
% Cálculo del paso temporal
dt=cr/mv/(Usalto);
% Creación del vector de tiempos
ti=(0:ntimes-1)*dt;

% cálculos de generación de la geometría global del problema
% cálculo de los nodos de los paneles del ala
% Cálculo de los nodos del ala
Nodosala = MatrizNodos(mv,nv,LF,LR,b,cr);
% Coordenadas de los nodos en la dirección de la envergadura
nodosy=Nodosala(:,5)';
% Matriz de coordenadas de los nodos en la dirección de la envergadura
yp=vec2mat(nodosy,nv+1);
% Coordenadas de los nodos en la dirección de la cuerda
nodosx=Nodosala(:,4)';
% Matriz de coordenadas de los nodos en la dirección de la cuerda
```



```
xp = vec2mat(fliplr(nodosx),nv+1);
% Coordenadas de los nodos en la dirección perpendicular al ala
zp=zeros(mv+1,nv+1);

% cálculo de las esquinas de los anillos de torbellinos del ala
xv = zeros(mv+1,nv+1);
yv = zeros(mv+1,nv+1);
zv = zeros(mv+1,nv+1);
for j=1:nv+1
    for i=1:mv
        % Anillos de torbellino desplazados aguas abajo a 1/4 de su cuerda
        xv(i,j)= xp(i,j)+(xp(i+1,j)-xp(i,j))/4;
        yv(i,j)= yp(i,j);
        zv(i,j)= zp(i,j)+(zp(i+1,j)-zp(i,j))/4;
    end
    % Último segmento de los anillos de torbellino del borde de fuga
    xv(mv+1,j) = xp(mv+1,j)+ 0.25*cr/mv;
    yv(mv+1,j) = yp(mv+1,j);
    zv(mv+1,j)= zp(mv+1,j);
end

% Esquinas de los anillos de torbellino de la estela
% Número de anillos de torbellino en la dirección de la cuerda
mw=cw*mv/cr;
% Cálculo de los nodos de la estela
Nodosestela = MatrizNodos(mw,nv,LR,0,b,cw);
% Posicionamiento de la estela en la geometría global
wakepoints=min(xv(mv+1,:))+Nodosestela(:,4)';
% Coordenada x más cercana al ala
xminestela=min(wakepoints);
% Diferencia en x ala-estela
difxalaestela=xminestela-min(xv(mv+1,:));
% Coordenadas en x de la estela unida al ala
wakepoints=wakepoints-difxalaestela;
% Matriz de coordenadas de los nodos en la dirección de la cuerda
xw = vec2mat(fliplr(wakepoints),nv+1);
% Matriz de coordenadas de los nodos en la dirección de la envergadura
yw=repmat(yp(1,:),mw+1,1);
% Matriz de coordenadas de los nodos, dirección normal al plano del ala
zw=zeros(mw+1,nv+1);

% Representación gráfica del ala y de la estela
figure(100)
hmesh1=mesh(xp,yp,zp,'Edgecolor','black','FaceColor','none');
hold on
hmesh2=mesh(xv,yv,zv,'Edgecolor','blue','FaceColor','none');
hmesh3=mesh(xw(1:mw,:),yw(1:mw,:),...
    zw(1:mw,:),'Edgecolor','green','FaceColor','none');
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
ylim([-b/2 b/2])
legend([hmesh1(1) hmesh2(1) hmesh3(1)]...
    , 'Paneles Geométricos','Anillos del ala','Anillos de la estela')
pbaspect([1 b/cr 1])

% Puntos de control, dimensiones y áreas de los anillos de torbellino
% Inicialización de las longitudes de los anillos. Dirección cuerda
```



```
Dx = zeros(mv,nv);
% Inicialización de las longitudes de los anillos. Dirección envergadura
Dy = zeros(mv,nv);
% Inicialización de los vectores de coordenadas de los puntos de control
% en los anillos de torbellino del ala
xc = zeros(mv,nv);
yc = zeros(mv,nv);
zc = zeros(mv,nv);
% Inicialización de los vectores de coordenadas de los puntos de control
% en los anillos de torbellino de la estela
xwc = zeros(mw,nv);
ywc = zeros(mw,nv);
zwc = zeros(mw,nv);
for i=1:mv
    for j=1:nv
        % Cálculo de las posiciones de los puntos de control
        dxv = (xp(i+1,j) - xp(i,j)+xp(i+1,j+1) - xp(i,j+1))/2;
        dzv = (zp(i+1,j) - zp(i,j)+zp(i+1,j+1) - zp(i,j+1))/2;
        xc(i,j) = (xp(i,j)+xp(i+1,j)+xp(i,j+1)+xp(i+1,j+1))/4+dxv/4;
        yc(i,j) = (yp(i,j)+yp(i+1,j)+yp(i,j+1)+yp(i+1,j+1))/4;
        zc(i,j) = (zp(i,j)+zp(i+1,j)+zp(i,j+1)+zp(i+1,j+1))/4+dzv/4;

        % Cálculo de las longitudes de los torbellinos
        % Asegurarse que Dx y Dy quedan simétricos alrededor del encastre
        if j <= nv/2
            Dx(i,j)=sqrt((xv(i+1,j)-xv(i,j))^2+ ...
                (yv(i+1,j)-yv(i,j))^2+ ...
                (zv(i+1,j)-zv(i,j))^2);

            Dy(i,j)=sqrt((xv(i,j+1)-xv(i,j))^2+ ...
                (yv(i,j+1)-yv(i,j))^2+ ...
                (zv(i,j+1)-zv(i,j))^2);
        else
            Dx(i,j)=sqrt((xv(i+1,j+1)-xv(i,j+1))^2+ ...
                (yv(i+1,j+1)-yv(i,j+1))^2+ ...
                (zv(i+1,j+1)-zv(i,j+1))^2);

            Dy(i,j)=sqrt((xv(i,j)-xv(i,j+1))^2+ ...
                (yv(i,j)-yv(i,j+1))^2+ ...
                (zv(i,j)-zv(i,j+1))^2);
        end
    end
end

% Cálculo de los puntos de control en la estela
for i=1:mw
    for j=1:nv
        % Cálculo de las posiciones de los puntos de control
        xwc(i,j) = (xw(i,j)+xw(i+1,j))/2;
        ywc(i,j) = (yw(i,j)+yw(i,j+1))/2;
        zwc(i,j) = zw(i,j);
    end
end

% Cálculo de los vectores normales
nx = zeros(mv,nv);
ny = zeros(mv,nv);
```



```
nz = ones(mv,nv);

% Areas de los anillos de torbellinos
S=Dx.*Dy;
% Conversión de las matrices mv x nv a vectores mv*nv x 1
nvec=[reshape(nx',mv*nv,1) reshape(ny',mv*nv,1) reshape(nz',mv*nv,1)];
Dyvec=reshape(Dy',mv*nv,1);
Svec=reshape(S',mv*nv,1);

% Calculo de la influencia de los torbellinos del ala en el ala
disp('Calculando la matriz de coeficientes de influencia del ala')
% Inicializando matriz de coeficientes de influencia del ala
Ab=zeros(mv*nv,mv*nv);
for ic=1:mv
    for jc=1:nv
        for i=1:mw
            for j=1:nv
                % velocidad inducida por el primer segmento de torbellino
                uvw1=segmentotorbellino(xc(ic,jc),yc(ic,jc),zc(ic,jc),...
                    xv(i,j),yv(i,j),zv(i,j),xv(i,j+1),yv(i,j+1),zv(i,j+1));
                % velocidad inducida del segundo segmento de torbellino
                uvw2=segmentotorbellino(xc(ic,jc),yc(ic,jc),zc(ic,jc),...
                    xv(i,j+1),yv(i,j+1),zv(i,j+1),xv(i+1,j+1),...
                    yv(i+1,j+1),zv(i+1,j+1));
                % velocidad inducida por el tercer segmento de torbellino
                uvw3=segmentotorbellino(xc(ic,jc),yc(ic,jc),zc(ic,jc),...
                    xv(i+1,j+1),yv(i+1,j+1),zv(i+1,j+1),xv(i+1,j),...
                    yv(i+1,j),zv(i+1,j));
                % velocidad inducida por el cuarto segmento de torbellino
                uvw4=segmentotorbellino(xc(ic,jc),yc(ic,jc),zc(ic,jc),...
                    xv(i+1,j),yv(i+1,j),zv(i+1,j),xv(i,j),yv(i,j),zv(i,j));
                % Suma de todas las velocidades inducidas
                uvw=uvw1+uvw2+uvw3+uvw4;
                % Cálculo de los coeficientes de influencia
                Ab((ic-1)*nv+jc,(i-1)*nv+j)=dot(uvw,nvec((ic-1)*nv+jc,:));
            end
        end
    end
end

% Cálculo de la influencia de la estela en el ala
disp('Calculando la matriz de coeficientes de influencia de la estela')
% Inicialización de la matriz de coeficientes de influencia de la estela
Aw = zeros(mv*nv,mw*nv);
for ic=1:mv
    for jc=1:nv
        for i=1:mw
            for j=1:nv
                % velocidad inducida por el primer segmento de torbellino
                uvw1=segmentotorbellino(xc(ic,jc),yc(ic,jc),zc(ic,jc),...
                    xw(i,j),yw(i,j),zw(i,j),xw(i,j+1),yw(i,j+1),zw(i,j+1));
                % velocidad inducida por el segundo segmento de torbellino
                uvw2=segmentotorbellino(xc(ic,jc),yc(ic,jc),zc(ic,jc),...
                    xw(i,j+1),yw(i,j+1),zw(i,j+1),xw(i+1,j+1),...
                    yw(i+1,j+1),zw(i+1,j+1));
                % velocidad inducida por el tercer segmento de torbellino
                uvw3=segmentotorbellino(xc(ic,jc),yc(ic,jc),zc(ic,jc),...
                    xw(i+1,j+1),yw(i+1,j+1),zw(i+1,j+1),xw(i+1,j),...
```



