

# Estudio de la emergencia de cooperación en juegos entre agentes en redes espaciales

Pablo Gaitán Ruz and Álvaro Manuel Balegas López  
*Grado en Física. Universidad de Granada*

(Dated: February 26, 2026)

En este trabajo se pretende hacer un estudio general de la dinámica en redes de jugadores que participan en un juego de dilema del prisionero evolutivo. Partiendo de trabajos previos, se intenta en primer lugar dar una caracterización dinámica a un juego que evoluciona entorno a la ecuación del replicado, el cual depende de un solo parámetro  $b$ , que será central en nuestro estudio en todo el trabajo. Tras ello, se replican los resultados obtenidos en artículos clásicos de teoría de juego evolutiva, centrándonos en primer lugar en el estudio de la densidad de cooperadores en la red y dando razones para la existencia de un régimen caótico para ciertos casos. Avanzamos esta descripción con un tratado desde el punto de vista de redes complejas, caracterizando parámetros de la red como son el clustering o la varianza del grado. Además, se estudia cómo la creación de comunidades conectadas puede promover el avance de la cooperación. Finalmente se hace un breve estudio de un juego PGG más avanzado, el cual incluye un tercer agente y parámetros extra, y se comparan variaciones con artículos recientes sobre el tema.

## I. INTRODUCCIÓN

Desde la aparición del artículo publicado por Nowak y May [1] en 1992, la aplicación de la teoría del juego a procesos evolutivos y en sociedades espaciales se ha convertido en una rama de la física de los sistemas complejos altamente activa. A diferencia de las aplicaciones políticas y bélicas para las que la teoría de juegos de Von Neumann se había estado utilizando, la variante evolutiva pretende el estudio de juegos prolongados en el tiempo, donde más de un agente interviene en el proceso.

Uno de los dilemas que sigue evadiendo a los físicos es el hecho de que en la naturaleza la cooperación parezca emerger de manera automática allá donde uno mire, aun siendo la estrategia que no seguiría un agente puramente lógico en un juego de dilema del prisionero. Como se comenta en [2] [3], la clave de la emergencia parece estar en la asociación en comunidades de agentes cooperadores, las cuales permiten su supervivencia. Para introducir esta cuestión, en la primera parte de este proyecto, estudiaremos la dinámica de un juego mixto, el cual evoluciona mediante la ecuación del replicado [3], intentando entender cómo un parámetro  $b$  cambia la tendencia del juego y la estabilidad de los puntos críticos del sistema.

Tras ello, se pretende replicar los resultados más importantes en [2], prestando especial atención al impacto del parámetro  $b$  en el florecimiento de la cooperación. También se presenta un estudio del comportamiento caótico de la red mediante el cómputo de distancias entre redes para perturbaciones iniciales de éstas, intentando explicar las tendencias en función de lo que se observa de manera gráfica y numérica.

En la tercera tarea exploramos el impacto de la arquitectura de red—tanto en términos de heterogeneidad del grado como de estructura comunitaria—sobre la dinámica evolutiva, extendiendo el análisis a redes complejas como las de Erdős-Rényi y Barabási-Albert. El estudio del sistema desde un punto de vista de redes complejas pretende expandir lo estudiado anteriormente, centrándonos en este caso en la relación que existe entre los distintos

agentes, si la estructura de la red ya no es homogénea como hasta ahora.

Este enfoque interdisciplinario nos permite comprender cómo las propiedades locales de interacción y las reglas simples de actualización pueden influir drásticamente en el comportamiento global de sistemas complejos sociales y biológicos.

Por último, un aspecto el cual también ha sido objeto de estudio son las técnicas que pueden promover o incitar la cooperación en redes [4] [5]. ¿Qué podemos implementar para mejorar la población de C? Tomamos inspiración de un artículo reciente [6] para abordar técnicas que apoyan la promoción de la cooperación, en este caso para un juego PGG con tres agentes: C, D y P (*punisher*). Siguiendo el mismo modelo—con un parámetro que añadimos nosotros—pretendemos ver si la acción del agente P, que actúa como una ayuda a los cooperadores, crea una sinergia la cual puede acelerar o incluso aumentar la población de cooperadores, y reducir la de los defectores.

## II. ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DEL DILEMA DEL PRISIONERO EVOLUTIVO

Para un juego del *dilema del prisionero mixto*, donde cada agente puede poseer un número  $n$  de estrategias, podemos definir para cada jugador un vector  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , en el que cada entrada representa la probabilidad de que el jugador utilice la estrategia  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  [3]. Este vector vive en el subespacio vectorial  $n$ -dimensional  $S_n$  de  $\mathbb{R}^n$  compuesto por vectores tales que  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ . El concepto de *equilibrio de Nash* en un juego simple entre dos jugadores, donde por simplicidad se asume que solamente hay dos estrategias, y que además son las mismas para ambos jugadores, puede definirse como la condición  $\mathbf{x}^T W \mathbf{x} \geq \mathbf{x}^T W \mathbf{y}$ ;  $\forall \mathbf{y} \in S_n$  [3]. Esto es, la estrategia  $\mathbf{x}$  es un equilibrio de Nash si no puede mejorarse la ganancia de un jugador utilizando otra estrategia  $\mathbf{y}$ . La matriz de ganancias  $W$  para un

juego de dilema del prisionero, por primera vez introducida en [7], puede expresarse de la siguiente manera

	C	D
C	1	0
D	$b$	0

donde por convención las ganancias—entradas de la matriz—se refieren al resultado del jugador de las filas (para el otro jugador simplemente será la traspuesta).

La *ecuación de replicado*, que aparece por primera vez en [8], da una expresión dinámica para la evolución de los estados  $\mathbf{x}$  de un jugador

$$\dot{x}_i = x_i((W\mathbf{x})_i - \mathbf{x}^T W\mathbf{x}) \quad (1)$$

Para un sistema de dos estrategias  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , y teniendo en cuenta la matriz  $W$  ya mencionada, esta ecuación puede escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales en dos variables  $x_1, x_2$  de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_1 - x_1^2 - bx_1x_2) \\ \dot{x}_2 = x_2(bx_1 - x_1^2 - bx_1x_2) \end{cases} \quad (2)$$

cuyas soluciones estacionarias ( $\dot{\mathbf{x}} = 0$ ) pueden obtenerse resolviendo el sistema al hacer nulas las derivadas temporales [9]. Claramente hay una solución trivial de la forma  $(0,0)$ . Sin embargo no la consideramos, pues dicho vector no pertenece a  $S_n$ . Las otras soluciones son:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1-x_1}{b} \\ x_2 = \frac{b-x_1}{b} \end{cases}$$

Para el primer caso  $\mathbf{x}_{0,1} = (0,1)$ , y para el segundo vemos que  $\mathbf{x}_{0,2} = (1,0)$ . Notar que estas dos soluciones representan comportamientos diametralmente opuestos. Mientras que  $\mathbf{x}_{0,1}$  significa que el jugador elige la estrategia D con absoluta certeza (siempre deflece), la solución  $\mathbf{x}_{0,2}$  representa el caso en el que el jugador siempre escoge la estrategia C, colaborar con el oponente.

Podemos preguntarnos además qué estabilidad presentan estas soluciones estacionarias. En primer lugar, como el sistema no es lineal se requiere el cálculo de la matriz Jacobiana  $\mathcal{J}$ , que viene dada por

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_1^2 - 2bx_1x_2 & -bx_1^2 \\ bx_2 - 2x_1x_2 - bx_2^2 & bx_1 - x_1^2 - 2bx_1x_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Para  $\mathbf{x}_{0,2}$  obtenemos

$$\mathcal{J}(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & -b \\ 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores son  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = b-1$ , con autovectores  $\mathbf{v}_1 = (1,0)$  y  $\mathbf{v}_2 = (1,-1)$ . Por tanto, se obtiene un punto de silla, donde la dirección de  $\mathbf{v}_1$  es la estable y la de  $\mathbf{v}_2$  es inestable para valores de  $b$  mayores que 1. En particular

$$\mathbf{v}_2 = \begin{cases} \text{Estable si } b < 1 \\ \text{Inestable si } b > 1 \\ \text{Indiferente si } b = 0 \end{cases}$$

Donde por indiferente nos referimos a que la dirección de  $\mathbf{v}_2$  no funciona como un atractor o repulsor hacia ninguno de los puntos estacionarios (ver figura (1c)).

