UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Universidad de Granada

Facultad de Ciencias

VIAJE A MARTE

FÍSICA COMPUTACIONAL

Autor:
Álvaro Manuel Balegas López

9 de julio de 2025

Índice

1. Fundamento teórico

1.1. Hamiltoniano y ecuaciones de movimiento

El hamiltoniano del sistema, considerando la iteracción de una nave de masa m con el Sol, la Tierra y Marte, es el siguiente:

$$H = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\phi^2}{2mr^2} - G\frac{mM_S}{r} - G\frac{mM_T}{r_T(r,\phi,t)} - G\frac{mM_M}{r_M(r,\phi,t)} \tag{1}$$

Siendo r la distancia de la nave al Sol, M_s, M_T y M_M las masas del Sol, la Tierra y Marte respectivamente; $r_T(r,\phi,t)$ y $r_M(r,\phi,t)$ la distancia de la nave a la Tierra y a Marte respectivamente, donde estas distancias se pueden sacar mediante la regla del coseno suponiendo orbitas circulares y siendo d_T, d_M el radio de las órbitas de la Tierra y Marte, nos queda que:

$$r_T(r,\phi,t) = \sqrt{r^2 + d_T^2 - 2rd_T cos(\phi - \omega_T t)} \tag{2}$$

$$r_M(r,\phi,t) = \sqrt{r^2 + d_M^2 - 2rd_M cos(\phi - \omega_M t)} \tag{3}$$

Siendo ω_i las velocidades angulares de los planetas respecto al sol.

Para minimizar errores de redondeo en el cálculo computacional se realizan unos cambios de variables sobre el hamiltoniano los cuales son:

$$r' = \frac{r}{d_T}, \quad P_r' = \frac{P_r}{md_T}, \quad P_\phi' = \frac{P_\phi}{md_T^2} \tag{4}$$

Todas las distancias se van a dar, por tanto, en UA $(1UA = 1{,}5 \cdot 10^{11} m$
Además se definen las nuevas constantes:

$$\Delta = \frac{GM_S}{d_T^3}, \quad \mu_T = \frac{M_T}{M_S}, \quad \mu_M = \frac{M_M}{M_S}, \quad \lambda = \frac{d_M}{d_T} \tag{5}$$

Con esto el Hamiltoniano nos queda:

$$H = md_T^2 \left(\frac{P_r'^2}{2} + \frac{P_\phi'^2}{2r'^2} - \frac{\Delta}{r'} - \frac{\Delta\mu_T}{r_T'} - \frac{\Delta\mu_M}{r_M'} \right) \tag{6}$$

Aplicando las ecuaciones de Hamilton obtenemos las ecuaciones del movimiento del sistema:

$$\dot{r} = P_r; \quad \dot{\phi} = \frac{P_\phi}{r^2} \tag{7}$$

$$\dot{P}_r = \frac{P_\phi^2}{r^3} - \Delta \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\mu_T}{r_T^3}(r - cos(\phi - \omega_T t) + \frac{\mu_M}{r_M^3}(r - \lambda cos(\phi - \omega_M t) \right) \tag{8}$$

$$\dot{P}_\phi = -\Delta r \left(\frac{\mu_T}{r_T^3} sen(\phi - \omega_T t) + \frac{\mu_M \lambda}{r_M^3} sen(\phi - \omega_M t) \right) \tag{9}$$

El viaje a marte se va a llevar a cabo a través de la orbita de Hohmann, voy a explicar de que trata y seguidamente explico las condiciones iniciales y la estrategia del viaje que he seguido.

1.2. Órbita de Hohmann

La orbita de transferencia de Hohmann es el camino para cambiar de órbita el cual minimiza la energía necesaria. Este consiste en realizar una orbita elíptica tangente a la órbita inicial y final, como se puede observar en la siguiente figura:

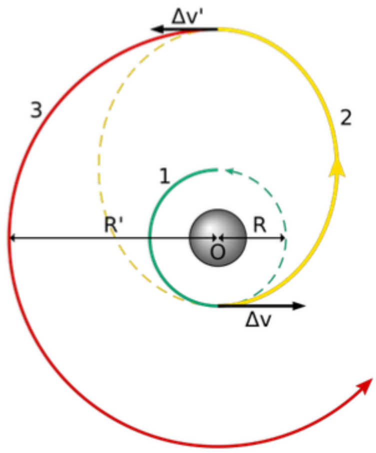

Figura 1: Órbita de Hohmann

Por lo tanto, es necesario impulsar la nave en dos ocasiones, para salir de la órbita terrestre y para entrar en la órbita de Marte. Estos dos impulsos vienen dados por las siguientes ecuaciones(en unidades reescaladas):

$$\Delta v = \sqrt{\Delta}\left(\sqrt{\frac{2\lambda}{1+\lambda}} - 1\right), \quad \Delta v' = \sqrt{\frac{\Delta}{\lambda}}\left(1 - \sqrt{\frac{2\lambda}{1+\lambda}}\right) \tag{10}$$

Estos impulsos serán tangenciales por lo tanto pertenecerán a p_ϕ.

