



Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Ingeniería Mecánica.

EJERCICIOS DE TEORÍA DE MÁQUINAS Y MECANISMOS

Juan Carlos García Prada
Cristina Castejón Sisamón
Higinio Rubio Alonso

Índice general

1. INTRODUCCIÓN A LA TMM	4
1.1. Número de Grados de libertad	4
2. RESISTENCIAS PASIVAS	9
3. ANÁLISIS CINEMÁTICO DE MÁQUINAS	15
3.1. Cálculo del CIR	15
3.2. Análisis de velocidades y aceleraciones	19
4. ANÁLISIS DINÁMICO DE MÁQUINAS	24
5. ENGRANAJES	29
5.1. Engranajes: parámetros, diseño y montaje	29
5.2. Trenes de engranajes	31
6. EJERCICIOS DE EXÁMENES	33
6.1. problema de cinemática	33
6.2. Problema de cinemática (Septiembre 2003)	40
6.3. Problema de cinemática y dinámica (Febrero 2004)	41
6.4. Problema de dinámica completo	51
6.5. Problema de engranajes (Junio 2000)	64
6.6. Problema de engranajes (Septiembre 2002)	69
6.7. Problema de engranajes (Junio 2003)	72
6.8. Problema de engranajes (Septiembre 2003)	76
6.9. Problema de engranajes (Febrero 2004)	81
7. CUESTIONES DE TEORÍA	86
7.1. Introducción a la teoría de máquinas y mecanismos	86
7.2. Resistencias Pasivas y principios de lubricación	87
7.3. Análisis cinemático de máquinas	87

7.4. Análisis dinámico de máquinas	88
7.5. Teoría general de engranajes	89

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN A LA TMM

1.1. Número de Grados de libertad

1. En la figura 1.1 se representa un mecanismo con muelle complejo. Su mecanismo simplificado equivalente se presenta en la figura 1.2, donde el resorte se ha reemplazado por dos eslabones binarios y la junta de horquilla por un pasador y una corredera:

- Determine el número de grados de libertad del mecanismo mostrado en la figura 1.1
- resolver el ejercicio anterior para el caso en el que se sustituye el muelle por dos barras binarias (ver figura 1.2)

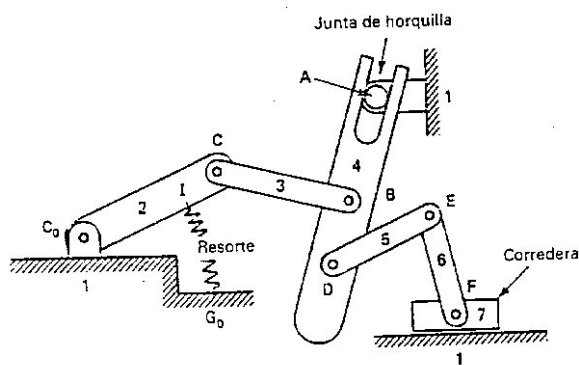


Figura 1.1: Mecanismo.

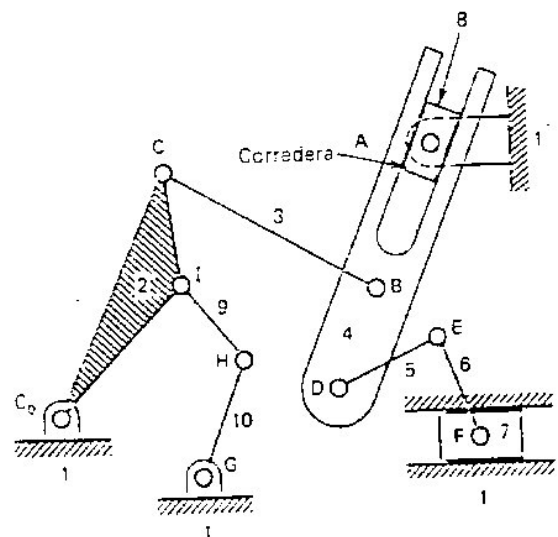


Figura 1.2: Mecanismo esquematizado.

2. Determinar la movilidad o número de grados de libertad de los mecanismos presentados en las siguientes figuras:

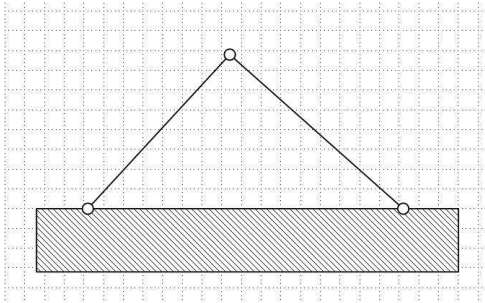


Figura 1.3: Mecanismo.

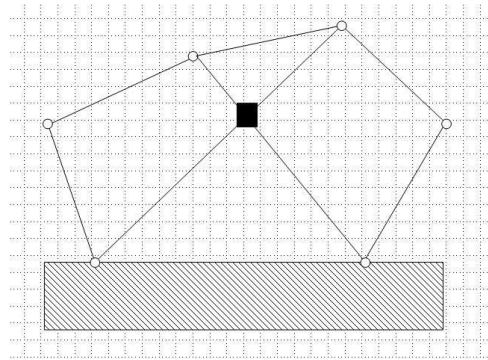


Figura 1.4: Mecanismo.

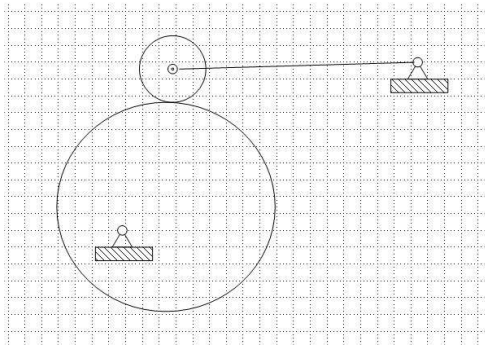


Figura 1.5: Mecanismo.

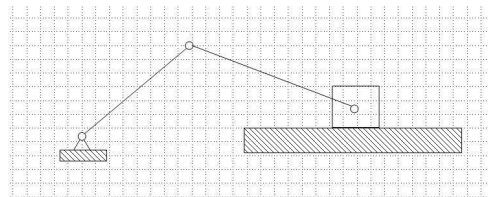


Figura 1.6: Mecanismo.

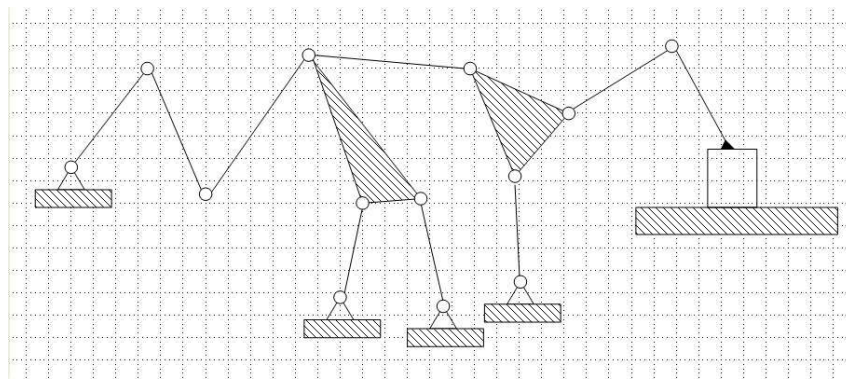


Figura 1.7: Mecanismo.

3. Determinar la movilidad o número de grados de libertad de los mecanismos representados en las siguientes figuras:

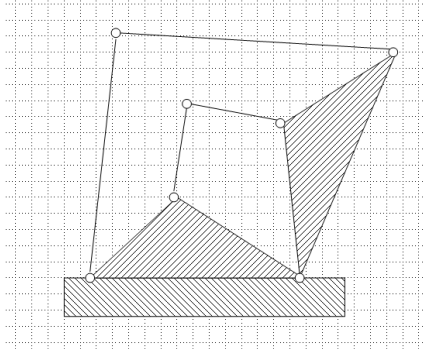


Figura 1.8: Mecanismo.

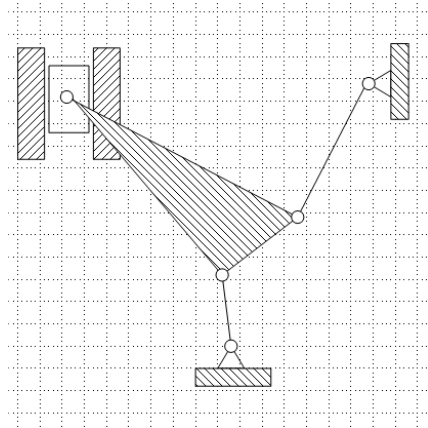


Figura 1.9: Mecanismo.

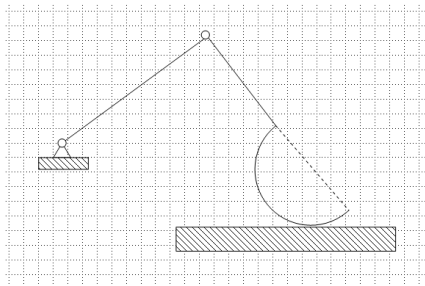


Figura 1.10: Mecanismo.

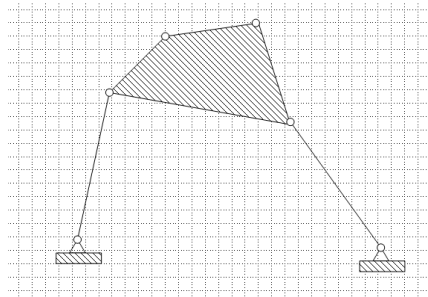


Figura 1.11: Mecanismo.