```
    yw(i+1,j),zw(i+1,j));
    % velocidad inducida por el cuarto segmento de torbellino
    uvw4=segmentotorbellino(xc(ic,jc),yc(ic,jc),zc(ic,jc),...
        xw(i+1,j),yw(i+1,j),zw(i+1,j),xw(i,j),yw(i,j),zw(i,j));
    % Suma de todas las velocidades inducidas
    uvw=uvw1+uvw2+uvw3+uvw4;
    % Cálculo de los coeficientes de influencia
    Aw((ic-1)*nv+jc,(i-1)*nv+j)=dot(uvw,nvec((ic-1)*nv+jc,:));
end
end
end
end

% Matrices de propagación de la estela
Pb=zeros(nv,(mv-1)*nv) eye(nv,nv);zeros((mw-1)*nv,(mv-1)*nv) ...
    zeros((mw-1)*nv,nv)];
Pw=zeros(nv,(mw-1)*nv) zeros(nv,nv);eye((mw-1)*nv,(mw-1)*nv) ...
    zeros((mw-1)*nv,nv)];
Pb=sparse(Pb);
Pw=sparse(Pw);

% Matrices de coeficientes para el calculo de la sustentacion
Gy=eye(mv*nv)+[zeros(nv,(mv-1)*nv) zeros(nv,nv);-eye((mv-1)*nv,....
    (mv-1)*nv) zeros((mv-1)*nv,nv)];
Gy=sparse(Gy.*repmat(Dyvec,1,mv*nv));
GS=sparse(eye(mv*nv).*repmat(Svec,1,mv*nv));

% Inicialización de las matrices solución
% Fuerza de los torbellinos de fronteras
Gammab=zeros(mv*nv,ntimes);
% Derivada en tiempo de las fuerzas de los torbellinos de fronteras
Gammabdot=zeros(mv*nv,ntimes);
% Fuerzas de los torbellinos de la estela
Gammaw=zeros(mw*nv,1);
Gammawt=zeros(mw*nv,ntimes);
% Distribución de presiones
p=zeros(mv*nv,ntimes);
% Distribución de la sustentación
l=zeros(mv*nv,ntimes);
% Distribución del coeficiente de sustentación
c1=zeros(mv*nv,ntimes);
% Matriz de superficies para el calculo de p
Svecmat=zeros(mv*nv,ntimes);

% Inicio del bucle temporal: calculo de las presiones y la sustentacion
for it=1:ntimes
    if it > 1
        % Propagación de la estela
        Gammaw=Pb*Gammab(:,it-1)+Pw*Gammaw;
        Gammawt(:,it)=Gammaw;
    end
    % Cálculo de la vorticidad de las fronteras
    Gammab(:,it)=Ab\(-(Usalto)*sin(alpha)*nvec(:,3)-Aw*Gammaw);
    % Cálculo de la derivada en el tiempo de la vorticidad de las fronteras
    if it > 1
        Gammabdot(:,it)=(Gammab(:,it)-Gammab(:,it-1))/dt;
    else
        Gammabdot(:,1)=0;
```



```
end
% Calculo de la distribucion de la sustentacion
l(:,it)=(rho*(Usalto)*cos(alpha)*Gy*Gammab(:,it)+...
    rho*GS*Gammabdot(:,it))*cos(alpha);
% Calculo de la distribucion de presiones
Svecmat(:,it)=Svec(:,);
p(:,it)=l(:,it)./(Svecmat(:,it));
end

% Sustentacion total
L=sum(l,1);
% Coeficiente de sustentacion
Stotalala=sum(sum(S));
CL=L/(1/2*rho*(Usalto)^2*Stotalala);

% Representacion del coeficiente de sustentacion total
figure(1)
plot(ti,CL,'color','black','LineWidth',2);
xlabel('t(s)')
ylabel('CL')
title(['Coeficiente de sustentación total, CL(x,y,t), (mv = ',...
    num2str(mv),', nv = ',num2str(nv), ')'])
grid

% Representacion de la última distribucion de la sustentacion
figure(2)
mesh(xp,yp,zp);
hold on;
% Sustentacion ultimo instante temporal
lend=reshape(l(:,end),nv,mv)';
surf(xc,yc,lend);
xlabel('Cuerda (metros)')
ylabel('Envergadura (metros)')
zlabel('l(x,y) (Newton)')
title(['Distribución de la sustentación en t_f_i_n_a_l, l(x,y), (mv = ',...
    num2str(mv),', nv = ',num2str(nv), ')'])
grid on
colorbar

% Representacion de la última distribucion de presiones
figure(3)
mesh(xp,yp,zp);
hold on
% Presion ultimo instante temporal
pend=reshape(p(:,end),nv,mv)';
h=surf(xc,yc,pend);
xlabel('Cuerda (metros)')
ylabel('Envergadura (metros)')
zlabel('p(x,y) (Newton/m^2)')
title(['Distribución de la presion en t_f_i_n_a_l, p(x,y), (nx = ',...
    num2str(mv),', ny = ',num2str(nv), ')'])
grid on
colorbar
```



```
function [CF,CR,IF,IR,DF,DR]= EsquinasAla(LF,LR,b,cr)
% CF: Coordenadas Centro - Frontal
% CR: Coordenadas Centro - Posterior
% IF: Coordenadas Izquierdo - Frontal
% IR: Coordenadas Izquierdo - Posterior
% DF: Coordenadas Derecho - Frontal
% DR: Coordenadas Derecho - Posterior

% Transformacion de angulos de flechas en grados a radianes
LFrad = LF * pi/180;
LRrad = LR * pi/180;
% Cuerda en la punta de ala
ct = cr - (b/2)*(tan(LFrad) - tan(LRrad));

% Coordenadas de las esquinas
% "C": Central
% "I": Izquierdo
% "D": Derecho
% "F": Frontal (ataque ala)
% "R": Posterior (salida ala)

% Coordenadas cuerda central
CF = [ 0 , 0 ];
CR = [ cr , 0 ];
% Coordenadas cuerda extremo izquierdo(I)
IF = [ (b/2)*tan(LFrad) , -b/2 ];
IR = [ (b/2)*tan(LFrad) + ct , -b/2 ];
% Coordenadas cuerda extremo derecho (D)
DF = [ (b/2)*tan(LFrad) , +b/2 ];
DR = [ (b/2)*tan(LFrad) + ct , +b/2 ];
```

```
function [R] = CoordenadasPuntoInterior(xi,eta,LF,LR,b,cr)

% R: Coordenadas R(x,y) del punto
% xi: Coordenada 'x' adimensional con la cuerda
% eta: Coordenada 'y' adimensional con la cuerda
% LF: Ángulo de flecha frontal en grados (borde ataque)
% LR: Ángulo de flecha posterior en grados (borde salida)
% b: Envergadura en metros
% cr: Cuerda en el encastre en metros

% eta = 2y/b : eta=0 (centro),
%           eta=1 (punta semi-ala derecha),
%           eta=-1 (punta semi-ala izquierda)
%           eta<0 (el punto se encuentra en el semi-ala izquierda)
%           eta>0 (el punto se encuentra en el semi-ala derecha)
%
% El punto en cuestión se encuentra a 100xi(%) del borde de ataque
% para el valor correspondiente eta.
%
%           xi=0 (punto situado en el borde de ataque)
```



```
% xi=0.25 (punto situado en el c.a.)
% xi=1     (punto situado en el borde de salida)

% Obtenemos los puntos de las esquinas
[CF,CR,IF,IR,DF,DR]=EsquinasAla(LF,LR,b,cr);

if eta > 0
    % CASO 1: PUNTO EN SEMI-ALA DERECHA, CUANDO eta > 0
    R = (1 - eta) * xi * CR + ...
        eta * xi * DR + ...
        eta * (1 - xi) * DF + ...
        (1-eta)*(1-xi) * CF;
elseif eta < 0
    % CASO 2: PUNTO EN SEMI-ALA IZQUIERDA, CUANDO eta < 0
    R = (1 + eta) * xi * CR + ...
        - eta * xi * IR + ...
        - eta * (1 - xi) * IF + ...
        (1+eta)*(1-xi) * CF;
else % eta = 0
    % CASO 3: PUNTO EN EL EJE X, CUANDO eta = 0
    R = xi * CR + (1 - xi) * CF;
end

end
```

```
function [fila,columna] = FilaColumnaNodo(k,py)

% fila:   Fila del nodo
% columna: Columna del nodo
% k:       Numeracion del nodo
% py:      Número de nodos en dirección de la envergadura

% Obtenemos los números naturales A y B tales que "k = A * py + B"
A = floor(k/py); % Parte entera
B = k - A * py;

% Obtenemos la fila y la columna
if B == 0
    fila = A;
    columna = py;
else
    fila = A + 1;
    columna = B;
end
```

```
function [Mn] = MatrizNodos(nx,ny,LF,LR,b,cr)

