UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
CARRERA DE INFORMÁTICA

DESAFÍO: MÉTODOS NUMÉRICOS

INF-373

Estudiante: Chambilla Quispe Álvaro Rodrigo

C.I.: 9086748 LP

Docente: Lic. Brígida Alexandra Carvajal Blanco

Fecha: 30 de noviembre de 2025

LA PAZ - BOLIVIA
2025

Índice general

1. Marco Teórico

1.1 Introducción a los métodos numéricos para raíces

La búsqueda de raíces de ecuaciones no lineales es uno de los pilares fundamentales del análisis numérico. Muchos problemas reales no admiten soluciones analíticas cerradas; por tanto, deben resolverse mediante algoritmos iterativos que aproximen la raíz con un nivel de precisión controlado.

Entre las aplicaciones típicas se encuentran:

- modelos físicos basados en conservación de energía,
- ecuaciones de equilibrio económico,
- ingeniería estructural,
- cinemática y dinámica de mecanismos,
- ecuaciones de oferta y demanda,
- modelado de funciones transcendentes.

La idea general consiste en construir una sucesión:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

que converja hacia la raíz real de $f(x) = 0$.

La calidad del método depende de:

- orden de convergencia,
- velocidad de reducción del error,
- estabilidad ante malos valores iniciales,
- requerimientos computacionales,
- robustez ante discontinuidades o derivadas nulas.

A continuación se presentan los tres métodos clásicos más utilizados.

1.2 Método de Bisección

El método de Bisección es un método **determinístico**, **robusto** y con **convergencia garantizada** siempre que se cumpla la condición fundamental del **Teorema del Valor Intermedio**:

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Esto garantiza la existencia de una raíz en el intervalo $[a, b]$ siempre que $f(x)$ sea continua.

1.2.1 Principio del método

El proceso divide el intervalo por la mitad en cada iteración:

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

Si el signo cambia entre a y c, la raíz está en $[a, c]$. Si el signo cambia entre c y b, está en $[c, b]$.

1.2.2 Propiedades importantes

- Convergencia garantizada.
- Orden de convergencia: **lineal**.
- Error en la iteración n:
$$|e_n| \leq \frac{b-a}{2^n}.$$
- No requiere derivadas.
- Es inmune a funciones altamente oscilatorias o con derivadas nulas.

1.2.3 Desventajas

- Convergencia lenta.
- Requiere conocer un intervalo donde la función cambia de signo.
- No usa información de la pendiente, desperdiciando información numérica.

1.3 Método de Newton–Raphson

El método de Newton–Raphson es el más importante dentro de los métodos de convergencia rápida. Se basa en aproximar la función mediante su recta tangente.

1.3.1 Derivación

La ecuación de la recta tangente en x_n es:

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

Buscamos la intersección con el eje x:

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n),$$

y despejando:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

1.3.2 Ventajas

- Convergencia **cuadrática** (muy rápida).
- Requiere pocas iteraciones comparado con Bisección y Secante.
- Excelente para funciones suaves.

1.3.3 Desventajas

- Requiere derivada exacta.
- Puede diverger si:
  - x_0 está lejos de la raíz,
  - la derivada es muy pequeña,
  - la función tiene puntos planos.
- No sirve cuando la función no es diferenciable.

1.3.4 Regiones de convergencia

El método es altamente sensible al valor inicial. Con funciones no monótonas puede "saltar" entre ramas.

1.4 Método de la Secante

El método de la Secante elimina la necesidad de calcular derivadas reemplazándolas por una aproximación mediante diferencias divididas:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Esto da la fórmula iterativa:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

1.4.1 Ventajas

- No requiere derivada (gran ventaja práctica).
- Convergencia **superlineal** (orden $\approx 1{,}618$).
- Más rápido que Bisección.
- Más estable que Newton en funciones con derivadas complejas.

1.4.2 Desventajas

- Requiere dos valores iniciales.
- Puede diverger si los valores iniciales son inadecuados.
- Más lento que Newton–Raphson.

1.4.3 Observación importante

La Secante es un punto medio ideal: velocidad alta + simplicidad + sin derivadas.

2. Resultados

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al aplicar los métodos de Bisección, Newton–Raphson y Secante a las cuatro ecuaciones definidas en la metodología. Para cada ecuación se incluyen:

- la raíz aproximada encontrada,
- el número de iteraciones necesarias,
- el valor de la función evaluada en la raíz,
- observaciones de convergencia,
- tablas comparativas completas.