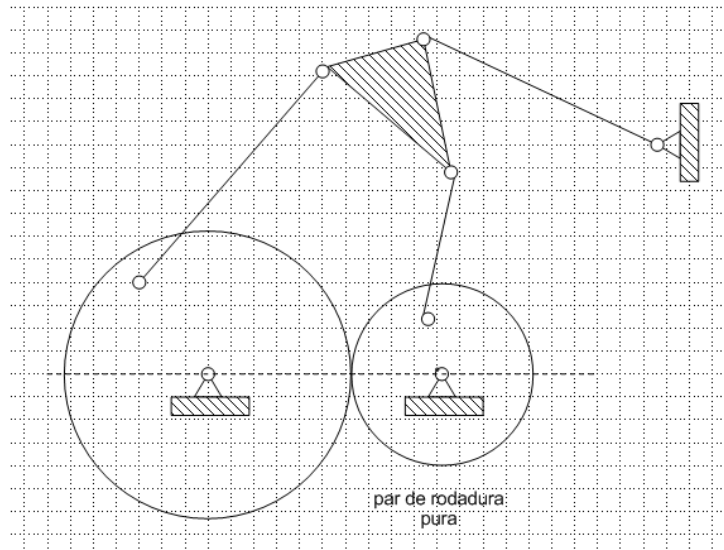


Figura 1.12: Mecanismo.

4. Determinar la movilidad o número de grados de libertad de los mecanismos representados en las siguientes figuras:

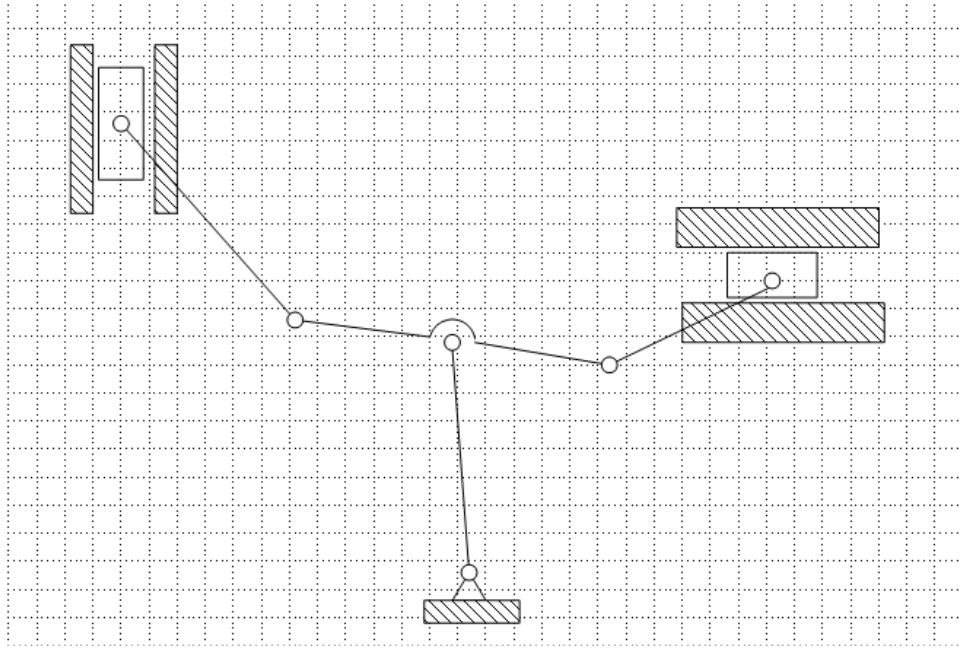


Figura 1.13: Mecanismo.

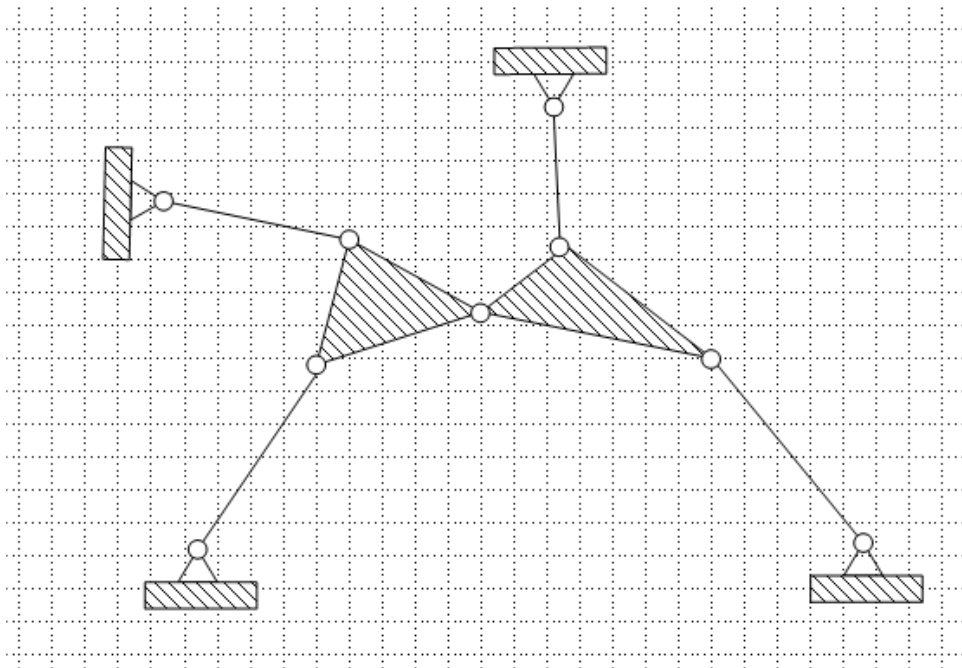


Figura 1.14: Mecanismo.

5. Determinar la movilidad o número de grados de libertad del mecanismo presentado en la figura 1.15:

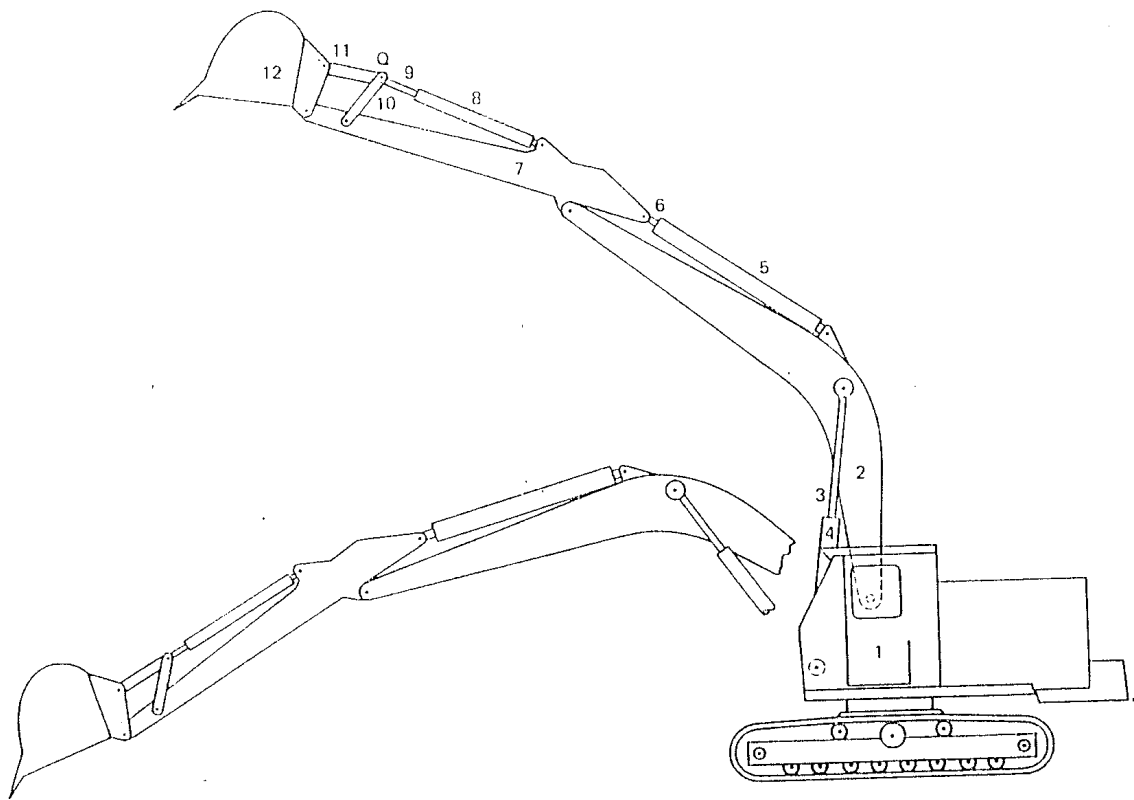


Figura 1.15: Mecanismo.

Capítulo 2

RESISTENCIAS PASIVAS

1. Sea un par plano elemental superior, que consisten en el contacto entre un palpador circular y una guía rectilínea (ver figura 2.2).

- a) Identificar las componentes de rozamiento máximo para las siguientes condiciones:

$$V_{des.rel\ 2-1} = 5\ m/s$$

$$Carga\ vertical = 5000\ N$$

$$\omega_2 = 0,1\ rad/s$$

$$\delta\ (material\ templado) = 0,01\ mm$$

De estudios en el laboratorio se obtiene que la elipse de contacto (real) tiene una longitud de 1 mm.

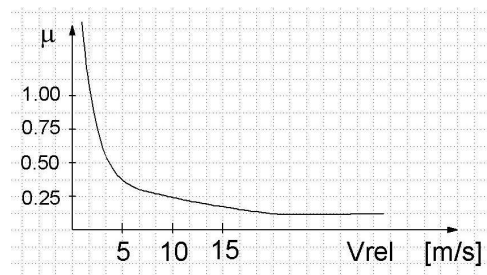


Figura 2.1: Coeficiente de rozamiento al deslizamiento.