% nx: Número de paneles en dirección x
% ny: Número de paneles en dirección y
% LF: Ángulo de flecha frontal en grados (borde ataque)
% LR: Ángulo de flecha posterior en grados (borde salida)
% b: Envergadura
% cr: Cuerda en la raíz
```



```
% La matriz Mn numera los nodos y asocia a cada uno sus coordenadas y otros
% datos
% Número de nodos en total
% Puntos (nodos) en dirección x
px = nx + 1;
% Puntos (nodos) en dirección y
py = ny + 1;
% En total "P" puntos o nodos
P = px * py ;

% El nodo "1" es el situado en la esquina caracterizada por
%     - Si el ala es recta y rectangular el que que tiene "y" más negativo
%     - Si el ala es recta y rectangular el que que tiene "x" más positivo
%
% Con el eje "x" hacia abajo y el eje "y" hacia la derecha es el de la
% esquina inferior-izquierda.
%
% Los nodos se van numerando de izquierda a derecha y de abajo a arriba
% (y con ese criterio se numeran las columnas y filas (ver croquis)
%
% Ejemplo nx = 3, ny = 4, N=3*4 = 12
%         px = 4, py = 5, P=4*5 = 20
%
% Matriz de nodos (numeración k=1,...20)
% Matriz de paneles [1]...[N=12]
%
%     f=4    16-----17-----18-----19-----20----- (y)
%           |      [9]    |    [10]   |    [11]   |    [12]   |
%     f=3    11-----12-----13-----14-----15
%           |      [5]    |    [6]    |    [7]    |    [8]    |
%     f=2    6-----7-----8-----9-----10
%           |      [1]    |    [2]    |    [3]    |    [4]    |
%     f=1    1-----2-----3-----4-----5
%           c=1        c=2        c=3        c=4        c=5
%                           |
%                           |
%                           |
%                           (x)

% Configuración matriz P
%
% columna 1: Numeración del nodo (k)
% columna 2: fila del panel en la "matriz" de paneles (f)
% columna 3: columna del panel en la "matriz" de paneles (c)
% columna 4: Coordenada x del nodo k
% columna 5: Coordenada y del nodo k

%
% Inicialización matriz de paneles
Mn = zeros(P,5);
% Numeración de paneles
Mn(:,1) = 1:P;
for k=1:P
    % Fila y columna
    [f,c] = FilaColumnaNodo(k,py);
    % Asignación a las columnas de P
    Mn(k,2) = f;
    Mn(k,3) = c;
```



```
% Coordenadas adimensionales del punto
xi = 1 - (f - 1)/nx;
eta = 2*(c - 1)/ny - 1;
% Cálculo de las coordenadas del punto
R = CoordenadasPuntoInterior(xi,eta,LF,LR,b,cr);
x = R(1);
y = R(2);
Mn(k,4) = x;
Mn(k,5) = y;
end
end
```

```
function uvw=segmentotorbellino(x,y,z,x1,y1,z1,x2,y2,z2)

% Cálculo de la velocidad inducida (u,v,w) en un punto (x,y,z) debido a un
% segmento de torbellino de coordenadas (x1,y1,z1) a (x2,y2,z2) y fuerza
% la unidad.

% Distancia entre (x,y,z) y (x1,y1,z1)
dist1=[x y z]-[x1 y1 z1];
% Distancia entre (x,y,z) y (x1,y1,z1)
dist2=[x y z]-[x2 y2 z2];
% Cálculo del producto vectorial
crossprod=cross(dist1,dist2);
% Cálculo de la fracción
fraction=crossprod/(crossprod*crossprod');
% Cálculo del producto escalar
dotprod=dot(([x2 y2 z2]-[x1 y1 z1]),(dist1/sqrt(dist1*dist1')-dist2/sqrt(dist2*dist2')));
% Cálculo de la influencia total
uvw=1/4/pi*fraction*dotprod;

end
```

```
% Solucion para la ecuación de la línea de sustentacion de la teoria del ala larga de Prandtl
para un ala rectangular. validación del UVLM

% Alargamiento
AR = 12;
% Relacion entre la cuerda en el encastre y en la punta lambda=cr/ct;
lambda = 1;
% Cuerda en el encastre
cr = 2/AR/(1+lambda);
% Angulo de ataque
alpha = (5)*(pi/180);

% Resolucion de la ecuacion de la linea de sustentacion. Metodo de Glauert
r = 8;
theta = (1:(r-1))*pi/r;
c = cr*(1-(1-lambda)*(abs(cos(theta)))); 
r = length(c)+1;
j = 1:(r - 1);
S = sin (j'*j*pi/r);
B = bsxfun (@plus, 2/pi ./ c, 1 ./ S(:,1) * j) .* S;
A = B\ones(r-1,1);
```



```
% Coeficiente de sustentacion total  
CL=pi*AR*A(1)*alpha;
```





Apéndice D

Código aeroelástico del flameo

```
% NOMBRE: FLAMEO3DDOMINIOFRECUENCIA.m
% CALCULO DE LA ECUACION AEROELASTICA Y CALCULO DE LAS CONDICIONES DE FLAMEO Y VELOCIDAD DE
DIVERGENCIA ESTATICA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA PARA UN ALA SEMIEMPOTRADA
% Parámetros de entrada
% Cuerda del ala en voladizo
c=0.2;
% Envergadura del ala en voladizo
s=0.6;
% Espesor del ala en voladizo
h=0.001;
% Densidad del aluminio
rhom=2770;
% Módulo de Young del aluminio
Eyoungs=68.7e9;
% Coeficiente de Poisson del aluminio
nu=0.33;
% Rígidez del ala
Dstiff=Eyoungs*h^3/12/(1-nu^2);
% Densidad del aire
rho=1.225;

% Malla de integración numérica
% Número de puntos en la dirección de la cuerda y de la envergadura
npoints=21;
% Mallado en la dirección de la cuerda
x=linspace(0,1,npoints);
% Mallado en la dirección de la envergadura
y=linspace(0,1,npoints);
% Incremento en la dirección de la cuerda
dx=x(2)-x(1);
% Incremento en la dirección de la envergadura
dy=y(2)-y(1);
% Creación de las matrices de malla
[X,Y]=meshgrid(x,y);
% La columna de X es igual a x y todas las columnas son iguales
X=X';
% La fila de Y es igual a y y todas las filas son iguales
Y=Y';

% Selección de modos fuera del plano
% Número de modos en la dirección de la cuerda
xmodos=4;
% Número de modos en la dirección de la envergadura
ymodos=4;
% Número de modos totales
nmodos_out=xmodos*ymodos;
% Cálculo de las formas modales.
[w,wxx,wyy,wxy,wx,wy]=formasmodales(xmodos,ymodos,nmodos_out,X,Y);
```



```
% No se han calculado los modos en el plano puesto que no aparecen
% al linealizar las ecuaciones.

% Dimensionamos las formas modales de las derivadas
wx=wx/c;
wy=wy/s;
wxx=wxx/c^2;
wyy=wyy/s^2;
wxy=wxy/c/s;

% Dimensionamos la malla numerica
X=X*c;
Y=Y*s;
dx=dx*c;
dy=dy*s;

% Solo usaremos los modos fuera del plano
nmodos=nmodos_out;

% Establecemos las ecuaciones del movimiento
% Establecer la matriz de masa estructural
A=zeros(nmodos);
for i=1:nmodos
    for j=1:nmodos
        % Calculo del integrando
        integrand=rhom*h*squeeze(w(i,:,:).*w(j,:,:));
        % Integracion numerica (regla de Simpson)
        A(i,j)=simpson2D(integrand,dx,dy);
    end
end

% Establecer la matriz de rigidez estructural
E=zeros(nmodos);
for i=1:nmodos
    for j=1:nmodos
        % Calculo del integrando
        integrand=Dstiff*squeeze(wxx(i,:,:).*wxx(j,:,:)+...
            wyy(i,:,:).*wyj,:,:)+nu*(wxx(i,:,:).*wyj,:,:+...
            wyj,:,:.*wxx(j,:,:))+2*(1-nu)*wxy(i,:,:).*wxy(j,:,:));
        % Integracion numerica (regla de Simpson nuevamente)
        E(i,j)=simpson2D(integrand,dx,dy);
    end
end

% Método del UVLM
% Número de paneles en la dirección de la cuerda
mv=30;
% Número de paneles en la dirección de la envergadura
nv=30;

% Modelado de la aerodinámica del ala
% El doble de la envergadura del ala en voladizo
b=2*s;
% Mitad de la cuerda del ala en voladizo
cm=c/2;
% Relación de aspecto del ala aerodinámica
AR=b/c;
% Ángulo de ataque (Debe ser cero. No está implementado el método para
```



```
% otros angulos de ataque)
alpha=0*pi/180;
% Longitud de la estela
cw=10*c; % Multiplo de la longitud de la cuerda del ala

% calculo de los puntos de las esquinas de los paneles del ala
% Cálculo de los nodos del ala
Nodosala = MatrizNodos(mv,nv,0,0,b,c);
% Coordenadas de los nodos en la dirección de la envergadura
nodosy=Nodosala(:,5)';
% Matriz de coordenadas de los nodos en la dirección de la envergadura
yp=vec2mat(nodosy,nv+1);
% Coordenadas de los nodos en la dirección de la cuerda
nodosx=Nodosala(:,4)';
% Matriz de coordenadas de los nodos en la dirección de la cuerda
xp = vec2mat(fliplr(nodosx),nv+1);
% Coordenadas de los nodos en la dirección perpendicular al ala
zp=zeros(mv+1,nv+1);

