



Seminario: Algoritmos voraces

José María Casanova, Elena Hernández, Alberto Valderruten,
Oscar Fontenla y Carlos Eiras

Dept. Ciencias de la Computación y Tecnologías de la Información

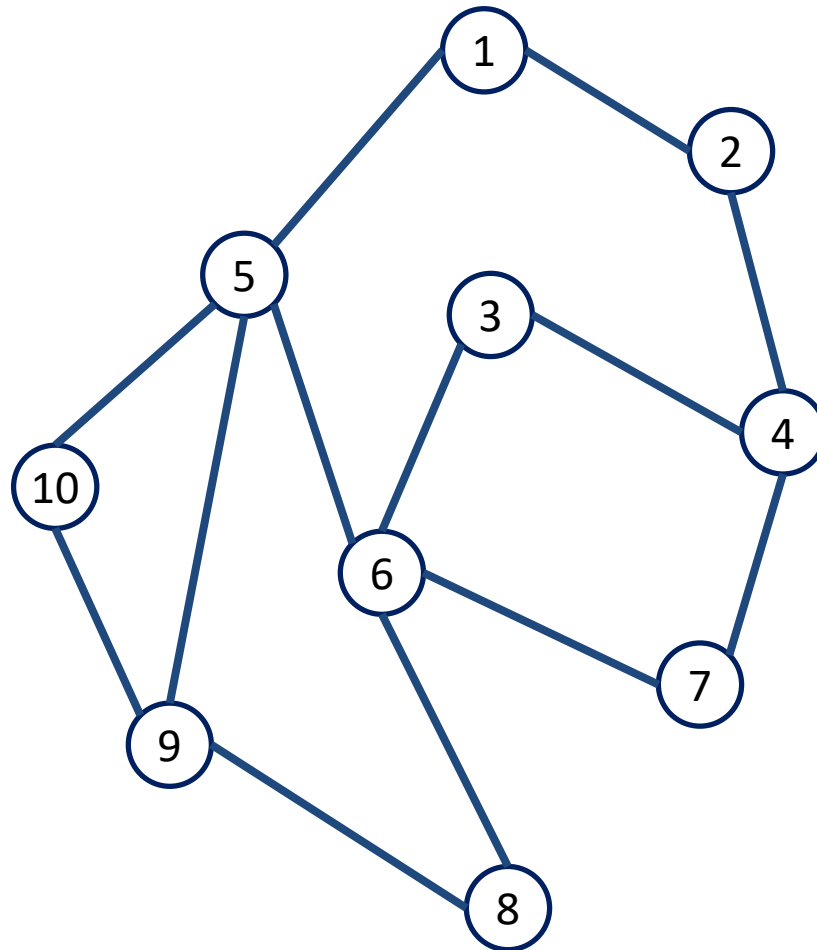
```
{jose.casanova.crespo, elena.hernandez, alberto.valderruten,  
 oscar.fontenla, carlos.eiras.franco}@udc.es
```

Introducción

- Recorridos sobre grafos:
 - Recorrido en anchura
 - Recorrido en profundidad
- Algoritmos voraces para grafos:
 - Ordenación topológica
 - Árbol expandido mínimo
 - Algoritmo de Kruskal
 - Algoritmo de Prim
 - Caminos mínimos
 - Algoritmo de Dijkstra

Recorrido en anchura de un grafo

Ejercicio 1: realizar el recorrido en anchura del siguiente grafo no dirigido



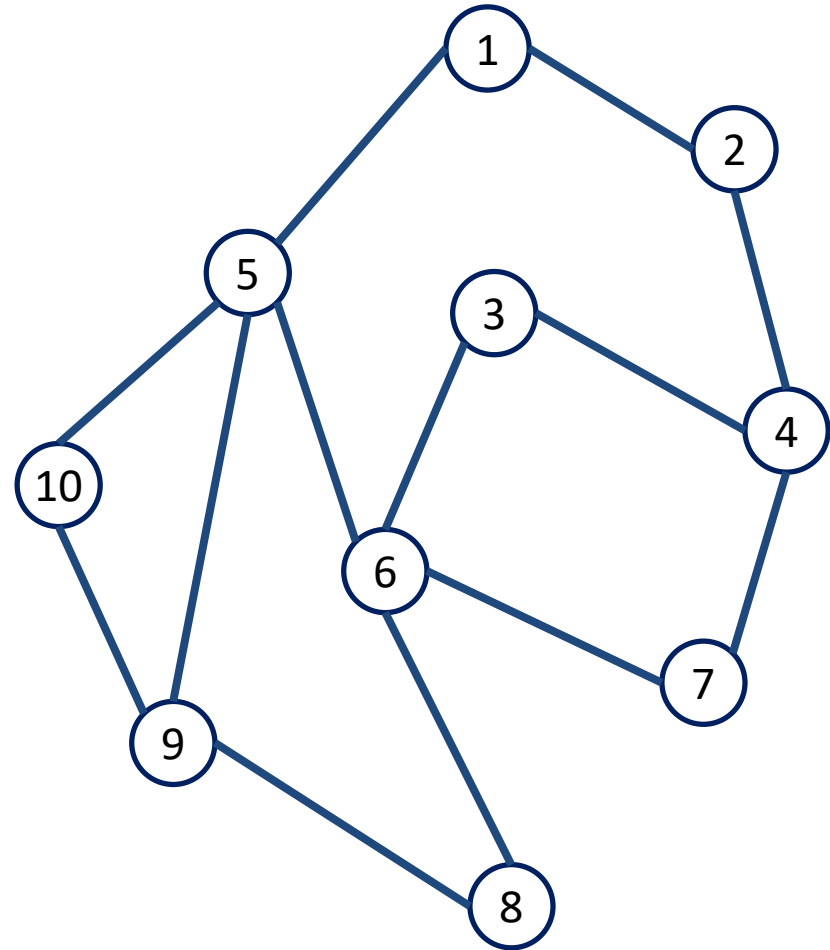
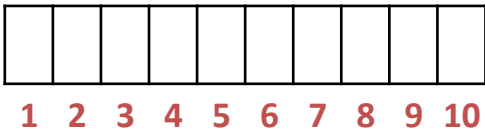
Recorrido en anchura de un grafo

Solución: **Nodo origen = 1**

Cola de nodos:



Marcados:



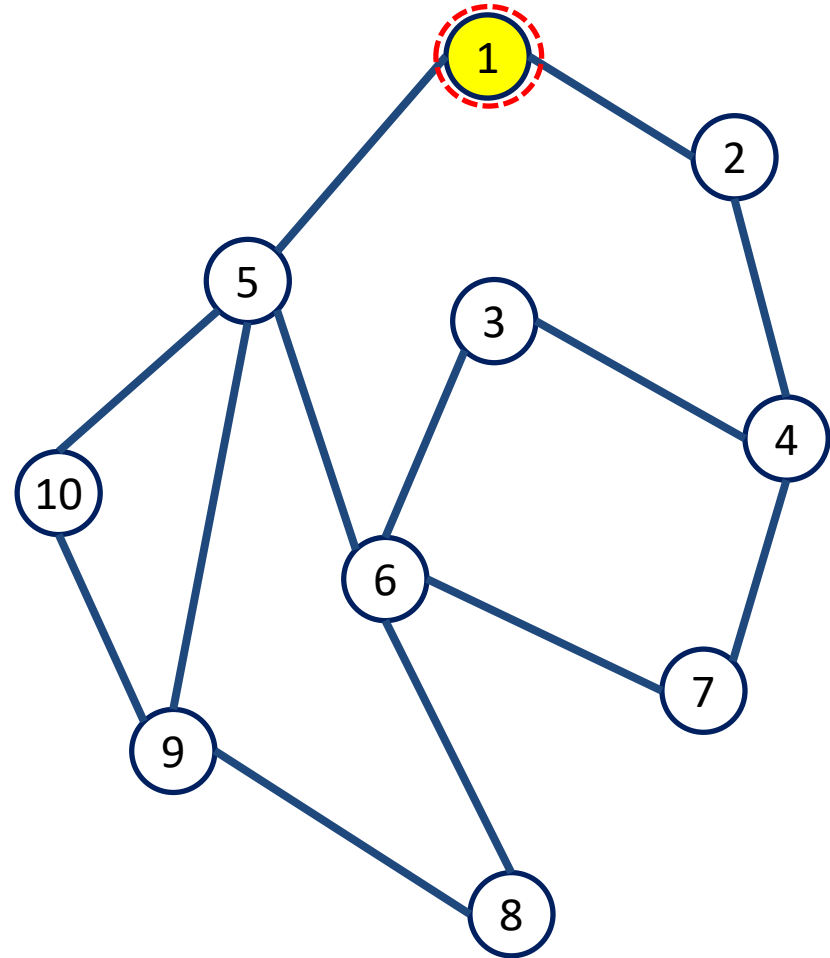
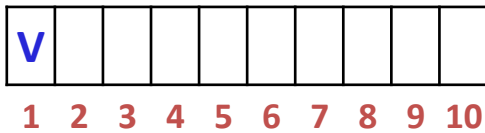
Recorrido en anchura de un grafo

Solución: Nodo origen = 1

Cola de nodos:



Marcados:



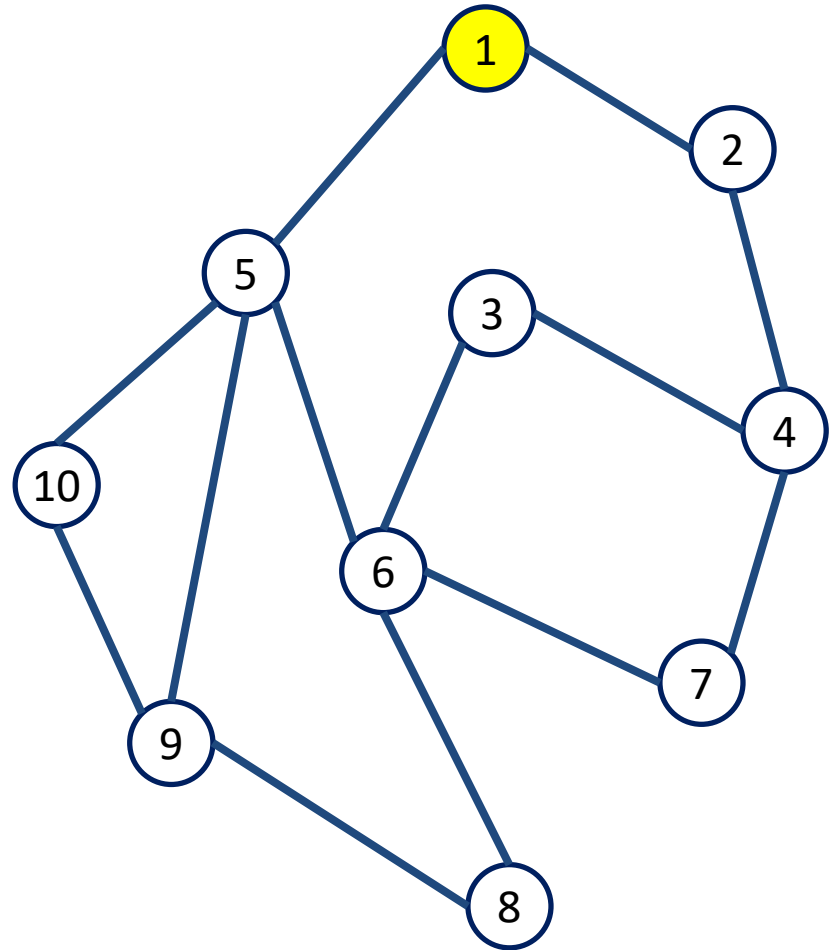
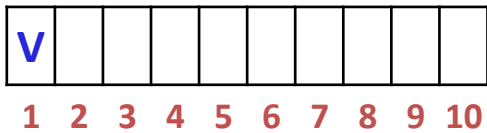
Recorrido en anchura de un grafo

Solución: Nodo origen = 1

Cola de nodos:



Marcados:



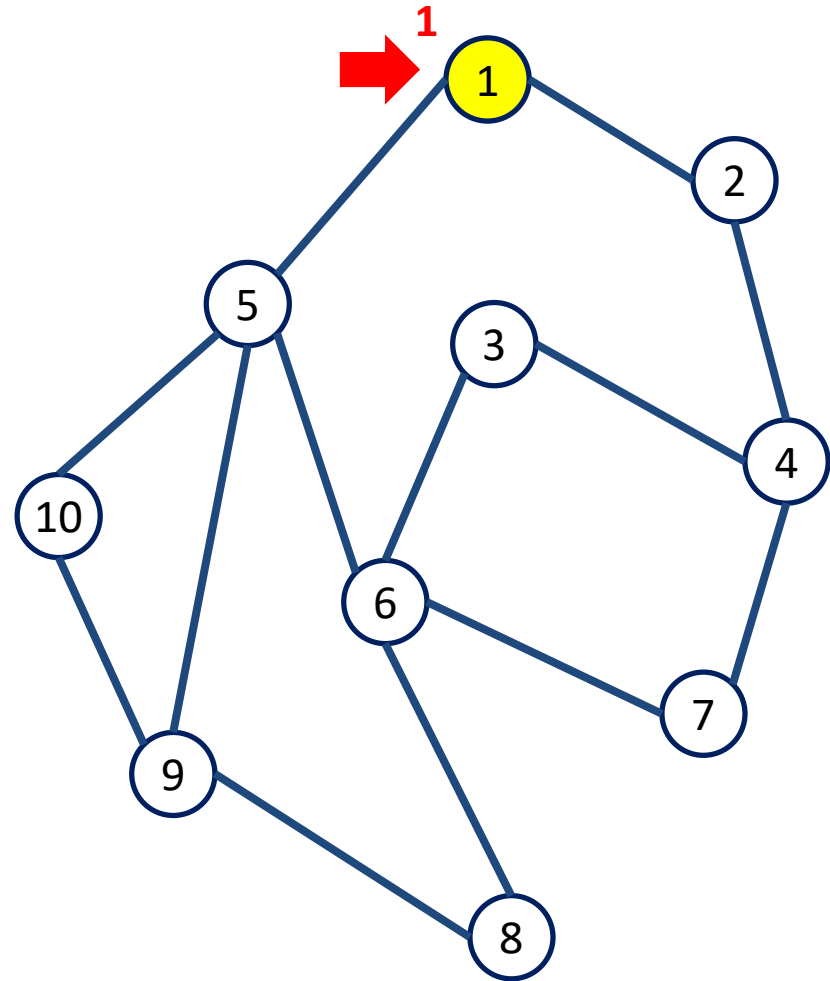
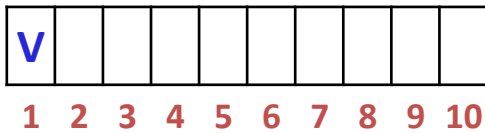
Recorrido en anchura de un grafo

Solución: **Nodo origen = 1**

Cola de nodos:



Marcados:



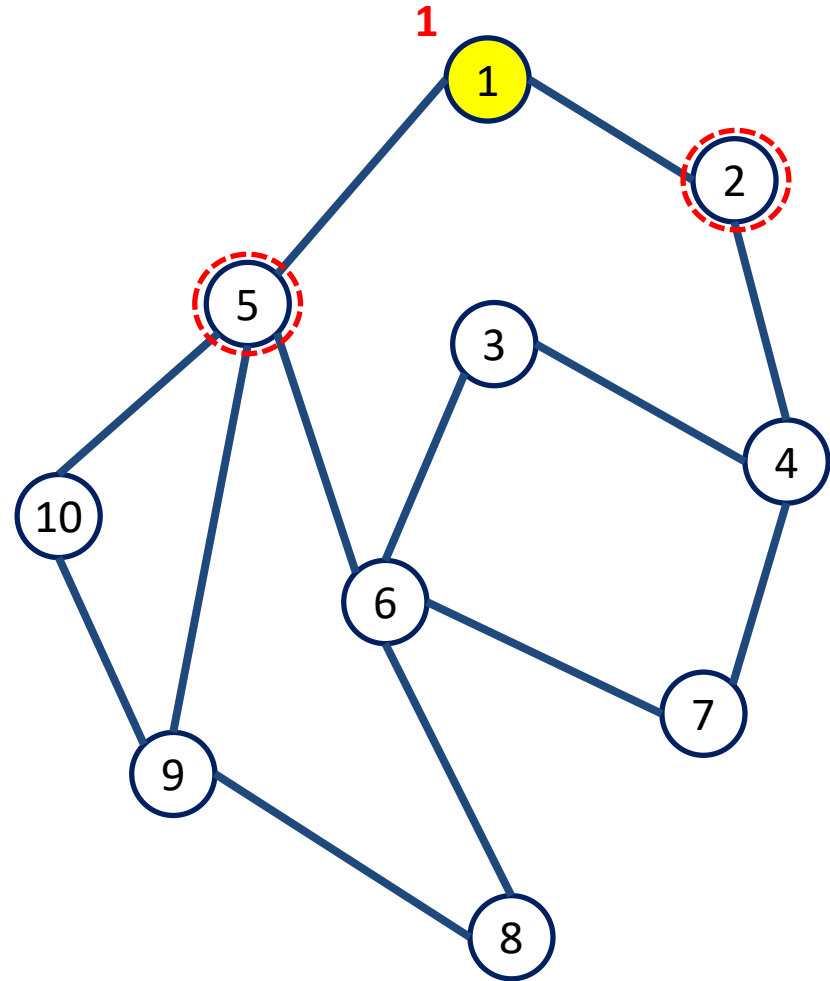
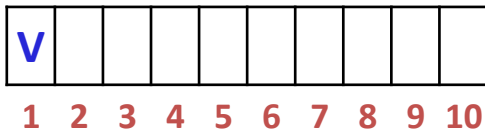
Recorrido en anchura de un grafo

Solución: **Nodo origen = 1**

Cola de nodos:



Marcados:



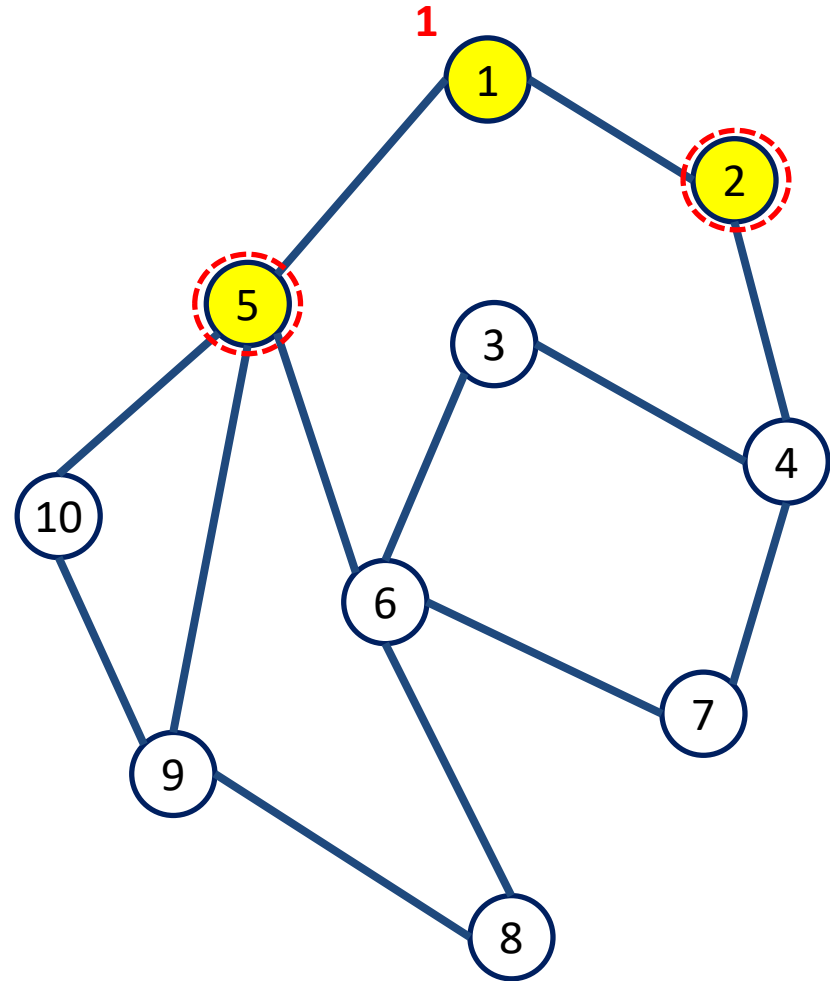
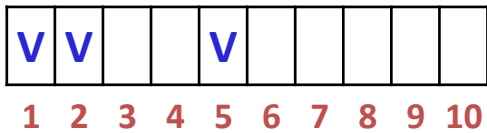
Recorrido en anchura de un grafo

Solución: **Nodo origen = 1**

Cola de nodos:



Marcados:



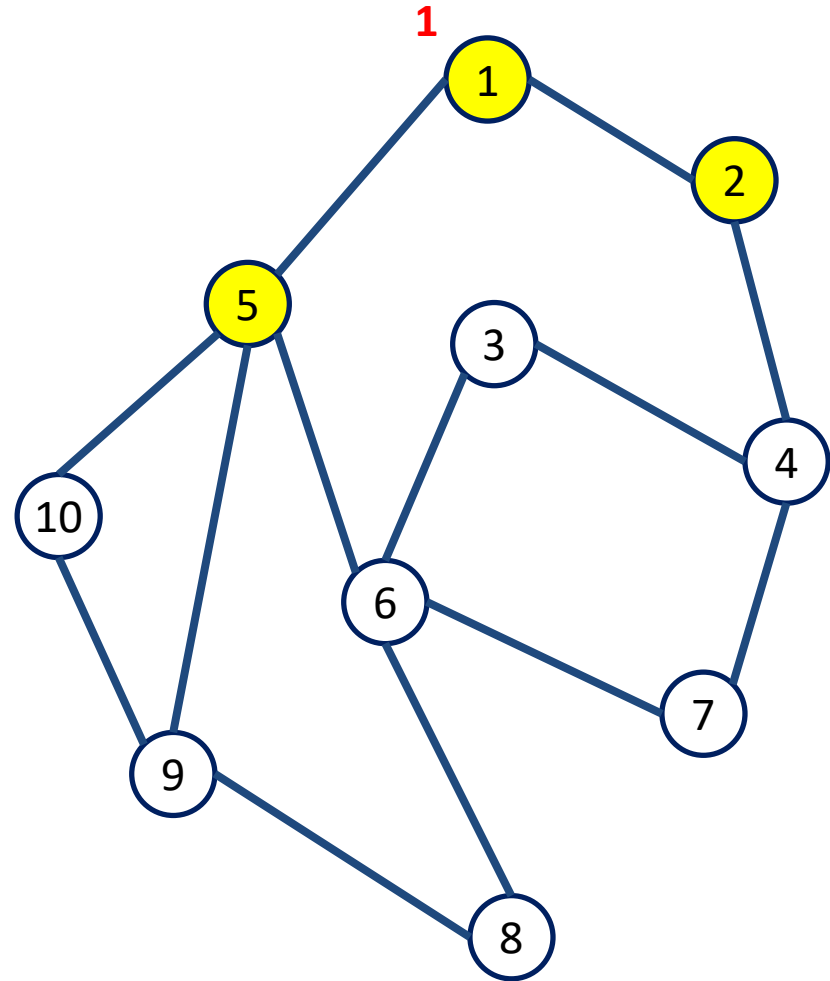
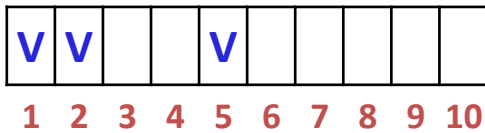
Recorrido en anchura de un grafo

Solución: **Nodo origen = 1**

Cola de nodos:



Marcados:



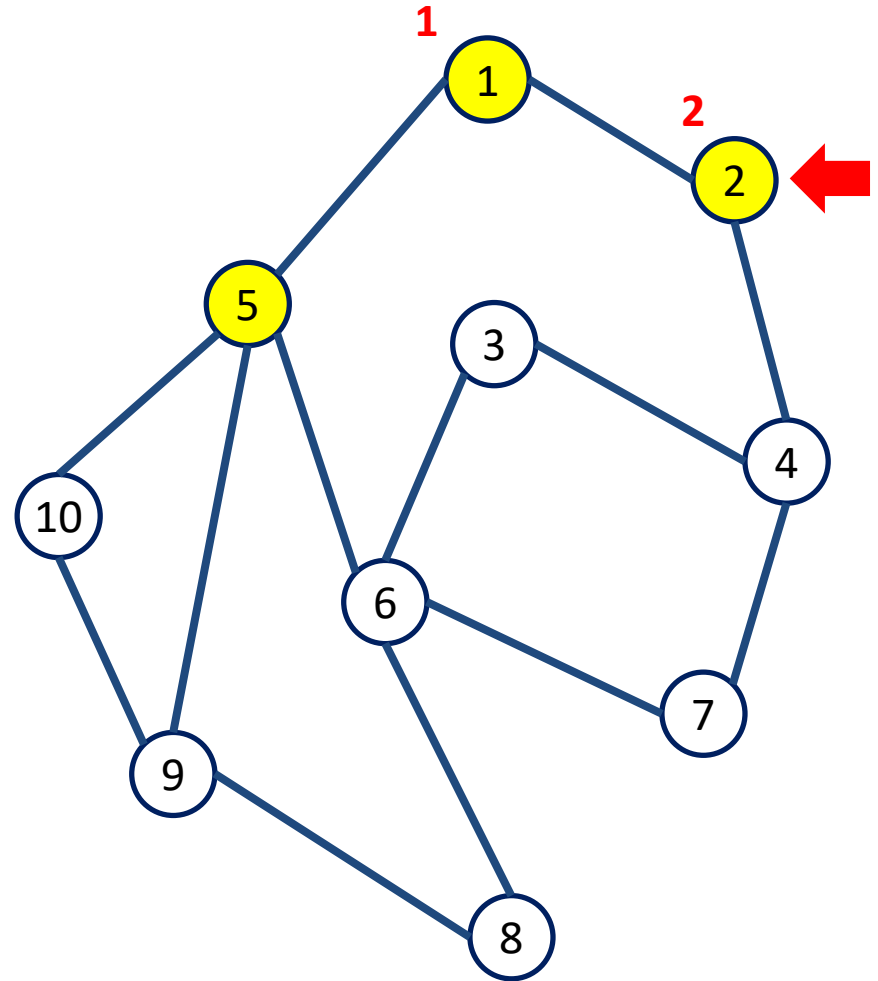
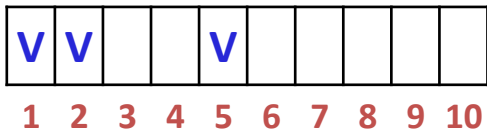
Recorrido en anchura de un grafo

Solución: **Nodo origen = 1**

Cola de nodos:



Marcados:



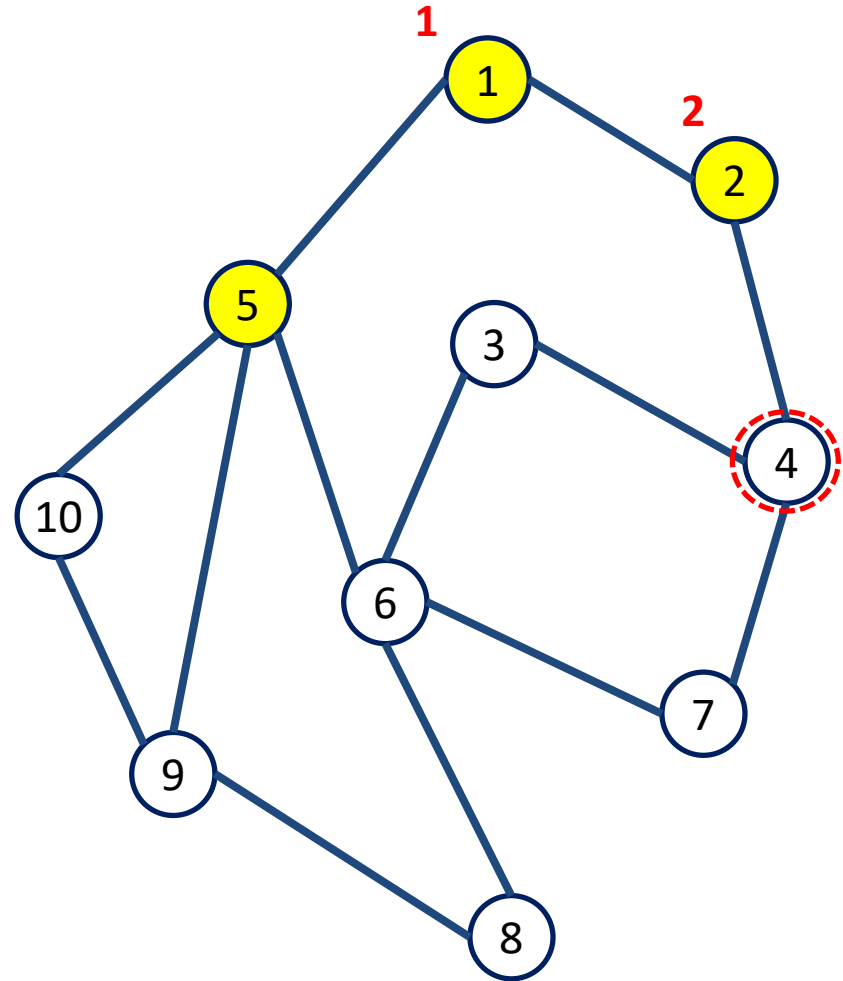
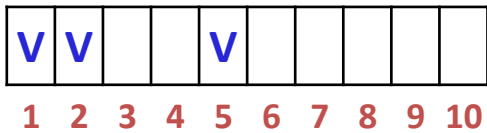
Recorrido en anchura de un grafo

Solución: **Nodo origen = 1**

Cola de nodos:



Marcados:



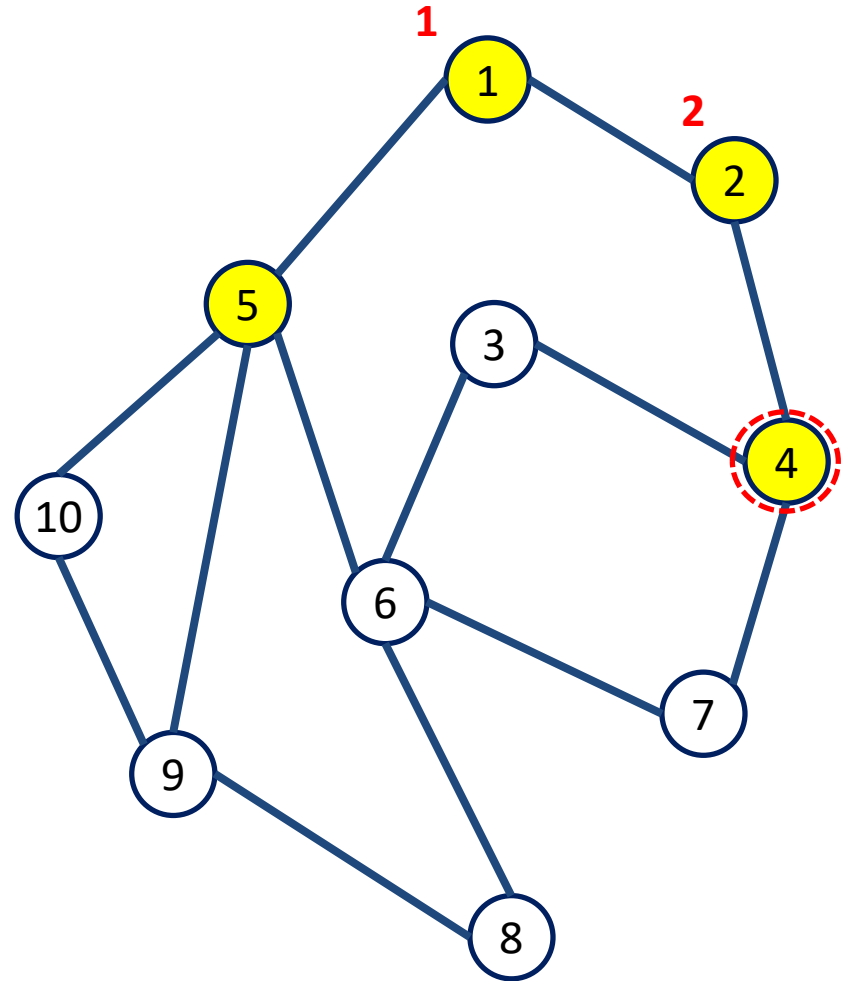
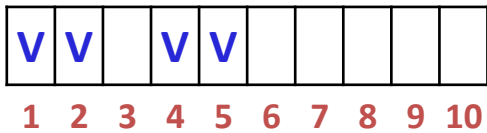
Recorrido en anchura de un grafo

Solución: **Nodo origen = 1**

Cola de nodos:



Marcados:



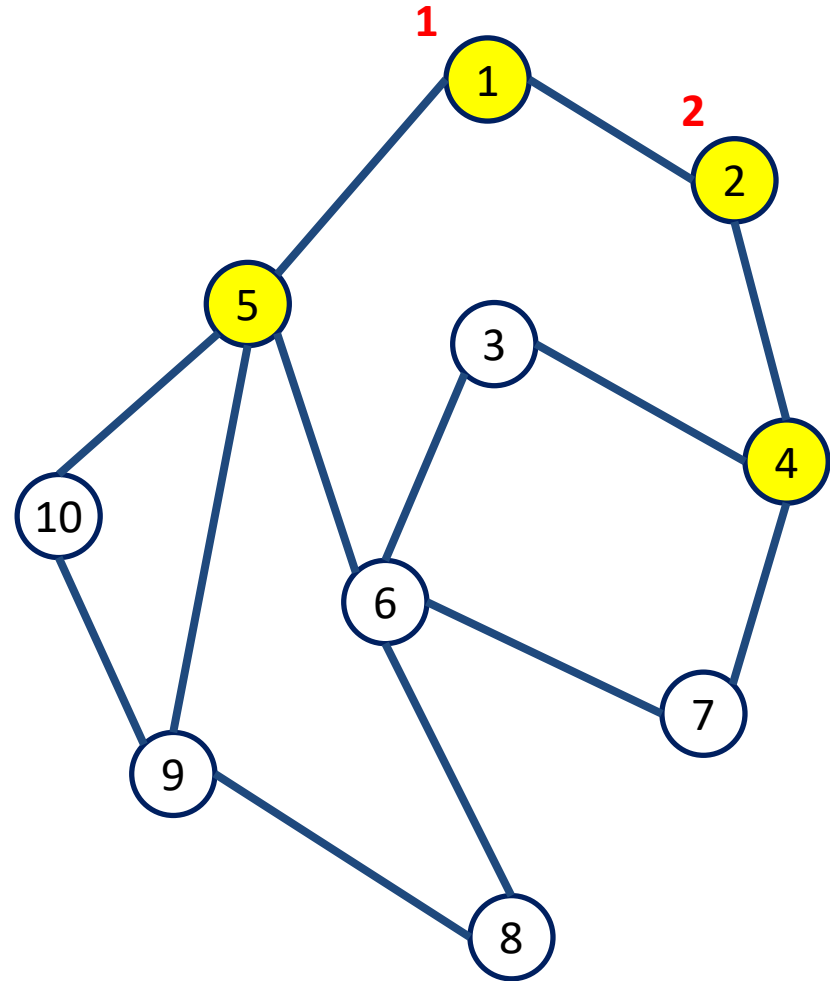
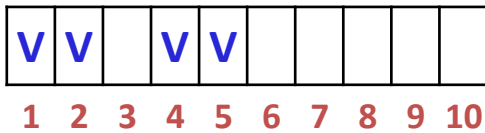
Recorrido en anchura de un grafo

Solución: **Nodo origen = 1**

Cola de nodos:



Marcados:



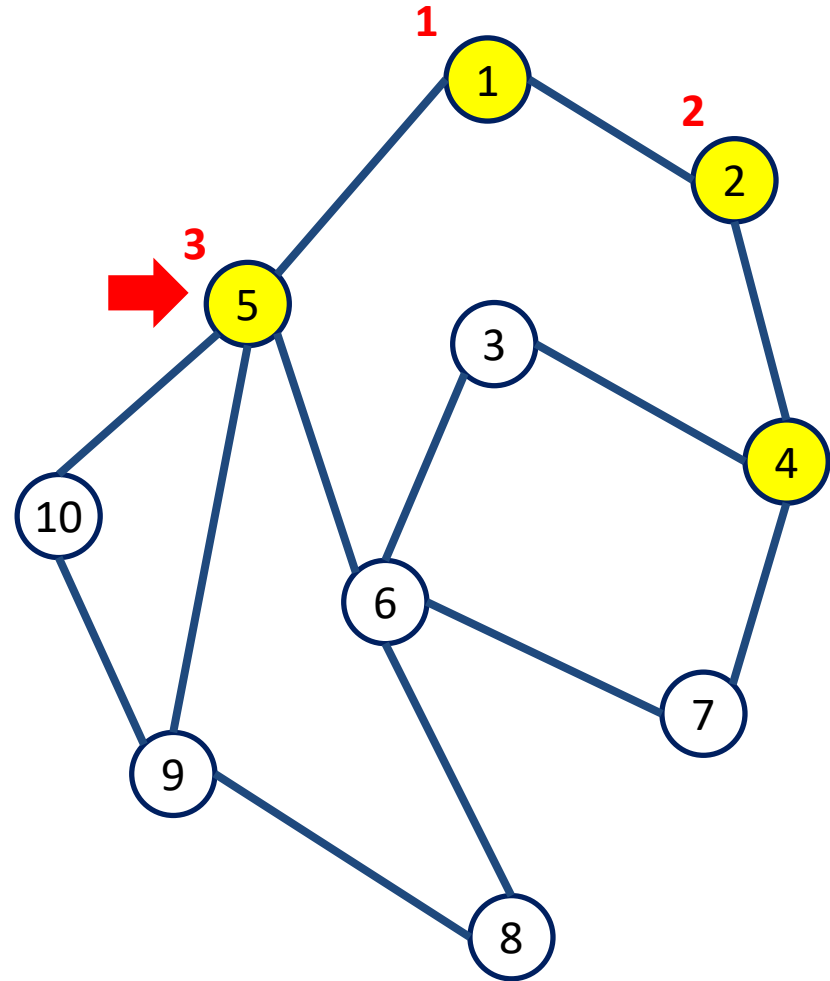
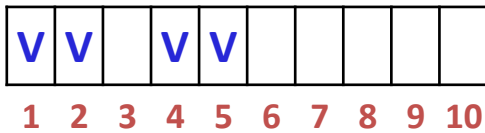
Recorrido en anchura de un grafo

Solución: **Nodo origen = 1**

Cola de nodos:



Marcados:



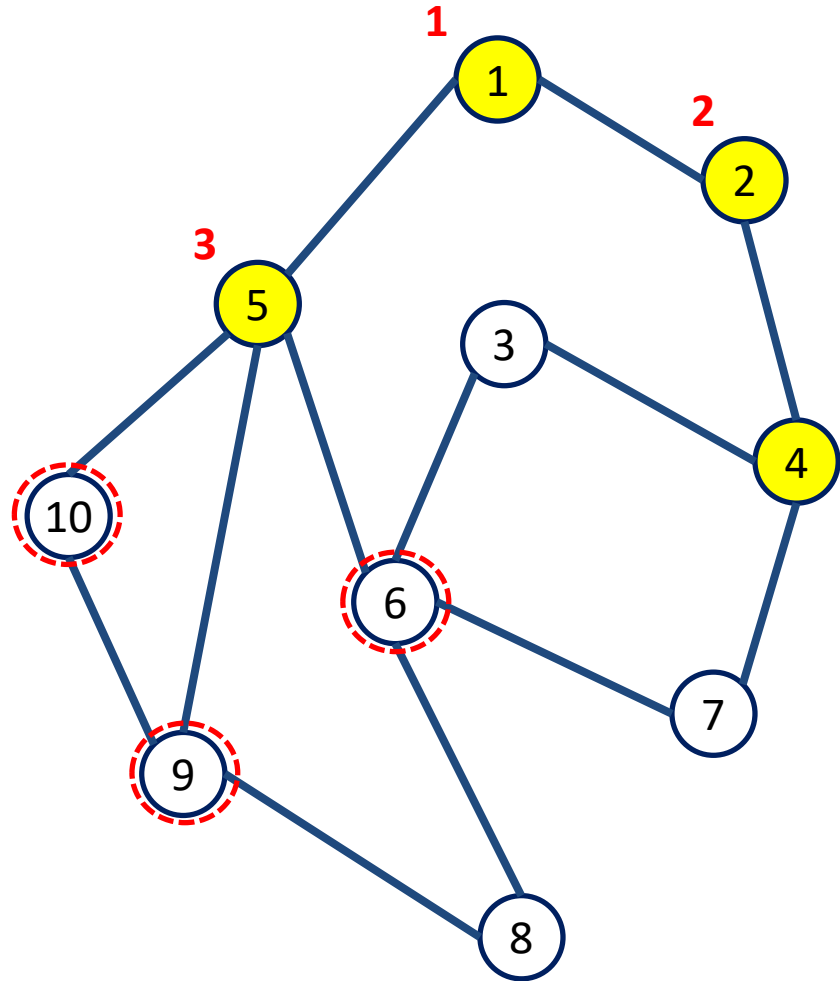
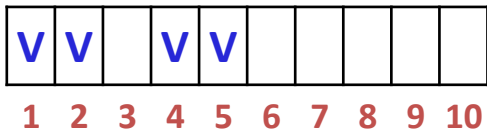
Recorrido en anchura de un grafo

Solución: **Nodo origen = 1**

Cola de nodos:



Marcados:



Recorrido en anchura de un grafo

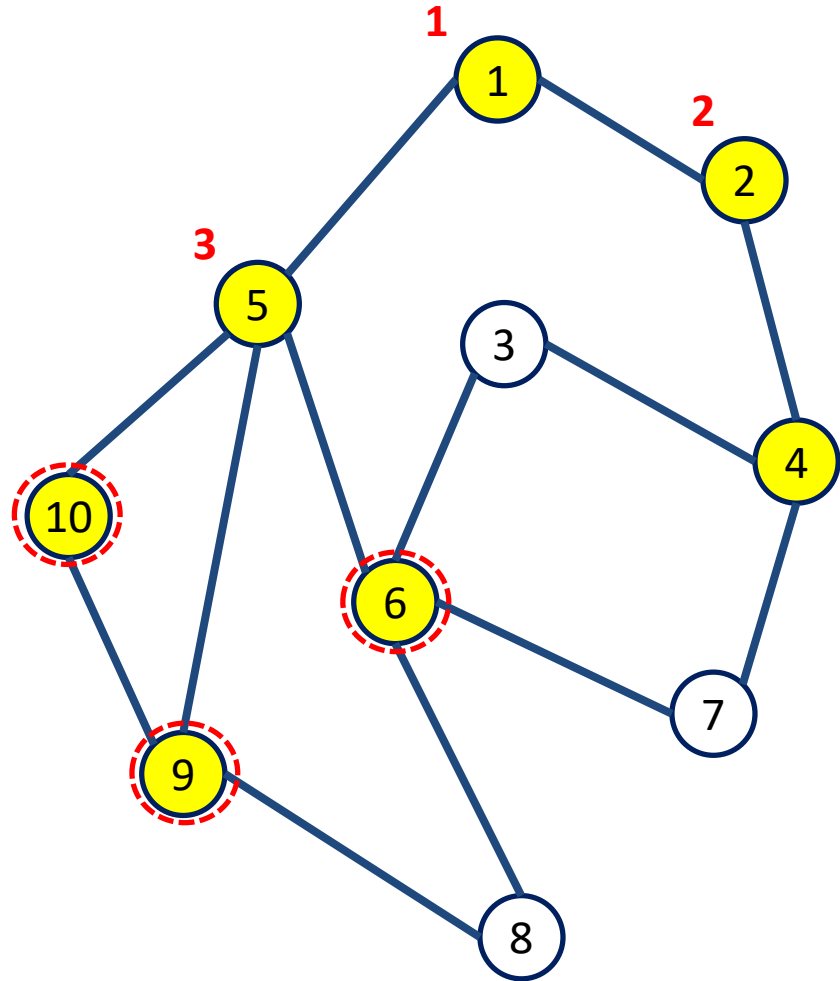
Solución: **Nodo origen = 1**

Cola de nodos:

4	6	9	10						
---	---	---	----	--	--	--	--	--	--

Marcados:

V	V		V	V	V			V	V
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



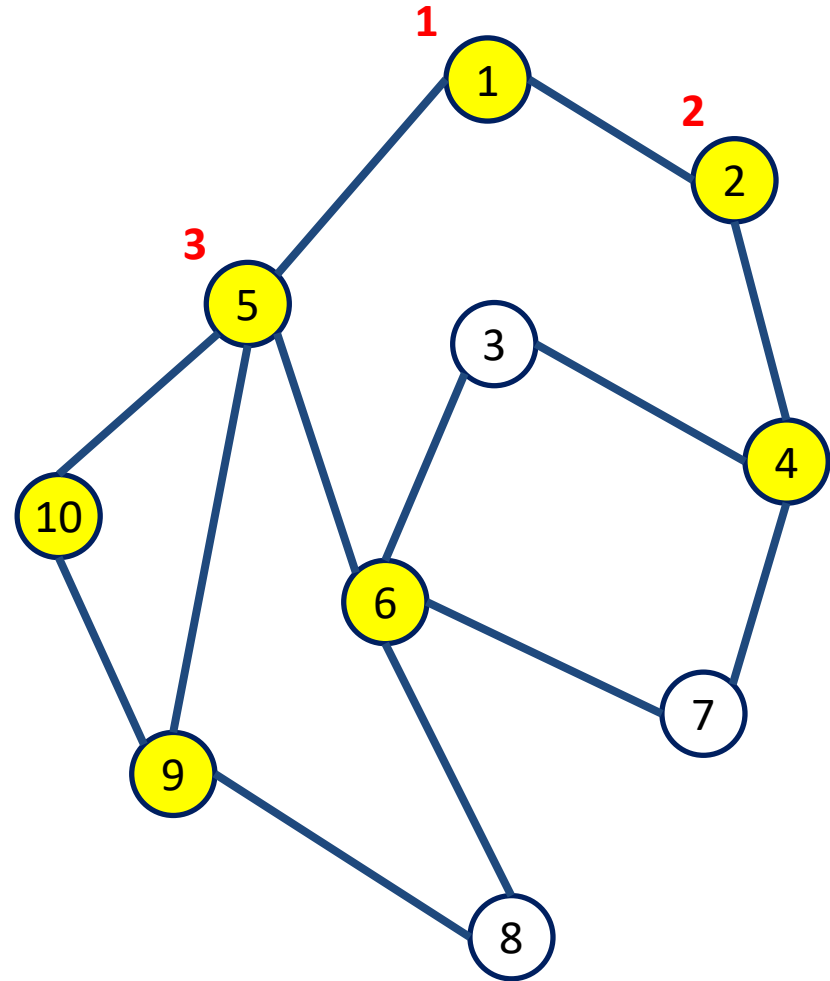
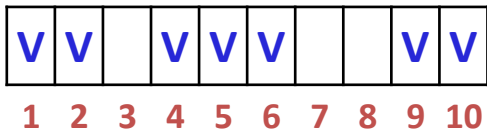
Recorrido en anchura de un grafo

Solución: **Nodo origen = 1**

Cola de nodos:



Marcados:



Recorrido en anchura de un grafo

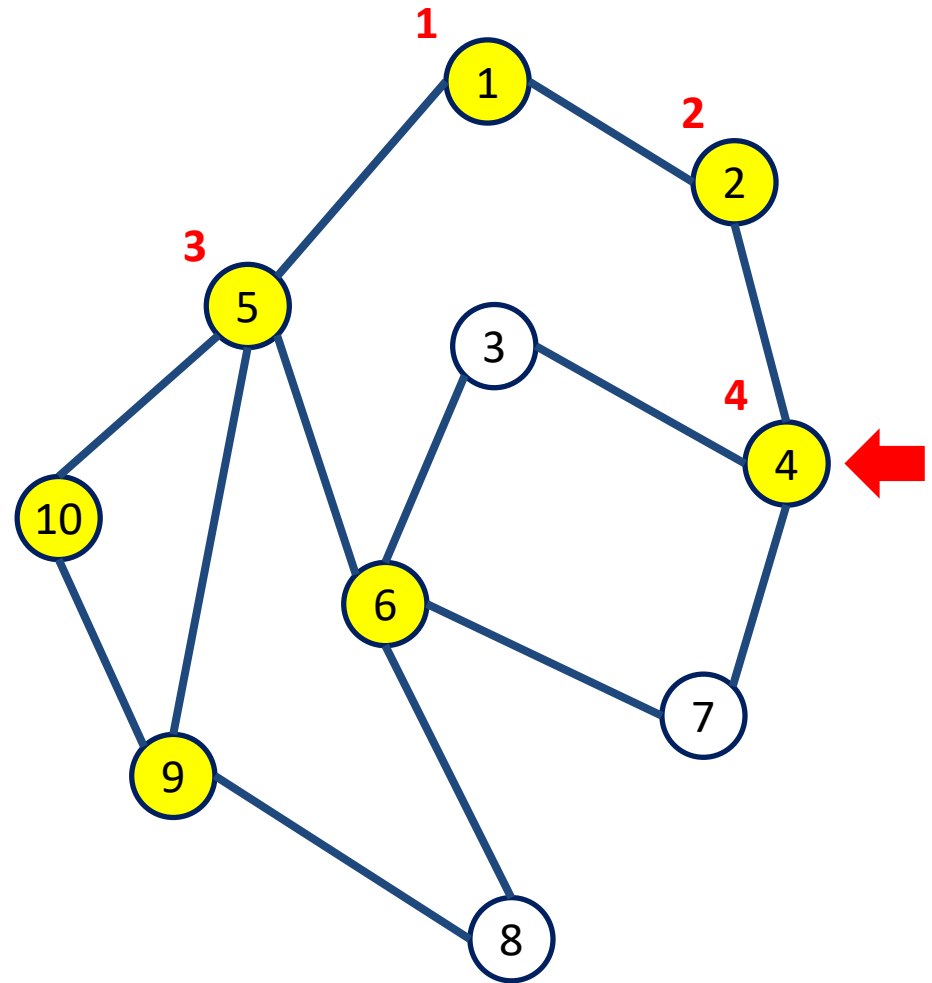
Solución: **Nodo origen = 1**

Cola de nodos:

6	9	10							
---	---	----	--	--	--	--	--	--	--

Marcados:

V	V		V	V	V			V	V
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



Recorrido en anchura de un grafo

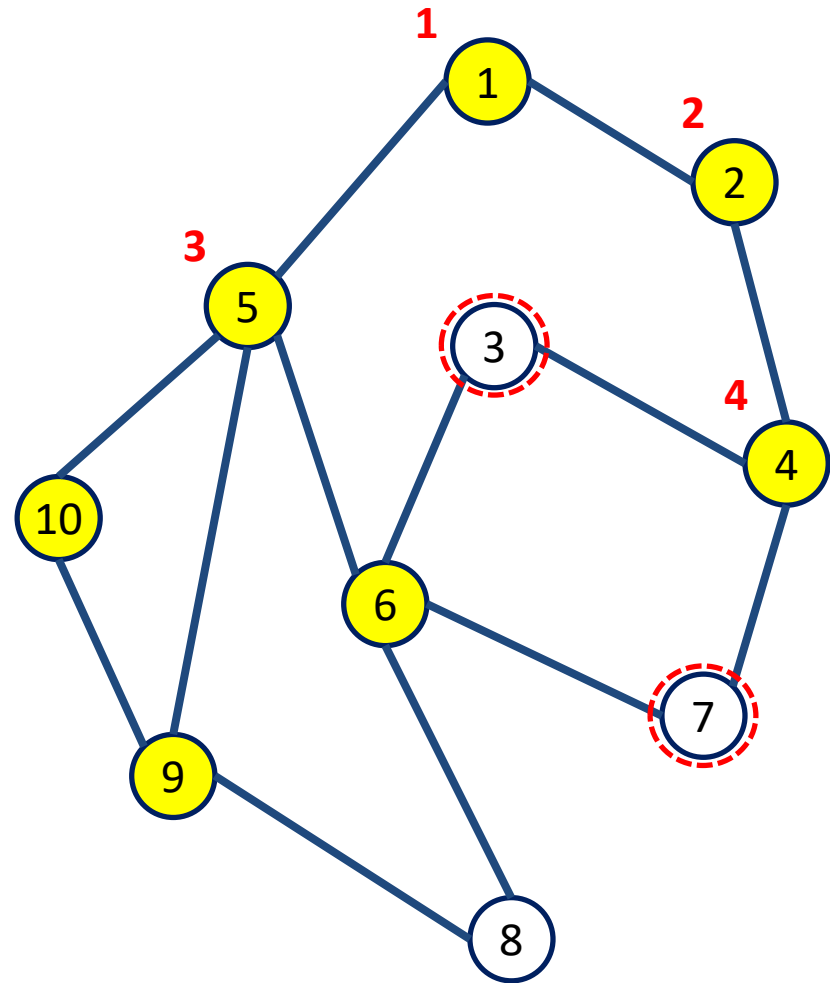
Solución: **Nodo origen = 1**

Cola de nodos:

6	9	10							
---	---	----	--	--	--	--	--	--	--

Marcados:

V	V		V	V	V			V	V
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



Recorrido en anchura de un grafo

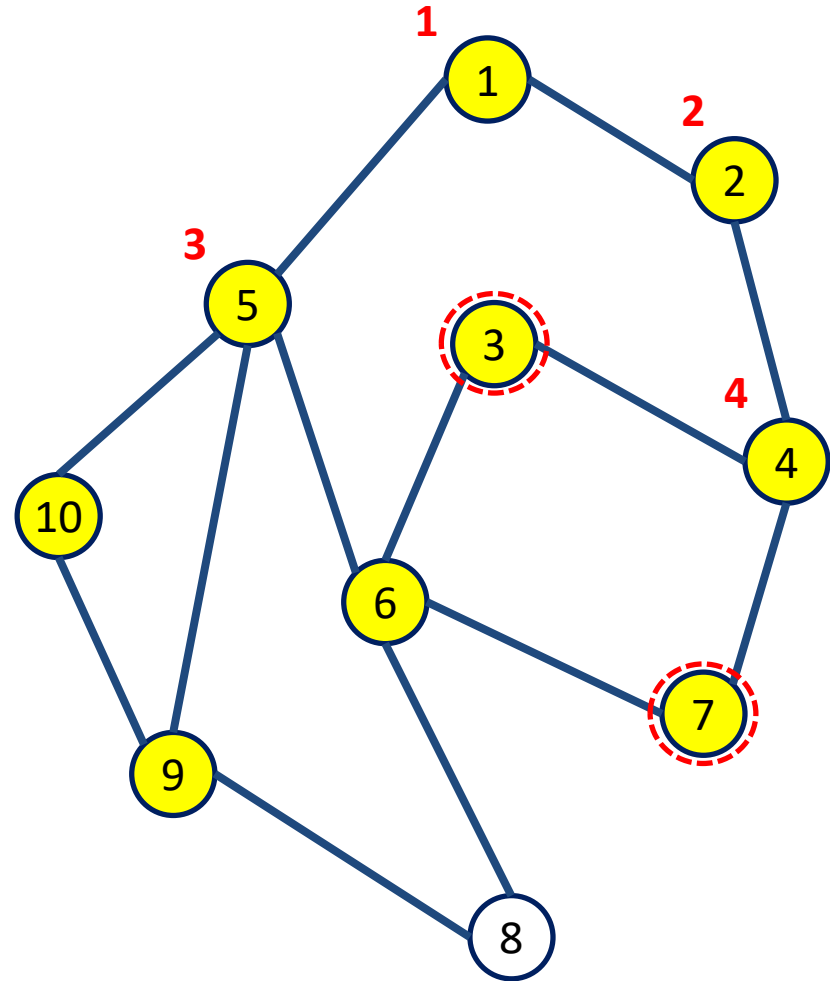
Solución: **Nodo origen = 1**

Cola de nodos:

6	9	10	3	7					
---	---	----	---	---	--	--	--	--	--

Marcados:

V	V	V	V	V	V	V		V	V
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



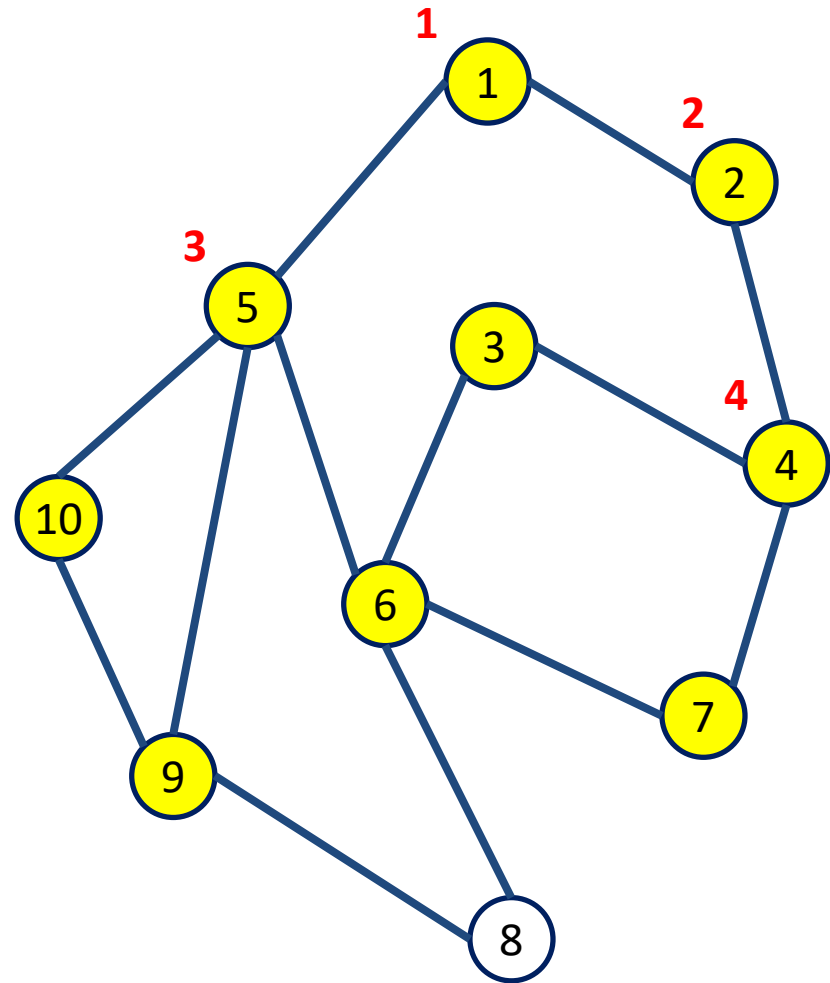
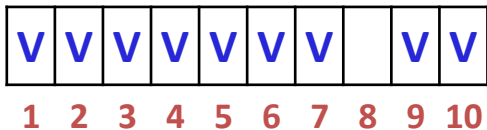
Recorrido en anchura de un grafo

Solución: **Nodo origen = 1**

Cola de nodos:



Marcados:



Recorrido en anchura de un grafo

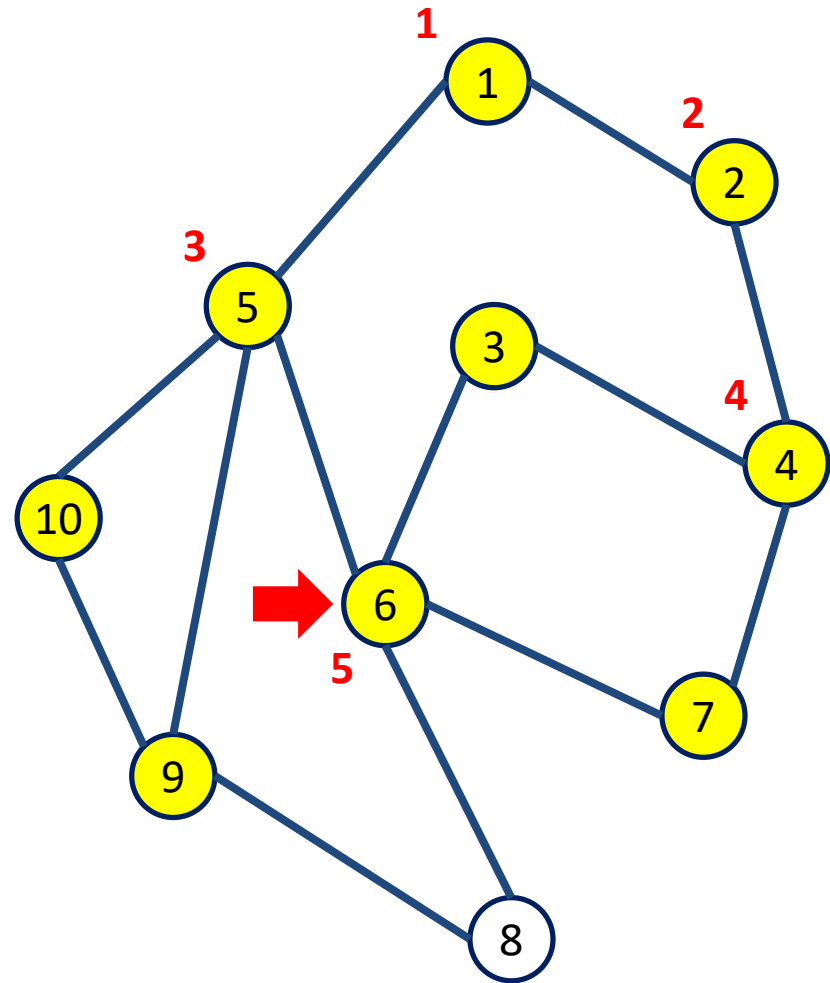
Solución: **Nodo origen = 1**

Cola de nodos:

9	10	3	7						
---	----	---	---	--	--	--	--	--	--

Marcados:

V	V	V	V	V	V	V		V	V
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



Recorrido en anchura de un grafo

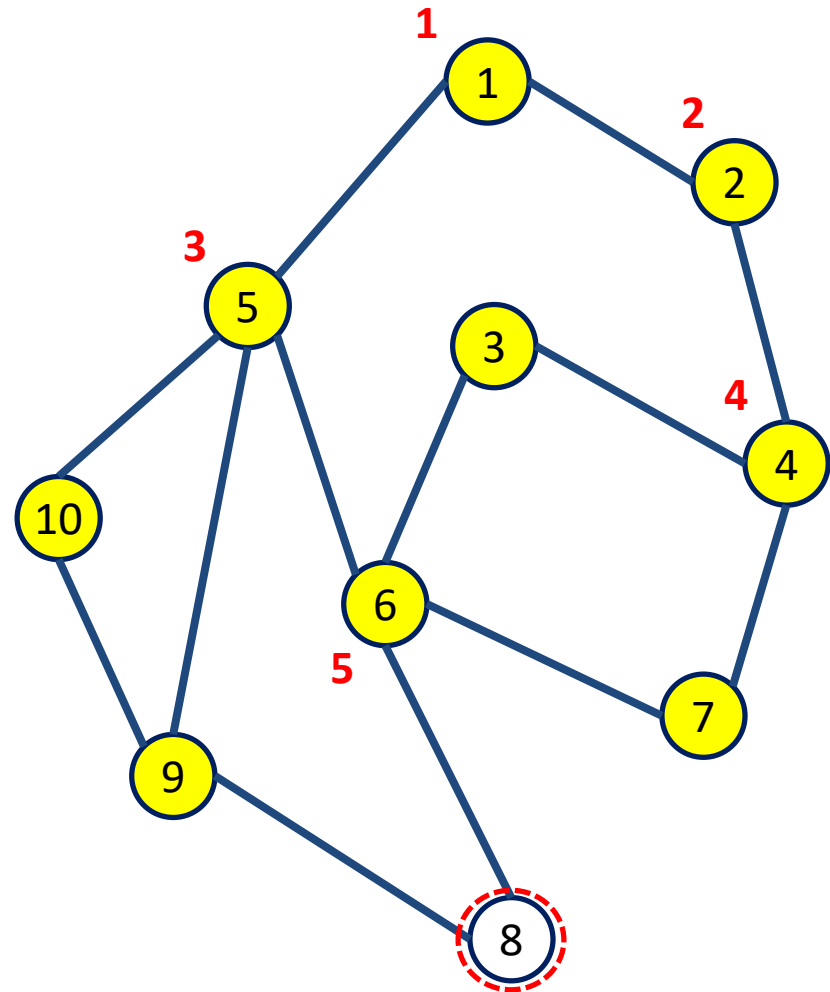
Solución: **Nodo origen = 1**

Cola de nodos:

9	10	3	7						
---	----	---	---	--	--	--	--	--	--

Marcados:

V	V	V	V	V	V	V		V	V
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



Recorrido en anchura de un grafo

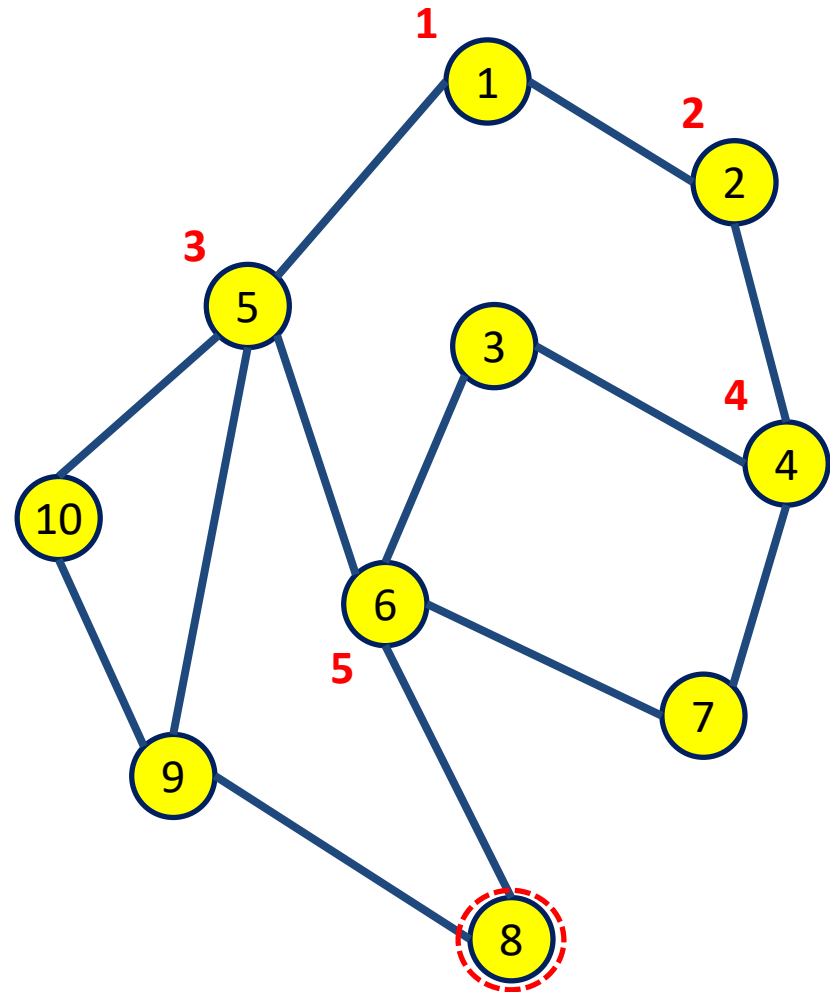
Solución: **Nodo origen = 1**

Cola de nodos:

9	10	3	7	8					
---	----	---	---	---	--	--	--	--	--

Marcados:

V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



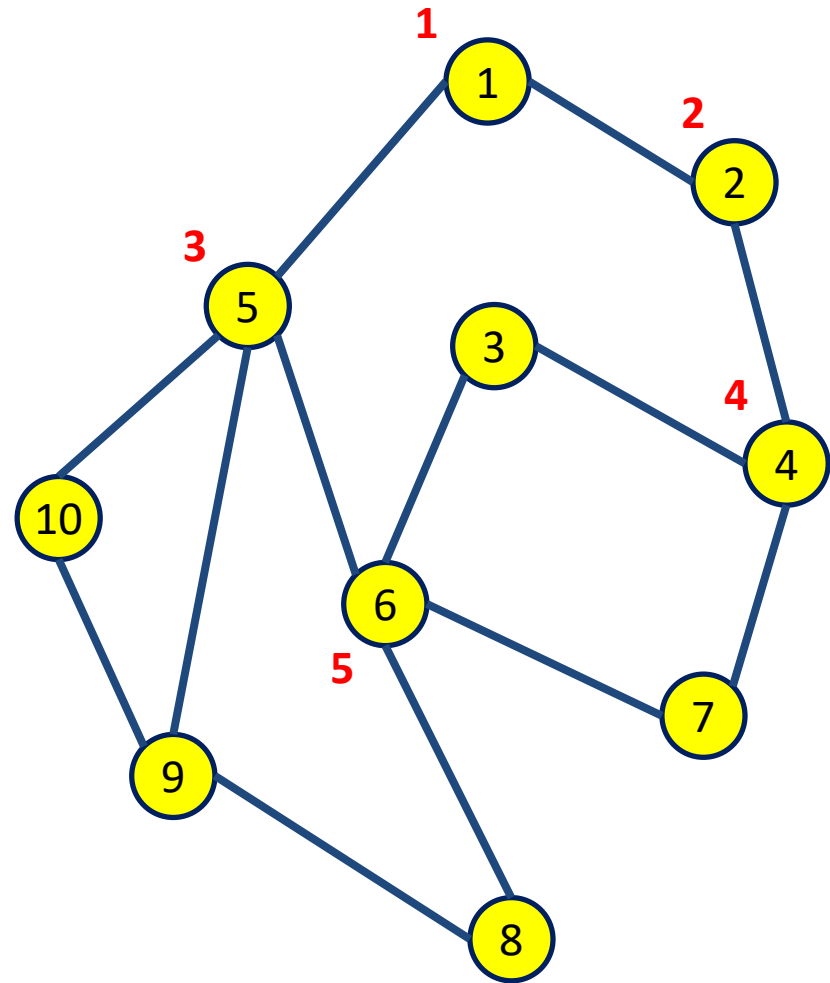
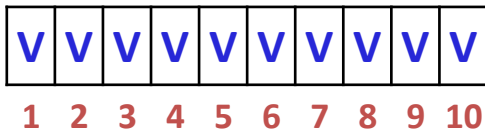
Recorrido en anchura de un grafo

Solución: **Nodo origen = 1**

Cola de nodos:



Marcados:



Recorrido en anchura de un grafo

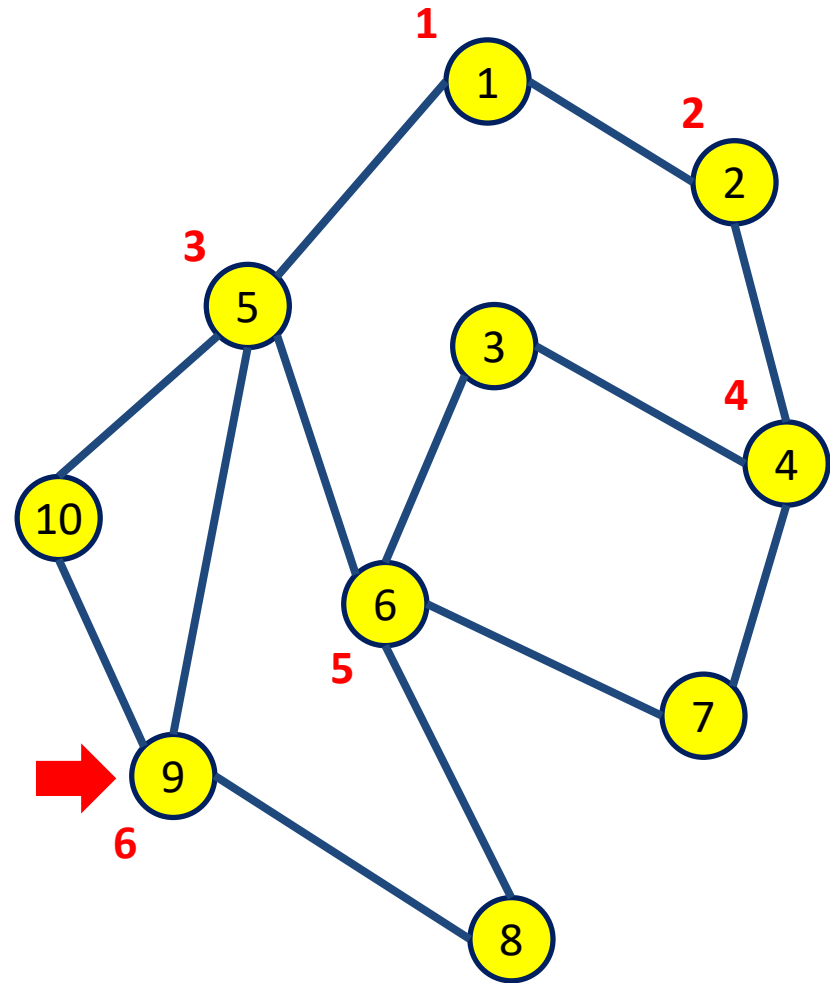
Solución: **Nodo origen = 1**

Cola de nodos:

10	3	7	8						
----	---	---	---	--	--	--	--	--	--

Marcados:

V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



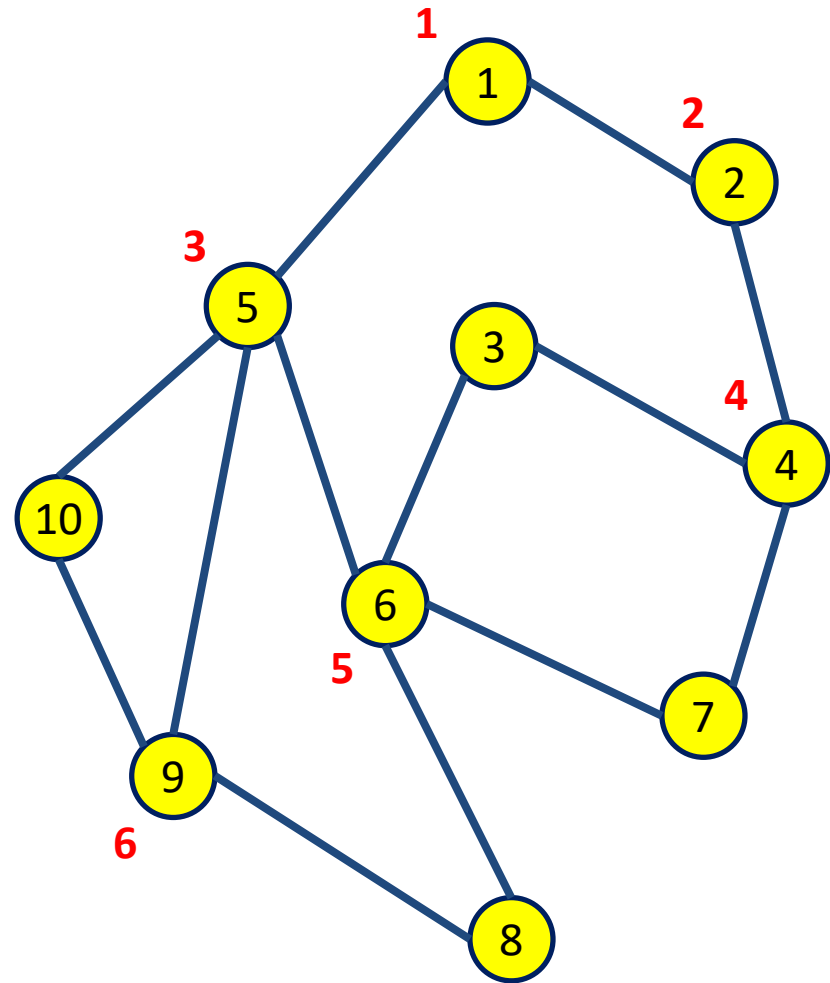
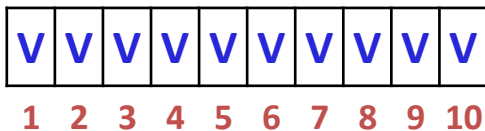
Recorrido en anchura de un grafo

Solución: Nodo origen = 1

Cola de nodos:



Marcados:



Recorrido en anchura de un grafo

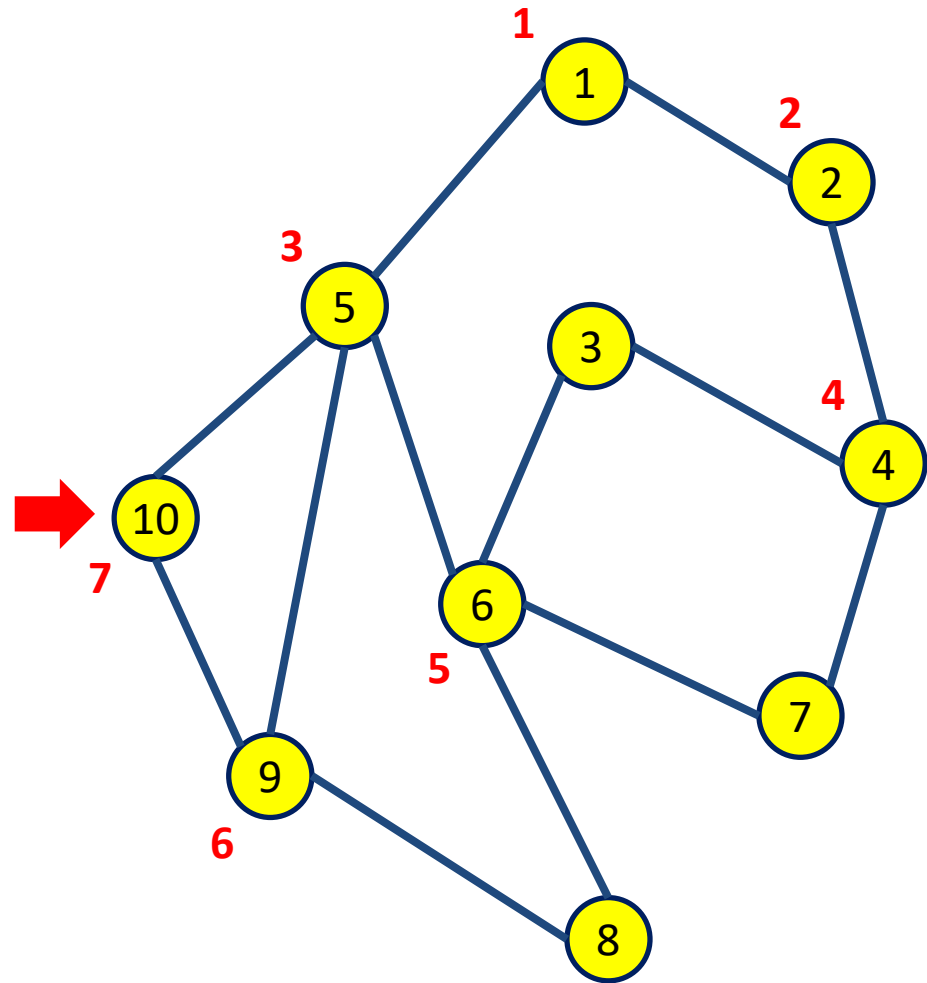
Solución: Nodo origen = 1

Cola de nodos:

3	7	8							
---	---	---	--	--	--	--	--	--	--

Marcados:

V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



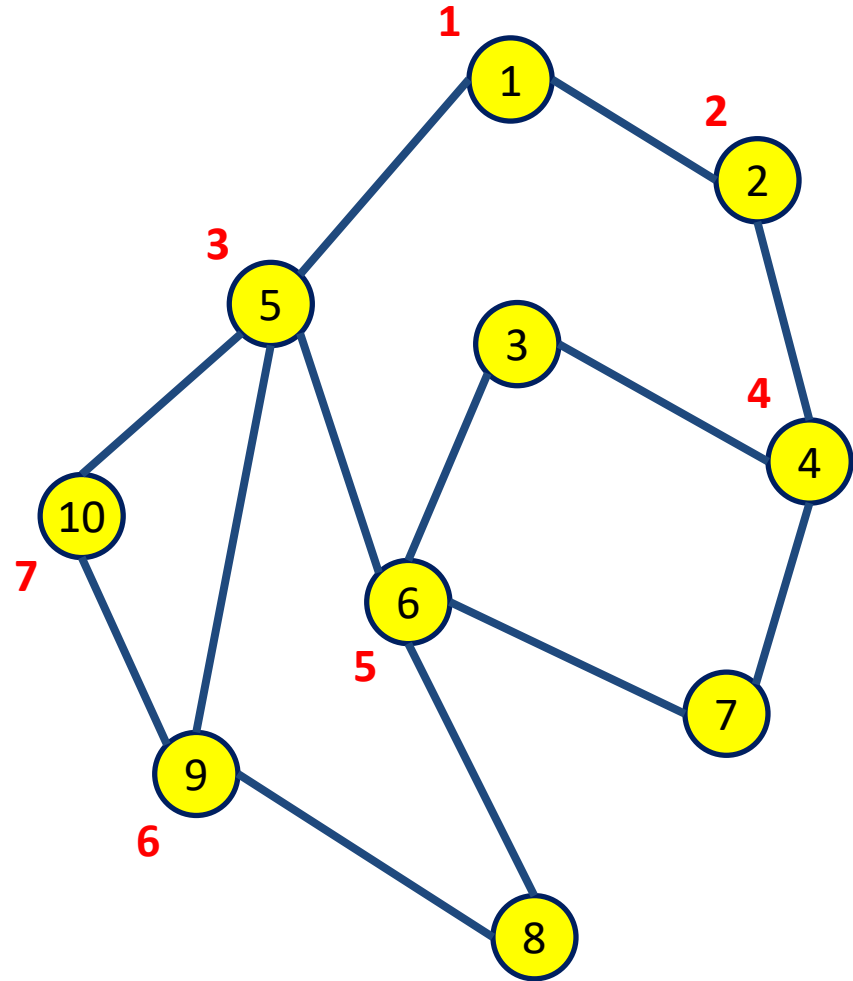
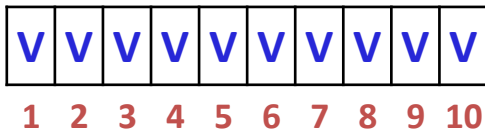
Recorrido en anchura de un grafo

Solución: Nodo origen = 1

Cola de nodos:



Marcados:



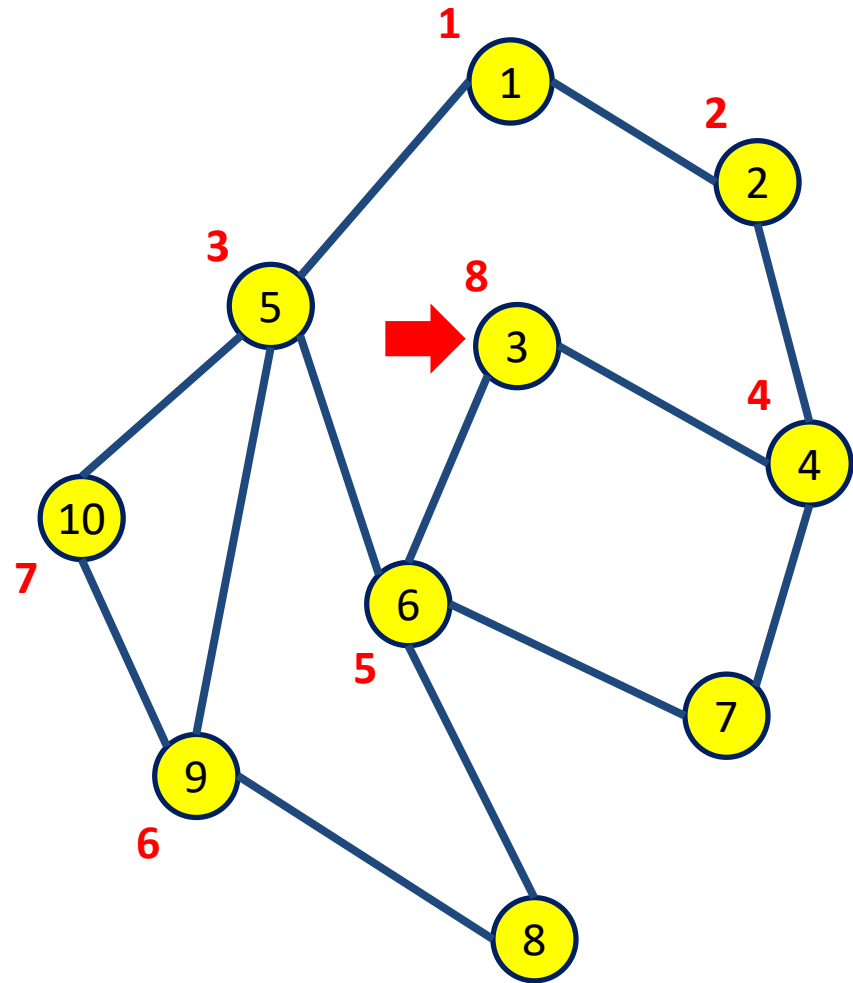
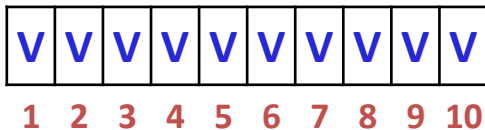
Recorrido en anchura de un grafo

Solución: Nodo origen = 1

Cola de nodos:



Marcados:



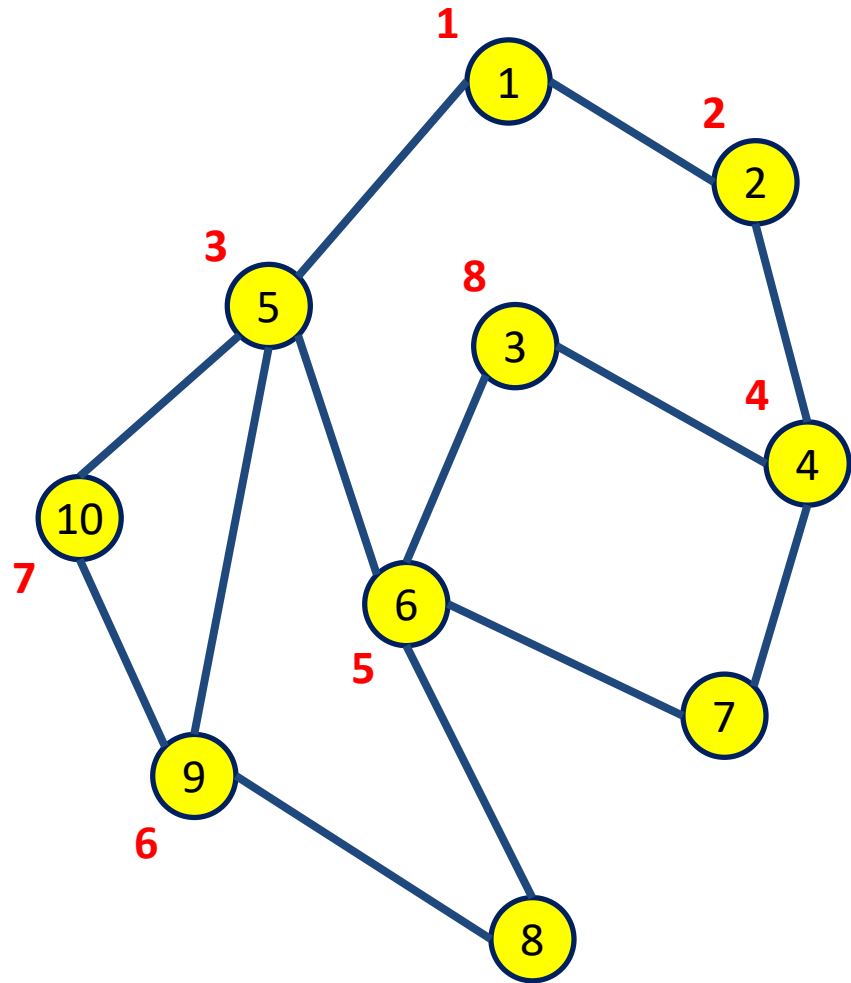
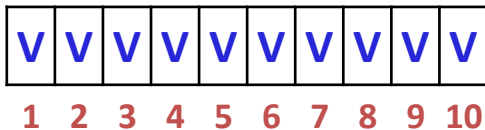
Recorrido en anchura de un grafo

Solución: Nodo origen = 1

Cola de nodos:



Marcados:



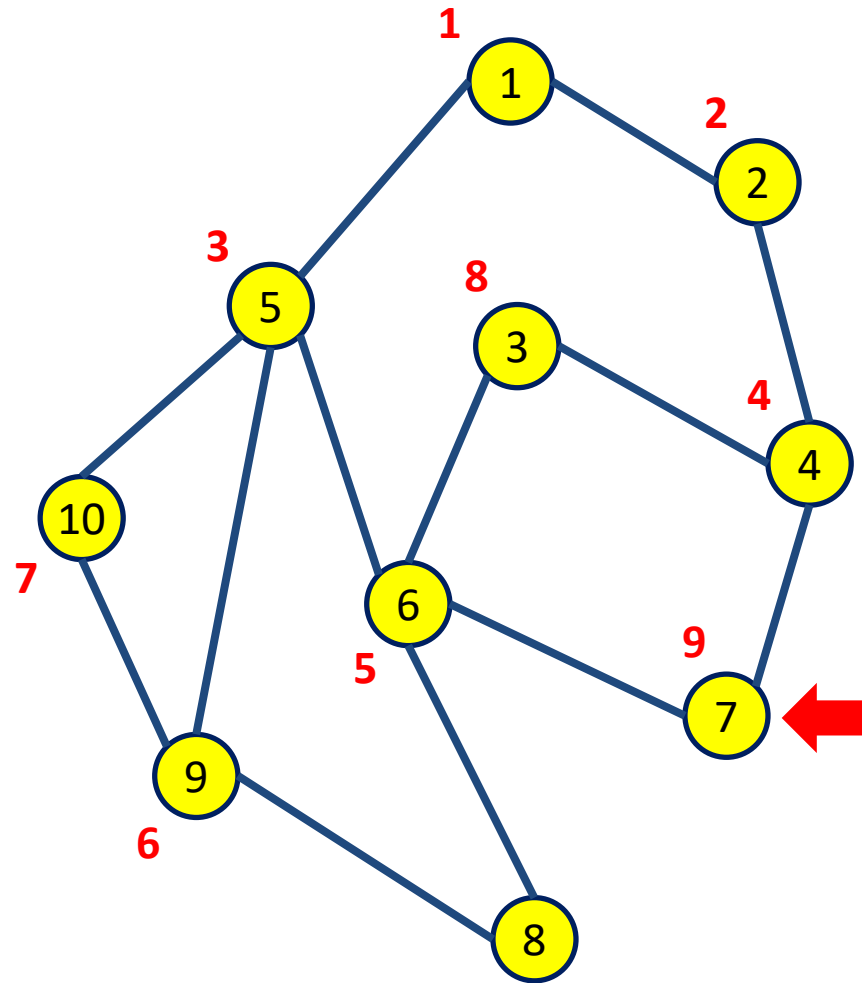
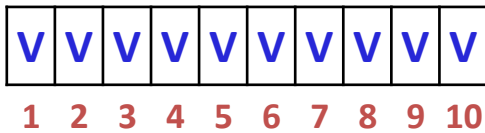
Recorrido en anchura de un grafo

Solución: Nodo origen = 1

Cola de nodos:



Marcados:



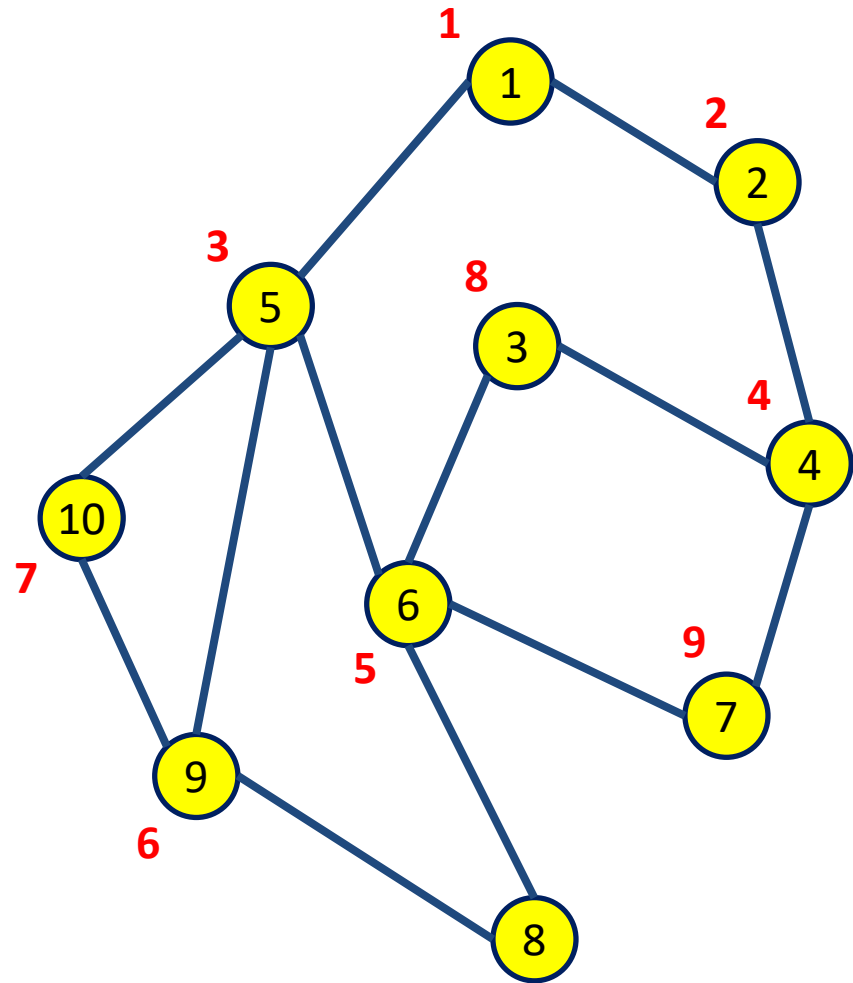
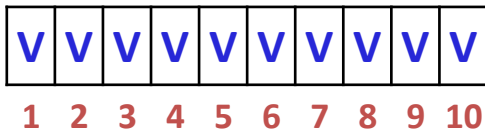
Recorrido en anchura de un grafo

Solución: Nodo origen = 1

Cola de nodos:



Marcados:



Recorrido en anchura de un grafo

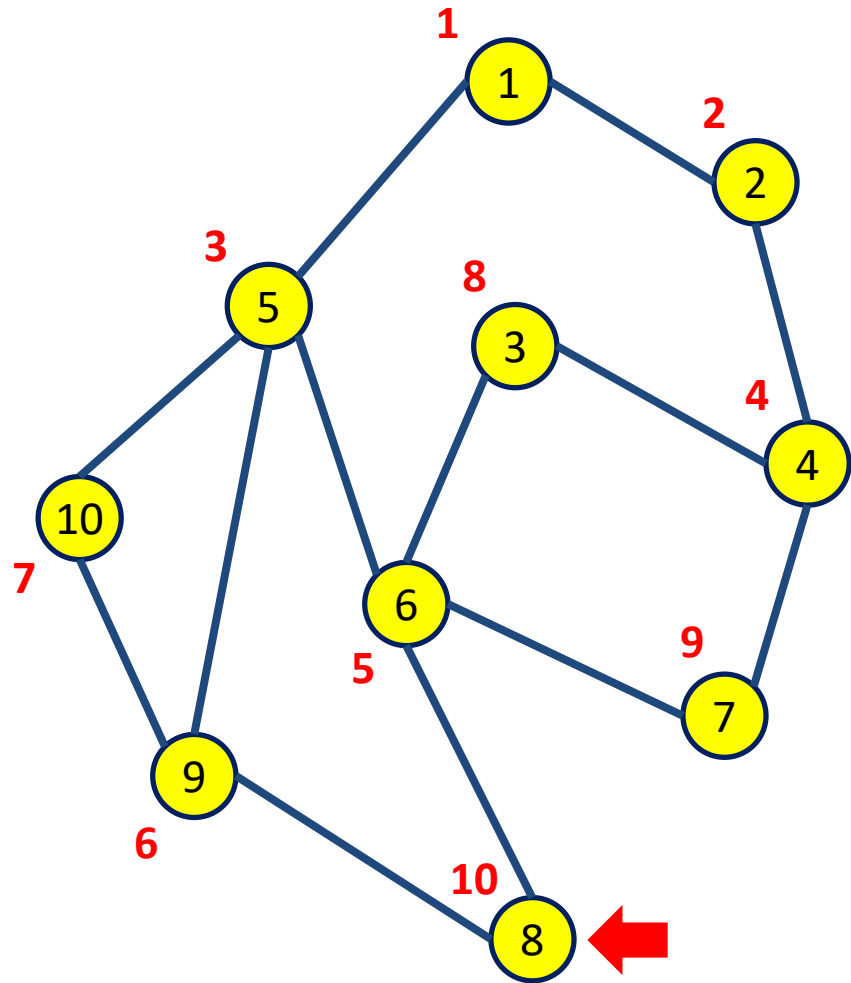
Solución: Nodo origen = 1

Cola de nodos:



Marcados:

V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



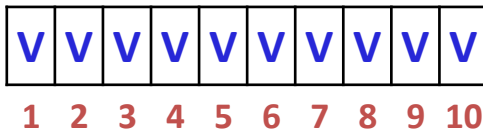
Recorrido en anchura de un grafo

Solución: Nodo origen = 1

Cola de nodos:

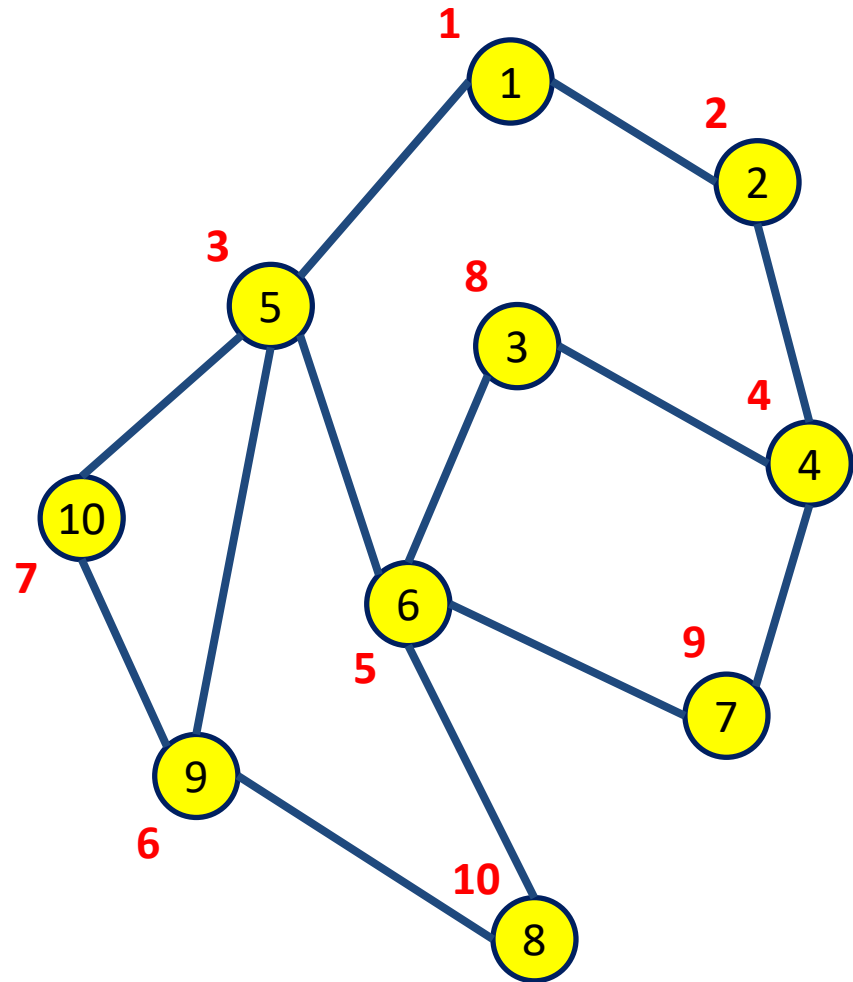


Marcados:



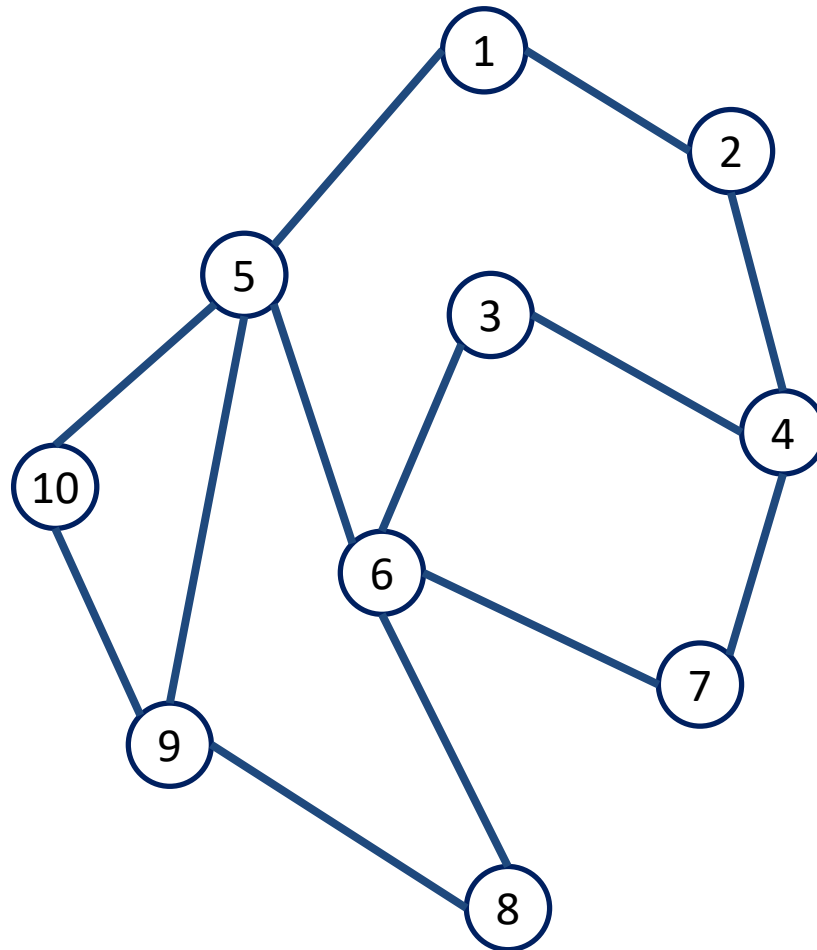
La cola está vacía entonces
FIN DEL PROCESO

Recorrido: **1 - 2 - 5 - 4 - 6 - 9 - 10 - 3 - 7 - 8**



Recorrido en profundidad de un grafo

Ejercicio 2: realizar el recorrido en profundidad del siguiente grafo no dirigido para numerarlo en preorden



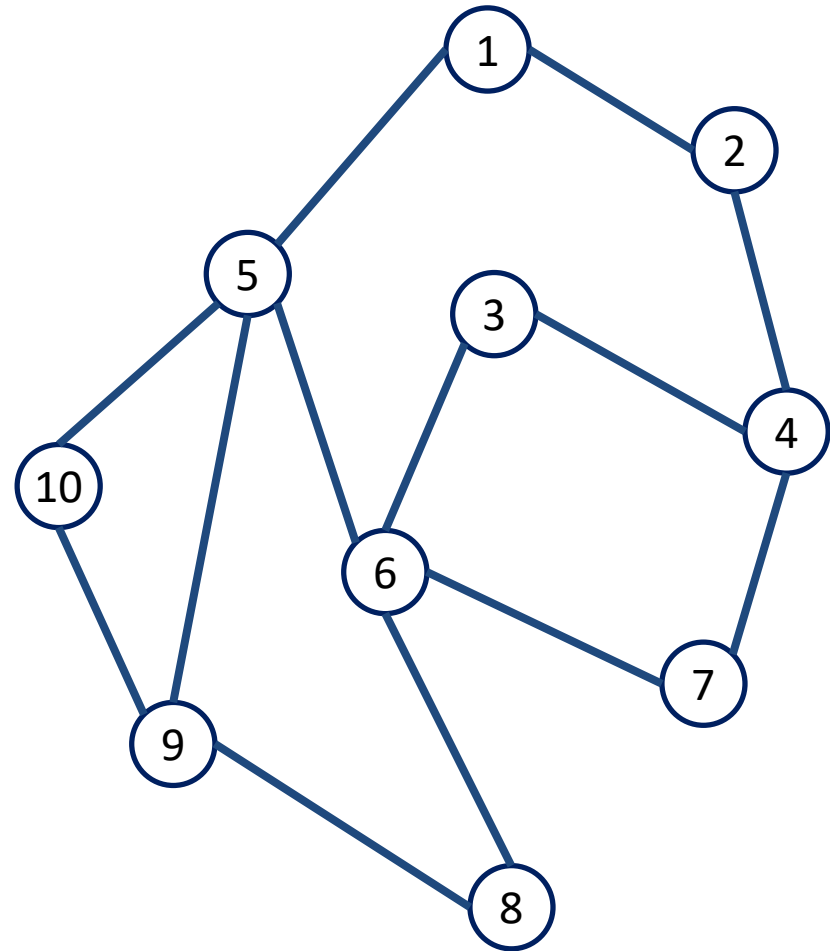
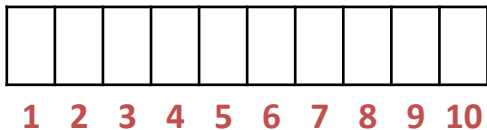
Recorrido en profundidad de un grafo

Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Marcados:



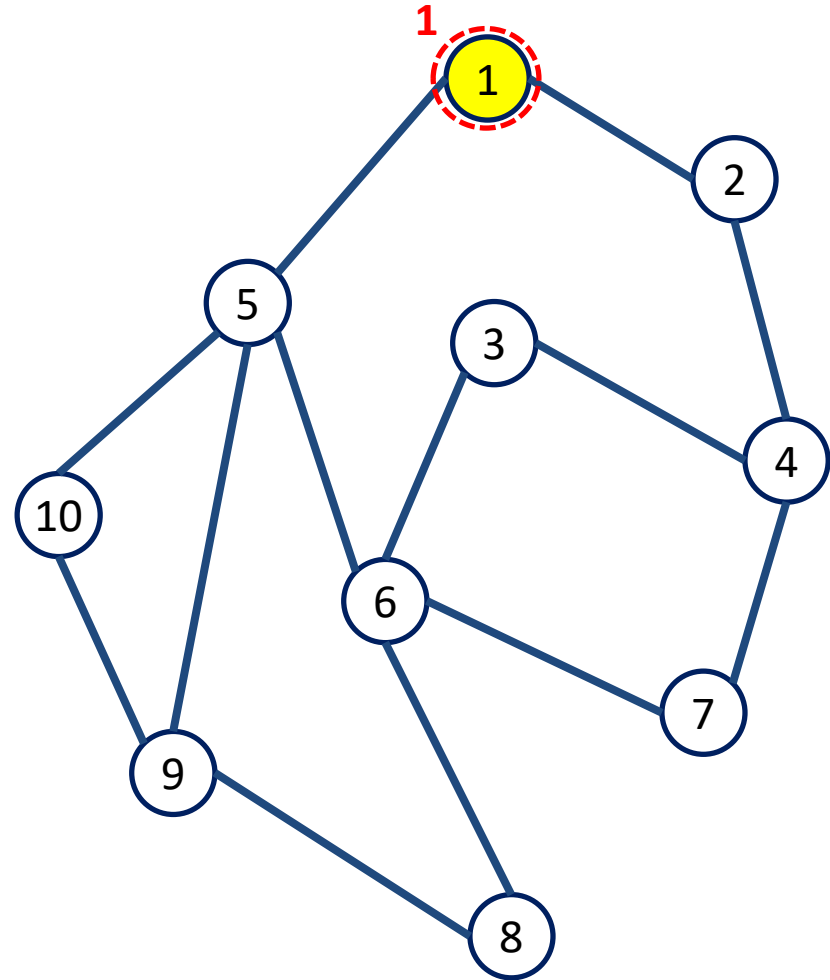
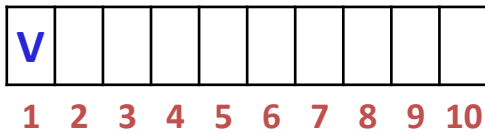
Recorrido en profundidad de un grafo

Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

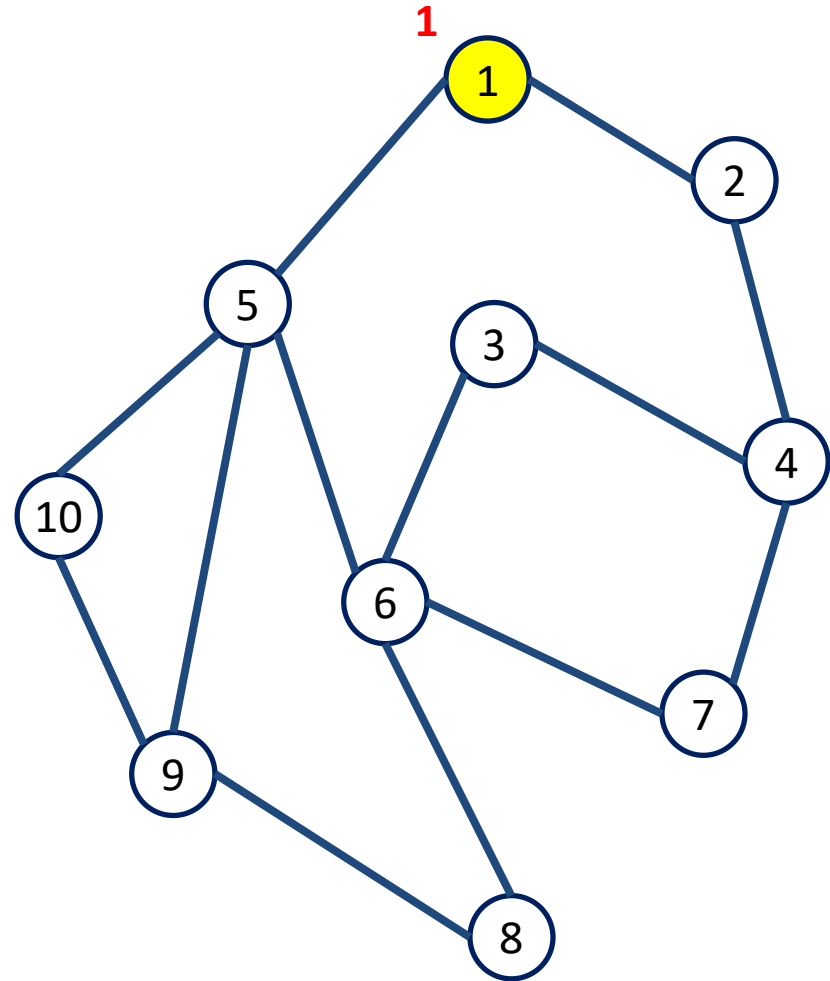
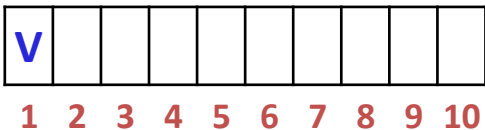
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Cima

Marcados:



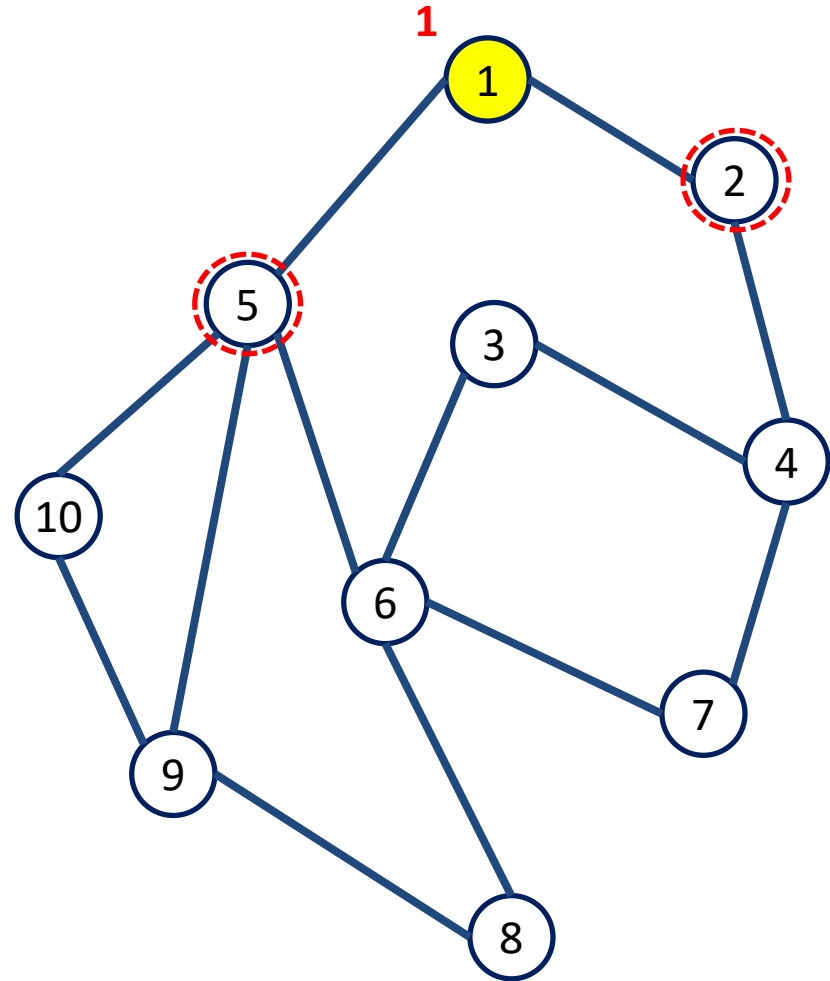
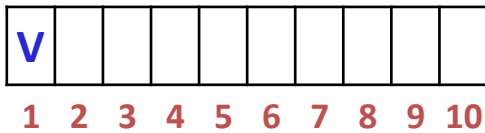
Recorrido en profundidad de un grafo

Solución: **Nodo origen = 1**

Pila:



Marcados:



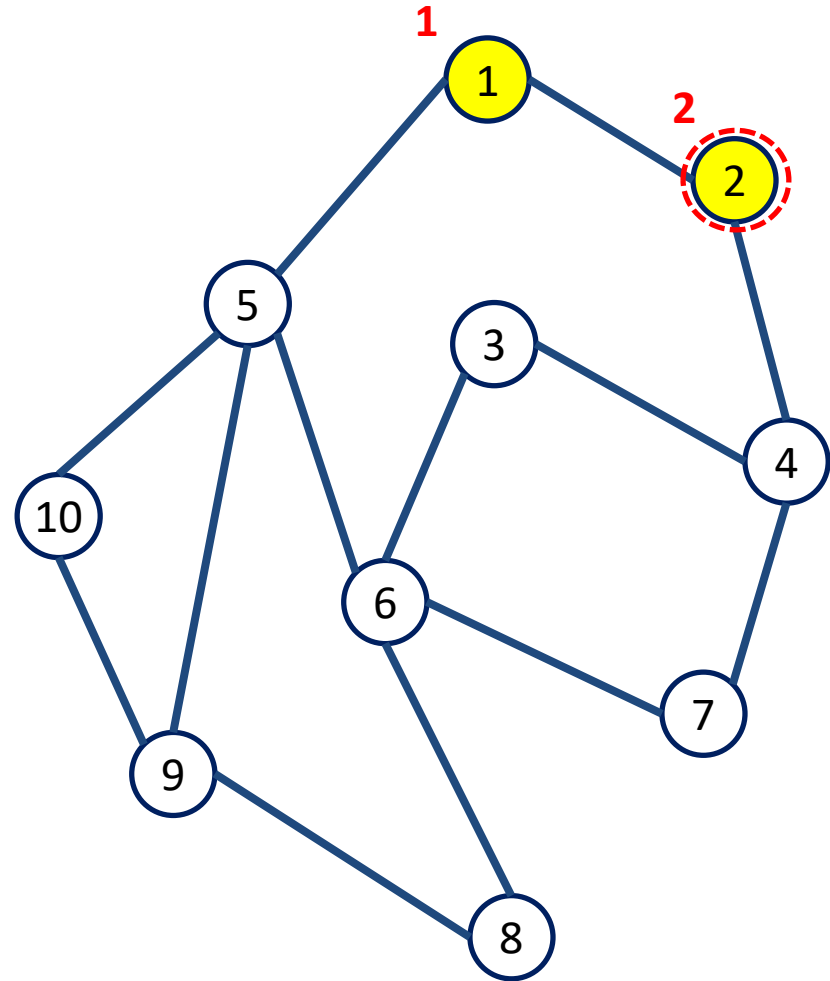
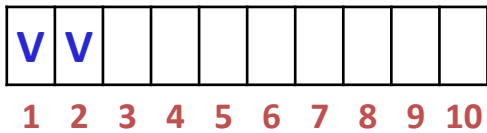
Recorrido en profundidad de un grafo

Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

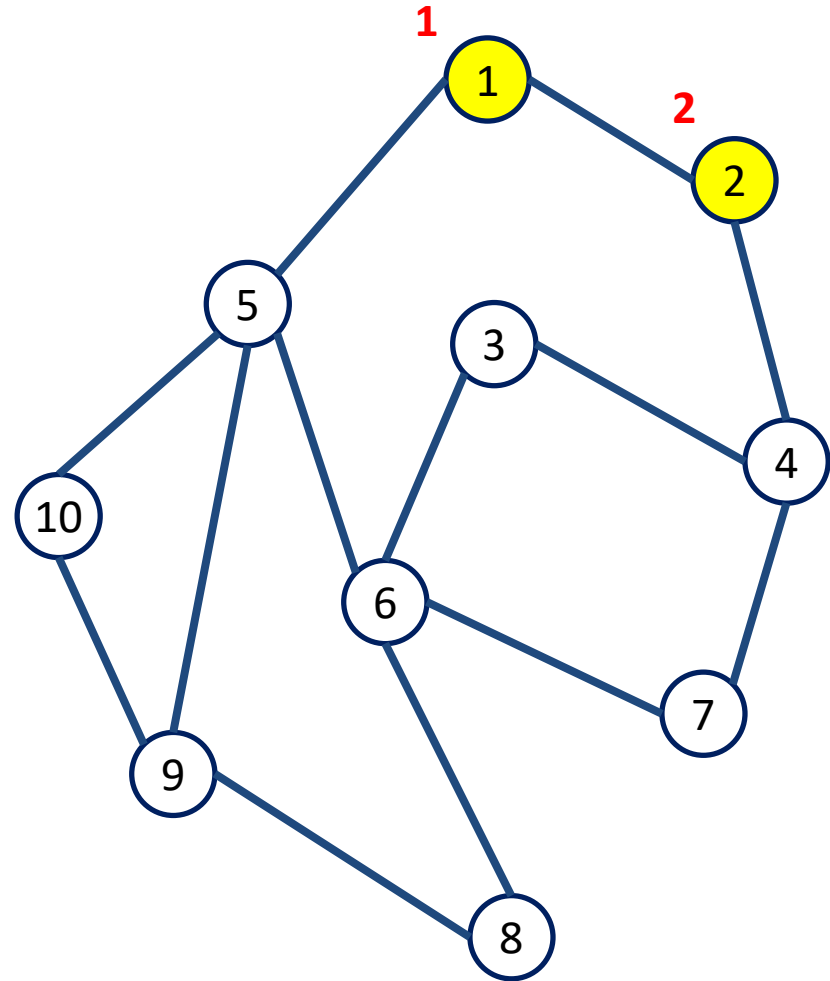
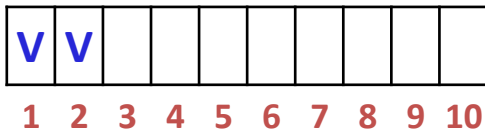
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Cima

Marcados:



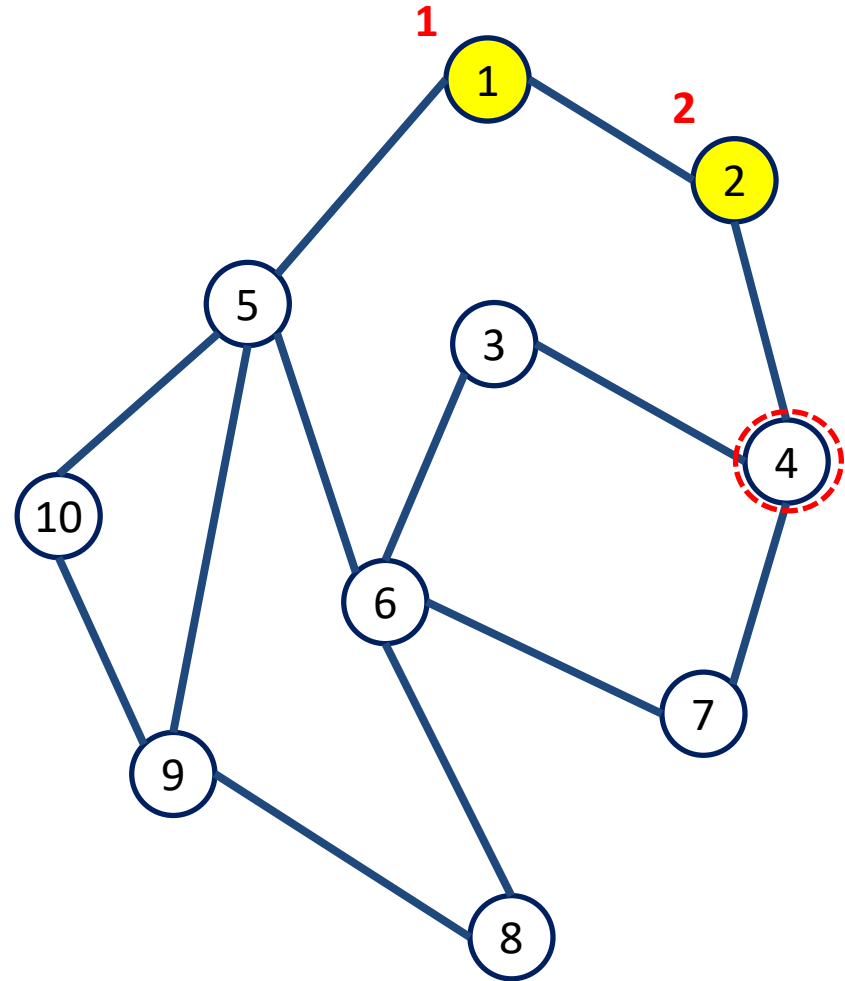
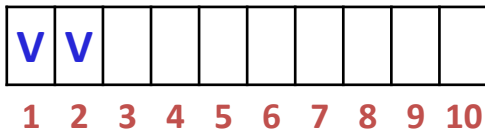
Recorrido en profundidad de un grafo

Solución: **Nodo origen = 1**

Pila:



Marcados:



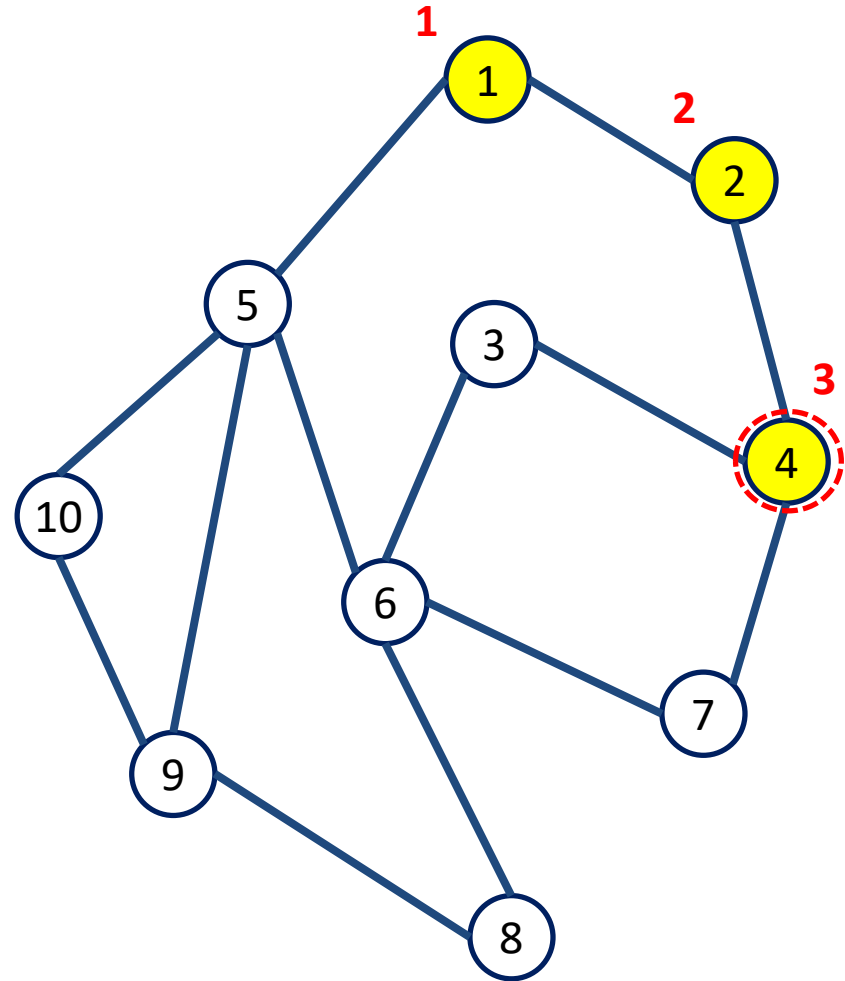
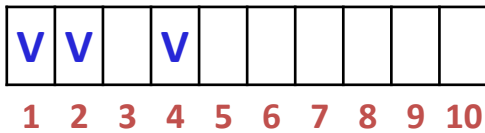
Recorrido en profundidad de un grafo

Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

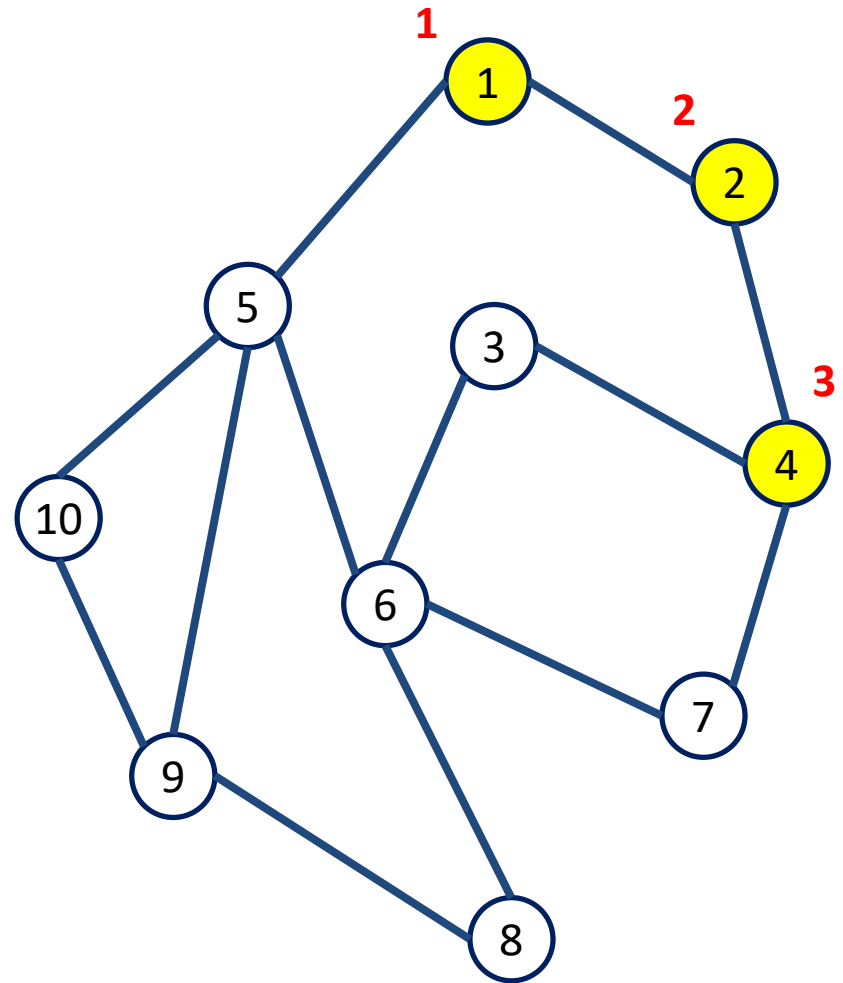
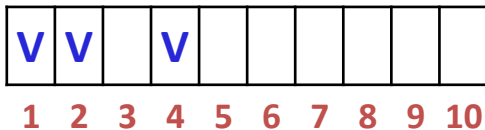
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Cima

Marcados:



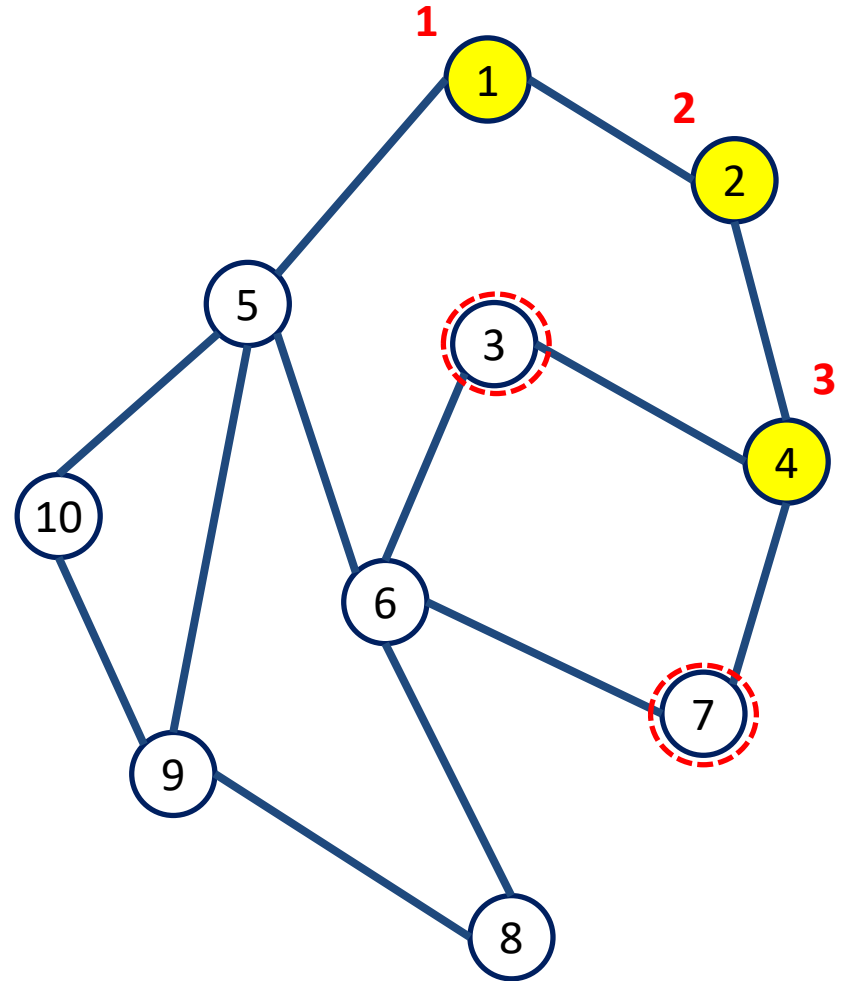
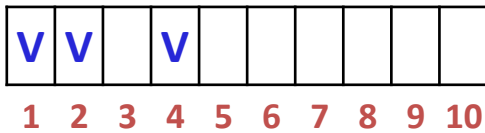
Recorrido en profundidad de un grafo

Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Marcados:



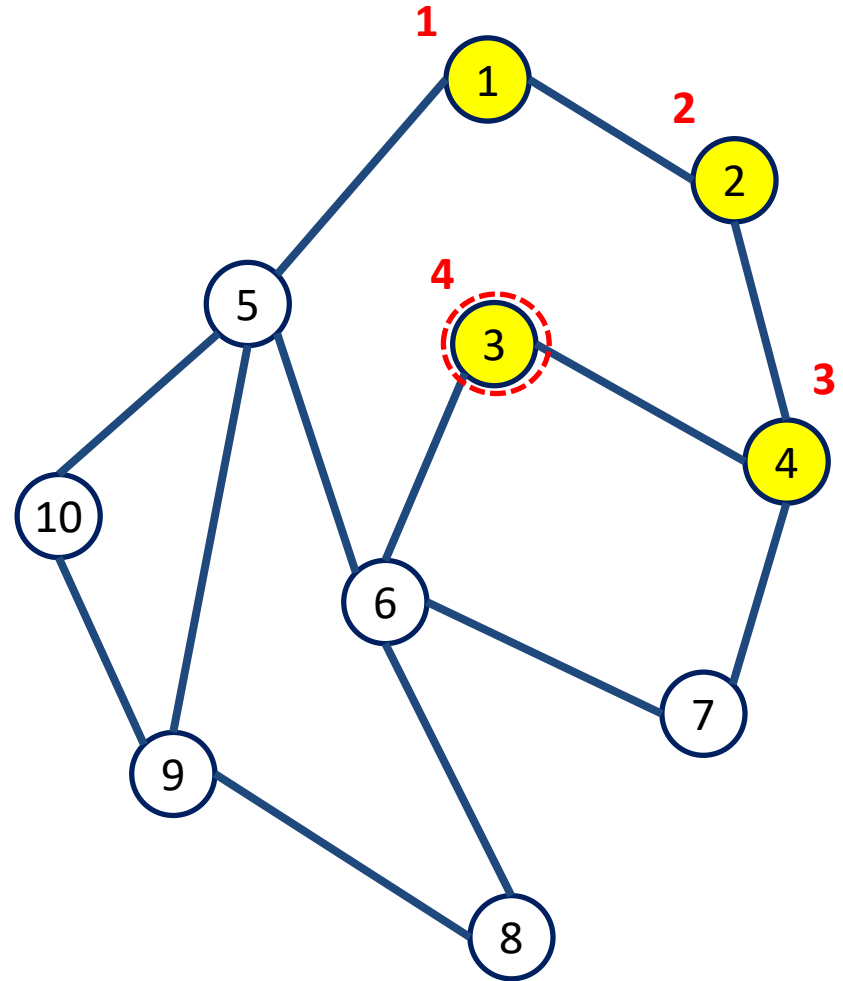
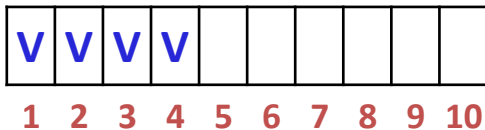
Recorrido en profundidad de un grafo

Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

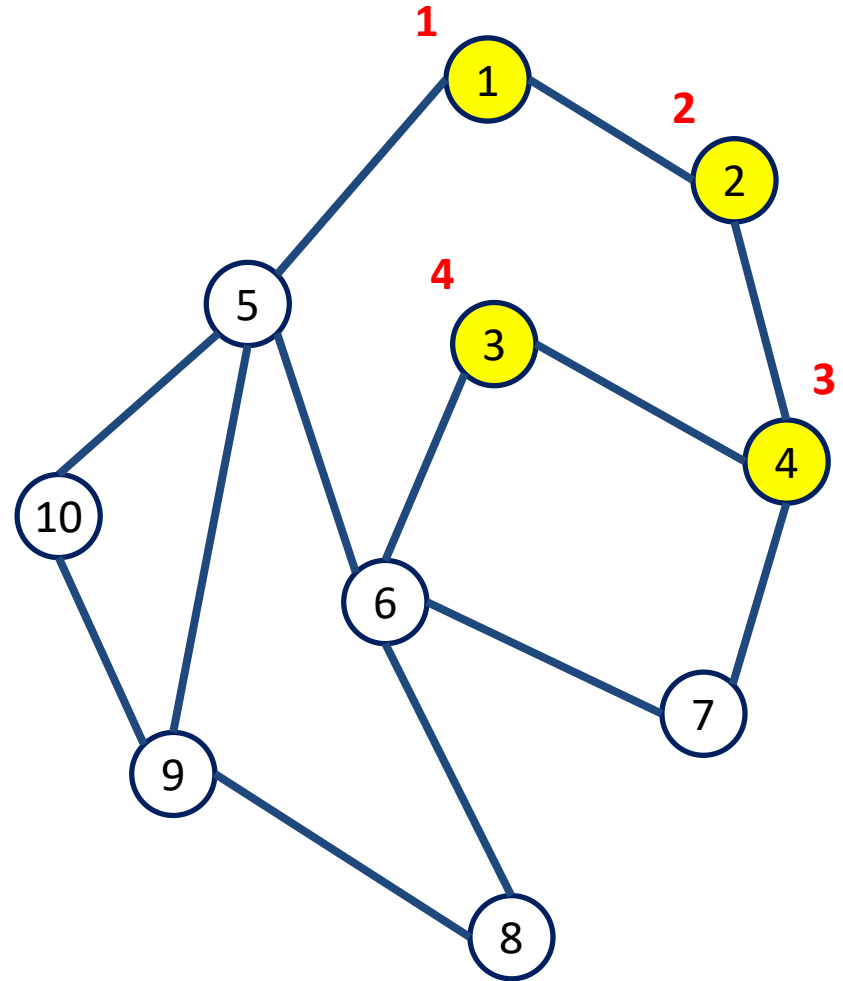
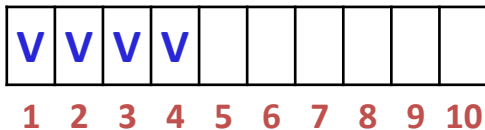
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Cima

Marcados:



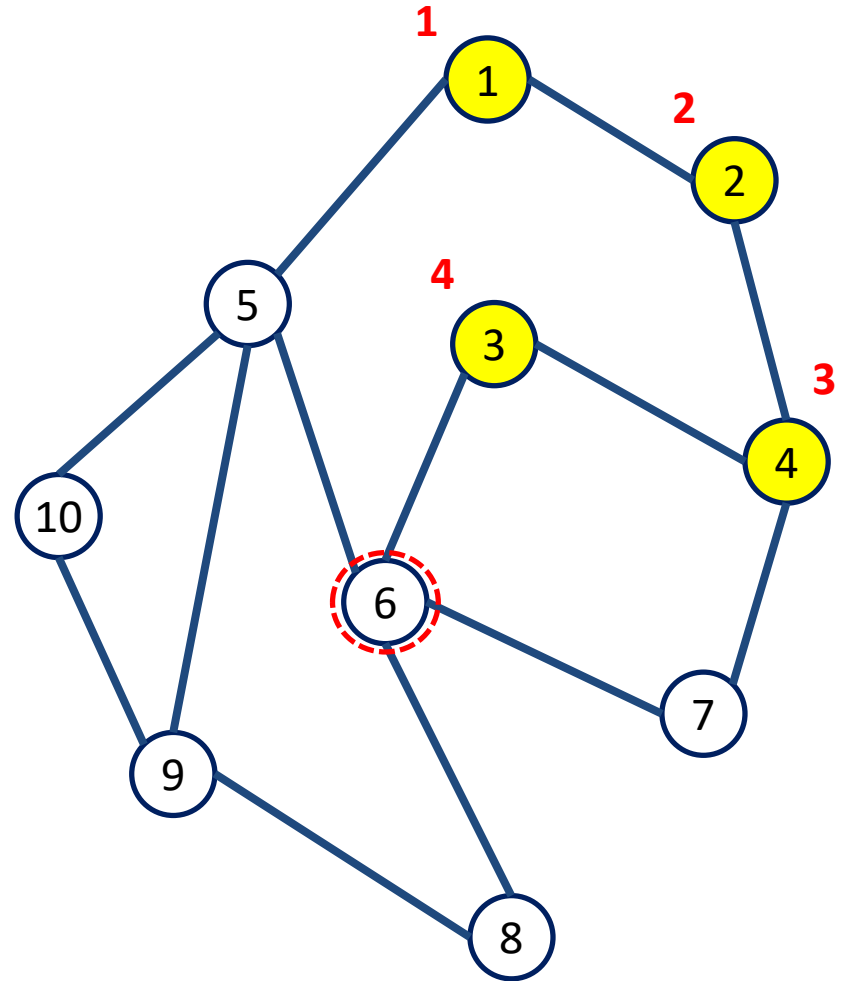
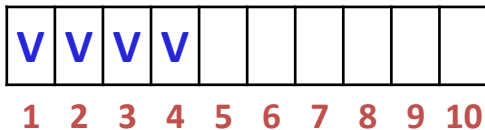
Recorrido en profundidad de un grafo

Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Marcados:



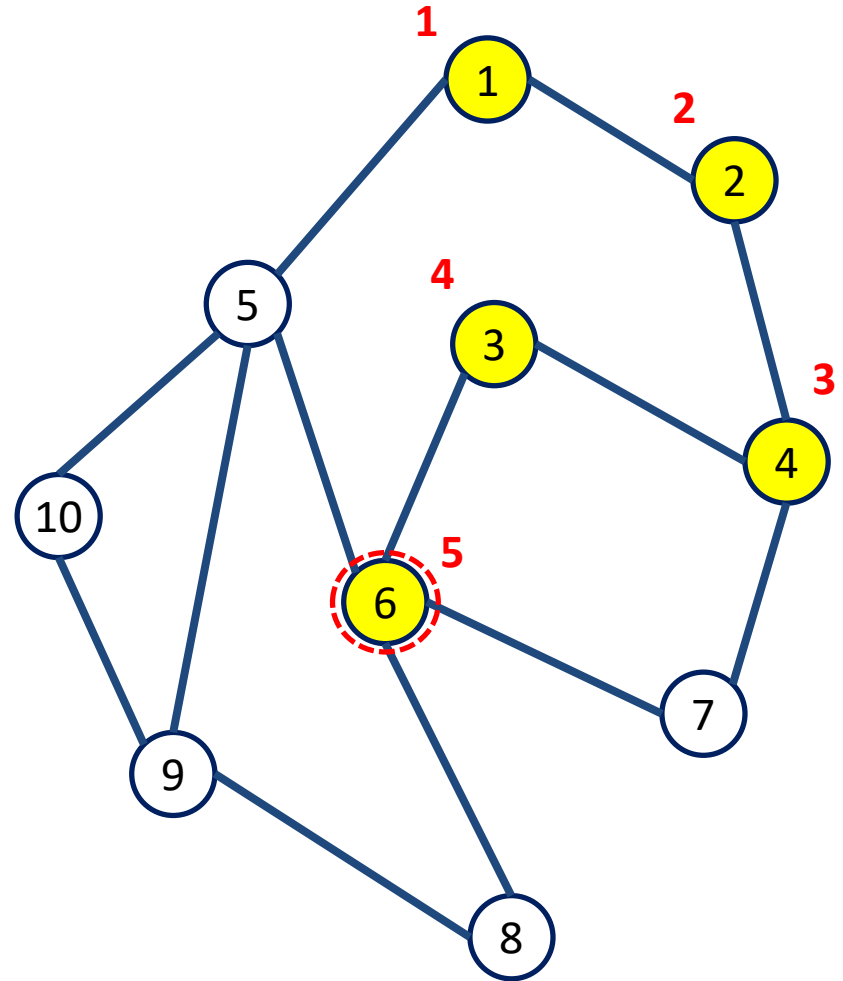
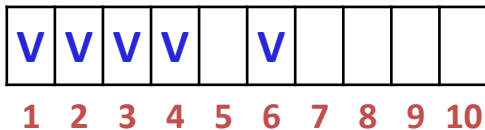
Recorrido en profundidad de un grafo

Solución: Nodo origen = 1

Pila:



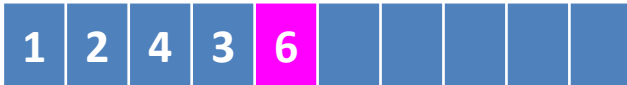
Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

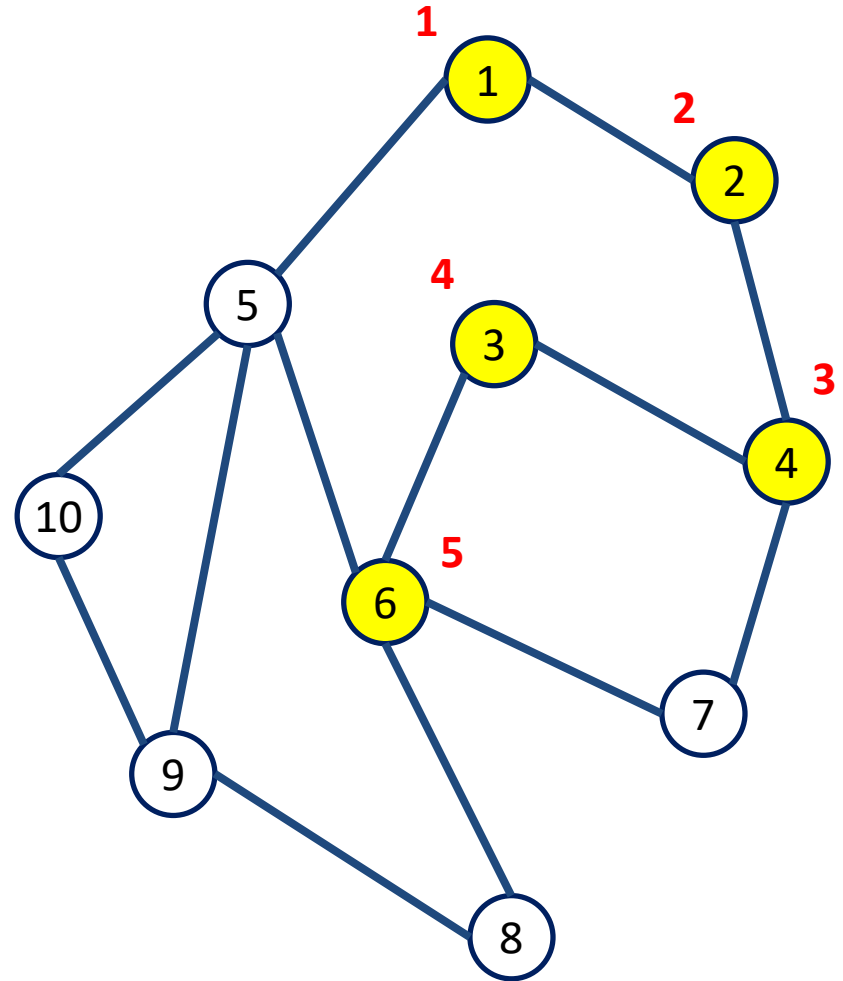
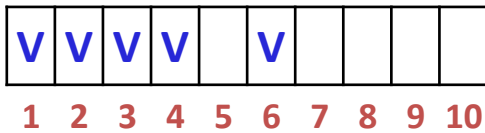
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Cima

Marcados:



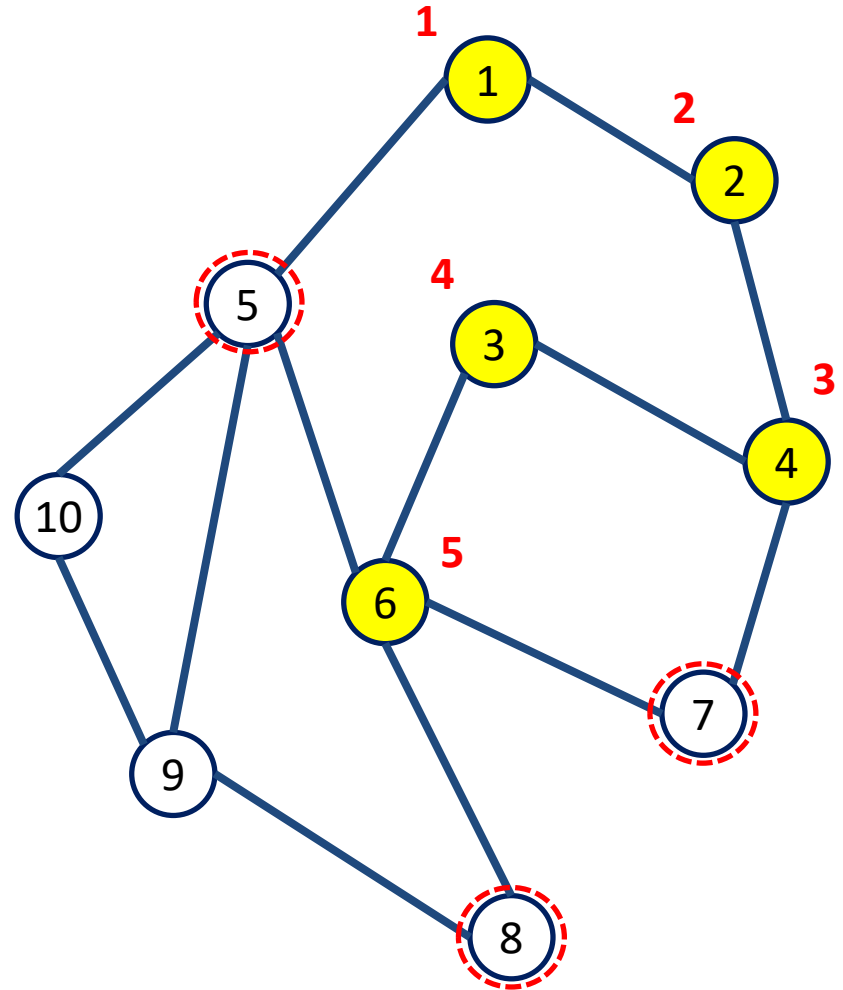
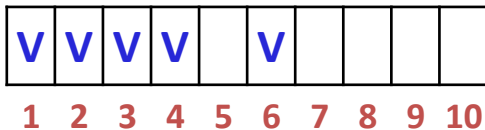
Recorrido en profundidad de un grafo

Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

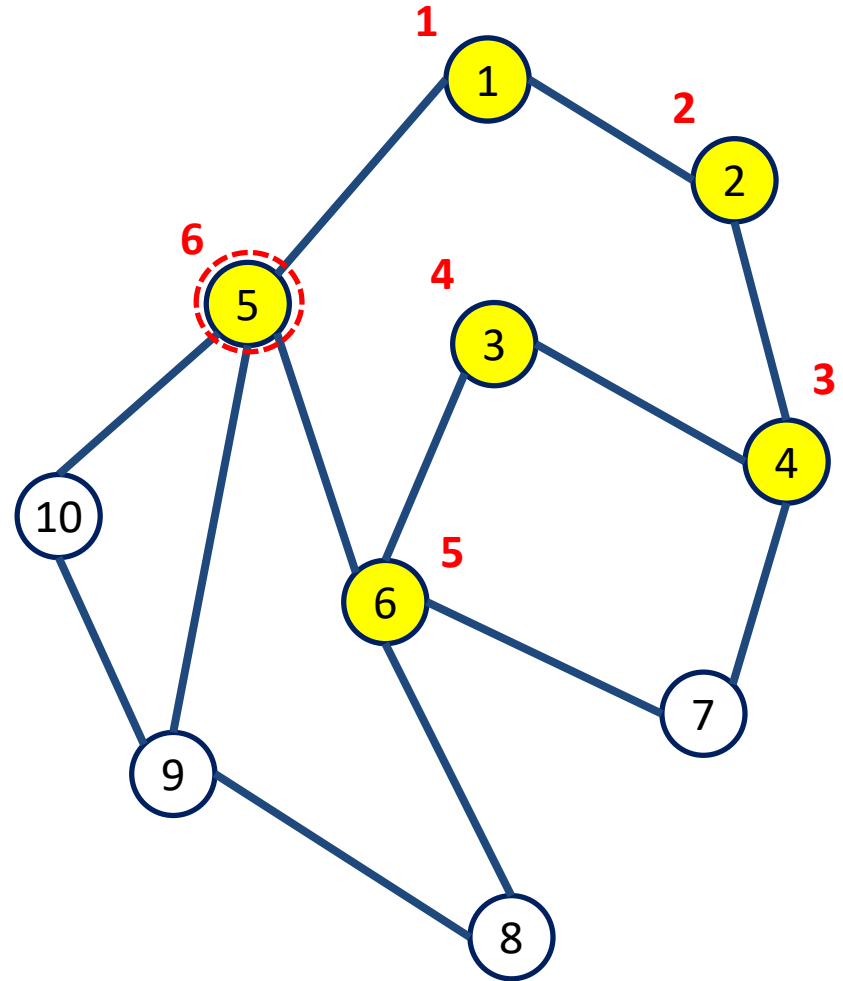
Solución: Nodo origen = 1

Pila:

1	2	4	3	6	5				
---	---	---	---	---	---	--	--	--	--

Marcados:

V	V	V	V	V	V				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



Recorrido en profundidad de un grafo

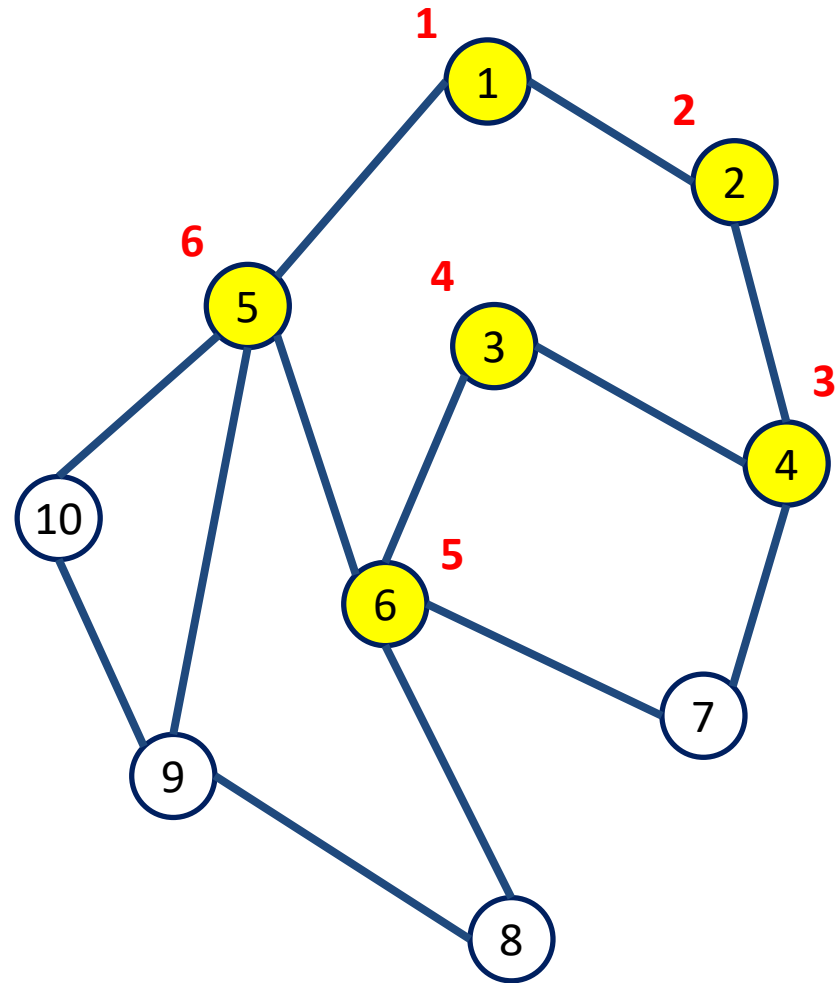
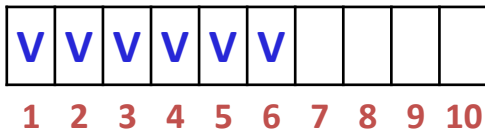
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Cima

Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

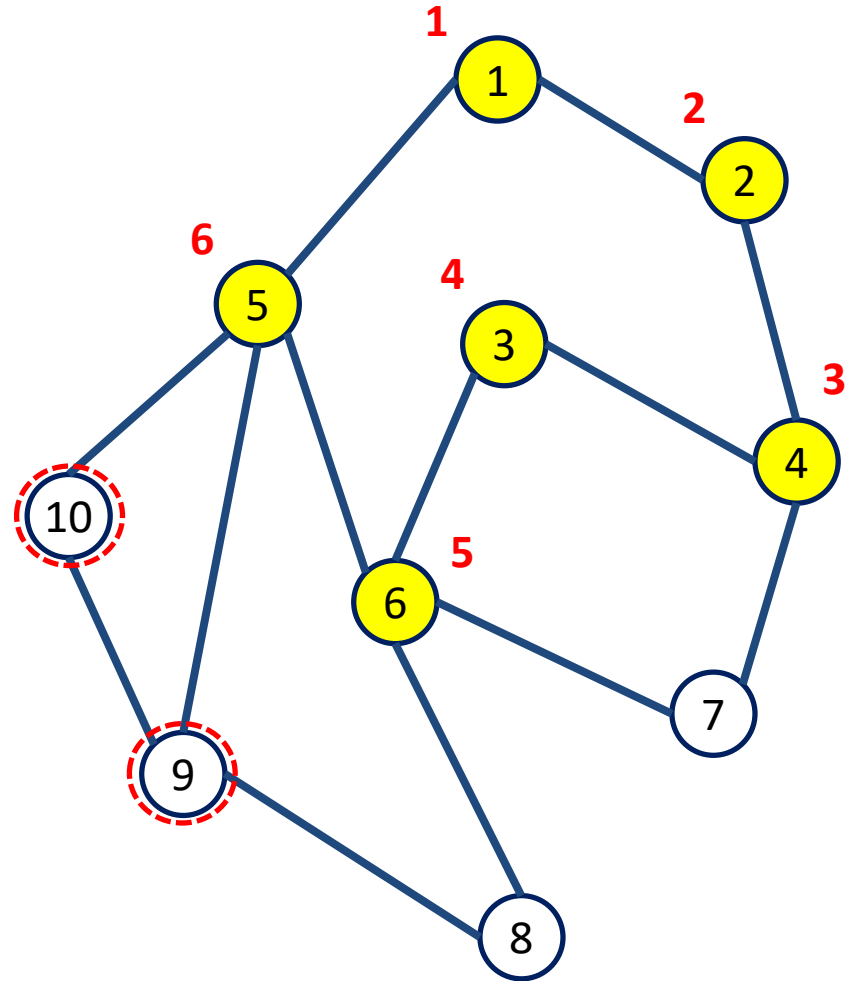
Solución: Nodo origen = 1

Pila:

1	2	4	3	6	5				
---	---	---	---	---	---	--	--	--	--

Marcados:

V	V	V	V	V	V				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



Recorrido en profundidad de un grafo

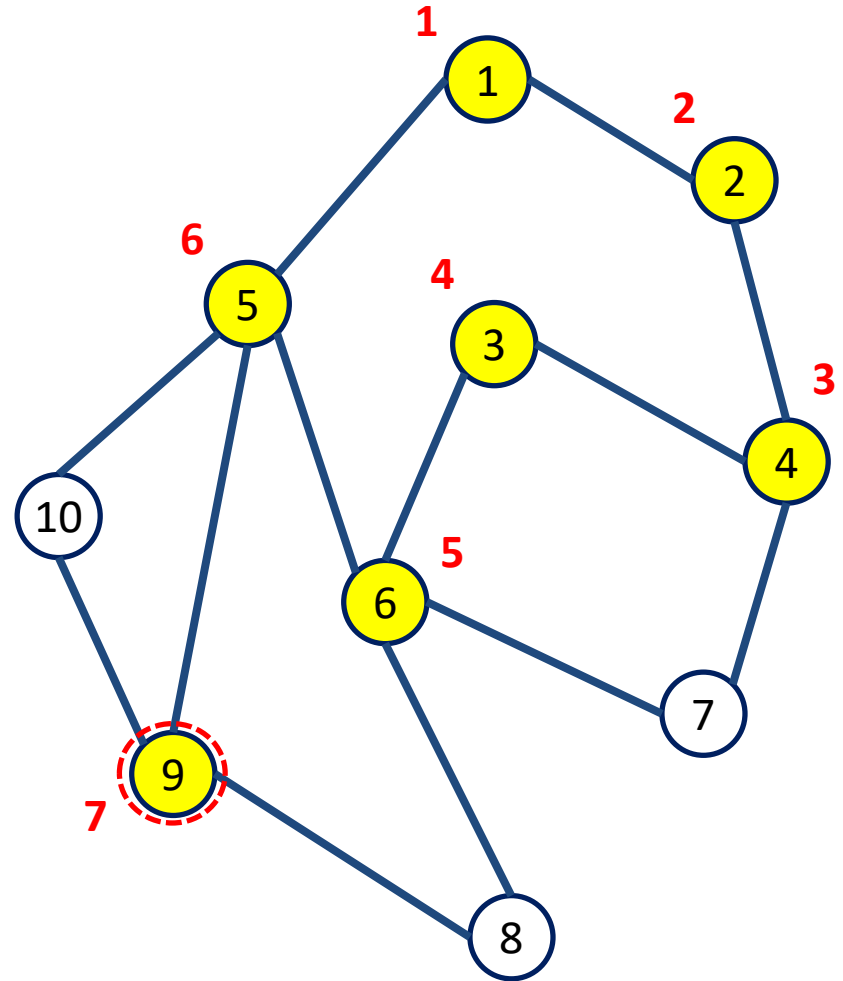
Solución: Nodo origen = 1

Pila:

1	2	4	3	6	5	9			
---	---	---	---	---	---	---	--	--	--

Marcados:

V	V	V	V	V	V			V	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



Recorrido en profundidad de un grafo

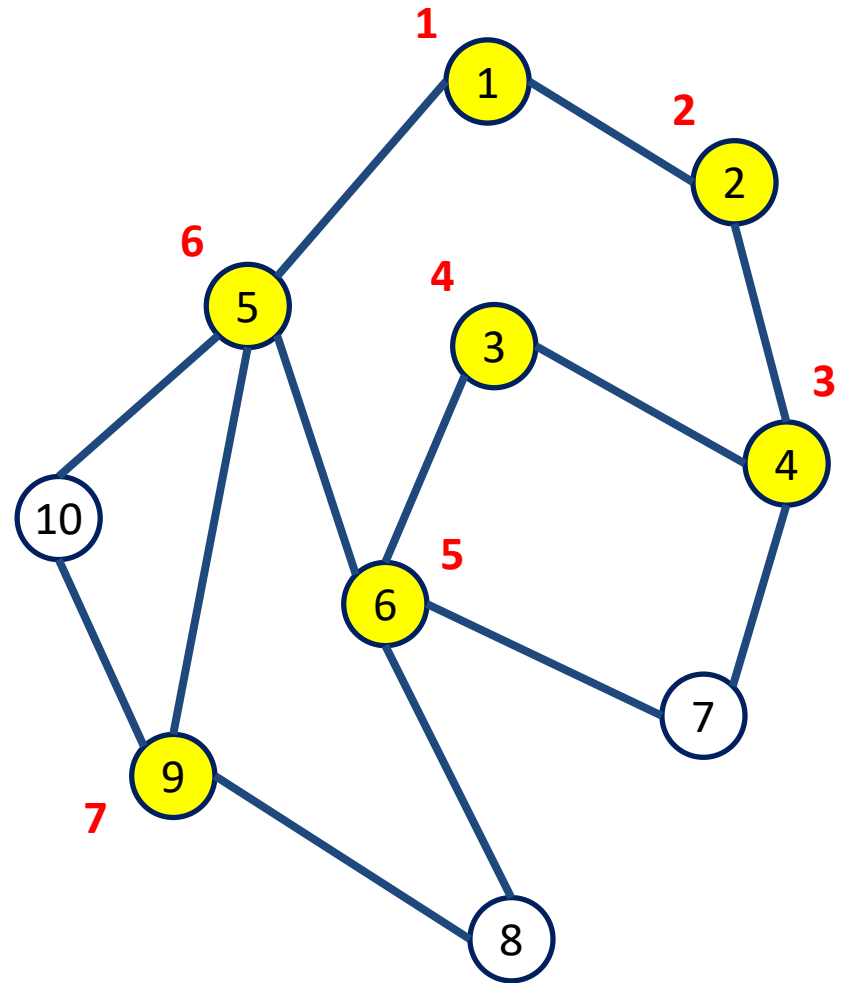
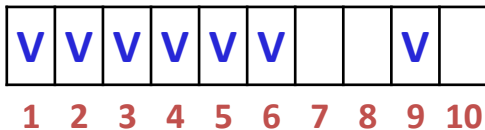
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Cima

Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

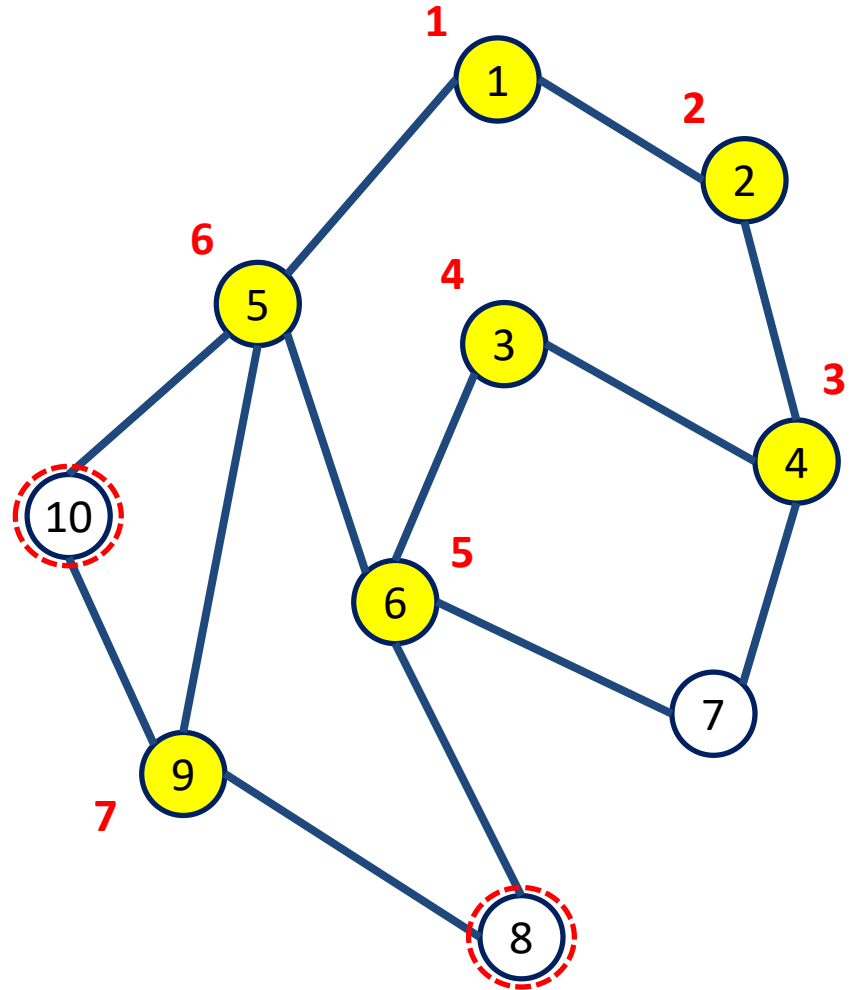
Solución: Nodo origen = 1

Pila:

1	2	4	3	6	5	9			
---	---	---	---	---	---	---	--	--	--

Marcados:

V	V	V	V	V	V			V	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



Recorrido en profundidad de un grafo

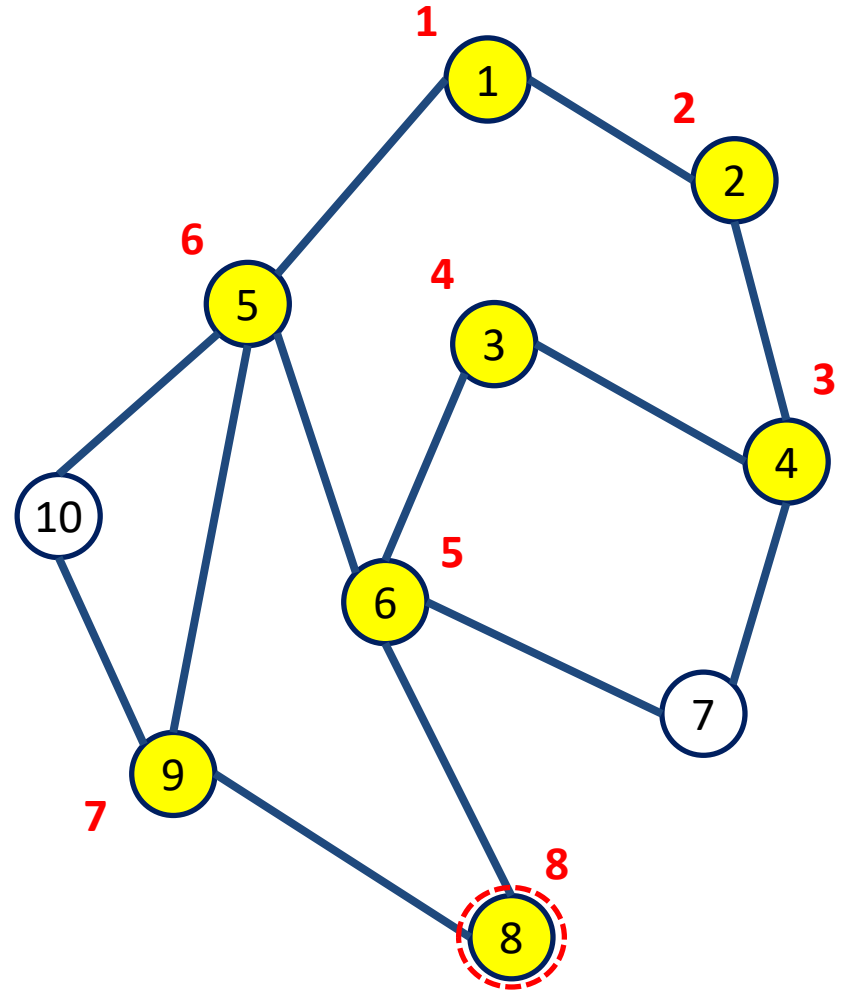
Solución: Nodo origen = 1

Pila:

1	2	4	3	6	5	9	8		
---	---	---	---	---	---	---	---	--	--

Marcados:

V	V	V	V	V	V		V	V	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



Recorrido en profundidad de un grafo

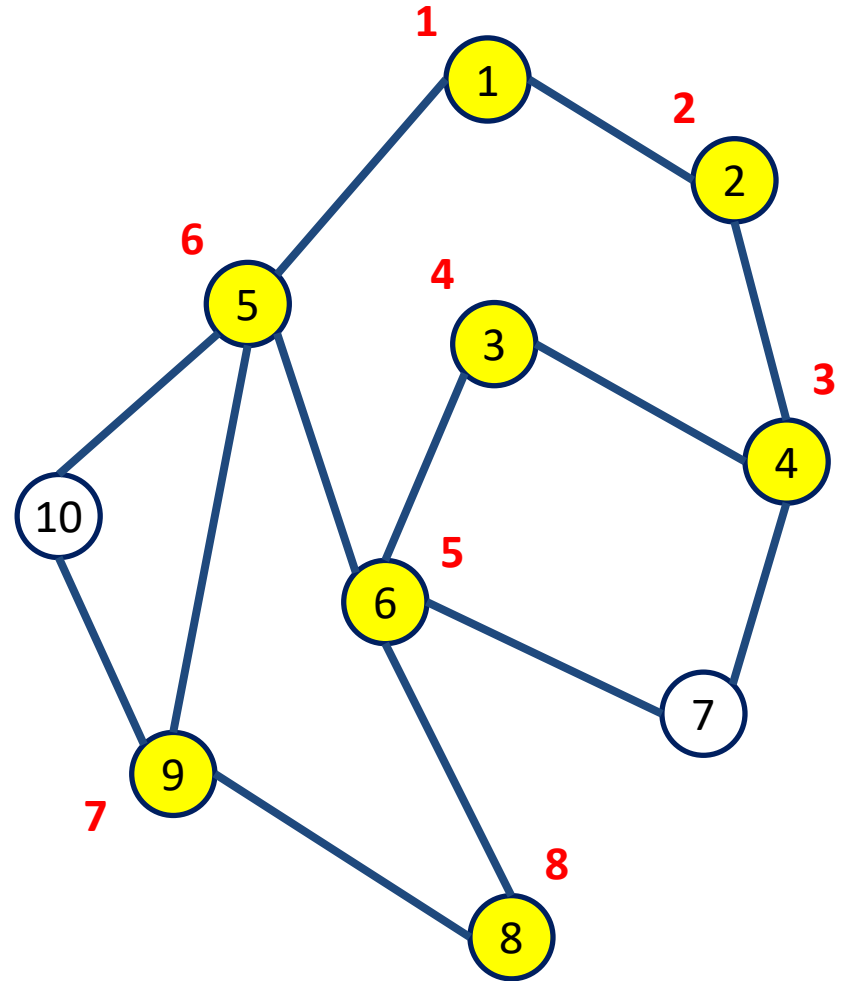
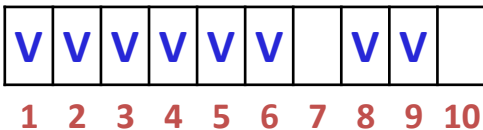
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Cima

Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

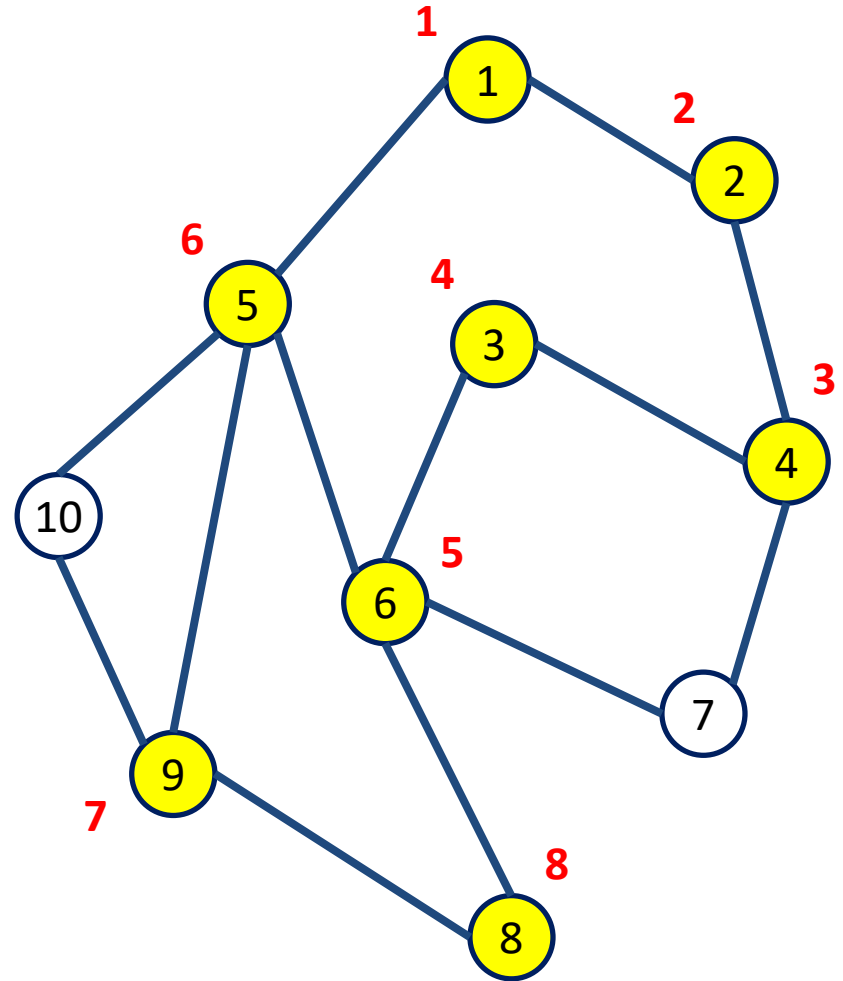
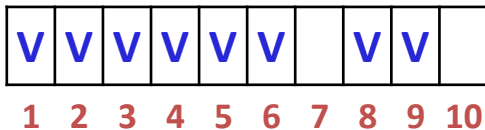
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Desapilar

Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

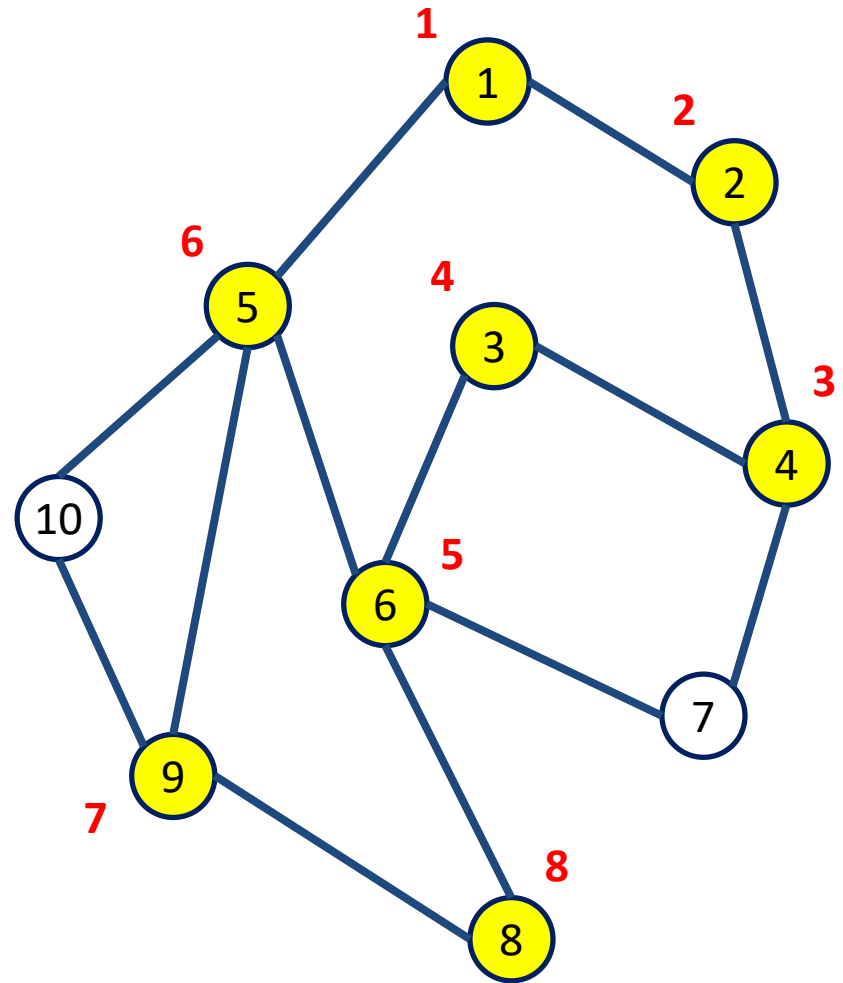
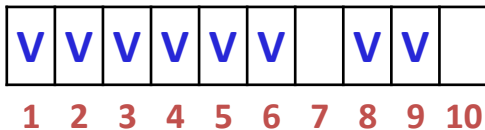
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Cima

Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

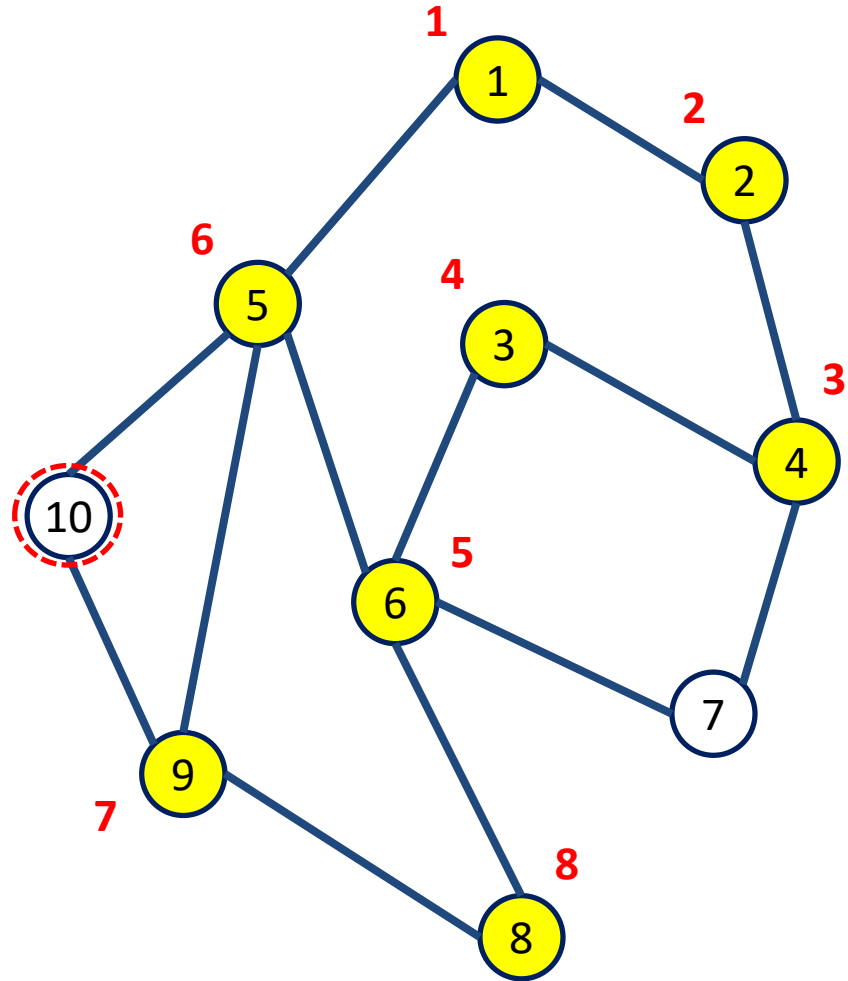
Solución: Nodo origen = 1

Pila:

1	2	4	3	6	5	9			
---	---	---	---	---	---	---	--	--	--

Marcados:

V	V	V	V	V	V		V	V	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



Recorrido en profundidad de un grafo

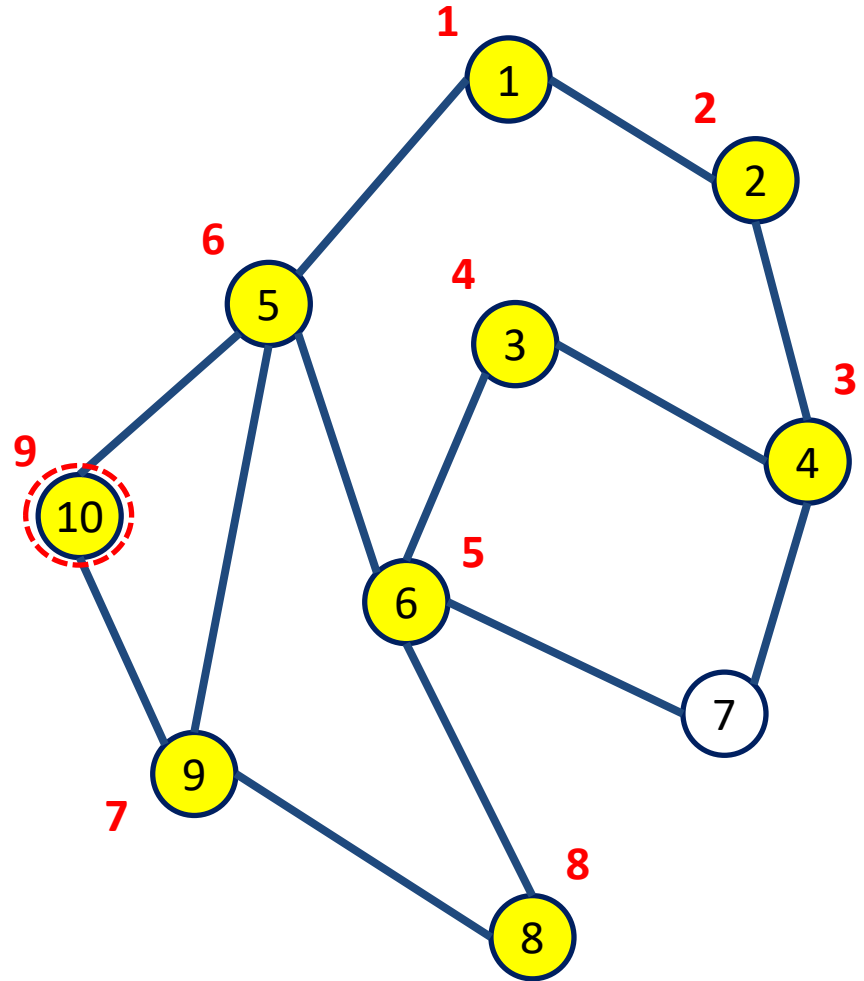
Solución: Nodo origen = 1

Pila:

1	2	4	3	6	5	9	10		
---	---	---	---	---	---	---	----	--	--

Marcados:

V	V	V	V	V	V		V	V	V
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



Recorrido en profundidad de un grafo

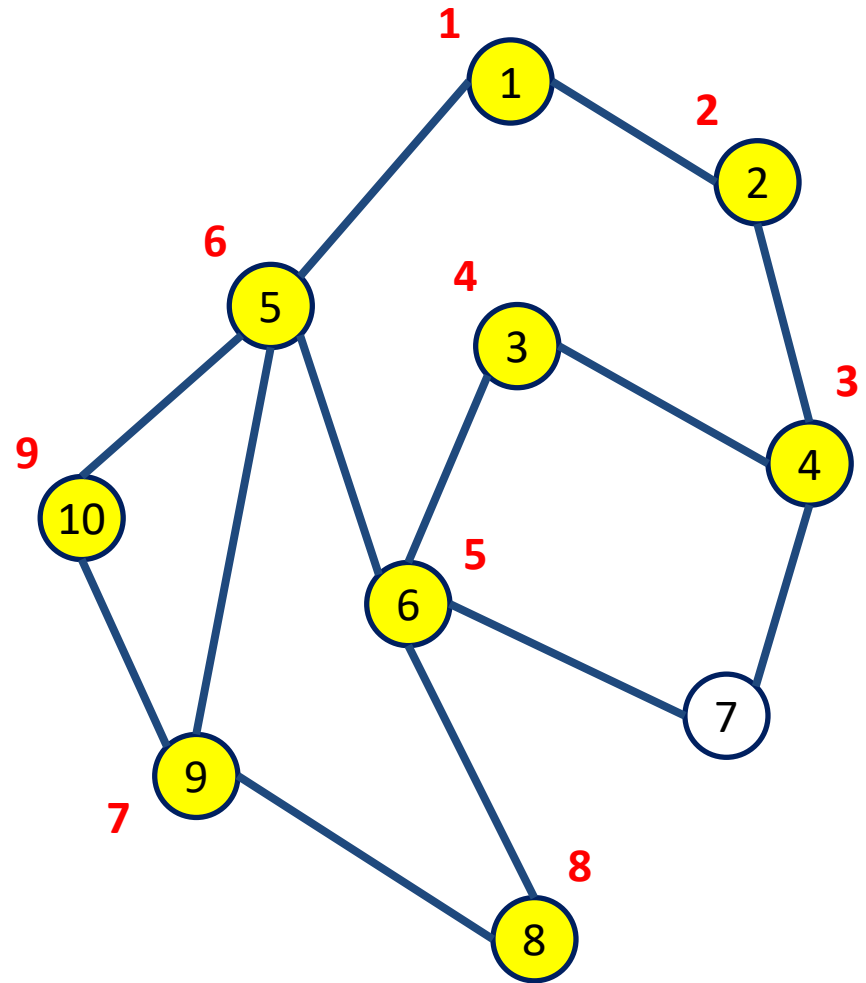
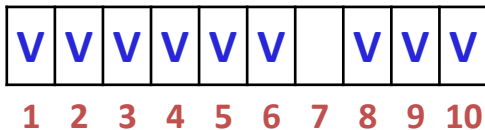
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Cima

Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

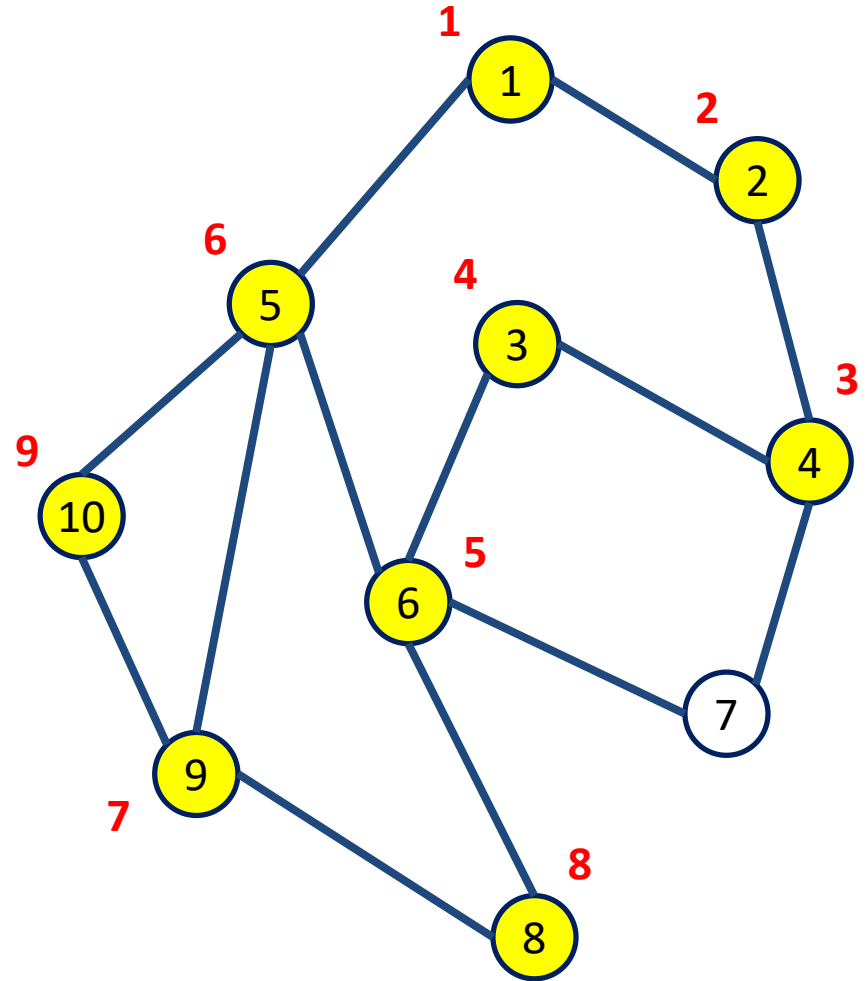
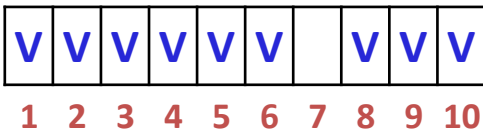
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Desapilar

Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

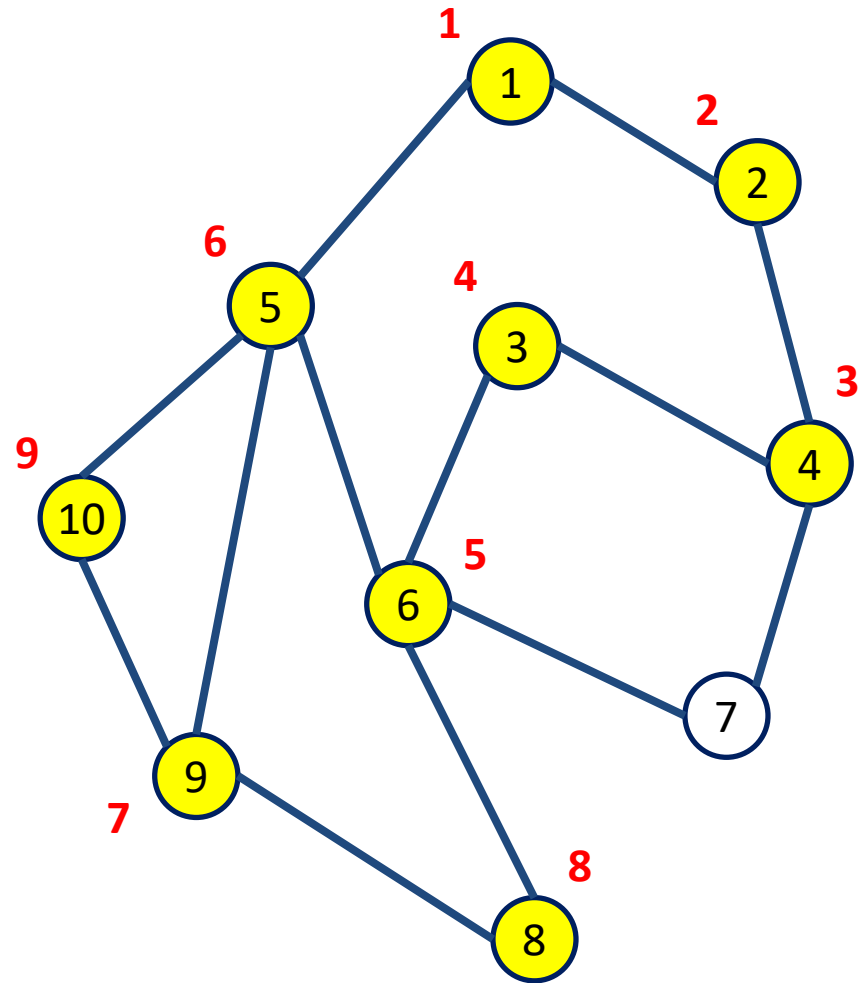
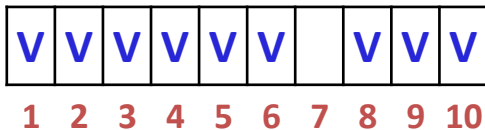
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Cima

Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

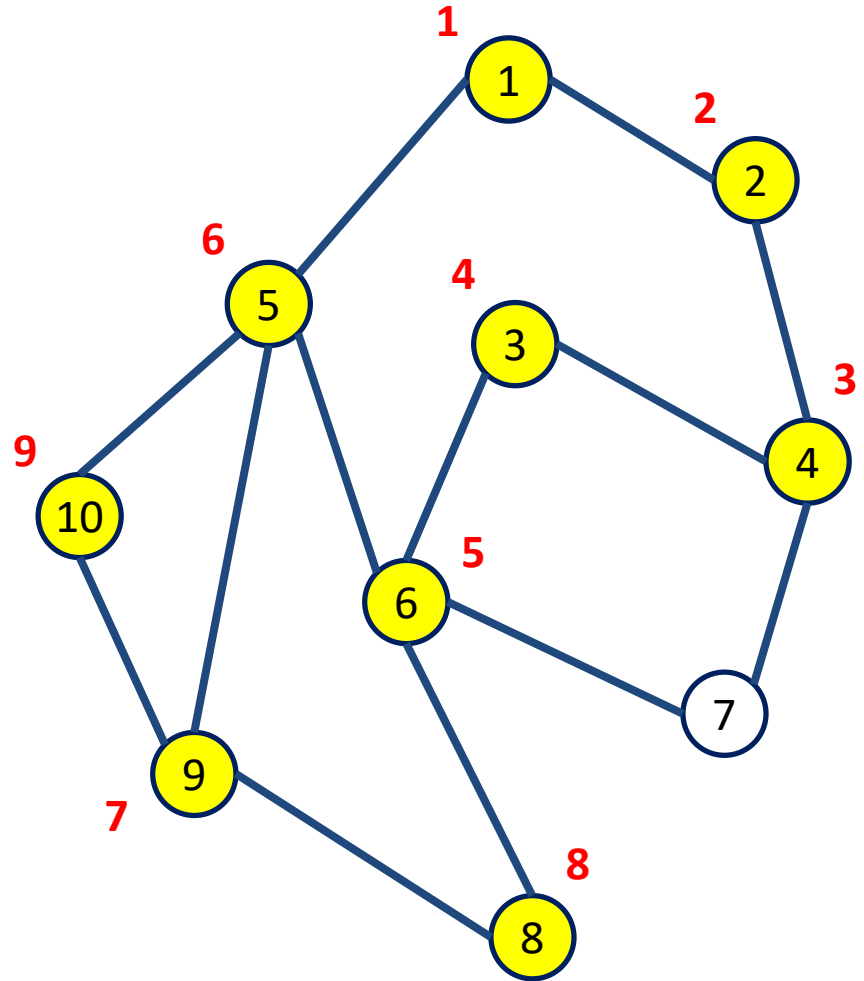
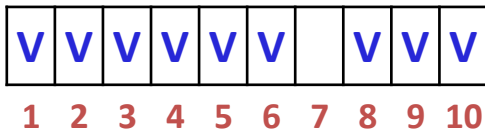
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Desapilar

Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

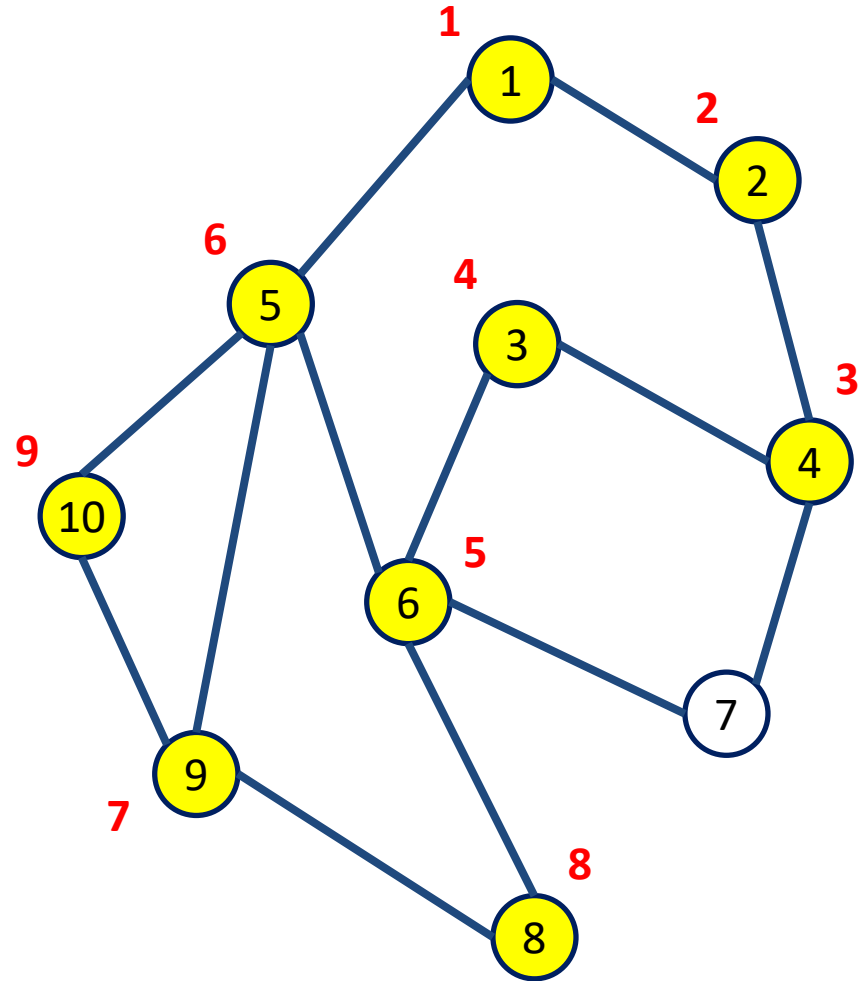
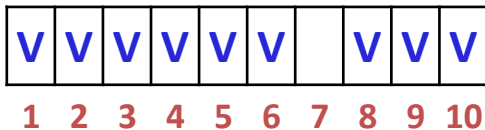
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Cima

Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

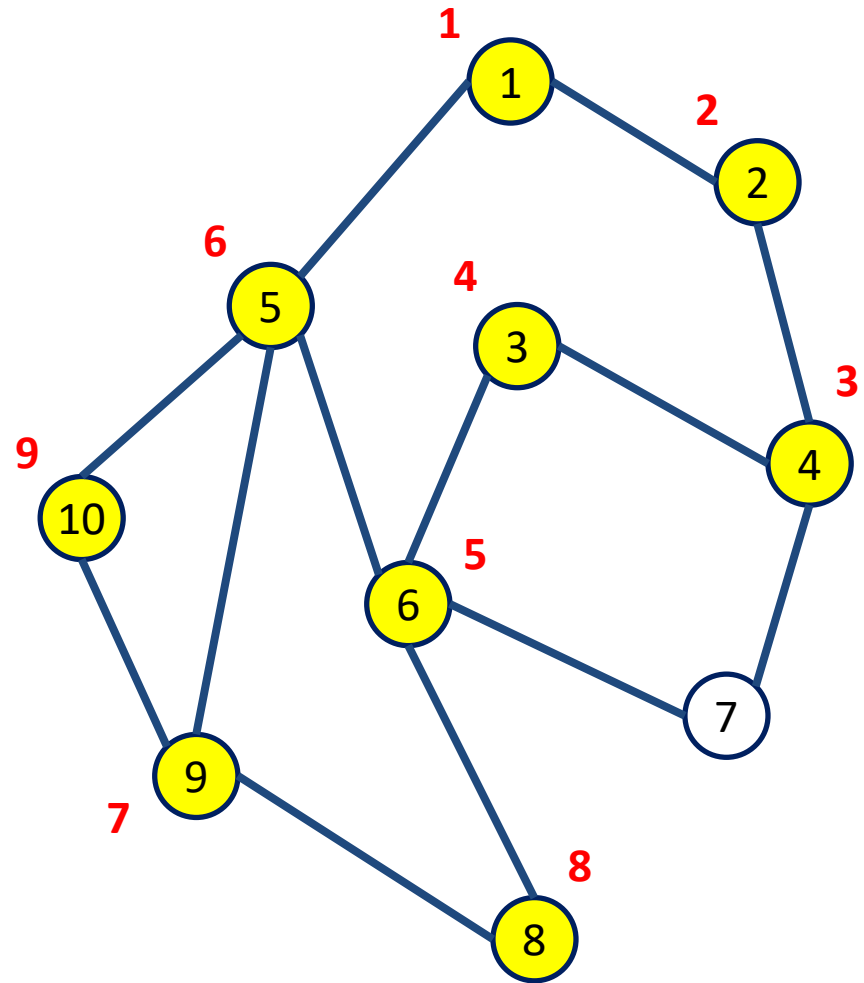
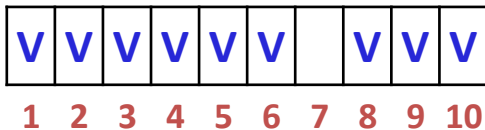
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Desapilar

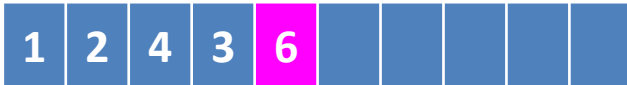
Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

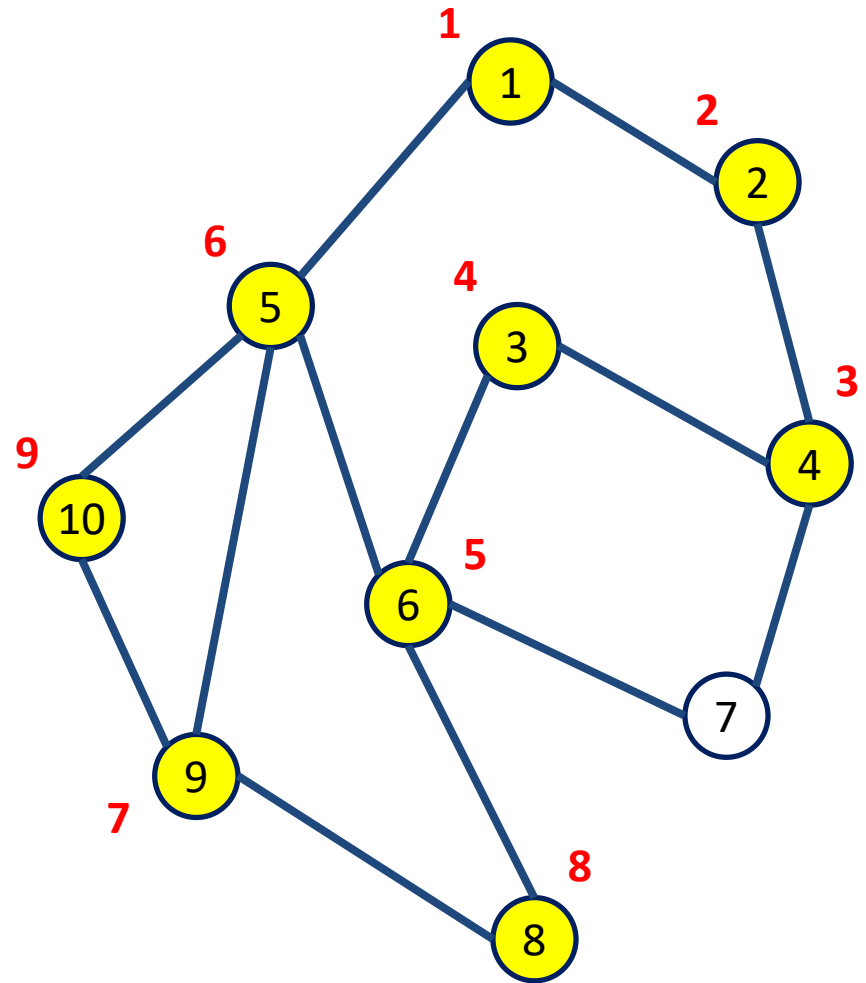
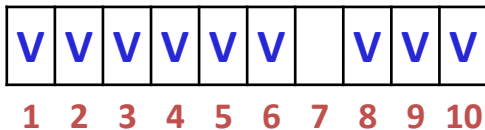
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Cima

Marcados:



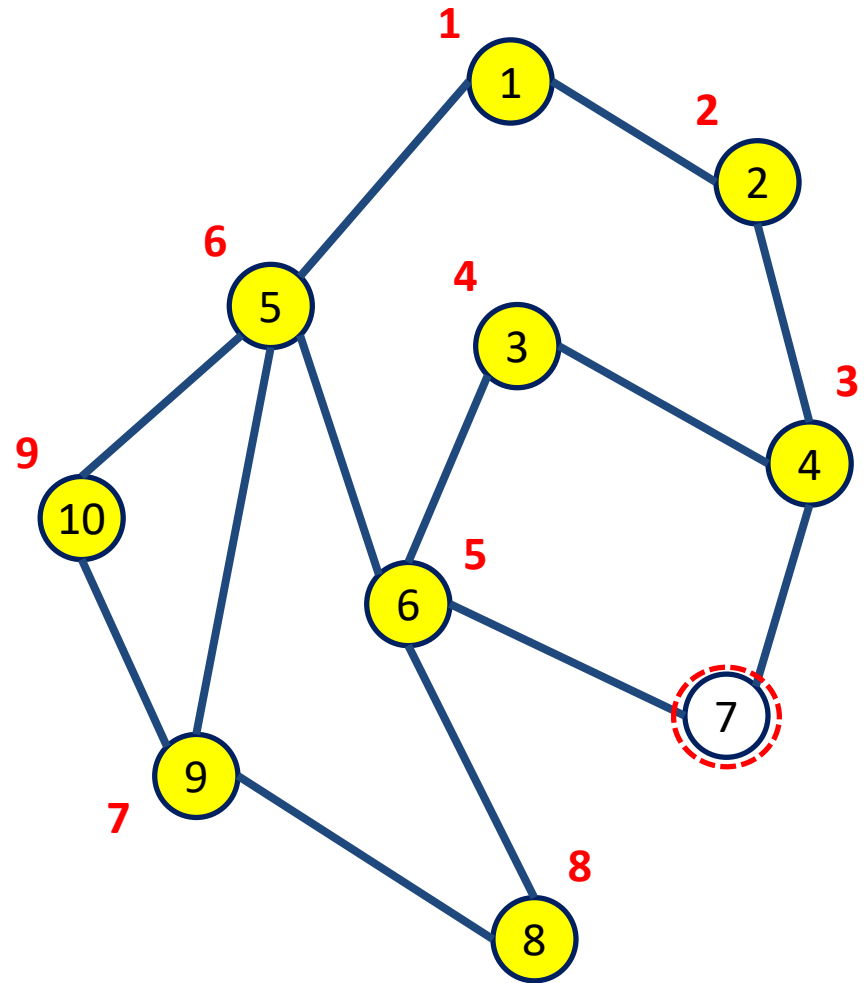
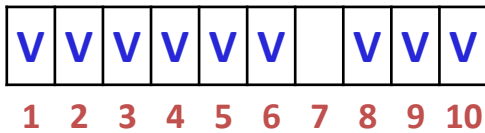
Recorrido en profundidad de un grafo

Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

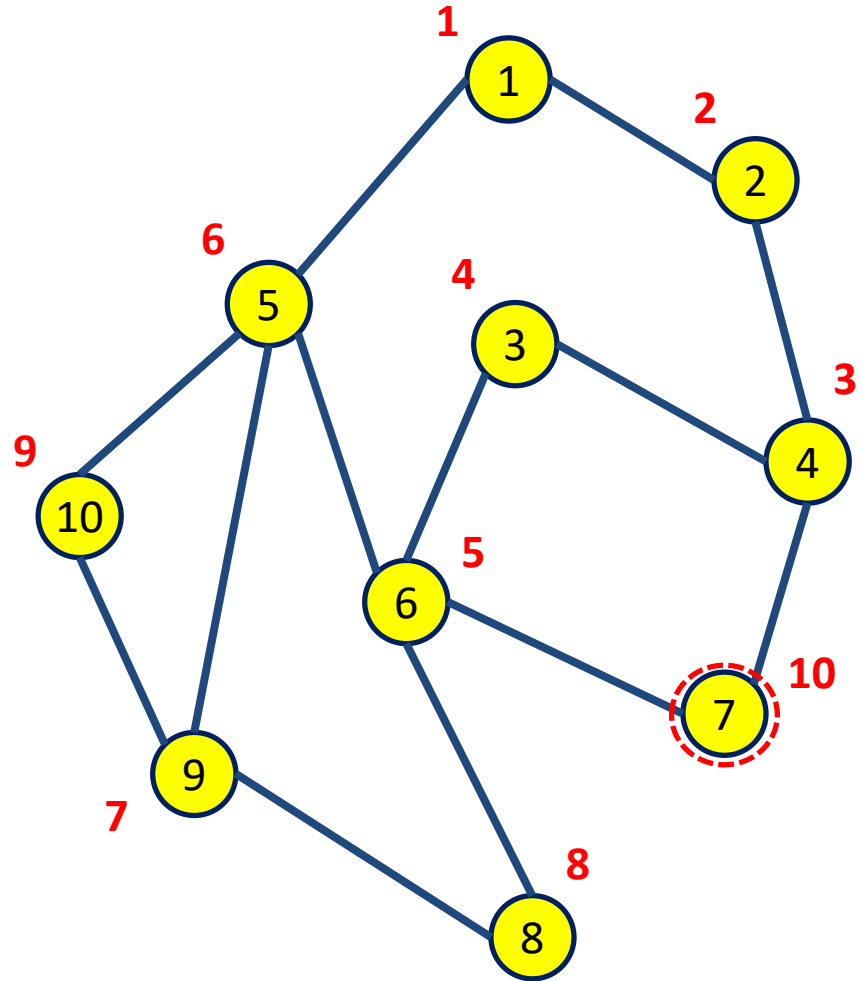
Solución: Nodo origen = 1

Pila:

1	2	4	3	6	7				
---	---	---	---	---	---	--	--	--	--

Marcados:

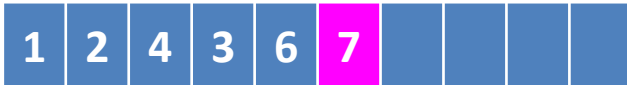
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



Recorrido en profundidad de un grafo

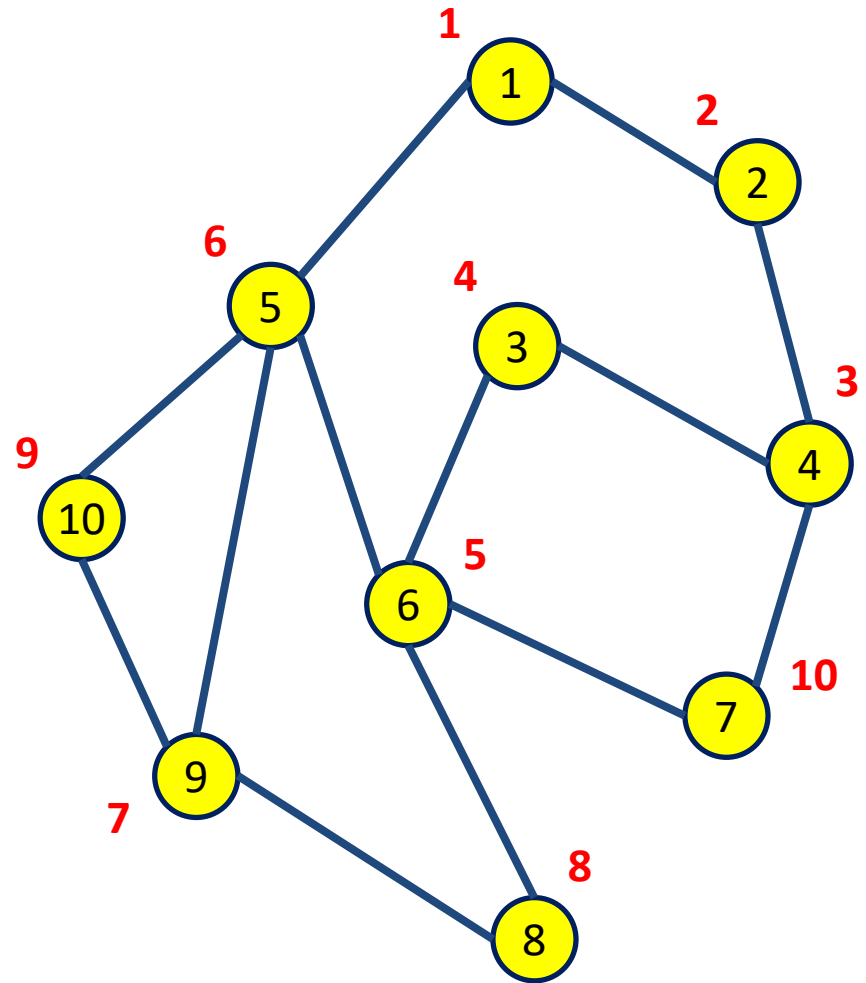
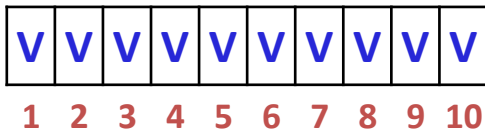
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Cima

Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

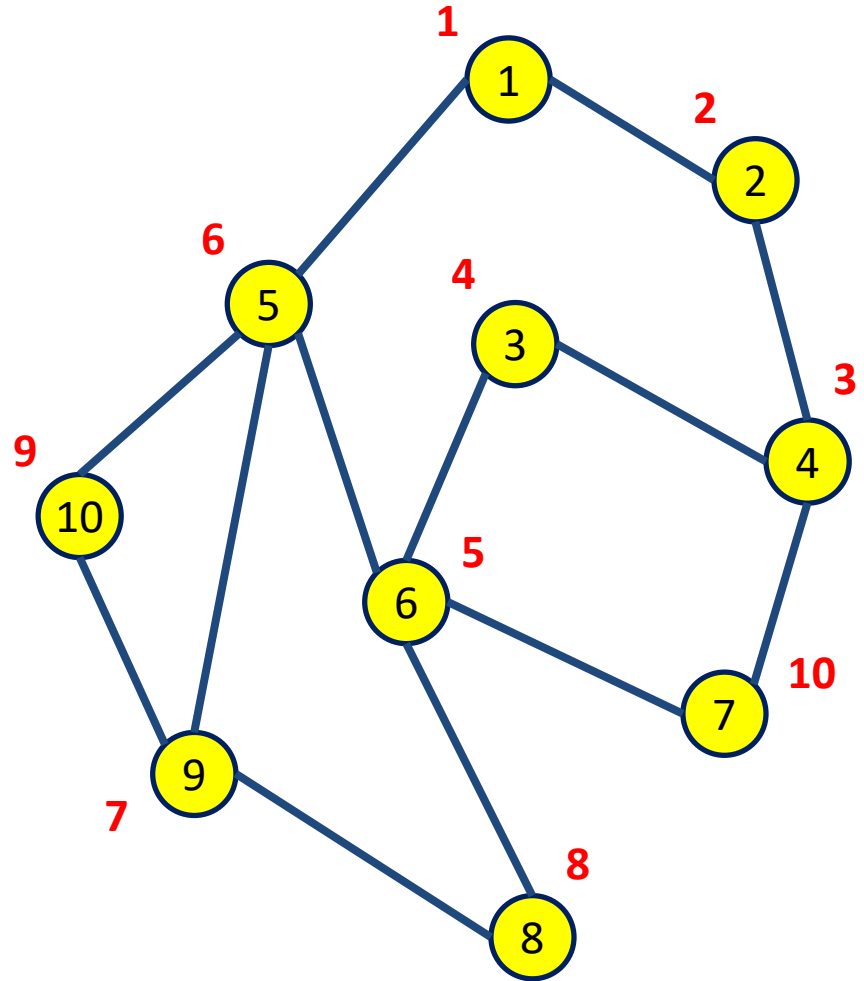
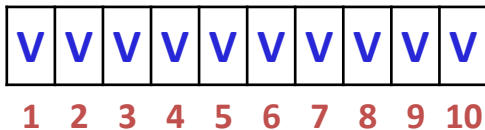
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Desapilar

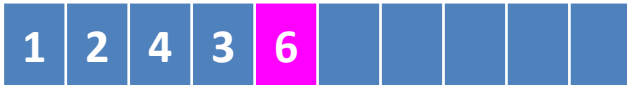
Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

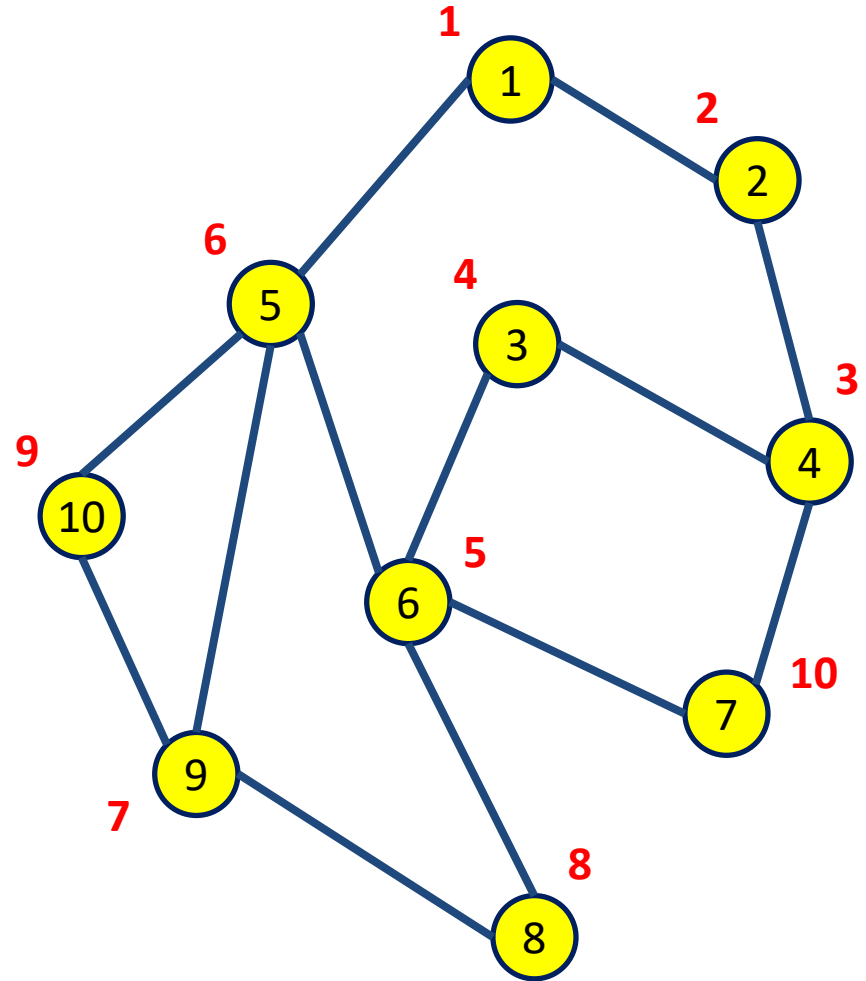
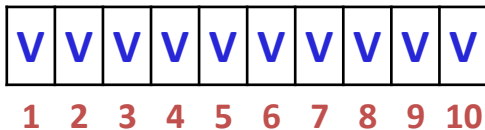
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Cima

Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

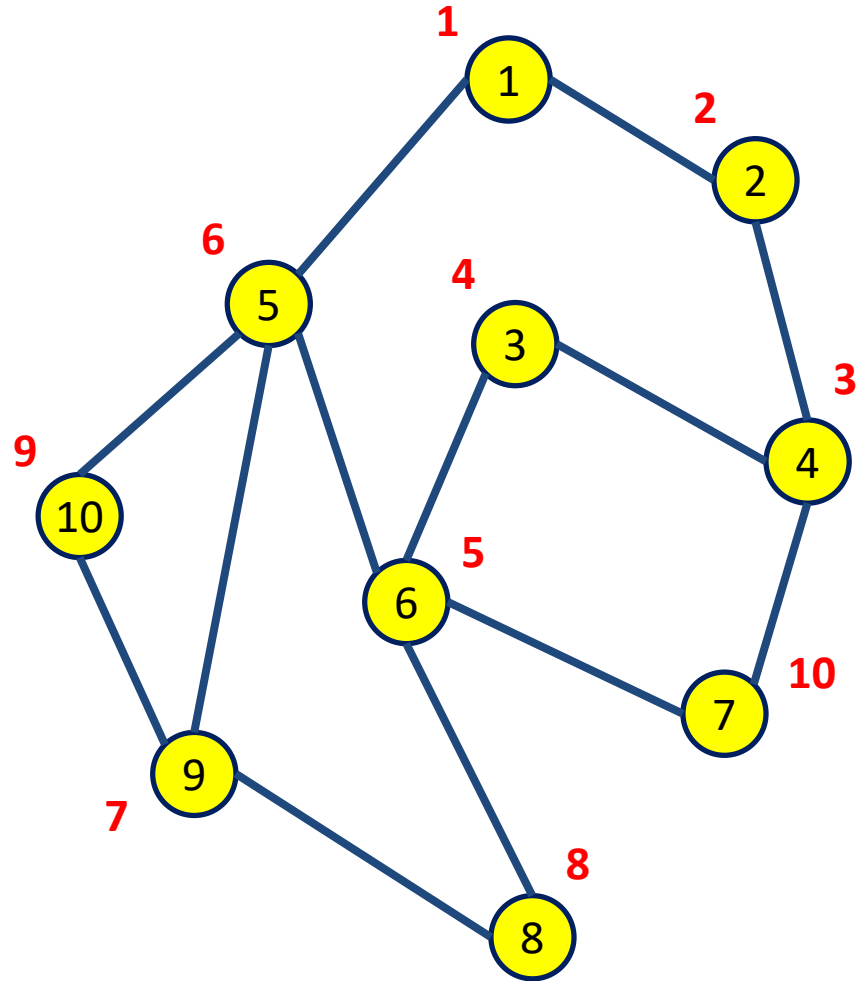
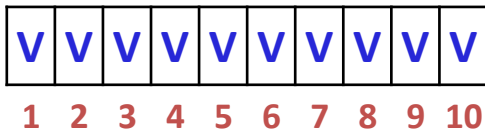
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Desapilar

Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

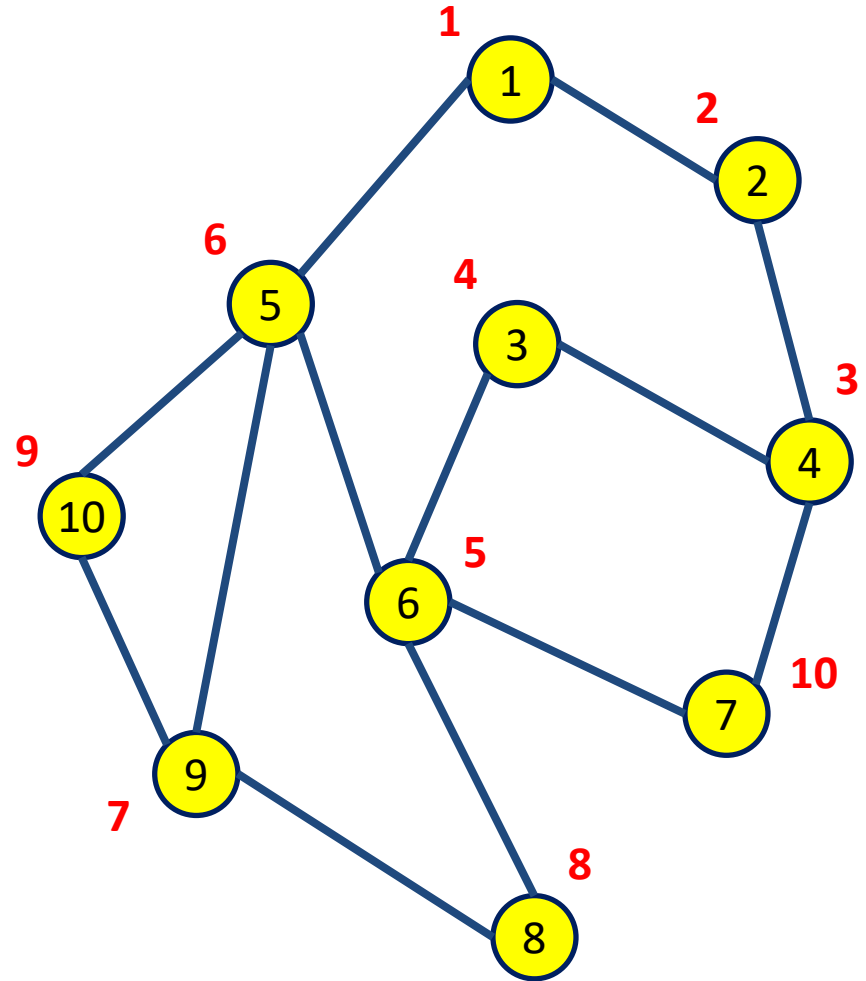
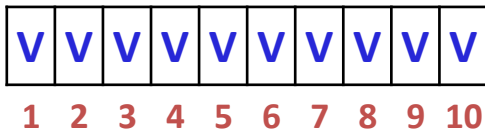
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Cima

Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

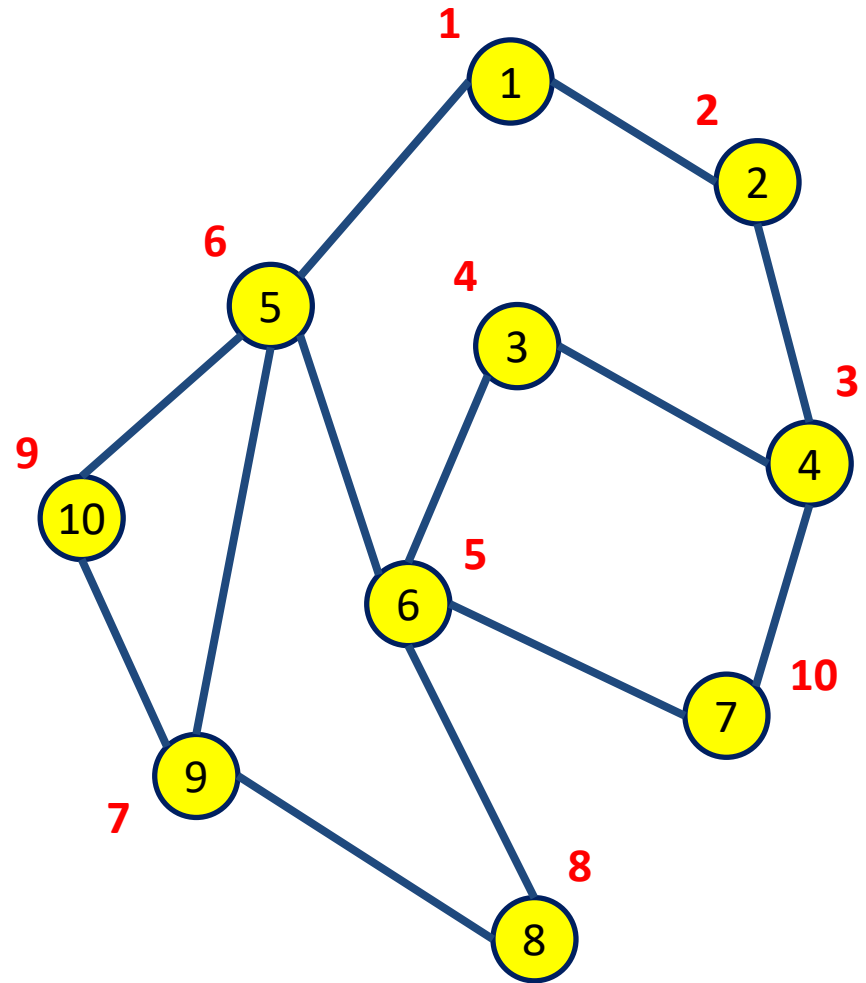
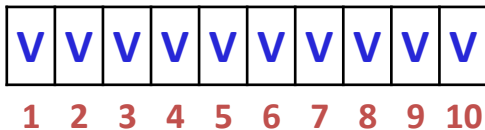
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Desapilar

Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

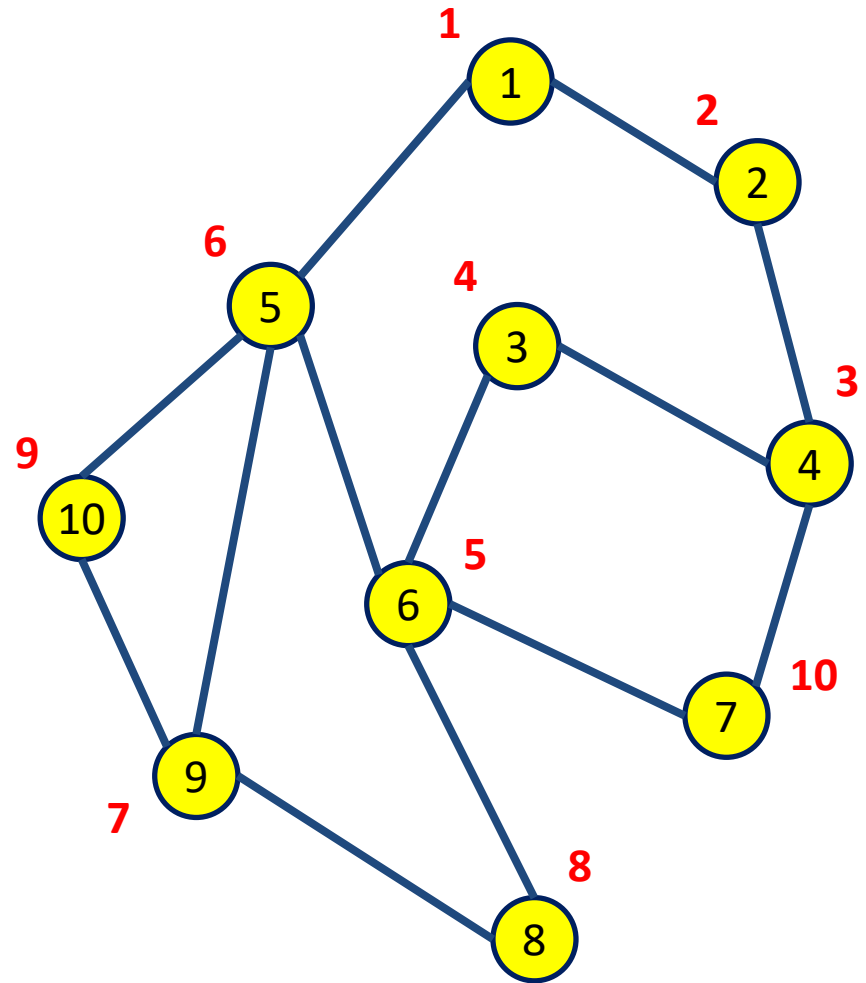
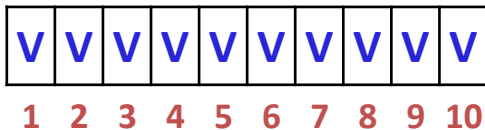
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Cima

Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

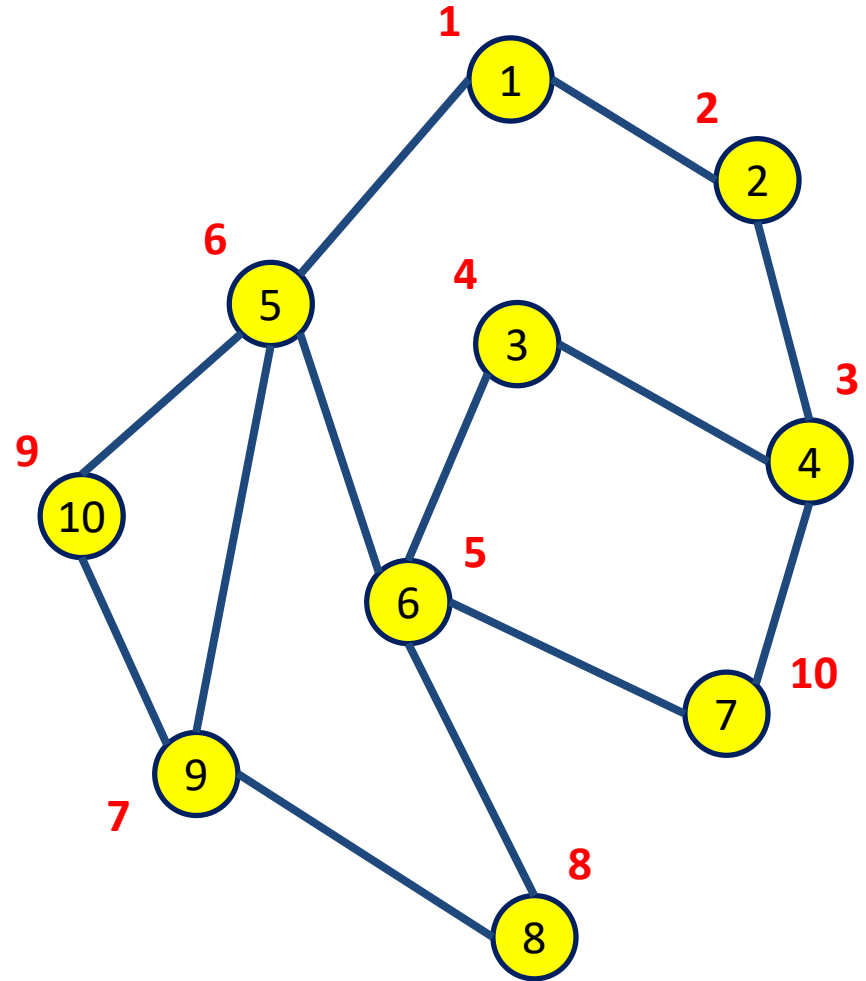
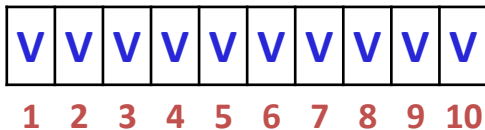
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Desapilar

Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

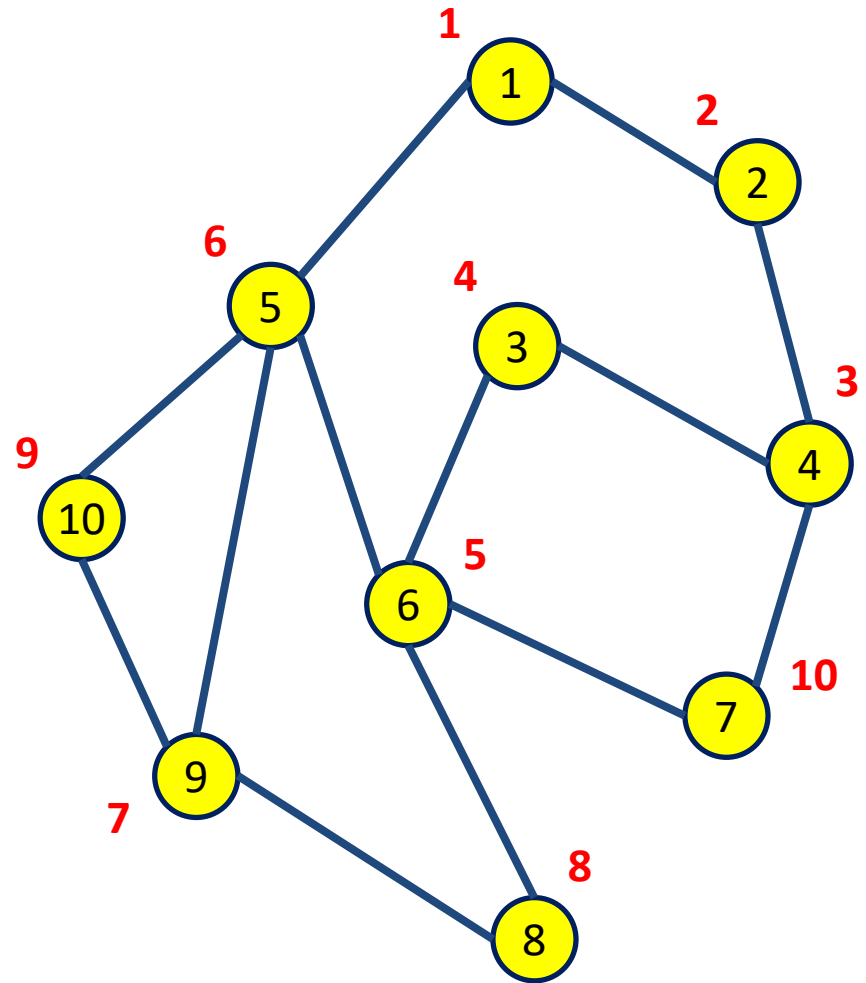
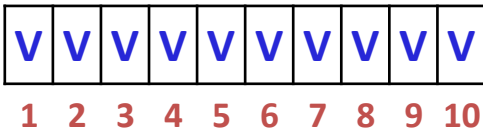
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Cima

Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

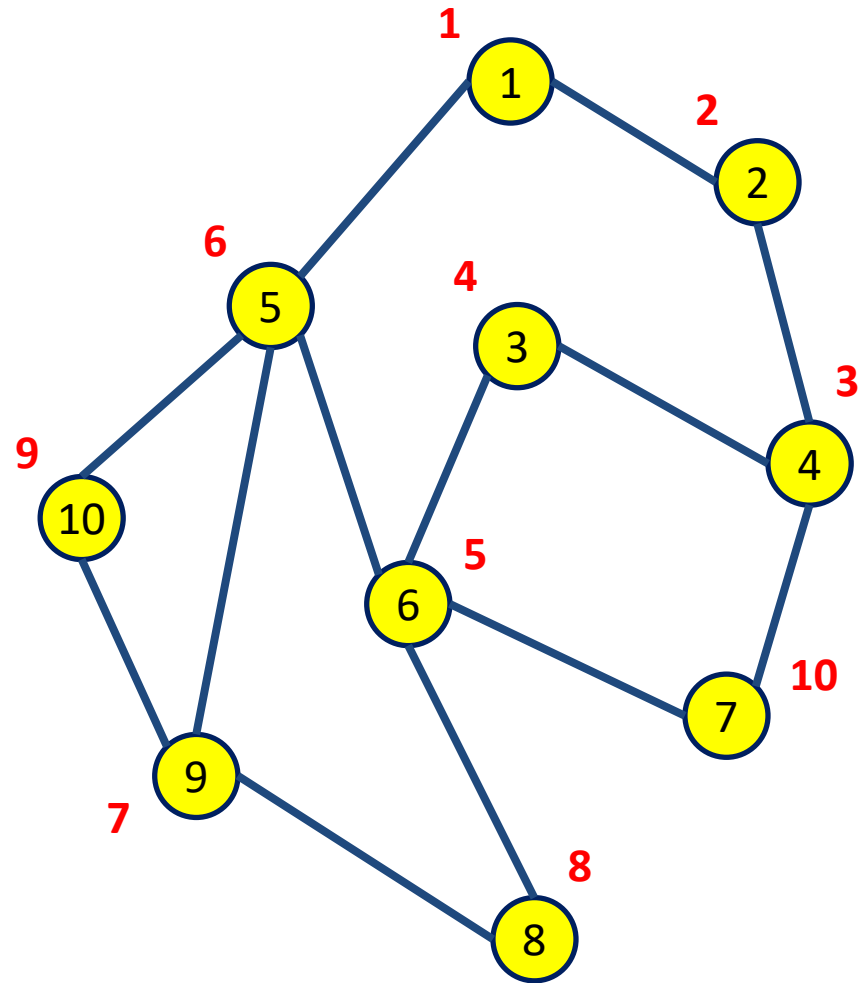
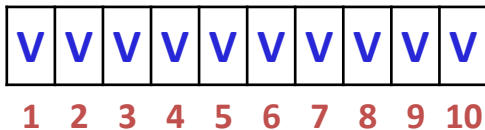
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Desapilar

Marcados:



Recorrido en profundidad de un grafo

Solución: Nodo origen = 1

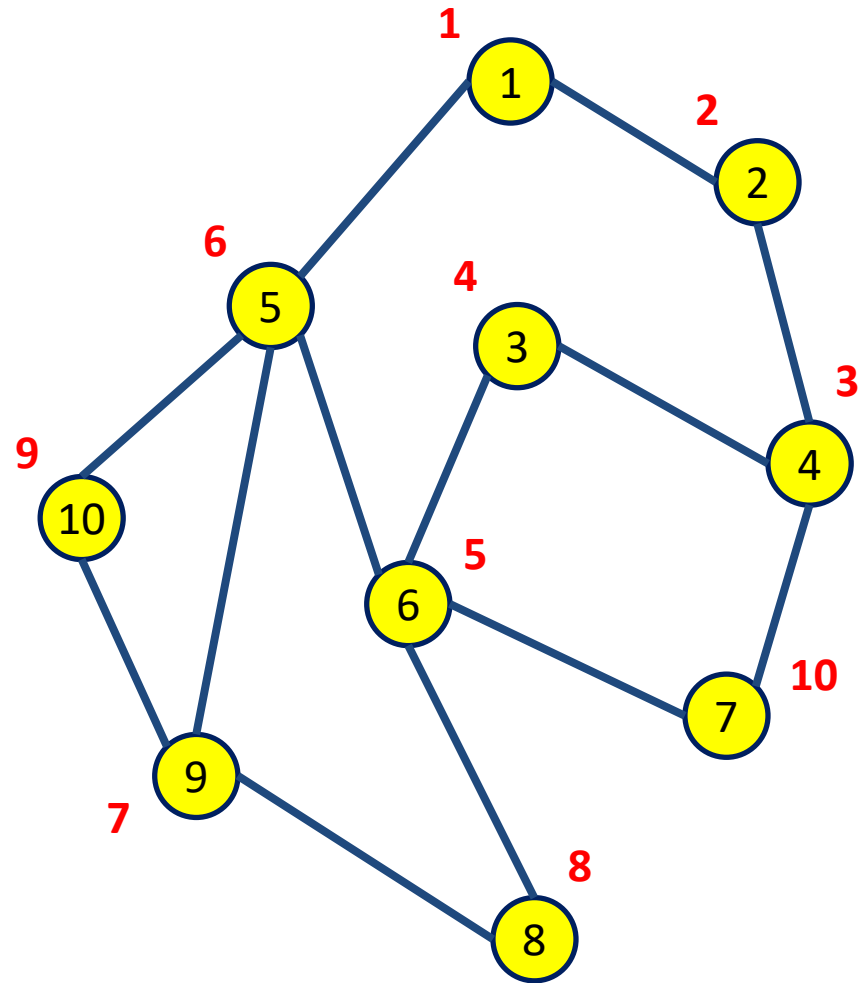
Pila:



Cima

Marcados:

V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



Recorrido en profundidad de un grafo

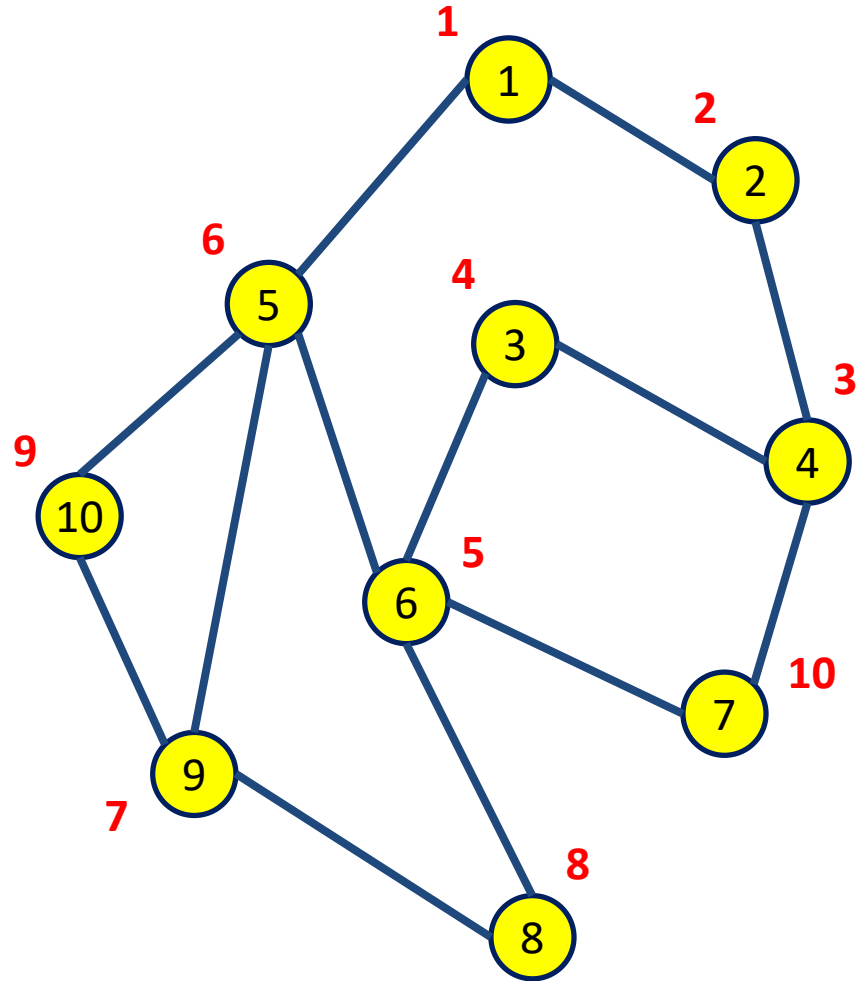
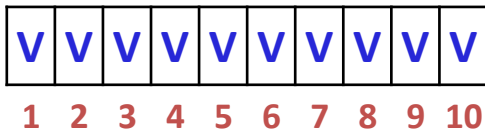
Solución: Nodo origen = 1

Pila:



Desapilar

Marcados:



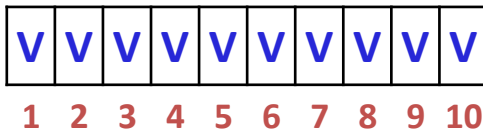
Recorrido en profundidad de un grafo

Solución: Nodo origen = 1

Pila:

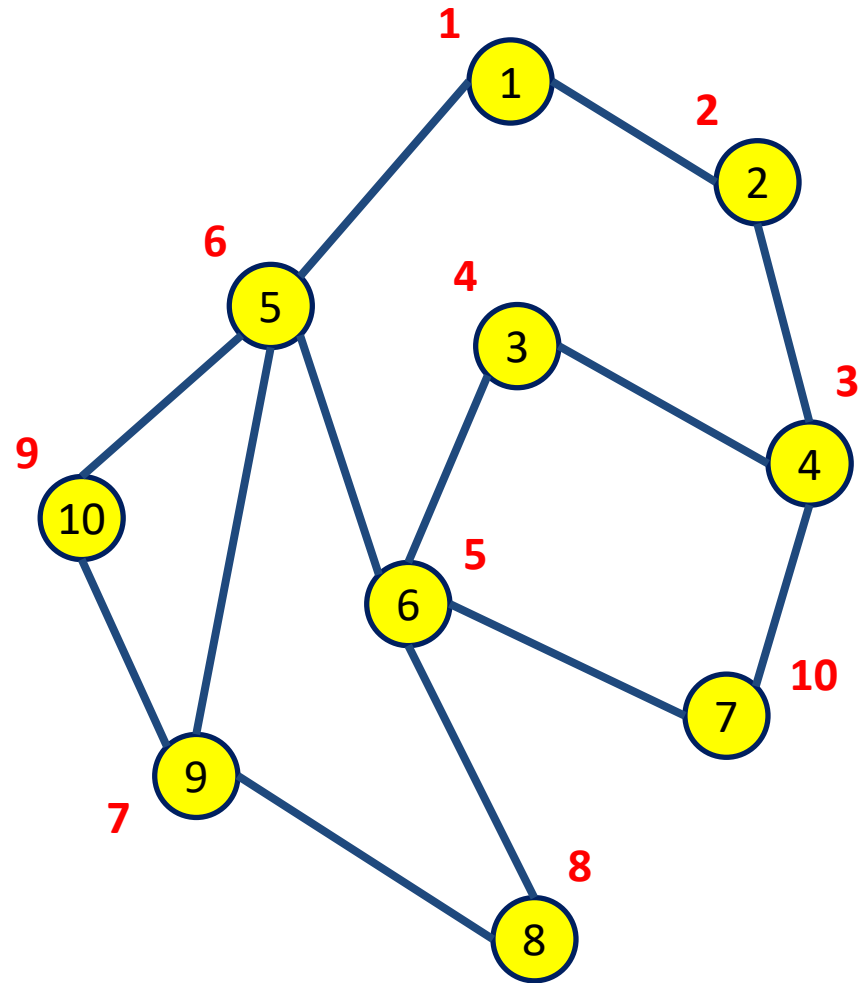


Marcados:



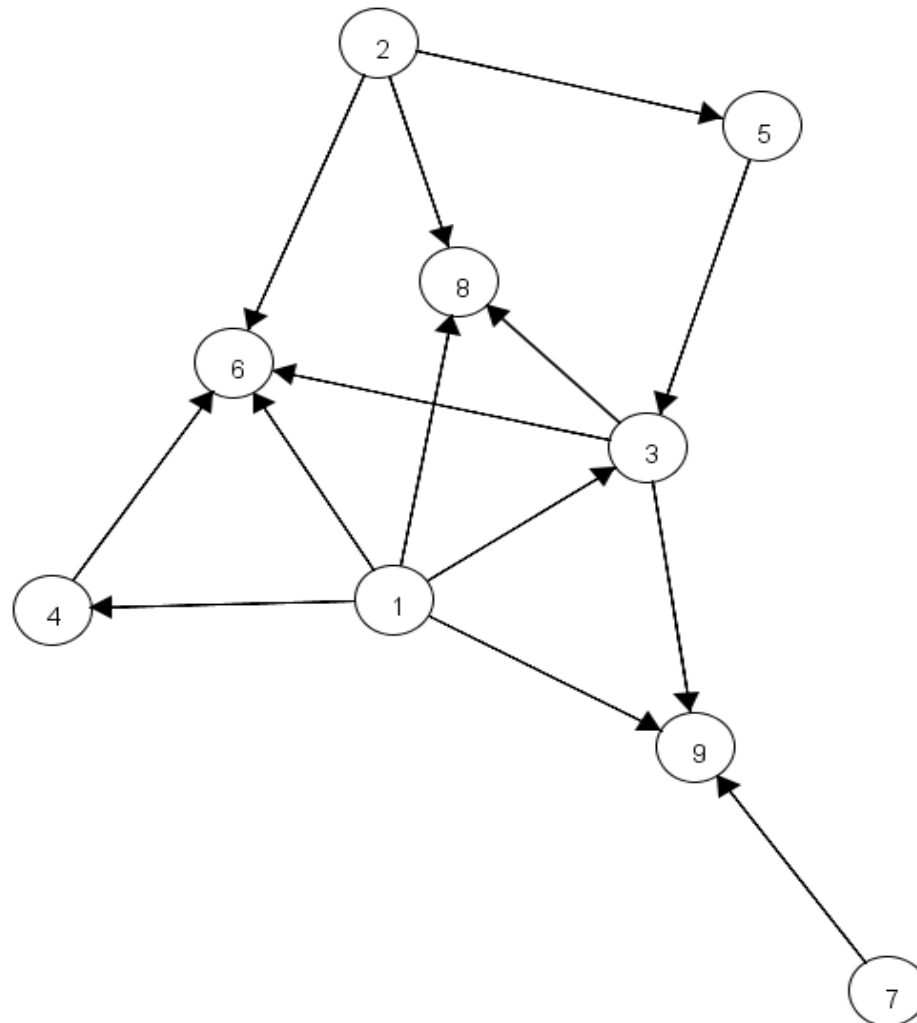
La pila está vacía entonces
FIN DEL PROCESO

Recorrido: **1 - 2 - 4 - 3 - 6 - 5 - 9 - 8 - 10 - 7**



Ordenación topológica

Ejercicio 3: Obtener la ordenación topológica para el siguiente grafo dirigido acíclico (utilizando el algoritmo con cola auxiliar)

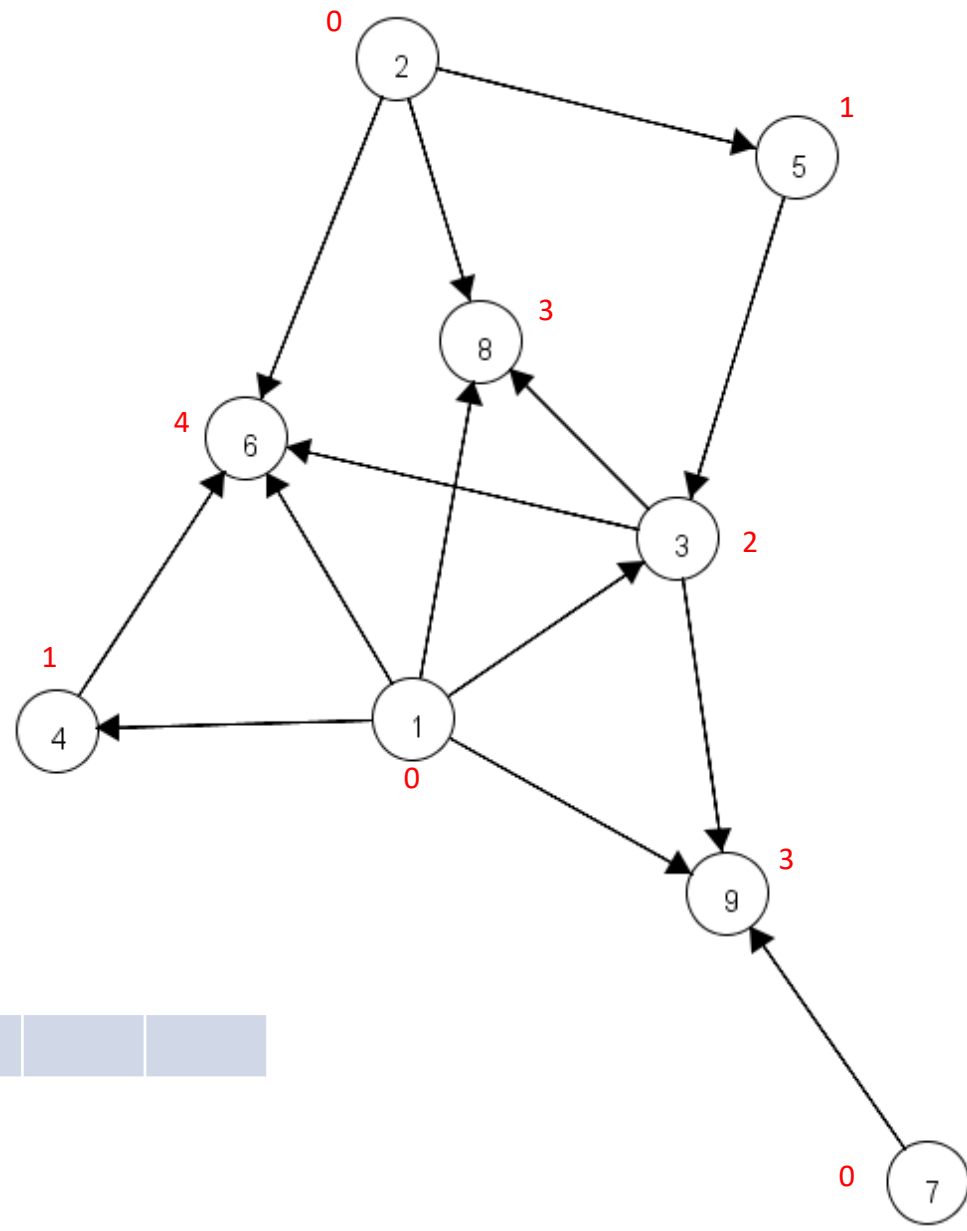


Ordenación topológica

Solución:

Inicialización: calcular grado de entrada

Nodo	Nº topológico
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0



Cola



Contador: 1

Ordenación topológica

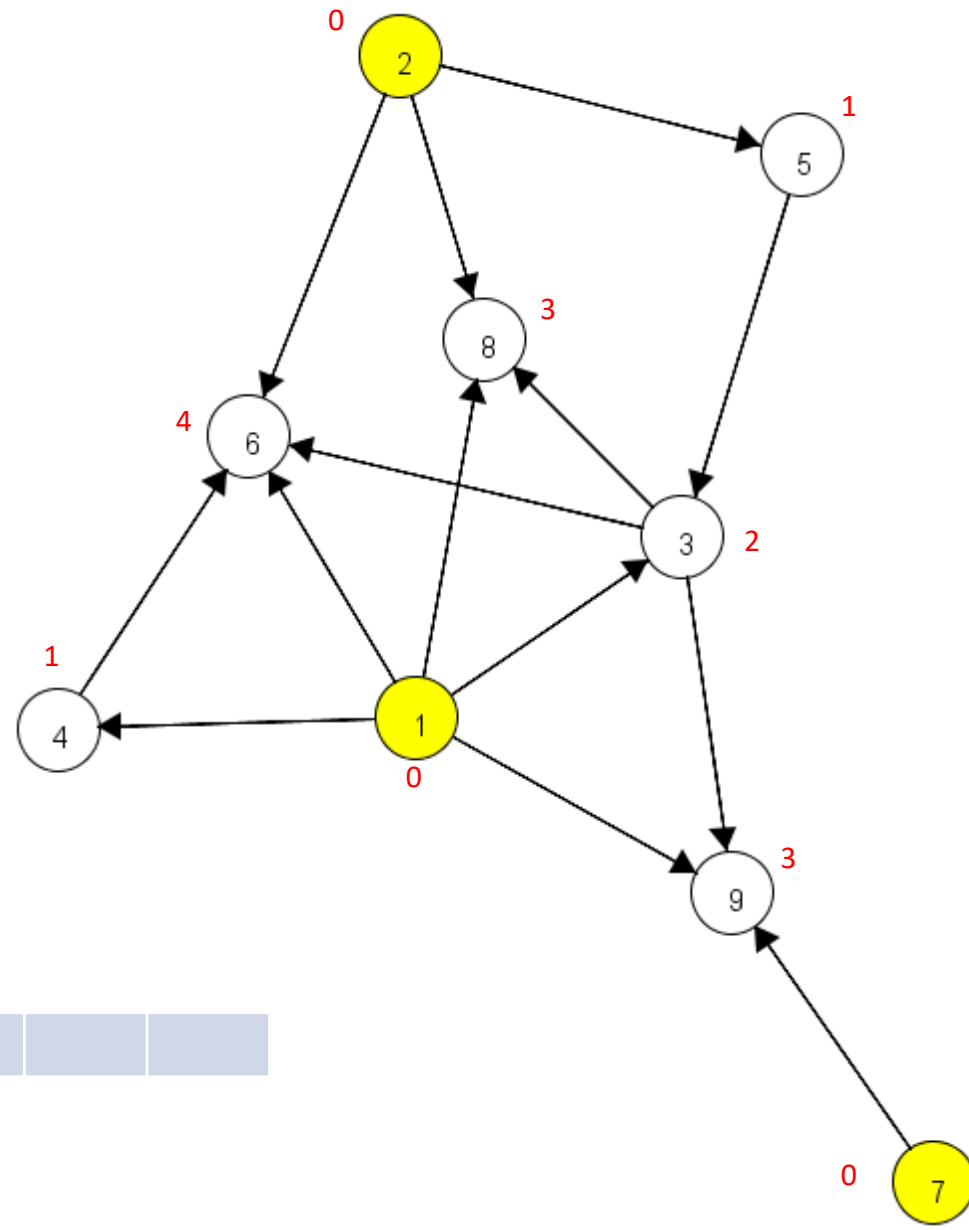
Solución:

Nodo	Nº topológico
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0

Cola

1	2	7						
---	---	---	--	--	--	--	--	--

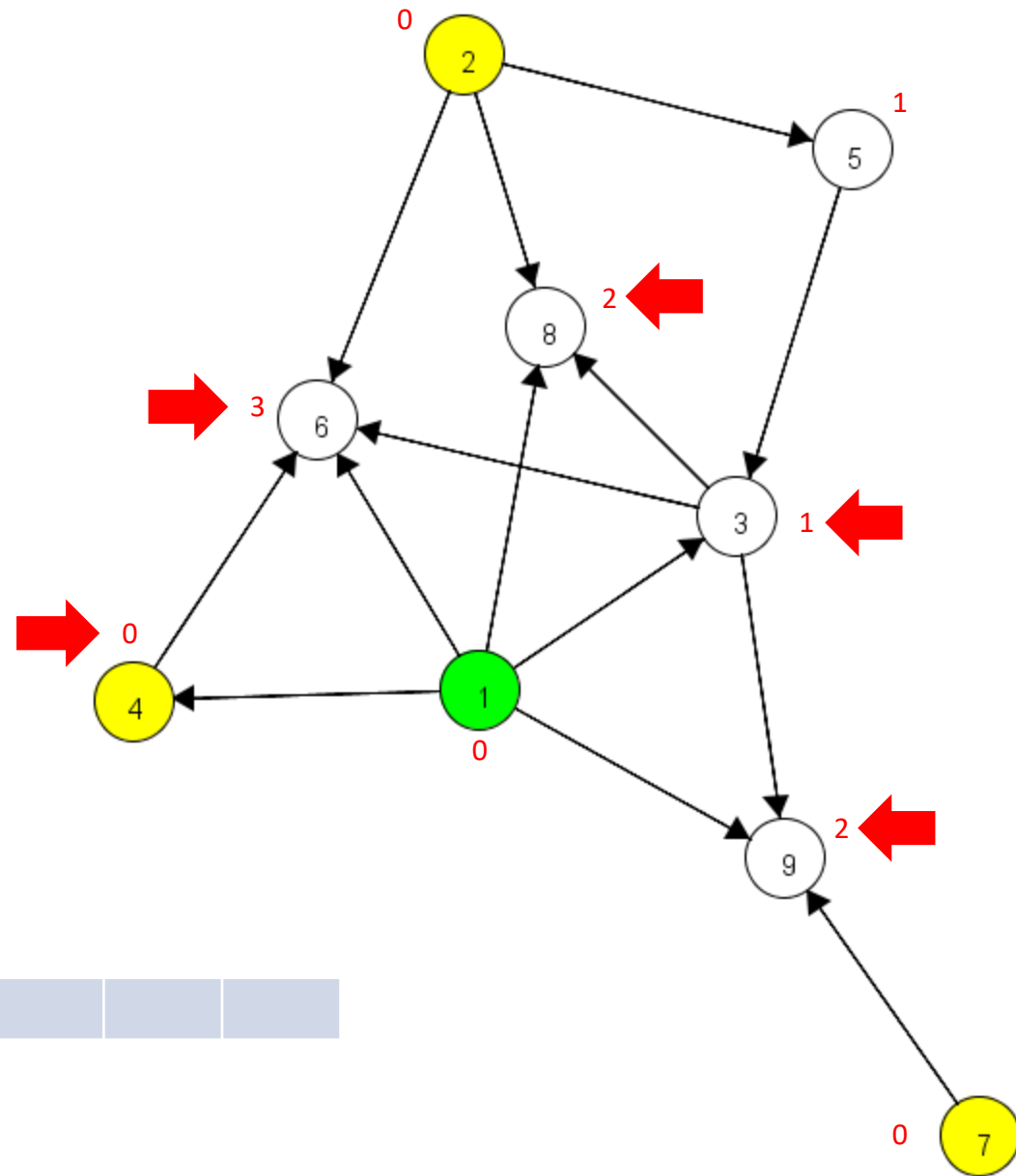
Contador: 1



Ordenación topológica

Solución:

Nodo	Nº topológico
1	1
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0



Cola

2	7	4						
---	---	---	--	--	--	--	--	--

Contador: 2

Ordenación topológica

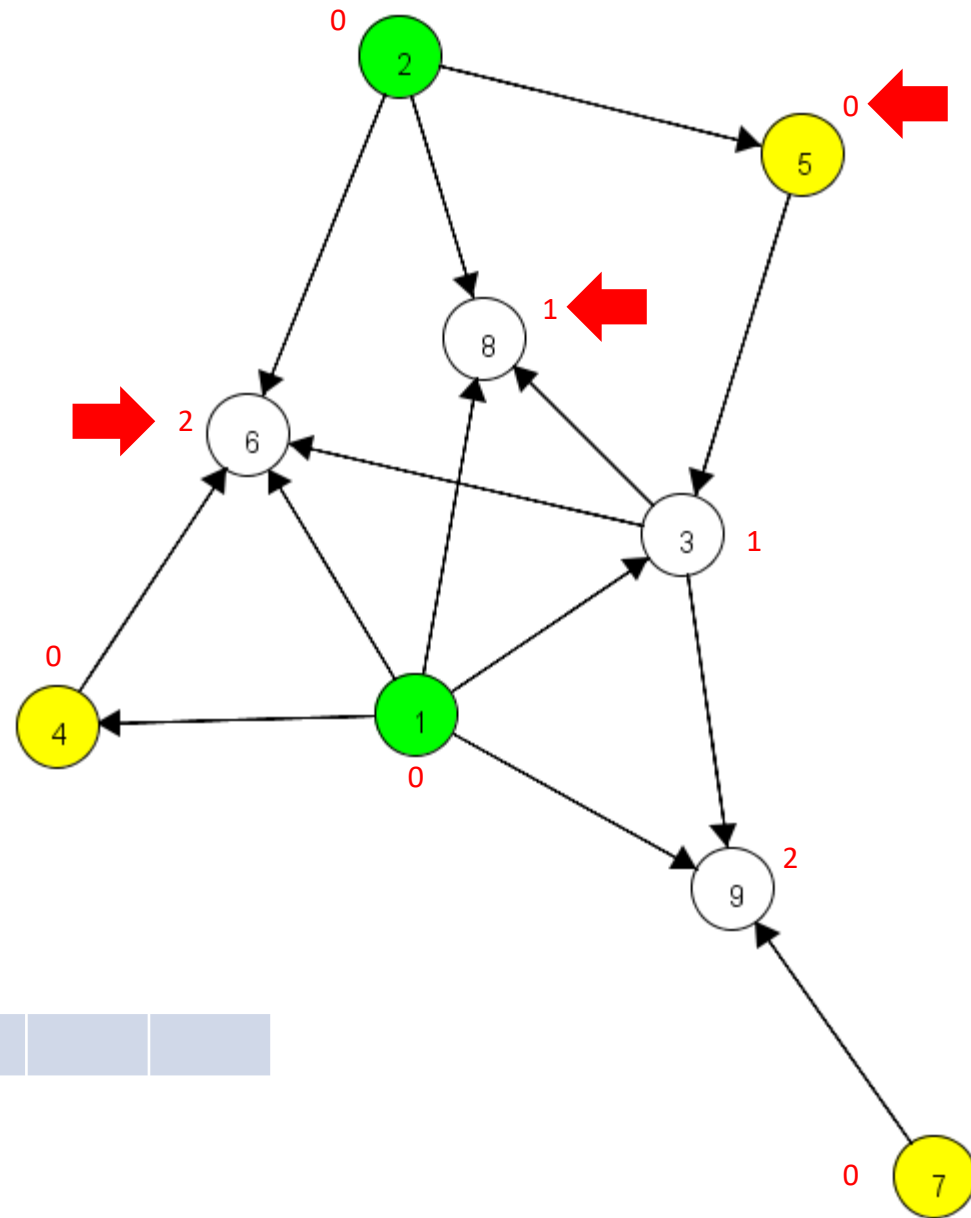
Solución:

Nodo	Nº topológico
1	1
2	2
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0

Cola

7	4	5						
---	---	---	--	--	--	--	--	--

Contador: 3



Ordenación topológica

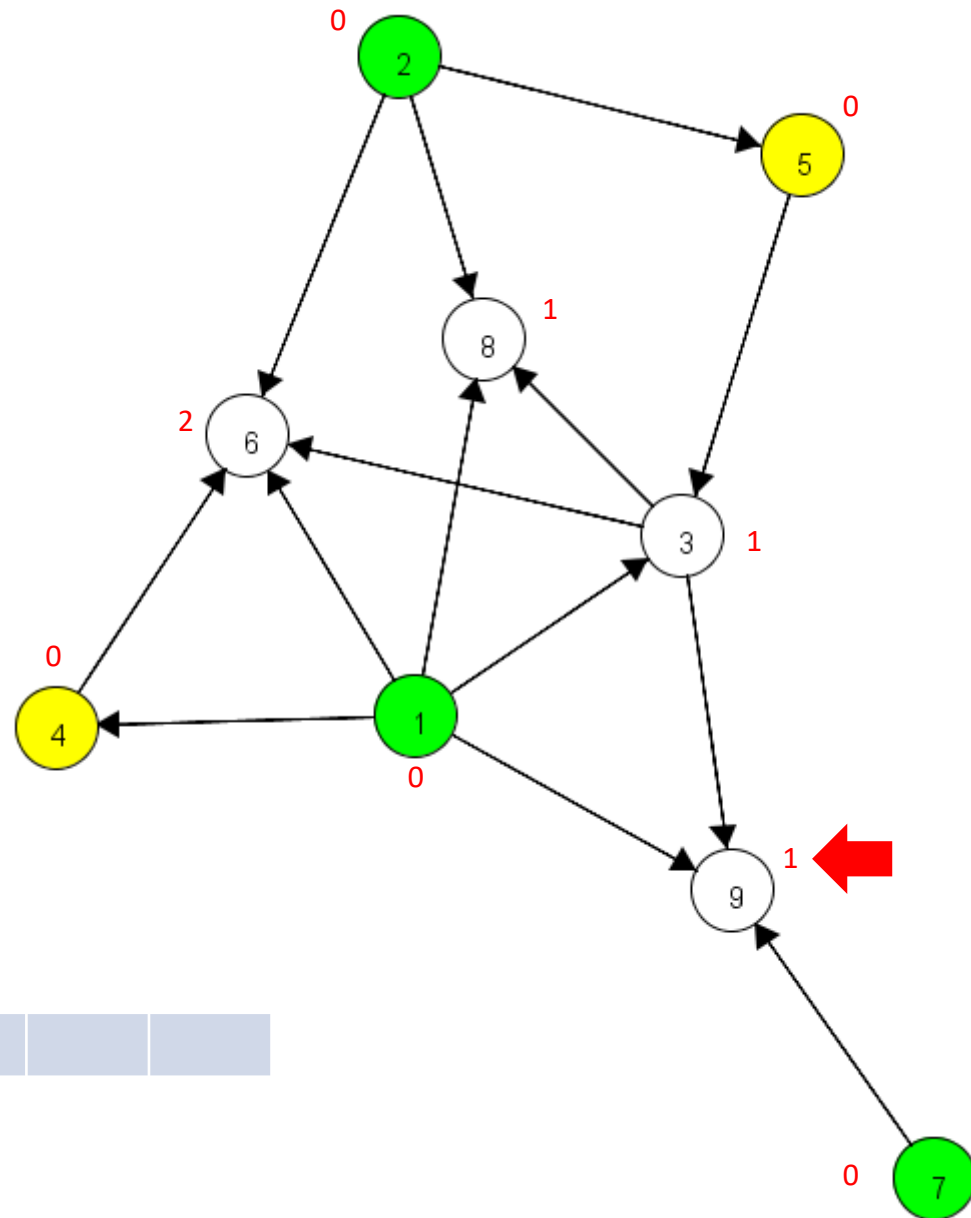
Solución:

Nodo	Nº topológico
1	1
2	2
3	0
4	0
5	0
6	0
7	3
8	0
9	0

Cola

4	5							
---	---	--	--	--	--	--	--	--

Contador: 4



Ordenación topológica

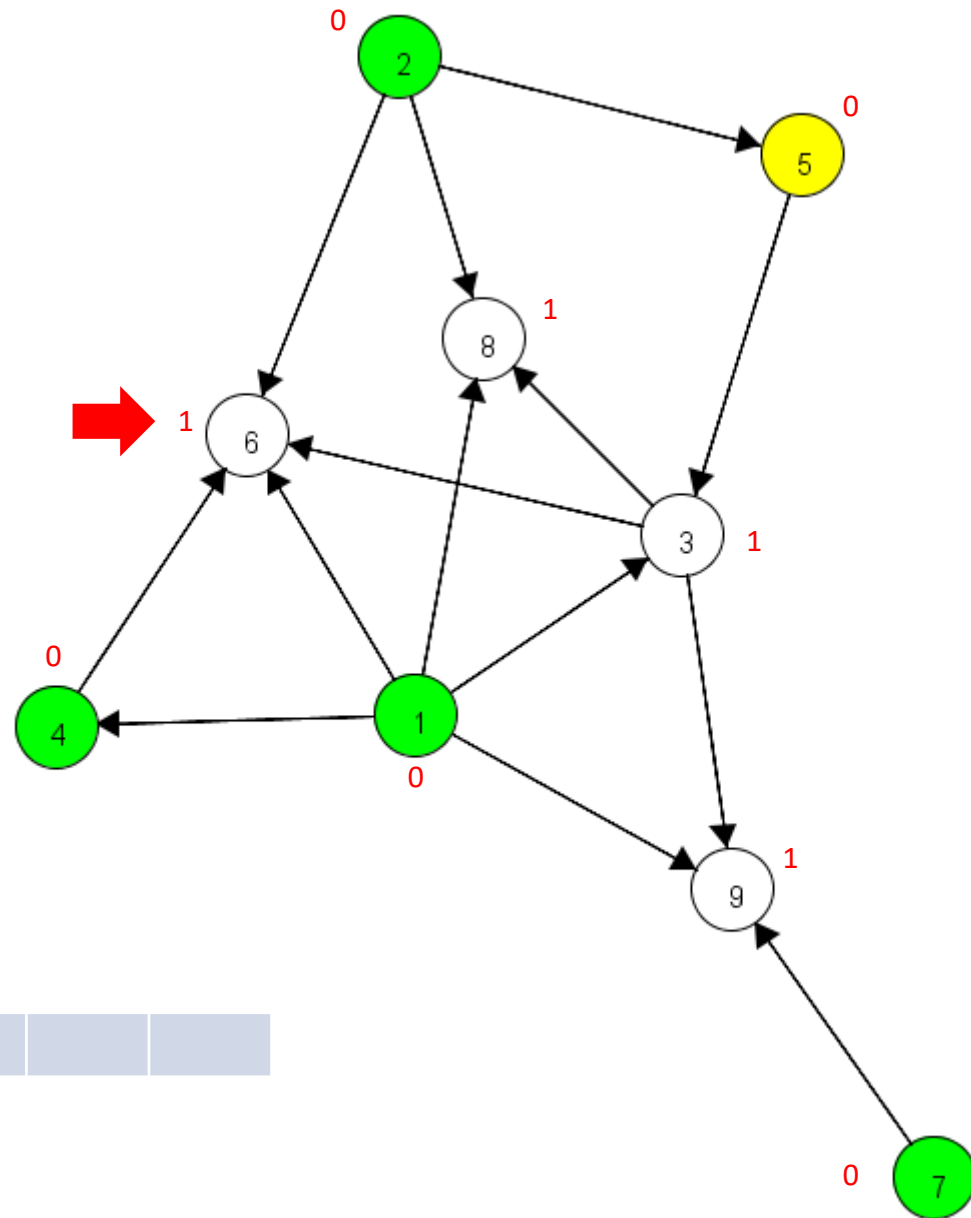
Solución:

Nodo	Nº topológico
1	1
2	2
3	0
4	4
5	0
6	0
7	3
8	0
9	0

Cola

5								
---	--	--	--	--	--	--	--	--

Contador: 5



Ordenación topológica

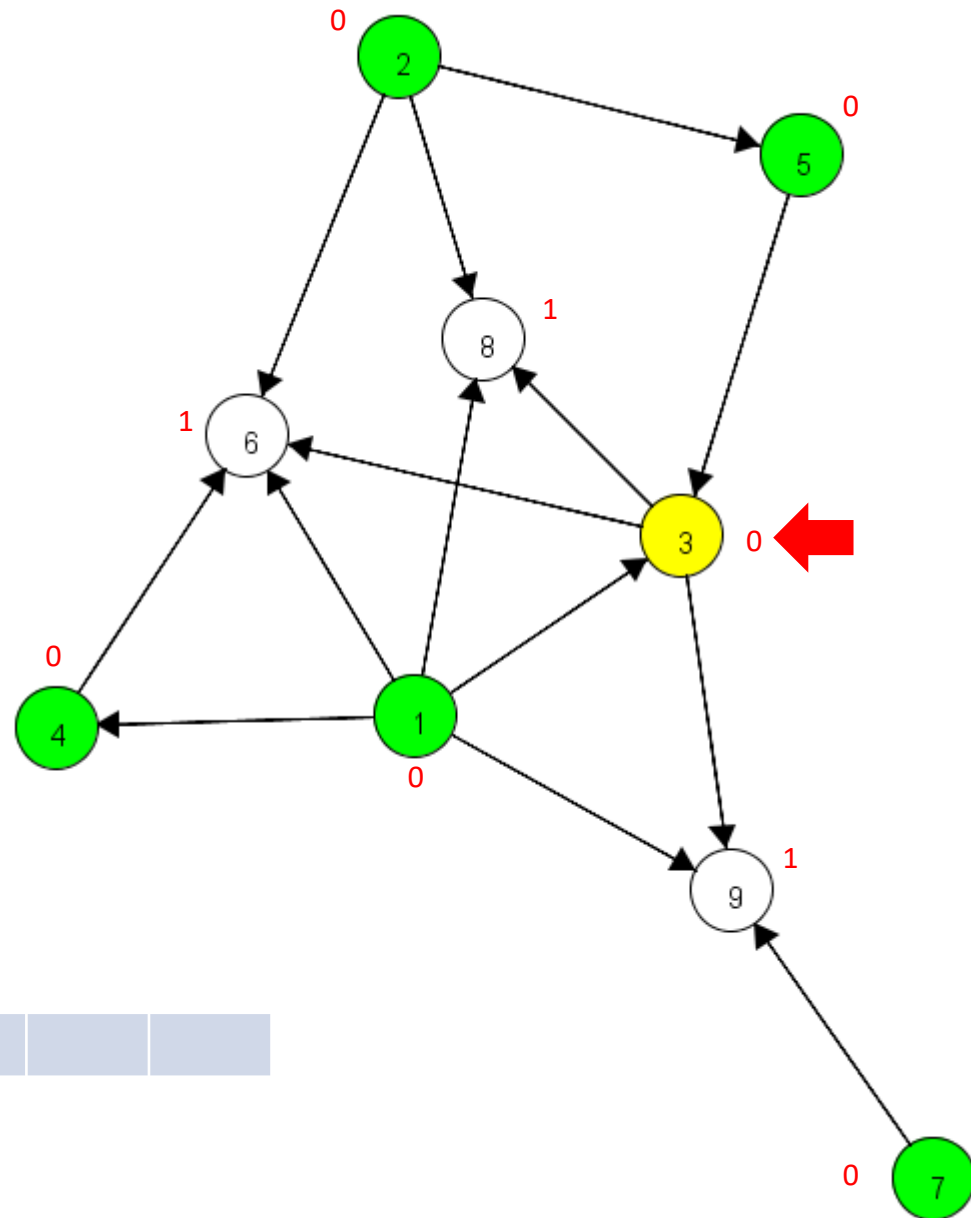
Solución:

Nodo	Nº topológico
1	1
2	2
3	0
4	4
5	5
6	0
7	3
8	0
9	0

Cola

3								
---	--	--	--	--	--	--	--	--

Contador: 6



Ordenación topológica

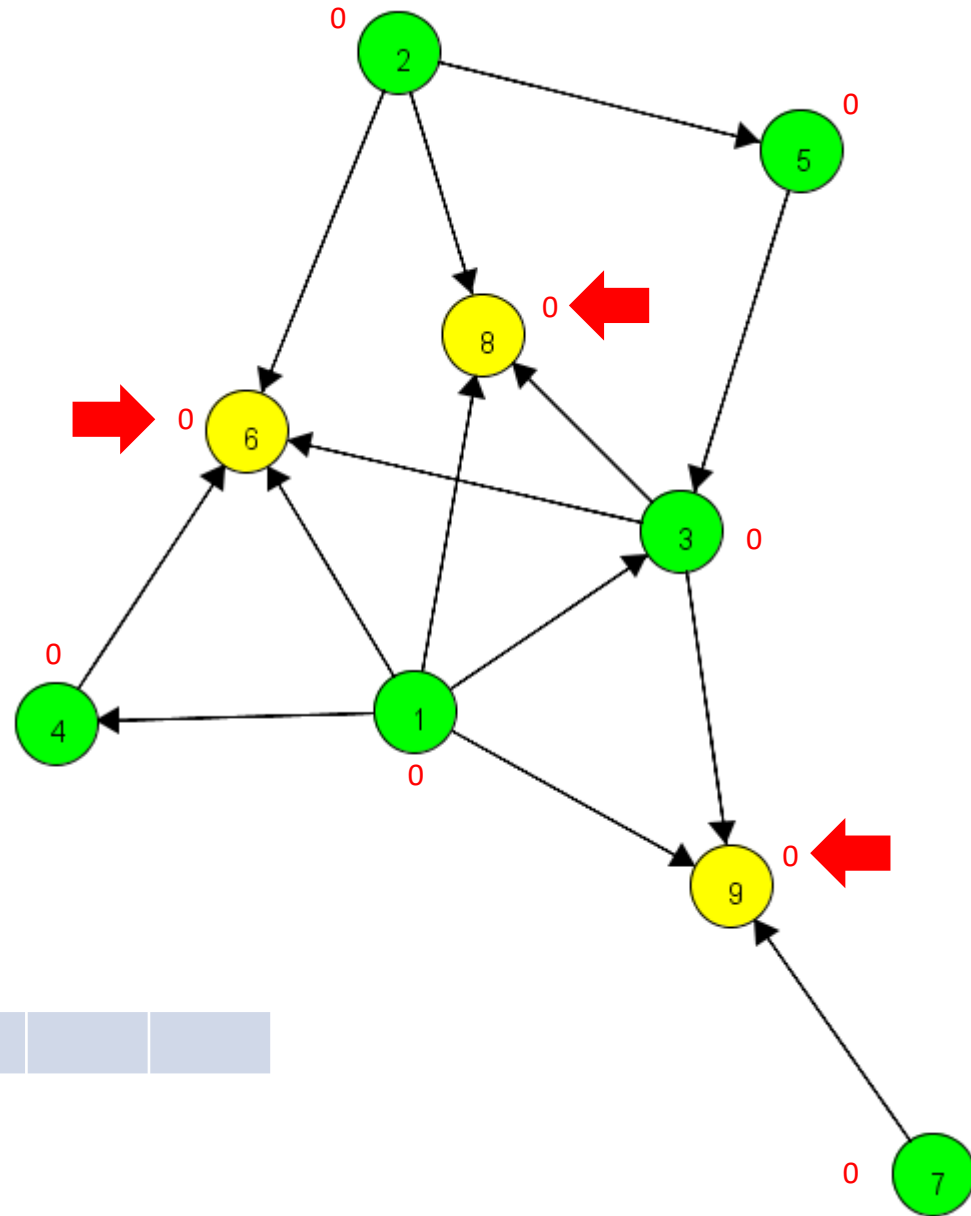
Solución:

Nodo	Nº topológico
1	1
2	2
3	6
4	4
5	5
6	0
7	3
8	0
9	0

Cola

6	8	9						
---	---	---	--	--	--	--	--	--

Contador: 7



Ordenación topológica

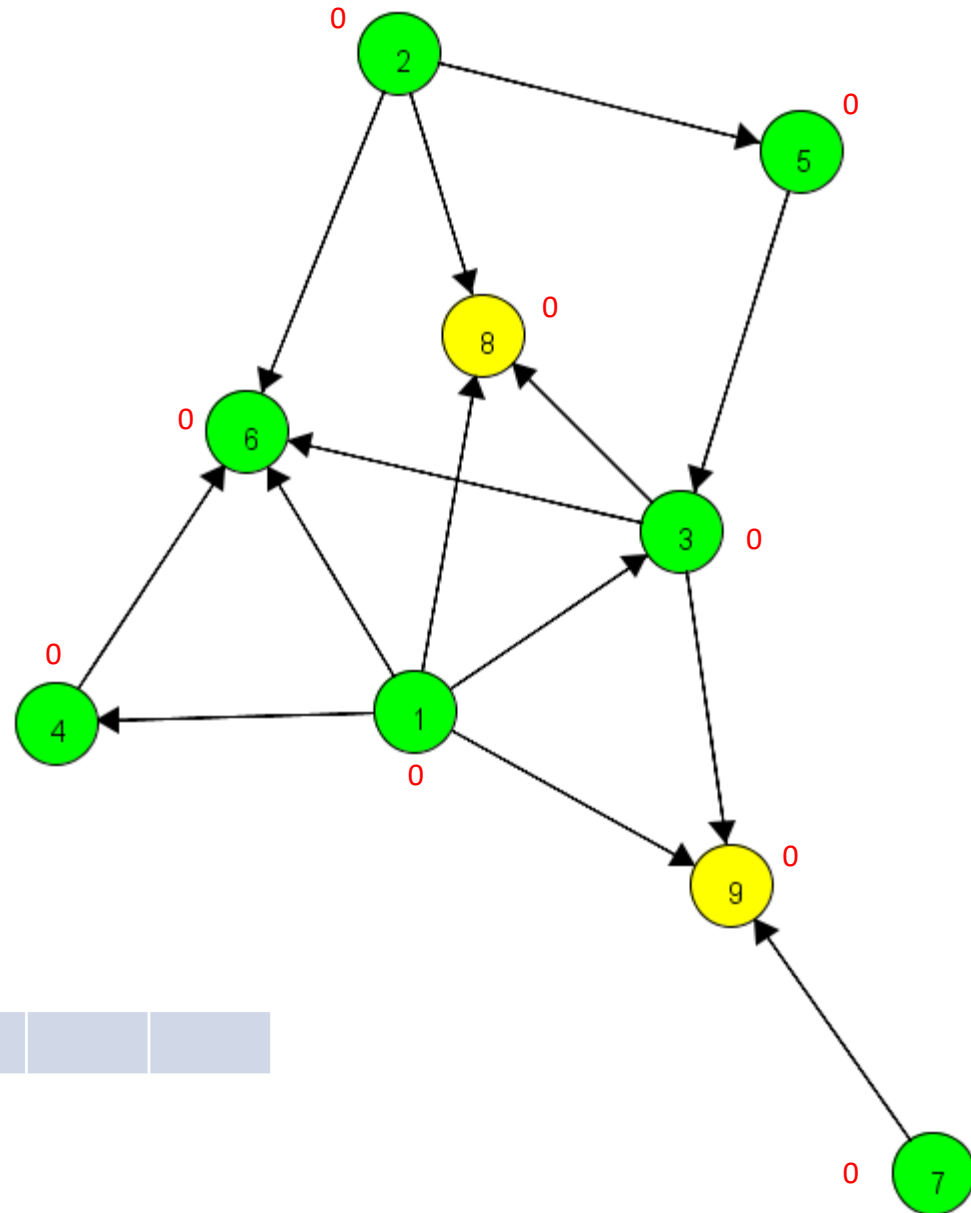
Solución:

Nodo	Nº topológico
1	1
2	2
3	6
4	4
5	5
6	7
7	3
8	0
9	0

Cola

8	9							
---	---	--	--	--	--	--	--	--

Contador: 8



Ordenación topológica

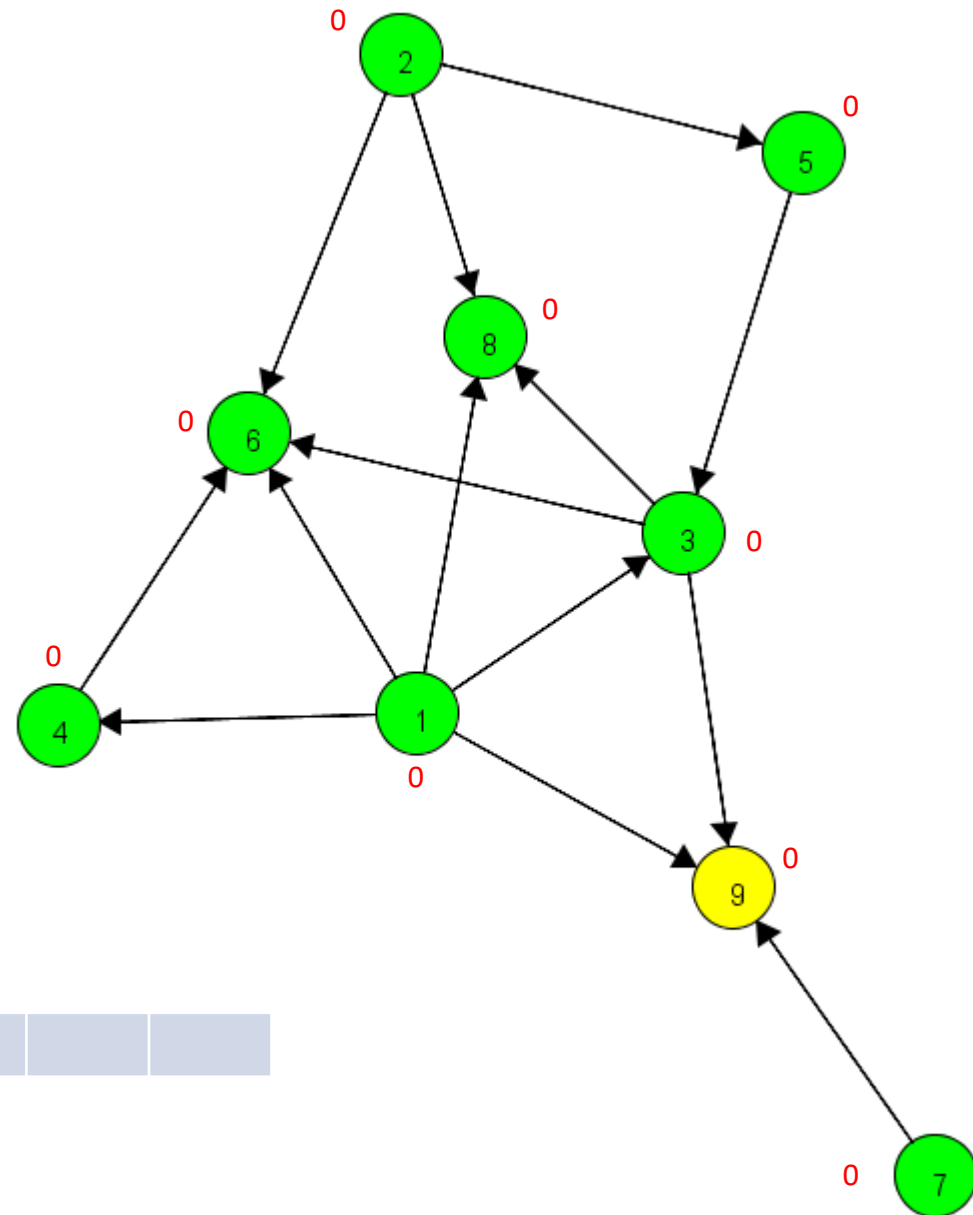
Solución:

Nodo	Nº topológico
1	1
2	2
3	6
4	4
5	5
6	7
7	3
8	8
9	0

Cola

9								
---	--	--	--	--	--	--	--	--

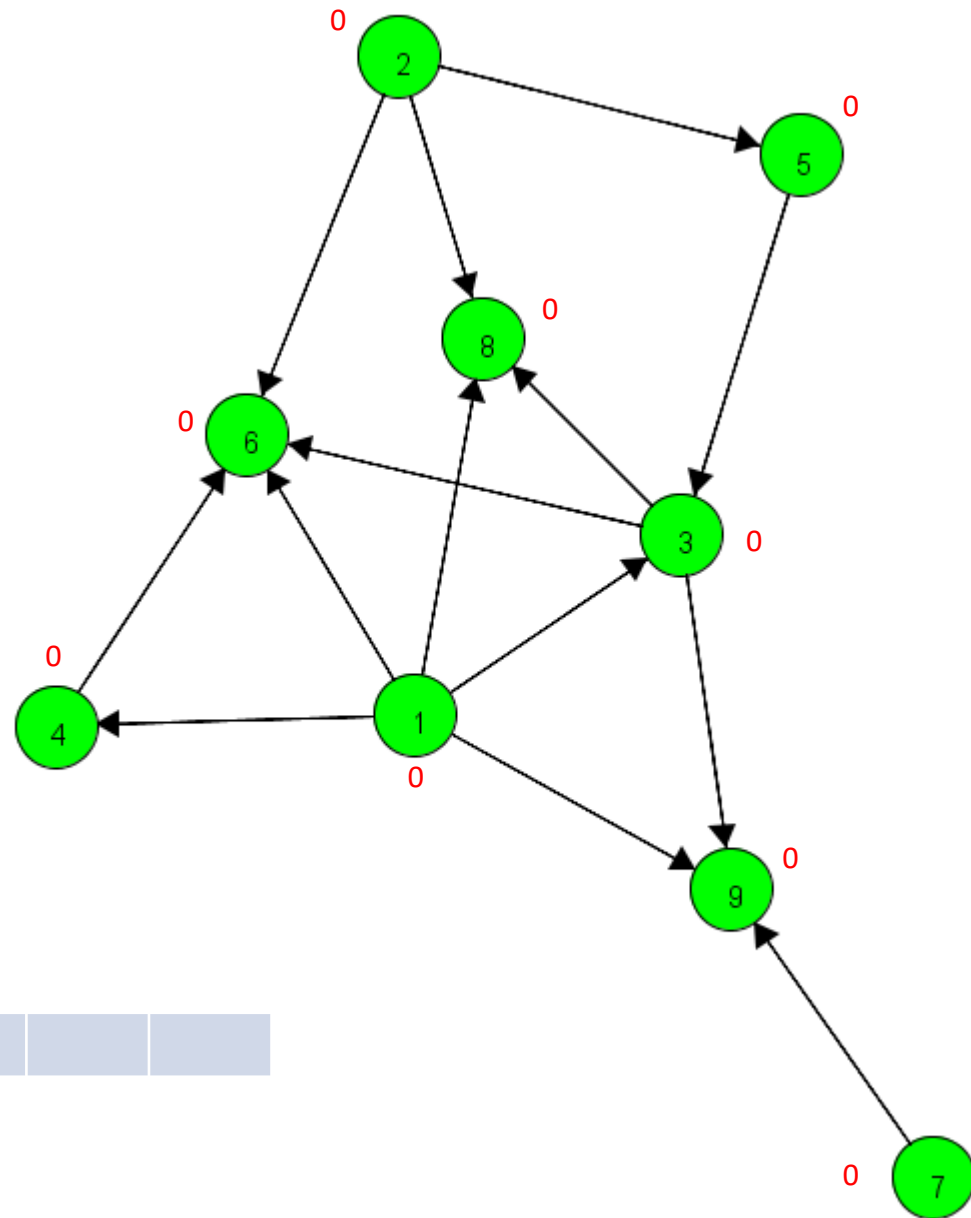
Contador: 9



Ordenación topológica

Solución: **1-2-7-4-5-3-6-8-9**

Nodo	Nº topológico
1	1
2	2
3	6
4	4
5	5
6	7
7	3
8	8
9	9



Cola

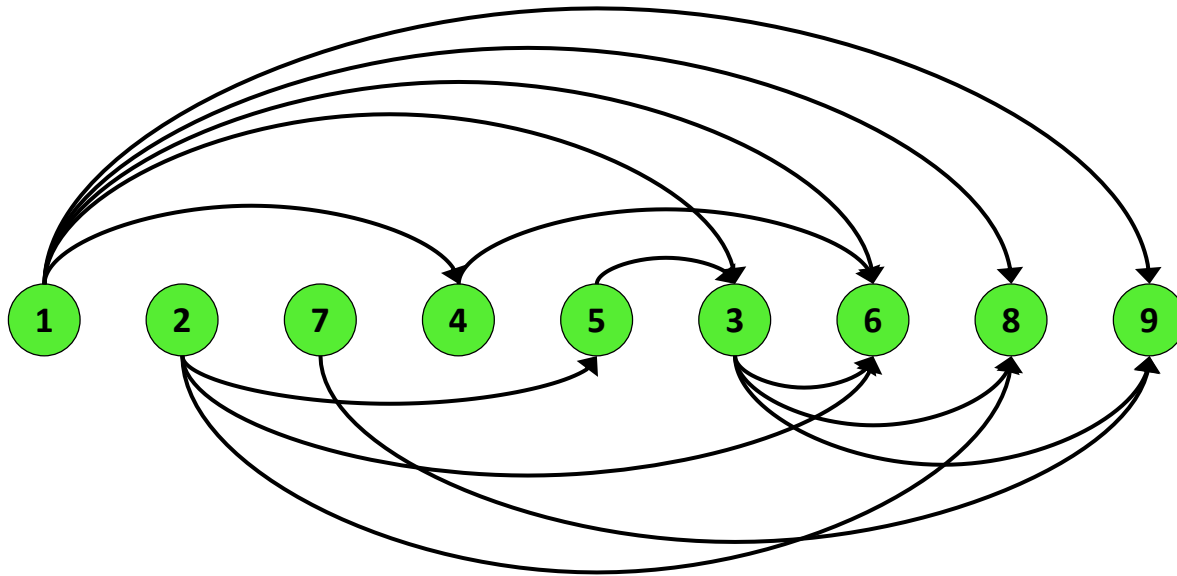
--	--	--	--	--	--	--	--	--

Contador: 10

Ordenación topológica

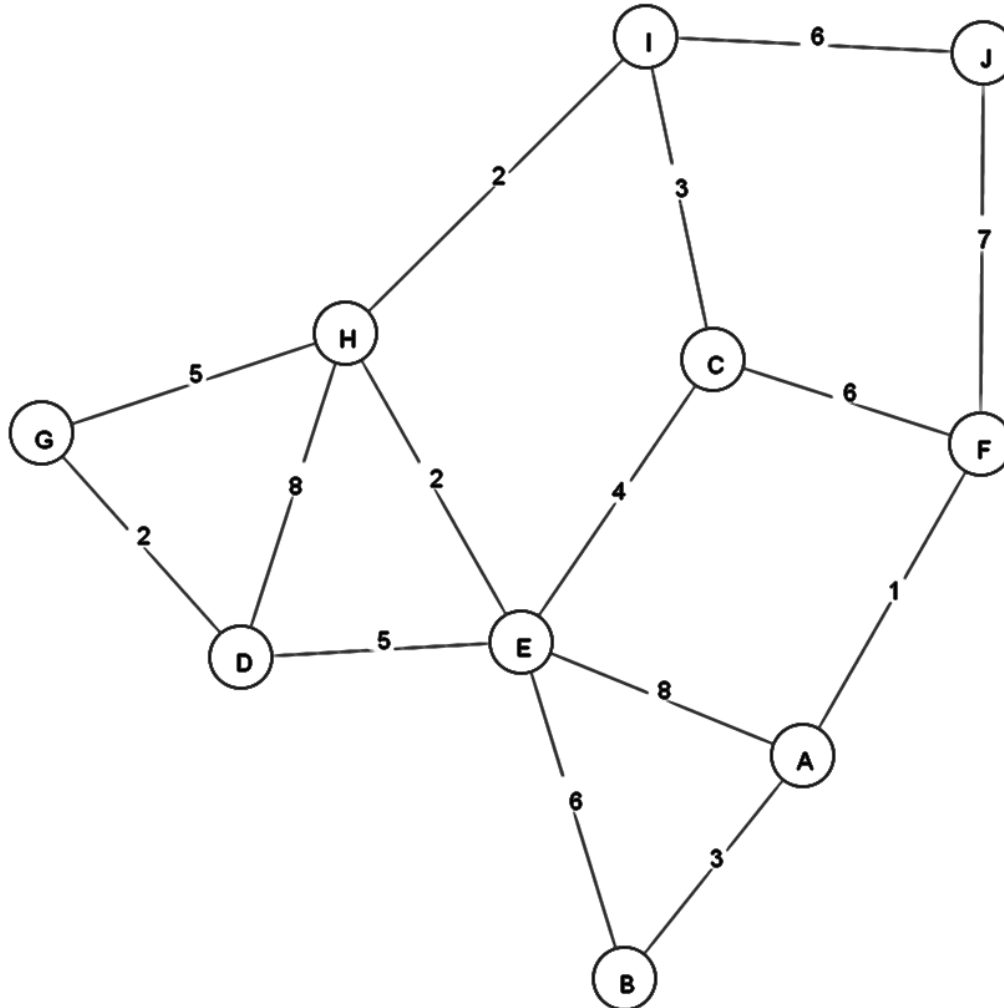
Solución:

1-2-7-4-5-3-6-8-9



Árbol expandido mínimo: algoritmo de Kruskal

Ejercicio 4: calcular el árbol expandido mínimo para el siguiente grafo, conexo y no dirigido, empleando para ello el algoritmo de Kruskal



Árbol expandido mínimo: algoritmo de Kruskal

Solución:

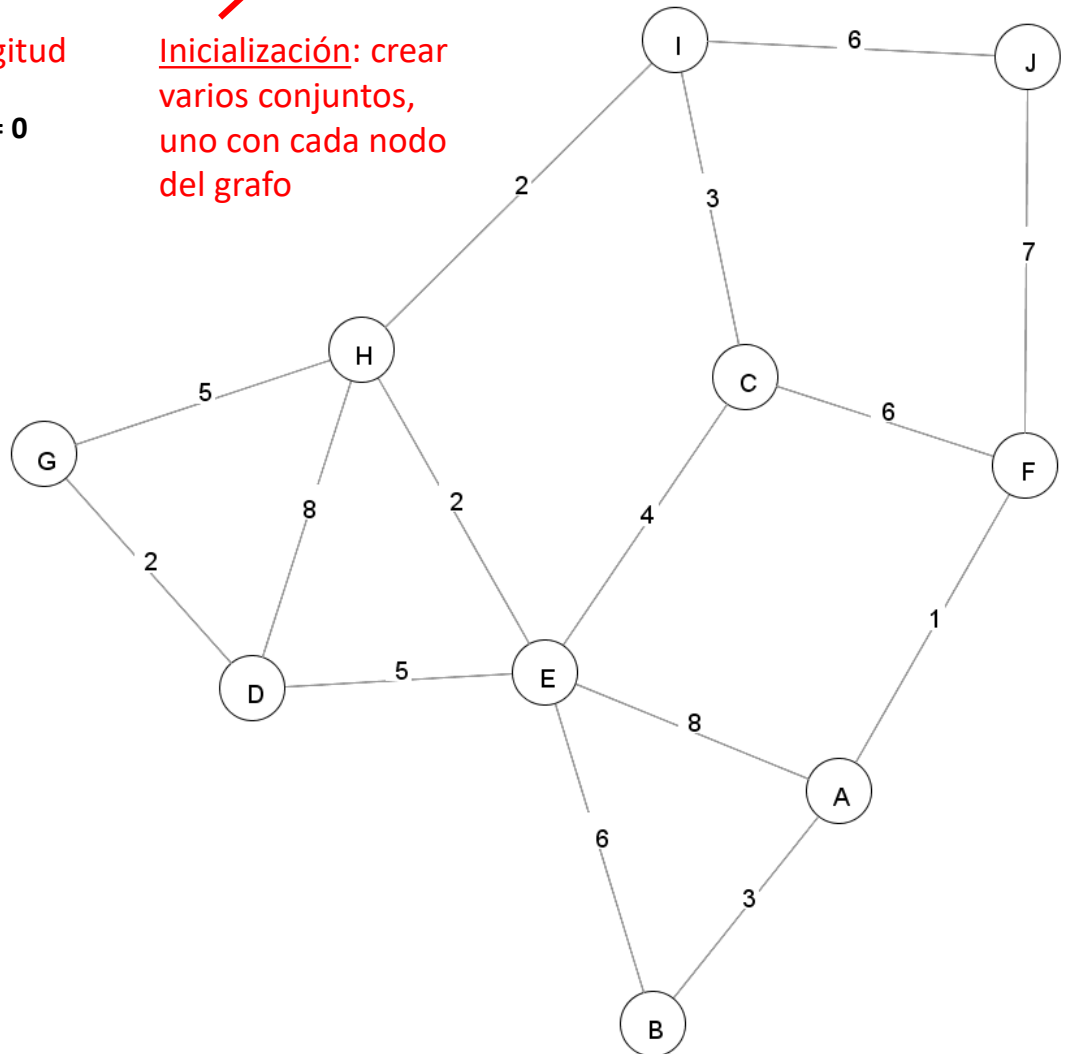
Inicialización: ordenar las aristas por longitud

Arista	Longitud
A-F	1
D-G	2
E-H	2
I-H	2
A-B	3
C-I	3
C-E	4
D-E	5
G-H	5
B-E	6
C-F	6
I-J	6
F-J	7
A-E	8
D-H	8

Peso total = 0

Kruskal - {A}{B}{C}{D}{E}{F}{G}{H}{I}{J}

Inicialización: crear varios conjuntos, uno con cada nodo del grafo



Árbol expandido mínimo: algoritmo de Kruskal

Solución:

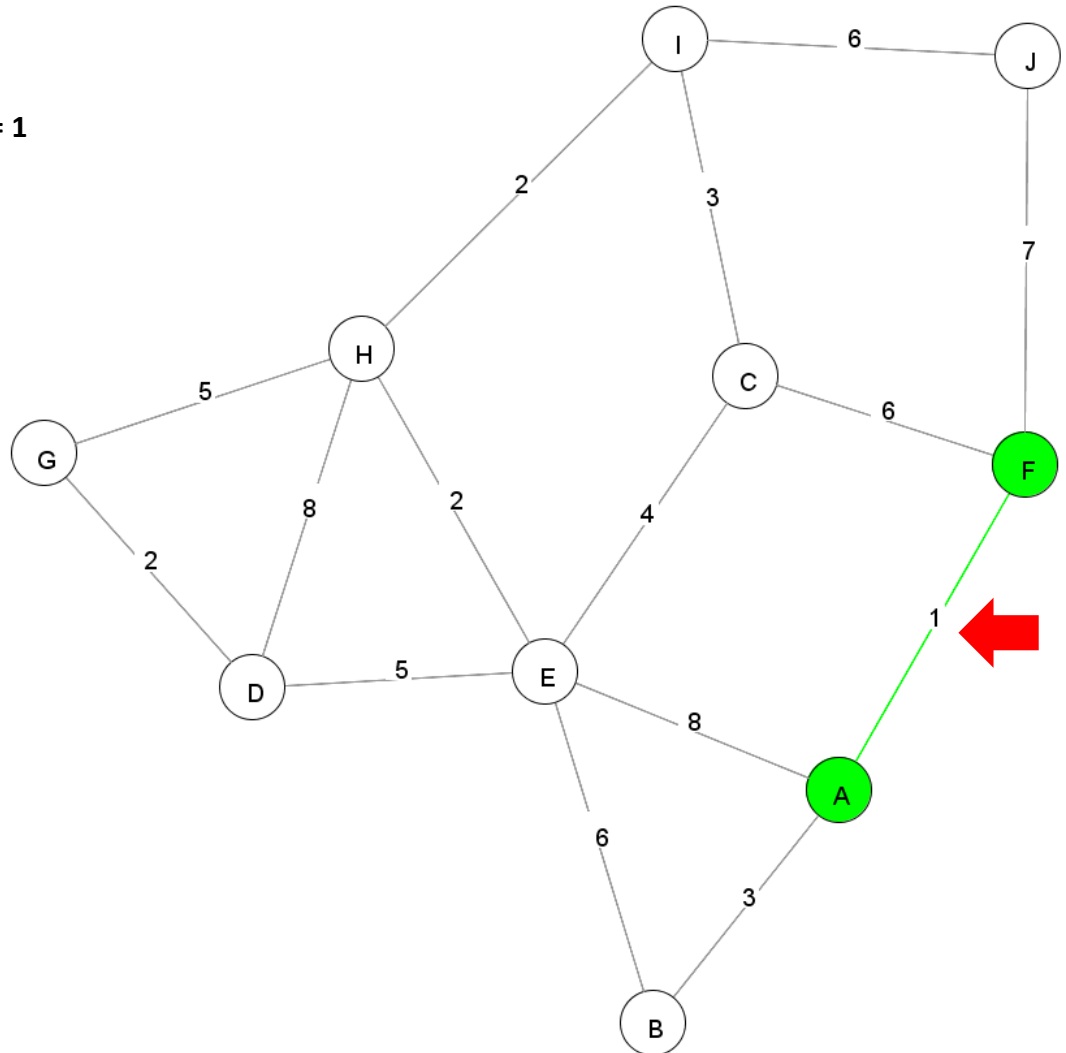
Kruskal - { A } { B } { C } { D } { E } { F } { G } { H } { I } { J }

Kruskal - { A, F } { B } { C } { D } { E } { G } { H } { I } { J }

Paso 1

Arista	Longitud
A-F	1
D-G	2
E-H	2
I-H	2
A-B	3
C-I	3
C-E	4
D-E	5
G-H	5
B-E	6
C-F	6
I-J	6
F-J	7
A-E	8
D-H	8

Peso total = 1



Árbol expandido mínimo: algoritmo de Kruskal

Kruskal - { A, F } { B } { C } { D } { E } { G } { H } { I } { J }

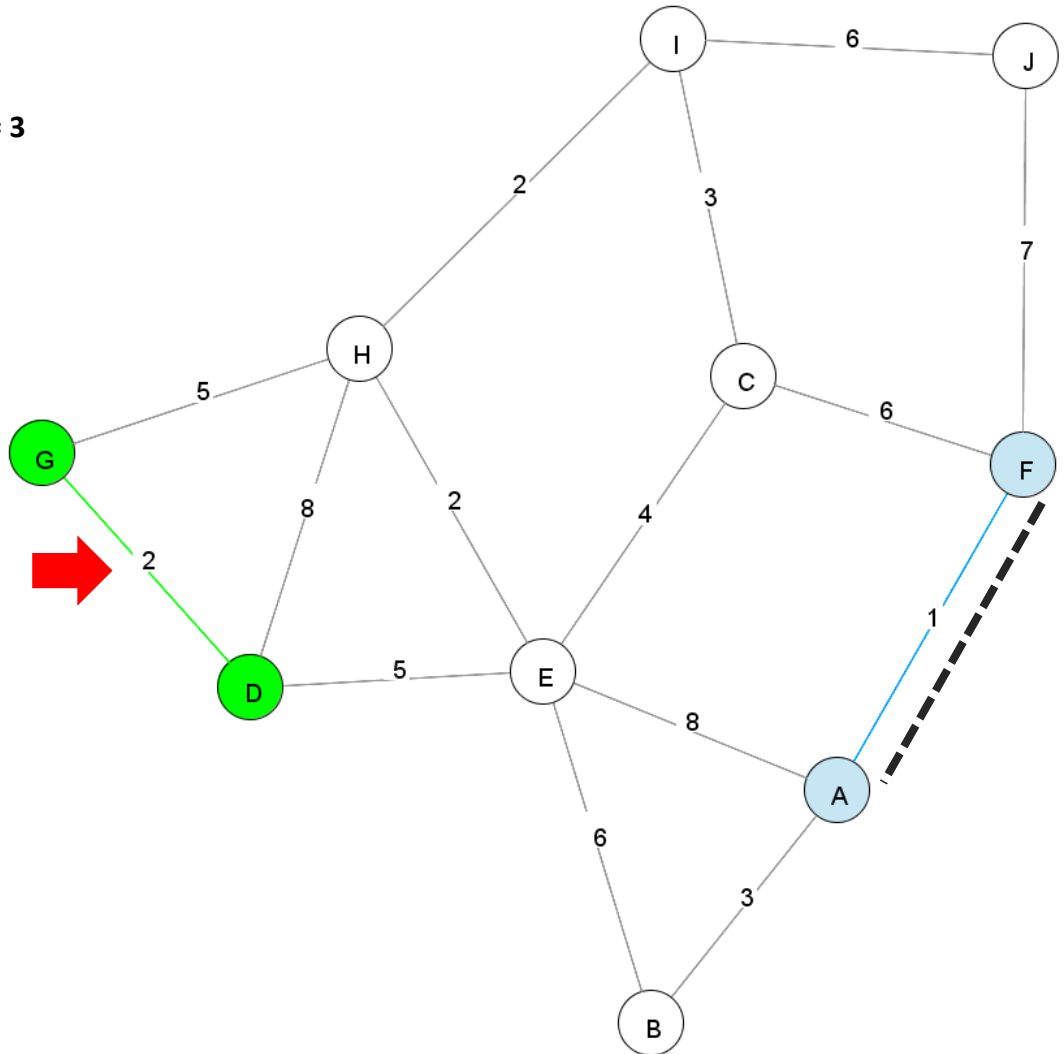
Kruskal - { A, F } { D, G } { B } { C } { E } { H } { I } { J }

Solución:

Paso 2

Arista	Longitud
A-F	1
D-G	2
E-H	2
I-H	2
A-B	3
C-I	3
C-E	4
D-E	5
G-H	5
B-E	6
C-F	6
I-J	6
F-J	7
A-E	8
D-H	8

Peso total = 3



Árbol expandido mínimo: algoritmo de Kruskal

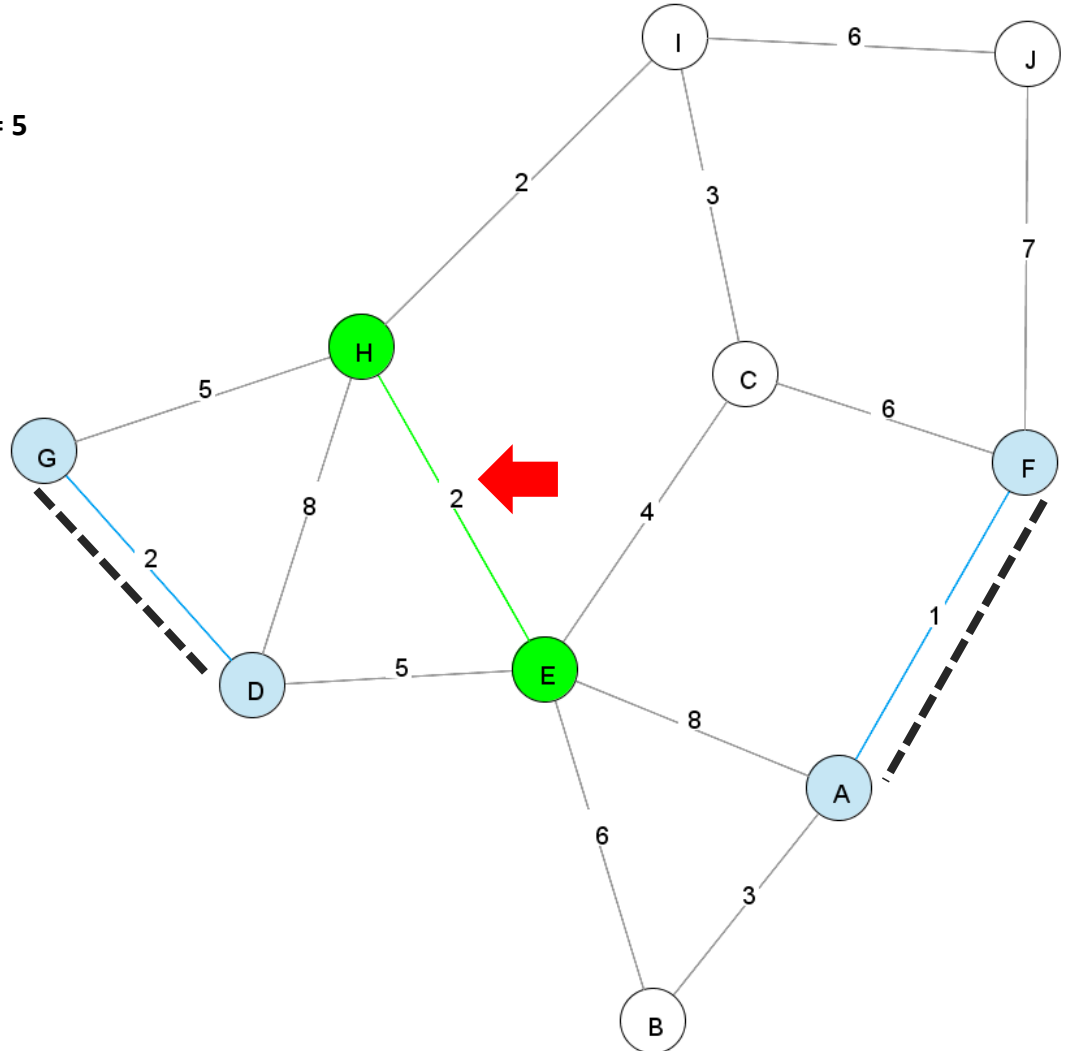
Kruskal - { A, F } { D, G } { B } { C } { E } { H } { I } { J }
Kruskal - { A, F } { D, G } { E, H } { B } { C } { I } { J }

Solución:

Paso 3

Arista	Longitud
A-F	1
D-G	2
E-H	2
I-H	2
A-B	3
C-I	3
C-E	4
D-E	5
G-H	5
B-E	6
C-F	6
I-J	6
F-J	7
A-E	8
D-H	8

Peso total = 5



Árbol expandido mínimo: algoritmo de Kruskal

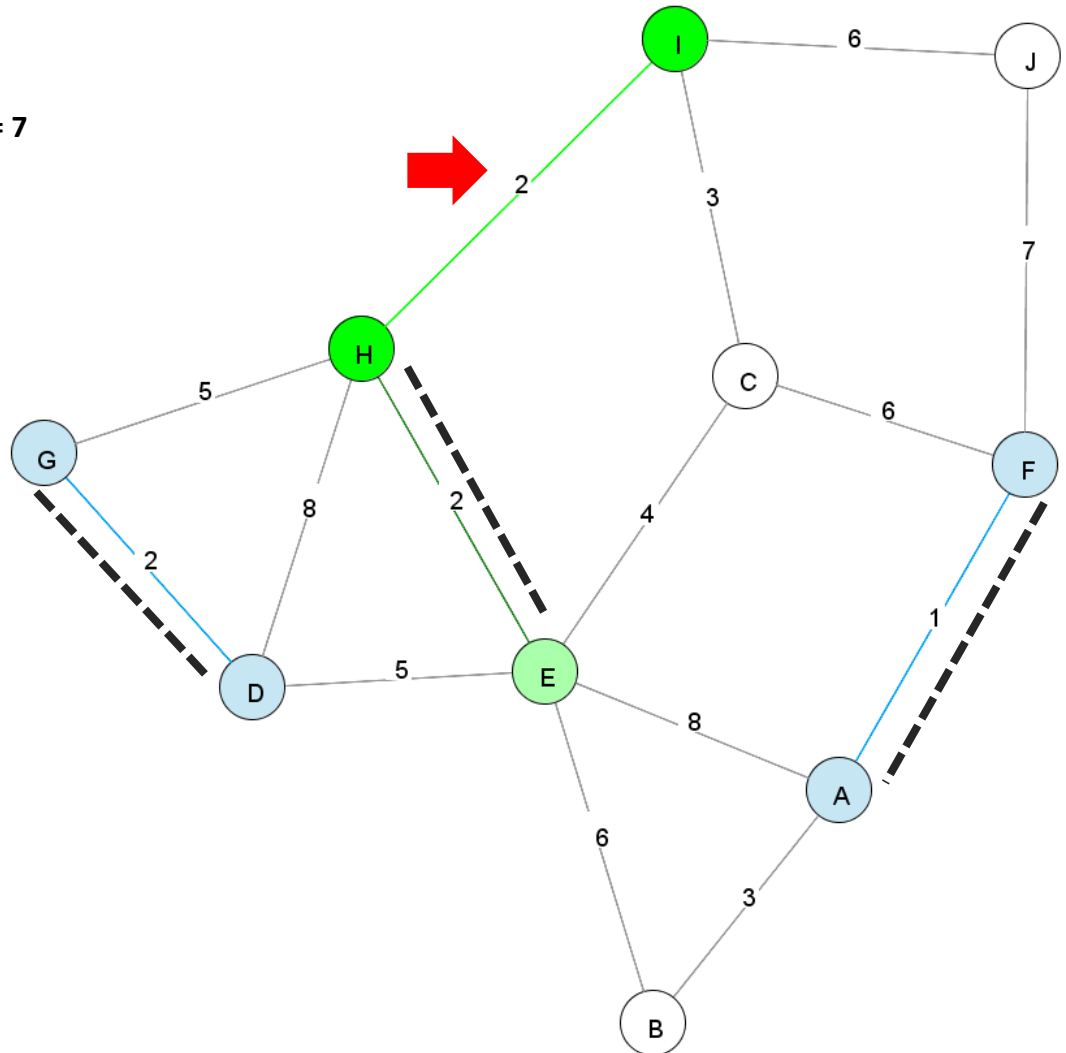
Kruskal - { A, F } { D, G } { E, H } { B } { C } { I } { J }
Kruskal - { A, F } { D, G } { E, H, I } { B } { C } { J }

Solución:

Paso 4

Arista	Longitud
A-F	1
D-G	2
E-H	2
I-H	2
A-B	3
C-I	3
C-E	4
D-E	5
G-H	5
B-E	6
C-F	6
I-J	6
F-J	7
A-E	8
D-H	8

Peso total = 7



Árbol expandido mínimo: algoritmo de Kruskal

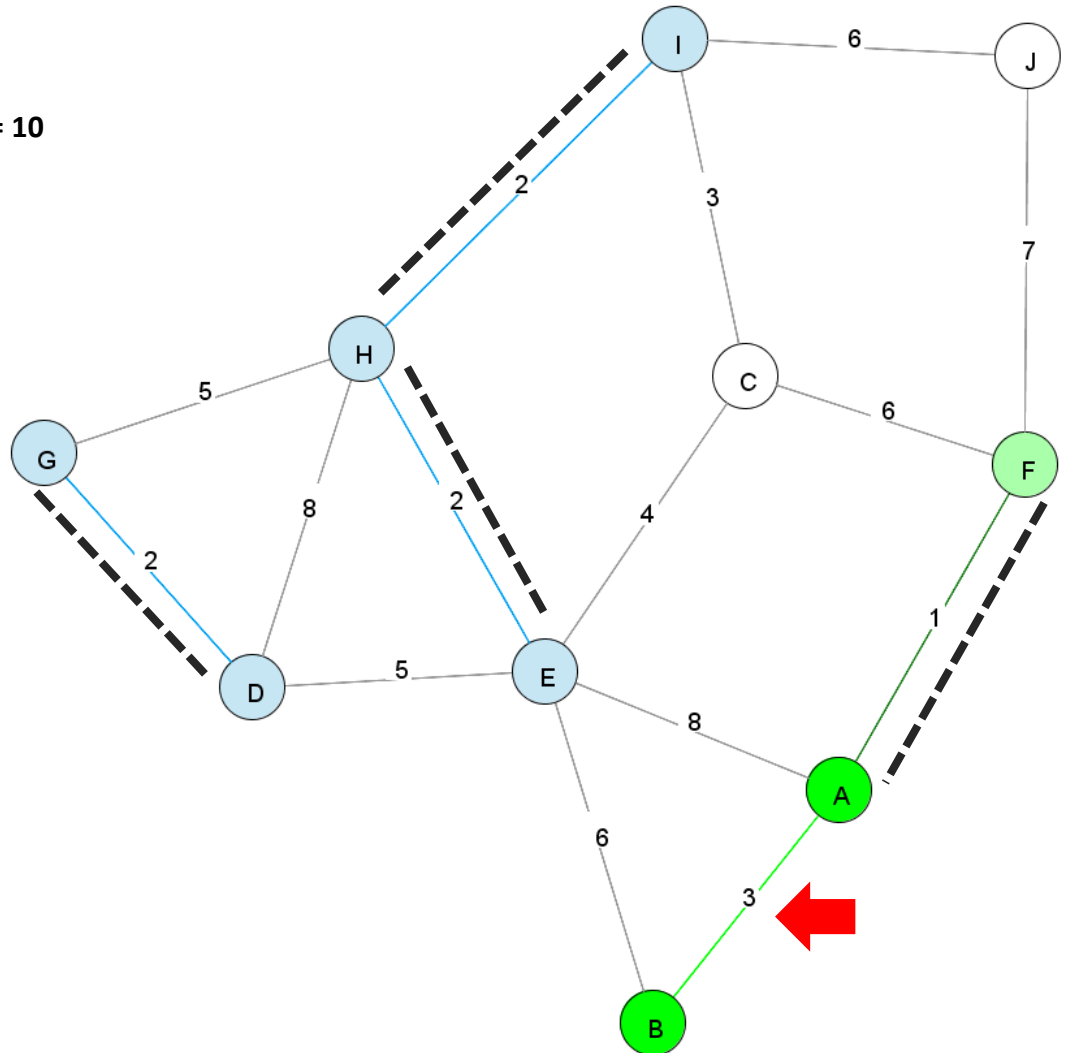
Kruskal - { A, F } { D, G } { E, H, I } { B } { C } { J }
Kruskal - { A, B, F } { D, G } { E, H, I } { C } { J }

Solución:

Paso 5

Arista	Longitud
A-F	1
D-G	2
E-H	2
I-H	2
A-B	3
C-I	3
C-E	4
D-E	5
G-H	5
B-E	6
C-F	6
I-J	6
F-J	7
A-E	8
D-H	8

Peso total = 10



Árbol expandido mínimo: algoritmo de Kruskal

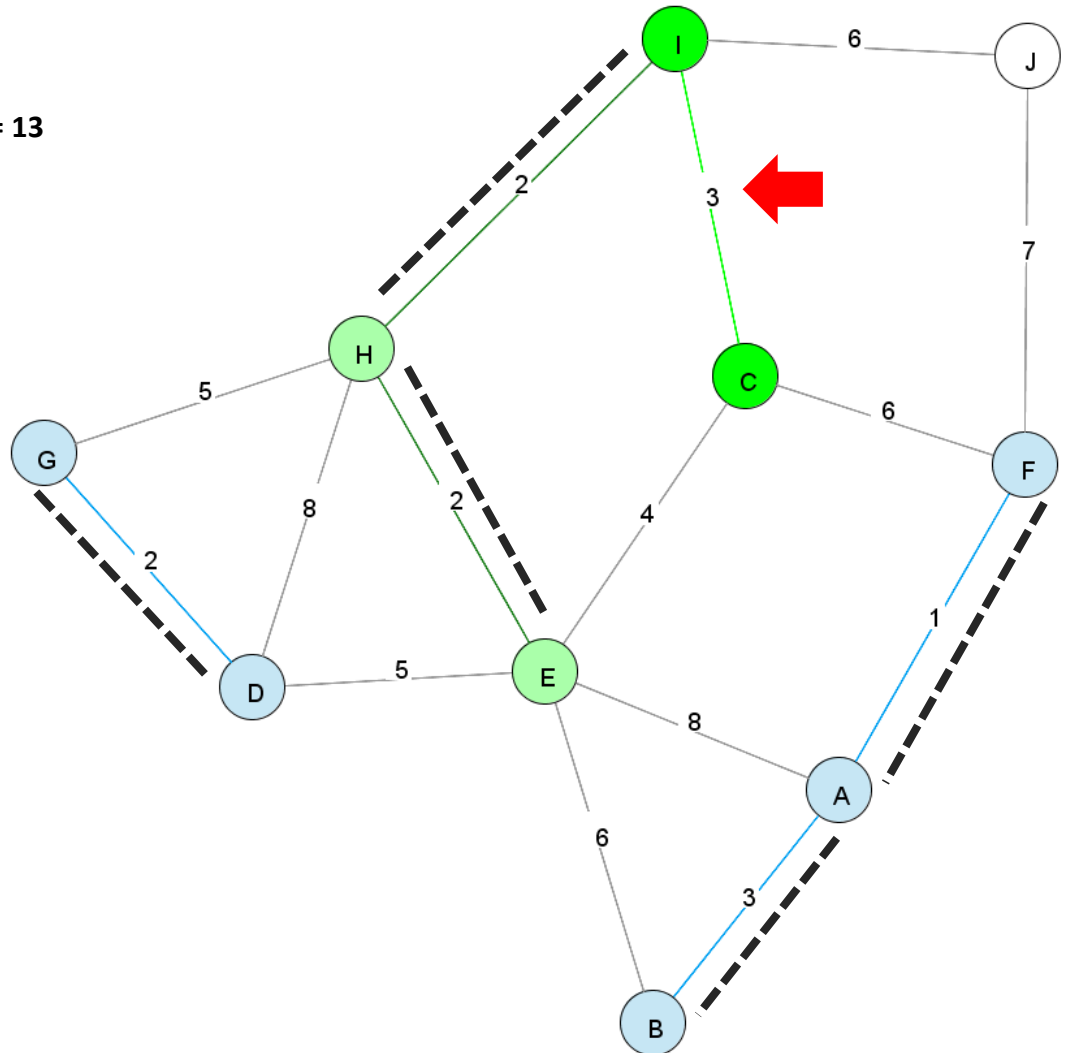
Solución:

Kruskal - { A, B, F } { D, G } { E, H, I } { C } { J }
Kruskal - { A, B, F } { D, G } { C, E, H, I } { J }

Paso 6

Arista	Longitud
A-F	1
D-G	2
E-H	2
I-H	2
A-B	3
C-I	3
C-E	4
D-E	5
G-H	5
B-E	6
C-F	6
I-J	6
F-J	7
A-E	8
D-H	8

Peso total = 13



Árbol expandido mínimo: algoritmo de Kruskal

Kruskal - { A, B, F } { D, G } { C, E, H, I } { J }
Kruskal - { A, B, F } { C, D, E, G, H, I } { J }

Solución:

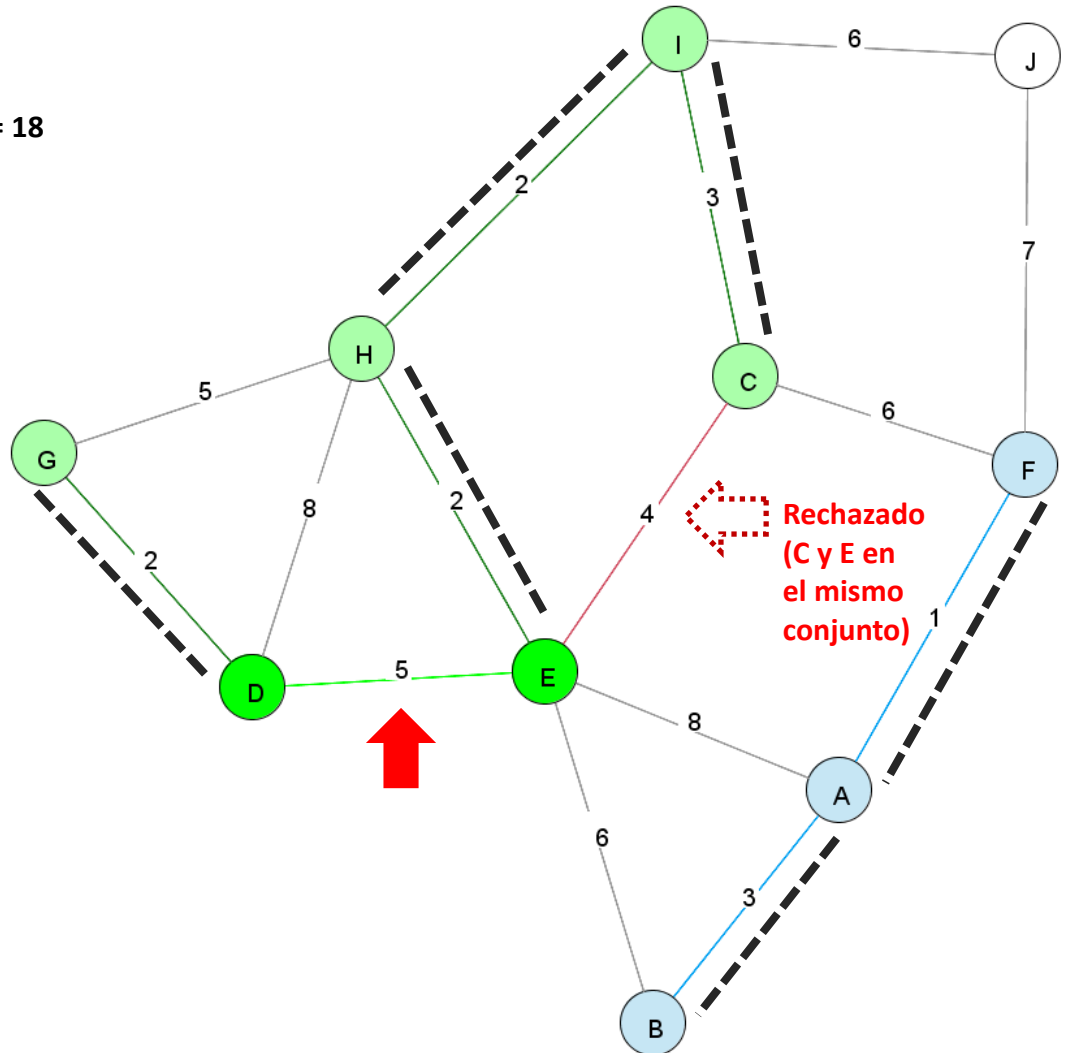
Arista	Longitud
A-F	1
D-G	2
E-H	2
I-H	2
A-B	3
C-I	3
C-E	4
D-E	5
G-H	5
B-E	6
C-F	6
I-J	6
F-J	7
A-E	8
D-H	8

Peso total = 18

Paso 7

Paso 8

Rechazado



Árbol expandido mínimo: algoritmo de Kruskal

Kruskal - { A, B, F } { C, D, E, G, H, I } { J }
Kruskal - { A, B, C, D, E, F, G, H, I } { J }

Solución:

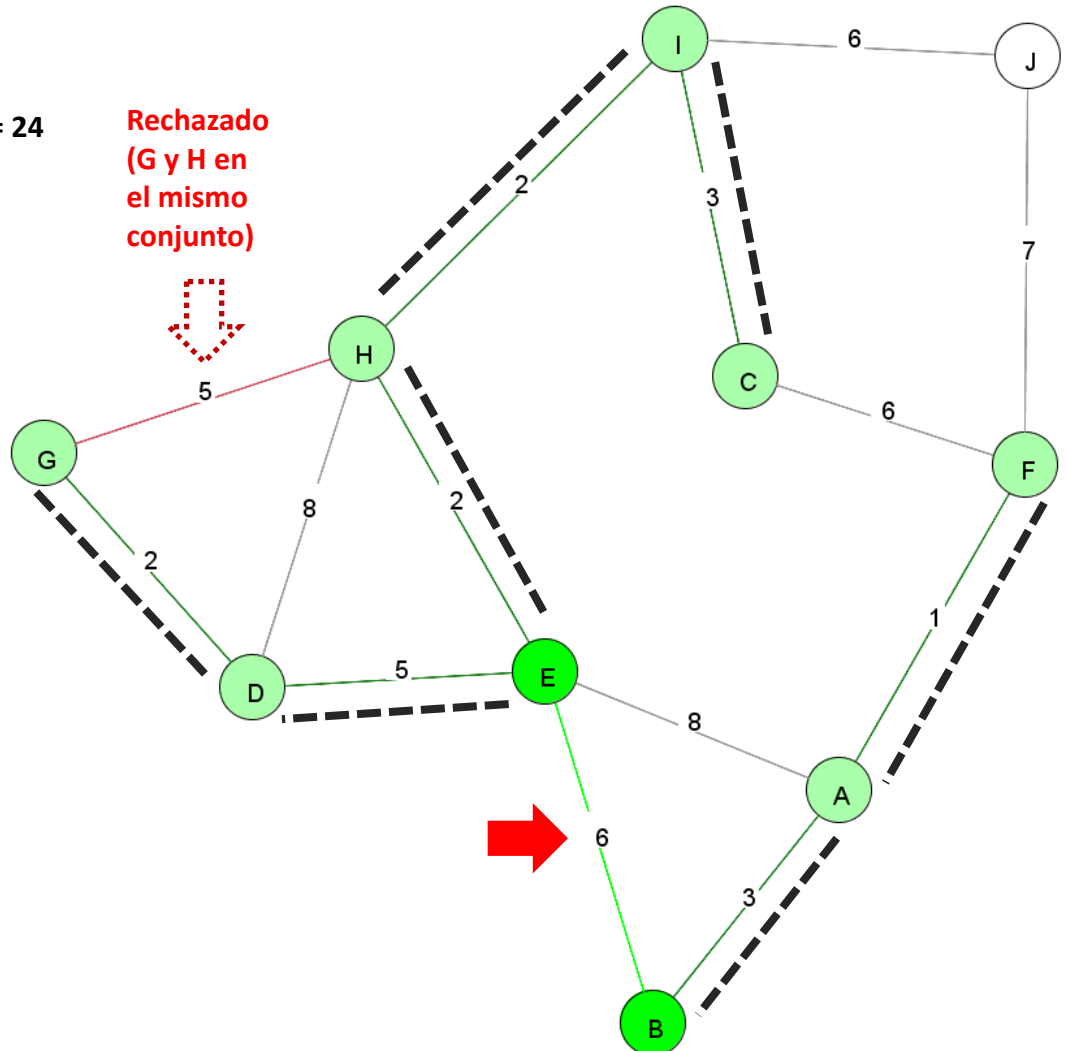
Arista	Longitud
A-F	1
D-G	2
E-H	2
I-H	2
A-B	3
C-I	3
C-E	4
D-E	5
G-H	5
B-E	6
C-F	6
I-J	6
F-J	7
A-E	8
D-H	8