En el juego del dilema del prisionero clásico (ver, por ejemplo, la expresión (2) en [3]), la estrategia de siempre jugar D es un equilibrio de Nash *estable*, es decir, la desigualdad es estricta, ya que haga lo que haga nuestro oponente, elegir D siempre dará una ganancia superior a la conseguida mediante C—sin información alguna de la estrategia del oponente, pero asumiendo que se comportará como un jugador lógico, nunca hemos de cooperar, lo que equivale a la solución estacionaria  $\mathbf{x}_{0,1}$ . Sin embargo, con la introducción del parámetro  $b$  este panorama puede verse afectado. En efecto, si nos fijamos en la tabla de ganancias introducida anteriormente, vemos que para  $b < 1$  esta filosofía tan agresiva ya deja de tener sentido. En efecto, si nuestro rival escoge D siempre será cero la ganancia, pero si decide jugar C, hemos de seleccionar C también, pues  $b < 1$ . Por tanto, sin saber lo que hará, cooperar es la única elección lógica ( $\mathbf{v}_2$  estable), y la operación es el estado en equilibrio de Nash.

Si por el contrario  $b > 1$  volvemos a obtener que el equilibrio de Nash se consigue al deflecear con total certeza, pues siempre será mayor la ganancia.

Quizá la situación menos interesante es el caso en el que  $b = 1$ ; no hay ninguna preferencia entre C y D. Por tanto, empezando con una estrategia inicial,  $\mathbf{x}_0 \in S_n$ , permaneceremos en ella indefinidamente. Esto se ve de manera clara en la figura (1c), donde la recta  $x_2 = 1 - x_1$  se convierte en una "nulclina estática" [9] (recordar que  $x_1 + x_2 = 1$ ).

### III. EMERGENCIA DE LA COOPERACIÓN. ESTUDIO DE LAS ESTRATEGIAS SEGÚN EL PARÁMETRO $b$

Como se ha comentado en la sección anterior, la parametrización de la matriz de cooperación mediante un número  $b$  permite que aparezcan distintos regímenes del sistema para cada rango de valores de dicho parámetro. A lo largo de esta sección vamos a comparar nuestros resultados con el estudio detallado llevado a cabo por Nowak y May en [1], [2]. Notar que en nuestro caso la red de vecinos tiene condiciones de contorno periódicas, mientras que las simulaciones de Nowak y May no las implementan. Aun así, como se menciona en dichos artículos, no hay una diferencia significativa en cuanto a los resultados que se obtienen en ambos casos. Usamos también un retículo de  $200 \times 200$ , y cada jugador interacciona con los ocho vecinos que lo rodean ( $k = 8$ ), bajo la regla de actualización UI.

El primer objetivo es comprobar que en efecto nuestro sistema sigue las mismas tendencias que el que aparece en [2] cuando variamos el parámetro libre  $b$ . Para ello, en la figura (2) mostramos el estado final de los jugadores tras 100 rondas con distintos valores de  $b$ .

Vemos que, al comparar con los resultados del artículo

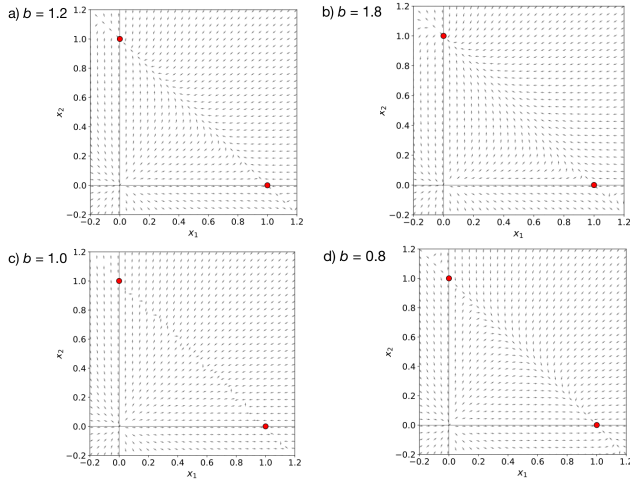


FIG. 1. Comportamiento de los atractores dados por las soluciones estacionarias,  $(0,1)$  y  $(1,0)$  en función del parámetro  $b$ . **a)** El diagrama de fases muestra cómo el atractor es la solución  $\mathbf{x}_{0,1}$ . **b)** Conforme aumentamos  $b$  por encima de la unidad, el único cambio es que la atracción de  $\mathbf{x}_{0,1}$  se vuelve más intensa, y las trayectorias convergen a él más rápidamente. **c)** En este caso la nulclina es el atractor en sí. Una vez que se llega a un punto de ella, no hay tendencia a ir hacia ninguna solución estacionaria. **d)** Para  $b < 1$  el atractor es  $\mathbf{x}_{0,2}$ , y el diagrama de fases muestra este comportamiento de manera clara.

(figura (3) en [2]) obtenemos la misma dinámica en todos los casos.

Para hacer un análisis más cuantitativo de cómo se produce la evolución de cooperadores y defectores en función de  $b$  podemos definir la *densidad de cooperadores*  $\rho$ , la cual viene dada por:

$$\rho(b) = \frac{N_C(b)}{N} \quad (4)$$

donde  $N_C$  es el número de cooperadores, el cual depende de  $b$ , y  $N$  el número total de jugadores. Para cooperación total, tendremos  $\rho = 1$ , mientras que para deflexión total  $\rho = 0$ . Nos interesamos en el comportamiento de este parámetro cuando el sistema llega a su estado estacionario, en el cual a lo sumo el valor de  $\rho(b)$  oscilará alrededor de un valor medio. Esta oscilación será mayor cuanto más caótica sea la red, y es un primer indicador para ver si nos encontramos en un régimen caótico o no. En la figura (3) se muestra este comportamiento para la misma red con la que se han obtenido los resultados hasta ahora. Vemos una tendencia inicial en la que la densidad de cooperadores desciende de manera bastante relajada hasta que  $b = 1.8$ . En el intervalo  $b \in [1.8, 2]$  la densidad de cooperadores cae de manera abrupta, para llegar a cero cuando  $b > 2$ , donde los defectores se apoderan de la red de manera muy acelerada. Esto refleja lo que hemos visto de manera gráfica en la figura (2), donde los colores nos daban una idea de cuál de las dos estrategias dominaba.

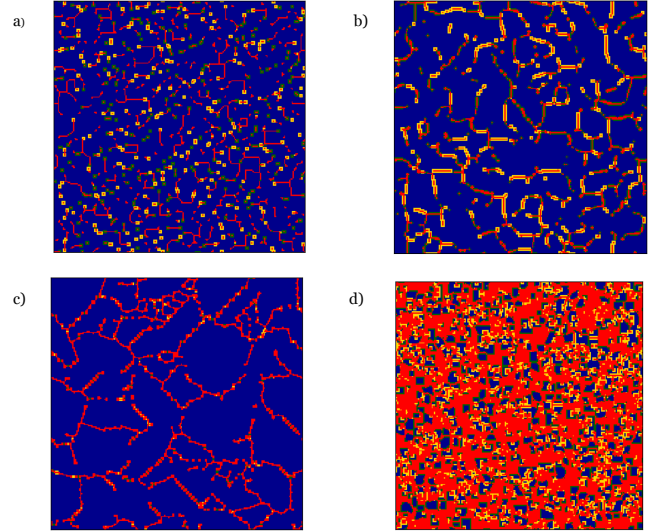


FIG. 2. Estado del tablero tras 100 rondas jugadas con  $k = 8$  y  $N = 200$ . El código de colores es como sigue: azul se refiere a cooperadores C, rojo a defectores D, amarillo a jugadores que han pasado de C a D en esta ronda, y verde aquellos jugadores que han pasado de D a C. **a)** Para  $b = 1.35$  vemos como el régimen es dominado por los cooperadores, con pequeñas líneas de defectores. Este régimen se caracteriza por formas cuadradas de jugadores que pasan de defectores a cooperadores o viceversa; un oscilador  $1D \rightarrow 9D \rightarrow 1D$  de período 2 [2]. **b)** Para  $b = 1.55$  vemos cómo la longitud de las líneas de defectores empieza a aumentar, y ya se interconectan por toda la red. Se forman osciladores de período 3 de defectores:  $1D \rightarrow 9D \rightarrow 5D \rightarrow 1D$ . **c)** En el caso de  $b = 1.78$ , se consigue un equilibrio en el que las líneas de defectores se ven asentadas, pero siguen dominando los cooperadores. **d)** Si  $b = 1.9$  (y en general si  $1.8 < b < 2$ ) obtenemos el régimen caótico, en el que ninguna de las dos estrategias domina sobre la otra. Se observa que hay una gran cantidad de amarillo y verde, lo cual indica que en cada ronda los cúmulos de C y D intentan acabar el uno con el otro, pero la recompensa  $b$  es tal que ninguno se puede beneficiar más que el otro mediante su estrategia, si bien es cierto que la densidad de defectores es ligeramente mayor.