% calculo de las esquinas de anillos de torbellinos del ala
xv = zeros(mv+1,nv+1);
yv = zeros(mv+1,nv+1);
zv = zeros(mv+1,nv+1);
for j=1:nv+1
    for i=1:mv
        % Los anillos de torbellinos estan desplazados corriente abajo a un
        % cuarto de su cuerda
        xv(i,j)= xp(i,j)+(xp(i+1,j)-xp(i,j))/4;
        yv(i,j)= yp(i,j);
        zv(i,j)= zp(i,j)+(zp(i+1,j)-zp(i,j))/4;
    end
    % Torbellino de salida de los anillos de torbellino del borde de fuga
    xv(mv+1,j) = xp(mv+1,j)+ 0.25*c/mv;
    yv(mv+1,j) = yp(mv+1,j);
    zv(mv+1,j)= zp(mv+1,j);
end

% Calculo de las esquinas de los anillos de torbellinos de la estela
% Numero de anillos de torbellino en la direccion de la cuerda
mw=cw*mv/c;
% Calculo de los nodos de la estela
Nodosestela = MatrizNodos(mw,nv,0,0,b,cw);
% Posicionamiento de la estela en la geometria global
wakepoints=min(xv(mv+1,:))+Nodosestela(:,4)';
% Coordenada x más cercana al ala
xminestela=min(wakepoints);
% Diferencia en x ala-estela
difxalaestela=xminestela-min(xv(mv+1,:));
% Coordenadas en x de la estela unida al ala
wakepoints=wakepoints-difxalaestela;
% Coordenadas de los nodos, direccion de la cuerda
xw = vec2mat(fliplr(wakepoints),nv+1);
% Coordenadas de los nodos, direccion de la envergadura
yw=repmat(yp(1,:),mw+1,1);
% Coordenadas de los nodos, direccion perpendicular al plano de la estela
zw=zeros(mw+1,nv+1);

% Representación gráfica del ala aerodinamica y de la estela
```



```
figure(100)
hmesh1=mesh(xp,yp,zp,'Edgecolor','b','FaceColor','none');
hold on
hmesh2=mesh(xv,yv,zv,'Edgecolor','g','FaceColor','none');
hmesh3=mesh(xw(1:2*mv,:),yw(1:2*mv,:),zw(1:2*mv,:),'Edgecolor','r','FaceColor','none');
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
ylim([-b/2 b/2])
legend([hmesh1(1) hmesh2(1) hmesh3(1)],'Paneles Geometricos','Anillos del ala','Anillos de la
estela')

% Calculo de los vectores normales
% El ala es siempre plana. Vectores normales apuntan en la direccion z
nx = zeros(mv,nv);
ny = zeros(mv,nv);
nz = ones(mv,nv);
% Dimensionamos nz en una matriz (mv*nv,3)
Nall=[reshape(nx',mv*nv,1) reshape(ny',mv*nv,1) reshape(nz',mv*nv,1)]';

% Puntos de control y areas de los anillos de torbellinos
% Inicialización de vectores
% Longitud de los anillos de torbellinos en la direccion de la cuerda
Dx = zeros(mv,nv);
% Longitud de los anillos de torbellinos en la direccion de la envergadura
Dy = zeros(mv,nv);
% Coordenadas de los puntos de control
xc = zeros(mv,nv);
yc = zeros(mv,nv);
zc = zeros(mv,nv);

for i=1:mv
    for j=1:nv
        % Calculamos las posiciones de los puntos de control
        dxv = (xp(i+1,j) - xp(i,j)+xp(i+1,j+1) - xp(i,j+1))/2;
        dzv = (zp(i+1,j) - zp(i,j)+zp(i+1,j+1) - zp(i,j+1))/2;
        xc(i,j) = (xp(i,j)+xp(i+1,j)+xp(i,j+1)+xp(i+1,j+1))/4+dxv/4;
        yc(i,j) = (yp(i,j)+yp(i+1,j)+yp(i,j+1)+yp(i+1,j+1))/4;
        zc(i,j) = (zp(i,j)+zp(i+1,j)+zp(i,j+1)+zp(i+1,j+1))/4+dzv/4;

        % Calculamos las longitudes de los torbellinos de frontera
        % Dx y Dy deben ser simetricos respecto a la linea central del ala
        if j <= nv/2
            Dx(i,j)=sqrt((xv(i+1,j)-xv(i,j))^2+ ...
                (yv(i+1,j)-yv(i,j))^2+ ...
                (zv(i+1,j)-zv(i,j))^2);

            Dy(i,j)=sqrt((xv(i,j+1)-xv(i,j))^2+ ...
                (yv(i,j+1)-yv(i,j))^2+ ...
                (zv(i,j+1)-zv(i,j))^2);
        else
            Dx(i,j)=sqrt((xv(i+1,j+1)-xv(i,j+1))^2+ ...
                (yv(i+1,j+1)-yv(i,j+1))^2+ ...
                (zv(i+1,j+1)-zv(i,j+1))^2);

            Dy(i,j)=sqrt((xv(i,j)-xv(i,j+1))^2+ ...
                (yv(i,j)-yv(i,j+1))^2+ ...
                (zv(i,j)-zv(i,j+1))^2);
        end
    end
end
```



```
end

end
end

% Areas de los anillos de torbellinos
Sarea=Dx.*Dy;
% Redimensionamos todas las matrices mv x nv en vectores mv*nv x 1
nvec=[reshape(nx',mv*nv,1) reshape(ny',mv*nv,1) reshape(nz',mv*nv,1)];
Dyvec=reshape(Dy',mv*nv,1);
Svec=reshape(Sarea',mv*nv,1);

% Calculamos la influencia de los anillos del ala en el ala
disp('Calculando la matriz de coeficientes de influencia del ala')
% Inicializamos la matriz de coeficientes de influencia del ala
Ab=zeros(mv*nv,mv*nv);
for ic=1:mv
    for jc=1:nv
        for i=1:mv
            for j=1:nv
                % Velocidad inducida por el primer segmento de torbellino
                uvw1=segmentotorbellino(xc(ic,jc),yc(ic,jc),zc(ic,jc),...
                    xv(i,j),yv(i,j),zv(i,j),xv(i,j+1),yv(i,j+1),zv(i,j+1));
                % Velocidad inducida por el segundo segmento de torbellino
                uvw2=segmentotorbellino(xc(ic,jc),yc(ic,jc),zc(ic,jc),...
                    xv(i,j+1),yv(i,j+1),zv(i,j+1),xv(i+1,j+1),yv(i+1,j+1),...
                    zv(i+1,j+1));
                % Velocidad inducida por el tercer segmento de torbellino
                uvw3=segmentotorbellino(xc(ic,jc),yc(ic,jc),zc(ic,jc),...
                    xv(i+1,j+1),yv(i+1,j+1),zv(i+1,j+1),xv(i+1,j),yv(i+1,j),...
                    zv(i+1,j));
                % Velocidad inducida por el cuarto segmento de torbellino
                uvw4=segmentotorbellino(xc(ic,jc),yc(ic,jc),zc(ic,jc),...
                    xv(i+1,j),yv(i+1,j),zv(i+1,j),xv(i,j),yv(i,j),zv(i,j));
                % Suma de todas las velocidades inducidas
                uvw=uvw1+uvw2+uvw3+uvw4;
                % Calculamos los coeficientes de influencia
                Ab((ic-1)*nv+jc,(i-1)*nv+j)=dot(uvw,nvec((ic-1)*nv+jc,:));
            end
        end
    end
end

% Calculo de la influencia de los anillos de la estela en el ala
disp('Calculando la matriz de coeficientes de influencia de la estela')
% Inicializamos la matriz de coeficientes de influencia de la estela
% Influencia en la direccion normal
Aw = zeros(mv*nv,mw*nv);
for ic=1:mw
    for jc=1:nv
        for i=1:mw
            for j=1:nv
                % Velocidad inducida por el primer segmento de torbellino
                uvw1=segmentotorbellino(xc(ic,jc),yc(ic,jc),zc(ic,jc),...
                    xw(i,j),yw(i,j),zw(i,j),xw(i,j+1),yw(i,j+1),zw(i,j+1));
                % Velocidad inducida por el segundo segmento de torbellino
                uvw2=segmentotorbellino(xc(ic,jc),yc(ic,jc),zc(ic,jc),...
                    xw(i,j+1),yw(i,j+1),zw(i,j+1),xw(i+1,j+1),yw(i+1,j+1),...
```



```
        zw(i+1,j+1));
    % velocidad inducida por el tercer segmento de torbellino
    uvw3=segmentotorbellino(xc(ic,jc),yc(ic,jc),zc(ic,jc),...
        xw(i+1,j+1),yw(i+1,j+1),zw(i+1,j+1),xw(i+1,j),yw(i+1,j),...
        zw(i+1,j));
    % velocidad inducida por el cuarto segmento de torbellino
    uvw4=segmentotorbellino(xc(ic,jc),yc(ic,jc),zc(ic,jc),...
        xw(i+1,j),yw(i+1,j),zw(i+1,j),xw(i,j),yw(i,j),zw(i,j));
    % Suma de todas las velocidades inducidas
    uvw=uvw1+uvw2+uvw3+uvw4;
    % calculo del coeficiente de influencia
    Aw((ic-1)*nv+jc,(i-1)*nv+j)=dot(uvw,nvec((ic-1)*nv+jc,:));
end
end
end
end