Peso total = 24

Rechazado
(G y H en
el mismo
conjunto)



Rechazado



Paso 9

Paso 10

Árbol expandido mínimo: algoritmo de Kruskal

Kruskal - { A, B, C, D, E, F, G, H, I } { J }

Kruskal - { A, B, C, D, E, F, G, H, I, J }

Solución:

Arista	Longitud
A-F	1
D-G	2
E-H	2
I-H	2
A-B	3
C-I	3
C-E	4
D-E	5
G-H	5
B-E	6
C-F	6
I-J	6
F-J	7
A-E	8
D-H	8

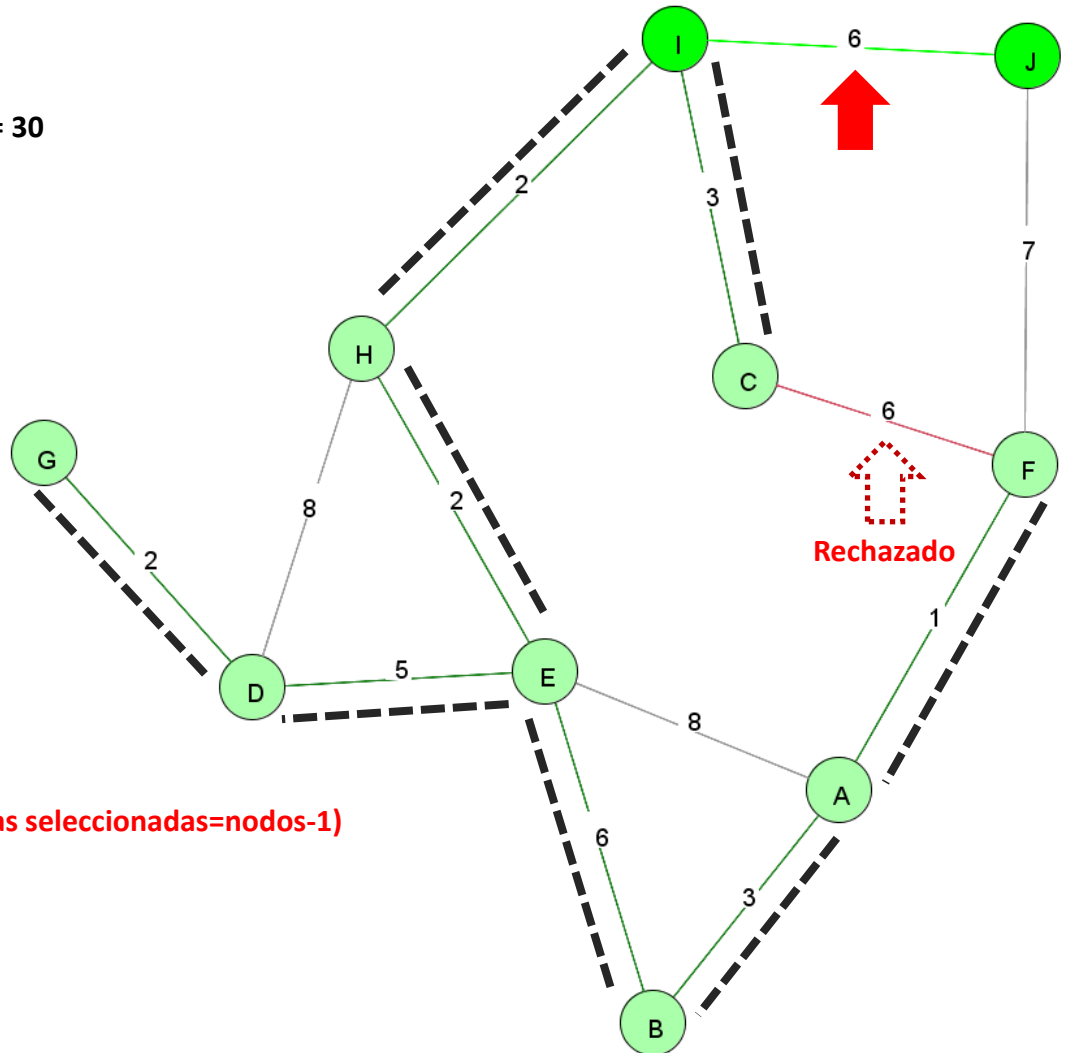
Peso total = 30

Paso 11

Paso 12

Rechazado

FIN (nº aristas seleccionadas=nodos-1)



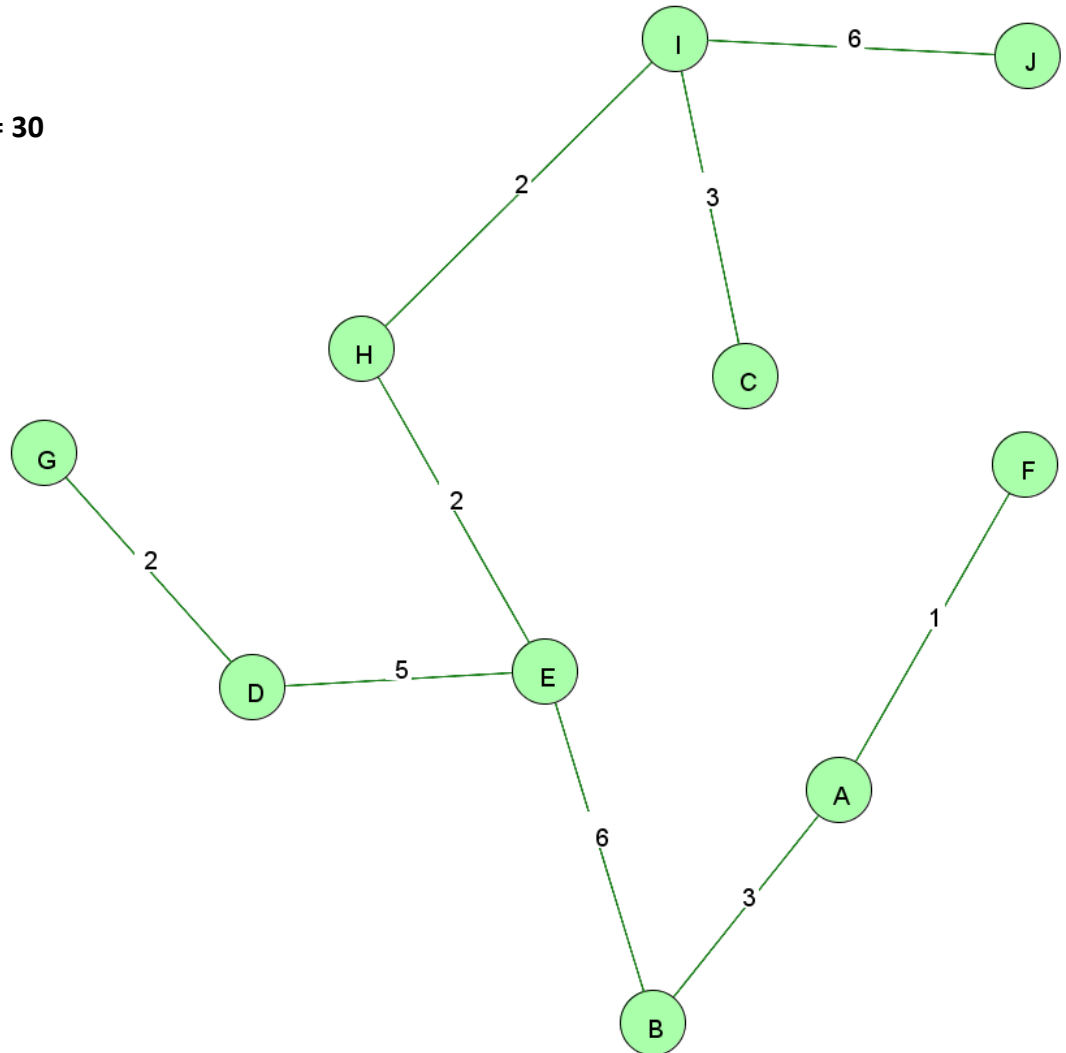
Árbol expandido mínimo: algoritmo de Kruskal

Solución:

Arista	Longitud
A-F	1
D-G	2
E-H	2
I-H	2
A-B	3
C-I	3
C-E	4
D-E	5
G-H	5
B-E	6
C-F	6
I-J	6
F-J	7
A-E	8
D-H	8

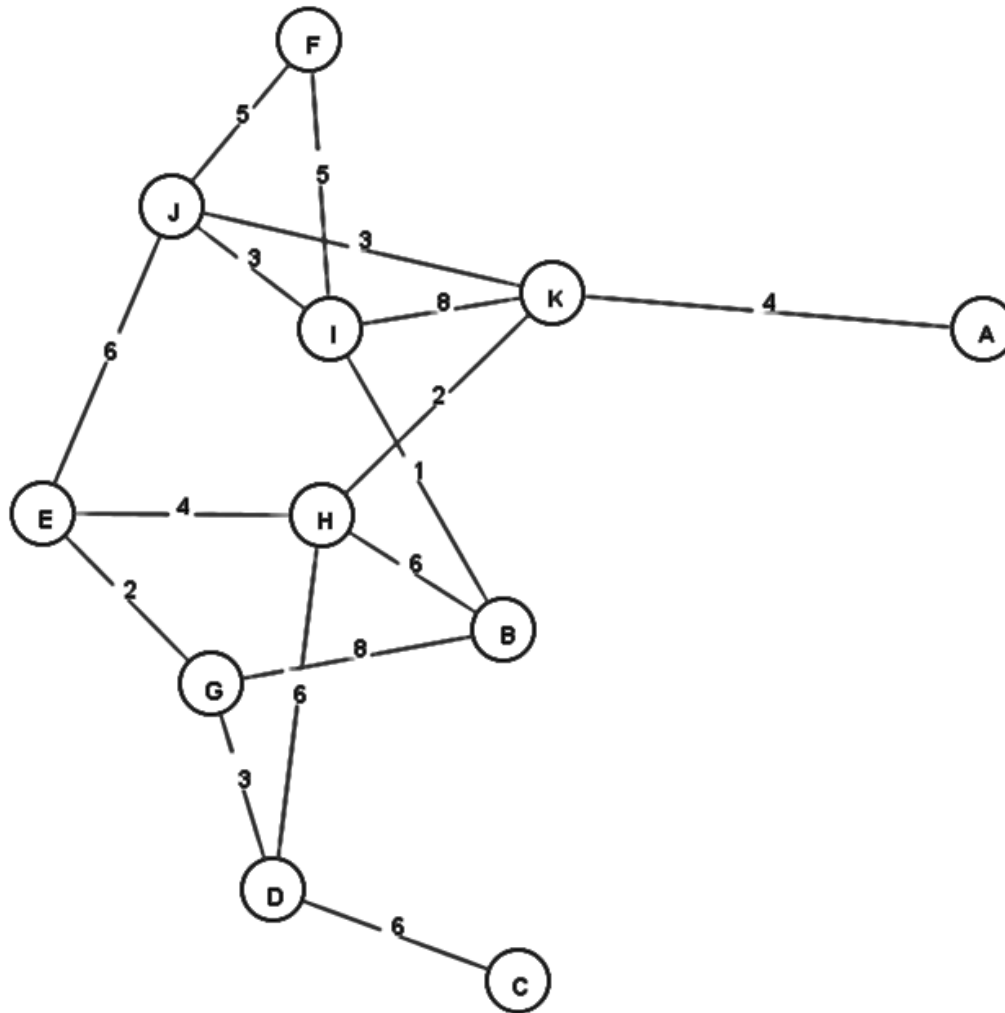
Peso total = 30

Árbol expandido mínimo



Árbol expandido mínimo: algoritmo de Prim

Ejercicio 5: calcular el árbol expandido mínimo para el siguiente grafo, conexo y no dirigido, empleando para ello el algoritmo de Prim



Árbol expandido mínimo: algoritmo de Prim

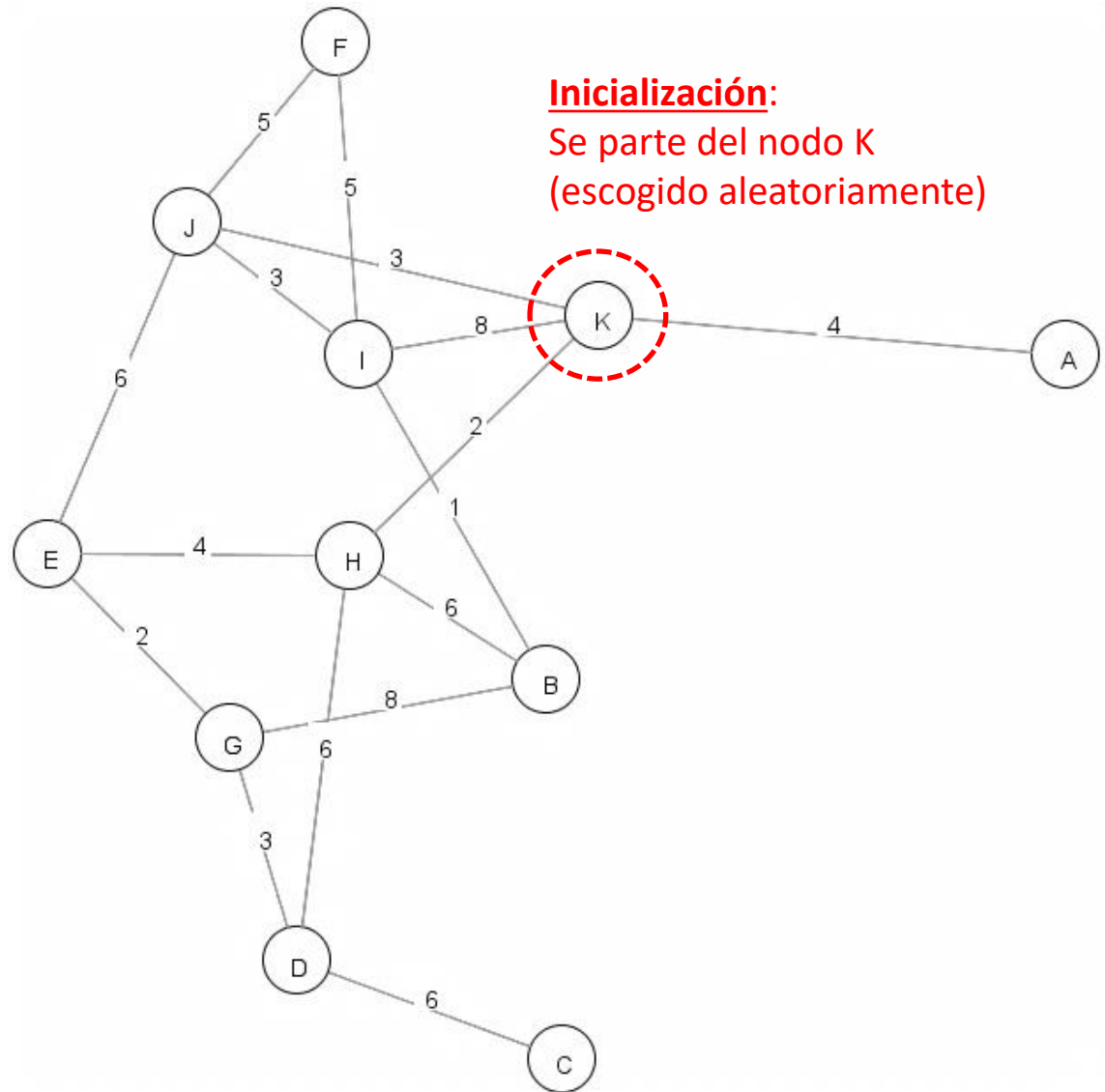
Solución:

Conjunto de nodos (B)

K

Conjunto de aristas (T)

Peso total = 0



Árbol expandido mínimo: algoritmo de Prim

Solución:

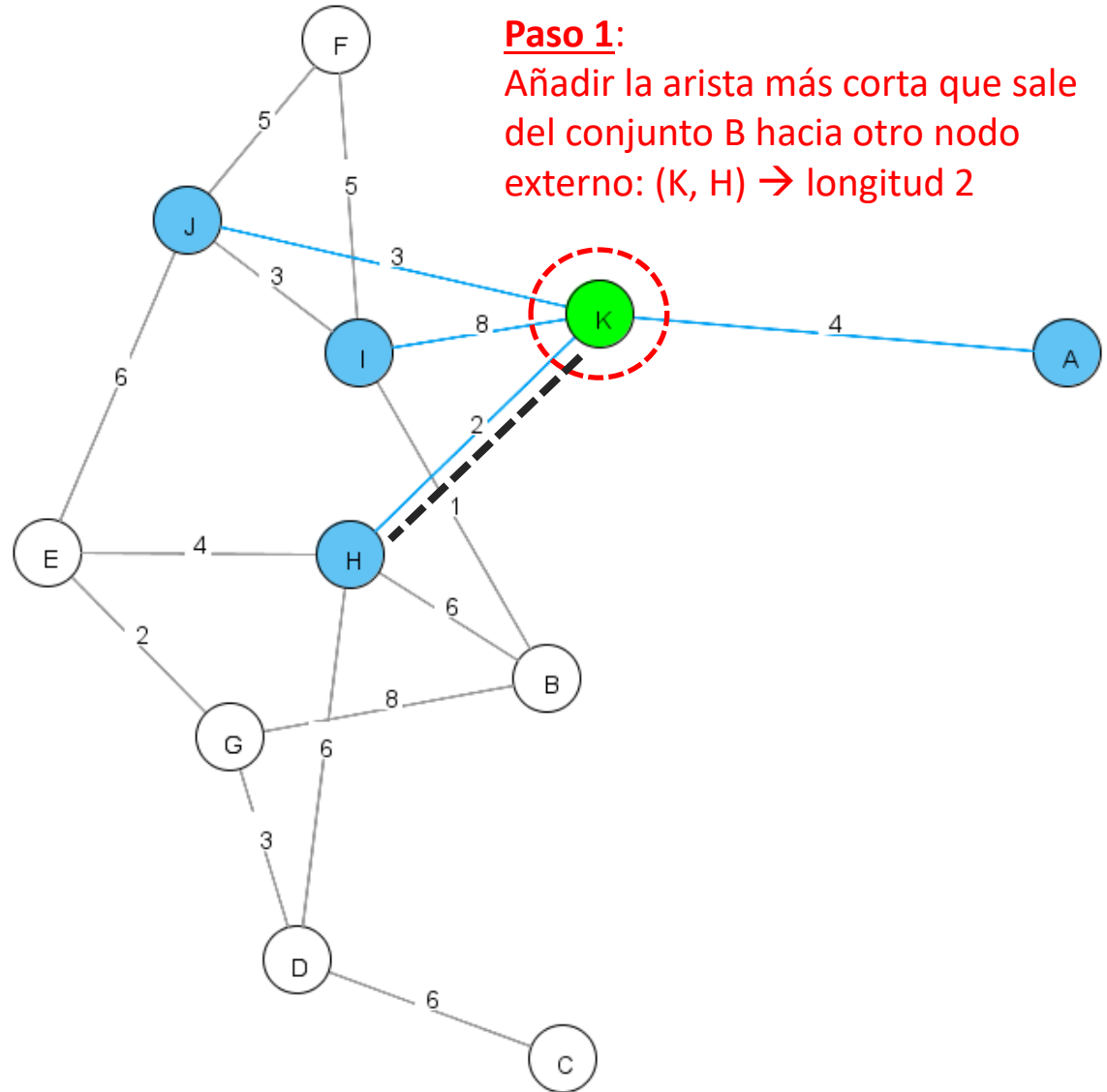
Conjunto de nodos (B)

H	K										
---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Conjunto de aristas (T)

(K, H)

Peso total = 2



Árbol expandido mínimo: algoritmo de Prim

Solución:

Conjunto de nodos (B)

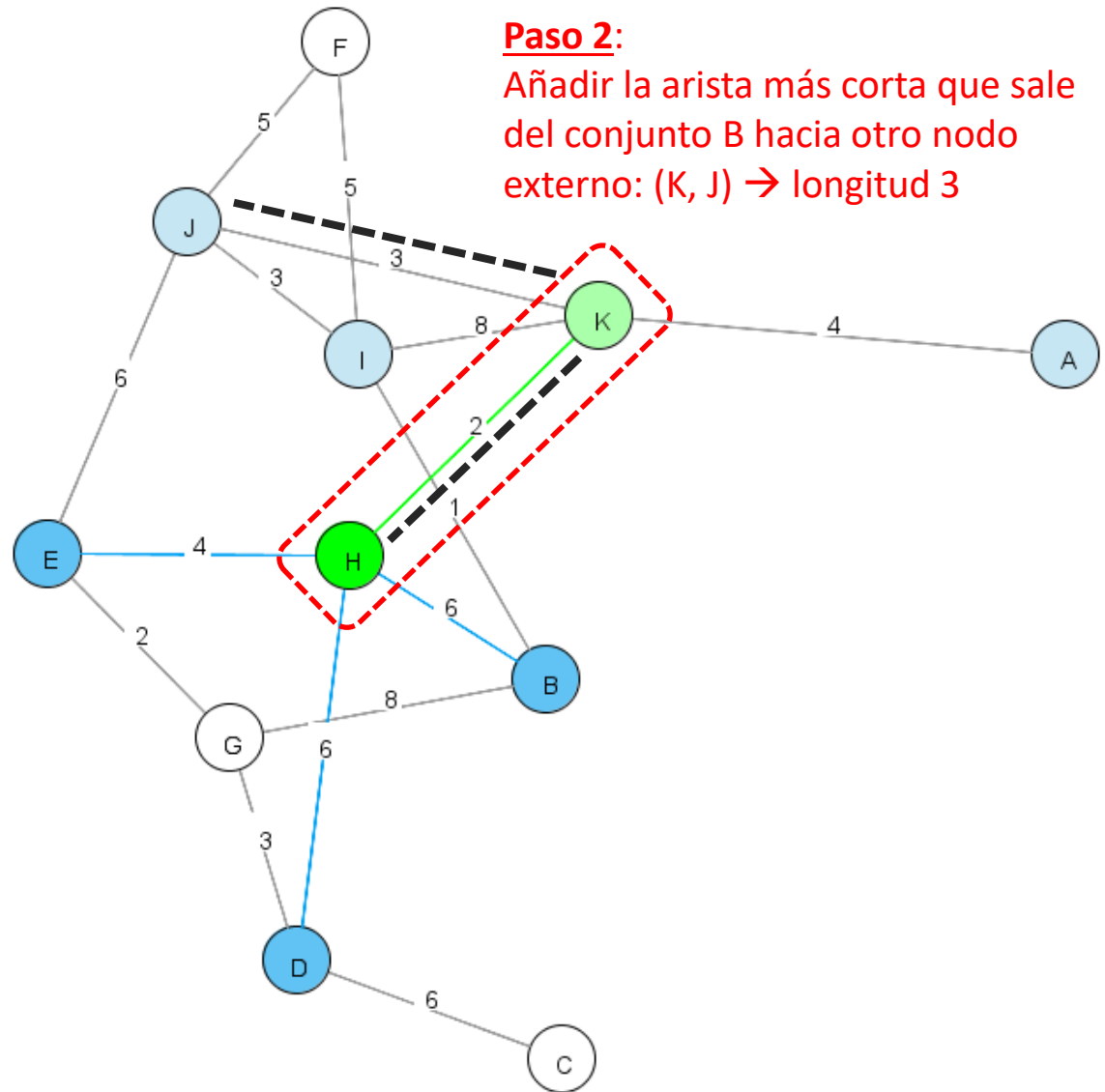
H	J	K							
---	---	---	--	--	--	--	--	--	--

Conjunto de aristas (T)

(K, H)

(K, J)

Peso total = 5



Árbol expandido mínimo: algoritmo de Prim

Solución:

Conjunto de nodos (B)

H	I	J	K						
---	---	---	---	--	--	--	--	--	--

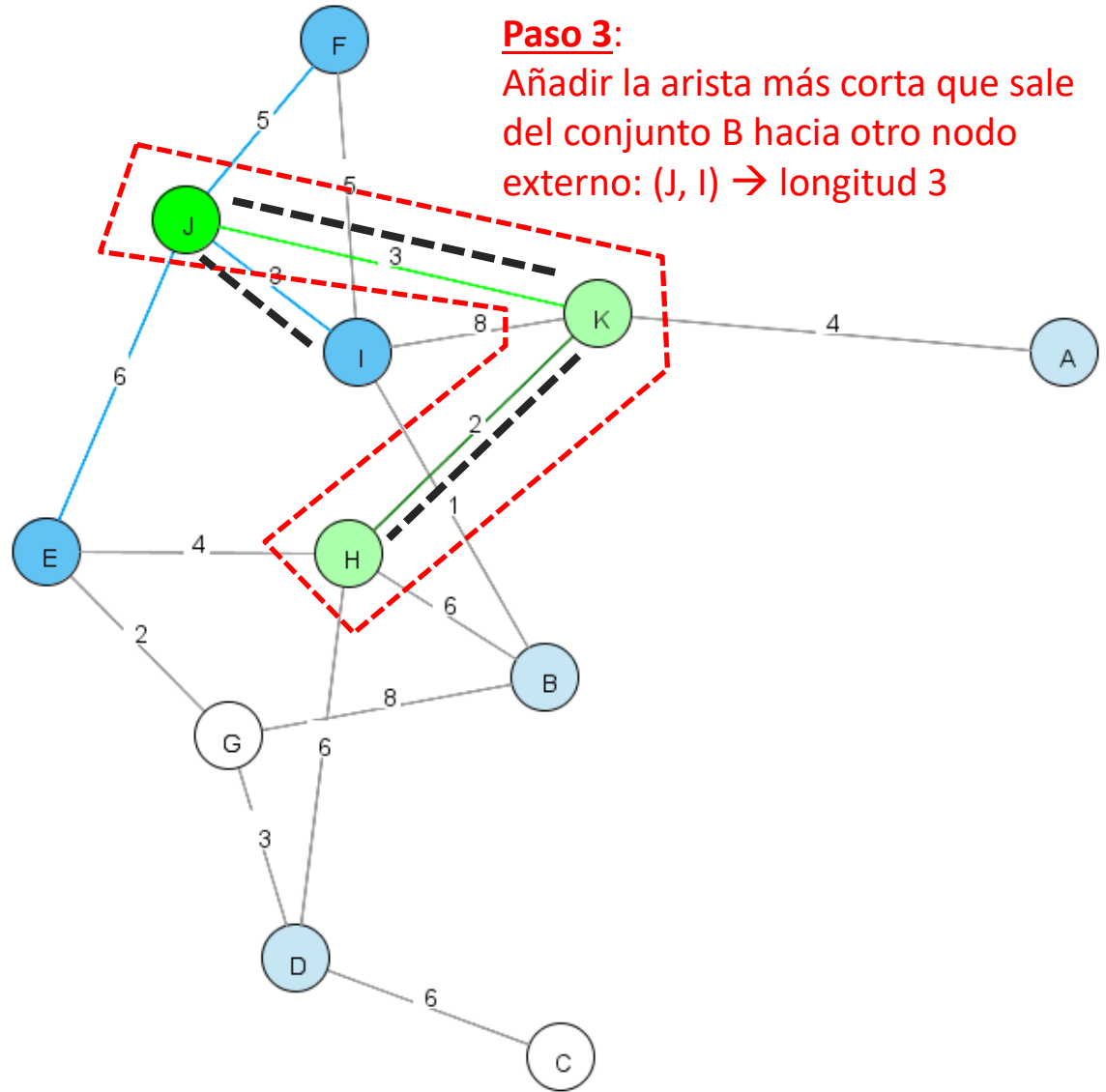
Conjunto de aristas (T)

Peso total = 8

(K, H)

(K, J)

(J, I)



Paso 3:

Añadir la arista más corta que sale del conjunto B hacia otro nodo externo: (J, I) \rightarrow longitud 3

Árbol expandido mínimo: algoritmo de Prim

Solución:

Conjunto de nodos (B)

B	H	I	J	K						
---	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--

Conjunto de aristas (T)

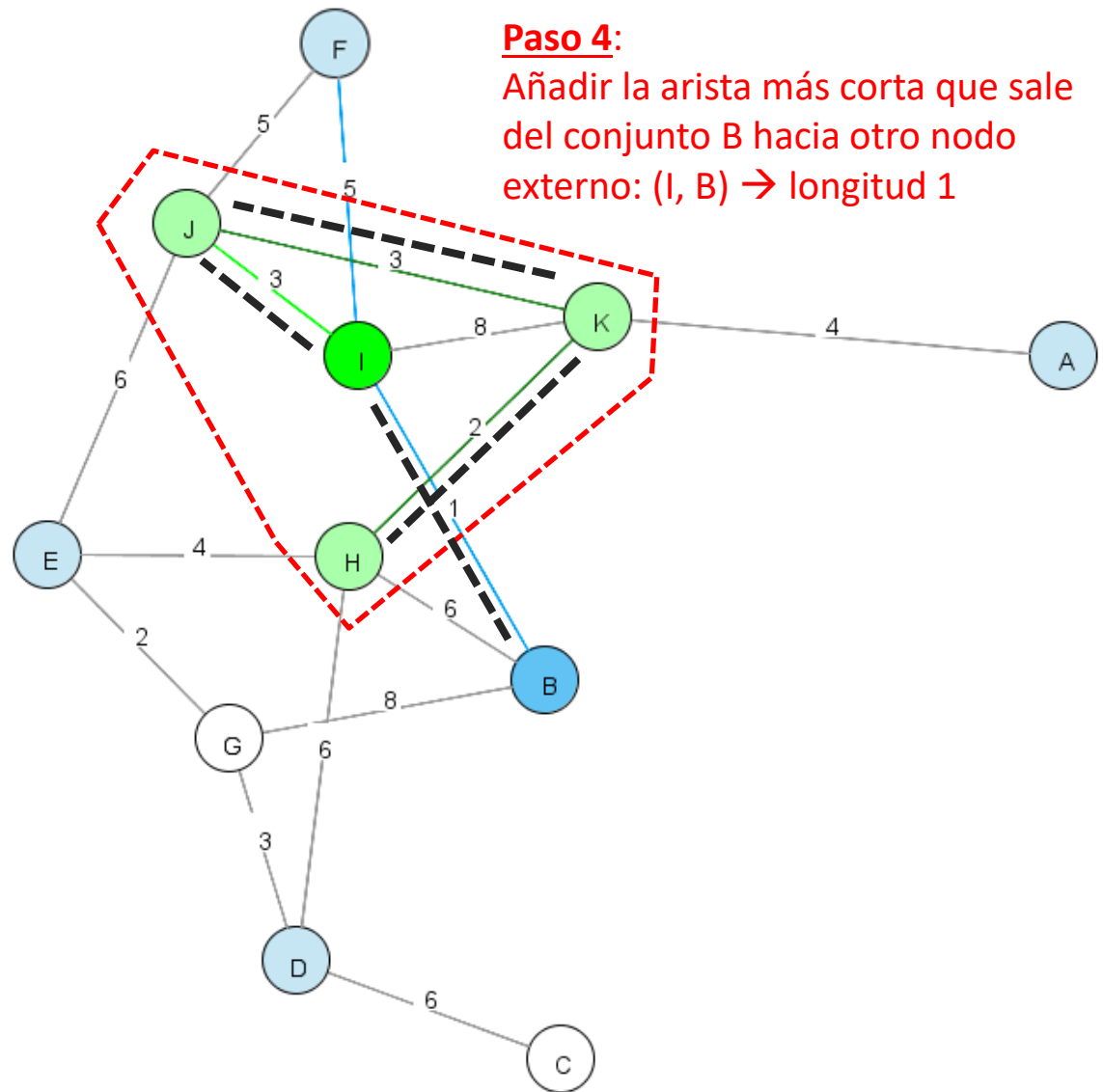
Peso total = 9

(K, H)

(K, J)

(J, I)

(I, B)



Árbol expandido mínimo: algoritmo de Prim

Solución:

Conjunto de nodos (B)

A	B	H	I	J	K					
---	---	---	---	---	---	--	--	--	--	--

Conjunto de aristas (T)

Peso total = 13

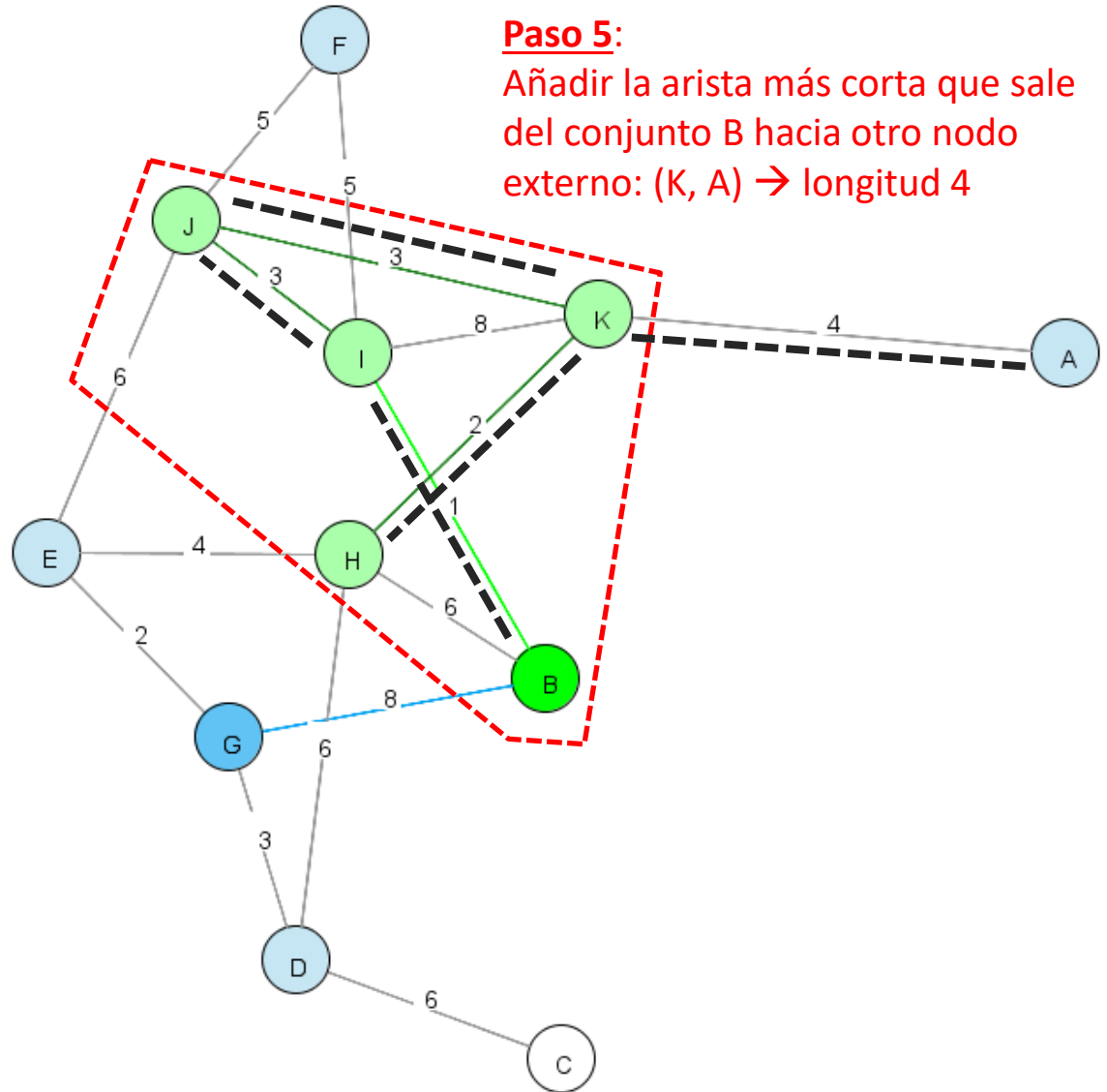
(K, H)

(K, J)

(J, I)

(I, B)

(K, A)



Paso 5:

Añadir la arista más corta que sale del conjunto B hacia otro nodo externo: $(K, A) \rightarrow$ longitud 4

Árbol expandido mínimo: algoritmo de Prim

Solución:

Conjunto de nodos (B)

A B E H I J K

Conjunto de aristas (T)

Peso total = 17

(K, H)

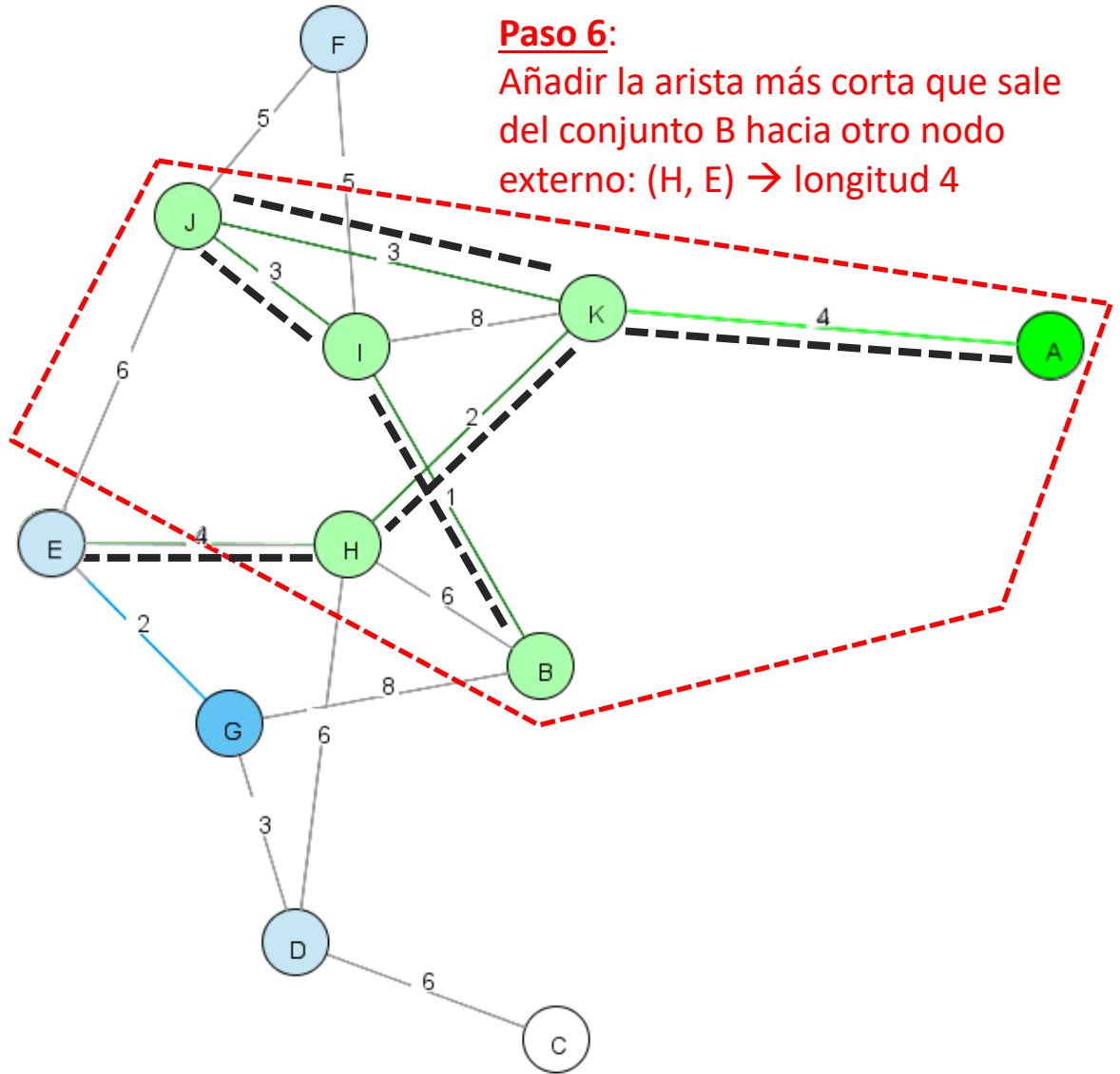
(K, J)

(J, I)

(I, B)

(K, A)

(H, E)



Paso 6:

Añadir la arista más corta que sale del conjunto B hacia otro nodo externo: (H, E) \rightarrow longitud 4

Árbol expandido mínimo: algoritmo de Prim

Solución:

Conjunto de nodos (B)

A	B	E	G	H	I	J	K			
---	---	---	---	---	---	---	---	--	--	--

Conjunto de aristas (T)

(K, H)

(K, J)

(J, I)

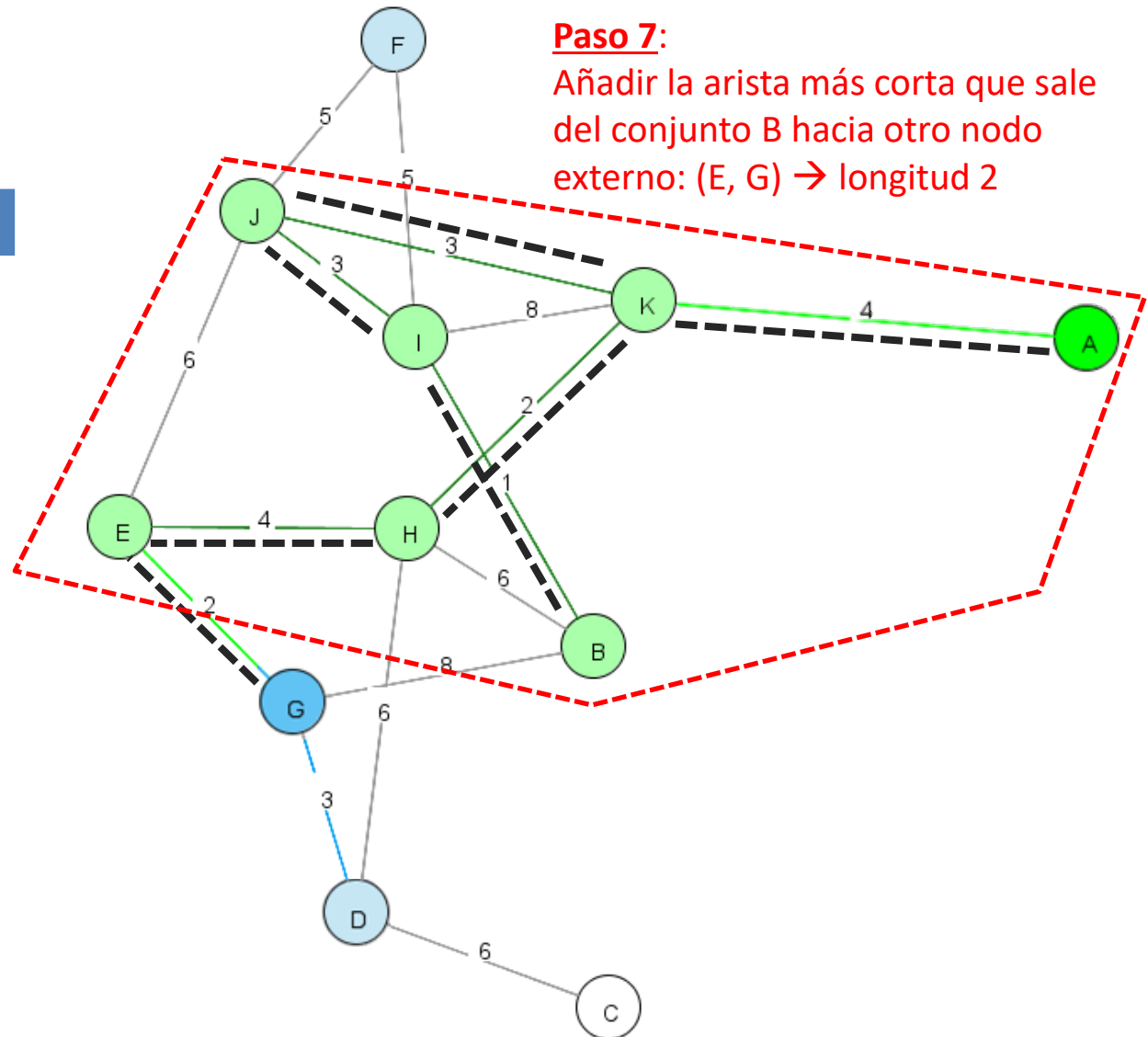
(I, B)

(K, A)

(H, E)

(E, G)

Peso total = 19



Árbol expandido mínimo: algoritmo de Prim

Solución:

Conjunto de nodos (B)

A	B	D	E	G	H	I	J	K		
---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	--

Conjunto de aristas (T)

(K, H)

(K, J)

(J, I)

(I, B)

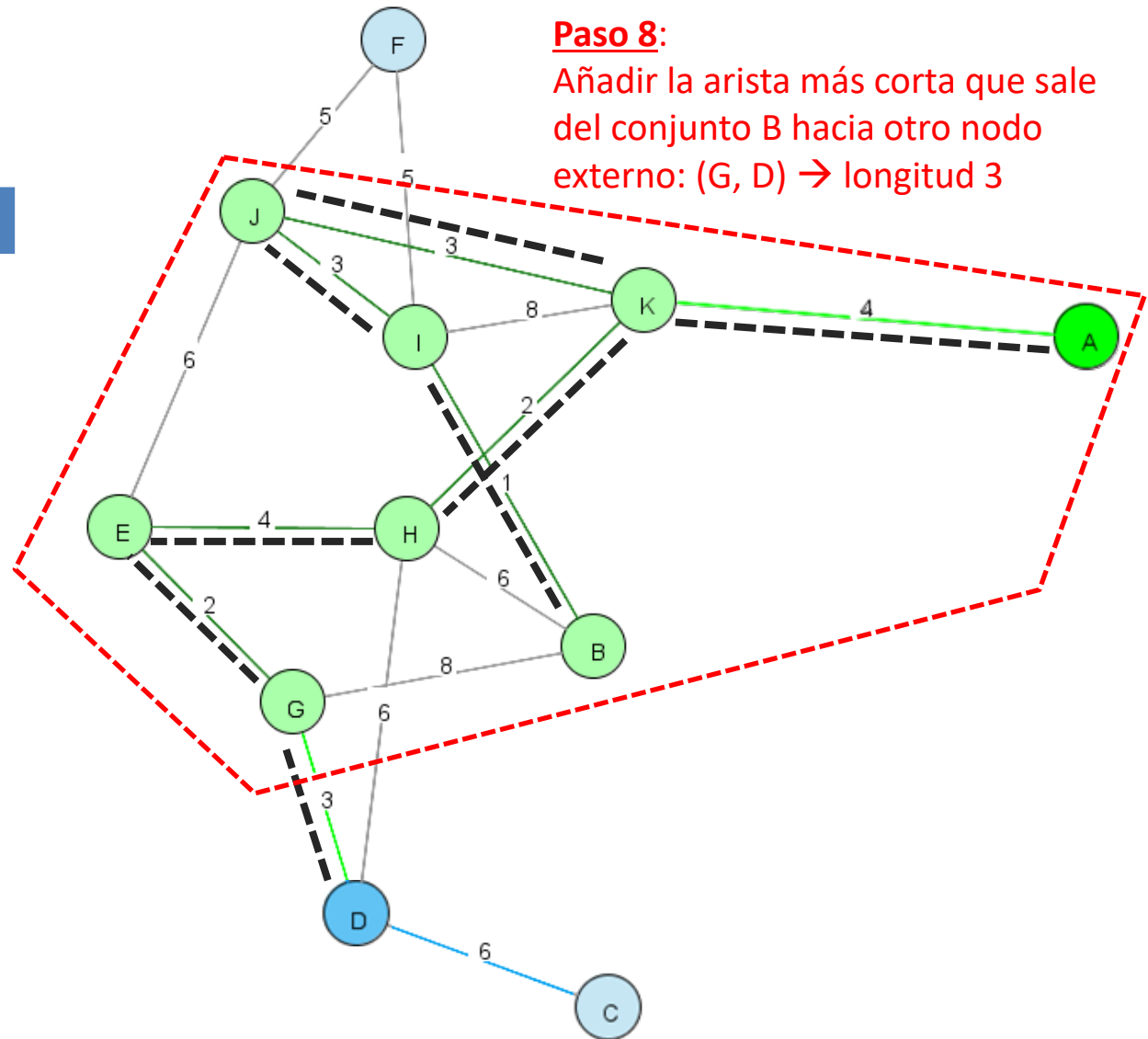
(K, A)

(H, E)

(E, G)

(G, D)

Peso total = 22



Árbol expandido mínimo: algoritmo de Prim

Solución:

Conjunto de nodos (B)

A B D E F G H I J K

Conjunto de aristas (T)

(K, H)

(K, J)

(J, I)

(I, B)

(K, A)

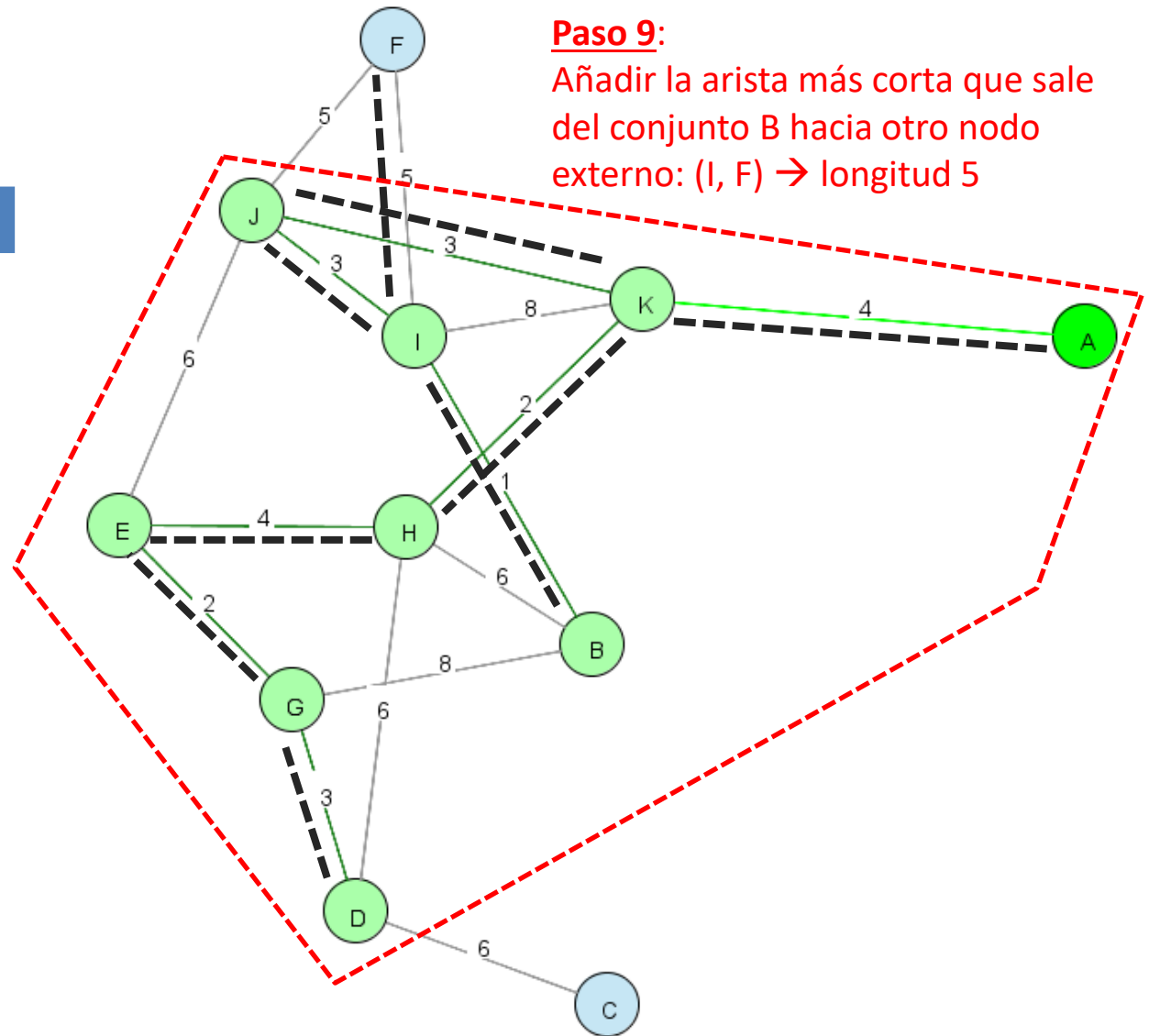
(H, E)

(E, G)

(G, D)

(I, F)

Peso total = 27



Árbol expandido mínimo: algoritmo de Prim

Solución:

Conjunto de nodos (B)

A B C D E F G H I J K

Conjunto de
aristas (T)

Peso total = 33

(K, H)

(K, J)

(J, I)

(I, B)

(K, A)

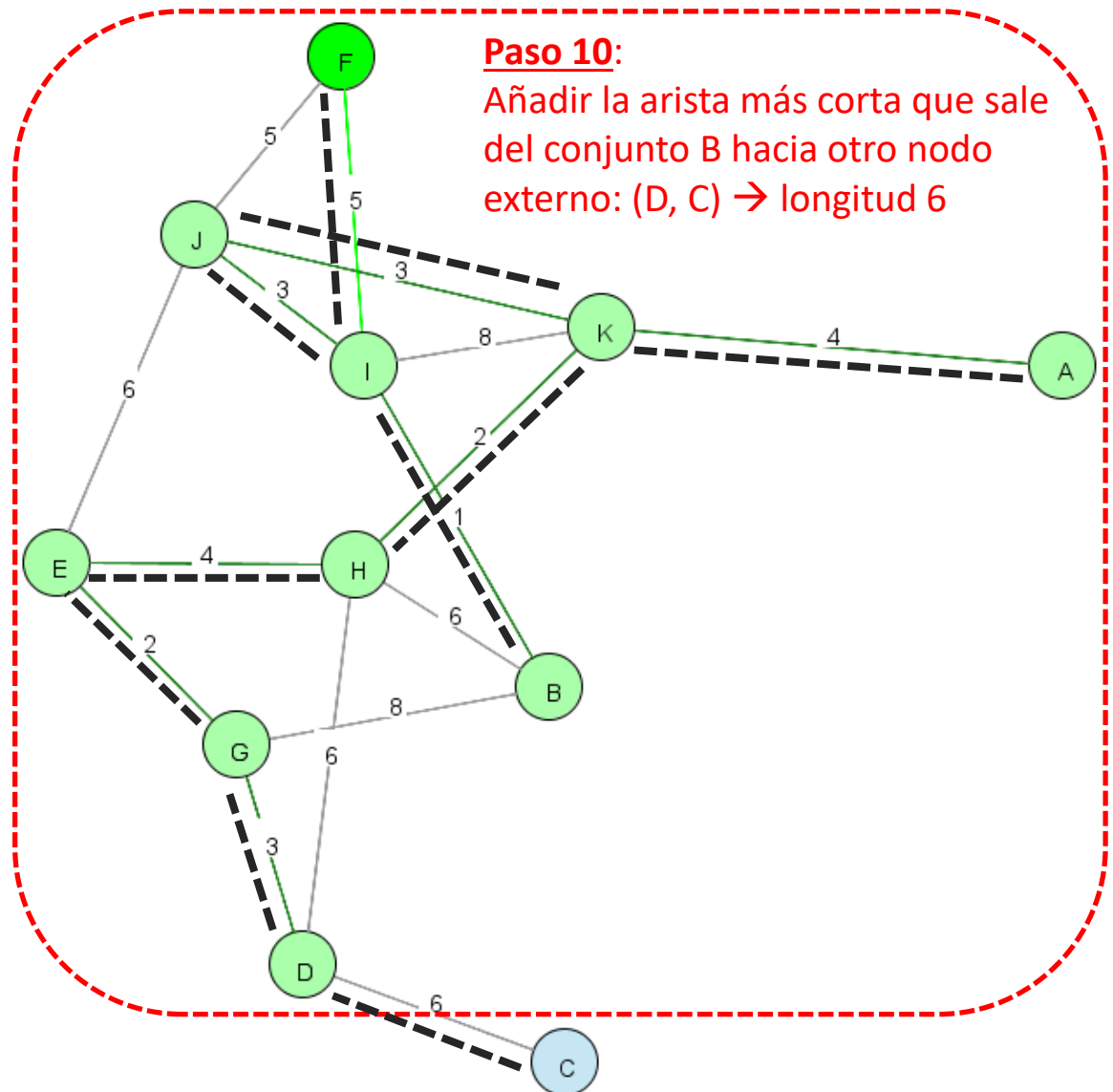
(H, E)