Vemos que, aunque el régimen caótico se alcance antes en [3], la tendencia obtenida es la misma. Achacamos esta discrepancia definición de la matriz  $W$  o a otros parámetros del sistema. En efecto, si comparamos con resultados obtenidos en [10] vemos que en este caso nuestra tendencia sí es la misma, obteniendo la transición exactamente en el rango  $b \in [1.8, 2]$ .

#### A. Caracterización del régimen $1.8 \leq b \leq 2$ . ¿Es realmente caótico?

Partimos del hecho de que el sistema que estamos estudiando es claramente determinista. Esto es, para unas condiciones iniciales determinadas, la matriz  $W$  dicta de manera unívoca el desarrollo del juego a lo largo de

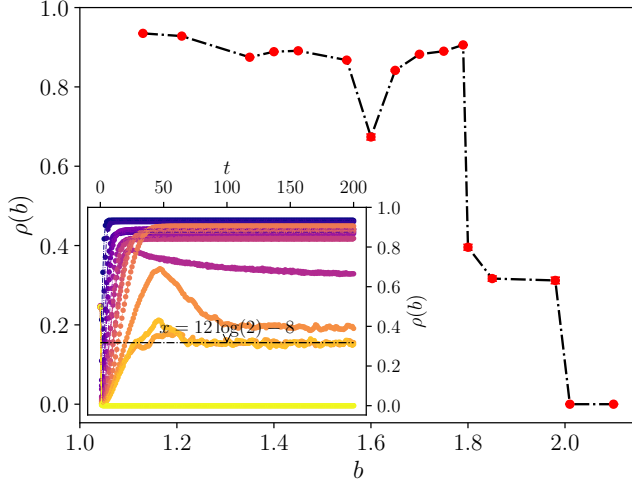


FIG. 3. Comportamiento de  $\rho(b)$ . En el inset se muestra cómo el valor de  $\rho(b)$  se estabiliza en función del tiempo, para cada valor de  $b$ . Notar que el código de colores muestra los valores de  $b$  más pequeños en color morado oscuro, y el gradiente se va haciendo más claro conforme aumenta  $b$ . En la figura principal se aprecia de manera clara el cambio de estable a caótico cuando  $b \in [1.8, 2]$ . Para valores menores el régimen de cooperadores domina, mientras que para valores superiores los defectores son los que lo hacen. Notar la singularidad o anomalía en  $b = 1.6$ . En el inset se muestra la tendencia al valor  $x$  en el régimen caótico [2].

las rondas. En la figura (1,d) hemos visto cómo en el régimen que hemos denominado—quizá precozmente—como “caótico” el estado final del sistema parece depender de manera sensible a las condiciones iniciales que impongamos (hasta ahora han sido aleatorias). Para estudiar el estado final del sistema, definimos una distancia entre redes  $d_{12}(t)$  en un tiempo  $t$  dado:

$$d_{12}(t) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N (1 - \delta_{s_1(i,j), s_2(i,j)}) \quad (5)$$

Esta función barre las dos redes las cuales comparamos y suma una unidad si el mismo jugador  $s(i, j)$  en ambas redes tienen estrategias distintas, mientras que no suma nada si siguen la misma estrategia. Notar que esta distancia solo tiene sentido para un juego de dos estrategias como el nuestro. Recordamos que un cooperador será  $s = 0$  mientras que un defector será  $s = 1$ . El siguiente paso consiste en ver, para diversos sistemas los cuales se distinguen por una perturbación  $\epsilon$  entre sí—que como poco será de un único jugador que las diferencia—si el estado final estacionario es completamente distinto o la distancia se comporta de una manera regular. A estos efectos, en la figura (4) se muestra la evolución temporal de la distancia entre dos redes donde las condiciones iniciales han sido alteradas siguiendo un cierto ruido. Es decir, inicialmente eran iguales pero a una de ellas se le ha cambiado un cierto porcentaje de los jugadores iniciales.

Se han realizado las simulaciones para cuatro valores de  $b$  en el régimen que estamos estudiando.

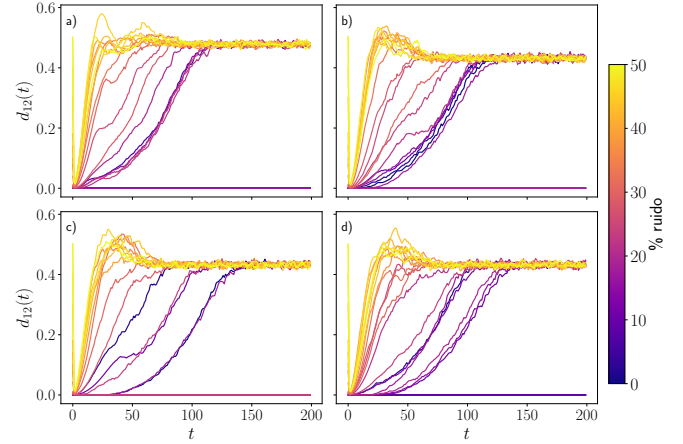


FIG. 4. Comportamiento de la distancia de Hamming normalizada por el número de jugadores de la red en función del tiempo para 200 generaciones, en una red de  $200^2$  jugadores. **a)** Para  $b = 1.8$  vemos como, aunque el proceso para llegar al estado estacionario varía, en todos los casos se llega a un valor de  $d_{12} \approx 0.47$ . Para el caso **b), c), d)** ( $b = 1.85, 1.95, 1.99$  respectivamente) el valor donde converge la red es de  $d_{12} \approx 0.43$ . Como se muestra en la figura, las dos redes que se comparan han sido alteradas en sus condiciones iniciales mediante un porcentaje de ruido determinado, desde una perturbación  $\epsilon \rightarrow 0\%$  hasta  $\epsilon = 50\%$ . En los cuatro casos podemos observar que, independientemente del ruido inicial aplicado, la distancia entre redes cae a un valor nulo tras la primera iteración o a un valor próximo a cero.

Vemos que, independientemente del valor de  $b$  que se estudia en el régimen, la distancia entre redes parece converger a valores específicos. En el caso de la figura (4, a), para  $b = 1.80$ , observamos un estado final en el que  $d_{12} \approx 0.47$ , mientras que para los otros tres casos el valor de convergencia parece ser de  $d_{12} \approx 0.43$ . Podemos observar dos tendencias en las simulaciones. En primer lugar, hay juegos en los que la diferencia entre las redes es tan reducida que en la segunda ronda las dos pasan a ser exactamente iguales, y la distancia converge inmediatamente a cero. Notar que mediante nuestro método—en el que los jugadores que se diferencian entre ellos se escogen siguiendo un proceso aleatorio—no controlamos qué jugador(es) de la red se intercambia(n) al inicio. Esto implica que para ruidos bajos puede haber simulaciones en las que ningún jugador se difrencie, y como el juego es determinista  $d_{12}$  es nulo desde el inicio de manera trivial. Otra consecuencia que este método acarrea es que para un mismo ruido, en dos simulaciones distintas los jugadores que se cambian ocuparán posiciones completamente distintas. Esto quiere decir que la aparición de un cooperador en un lugar de la red puede verse apagado rápidamente por defectores, haciendo que desaparezca en la siguiente ronda y que la distancia entre las redes se haga nula, pero su aparición en un cúmulo de cooper-

adores puede empezar la emergencia de cooperación, aumentando la distancia de las redes en simulaciones sucesivas de manera acelerada.