% Matrices de propagacion de la estela
Pb=zeros(nv,(mv-1)*nv) eye(nv,nv);zeros((mw-1)*nv,(mv-1)*nv) ...
zeros((mw-1)*nv,nv)];
Pw=zeros(nv,(mw-1)*nv) zeros(nv,nv);eye((mw-1)*nv,(mw-1)*nv) ...
zeros((mw-1)*nv,nv)];
Pb=sparse(Pb);
Pw=sparse(Pw);

% Matrices de coeficientes para el calculo de la sustentacion
Gy=eye(mv*nv)+[zeros(nv,(mv-1)*nv) zeros(nv,nv);-eye((mv-1)*nv,....
(mv-1)*nv) zeros((mv-1)*nv,nv)];
Gy=sparse(Gy).*repmat(Dyvec,1,mv*nv));
GS=sparse(eye(mv*nv).*repmat(Svec,1,mv*nv));

% Calculo de las matrices modales en los puntos de control
[wc,~,~,~,wcx]=formasmodales(xmodos,ymodos,nmodos,xc(:,nv/2+1:nv)/c,....
yc(:,nv/2+1:nv)/s);
% Dimensionalizar las derivadas de las formas modales
wcx=wcx/c;

% Reflejar las formas modales (tecnica espejo)
% Inicializar los vectores de las formas modales de ambos lados
w2=zeros(nmodos,mv,nv);
wx2=zeros(nmodos,mv,nv);
for i=1:nmodos
    w2(i,:,:)=[fliplr(squeeze(wc(i,:,:))) squeeze(wc(i,:,:))];
    wx2(i,:,:)=[fliplr(squeeze(wcx(i,:,:))) squeeze(wcx(i,:,:))];
end

% Representacion de todas las formas modales determinadas
for i=1:nmodos
    figure(i)
    hplot=mesh(xc,yc,squeeze(w2(i,:,:)));
    set(hplot,'EdgeColor',[ 0 0 1])
    xlabel('x')
    ylabel('y')
    zlabel(['w_ ' num2str(i) '(x,y)'])
    xlim([-0.6 0.6])
    ylim([-0.6 0.6])
    zlim([-20 20])
    view(-30,42)
```



```
end

% Matrices de transformacion modal
% Redimensionar w2 y wx2 en matrices de estructura (mv*nv,nmodos)
wall=zeros(mv*nv,nmodos);
wxall=zeros(mv*nv,nmodos);
for i=1:nmodos
    wall(:,i)=reshape(squeeze(w2(i,:,:))',mv*nv,1);
    wxall(:,i)=reshape(squeeze(wx2(i,:,:))',mv*nv,1);
end

% Calculo de las matrices PI y PC
% Matric Pe(0)
PI=repmat(eye(nv),mw,1);
PC=sparse([zeros(nv,(mv-1)*nv) eye(nv)]);

% Cálculo de L0
L0=(Gy*cos(alpha))*((Ab+Aw*PI*PC)\Nall(:,3));

% Indices del elemento de L0 y pared perteneciente a la semiala derecha
halfind=zeros(1,mv*nv/2);
for i=1:mv
    halfind((i-1)*nv/2+1:i*nv/2)=(i-1)*nv+(nv/2+1:nv);
end
% Cálculo de Q0
Q0=(L0(halfind).'*wall(halfind,:)).';

% Cálculo de la velocidad de flameo
% Incremento para el cálculo numérico del Jacobiano
dU=1e-8;
% Hipótesis inicial de la velocidad de flameo
U=20;
% Hipótesis inicial de la frecuencia reducida de flameo
k=0.2;
% Cálculo de la velocidad de flameo utilizando el método de Newton-Raphson
cond=0;
while cond == 0
    % Cálculo del determinante del flameo
    [~,FF]=MFAG(k,mv,nv,mw,cm,Gy,GS,Ab,Aw,PC,wxall,wall,A,E,rho,U, ...
    halfind,alpha,Q0);
    % Evaluación numérica del Jacobiano
    Jac=zeros(2,2);
    % Con respecto a U
    U=U+dU;
    [~,FF1]=MFAG(k,mv,nv,mw,cm,Gy,GS,Ab,Aw,PC,wxall,wall,A,E,rho,U, ...
    halfind,alpha,Q0);
    Jac(:,1)=(FF1-FF)/dU;
    U=U-dU;
    % Con respecto a k
    k=k+dU;
    [~,FF1]=MFAG(k,mv,nv,mw,cm,Gy,GS,Ab,Aw,PC,wxall,wall,A,E,rho,U, ...
    halfind,alpha,Q0);
    Jac(:,2)=(FF1-FF)/dU;
    k=k-dU;
    % Resolución del sistema
    solma=-Jac\FF;
    % Cálculo del criterio de convergencia
    crit=sqrt(solma'*solma);
```



Código aeroelástico del flameo

```
% Actualización de la velocidad aerodinámica
U=U+solma(1);
% Actualización de la frecuencia reducida
k=k+solma(2);

% Prueba de convergencia
if crit < 1e-12
    cond=1;
end
end

% Velocidad aerodinámica de flameo
uflut=U;
% Frecuencia reducida de flameo
kflut=k;
% Frecuencia de flameo en rad/s
omegaflut=k*U/cm;
disp('Velocidad de Flameo (m/s)')
disp(uflut)
disp('Frecuencia de Flameo(Hz)')
disp(omegaflut/2/pi)

% Hipótesis inicial para la velocidad aerodinámica de divergencia
U=20;
% Cálculo de la matriz de fuerza aerodinámica generalizada, frecuencia cero
Q10=MFAG(0,mv,nv,mw,cm,Gy,GS,Ab,Aw,Pc,wxall,wall,A,E,rho,U, ...
halfind,alpha,Q0);
% calculo de Q0S para el determinante
if alpha~=0
    % Inicializamos la matriz Q0S
    Q0S=zeros(length(Q0),length(Q0));
    % Rellenamos la matriz Q0S con las columnas de Q0
    for i=1:length(Q0)
        Q0S(:,i)=Q0;
    end
end
% Cálculo de la velocidad de divergencia utilizando el método de
% Newton-Raphson
cond=0;
while cond == 0
    if alpha==0
        % Cálculo de la función objetivo
        DD=det(E-rho*u^2*Q10(:,:,1));
        % Evaluación del Jacobiano numéricamente
        U=U+du;
        DD1=det(E-rho*u^2*Q10(:,:,1));
        Jac=(DD1-DD)/du;
        U=U-du;

        % Resolución del sistema de Newton-Raphson
        solma=-Jac\DD;
        % Cálculo del criterio de convergencia
        crit=sqrt(solma'*solma);
        % Actualización de la velocidad aerodinámica
        U=U+solma;

        % Prueba de convergencia
        if crit < 1e-12
            cond=1;
        end
    end
end
```



```
end
else
    % Cálculo de la función objetivo
    DD=det((E-rho*u^2*Q10(:, :, 1))./(-rho*u^2*q0s*sin(alpha)))-1;
    % Evaluación del Jacobiano numéricamente
    U=U+dU;
    DD1=det((E-rho*u^2*Q10(:, :, 1))./(-rho*u^2*q0s*sin(alpha)))-1;
    Jac=(DD1-DD)/dU;
    U=U-dU;

    % Resolución del sistema de Newton-Raphson
    solma=-Jac\DD;
    % Cálculo del criterio de convergencia
    crit=sqrt(solma'*solma);
    % Actualización de la velocidad aerodinámica
    U=U+solma;

    % Prueba de convergencia
    if crit < 1e-12
        cond=1;
    end
end
end

% Velocidad aerodinámica de divergencia estática
Udiv=U;
disp('velocidad de divergencia estatica (m/s)')
disp(Udiv)
```

```
function [Q1,FF]=MFAG(k,mv,nv,mw,cm,Gy,GS,Ab,Aw,Pc,wxall,wall,A,E,rho,U,halfind,[],[])
% Cálculo de la matriz de fuerzas aerodinámicas generalizada para un ala rectangular usando el
% metodo del vortex Lattice. Tambien calcula el determinante del flameo.
% Angulo de ataque debe ser cero
alpha=0;
% Calculo de la matriz Pe
Pe=sparse(kron(exp(-1j*2*k/mv*(1:mw)'),eye(nv)));
% Calculo de la matriz L1
L1=(Gy*cos(alpha)+1j*k/cm*GS)*((Ab+Aw*Pe*Pc)\(wxall+1j*k/cm*wall));
% Calculo de la matriz Q1
Q1=(L1(halfind,:).*wall(halfind,:));
% Calculo de la matriz completa aeroelástica
aeromat=-(k*U/cm)^2*A+E-rho*u^2*Q1;
% Calculo del determinante de la matriz aeroelástica
flut_det=det(aeromat);
% Calculo de la función objetivo
FF=[real(flut_det);imag(flut_det)];
end
```



```
% NOMBRE: FLAMEODOMINIODELTIEMPO_CURVASFLAMEO.m
% CALCULA LAS MATRICES LINEALES DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE UN ALA
% SEMIEMPOTRADA EN FLUJO INCOMPRESIBLE Y LA FUNCION DE APROXIMACION RACIONAL
% RFA. DOMINIO DEL TIEMPO. CONDICIONES DE FLAMEO Y CURVAS DE FLAMEO