(E, G)

(G, D)

(I, F)

(D, C)



Árbol expandido mínimo: algoritmo de Prim

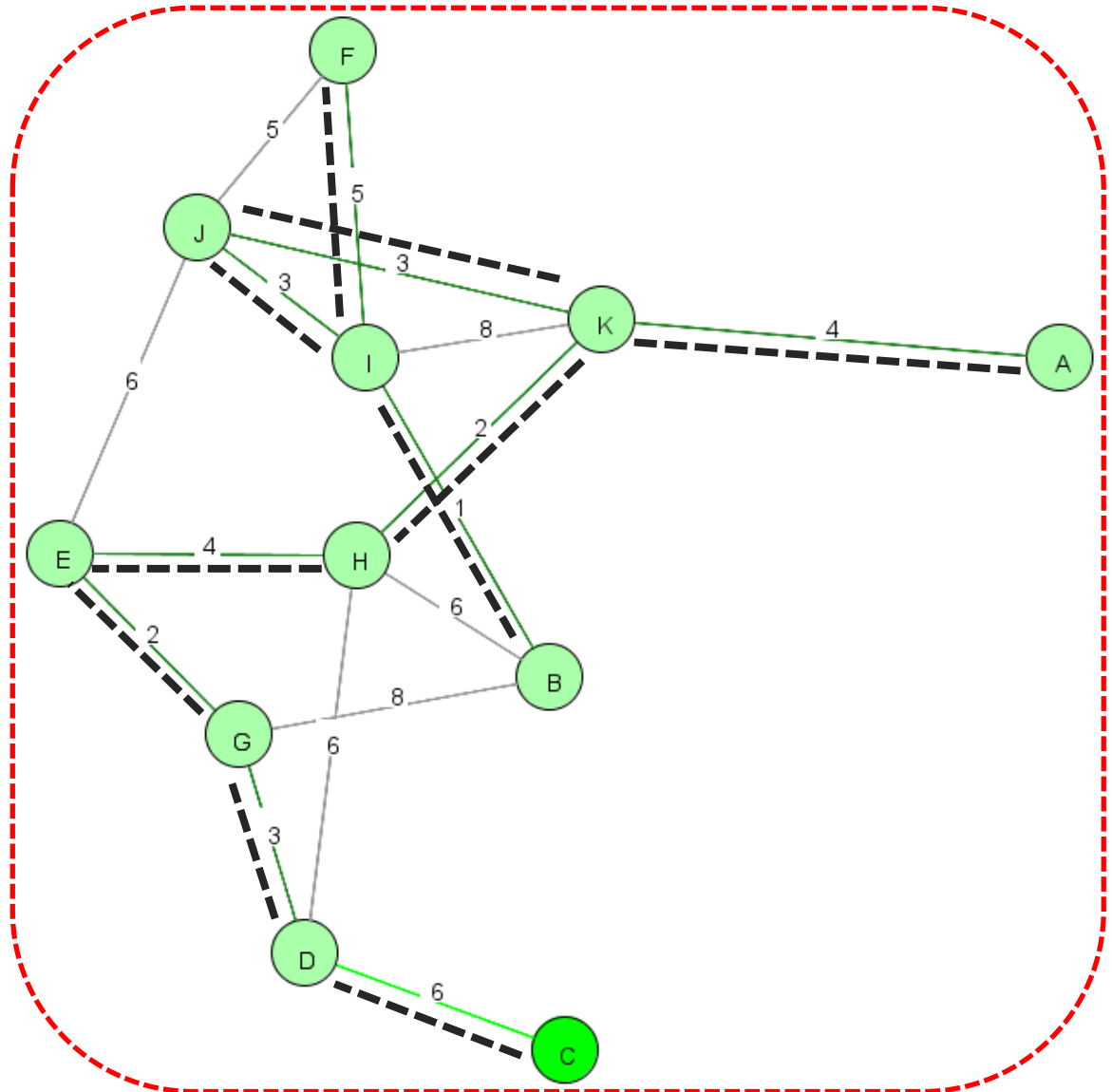
Solución:

Conjunto de nodos (B)

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

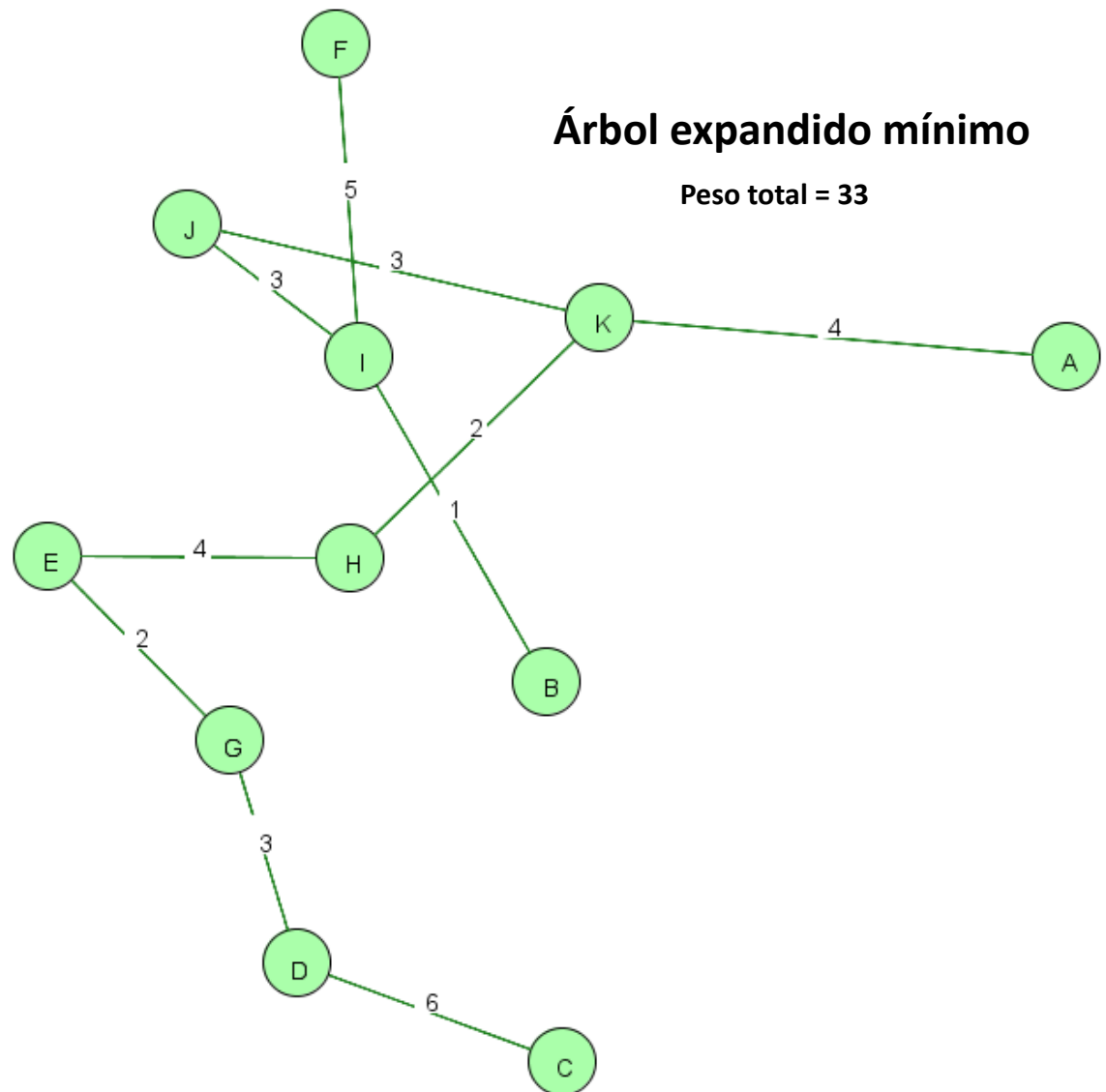


El conjunto B contiene
todos los nodos del grafo:
FIN DEL PROCESO



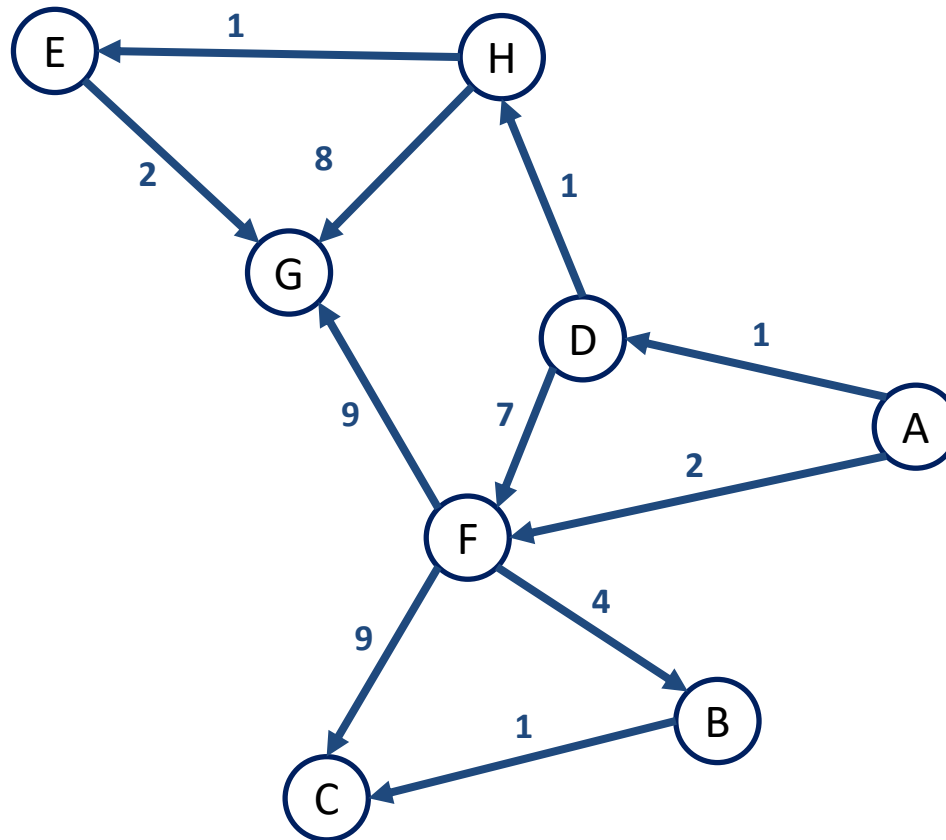
Árbol expandido mínimo: algoritmo de Prim

Solución:



Caminos mínimos: algoritmo de Dijkstra

Ejercicio 6: calcular los caminos mínimos para el siguiente grafo dirigido, partiendo del nodo A, empleando para ello el algoritmo de Dijkstra



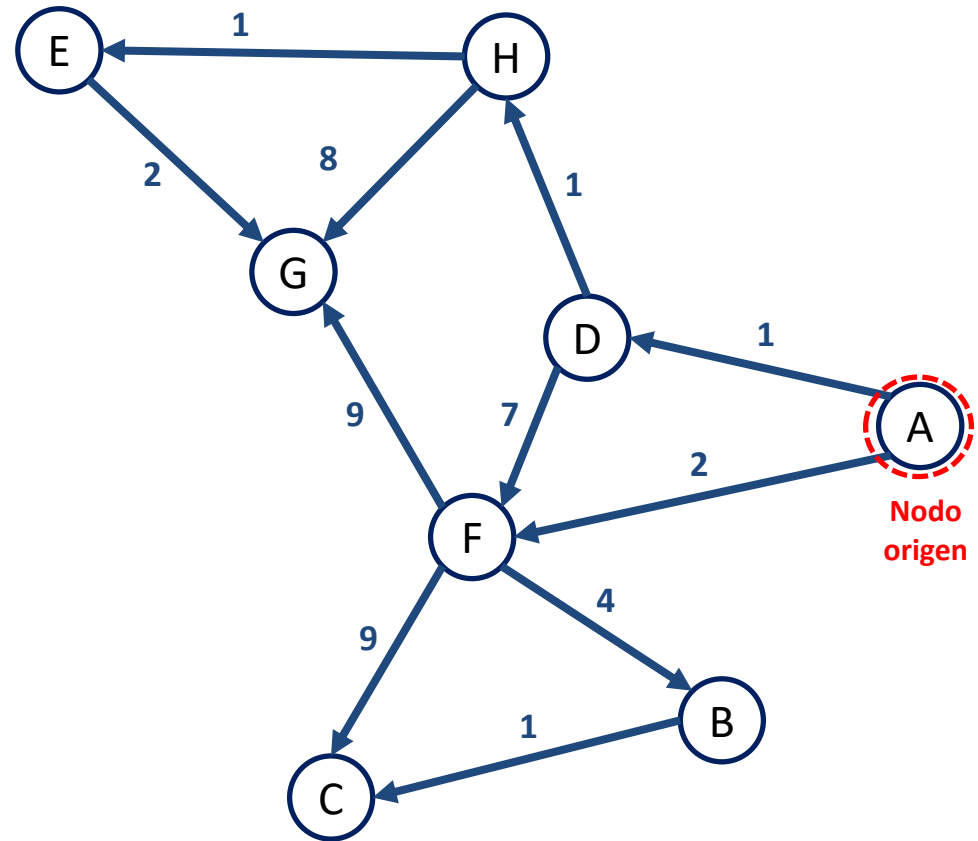
Caminos mínimos: algoritmo de Dijkstra

Solución:

Candidatos = { B, C, D, E, F, G, H }

Inicialización: lista candidatos + distancias desde A

Nodo	D[Nodo]	P[Nodo]
B	∞	
C	∞	
D	1	A
E	∞	
F	2	A
G	∞	
H	∞	



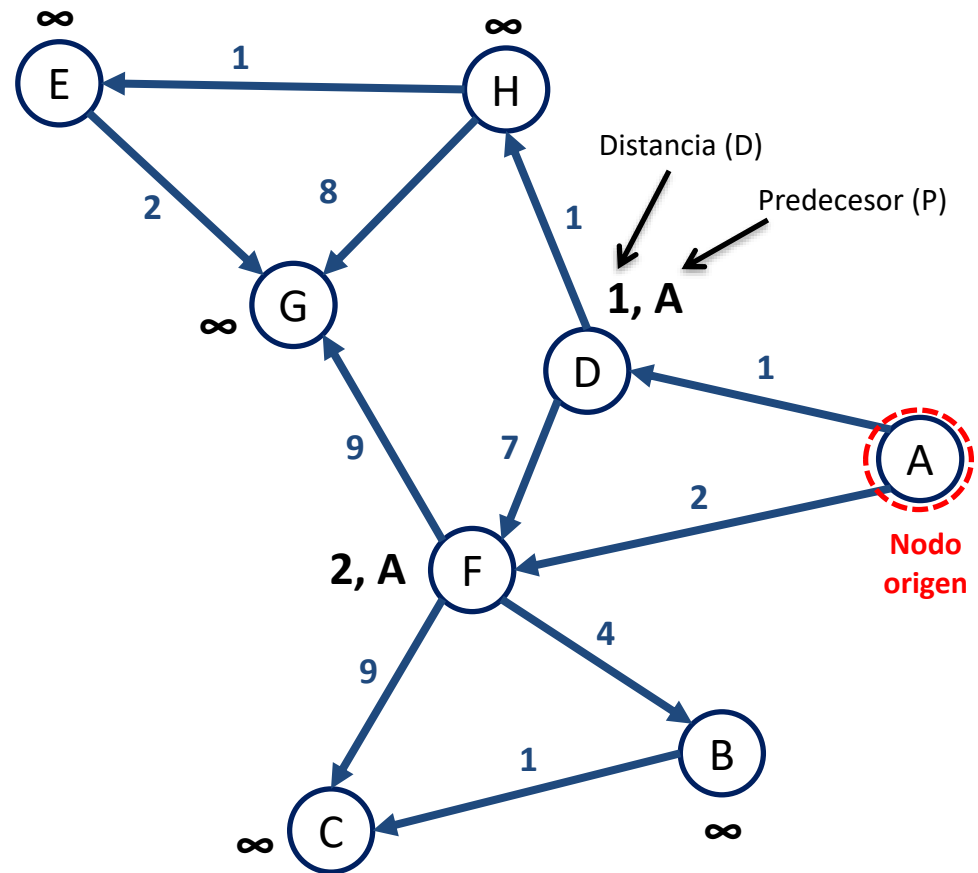
Caminos mínimos: algoritmo de Dijkstra

Solución:

Candidatos = { B, C, D, E, F, G, H }

Inicialización: lista candidatos + distancias desde A

Nodo	D[Nodo]	P[Nodo]
B	∞	
C	∞	
D	1	A
E	∞	
F	2	A
G	∞	
H	∞	



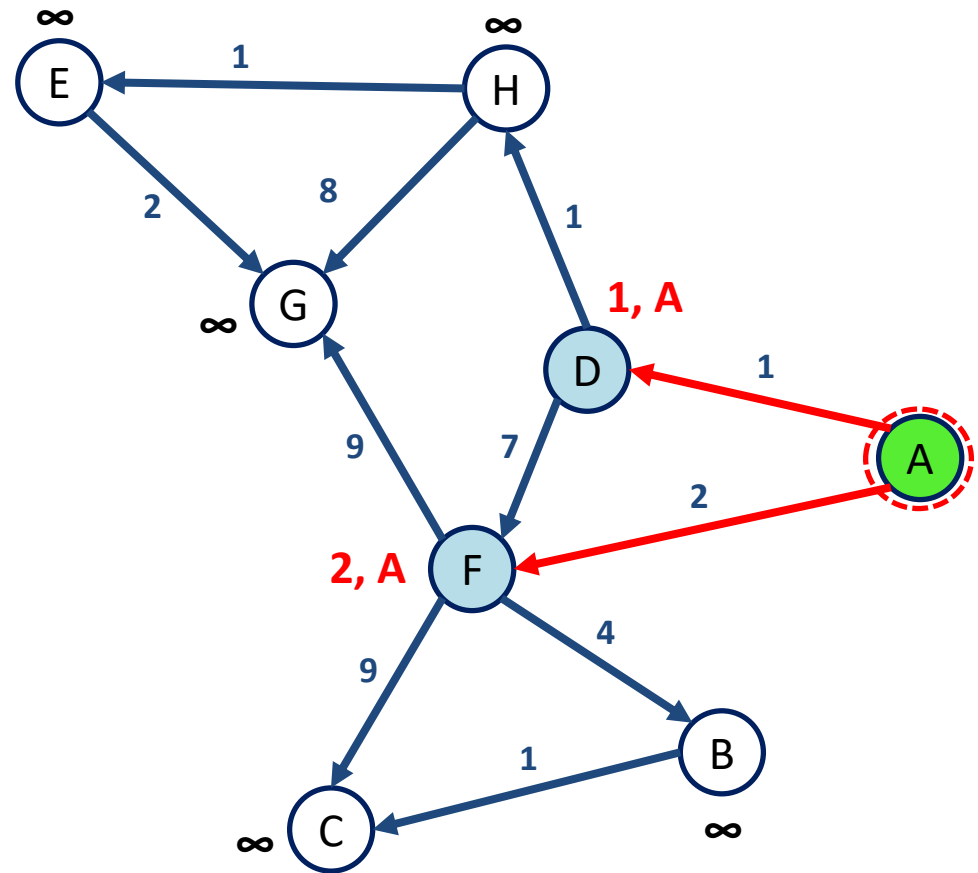
Caminos mínimos: algoritmo de Dijkstra

Solución:

Candidatos = { B, C, D, E, F, G, H }

Nodo	D[Nodo]	P[Nodo]
B	∞	
C	∞	
D	1	A
E	∞	
F	2	A
G	∞	
H	∞	

Camino mínimo	Longitud
A - D	1
A - F	2



Caminos mínimos: algoritmo de Dijkstra

Solución:

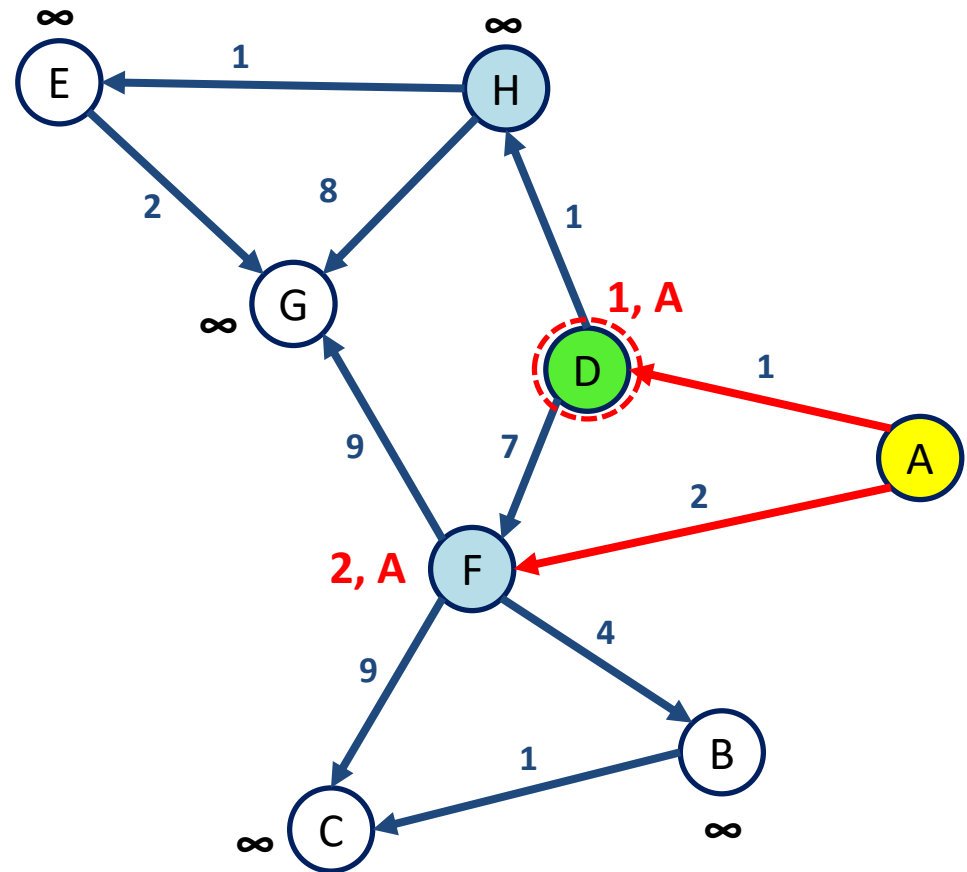
Candidatos = { B, C, E, F, G, H }

Seleccionados = { D }

Paso 1

Nodo	D[Nodo]	P[Nodo]
B	∞	
C	∞	
D	1	A
E	∞	
F	2	A
G	∞	
H	∞	

Camino mínimo	Longitud
A - D	1
A - F	2



Caminos mínimos: algoritmo de Dijkstra

Solución:

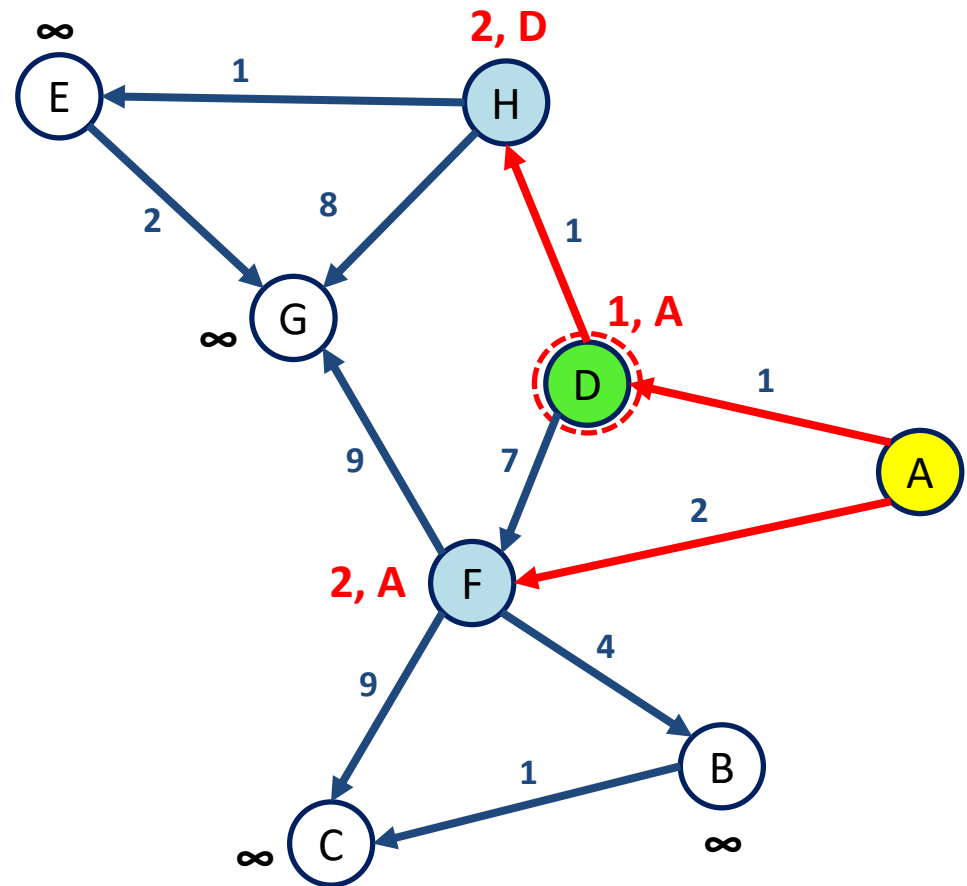
Candidatos = { B, C, E, F, G, H }

Seleccionados = { D }

Paso 1

Nodo	D[Nodo]	P[Nodo]
B	∞	
C	∞	
D	1	A
E	∞	
F	2	A
G	∞	
H	2	D

Camino mínimo	Longitud
A - D	1
A - F	2
A - D - H	2



Caminos mínimos: algoritmo de Dijkstra

Solución:

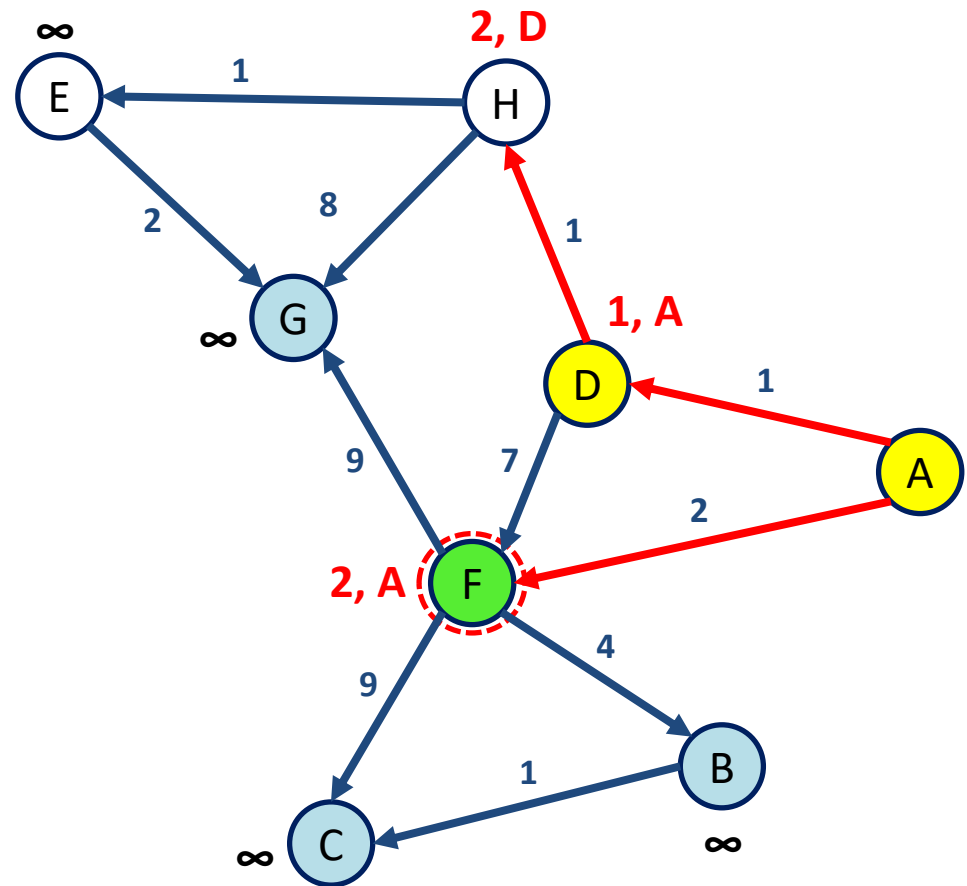
Candidatos = { B, C, E, G, H }

Seleccionados = { D, F }

Paso 2

Nodo	D[Nodo]	P[Nodo]
B	∞	
C	∞	
D	1	A
E	∞	
F	2	A
G	∞	
H	2	D

Camino mínimo	Longitud
A - D	1
A - F	2
A - D - H	2



Caminos mínimos: algoritmo de Dijkstra

Solución:

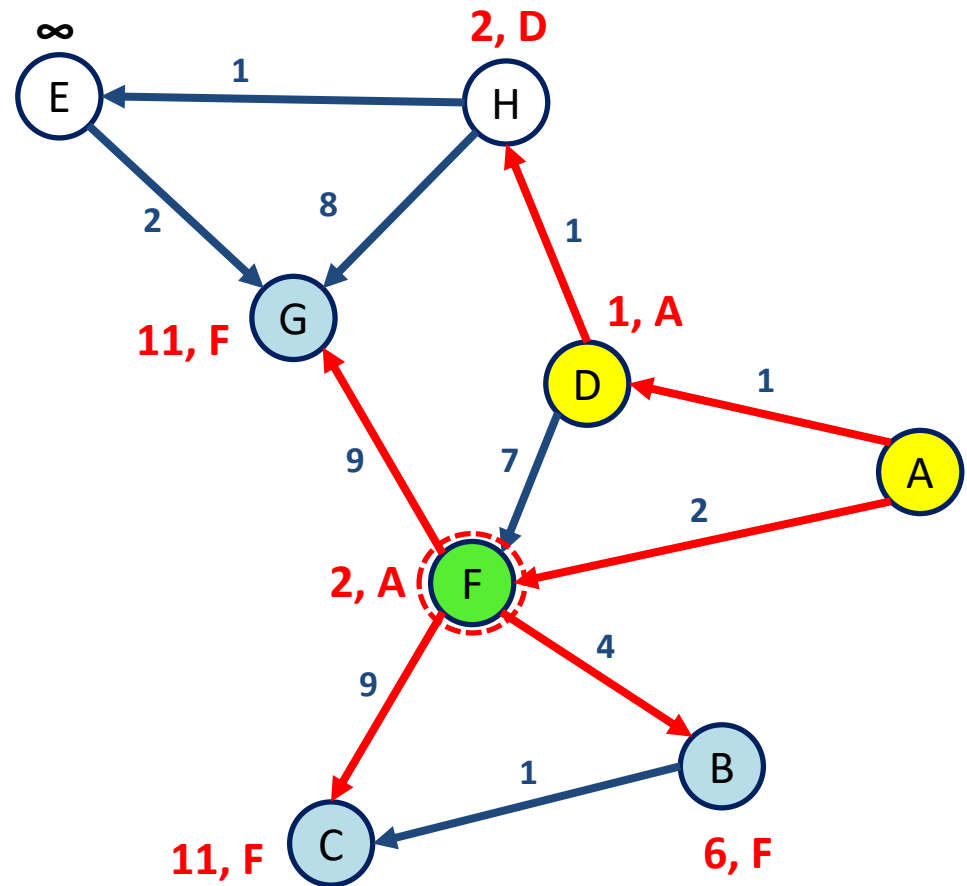
Candidatos = { B, C, E, G, H }

Seleccionados = { D, F }

Paso 2

Nodo	D[Nodo]	P[Nodo]
B	6	F
C	11	F
D	1	A
E	∞	
F	2	A
G	11	F
H	2	D

Camino mínimo	Longitud
A - D	1
A - F	2
A - D - H	2
A - F - B	6
A - F - C	11
A - F - G	11



Caminos mínimos: algoritmo de Dijkstra

Solución:

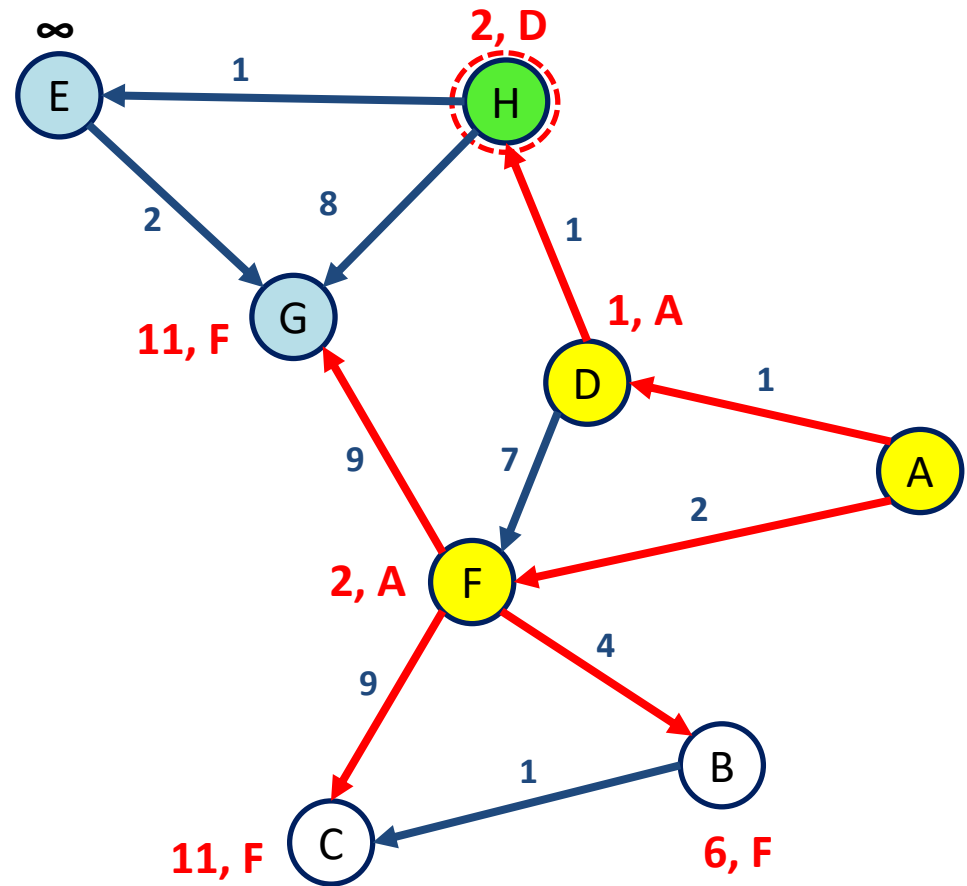
Candidatos = { B, C, E, G }

Seleccionados = { D, F, H }

Nodo	D[Nodo]	P[Nodo]
B	6	F
C	11	F
D	1	A
E	∞	
F	2	A
G	11	F
H	2	D

Paso 3

Camino mínimo	Longitud
A - D	1
A - F	2
A - D - H	2
A - F - B	6
A - F - C	11
A - F - G	11



Caminos mínimos: algoritmo de Dijkstra

Solución:

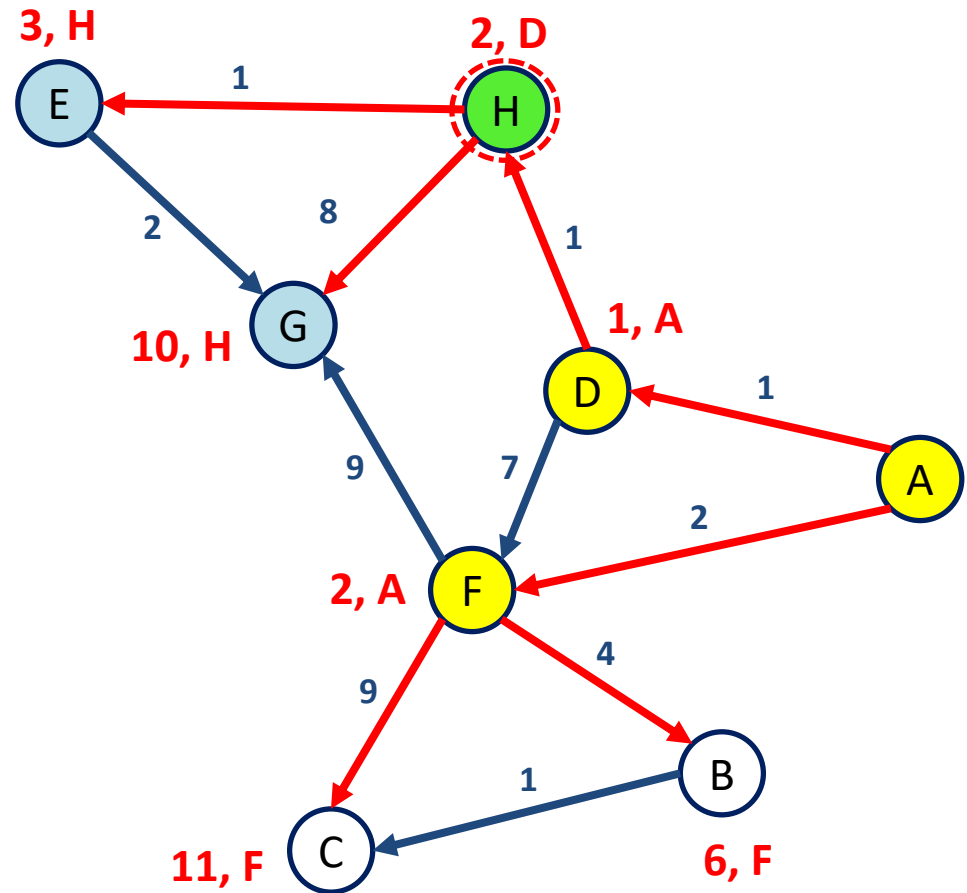
Candidatos = { B, C, E, G }

Seleccionados = { D, F, H }

Nodo	D[Nodo]	P[Nodo]
B	6	F
C	11	F
D	1	A
E	3	H
F	2	A
G	10	H
H	2	D

Paso 3

Camino mínimo	Longitud
A – D	1
A – F	2
A – D – H	2
A – F – B	6
A – F – C	11
A – D – H – G	10
A – D – H – E	3



Caminos mínimos: algoritmo de Dijkstra

Solución:

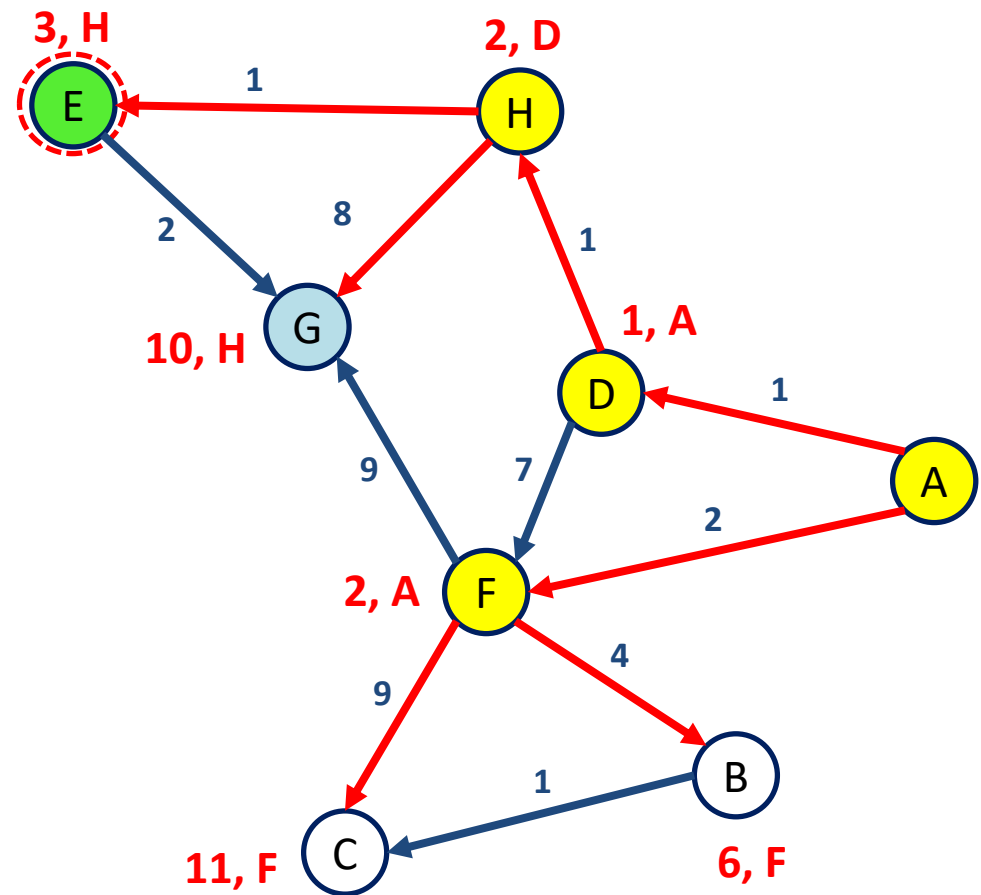
Candidatos = { B, C, G }

Seleccionados = { D, F, H, E }

Paso 4

Nodo	D[Nodo]	P[Nodo]
B	6	F
C	11	F
D	1	A
E	3	H
F	2	A
G	10	H
H	2	D

Camino mínimo	Longitud
A – D	1
A – F	2
A – D – H	2
A – F – B	6
A – F – C	11
A – D – H – G	10
A – D – H – E	3



Caminos mínimos: algoritmo de Dijkstra

Solución:

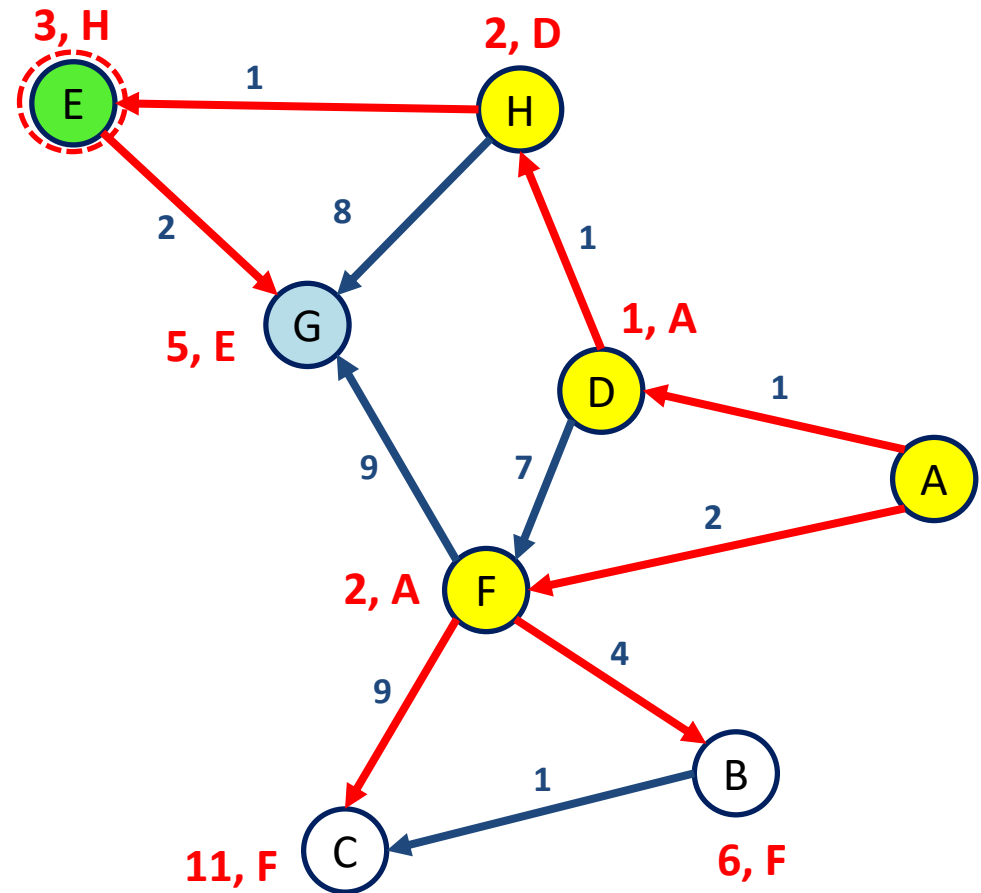
Candidatos = { B, C, G }

Seleccionados = { D, F, H, E }

Paso 4

Nodo	D[Nodo]	P[Nodo]
B	6	F
C	11	F
D	1	A
E	3	H
F	2	A
G	5	E
H	2	D

Camino mínimo	Longitud
A - D	1
A - F	2
A - D - H	2
A - F - B	6
A - F - C	11
A - D - H - E - G	5
A - D - H - E	3



Caminos mínimos: algoritmo de Dijkstra

Solución:

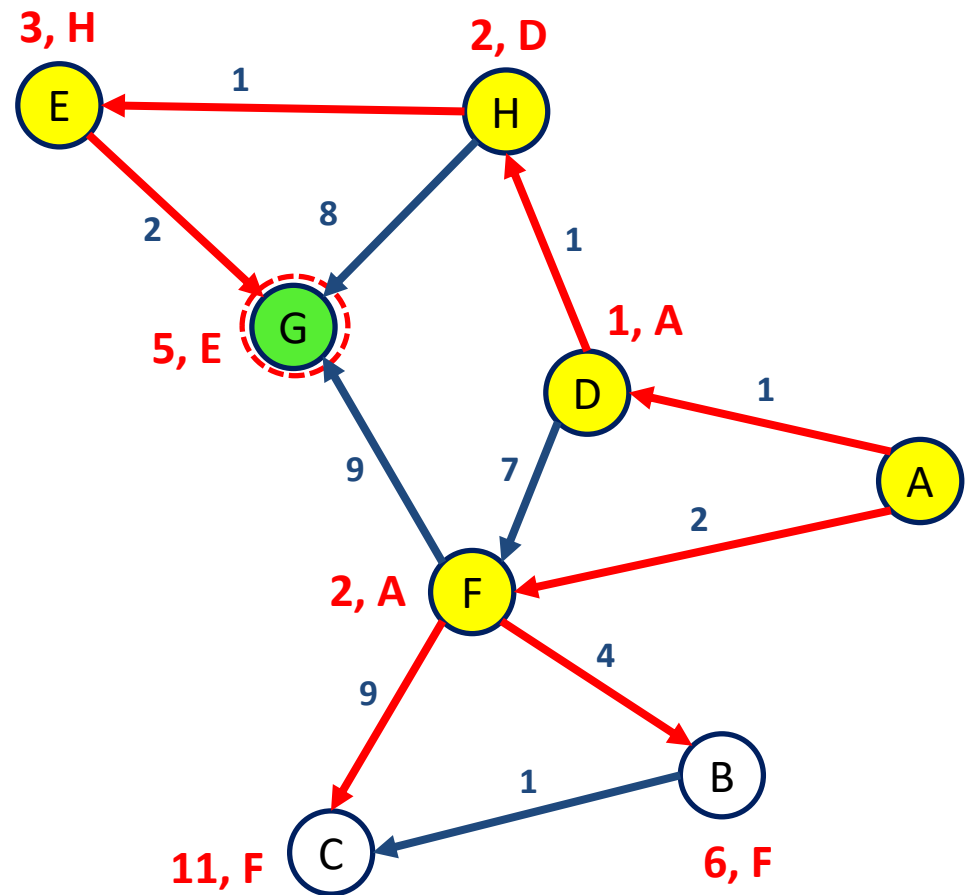
Candidatos = { B, C }

Seleccionados = { D, F, H, E, G }

Paso 5

Nodo	D[Nodo]	P[Nodo]
B	6	F
C	11	F
D	1	A
E	3	H
F	2	A
G	5	E
H	2	D

Camino mínimo	Longitud
A – D	1
A – F	2
A – D – H	2
A – F – B	6
A – F – C	11
A – D – H – E – G	5
A – D – H – E	3



Caminos mínimos: algoritmo de Dijkstra

Solución:

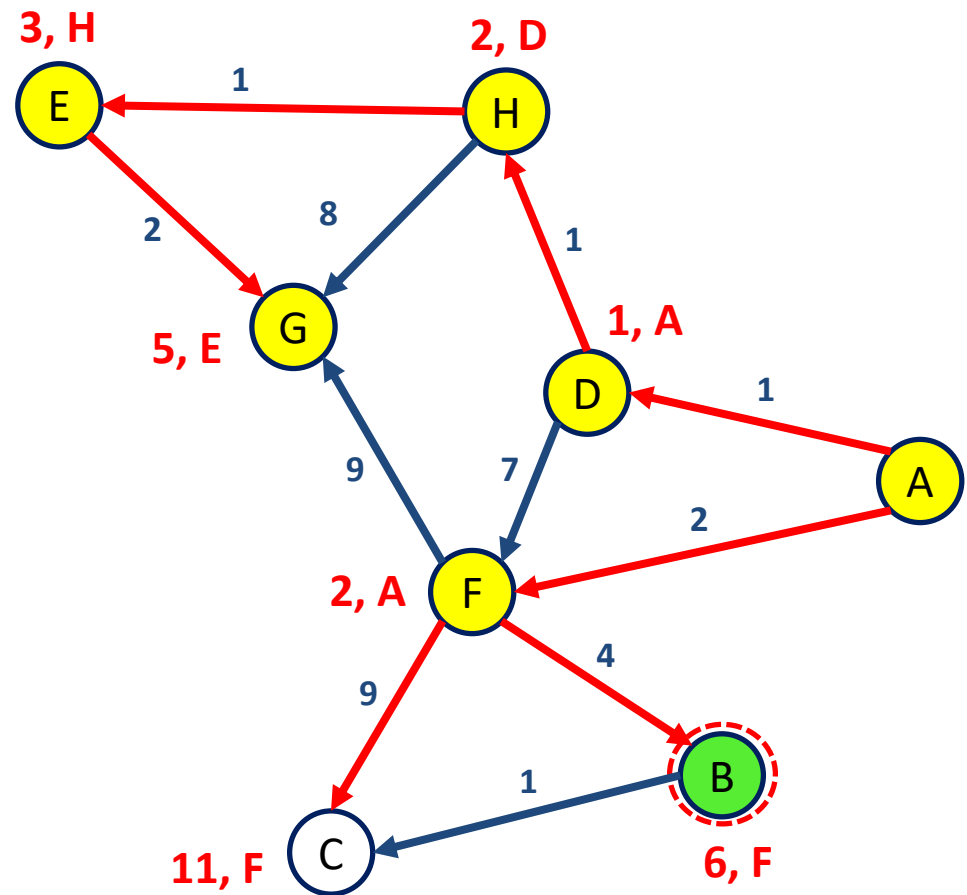
Candidatos = { C }

Seleccionados = { D, F, H, E, G, B }

Paso 6

Nodo	D[Nodo]	P[Nodo]
B	6	F
C	11	F
D	1	A
E	3	H
F	2	A
G	5	E
H	2	D

Camino mínimo	Longitud
A - D	1
A - F	2
A - D - H	2
A - F - B	6
A - F - C	11
A - D - H - E - G	5
A - D - H - E	3



Caminos mínimos: algoritmo de Dijkstra

Solución:

n-2 iteraciones →
FIN DEL PROCESO

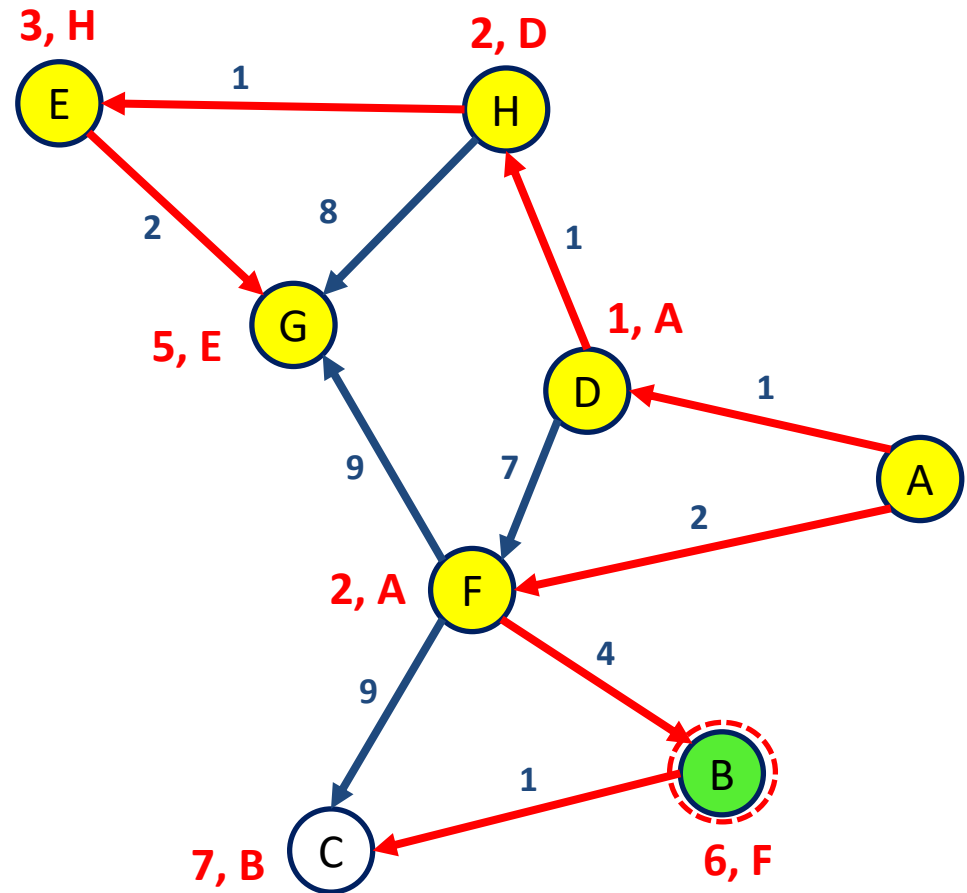
Candidatos = { C }

Seleccionados = { D, F, H, E, G, B }

Paso 6

Nodo	D[Nodo]	P[Nodo]
B	6	F
C	7	B
D	1	A
E	3	H
F	2	A
G	5	E
H	2	D

Camino mínimo	Longitud
A - D	1
A - F	2
A - D - H	2
A - F - B	6
A - F - B - C	7
A - D - H - E - G	5
A - D - H - E	3



Caminos mínimos: algoritmo de Dijkstra

Solución:

Camino mínimo	Longitud
A - D	1
A - F	2
A - D - H	2
A - F - B	6
A - F - B - C	7
A - D - H - E - G	5
A - D - H - E	3