En segundo lugar, conforme aumenta el ruido la distancia inicial de las redes obviamente aumenta, pero vemos como en todos los casos la primera simulación reduce esta distancia a valores muy reducidos. Para visualizar este comportamiento, intentemos explicar los primeros pasos de la simulación de manera detallada, para el caso en el que el ruido es del 50%:

1. Cuando aplicamos el ruido del 50% a una configuración inicial para obtener la otra, aproximadamente la mitad de los jugadores cambian la estrategia que seguían, lo cual explica que  $d_{12} \approx 0.5$  en  $t = 0$ .
2. Con estas dos configuraciones iniciales definidas, se juega la primera ronda en cada una de las dos partidas de manera independiente. Lo importante es darse cuenta que, para un valor de  $b \in [1.8, 2]$ , en una red mezclada (sin estructura alguna) los defectores dominan. Esto se ve de manera clara, ya que si un cooperador se encuentra con un defector sin estar contenido en un cúmulo de cooperadores no puede ganar, pues su recompensa nunca superará la de un defector. Por ello, en la primera ronda, las dos redes pasan de ser aleatorias a un mar de defectores con pequeñas islas de cooperadores. Esto explica que la distancia sea tan reducida, pues solo se diferencian en la localización de las pequeñas islas de cooperadores, que significan un porcentaje muy pequeño del total. Notar que esto también nos dice que, con una red inicial mezclada, la probabilidad de sobrevivir la primera ronda para un cooperador es de alrededor de un 2.5%, porcentaje el cual no debería de depender en principio del tamaño de la red.
3. Tras la primera ronda, los cúmulos de cooperadores en cada red empiezan a ganar terreno cada uno por su cuenta. Esto lleva a que conforme avanzan las rondas la distancia entre redes se dispare, como podemos ver en la figura anterior. En particular, el valor donde convergen las redes, de alrededor de  $d_{12} = 0.45$  puede entenderse por la acción de un atractor caótico. En efecto, si observamos la figura (3), vemos cómo para el régimen de  $b$  estudiado la densidad de cooperadores es de alrededor de 0.3, que es la mitad del valor de  $d_{12}$ . Como en este régimen tenemos un mar de defectores con islas de cooperadores, en media la distancia entre redes es un poco menos que el doble de la densidad de cooperadores, pues en general no coinciden las islas en cada red por el comportamiento caótico, y los puntos donde sí coinciden reducen el valor de la distancia por debajo de  $2\rho(b)$ .

Acabamos de observar de manera cuantitativa cómo emerge la cooperación desde un estado en el que los de-

flectores dominan. Mediante asociaciones no muy elevadas de cooperadores que consiguen sobrevivir la purga inicial de los defectores, pueden empezar a ganar terreno, y en el régimen que estudiamos, llegar a tener una densidad  $\rho(b) \approx 0.3$ , como veíamos en la figura (3).

Si comparamos con otros trabajos que también pretenden estudiar el régimen caótico del dilema del prisionero evolutivo mediante el cómputo de distancias de Hamming [10] vemos que nuestros resultados también apoyan la existencia de un régimen caótico. Bien es cierto que en dicho trabajo la distancia entre redes fue normalizada mediante valores relacionados con la densidad de cooperadores y defectores, y que se consigue un valor de convergencia de  $d_{12} = 1$ . Aun así, hemos visto que para distancias iniciales muy reducidas (no nulas) las redes se separan hasta valores bastante elevados. Por tanto, tenemos un fuerte indicio de que el sistema es altamente caótico.

#### IV. ANÁLISIS DE LA INFLUENCIA DE LA TOPOLOGÍA DE LA RED EN LA EVOLUCIÓN DEL SISTEMA BAJO LA REGLA DE LA ACTUALIZACIÓN DE LA UI ('UNCONDITIONAL IMITATION')

En esta sección nos olvidamos del estudio del sistema como un conjunto de bloques inmutables, y nos centramos en técnicas de redes complejas para estudiar la evolución de las relaciones entre agentes, manteniendo la técnica de imitación UI para la evolución.

Para dicha regla, la varianza del grado de la red y el coeficiente de agrupamiento son los parámetros más importantes para determinar la evolución del sistema junto con la fracción de cooperadores  $\rho(t)$ . Por esta razón, queremos analizar diferentes estructuras de red con el fin de caracterizar dicha dependencia. Vamos a proponer dos líneas de ataque:

1. Considerar redes heterogéneas, como las redes de Erdős-Rényi o Barabási-Albert, y calcular la transición de fase para este tipo de arquitectura de red.
2. Considerar una red de comunidades (una red dividida en diferentes subredes con una estructura dada), y estudiar así el papel que juega la estructura mesoscópica en el contexto del juego evolutivo del dilema del prisionero.

##### A. Red de Erdős-Rényi y red de Barabási-Albert

Definimos una red de Erdős-Rényi  $G_{ER}(N, p)$ , donde  $N$  es el número de nodos y  $p$  la probabilidad de que se conecten un par de nodos. Se trata de un modelo clásico de red aleatoria. Las principales propiedades que pretendemos estudiar son:

- **Grado medio de la red  $\langle k \rangle$ .** Número promedio de conexiones por nodo, que viene definido como:

$$\langle k \rangle = p(N - 1), \quad N \gg 1 \rightarrow pN$$

- **Distribución del grado  $P(k)$ .** En el limite de  $N \rightarrow \infty$  y para valores pequeños de  $p$ , la distribución del grado sigue una distribución de Poisson:

$$P(k) = \frac{\langle k \rangle e^{-\langle k \rangle}}{k!}$$

y en una distribución de Poisson se cumple que:

$$\text{Var}(k) = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = \langle k \rangle$$

En este tipo de redes, la varianza del grado es igual al grado medio.

- **Coficiente de agrupamiento  $C$ .** Probabilidad de que dos vecinos de un nodo estén conectados:

$$C = p = \frac{\langle k \rangle}{N}$$

- **Fraccion de cooperadores  $\rho(b, t)$ :**

$$\rho(t) = \frac{N_C(t)}{N}$$

Donde  $N_C(t)$  es el número de cooperadores en el instante  $t$ , parámetro el cual ya hemos utilizado anteriormente.

Definimos una red de Barábasi-Albert  $G_{BA}(N_0, m)$  donde  $N_0$  es el número de nodos iniciales y  $m$  es el parámetro de crecimiento para esta red, que es el número de enlaces por nodo. Cada nuevo nodo que se agrega conecta sus enlaces a nodos ya existentes con probabilidad proporcional al grado (número de conexiones) de esos nodos, esto da como resultado que se formen nodos con muchos más enlaces que la mayoría, generando una distribución de grado tipo ley de potencia. Esta red es importante ya que captura la heterogeneidad realista que no está presente en modelos simples como la red de Erdős-Rényi y además permite estudiar fenómenos donde la estructura topológica tiene fuerte impacto como en las dinámicas de cooperación y competencia. Las propiedades principales de esta red se definen igual que en la red de Erdős-Rényi.

Para la obtención la transición de fase de ambas redes estudiamos, de manera similar a la sección (III), el comportamiento de  $\rho(t)$  frente al parámetro de tentación  $b$ , como se aprecia en la figura (5). Hemos hecho los cálculos para una probabilidad inicial de cooperación del 50%, una probabilidad de enlace en la red Erdős-Rényi del 2% y un parámetro de crecimiento para la red de Barábasi-Albert  $m = 4$ , con 800 nodos iniciales, haciendo evolucionar el sistema hasta un total de 300 nodos más. Como se puede observar, la red ER mantiene  $\rho = 1$  (cooperación

total) hasta que  $b = 1.00$  aproximadamente, donde a partir de  $b \approx 1.20$  la cooperación cae abruptamente y para  $b > 1.33$  se aproxima a cero con mucha dispersión. Esto indica un umbral crítico, donde la cooperación colapsa y se produce la transición de fase.

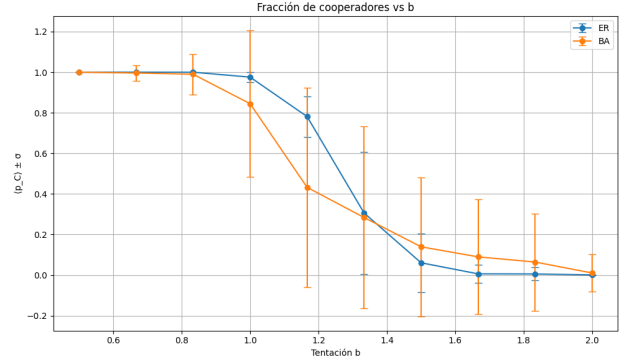


FIG. 5.  $\rho_c(t)$  frente a  $b$ . Podemos ver una transición de fase similar a la obtenida anteriormente, aunque para valores de  $b$  distintos. Vemos cómo el régimen caótico aumenta la variabilidad en la transición.