FLAMEO3DDOMINIOFRECUENCIA

% Seleccion de los valores de frecuencias reducidas
kvec=[0 0.001 0.01 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.7 1.0]';
% Creacion de la matriz de fuerza aerodinamica generalizada para todas las
% frecuencias reducidas
Qmat=zeros(nmodos,nmodos,length(kvec));
for ik=1:length(kvec)
    k=kvec(ik);
    Qmat(:, :, ik)=MFAG(k,mv,nv,mw,cm,Gy,GS,Ab,Aw,Pc,wxall,wall,A,E,rho,U, ...
        halfind,alpha,Q0);
end

% Seleccion del numero de retardos aerodinamicos
n1=2;
% calculo de los coeficientes de los retardos
gammai=1.7*max(kvec)*((1:n1)/(n1+1)).^2;
% Funcion de aproximacion racional de fuerza aerodinamica generalizada
[err,S,Qbar]=RFA(nmodos,n1,gammai,Qmat,kvec);
% Numero de estados totales
nstates=(2+n1)*nmodos;
% calculo de la estabilidad del sistema lineal para varias velocidades
% aerodinamicas
% Seleccion del rango de velocidades aerodinamicas
uvec=linspace(1,40,401);
% Numero de velocidades aerodinamicas
nu=length(uvec);
% Inicializacion del vector de autovalores
eigvals=zeros((2+n1)*nmodos,nu);
% Inicializacion del vector de frecuencias reducidas
omegaRFA=zeros((2+n1)*nmodos,nu);
% Inicializacion del vector de relaciones de amortiguamiento
dampRFA=zeros((2+n1)*nmodos,nu);

for iU=1:nu
    % Calculo de la matriz del sistema
    H=FlameoRFA_linmat(uvec(iU),rho,cm,A,E,S,Q0,gammai,nmodos,n1);
    % Calculo de los autovalores del sistema
    eigvals(:, iU)=eig(H);
    % Ordenacion de los autovalores
    [dum,I]=sort(imag(eigvals(:, iU)), 'descend');
    eigvals(:, iU)=eigvals(I, iU);
end

figure(1)
hplot=plot(uvec,abs(imag(eigvals)./2./pi),'k.',uflut,omegaflut/2/pi,'mo',...
    'linewidth',2,'markersize',4);
xlabel('U')
ylabel('\Im(\lambda)')
title('Diagrama U-\Im(\lambda)')
grid on;
```



```
ylim([0 100])
xlim(uvec([1 end]))
string3=['\omega_F= ',num2str(round(omegaflut/2/pi,2))];
legend(hplot([1 (n1+2)*nmodos+1]),{'\lambda',string3})

figure(2)
hplot=plot(uvec,real(eigvals),'k.',uflut,0,'mo',udiv,0,'bd', ...
    'linewidth',2,'markersize',4);
set(hplot((n1+2)*nmodos+2),'color',[0 0 1])
xlabel('U')
ylabel('\Re(\lambda)')
title('Diagrama U-\Re(\lambda)')
grid on;
ylim([-10 2])
xlim(uvec([1 end]))
string1=['U_F= ',num2str(round(uflut,1))];
string2=['U_D= ',num2str(round(udiv,1))];
legend(hplot([1 (n1+2)*nmodos+1 (n1+2)*nmodos+2]),...
    {'\lambda',string1,string2})

figure(3)
hplot=plot(uvec,abs((eigvals)./2./pi),'k.',uflut,omegaflut/2/pi,'mo',...
    'linewidth',2,'markersize',4);
xlabel('U')
ylabel('\omega_n(Hz)')
title('Curva de flameo U- \omega_n')
grid on;
ylim([0 100])
xlim(uvec([1 end]))
string3=['\omega_F= ',num2str(round(omegaflut/2/pi,2))];
legend(hplot([1 (n1+2)*nmodos+1]),{'\lambda',string3})

figure(4)
hplot=plot(uvec,-real(eigvals)./(abs((eigvals)./2./pi)),'k.',uflut,0,...
    'mo',udiv,0,'bd', ...
    'linewidth',2,'markersize',4);
set(hplot((n1+2)*nmodos+2),'color',[0 0 1])
xlabel('U')
ylabel('\zeta')
title('Curva de flameo U- \zeta')
grid on;
ylim([-2 2])
xlim(uvec([1 end]))
string1=['U_F= ',num2str(round(uflut,1))];
string2=['U_D= ',num2str(round(udiv,1))];
legend(hplot([1 (n1+2)*nmodos+1 (n1+2)*nmodos+2]),...
    {'\lambda',string1,string2})
```

```
function [err,S,Qbar]=RFA(nmodos,n1,gammai,Qmat,kvec)
% Cálculo de la función racional de aproximación de la matriz de fuerzas
% aerodinámicas generalizadas.

% Número de frecuencias reducidas
nk=length(kvec);
```



```
% Inicialización de matrices de coeficientes para la función racional de
% aproximación
S=zeros(nmodos,nmodos,3+n1);
% Coeficiente constante
S(:,:,1)=Qmat(:,:,1);

% Configuración del ajuste de la curva. El ajuste se lleva a cabo para cada
% elemento de la matriz de fuerza aerodinámica generalizada por separado.
% Creación de la matriz del lado izquierdo. Esta matriz es la misma para
% todos los elementos de la matriz de fuerza aerodinámica generalizada.
LHS=zeros(nk,2+n1);
LHS(:,1:2)=[1i*kvec -kvec.^2];
for inl=1:n1
    LHS(:,2+inl)=1i*kvec./(1i*kvec+gammai(inl));
end
% Realizar el ajuste de la curva
for i=1:nmodos
    for j=1:nmodos
        % Creación del vector del lado derecho. Este vector tiene un valor
        % diferente para cada elemento de la matriz de fuerza aerodinámica
        % generalizada.
        RHS=squeeze(Qmat(i,j,:))-S(i,j,1);
        % Separación de la parte real e imaginaria
        solma=[real(LHS);imag(LHS)]\ [real(RHS);imag(RHS)];
        % Asignar valores para los elementos de la matriz de coeficientes de la RFA
        S(i,j,2)=solma(1);
        S(i,j,3)=solma(2);
        for inl=1:n1
            S(i,j,3+inl)=solma(2+inl);
        end
    end
end
% Cálculo de la matriz Q1 reconstruida
Qbar=zeros(nmodos,nmodos,nk);
for ik=1:nk
    % Aproximación de Roger
    Qbar(:,:,ik)=S(:,:,1)+S(:,:,2)*1i*kvec(ik)-S(:,:,3)*kvec(ik)^2;
    for inl=1:n1
        Qbar(:,:,ik)=Qbar(:,:,ik)+S(:,:,3+inl)*1i*kvec(ik)/(1i*kvec(ik)+gammai(inl));
    end
end
% Error de la curva de ajuste
Qvec=reshape(Qmat,nmodos*nmodos*nk,1);
Qbarvec=reshape(Qbar,nmodos*nmodos*nk,1);
err=1/nk*sum(abs(Qvec-Qbarvec).^2./max([abs(Qvec).^2 ones(nmodos*nmodos*nk,1)],[],2));
```

```
function [H,h0,Mbar]=FlameoRFA_linmat(U,rho,cm,A,E,S,Q0,gammai,nmodos,n1)
% calcula las matrices lineales de las ecuaciones del movimiento de primer orden
% de un ala en voladizo en flujo incompresible con la función de aproximación
% racional aerodinámica.

% Matriz total de masa
Mbar=A-rho*cm^2*S(:,:,3);
% Matriz total de amortiguamiento
Cbar=-rho*U*cm*S(:,:,2);
```



Código aeroelástico del flameo

```
% Matriz total de rigidez
Kbar=E-rho*U^2*S(:,:,1);

% Matrices de estados aerodinámicos
Sbar=zeros(nmodos,n1*nmodos);

for inl=1:n1
    Sbar(:,nmodos*(inl-1)+1:nmodos*inl)=-rho*U^2*S(:,:,3+inl);
end

% Ecuación de estado aerodinámico
ww0=zeros(n1*nmodos,2*nmodos);
ww1=zeros(n1*nmodos,n1*nmodos);

for inl=1:n1
    ww0(nmodos*(inl-1)+1:nmodos*inl,1:nmodos)=eye(nmodos);
    ww1(nmodos*(inl-1)+1:nmodos*inl,nmodos*(inl-1)+1:nmodos*inl)=-U*...
        gammai(inl)/cm*eye(nmodos);
end

% Matriz del sistema completo
H=[-Mbar\Cbar -Mbar\Kbar -Mbar\Sbar;
    eye(nmodos) zeros(nmodos,(n1+1)*nmodos);
    ww0 ww1];
% Matriz de constantes
h0=[-rho*U^2*(Mbar\Q0);zeros((1+n1)*nmodos,1)];
```

```
% NOMBRE: Sustentacionvoladizo.m
% CALCULO DE LA SUSTENTACION EN UN ALA RECTANGULAR DE ALUMINIO EN VOLADIZO. DOMINIO FRECUENCIA.