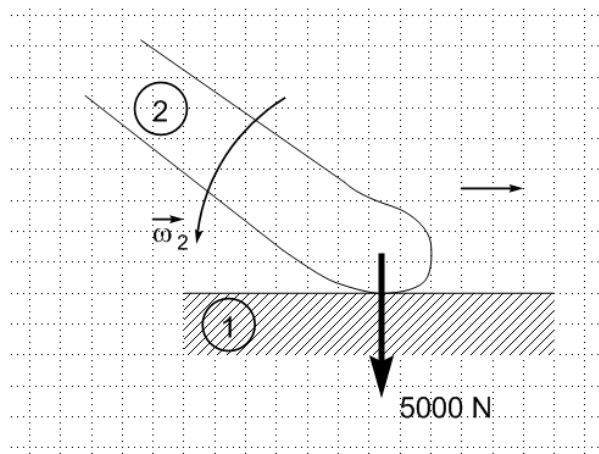


Figura 2.2: Par elemental palpador-guía.

- b) Perpendicularmente al plano existe un carga de P Newtons que se aplica a una distancia de 0.1 m del punto de contacto. Calcular el valor máximo de P para evitar que el eslabón 2 pivote sobre el punto de contacto.

Solución:

- a) Identificar las componentes de rozamiento máximo.

- 1) Rozamiento al deslizamiento: $F_{roz\ desli} = \mu \cdot N$

De la figura 2.3 se obtiene el valor del coeficiente de rozamiento al deslizamiento: $V_{\text{máx}} = 5 \text{ m/s} \Rightarrow \mu = f(V) \Rightarrow \mu = 0,35$

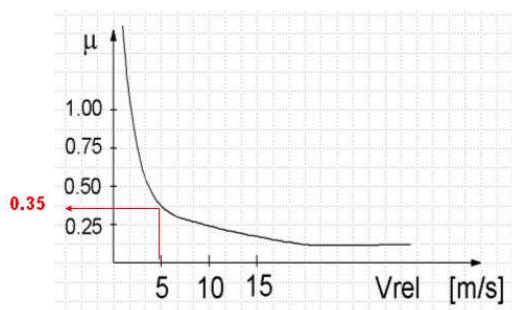


Figura 2.3: Determinación del coeficiente de rozamiento al deslizamiento.

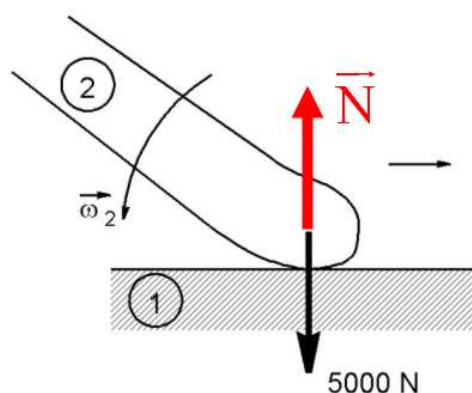


Figura 2.4: El vector normal N se equilibra con el peso del seguidor de contacto.

Y de la figura 2.4 se observa que, para que el contacto esté en equilibrio, el vector normal, que se encuentra en la dirección vertical debe tener el mismo módulo que el peso, por lo tanto: $N = 5000 \text{ Newtons}$

La componente de rozamiento al deslizamiento se resuelve como:

- Módulo: $F_{roz\ desli} = 0,35 \cdot 5000 = 1750 \text{ N}$.
- dirección: tangente al contacto (dirección de deslizamiento: horizontal)
- sentido: el vector se opone al movimiento, por lo tanto hacia la izquierda.

- 2) Rozamiento por rodadura: $\Phi_{rodadura} = \delta \cdot N$

de los datos del enunciado δ (*material templado*) = $0,01 \text{ mm}$ y del apartado anterior $N = 5000 \text{ Newtons}$ se obtiene el par de resistencia a la rodadura:

- Módulo: $\Phi_{rodadura} = 0,01 \cdot 5000 = 50 \text{ N} \cdot \text{mm}$.
- dirección: la de rodadura (perpendicular al plano de trabajo).
- sentido: el vector se opone al movimiento, por lo tanto sentido horario.

3) Resistencia al pivotamiento: (Ley de Hertz) : $\Phi_{pivotamiento} = 0,093 \cdot \mu \cdot l \cdot N$

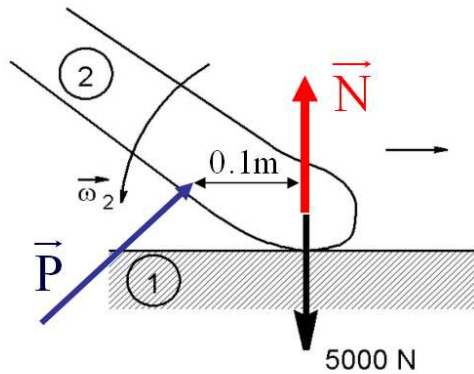
de los datos del enunciado y del primer apartado anterior $\mu = 0,35$ se obtiene el par de resistencia al pivotamiento:

$$\Phi_{pivotamiento} = 0,093 \cdot \mu \cdot l \cdot N = 0,093 \cdot 0,35 \cdot 1 \cdot 5000$$

- Módulo: $\Phi_{pivotamiento} = 162,75 \text{ N} \cdot \text{mm}$.
- dirección: la de pivotamiento.
- sentido: el vector se opone al movimiento de pivotamiento.

b) Calcular el valor máximo de P para evitar que el eslabón 2 pivote sobre el punto de contacto.

El valor máximo de resistencia al pivotamiento es el calculado en el apartado anterior $\Phi_{pivotamiento} = 162,75 \text{ N} \cdot \text{m}$



$$\Phi = P \cdot d$$

$$\Phi_{\text{máx}} = P_{\text{máx}} \cdot d = \Phi_{\text{pivotamiento}}$$

$$P_{\text{máx}} = \frac{\Phi_{\text{pivotamiento}}}{d} = \frac{162,75 \text{ Nmm}}{100 \text{ mm}}$$

Figura 2.5: Contacto palpador-guía, aplicación de una fuerza P.

El valor de la fuerza P máxima para evitar el pivotamiento es $P_{\text{máx}} = 16,275 \text{ N}$

2. Sea una polea de radio $r=0.3$ m. Obtener el grosor de los siguientes órganos deformables :

Tipo	$c \text{ m}^{-1}$
cables metálicos	58
cuerdas de cáñamo	26
cuerdas de cáñamo	18

de manera que el coeficiente de rigidez en cada uno de ellos sea de 0.1

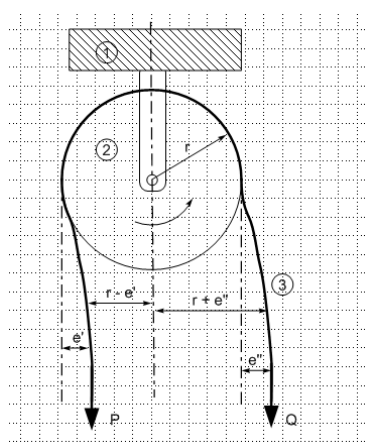
Solución:

De la figura teórica 2.6

$$K = c \cdot \frac{d^2}{2 \cdot r} = 0,1$$

$$d = \sqrt{\frac{2 \cdot r \cdot K}{c}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{\text{metal}} \quad c_{\text{cañamo}} \quad c_{\text{cañamo usada}} \\ d : \text{ grosor de la cuerda} \\ r = 0,3 \text{ m} \end{array} \right.$$



$$d_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot r \cdot K}{c_{\text{metal}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,3 \cdot 0,1}{c_{\text{metal}}}} = \sqrt{\frac{0,06}{c_{\text{metal}}}} = \sqrt{\frac{0,06}{58}} = 0,032 \text{ m}$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot r \cdot K}{c_{\text{cañamo}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,3 \cdot 0,1}{c_{\text{cañamo}}}} = \sqrt{\frac{0,06}{c_{\text{cañamo}}}} = \sqrt{\frac{0,06}{26}} = 0,048 \text{ m}$$

$$d_3 = \sqrt{\frac{2 \cdot r \cdot K}{c_{\text{cañamo usada}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,3 \cdot 0,1}{c_{\text{cañamo usada}}}} = \sqrt{\frac{0,06}{c_{\text{cañamo usada}}}} = \sqrt{\frac{0,06}{18}} = 0,058 \text{ m}$$

Figura 2.6:

3. Se dispone de un par elemental, que consiste en un eje de radio 0.05 m y su correspondiente porta-ejes. En un ensayo de arrancada se observa que, para un peso en el eje de $P=5000$ [N], en el instante de inicio de deslizamiento del eje sobre el porta-ejes, el ángulo que forma la normal con la vertical es de $\varphi = 5^\circ$.

- Calcular el par de arrancada
- Calcular el radio del círculo de rozamiento
- Calcular el coeficiente de rozamiento eje-portaeje.