En la red BA la cooperación también es alta, hasta  $b < 1.00$ , pero tenemos un descenso más gradual que comienza en  $b \approx 1.1$ , valor el cual definimos como umbral crítico de la red.

Que el umbral crítico sea mayor en las redes ER que en las BA nos indica que las redes ER son más resistentes a la traición, y pueden mantener la cooperación estable hasta niveles más altos de  $b$ . Esto es debido a que las estructuras de las redes BA son más heterogéneas y centralizadas, con nodos que pueden influir más rápidamente en la propagación de la estrategia defectora, mientras que las redes ER son muy homogéneas, ayudando a contener la difusión de la traición y provocando que los cooperadores colapsen más tarde. Como ya hemos dicho antes los umbrales críticos del parámetro  $b$  para cada red son:

- $b_c(\text{ER}) = 1.33$
- $b_c(\text{BA}) = 1.17$

En las figuras (6),(7) se muestra el comportamiento del coeficiente de agrupamiento  $C$  y la varianza del grado  $\text{Var}(k)$  en función de  $b$ , respectivamente.

La varianza del grado es consistentemente mayor en las redes BA que en las redes RE, reflejando la heterogeneidad característica de las redes BA y la homogeneidad relativa de las redes ER. Con respecto al clustering  $C$ , éste oscila entorno a  $C = 0.06$  para la red ER y  $C = 0.02$  para el caso de la red BA, manteniéndose constante con  $b$ , lo cual tiene sentido y concuerda con la naturaleza topológica fija de la red, confirmando que la evolución de estrategias no altera la estructura local de vecindad—esto es, aunque las estrategias de cada vecino cambie, la conexión que mantiene con el resto de los jugadores de la red sigue siendo la misma.



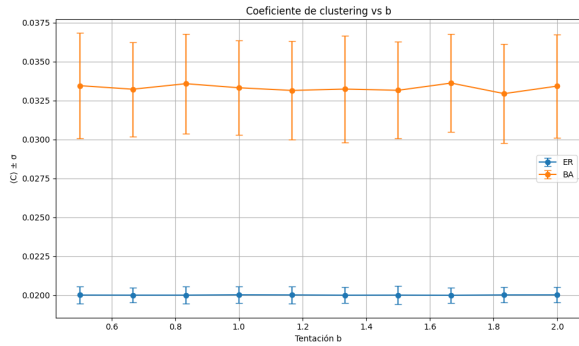


FIG. 6. Clustering  $C$  frente a  $b$  para las redes ER y BA. Vemos cómo la incertidumbre en el caso de la red BA es muy superior.

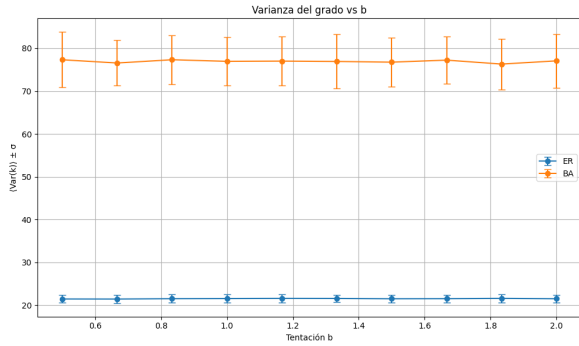


FIG. 7. Varianza del grado  $\text{Var}(k)$  frente a  $b$ . De nuevo, la incertidumbre en los resultados de la red BA resulta en valores muy superiores a la red ER.

Las grandes desviaciones estándar obtenidas en las simulaciones son características esperadas del sistema en esta clase de dinámicas estocásticas, cuyas razones claves son las siguientes:

### 1. Zona de transición de fase:

Para valores bajos de  $b$  la cooperación es estable, pero para valores altos la cooperación colapsa. Entre medio estamos en una zona crítica ( $b \in [1, 1.5]$ ) donde algunas simulaciones caen a cooperación total y otras terminan con deserción total cuyo resultado es una distribución bimodal la cuál sabemos que tiene una alta varianza. Esto es análogo a lo que sucedía en el inset de la figura (3) cuando entrábamos en el régimen caótico de dicha red.

### 2. Topología de la red:

En redes BA, la heterogeneidad del grado aumenta la sensibilidad del azar, lo que produce una mayor dispersión. Sin embargo como se observa en las redes ER este comportamiento es más contenido.

### 3. Naturaleza estocástica del modelo:

Tenemos un modelo con estados iniciales aleatorios, mutaciones aleatorias, adición aleatoria de nodos

y conexiones y una dinámica dependiente de vecinos aleatorios. Todo esto contribuye a que el comportamiento final sea altamente variable, especialmente cerca del umbral crítico, donde el régimen caótico hace que las simulaciones se diferencien más entre ellas, aumentando la incertidumbre final.

Hemos llevado a cabo este estudio a través de los artículos [11], [12], y los resultados de la simulación están recogidos en la tabla (II).

## B. Red de comunidades

Vamos a mostrar cómo la estructura mesoscópica—concretamente la presencia de comunidades—afecta a la dinámica evolutiva del dilema del prisionero. Las redes de comunidades son redes divididas en subredes densamente conectadas internamente y solo débilmente conectadas entre sí. En este modelo deberíamos observar que las comunidades actúan como refugios locales de cooperación. Aunque la cooperación se extinga en otras partes de la red, podría sobrevivir dentro de comunidades suficientemente cohesivas. Además, cuando la conexión entre comunidades es débil la propagación de estrategias deflectoras se deberá ver ralentizada.

Una de las características principales que determinan la cooperación en las redes de comunidades es la modularidad de la red, que se trata de la medida cuantitativa del grado de partición de la comunidad, la cual se relaciona positivamente con la persistencia de la cooperación [11]. Redes con modularidad intermedia presentan un equilibrio: comunidades suficientemente grandes y conectadas para sostener cooperación, pero también suficientemente separadas para evitar que la deflexión se propague fácilmente. La modularidad  $Q$  viene definida como:

$$Q = \frac{1}{2m} \sum_{i,j} \left( A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m} \right) \delta(c_i, c_j) \quad (6)$$

Donde  $m$  es el numero total de enlaces de la red,  $A_{ij} = 1$  si hay enlace entre los nodos  $i, j$  y  $A_{ij} = 0$  si no lo hay.  $k_i$  es el grado del nodo  $i$  y  $c_i$  comunidad a la que pertenece el nodo  $i$ .

Cuando  $Q$  toma valores entorno a cero indica que la partición no es mejor que una aleatoria, en el sentido que la red está muy mezclada y no hay regiones de estrategias bien definidas, mientras si toma valores altos—entorno a 0.3 y 0.4—indica comunidades bien definidas.

La conexión entre comunidades permite cierta difusión, pero si son demasiados numerosas o fuertes, las estrategias deflectoras pueden infiltrarse fácilmente y romper la cooperación. Para mostrar todo lo que hemos dicho vamos a hacer una simulación a través de una red de comunidades creada a través de la librería de python `networkx` donde la función `networkx.stochasticblockmodel` crea una red de comunidades con modelo de bloques estocásticos, lo cuál es ideal para representar estructura

mesoscópica como se hace en [13]. Para hacer los cálculos aplicamos lo explicado en las redes de ER y BA y graficamos la red de comunidades junto a estas redes para observar la diferencia entre las 3 tomando los siguientes parámetros iniciales:

- Nodos iniciales = 400
- $T = 100$  (evoluciones evolutivas)
- Una probabilidad inicial de cooperar del 50%
- 8 comunidades
- 50 nodos por comunidad
- Una probabilidad de conexión dentro de las comunidades del 30%
- Una probabilidad de conexión entre comunidades del 1%

Podemos observar la densidad de cooperadores en la figura (8), mientras que en la figura (9) se muestra la modularidad en función de  $b$ .

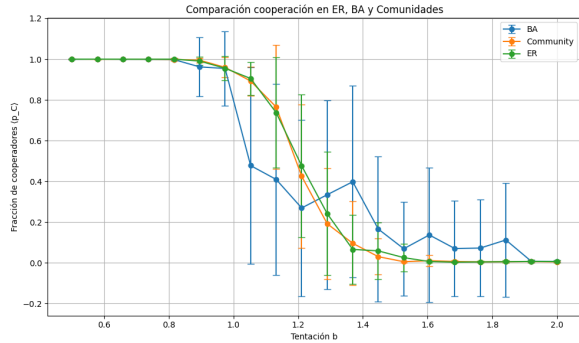


FIG. 8. Fracción de cooperadores frente a  $b$  para la red de comunidades, la red de Erdős-Rényi y la red de Barabasi-Albert. De nuevo se observa una transición de fase entorno a  $b \approx 1$ .