% Parámetros de entrada
% Cuerda del ala en voladizo
c=0.2;
% Envergadura del ala en voladizo
s=0.6;
% Espesor del ala en voladizo
h=0.001;
% Densidad del aluminio
rhom=2770;
% Módulo de Young del aluminio
Eyoungs=68.7e9;
% Coeficiente de Poisson del aluminio
nu=0.33;
% Rígidez del ala
Dstiff=Eyoungs*h^3/12/(1-nu^2);
% Densidad del aire
rho=1.225;

% Malla de integración numérica
% Número de puntos en la dirección de la cuerda y de la envergadura
npoints=21;
% Mallado en la dirección de la cuerda
x=linspace(0,1,npoints);
% Mallado en la dirección de la envergadura
```



```
y=linspace(0,1,npontos);
% Incremento en la direccion de la cuerda
dx=x(2)-x(1);
% Incremento en la direccion de la envergadura
dy=y(2)-y(1);
% Creacion de las matrices de malla
[X,Y]=meshgrid(x,y);
% La columna de X es igual a x y todas las columnas son identicas
X=X';
% La fila de Y es igual a y y todas son identicas
Y=Y';

% Seleccion de modos fuera del plano
% Numero de modos en la direccion de la cuerda
xmodos=4;
% Numero de modos en la direccion de la envergadura
ymodos=4;
% Número de modos totales
nmodos_out=xmodos*ymodos;
% calculo de las formas modales.
[w,wxx,wyy,wxy,wx,wy]=formasmodales(xmodos,ymodos,nmodos_out,X,Y);

% No se han calculado los modos en el plano puesto que no aparecen
% al linealizar las ecuaciones.

% Dimensionamos las formas modales de las derivadas
wx=wx/c;
wy=wy/s;
wxx=wxx/c^2;
wyy=wyy/s^2;
wxy=wxy/c/s;

% Dimensionamos la malla numerica
X=X*c;
Y=Y*s;
dx=dx*c;
dy=dy*s;

% Solo usaremos los modos fuera del plano
nmodos=nmodos_out;

% Establecemos las ecuaciones del movimiento
% Establecer la matriz de masa estructural
A=zeros(nmodos);
for i=1:nmodos
    for j=1:nmodos
        % Calculo del integrando
        integrand=rhom*h*squeeze(w(i,:,:).*w(j,:,:));
        % Integracion numerica (regla de Simpson)
        A(i,j)=simpson2D(integrand,dx,dy);
    end
end

% Establecer la matriz de rigidez estructural
E=zeros(nmodos);
for i=1:nmodos
    for j=1:nmodos
        % Calculo del integrando
```



Código aeroelástico del flameo

```
integrand=Dstiff*squeeze(wxx(i,:,:).*wxx(j,:,:)+...
    wyy(i,:,:).*wyy(j,:,:)+nu*(wxx(i,:,:).*wyy(j,:,:)+...
    wyy(i,:,:).*wxx(j,:,:))+2*(1-nu)*wxy(i,:,:).*wxy(j,:,:));
% Integracion numerica (regla de Simpson nuevamente)
E(i,j)=simpson2D(integrand,dx,dy);
end
end

% Método del UVLM
% Número de paneles en la dirección de la cuerda
mv=8;
% Número de paneles en la dirección de la envergadura
nv=8;

% Modelado de la aerodinámica del ala
% El doble de la envergadura del ala en voladizo
b=2*s;
% Mitad de la cuerda del ala en voladizo
cm=c/2;
% Relación de aspecto del ala aerodinámica
AR=b/c;
% Ángulo de ataque
alpha=5*pi/180;
% Longitud de la estela
cw=10*c; % Multiplo de la longitud de la cuerda del ala

% cálculo de los puntos de las esquinas de los paneles del ala
% Cálculo de los nodos del ala
Nodosala = MatrizNodos(mv,nv,0,0,b,c);
% Coordenadas de los nodos en la dirección de la envergadura
nodosy=Nodosala(:,5)';
% Matriz de coordenadas de los nodos en la dirección de la envergadura
yp=vec2mat(nodosy,nv+1);
% Coordenadas de los nodos en la dirección de la cuerda
nodosx=Nodosala(:,4)';
% Matriz de coordenadas de los nodos en la dirección de la cuerda
xp = vec2mat(flipr(nodosx),nv+1);
% Coordenadas de los nodos en la dirección perpendicular al ala
zp=zeros(mv+1,nv+1);

% cálculo de las esquinas de anillos de torbellinos del ala
xv = zeros(mv+1,nv+1);
yv = zeros(mv+1,nv+1);
zv = zeros(mv+1,nv+1);
for j=1:nv+1
    for i=1:mv
        % Los anillos de torbellinos están desplazados corriente abajo a un
        % cuarto de su cuerda
        xv(i,j)= xp(i,j)+(xp(i+1,j)-xp(i,j))/4;
        yv(i,j)= yp(i,j);
        zv(i,j)= zp(i,j)+(zp(i+1,j)-zp(i,j))/4;
    end
    % Torbellino de salida de los anillos de torbellino del borde de fuga
    xv(mv+1,j) = xp(mv+1,j)+ 0.25*c/mv;
    yv(mv+1,j) = yp(mv+1,j);
    zv(mv+1,j)= zp(mv+1,j);
end
```



Código aeroelástico del flameo

```
% Calculo de las esquinas de los anillos de torbellinos de la estela
% Numero de anillos de torbellino en la direccion de la cuerda
mw=cw*mv/c;
% Calculo de los nodos de la estela
Nodosestela = MatrizNodos(mw,nv,0,0,b,cw);
% Posicionamiento de la estela en la geometria global
wakepoints=min(xv(mv+1,:))+Nodosestela(:,4)';
% Coordenada x mas cercana al ala
xminestela=min(wakepoints);
% Diferencia en x ala-estela
difxalaestela=xminestela-min(xv(mv+1,:));
% Coordenadas en x de la estela unida al ala
wakepoints=wakepoints-difxalaestela;
% Coordenadas de los nodos, direccion de la cuerda
xw = vec2mat(flipr(wakepoints),nv+1);
% Coordenadas de los nodos, direccion de la envergadura
yw=repmat(yp(1,:),mw+1,1);
% Coordenadas de los nodos, direccion perpendicular al plano de la estela
zw=zeros(mw+1,nv+1);

% Representación gráfica del ala aerodinamica y de la estela
figure(100)
hmesh1=mesh(xp,yp,zp,'Edgecolor','b','FaceColor','none');
hold on
hmesh2=mesh(xv,yv,zv,'Edgecolor','g','FaceColor','none');
hmesh3=mesh(xw(1:2*mv,:),yw(1:2*mv,:),zw(1:2*mv,:),'Edgecolor','r','FaceColor','none');
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
ylim([-b/2 b/2])
legend([hmesh1(1) hmesh2(1) hmesh3(1)],'Paneles Geometricos','Anillos del ala','Anillos de la estela')

% Calculo de los vectores normales
% El ala es siempre plana. Vectores normales apuntan en la direccion z
nx = zeros(mv,nv);
ny = zeros(mv,nv);
nz = ones(mv,nv);
% Dimensionamos nz en una matriz (mv*nv,3)
Nall=[reshape(nx',mv*nv,1) reshape(ny',mv*nv,1) reshape(nz',mv*nv,1)];

% Puntos de control y areas de los anillos de torbelinos
% Inicialización de vectores
% Longitud de los anillos de torbellinos en la direccion de la cuerda
Dx = zeros(mv,nv);
% Longitud de los anillos de torbellinos en la direccion de la envergadura
Dy = zeros(mv,nv);
% Coordenadas de los puntos de control
xc = zeros(mv,nv);
yc = zeros(mv,nv);
zc = zeros(mv,nv);

for i=1:mv
    for j=1:nv
        % Calculamos las posiciones de los puntos de control
        dxv = (xp(i+1,j) - xp(i,j)+xp(i+1,j+1) - xp(i,j+1))/2;
        dzv = (zp(i+1,j) - zp(i,j)+zp(i+1,j+1) - zp(i,j+1))/2;
        xc(i,j) = (xp(i,j)+xp(i+1,j)+xp(i,j+1)+xp(i+1,j+1))/4+dxv/4;
```



```
yc(i,j) = (yp(i,j)+yp(i+1,j)+yp(i,j+1)+yp(i+1,j+1))/4;
zc(i,j) = (zp(i,j)+zp(i+1,j)+zp(i,j+1)+zp(i+1,j+1))/4+dzv/4;

% Calculamos las longitudes de los torbellinos de frontera
% Dx y Dy deben ser simetricos respecto a la linea central del ala
if j <= nv/2
    Dx(i,j)=sqrt((xv(i+1,j)-xv(i,j))^2+ ...
                  (yv(i+1,j)-yv(i,j))^2+ ...
                  (zv(i+1,j)-zv(i,j))^2);

    Dy(i,j)=sqrt((xv(i,j+1)-xv(i,j))^2+ ...
                  (yv(i,j+1)-yv(i,j))^2+ ...
                  (zv(i,j+1)-zv(i,j))^2);
else
    Dx(i,j)=sqrt((xv(i+1,j+1)-xv(i,j+1))^2+ ...
                  (yv(i+1,j+1)-yv(i,j+1))^2+ ...
                  (zv(i+1,j+1)-zv(i,j+1))^2);

    Dy(i,j)=sqrt((xv(i,j)-xv(i,j+1))^2+ ...
                  (yv(i,j)-yv(i,j+1))^2+ ...
                  (zv(i,j)-zv(i,j+1))^2);
end

end

% Areas de los anillos de torbellinos
Sarea=Dx.*Dy;
% Redimensionamos todas las matrices mv x nv en vectores mv*nv x 1
nvec=[reshape(nx',mv*nv,1) reshape(ny',mv*nv,1) reshape(nz',mv*nv,1)];
Dyvec=reshape(Dy',mv*nv,1);
Svec=reshape(Sarea',mv*nv,1);