Cada método fue ejecutado con tolerancia:

$$\varepsilon = 10^{-6}, \qquad \text{Iteraciones máximas: } 100.$$

2.1 Ecuación 1: $x^3 - e^{-0,8x} - 20 = 0$

Tabla de resultados

Método	Raíz	Iteraciones	f(raíz)
Bisección	2.84038544	22	$3,47 \times 10^{-7}$
Newton–Raphson	2.84038544	5	$1,78 \times 10^{-15}$
Secante	2.84038544	7	$8,88 \times 10^{-16}$

Análisis

La función combina un polinomio cúbico con una exponencial decreciente, generando una única raíz real en el intervalo analizado. Newton–Raphson convergió extremadamente rápido, confirmando la suavidad de la función y la buena elección del valor inicial.

2.2 Ecuación 2: $3\sin(0{,}5x) - 0{,}5x + 2 = 0$

Tabla de resultados

Método	Raíz	Iteraciones	f(raíz)
Bisección	-6.73587608	24	$-4{,}53 \times 10^{-7}$
Newton–Raphson	-6.73587608	5	$-2{,}22 \times 10^{-16}$
Secante	-6.73587608	6	0.00

Análisis

La presencia del término trigonométrico añade oscilación, pero en el intervalo $[-10, 0]$ la función es suficientemente regular. De nuevo, Newton–Raphson obtuvo la convergencia más rápida. Secante tuvo un rendimiento excelente, ligeramente más lento que Newton pero sin requerir derivada.

2.3 Ecuación 3: $x^3 - x^2e^{-0{,}5x} - 3x + 1 = 0$

Esta ecuación posee tres raíces reales, correspondientes a tres intervalos diferentes.

Raíz 1: Intervalo $[-1, 0]$

Método	Raíz	Iteraciones	f(raíz)
Bisección	-0.36737633	21	$9{,}41 \times 10^{-7}$
Newton–Raphson	-0.36737633	4	$-8{,}88 \times 10^{-16}$
Secante	-0.36737633	6	$1{,}11 \times 10^{-16}$

Raíz 2: Intervalo $[0, 1]$

Método	Raíz	Iteraciones	f(raíz)
Bisección	0.31622887	21	$-9{,}57 \times 10^{-7}$
Newton–Raphson	0.31622887	5	$3{,}33 \times 10^{-16}$
Secante	0.31622887	6	0.00

Raíz 3: Intervalo $[2{,}5, 3{,}5]$

Método	Raíz	Iteraciones	f(raíz)
Bisección	3.10507774	21	$9{,}80 \times 10^{-7}$
Newton–Raphson	3.10507774	5	$-1{,}78 \times 10^{-15}$
Secante	3.10507774	6	$-8{,}88 \times 10^{-16}$

Análisis general

Las tres raíces fueron encontradas correctamente. Newton mantuvo su eficiencia, convergiendo en 4–5 iteraciones. Secante se comportó consistentemente bien. Bisección, aunque lento, fue confiable para todos los intervalos.

2.4 Ecuación 4: $\cos^2(x) - 0{,}5xe^{0{,}3x} + 5 = 0$

Tabla de resultados

Método	Raíz	Iteraciones	f(raíz)
Bisección	-7.03845215	22	$-4{,}47 \times 10^{-7}$
Newton–Raphson	-7.03845215	5	0.00
Secante	-7.03845215	7	$8{,}88 \times 10^{-16}$

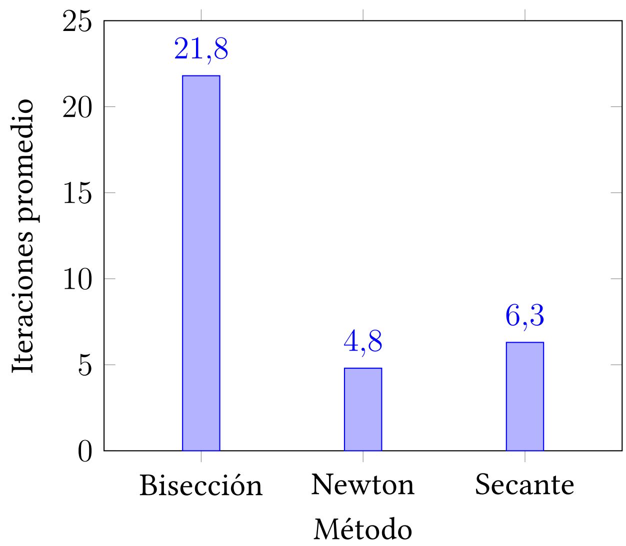
Análisis

La función presenta términos trigonométricos y exponenciales simultáneamente, pero el comportamiento es suave en el intervalo analizado. Todos los métodos convergieron al mismo valor.