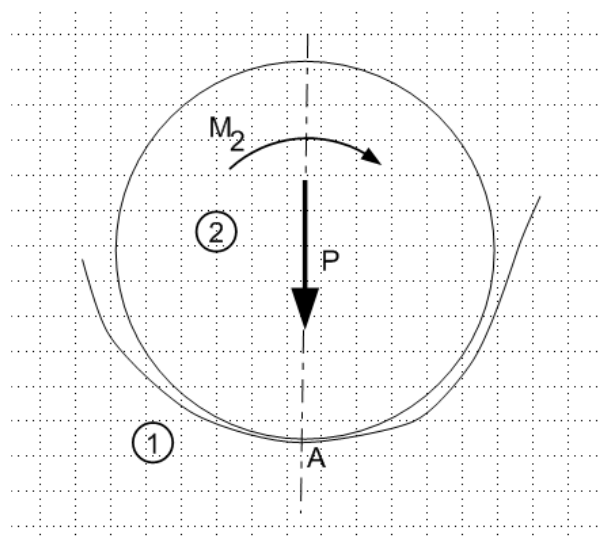


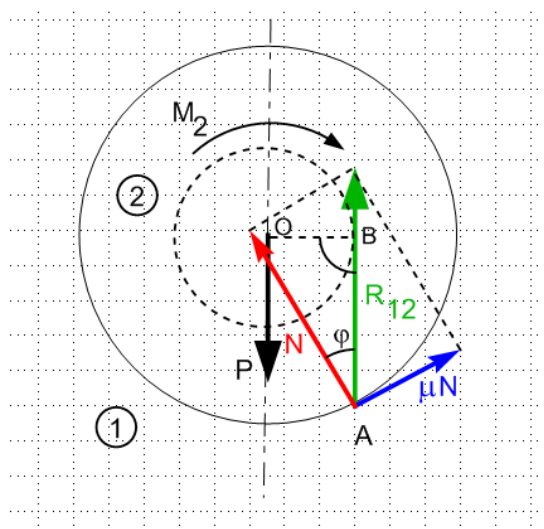
Figura 2.7: Contacto eje-portaejes.

Solución:

- a) Calcular el par de arranque

Para poner en movimiento el eje utilizamos un par M_2 . El punto de apoyo A entre el eje y el porta-ejes se desplaza hacia la derecha.

El equilibrio se producirá cuando lo estén las fuerzas P y R_{12} con el par M_2 .



$$P = R_{12} = 5000 \text{ N}$$

$$M_2 = P \cdot r = 5000 \cdot r$$

donde r es el radio del círculo de rozamiento.

Figura 2.8: Representación del círculo de rozamiento.

Para resolver este apartado es necesario solucionar antes el siguiente apartado.

- b) Calcular el radio del círculo de rozamiento

Aplicando trigonometría al triángulo \widehat{OAB} en la figura 2.8:

$$r = R \cdot \operatorname{sen} \varphi = 0,05 \cdot \operatorname{sen}(5)$$

$$r = 4,36 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

y con ello damos solución al apartado anterior:

$$M_2 = 5000 \cdot 4,36 \cdot 10^{-3}$$

$$M_2 = 21,79 \text{ Nm}$$

- c) Calcular el coeficiente de rozamiento eje-portaeje.

Se considera que el ángulo φ es muy pequeño, por lo tanto, puede realizarse la siguiente aproximación:

$$r = R \cdot \operatorname{sen} \varphi \approx R \cdot \operatorname{tg} \varphi = R \cdot \mu$$

de manera que el coeficiente de rozamiento se obtiene de la ecuación anterior, despejando:

$$\mu = \frac{r}{R} = \frac{4,36 \cdot 10^{-3}}{0,05}$$

$$\mu = 0,087$$

Capítulo 3

ANÁLISIS CINEMÁTICO DE MÁQUINAS

3.1. Cálculo del CIR

1. Halla todos los centros instantáneos de rotación relativos del mecanismo de bombeo mostrado en la figura:

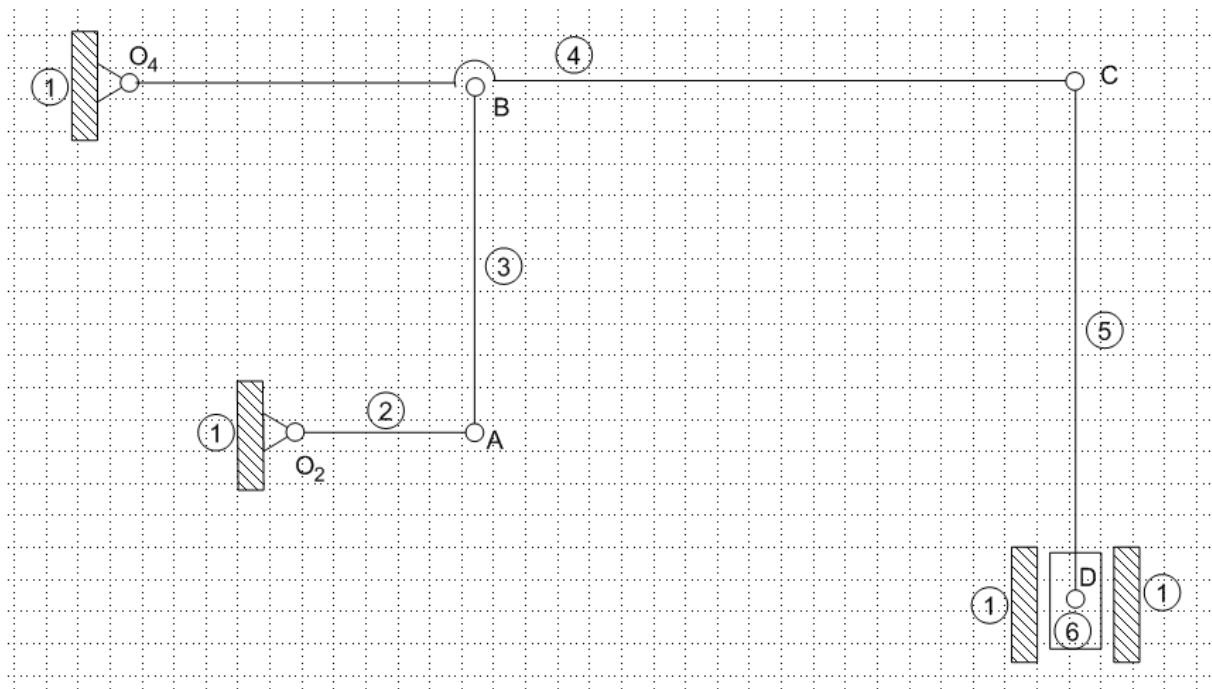


Figura 3.1: Mecanismo.

2. Determinar todos los centros instantáneos de rotación relativos de la figura:

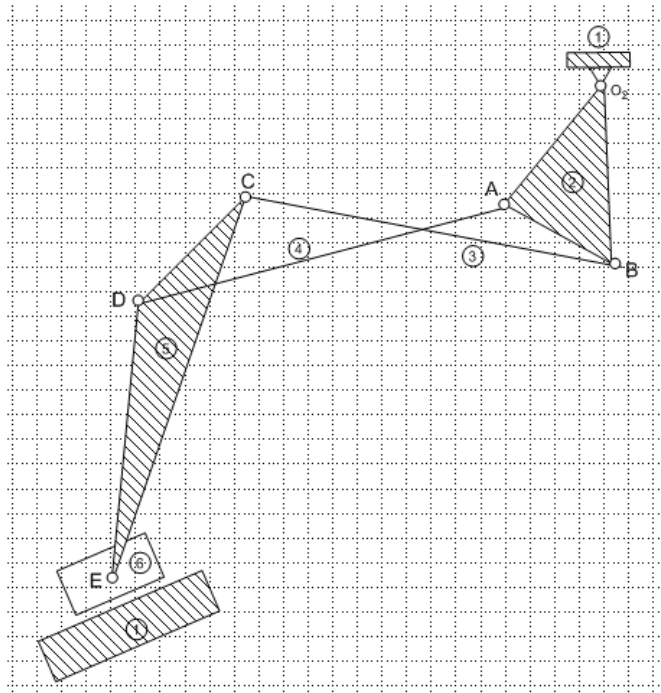


Figura 3.2: Mecanismo.

3. Determina todos los centros instantáneos de rotación relativos:

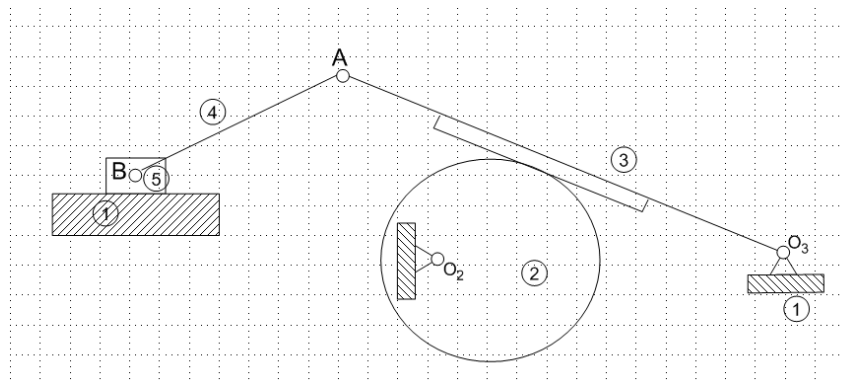


Figura 3.3: Mecanismo.

4. Determinar todos los centros instantáneos de rotación relativos del mecanismo mostrado en la figura:

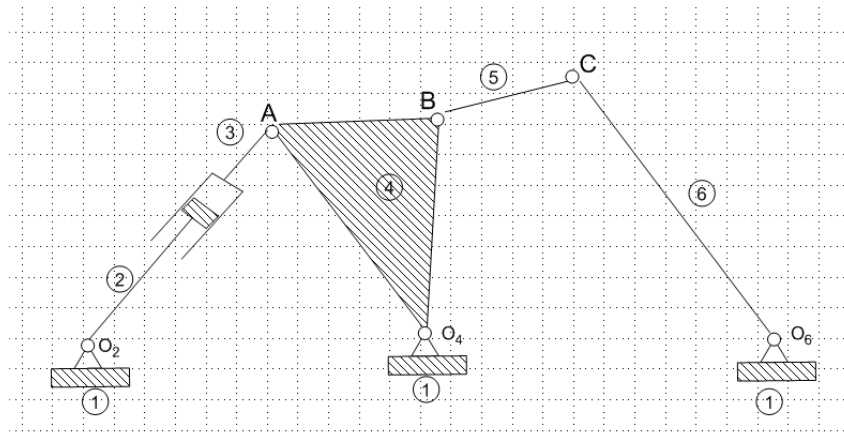


Figura 3.4: Mecanismo.