Como podemos ver, tanto en la red de comunidades como en la red de ER la cooperación es sostenida hasta alrededor de  $b \approx 1$ , pero la caída de la red de comunidades es más suave y menos abrupta, aunque estas diferencias no son muy notables. Bien es cierto que en la red de comunidades parece que el ruido es bastante superior, pues en cada simulación las comunidades que se crean varían, y ya sabemos que la persistencia de los agentes C depende en gran medida de su localización. El umbral crítico está alrededor de 1.1 para la red de comunidades, y lo que determina la diferencia entre las dos (ER y comunidades) será la modularidad, que es la que indica la persistencia de cooperación en las redes. Aunque el umbral crítico sea similar al de la red de ER, la cooperación se mantiene de forma más robusta y menos dispersa hasta valores altos de  $b$ , lo que sugiere que la existencia de comunidades fomenta refugios de cooperación que retrasan la transición hacia la dominancia de la defección. La cooperación en

comunidades parece sostenerse mucho mejor, y ahora se mantiene entorno al 10% para estos valores.

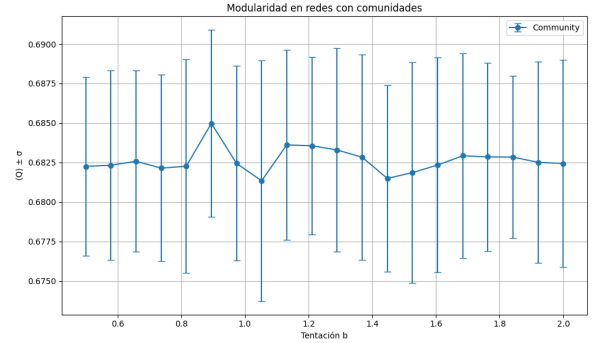


FIG. 9. Modularidad  $Q$  de la red de comunidades para distintos valores de  $b$ . Vemos cómo, salvo ciertas anomalías achacadas a la estocasticidad del modelo ésta parece mantenerse constante.

En cuanto a la modularidad en la figura (9), aunque perdemos la cooperación general para  $b \geq 1.2$ ,  $Q$  se mantiene alta ( $Q \approx 0.68 - 0.70$ ) lo que muestra una evidencia de refugios locales. Por lo tanto, las redes actúan como estructuras de soporte que impiden el colapso total, al permitir que los cooperadores persistan en subgrupos conectados, cosa que ya hemos comentado en la sección (III).

También podemos estudiar el efecto de cambiar el número de comunidades y de cambiar la probabilidad de conexión entre comunidades; en teoría debemos ver los siguientes resultados:

- Más comunidades  $\rightarrow$  más aislamiento cooperativo  $\rightarrow$  mayor  $b_c$ .
- Menor probabilidad de conexión entre comunidades  $\rightarrow$  menos conexión entre comunidades  $\rightarrow$  mayor  $b_c$
- Mayor probabilidad de conexión entre comunidades  $\rightarrow$  más difusión de estrategias entre comunidades  $\rightarrow$  menor  $b_c$

Absteniéndonos de mostrar las figuras, que no aportan mucha información en este caso, presentamos los resultados generales de manera numérica:

TABLE I. Umbral crítico de cooperación  $b_c$  en función del número de comunidades y la probabilidad de conexión entre comunidades  $p_{out}$ .

Nº de comunidades	$p_{out}$	$b_c$
5	0.01	1.21
5	0.05	1.05
10	0.01	1.29
10	0.05	1.13
20	0.01	1.29
20	0.05	1.05



Se observa claramente lo que hemos explicado anteriormente. Hemos llevado a cabo este estudio con la ayuda de los artículos [13], [14]. Los datos de la simulación se observan en el apéndice en la tabla III.

## V. ESTUDIO DE LA PROMOCIÓN DE LA COOPERACIÓN MEDIANTE AGENTES CASTIGADORES EN UN JUEGO PGG MEDIANTE SIMULACIONES MONTE CARLO

Si bien es cierto que nuestros resultados obtenidos hasta ahora nos han dejado claro en qué condiciones la cooperación puede florecer en un juego de dilema del prisionero clásico, en esta sección pretendemos descubrir qué factores o variantes en una red pueden potenciar su florecimiento. Para ello, dejamos de lado el juego anterior y nos centramos en una variante, el juego de los bienes públicos, o PGG, *Public Goods Game* [15]. Basándonos principalmente en la dinámica especificada en [6], en este juego hay tres estrategias: las ya introducidas de cooperación y deflexión (C, D), y una nueva estrategia de un agente castigador o *punisher* (P), el cual pretende representar la acción de terceros en la disputa entre las dos estrategias, como bien puede darse en sociedades humanas, donde la intervención del estado puede afectar el desenlace de la disputa. A esos efectos, el agente P, cuando juegue contra un deflector D podrá castigarlo con una probabilidad dada por:

$$f_i(t) = f_0^{1/(X_i(t)+1)}$$

donde  $f_0$  es la probabilidad base para el castigo, mientras que  $X_i(t)$  es un parámetro que encierra el historial de cada jugador. Esta parametrización pretende que sea más probable castigar a jugadores que han defraudado en repetidas ocasiones que a aquellos que lo hacen por primera vez.  $X_i(t)$  viene dado por:

$$X_i(t+1) = \begin{cases} X_i(t) + 1 & \text{si } S_i(t) = D \\ 0 & \text{si } S_i(t) = C, P \end{cases}$$

Vemos como, cuantas más rondas seguidas un jugador haya estado siguiendo la estrategia D, más probable es que sea castigado al encontrarse con un agente P.  $S_i(t)$  representa la estrategia del jugador  $i$  en el tiempo  $t$ , con  $S_i(t) \in \{C, D, P\}$ .

Si bien en el juego del dilema del prisionero podíamos hacer una analogía de las dos estrategias como genes que compiten por manifestarse o aspectos puramente biológicos, en este juego la mejor analogía es el pago de impuestos por una sociedad humana. En efecto, manteniendo  $k = 8$  en la red, tenemos que las ganancias de cada estrategia vienen dadas por

$$\begin{cases} \pi_c = \frac{r(n_c+n_p)}{9} - 1 \\ \pi_d = \frac{r(n_c+n_p)}{9} - \beta n_p^i \\ \pi_p = \frac{r(n_c+n_p)}{9} - 1 - \mu \alpha n_p^i \end{cases}$$

Aquí,  $n_c$  y  $n_p$  representan el número de cooperadores y castigadores en el vecindario del jugador que estamos estudiando (cada vecindario está compuesto por 9 jugadores, el propio jugador central y sus 8 vecinos). En cada partida cada cooperador y castigador "aportan" a las arcas del estado, y se reparten las ganancias equitativamente entre sí, las cuales se multiplican por un factor  $r$  que pretende incitar esta estrategia. Sin embargo, deben retirarse 1 unidad por el hecho de que han aportado dinero al bien común. Por otro lado, el deflector D no aporta nada y sigue llevándose el beneficio que aportan los impuestos pagados por el resto. Los factores  $n_p^i$  y  $n_D^i$  indican cuántas veces un deflector ha sido castigado por un agente P, y a cuántos deflectores un agente P ha castigado en una ronda, respectivamente.  $\beta, \alpha$  son parámetros numéricos para controlar cada término. Por otro lado,  $\mu$  pretende cuantificar la "reputación" de cada jugador:

$$\mu = 1 - \frac{R_{\text{sum}}}{9R_{\text{max}}}$$

Donde  $R_{\text{sum}}$  es la reputación de todos los vecinos, y  $R_{\text{max}}$  un valor máximo al que puede llegar la reputación, el cual no parece afectar a los resultados [6]. La reputación viene dada por:

$$R_i(t+1) = \begin{cases} R_i(t) + 1 & \text{si } S_i(t) = C \\ R_i(t) - 1 & \text{si } S_i(t) = D \\ R_i(t) + T & \text{si } S_i(t) = P \end{cases}$$

Donde  $T \in \mathbb{N}^+$  es un parámetro que regula cómo aumenta la reputación de los jugadores P cada ronda.