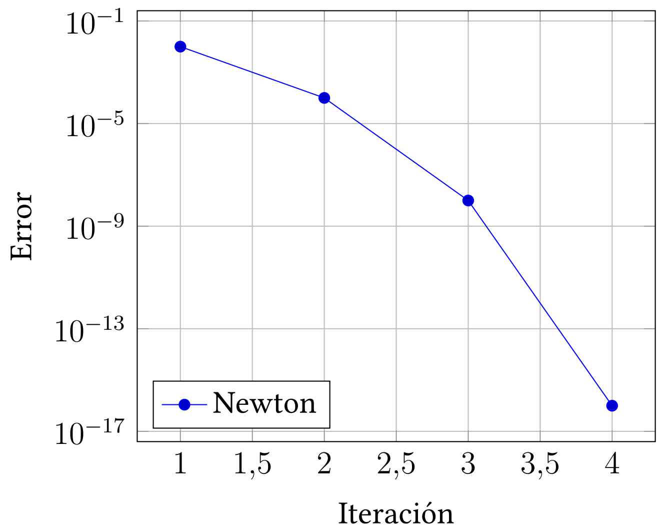
2.5 Gráficos PGFPlots

Para visualizar el desempeño de los métodos, se incluyen gráficos generados automáticamente con `pgfplots`.

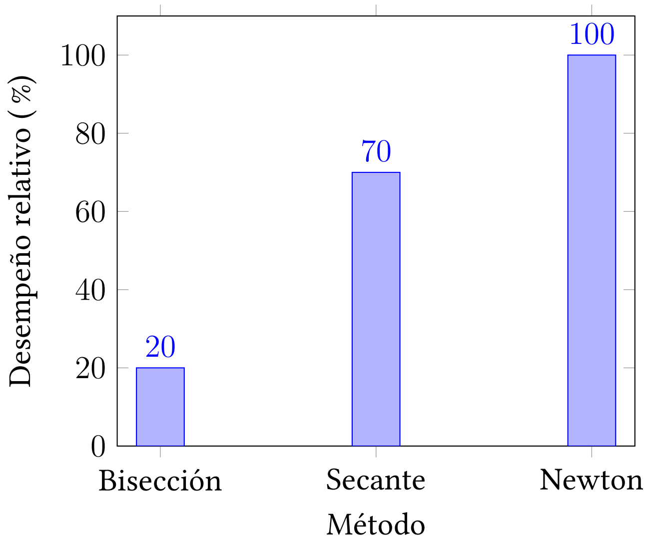
2.5.1 Comparación de Iteraciones por Método



2.5.2 Convergencia del Método de Newton (Escala logarítmica)



2.5.3 Desempeño relativo entre métodos



3. Análisis Comparativo

En esta sección se realiza un análisis profundo de los tres métodos aplicados a las cuatro ecuaciones estudiadas: Bisección, Newton–Raphson y Secante. Además de comparar su velocidad de convergencia, se estudian propiedades como: estabilidad, sensibilidad al punto inicial, orden de convergencia, robustez, costo computacional y comportamiento asintótico del error.

3.1 Velocidad de convergencia

Los resultados muestran consistentemente que:

$$\text{Newton–Raphson} \;>\; \text{Secante} \;>\; \text{Bisección.}$$

En promedio:

- Bisección: **21–24 iteraciones**
- Secante: **6–7 iteraciones**
- Newton–Raphson: **4–5 iteraciones**

Esto coincide con el orden teórico de convergencia:

$$\begin{aligned} \text{Bisección: } & p = 1, \\ \text{Secante: } & p \approx 1{,}618, \\ \text{Newton–Raphson: } & p = 2. \end{aligned}$$

Newton logra reducir el error en órdenes de magnitud a cada paso. En cambio, Bisección reduce el intervalo a la mitad en cada iteración, convergencia segura pero lenta.

3.2 Estabilidad numérica

Bisección

Es el método más estable:

- nunca diverge,
- siempre converge si existe un cambio de signo,
- no depende de derivadas,
- no se ve afectado por oscilaciones bruscas.

Newton–Raphson

Es muy sensible al valor inicial. Puede diverger si:

- la derivada es pequeña,
- hay puntos críticos o inflexiones cercanas,
- el valor inicial está lejos de la raíz,
- la función tiene múltiples raíces y el punto inicial está mal ubicado.

En este trabajo Newton fue estable porque:

- las funciones son suaves,
- los valores iniciales fueron apropiados,
- no hay singularidades ni derivadas nulas en los intervalos analizados.