5. Determinar todos los centros instantáneos de rotación relativos del mecanismo representado en la figura suponiendo rodadura pura entre los eslabones 1 y 4.

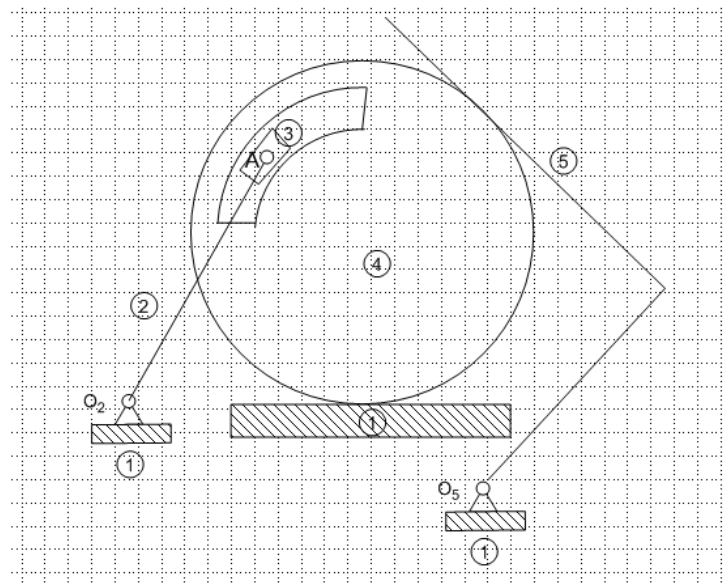


Figura 3.5: Mecanismo.

6. Determinar todos los centros instantáneos de rotación relativos

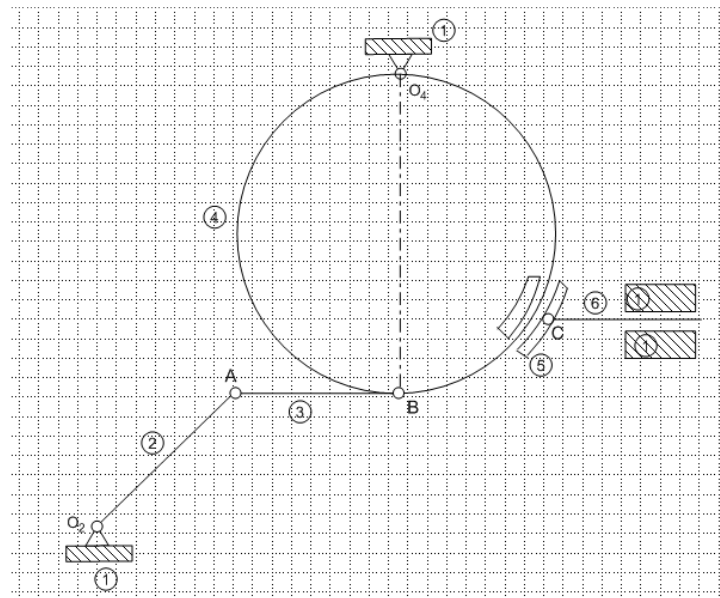


Figura 3.6: Mecanismo.

3.2. Análisis de velocidades y aceleraciones

1. El miembro $\overline{AB} = 110 \text{ mm}$ forma parte de un mecanismo articulado en el que se conoce la velocidad de A y la velocidad angular del miembro. Calcular, aplicando métodos gráficos, la velocidad del punto B.

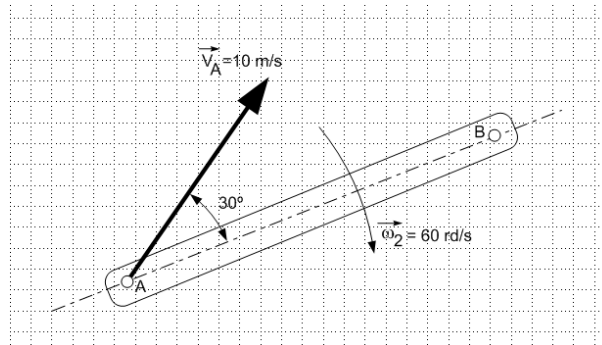


Figura 3.7: Miembro $\overline{AB} = 110 \text{ mm}$

2. La velocidad del punto A del miembro de la figura 3.8 es conocida. Se sabe también cual es la velocidad relativa del punto B respecto a A. Explicar cómo se determinaría la velocidad de B y de otro punto cualquiera C.

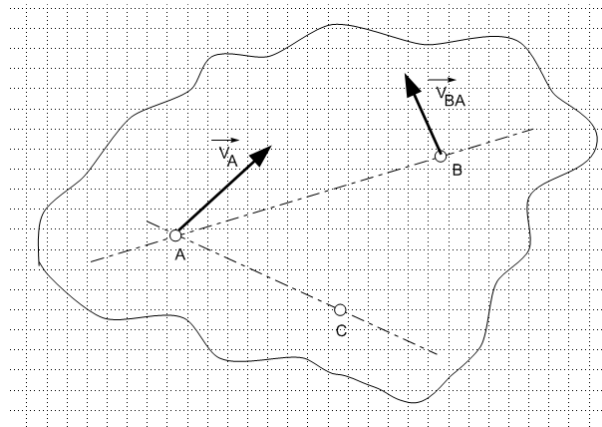


Figura 3.8:

3. Dibujar el cinema de velocidades del mecanismo de la figura 3.9.

DATOS:

$$\begin{aligned} \overline{O_2O_4} &= 280 \text{ mm} & \overline{BC} &= 125 \text{ mm} & \overline{AB} &= 250 \text{ mm} & \overline{O_4C} &= 100 \text{ mm} \\ \overline{O_2A} &= 75 \text{ mm} & \overline{CD} &= 120 \text{ mm} & \overline{O_4B} &= 100 \text{ mm} \end{aligned}$$

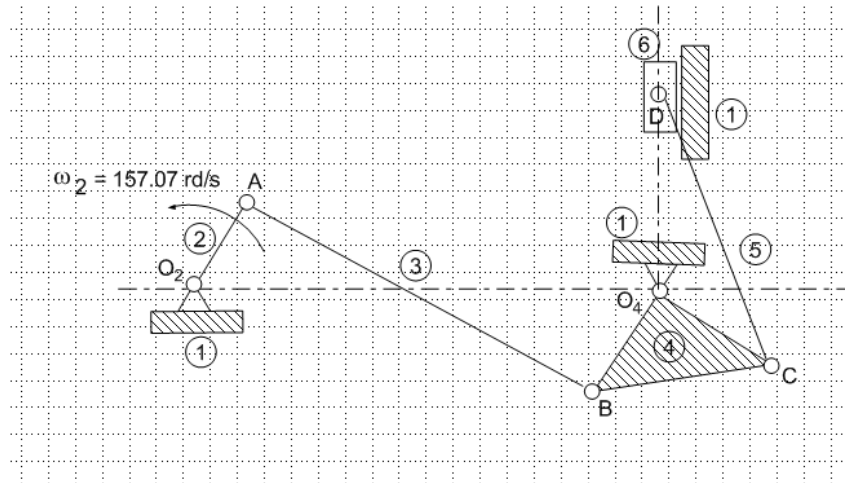


Figura 3.9: Mecanismo.

4. Dibujar el cinema de velocidades del mecanismo de la figura 3.10 con los siguientes datos:

$$O_2O_5 = 300; AB = 250; CD = 180; \varphi_2 = 45 \text{ grados}$$

$$O_2A = 220; BC = 380; BD = 540; CO_5 = 250; \omega_2 = 70 \text{ rad/s}$$

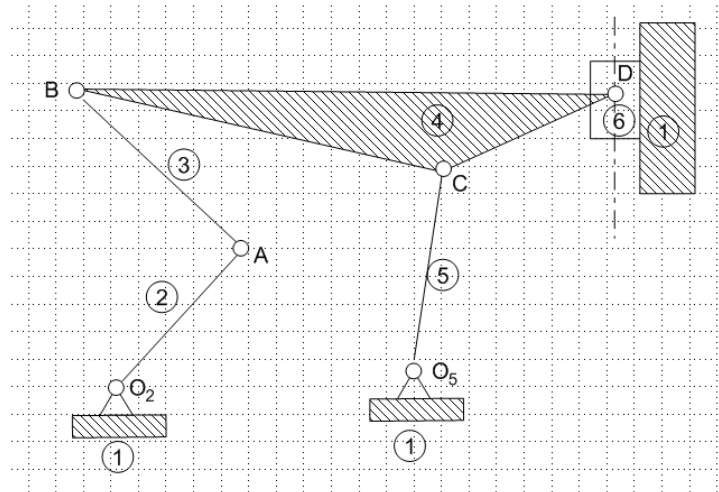


Figura 3.10: Mecanismo

5. En el mecanismo de la figura 3.11: $\omega_1 = 2$ rad/s, Longitud de todas las barras = 30 mm, O_2A y O_2C inclinadas a 45° . Calcular:

- La posición de los centros instantáneos de rotación de los elementos AB y CD .
- La velocidad del punto C .
- La aceleración del punto C .