1.3. Condiciones iniciales y plan de viaje

El sistema comienza con el cohete orbitando la Tierra en una órbita circular a unos 2000km de la superficie de esta. Esta órbita recibe el nombre de LEO (Low Earth's Orbit), órbita muy utilizada para viajes espaciales.

Suponemos que las posiciones angulares iniciales de la Tierra y la nave respecto al sol son ambas $\phi_0 = \phi_{T_0} = 0$, por lo que la posición inicial de la nave en unidades reescaladas será:

$$r_0 = 1 + R_T + r_{T_0} \tag{11}$$

Para determinar el momento angular inicial de la nave tenemos que tener en cuenta el momento causado por la rotación alrededor del Sol y por la rotación alrededor de la Tierra, por lo tanto sería:

$$P_{\phi_0} = r_0\sqrt{(\Delta\mu_T)} + \sqrt{\Delta r_0} \tag{12}$$

Como queremos escapar del pozo potencial terrestre en t=0, aplicamos un impulso radial para poder escapar de este, este impulso radial será:

$$\sqrt{\frac{2\Delta\mu_T}{r_{T_0}}}$$

(13)

Para aplicar el segundo impulso para llevar al cohete a la orbita de transferencia primera cuyo afelio coincide con la órbita de Marte, ponemos la condición del radio de Hill el cuál viene dado como:

$$r_H \sim a \left(\frac{M_T}{3M_S} \right)^{1/3} \tag{14}$$

Donde este estima la región alrededor de un cuerpo donde domina su gravedad respecto a otro cuerpo mayor (en nuestro caso la Tierra respecto al Sol) y obtenemos que para una distancia a la Tierra de la nave mayor que 0.01 domina la gravedad del Sol, por lo tanto aplicamos el primer impulso en este momento el cuál viene dado como hemos definido en la ecuacion 10. El segundo impulso lo daremos cuando la nave y Marte se encuentren en el afelio de la primera orbita de transferencia el cuál será similar a la condición inicial para que la nave orbite con la Tierra, pero en este caso con Marte y vendrá dado como:

$$P_\phi = r\sqrt{\Delta\mu_M / r_M} + \sqrt{\Delta r} \tag{15}$$

Con este impulso nuestro cohete debería quedarse orbitando alrededor de Marte. También hemos ajustado el angulo inicial de Marte para que este y la nave se encuentren en el afelio de la órbita de transferencia

2. Resultados obtenidos

2.1. Primer impulso

El primer impulso se lleva a cabo a los 55,52 días, cuando cumple la condición a través del radio de Hill explicado anteriormente, la trayectoria obtenida es la siguiente:

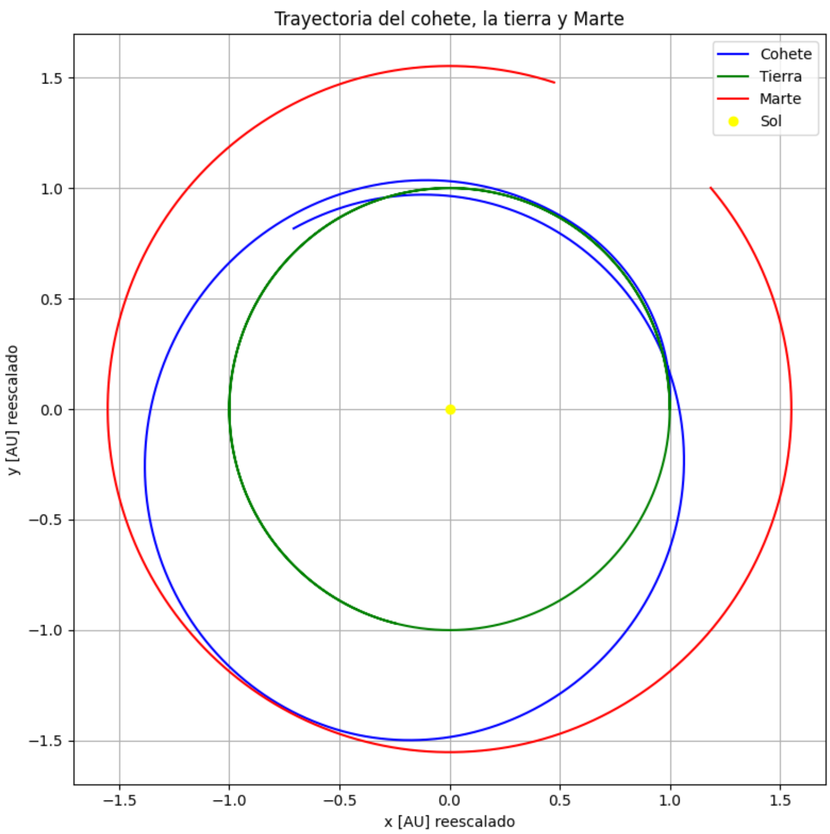

Figura 2: Trayectoria de la Tierra, Marte y la nave si solo consideramos el segundo impulso