Este juego se ha simulado mediante técnicas Monte Carlo. Eligiendo un jugador  $i$  y uno de sus vecinos  $j$  al azar en la red se juega una partida, y el jugador  $i$  adoptará la estrategia de su rival con una probabilidad dada por la distribución de Fermi:

$$P(S_i \leftarrow S_j) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\pi_i - \pi_j}{K}\right)}$$

donde  $K = 0.5$  para seguir el artículo, buscando un balance entre la estocasticidad del sistema y lo significativo que queramos que sean las ganancias para el resultado. Este juego, a diferencia del anterior, se actualiza de manera asíncrona (solamente un jugador por ronda, y en promedio toda la red en cada paso MC).

Como alternativa a lo que se estudia en [6], hemos propuesto introducir una variante nueva en nuestra red, la cual pretende afianzar las alianzas que forman los jugadores C y P. A esos efectos, definimos una nueva reputación de cooperadores,  $M_i(t)$ . De manera análoga a  $X_i(t)$  la definimos como:

$$M_i(t+1) = \begin{cases} M_i(t) + 1 & \text{si } S_i(t) = C \\ 0 & \text{si } S_i(t) = D, P \end{cases}$$

Si definimos un umbral  $m_C$ , para aquellos cooperadores con  $M_i \geq m_C$  abrimos la posibilidad de que puedan intercambiar su posición con la posición del castigador P

vecino el cual les permita obtener la mejor ganancia previo al juego. Este parámetro pretende incrementar la simbiosis entre agentes C y P, con lo cual queremos ver si esta movilidad que se les permite a los cooperadores habituales promoverá un aumento de la población de C en la red al comparar con el modelo estudiado en [6]. Nos interesamos en el estudio de la red para diversos valores del parámetro  $m_C$ . Esta alteración pretende dar un rol más activo a los agentes C y P, dado que ahora los cooperadores pueden tomar decisiones que beneficien su futuro, utilizando el crédito positivo que han ido acumulando.

Para acelerar la computación hemos optado por una red de  $100 \times 100$  con condiciones de contorno periódicas. Inicialmente las estrategias se asignan de manera aleatoria, la reputación  $R_i(0)$  de cada individuo también es aleatoria entre 0 y  $R_{\max}$ , y  $X_i(0) = M_i(t) = 0 \forall i$ . Se realizan  $10^4$  pasos Monte Carlo, y se promedian cinco simulaciones. En la figura (10) se muestra la densidad de las tres especies que intervienen, además de la ganancia promedio por cada paso MC de los agentes C y P para  $m_C = 2$  y  $m_C = 5$ . Podemos ver comportamientos simi-

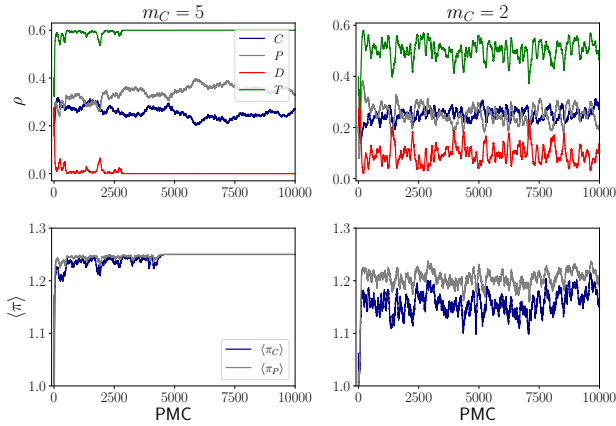


FIG. 10. Resultados de las simulaciones para  $m_C = 5$  y  $m_C = 2$ , tras  $10^4$  PMC. En ambos casos se tiene que  $f_0 = 0.3$ ,  $r = 3.5$ ,  $\beta = 0.6$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $K = 0.5$ ,  $R_{\max} = 100$  y  $T = 5$ . En los dos paneles superiores se muestran las densidades de las tres especies, además de la densidad T, que es la suma de la densidad de agentes C y P. En los dos paneles inferiores se muestran las ganancias promedio de las especies C y P a lo largo de las rondas. Notar que hemos prescindido de las ganancias de los agentes D, pues en muchas partes del programam en alguna de las simulaciones sobre las que se promedia caían a cero y esta cantidad dejaba de estar definida.

lares y distintos entre ambos. Para el valor más pequeño de  $m_C$  la estocasticidad y ruido presente en el sistema es mucho más elevado. Para  $m_C = 5$  vemos también un cierto nivel de variabilidad, pero éste se ve mucho más apagado. En ambos casos la densidad de cooperadores parece variar alrededor de  $\rho_C \approx 0.3$ , si bien para  $m_C = 2$  el caminante aleatorio parece seguir una tendencia más predecible.

Por otro lado, en las ganancias podemos ver cómo los

agentes P obtienen siempre valores iguales o superiores a los de C. La explicación de esto creemos que radica en el hecho de que, para una partida donde hay defectores, los agentes P siempre acabarán obteniendo mejores ganancias que los cooperadores, pues el régimen de castigo los beneficia. Por ello, poco después de que caiga a cero el número de defectores en el caso  $m_C = 5$  las ganancias de ambos se igualan. En ambas simulaciones las ganancias parecen oscilar entorno a  $\langle \pi \rangle \approx 1.2$ , si bien es cierto que para  $m_C$  mayor parece ser un poco más elevado.

Quizá la diferencia más llamativa entre ambos resultados es que, para  $m_C$  menor los agentes D parecen sobrevivir a lo largo de las rondas. Esto podría parecer contraintuitivo a primera vista, pues para un valor menor de éste parámetro habrá más cooperadores que puedan verse beneficiados de la simbiosis con los agentes P. Sin embargo, hemos de volver a la conclusión central que hemos sacado de este trabajo: la cooperación se beneficia de vivir en comunidades. Para un parámetro  $m_C$  menor, es cierto que los cooperadores van a poder intercambiarse con agentes P con más facilidad, pero esto acarreará que se rompan los núcleos que han formado y les han permitido sobrevivir. Aunque a corto plazo sea beneficioso salir de la comunidad para obtener una ganancia superior, si todos los cooperadores siguen esta tendencia tenderemos hacia una red más homogénea y con menos cúmulos, que como hemos visto en las secciones (III),(IV B) promueve la aparición de la deflexión. Este comportamiento puede verse como la desaparición de pueblos rurales. Lo que los mantiene vivos son sus habitantes, pero si todos migran buscando una vida en ciudades más pobladas y centrales, el pueblo acabará desapareciendo.

Creemos que esta parte del trabajo puede ser mucho más explotada, pero por falta de espacio y tiempo hemos de quedarnos con estas conclusiones que, aunque breves, dan un nuevo punto de vista a la emergencia de la cooperación y a sus limitaciones.

## VI. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos defendido la necesidad de comunidades para la aparición de la cooperación. Esto se ha conseguido desde el punto de vista tradicional y más tarde mediante el uso de redes complejas. También se han dado argumentos sólidos para la aparición de un régimen caótico en cierto rango del parámetro  $b$ . Se ha llegado a la conclusión de que un aumento en la probabilidad de conexión entre comunidades C resulta en un parámetro  $b_c$  inferior, mientras que un aumento en el número de éstas lo aumenta. Finalmente, hemos encontrado indicios de que la sinergia entre agentes C y P en un juego PGG mediante una técnica de intercambio es beneficiosa hasta cierto punto para los agentes C, los cuales pueden verse demasiado incitados a mudarse de la comunidad que los protege frente a los defectores, haciendo que éstos puedan prosperar y no terminar de extinguirse, incluso con la presencia de los agentes P.