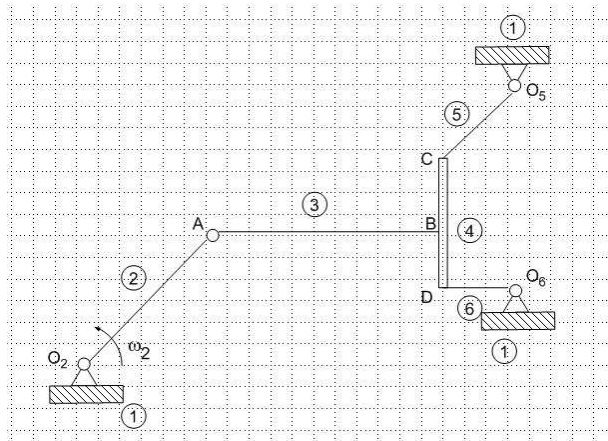


Figura 3.11: Mecanismo.

6. El mecanismo de la figura, es una biela de colisa que mueve la herramienta de corte en una limadora. El elemento 3 tiene un movimiento de vaivén guiado en dirección x . El elemento 1 se mueve con velocidad angular constante ω en torno a su centro O_1 .

DATOS:

$$\overline{O_2A} = 2 \text{ m} \quad \overline{O_3A} = 5 \text{ m} \quad \overline{AB} = 3 \text{ m}$$

$$\omega_2 = 10 \text{ rd/s}$$

- Calcular la velocidad del punto A perteneciente al elemento 2.
- Calcular la velocidad del punto B perteneciente al elemento 4.
- Calcular la aceleración angular del elemento 3.

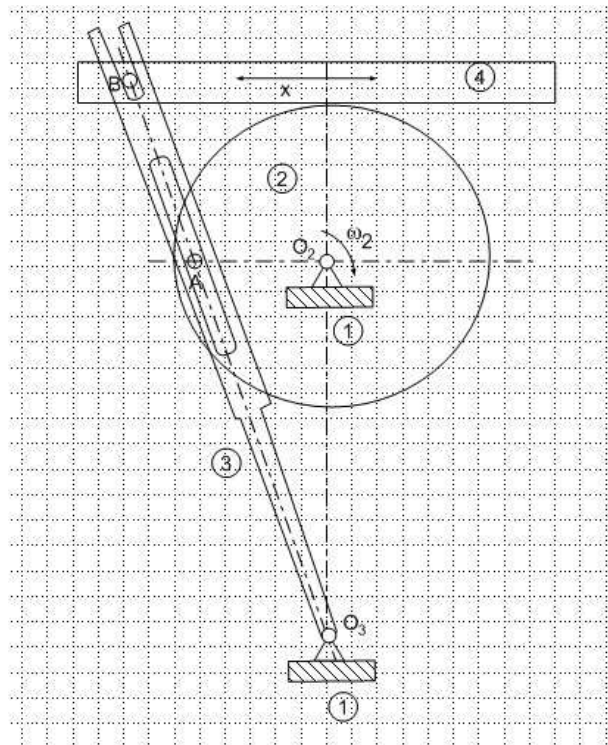


Figura 3.12: Mecanismo.

7. En el mecanismo de la figura 3.13: $R = 50$ mm, $\overline{AB} = 40$ mm, $\omega = 10$ rad/s, $\alpha = 20$ rad/s², $\overline{BC} = 100$ mm.

- Calcular la velocidad v_C
- Calcular la aceleración a_C

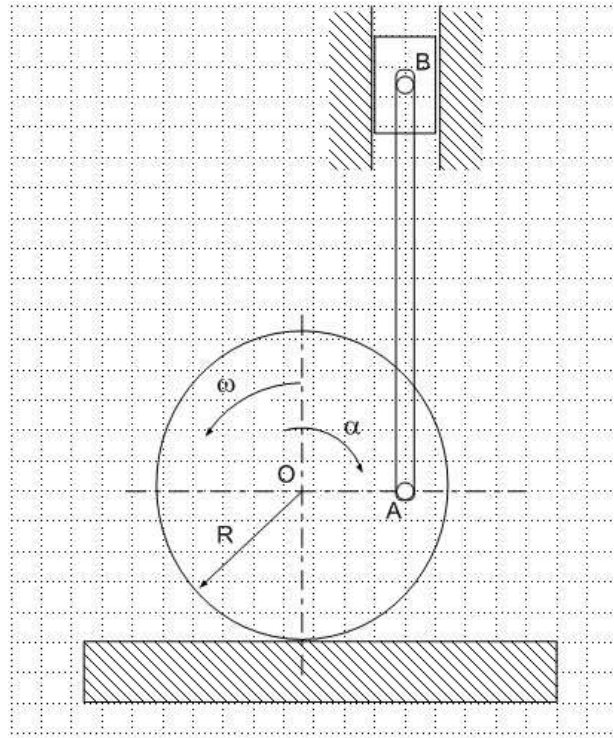


Figura 3.13: Mecanismo.

8. En el mecanismo de la figura 3.14 el elemento 2 gira en torno al punto O_2 .

- Calcular la posición del centro instantáneo de rotación del elemento 3
- Construir el cinema de velocidades del elemento 3 y representar de forma aproximada en el cinema de velocidad del punto E.
- Calcular la velocidad de deslizamiento en el punto de contacto B
- Construir el cinema de aceleraciones del elemento 3.

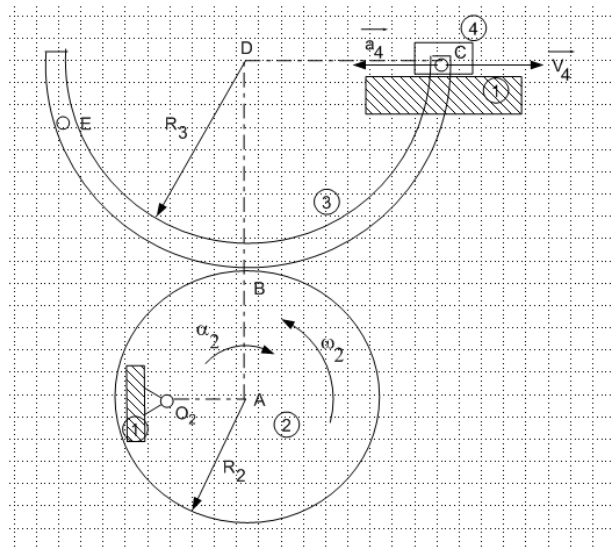


Figura 3.14: Mecanismo.

$$\begin{aligned} \omega_2 &= 2 \text{ rad/s} & R_2 &= 2 \text{ m} & V_4 &= 2 \text{ m/s} \\ \alpha_2 &= 4 \text{ rad/s}^2 & R_3 &= 4 \text{ m} & a_4 &= 4 \text{ m/s}^2 \\ \overline{O_2A} &= R_2/2 \end{aligned}$$

9. En el mecanismo de la figura 3.15, la barra ABC es un único sólido rígido. Se conoce la velocidad V_A cuyo módulo es 17 m/s y la aceleración del punto B cuyo módulo es 15 m/s^2 . La escala del dibujo es aproximadamente 1:1000

- Cuantos grados de libertad tiene el mecanismo? Justifica tu respuesta.
- Determinar las posiciones de los centros instantáneos de rotación de todos los elementos del mecanismo.
- Determinar la velocidad del punto F.
- Determinar la aceleración del punto D.

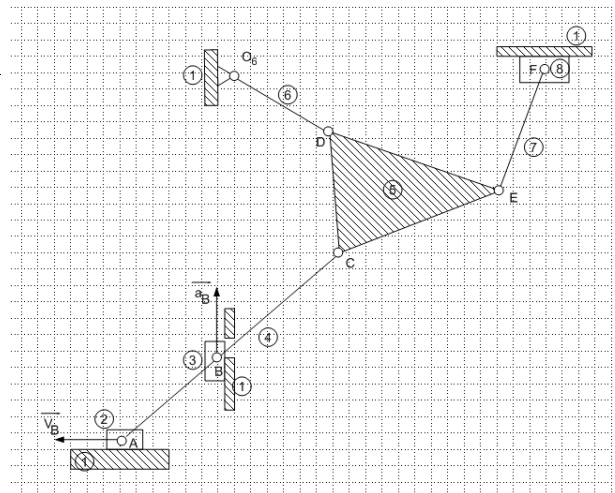


Figura 3.15: Mecanismo.

Capítulo 4

ANÁLISIS DINÁMICO DE MÁQUINAS

1. Hallar la fuerza reducida en A debido a \vec{F}_1 . ¿Que fuerza \vec{E} habría que aplicar en el punto A para que todo el mecanismo se mantenga en equilibrio?