Como se puede observar la trayectoria es la misma que se observa en la 1 si no aplicáramos el segundo impulso, con el Afelio de la orbita de transferencia coincidiendo con la órbita de Marte y el perihelio no coincide con la orbita de la Tierra ya que el impulso lo hemos introducido cuando la nave a escapado del pozo de potencial de esta y en ese momento su orbita no coincide con la terrestre.

2.2. Segundo impulso

El segundo impulso se lleva a cabo cuando la nave y Marte se encuentran en el afelio de la órbita de transferencia y esto ocurre a los 307.60 días, el impulso dado viene dado por la ecuación 15, las trayectorias obtenidas han sido las siguientes:

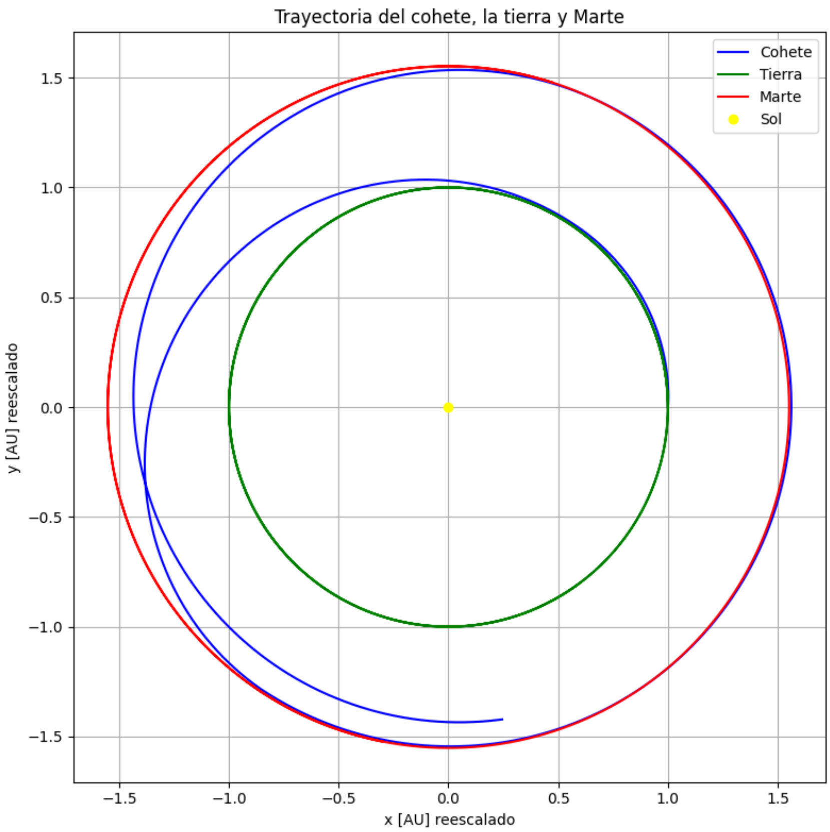

Figura 3: Trayectoria de la Tierra, Marte y la nave si consideramos ambos impulsos

Como se puede observar al principio del impulso se puede observar como sigue la orbita de Marte pero tal como avanza con el tiempo abandona esta órbita y sigue una orbita alrededor del Sol mostrando una mayor fuerza atractiva que Marte, por lo tanto esto indica que la nave no está orbitando alrededor de Marte y nuestro viaje a Marte ha sido fallido.

3. Conclusión

Se ha realizado una simulación de un viaje a Marte a través del método numérico de Runge-Kutta 4 (RK4), el cuál nos ha indicado que nuestro plan de viaje para el primer impulso era correcto y seguía la teoría anteriormente explicada pero al aplicar el segundo impulso vemos que nuestro cohete no orbita alrededor de Marte el cuál era nuestro objetivo. Hemos intentado otros planes para llevar a cabo el viaje, como por ejemplo aplicando el primer impulso en $t = 0$ a la nave la cuál orbita alrededor de la Tierra pero tampoco obteníamos los resultados, y este plan de viaje ha sido el que más se ha acercado a los resultados. El problema creo que es debido que en la primera orbita de transferencia no se llega justamente a la orbita de Marte y nos quedamos una distancia alrededor de 0.024AU la cuál es muy grande para que con el segundo impulso la nave se quede orbitando en marte y no he conseguido aproximarme más ni cambiando los impulsos ni las condiciones iniciales.