% Calculamos la influencia de los anillos del ala en el ala
disp('Calculando la matriz de coeficientes de influencia del ala')
% Inicializamos la matriz de coeficientes de influencia del ala
Ab=zeros(mv*nv,mv*nv);
for ic=1:mv
    for jc=1:nv
        for i=1:mv
            for j=1:nv
                % Velocidad inducida por el primer segmento de torbellino
                uvw1=segmentotorbellino(xc(ic,jc),yc(ic,jc),zc(ic,jc),...
                                         xv(i,j),yv(i,j),zv(i,j),xv(i,j+1),yv(i,j+1),zv(i,j+1));
                % Velocidad inducida por el segundo segmento de torbellino
                uvw2=segmentotorbellino(xc(ic,jc),yc(ic,jc),zc(ic,jc),...
                                         xv(i,j+1),yv(i,j+1),zv(i,j+1),xv(i+1,j+1),yv(i+1,j+1),...
                                         zv(i+1,j+1));
                % Velocidad inducida por el tercer segmento de torbellino
                uvw3=segmentotorbellino(xc(ic,jc),yc(ic,jc),zc(ic,jc),...
                                         xv(i+1,j+1),yv(i+1,j+1),zv(i+1,j+1),xv(i+1,j),yv(i+1,j),...
                                         zv(i+1,j));
                % Velocidad inducida por el cuarto segmento de torbellino
                uvw4=segmentotorbellino(xc(ic,jc),yc(ic,jc),zc(ic,jc),...
                                         xv(i+1,j),yv(i+1,j),zv(i+1,j),xv(i,j),yv(i,j),zv(i,j));
                % Suma de todas las velocidades inducidas
                uvw=uvw1+uvw2+uvw3+uvw4;
                % Calculamos los coeficientes de influencia
```



```
        Ab((ic-1)*nv+jc,(i-1)*nv+j)=dot(uvw,nvec((ic-1)*nv+jc,:));
    end
end
end

% Calculo de la influencia de los anillos de la estela en el ala
disp('Calculando la matriz de coeficientes de influencia de la estela')
% Inicializamos la matriz de coeficientes de influencia de la estela
% Influencia en la direccion normal
Aw = zeros(mv*nv,mw*nv);
for ic=1:mv
    for jc=1:nv
        for i=1:mw
            for j=1:nv
                % velocidad inducida por el primer segmento de torbellino
                uvw1=segmentotorbellino(xc(ic,jc),yc(ic,jc),zc(ic,jc),...
                    xw(i,j),yw(i,j),zw(i,j),xw(i,j+1),yw(i,j+1),zw(i,j+1));
                % velocidad inducida por el segundo segmento de torbellino
                uvw2=segmentotorbellino(xc(ic,jc),yc(ic,jc),zc(ic,jc),...
                    xw(i,j+1),yw(i,j+1),zw(i,j+1),xw(i+1,j+1),yw(i+1,j+1),...
                    zw(i+1,j+1));
                % velocidad inducida por el tercer segmento de torbellino
                uvw3=segmentotorbellino(xc(ic,jc),yc(ic,jc),zc(ic,jc),...
                    xw(i+1,j+1),yw(i+1,j+1),zw(i+1,j+1),xw(i+1,j),yw(i+1,j),...
                    zw(i+1,j));
                % velocidad inducida por el cuarto segmento de torbellino
                uvw4=segmentotorbellino(xc(ic,jc),yc(ic,jc),zc(ic,jc),...
                    xw(i+1,j),yw(i+1,j),zw(i+1,j),xw(i,j),yw(i,j),zw(i,j));
                % Suma de todas las velocidades inducidas
                uvw=uvw1+uvw2+uvw3+uvw4;
                % Calculo del coeficiente de influencia
                Aw((ic-1)*nv+jc,(i-1)*nv+j)=dot(uvw,nvec((ic-1)*nv+jc,:));
            end
        end
    end
end

% Matrices de propagacion de la estela
Pb=[zeros(nv,(mv-1)*nv) eye(nv,nv);zeros((mw-1)*nv,(mv-1)*nv) zeros((mw-1)*nv,nv)];
Pw=[zeros(nv,(mw-1)*nv) zeros(nv,nv);eye((mw-1)*nv,(mw-1)*nv) zeros((mw-1)*nv,nv)];
Pb=sparse(Pb);
Pw=sparse(Pw);

% Matrices de coeficientes para el calculo de la sustentacion
Gy=eye(mv*nv)+[zeros(nv,(mv-1)*nv) zeros(nv,nv);-eye((mv-1)*nv,(mv-1)*nv)...
    zeros((mv-1)*nv,nv)];
Gy=sparse(Gy.*repmat(Dyvec,1,mv*nv));
GS=sparse(eye(mv*nv).*repmat(Svec,1,mv*nv));

% calculo de las matrices modales en los puntos de control
[wc,~,~,~,wcx]=formasmodales(xmodos,ymodos,nmodos,xc(:,nv/2+1:nv)/c, ...
    yc(:,nv/2+1:nv)/s);
% Dimensionalizar las derivadas de las formas modales
wcx=wcx/c;

% Reflejar las formas modales (tecnica espejo)
% Inicializar los vectores de las formas modales de ambos lados
```



```
w2=zeros(nmodos,mv,nv);
wx2=zeros(nmodos,mv,nv);
for i=1:nmodos
    w2(i,:,:)=[fliplr(squeeze(wc(i,:,:))) squeeze(wc(i,:,:))];
    wx2(i,:,:)=[fliplr(squeeze(wcx(i,:,:))) squeeze(wcx(i,:,:))];
end

% Representacion de todas las formas modales determinadas
for i=1:nmodos
    figure(i)
    hplot=mesh(xc,yc,squeeze(w2(i,:,:)));
    set(hplot,'EdgeColor',[ 0 0 1])
    xlabel('x')
    ylabel('y')
    zlabel(['w_ ' num2str(i) '(x,y)' ])
    xlim([-0.6 0.6])
    ylim([-0.6 0.6])
    zlim([-20 20])
    view(-30,42)
end

% Matrices de transformacion modal
% Redimensionar w2 y wx2 en matrices de estructura (mv*nv,nmodos)
wall=zeros(mv*nv,nmodos);
wxall=zeros(mv*nv,nmodos);
for i=1:nmodos
    wall(:,i)=reshape(squeeze(w2(i,:,:))',mv*nv,1);
    wxall(:,i)=reshape(squeeze(wx2(i,:,:))',mv*nv,1);
end

% Elección del rango de frecuencias para el calculo de la sustentacion
freq=0:0.01:1;

%Contador
count=1;

for i=1:length(freq)
    k=freq(i);
    % Calculo de las matrices Pe y Pc
    Pe=sparse(kron(exp(-1j*2*k/mv*(1:mw)'),eye(nv)));
    Pc=sparse([zeros(nv,(mv-1)*nv) eye(nv)]);
    % Cálculo de L0
    L0=(Gy*cos(alpha)+1j*k/cm*GS)*((Ab+Aw*Pe*Pc)\Nall(:,3));
    L1=(Gy*cos(alpha)+1j*k/cm*GS)*((Ab+Aw*Pe*Pc)\(wxall+1j*k/cm*wall));
    % Indices del elemento de L0 y pared perteneciente a la semiala derecha
    halfind=zeros(1,mv*nv/2);
    for countj=1:mv
        halfind((countj-1)*nv/2+1:countj*nv/2)=(countj-1)*nv+(nv/2+1:nv);
    end

    % Mitad del ala
    % Cálculo de Q0
    Q0=(L0(halfind).'*wall(halfind,:));
    % Cálculo de Q1
    Q1=(L1(halfind,:).'*wall(halfind,:));
    % Calculo de L0
    L0m=L0(halfind,:);
    % Calculo de L1
    L1m=L1(halfind,:);
```



```
L1m=L1(halfind,:);

% Calculo de r
r=(-(k*u/cm)^2*A+E-rho*u^2*Q1)\(-rho*u^2*Q0*sin(alpha));

% Calculo de la sustentacion l
lestructural=-rho*u^2*(L0m*sin(alpha)-L1m*r);
laerodinamica=-rho*u^2*(L0*sin(alpha)-L1*r);
lfinalestructural(:,count)=lestructural(:);
lfinalestructural=real(lfinalestructural);
lfinalaerodinamica(:,count)=laerodinamica(:);
lfinalaerodinamica=real(lfinalaerodinamica);

% Calculo de la matriz Q
Q=-rho*u^2*(Q0*sin(alpha)-Q1*r);
Qfinal(:,count)=Q(:);

% Contador
count=count+1;

end

% Calculo del coeficiente de sustencion
% Sustencion total
L=sum(lfinalestructural,1);
% Coeficiente de sustencion
CL=L/(1/2*rho*(U)^2*c*s);

% Representacion de la distribucion de la sustencion
figure(nmodos+1)
hold on
% Representacion ultimo vector de presiones
lendestructural=reshape(lfinalestructural(:,end),nv/2,mv)';
h=surf(xc(:,nv/2+1:nv),yc(:,nv/2+1:nv),lendestructural);
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('l(x,y,k)')
title(['Distribucion de la sustencion para k=1 y \alpha= ', num2str(alpha)])
grid on
pbaspect([1 b/c 1])
colorbar

% Representacion del coeficiente de sustencion total
figure(nmodos+3)
plot(freq,CL,'k','LineWidth',3);
xlabel('Frecuencia reducida, k')
ylabel('C_L')
title(['Coeficiente de sustencion C_L(k) para \alpha= ',num2str(alpha)...
'y U= ',num2str(U)])
grid on;
```

Apéndice E

Diagrama de flujo del UVLM