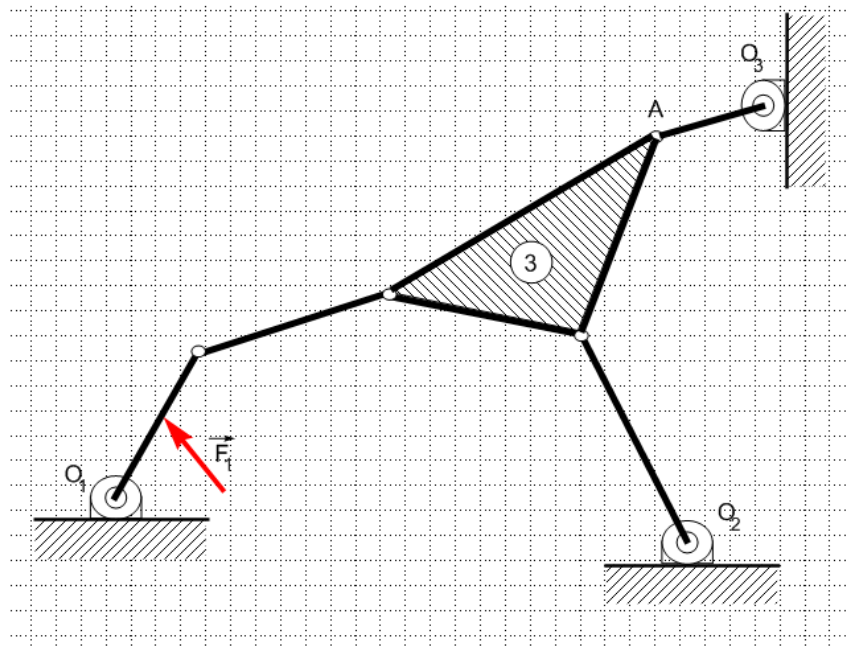


Figura 4.1:

2. Hallar la fuerza reducida del mecanismo en C debido a \vec{F}_A . Calcular la fuerza equilibrante en el punto C para mantener el mecanismo en el equilibrio.

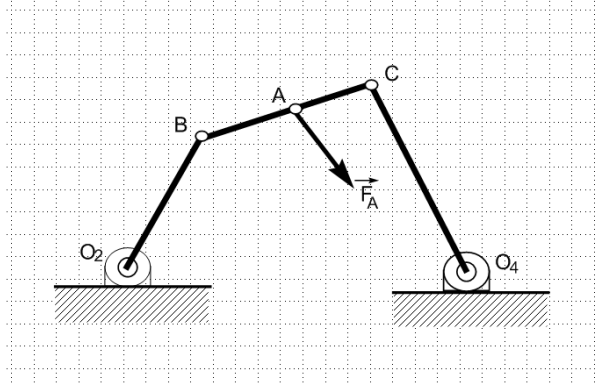


Figura 4.2:

3. En el mecanismo representado en la figura 4.3, se conocen los siguientes datos: $O_2O_4 = 12 \text{ cm}$, $\alpha_2 = 60^\circ$, $\vec{F}_B = (70) \text{ Newton}$ y forma 315° con la horizontal, $O_2A = 8 \text{ cm}$, $\alpha_3 = 30^\circ$, $\vec{F}_D = (80) \text{ Newton}$ y forma 120° con la horizontal, $AC = 6 \text{ cm}$, $\widehat{O_4CD} = 135^\circ$, $AB = AC/2$, $CD = 4 \text{ cm}$, $\omega_2 = 10 \text{ rad/seg}$. Hallar la fuerza reducida y la equilibrante en el punto A.

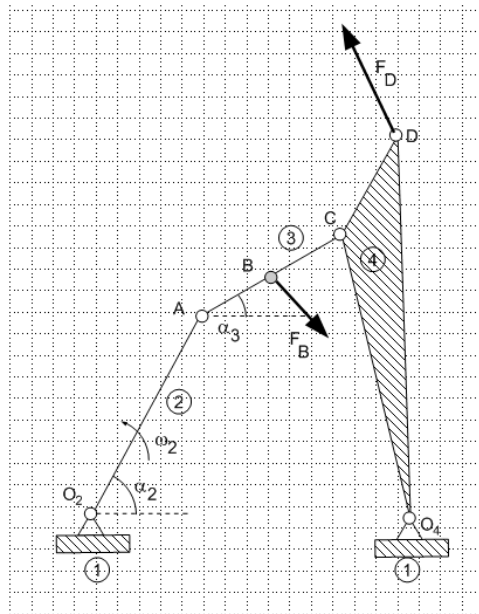


Figura 4.3:

4. Reducir la fuerza \vec{P} al punto A, aplicando métodos gráficos.

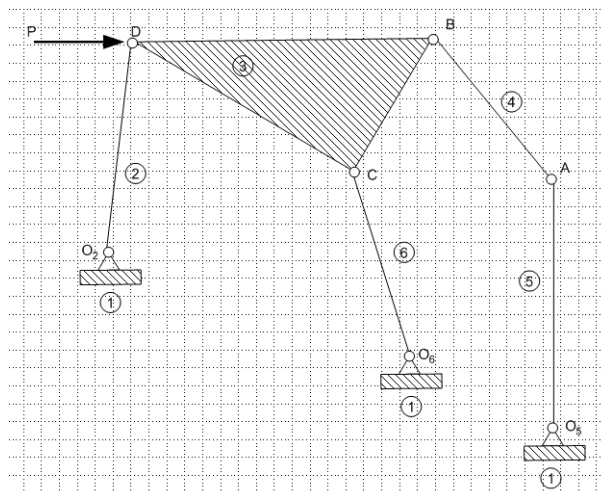


Figura 4.4:

5. Calcular la masa reducida en el punto A M_A del mecanismo de la figura.

DATOS: $AB = BO_4 = 86 \text{ cm}$ $O_2A = 50 \text{ cm}$

$$\omega_2 = 10 \text{ rd/s} \quad I_{G2} = 0,015 \text{ Kg m}^2 \quad m_2 = 0,1 \text{ Kg}$$

$$\omega_3 = -3 \text{ rd/s} \quad I_{G3} = 0,020 \text{ Kg m}^2 \quad m_3 = 0,15 \text{ Kg}$$

$$\omega_4 = 3 \text{ rd/s} \quad I_{G4} = 0,020 \text{ Kg m}^2 \quad m_4 = 0,15 \text{ Kg}$$

Como criterio de signos, se ha considerado positivo el sentido antihorario.

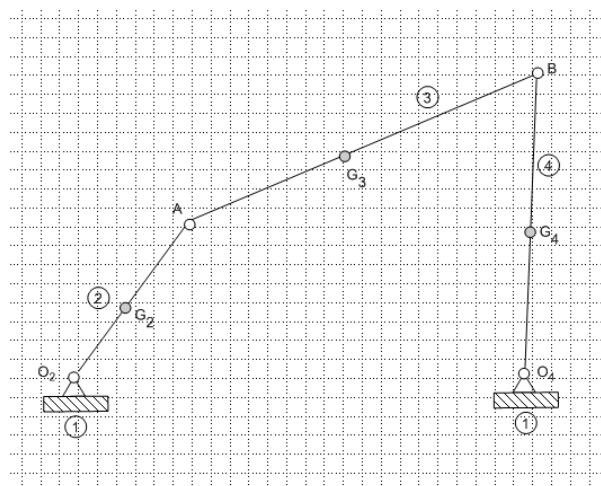


Figura 4.5: Mecanismo.

6. Calcular la resultante de los esfuerzos de inercia del eslabón de la figura 4.6.

Datos:

$$\begin{array}{llll}
 AB = 50 \text{ cm} & AG = 20 \text{ cm} & \theta = 30^\circ & \omega = 6 \text{ rad/seg} \\
 \alpha = 50 \text{ rad/seg}^2 & \text{Peso de la biela} = 20 \text{ Kg} & I_G = 5 \text{ Kg m}^2 & a_A = 50 \text{ m/seg}^2
 \end{array}$$

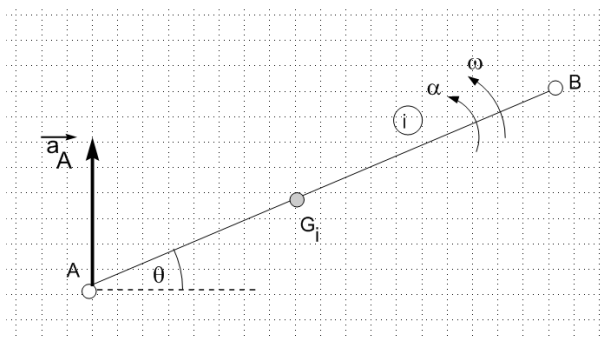


Figura 4.6: Eslabón biela.

7. En el mecanismo del cuadrilátero articulado, calcular las acciones entre barras y reacciones en la bancada, así como el par acelerador M_{O_2} en el árbol de la manivela 2.

DATOS:

$$\begin{array}{lll}
 O_2A = 0,5 \text{ m} & AB = 0,7 \text{ m} & O_4B = 0,6 \text{ m} \\
 O_2G_2 = 0,2 \text{ m} & AG_3 = 0,4 \text{ m} & O_4G_4 = 0,35 \text{ m} \\
 m_2 = 0,5 \text{ Kg} & m_3 = 0,7 \text{ Kg} & m_4 = 0,6 \text{ Kg} \\
 I_{G_2} = 0,010 \text{ Kg m}^2 & I_{G_3} = 0,030 \text{ Kg m}^2 & I_{G_4} = 0,018 \text{ Kg m}^2 \\
 M_e = -100 \text{ Nm} & \theta = 45^\circ & \omega_2 = 10 \text{ rad/seg (constante)}
 \end{array}$$

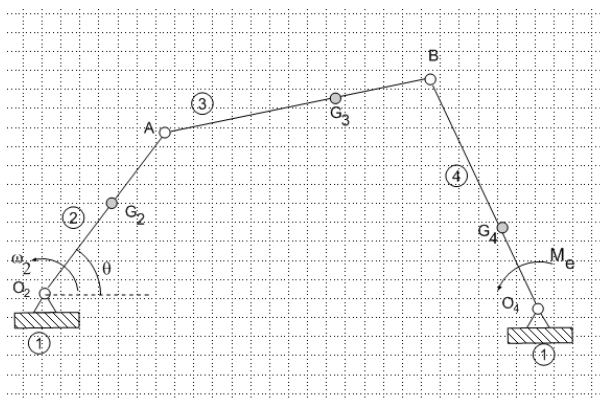


Figura 4.7: Cuadrilátero articulado.