- 
- [1] M. A. Nowak and R. M. May, enEvolutionary games and spatial chaos, *Nature* **359**, 826 (1992), publisher: Nature Publishing Group.
  - [2] M. A. Nowak and R. M. May, The spatial dilemmas of evolution, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **03**, 35 (1993), publisher: World Scientific Publishing Co.
  - [3] C. P. Roca, J. A. Cuesta, and A. Sánchez, Evolutionary game theory: Temporal and spatial effects beyond replicator dynamics, *Physics of Life Reviews* **6**, 5 (2009).
  - [4] J. Quan, H. Li, M. Zhang, and X. Wang, Cooperation dynamics in nonlinear spatial public goods games with endogenous synergy and discounting feedback, *Chaos, Solitons & Fractals* **178**, 114359 (2024).
  - [5] H. Brandt, C. Hauert, and K. Sigmund, Punishment and reputation in spatial public goods games, *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences* **270**, 1099 (2003).
  - [6] Y. Zhang, Z. Zheng, X. Zhang, and J. Ma, Dynamic punishment-reputation synergy drives cooperation in spatial public goods game, *Applied Mathematics and Computation* **506**, 129545 (2025).
  - [7] J. von Neumann, O. Morgenstern, and A. Rubinstein, *Theory of Games and Economic Behavior (60th Anniversary Commemorative Edition)* (Princeton University Press, 1944).
  - [8] P. D. Taylor and L. B. Jonker, Evolutionary stable strategies and game dynamics, *Mathematical Biosciences* **40**, 145 (1978).
  - [9] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2nd ed. (CRC Press, Boca Raton, 2018).
  - [10] G. Alfaro and M. A. F. Sanjuán, Hamming distance as a measure of spatial chaos in evolutionary games, *Physical Review E* **109**, 014203 (2024), arXiv:2311.08119 [physics].
  - [11] F. C. Santos and J. M. Pacheco, Scale-Free Networks Provide a Unifying Framework for the Emergence of Cooperation, *Physical Review Letters* **95**, 098104 (2005), publisher: American Physical Society.
  - [12] G. Szabó and G. Fáth, Evolutionary games on graphs, *Physics Reports* **446**, 97 (2007).
  - [13] S. Lozano, A. Arenas, and A. Sánchez, engMesoscopic structure conditions the emergence of cooperation on social networks, *PloS One* **3**, e1892 (2008).
  - [14] M. Perc and A. Szolnoki, Coevolutionary games—A mini review, *Biosystems* **99**, 109 (2010).
  - [15] Y. Dong, B. Zhang, and Y. Tao, enThe dynamics of human behavior in the public goods game with institutional incentives, *Scientific Reports* **6**, 28809 (2016), publisher: Nature Publishing Group.

### Appendix A: Tablas de datos específicos de las simulaciones y material extra

En la entrega del trabajo se adjuntan dos GIFs para ilustrar la evolución de las redes en la sección(III). En las matrices que aparecen aquí se puede ver el estado final de la red para las dos simulaciones llevadas a cabo en la figura (10), con  $m_C = 5$  (izquierda) y  $m_C = 2$  (derecha). Podemos ver el caso en el que los deflectores no desaparecen, como ya se ha comentado en el trabajo.

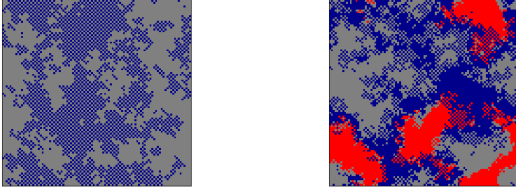


TABLE II. Resultados promedio sobre 200 simulaciones para redes Erdős-Rényi (ER) y Barabási-Albert (BA).

Red	b	$\langle p_C \rangle \pm \sigma$	Var(k)	$\langle C \rangle$
ER	0.50	$1.000 \pm 0.000$	21.42	0.02
ER	0.67	$1.000 \pm 0.000$	21.41	0.02
ER	0.83	$1.000 \pm 0.000$	21.49	0.02
ER	1.00	$0.976 \pm 0.026$	21.53	0.02
ER	1.17	$0.781 \pm 0.100$	21.56	0.02
ER	1.33	$0.306 \pm 0.302$	21.55	0.02
ER	1.50	$0.061 \pm 0.145$	21.47	0.02
ER	1.67	$0.006 \pm 0.044$	21.50	0.02
ER	1.83	$0.006 \pm 0.032$	21.57	0.02
ER	2.00	$0.001 \pm 0.001$	21.48	0.02
BA	0.50	$1.000 \pm 0.001$	77.33	0.03
BA	0.67	$0.996 \pm 0.039$	76.57	0.03
BA	0.83	$0.990 \pm 0.099$	77.33	0.03
BA	1.00	$0.845 \pm 0.361$	76.96	0.03
BA	1.17	$0.432 \pm 0.493$	77.01	0.03
BA	1.33	$0.284 \pm 0.448$	76.93	0.03
BA	1.50	$0.139 \pm 0.343$	76.77	0.03
BA	1.67	$0.090 \pm 0.282$	77.24	0.03
BA	1.83	$0.064 \pm 0.240$	76.32	0.03
BA	2.00	$0.010 \pm 0.093$	77.07	0.03

TABLE III. Resultados de  $p_C$  y modularidad  $Q$  para distintas redes y valores del parámetro  $b$ .

Red	$b$	$p_C$	$Q$
ER	0.50	$0.999 \pm 0.001$	NA
ER	0.58	$1.000 \pm 0.001$	NA
ER	0.66	$1.000 \pm 0.001$	NA
ER	0.74	$1.000 \pm 0.001$	NA
ER	0.82	$0.996 \pm 0.018$	NA
ER	0.89	$0.983 \pm 0.043$	NA
ER	0.97	$0.944 \pm 0.051$	NA
ER	1.05	$0.881 \pm 0.111$	NA
ER	1.13	$0.704 \pm 0.288$	NA
ER	1.21	$0.333 \pm 0.355$	NA
ER	1.29	$0.115 \pm 0.248$	NA
ER	1.37	$0.047 \pm 0.134$	NA
ER	1.45	$0.026 \pm 0.081$	NA
ER	1.53	$0.036 \pm 0.094$	NA
ER	1.61	$0.011 \pm 0.033$	NA
ER	1.68	$0.012 \pm 0.039$	NA
ER	1.76	$0.004 \pm 0.004$	NA
ER	1.84	$0.012 \pm 0.028$	NA
ER	1.92	$0.012 \pm 0.029$	NA
ER	2.00	$0.006 \pm 0.005$	NA
BA	0.50	$0.996 \pm 0.016$	NA
BA	0.58	$0.997 \pm 0.013$	NA
BA	0.66	$0.987 \pm 0.068$	NA
BA	0.74	$0.982 \pm 0.088$	NA
BA	0.82	$0.973 \pm 0.143$	NA
BA	0.89	$0.961 \pm 0.131$	NA
BA	0.97	$0.997 \pm 0.006$	NA
BA	1.05	$0.633 \pm 0.456$	NA
BA	1.13	$0.414 \pm 0.478$	NA
BA	1.21	$0.372 \pm 0.467$	NA
BA	1.29	$0.373 \pm 0.472$	NA
BA	1.37	$0.136 \pm 0.327$	NA
BA	1.45	$0.113 \pm 0.293$	NA
BA	1.53	$0.104 \pm 0.290$	NA
BA	1.61	$0.138 \pm 0.331$	NA
BA	1.68	$0.073 \pm 0.241$	NA
BA	1.76	$0.019 \pm 0.059$	NA
BA	1.84	$0.008 \pm 0.005$	NA
BA	1.92	$0.094 \pm 0.261$	NA
BA	2.00	$0.009 \pm 0.008$	NA
Comunidad	0.50	$0.999 \pm 0.001$	0.6824
Comunidad	0.58	$1.000 \pm 0.000$	0.6789
Comunidad	0.66	$0.999 \pm 0.001$	0.6829
Comunidad	0.74	$0.999 \pm 0.001$	0.6808
Comunidad	0.82	$0.996 \pm 0.016$	0.6820
Comunidad	0.89	$0.989 \pm 0.021$	0.6855
Comunidad	0.97	$0.968 \pm 0.034$	0.6749
Comunidad	1.05	$0.922 \pm 0.051$	0.6789
Comunidad	1.13	$0.719 \pm 0.330$	0.6837
Comunidad	1.21	$0.455 \pm 0.378$	0.6819
Comunidad	1.29	$0.211 \pm 0.276$	0.6844
Comunidad	1.37	$0.088 \pm 0.191$	0.6697
Comunidad	1.45	$0.040 \pm 0.102$	0.6875
Comunidad	1.53	$0.027 \pm 0.082$	0.6799
Comunidad	1.61	$0.006 \pm 0.005$	0.6747
Comunidad	1.68	$0.005 \pm 0.005$	0.6866
Comunidad	1.76	$0.004 \pm 0.004$	0.6919
Comunidad	1.84	$0.006 \pm 0.005$	0.6890
Comunidad	1.92	$0.006 \pm 0.005$	0.6806
Comunidad	2.00	$0.008 \pm 0.005$	0.6877