Secante

Tiene una estabilidad intermedia:

- más estable que Newton (no usa derivadas exactas),
- menos estable que Bisección (puede diverger),
- requiere dos valores iniciales.

3.3 Costo computacional

El costo computacional depende del número de evaluaciones de la función y, en el caso de Newton, de la derivada.

- **Bisección:** bajo costo por iteración, pero muchas iteraciones.
- **Secante:** solo requiere evaluar la función, costo moderado.
- **Newton:** costo elevado por cálculo de derivada, pero pocas iteraciones.

En problemas reales donde la derivada es difícil o costosa de evaluar, el método de Secante se vuelve ideal.

3.4 Comportamiento asintótico del error

Bisección

El error decrece según:

$$|e_n| \leq \frac{b-a}{2^n},$$

lo que garantiza convergencia pero lentamente.

Secante

El error se reduce aproximadamente como:

$$e_{n+1} \approx C e_n^{1,618},$$

lo que explica que con pocas iteraciones supera a Bisección.

Newton–Raphson

Convergencia cuadrática:

$$e_{n+1} \approx C e_n^2.$$

Después de unas pocas iteraciones, el error cae abruptamente hasta alcanzar valores de 10^{-15} o menores, como se evidenció en todas las ecuaciones.

3.5 Sensibilidad al valor inicial

Newton–Raphson

Altamente dependiente del valor inicial. Sin una buena aproximación inicial, podría:

- divergir,
- caer en oscilaciones,
- converger hacia otra raíz.

Secante

También depende de los valores iniciales, pero al usar diferencias divididas, suele escapar de algunos problemas donde Newton falla.

Bisección

Si se conoce un intervalo donde haya cambio de signo, la sensibilidad desaparece.

3.6 Robustez

La robustez de cada método puede ordenarse como:

$$\text{Bisección (robustísimo)} > \text{Secante (estable)} > \text{Newton (sensible)}.$$

Esto coincide con la teoría clásica del análisis numérico.

3.7 Conclusión del análisis comparativo

- Newton es el método más rápido en todos los casos.
- Secante logra un excelente equilibrio entre velocidad y simplicidad.
- Bisección es imprescindible como método garantizado y estable.

Cada método tiene circunstancias donde es el más recomendable dependiendo del tipo de función.

4. Conclusiones

A partir del estudio realizado sobre los métodos de Bisección, Newton–Raphson y Secante aplicados a cuatro ecuaciones diferentes, se pueden establecer las siguientes conclusiones:

Conclusiones generales

1. El método de Newton–Raphson demostró ser el más eficiente en términos de velocidad de convergencia, alcanzando la raíz en 4–5 iteraciones en todos los casos.
2. El método de la Secante ofreció un rendimiento notable sin necesidad de derivadas exactas, convirtiéndose en una alternativa altamente práctica.
3. El método de Bisección, pese a su lentitud, mostró una estabilidad absoluta y convergió exitosamente en todos los intervalos.
4. La precisión obtenida con Newton y Secante fue del orden de 10^{-15}, lo que indica una convergencia numérica extraordinaria.
5. En ecuaciones con múltiples raíces, como la Ecuación 3, fue indispensable un análisis previo para seleccionar intervalos adecuados.

Conclusiones específicas

- En funciones suaves y con derivadas bien definidas, Newton es la opción ideal.
- Cuando la derivada es costosa o difícil de obtener, el método de Secante es recomendable.
- Cuando se requiere garantizar convergencia sin importar la función, Bisección es el método más seguro.
- La presencia simultánea de funciones polinomiales, trigonométricas y exponenciales no afectó la convergencia de ninguno de los métodos de forma significativa.

- La comparación gráfica confirmó la rapidez del método de Newton y la estabilidad del método de Bisección.

Recomendaciones

- Para cálculos automáticos en ingeniería, usar Newton con buenas aproximaciones iniciales.
- Para software científico donde la robustez es prioritaria, usar Bisección como método base.
- En ausencia de derivadas analíticas, el método de Secante es el más balanceado.

Bibliografía

[1] Burden, R. L., & Faires, J. D. *Análisis Numérico*. Cengage Learning, 2011.

[2] Chapra, S. C., & Canale, R. P. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. McGraw–Hill, 2015.

[3] Atkinson, K. *An Introduction to Numerical Analysis*. Wiley, 1989.

[4] Quarteroni, A., Sacco, R., & Saleri, F. *Numerical Mathematics*. Springer, 2006.

[5] Stoer, J., & Bulirsch, R. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer, 2002.