8. En el mecanismo motor representado en la figura 4.8, calcular las acciones entre barras y reacciones en la bancada, así como el par acelerador M_{O_2} a aplicar en el eje de la manivela 2.

DATOS:

$$\begin{array}{llll} O_2A = 0,20 \text{ m} & AB = 0,75 \text{ m} & O_2G_2 = 0,07 \text{ m} & G_3B = 0,40 \text{ m} \\ d = 0,05 \text{ m} & m_2 = 0,8 \text{ Kg} & m_3 = 3 \text{ Kg} & m_4 = 2 \text{ Kg} \\ I_{G_3} = 0,15 \text{ Kg m}^2 & \theta_2 = 45^\circ & \omega_2 = 10 \text{ rad/seg} & (\text{constante}) \end{array}$$

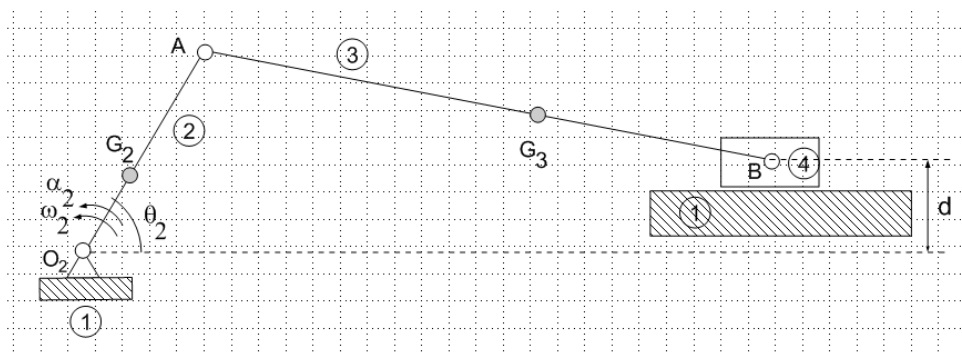


Figura 4.8: Mecanismo motor.

9. Una masa puntual $m_3 = 1 \text{ Kg}$ colocada en el punto B, gira con una velocidad angular $\omega = 10 \text{ rad/seg}$ constante alrededor del eje fijo O_3O . Este eje atraviesa una corredera (eslabón 4) de masa $m_4 = 1,2 \text{ Kg}$. Despreciando cualquier otra masa del mecanismo, hallar las reacciones en la bancada y las fuerzas internas entre las barras.

DATOS:

$$\theta_2 = 45^\circ, \theta_3 = 300^\circ, CO_3 = 15 \text{ cm}, AB = 3 \text{ cm}.$$

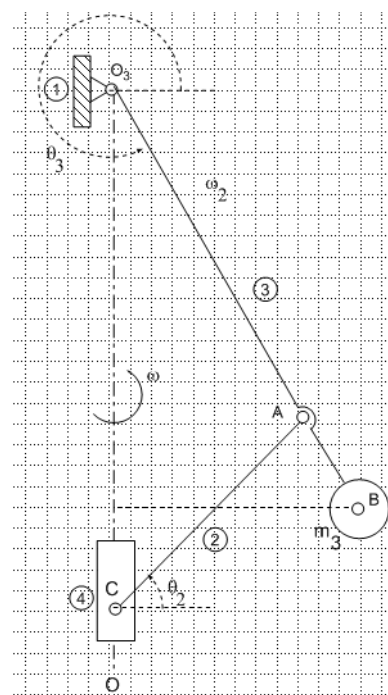


Figura 4.9: Mecanismo.

Capítulo 5

ENGRANAJES

5.1. Engranajes: parámetros, diseño y montaje

1. Sea un engranaje formado por dos ruedas dentadas de $Z_1 = 19$ y $Z_2 = 59$ dientes respectivamente, fabricadas con módulo 4, y con ángulo de presión de referencia normalizado 20 grados. Determinar los parámetros característicos de cada rueda y del engranaje.

Solución:

- Altura de cabeza $h_{c1} = h_{c2} = 4mm$
 - Altura de pie $h_{f1} = h_{f2} = 5mm$
 - Altura total $h_1 = h_2 = 9mm$
 - Radio primitivo $r_1 = 38mm$ $r_2 = 118mm$
 - Radio de cabeza $r_{a1} = 42mm$ $r_{a2} = 122mm$
 - Radio de pie $r_{f1} = 33mm$ $r_{f2} = 113mm$
 - Radio base $r_{b1} = 35,7mm$ $r_{b2} = 110,88mm$
 - Paso angular $p_{a1} = 18,94^\circ$ $p_{a2} = 6,1^\circ$
 - paso $p_1 = p_2 = 12,56mm$
 - espesor del diente $e_1 = e_2 = 6,28mm$
 - Relación de transmisión $i = 0,32$
2. Un engranaje cilíndrico recto con módulo $m = 4$, tiene una relación de transmisión $i = 2/3$ con un número de dientes $z_1 = 20$ en el piñón. Tras un cierto periodo de funcionamiento, se observa rotura y desgaste prematuro en una de las ruedas, por lo cual se debe rediseñar el conjunto respetando la misma distancia entre ejes, pero aumentando el módulo

a $m = 5$. Se pide calcular los números de dientes de las dos ruedas una vez rediseñado el engrane con $m = 5$

Solución:

$m = 5$, distancia entre ejes $\overline{O_1O_2} = 100$, $i = 2/3$, $z_1 = 16$, $z_2 = 24$

3. Dada una rueda dentada de módulo $m = 5$ y número de dientes $Z = 40$ tallada con un ángulo de presión normalizado de 20° , se pide determinar el espesor del diente en la circunferencia exterior.

Solución: $S_E = 3,81mm$

4. Determinar el espesor de un diente ($m = 5$, $z = 10$) en el radio de cabeza si se talla de manera que se evite la penetración utilizando herramientas de talla normalizadas.

Solución: $s_a = 2,09mm$

5. Un engranaje cilíndrico recto está formado por dos ruedas dentadas de $Z_1 = 9$ y $Z_2 = 13$ dientes, construidas con módulo 3. Calcular el ángulo de presión, α' , así como la distancia entre centros de ejes y los radios primitivos en un montaje correcto.

Solución $\alpha' = 24^\circ 5' 11''$, distancia entre ejes $a_0 = 33,967mm$, radios primitivos $r'_1 = 13,896mm$ $r'_2 = 20,072mm$

6. Entre dos ruedas paralelas situadas a 41,648 mm se pretende calcular una transmisión mediante un engranaje cilíndrico-recto constituido por dos ruedas de $Z_1 = 8$ y $Z_2 = 12$ dientes respectivamente, y de módulo $m = 4$. Determinar los desplazamientos que hay que efectuar en la talla de ambas ruedas.

Solución: $X_1 = 0,345mm$ $X_2 = 0,118mm$

7. Un engranaje formado por dos ruedas dentadas cilíndrico-rectas de módulo $m = 5$ y relación de transmisión $i = 1/3$, se ha intentado montar a cero, comprobándose que no funciona correctamente.

Para evitarlo, se han separado progresivamente los ejes, y en un análisis de vibraciones se observó que el nivel mínimo de las mismas se conseguía para una distancia de separación de 1,1008 mm de la posición a cero. en esta nueva posición, el ángulo de presión resultó ser de $22^\circ 40'$. Calcular:

a) Número de dientes de cada rueda

- b) Desplazamiento del tallado de las ruedas
- c) Radios de cabeza
- d) Coeficiente de engrane

Solución:

- a) $Z_1 = 6$ $Z_2 = 18$
 - b) $X_1 = 0,4388mm$ $X_2 = -0,2194mm$
 - c) $r_{a1} = 22,194mm$ $r_{a2} = 48,903mm$
 - d) coeficiente de engrane $\epsilon = 1,284$
8. Se tiene un engranaje cilíndrico-recto formado por dos ruedas de $Z_1 = 16$ y $Z_2 = 30$ dientes respectivamente, construidas con módulo $m = 4$. Si $\omega_1 = 3000 \text{ rpm}$, se pide calcular:
- a) Radios de las circunferencias primitivas, básicas y de cabeza
 - b) distancias de los centros de las ruedas al primer punto de contacto E_2 . (Nota: Resulta conveniente calcular primero los ángulos $\beta = \angle E_2O_2$; $\gamma = \angle E_2C$; $\delta = \angle CO_2E_2$)
 - c) Velocidades lineales de ambas ruedas en el punto E_2
 - d) Grado de deslizamiento en el punto E_2 .

Solución:

- a) primitivos: $r_1 = 32mm$ $r_2 = 60mm$, radios básicos: $r_{b1} = 30,05mm$ $r_{b2} = 56,04mm$, radios de cabeza: $r_{a1} = 36mm$ $r_{a2} = 64mm$
- b) $\beta = 60^\circ 47' 37''$, $\gamma = 110^\circ$, $\delta = 8^\circ 12' 23''$, $\overline{O_1E_2} = 30,07mm$ $\overline{O_2E_2} = r_{a2} = 64mm$
- c) $v_1 = 9446,8 \text{ mm/s}$ $v_2 = 10723,3 \text{ mm/s}$
- d) grado de deslizamiento $D = 4729,4 \text{ mm/s}$

5.2. Trenes de engranajes

1. Diseñar un tren de engranajes con relación de transmisión $\mu = 40$
2. Diseñar un tren de engranajes con relación de transmisión $\mu = \frac{58}{1}$
3. Diseñar un tren de engranajes con relación de transmisión $\mu = \frac{369}{46}$

4. Diseñar un tren de engranajes con relación de transmisión $\mu = \frac{281}{2}$
5. Diseñar un tren de engranajes con relación de transmisión $\mu = \frac{135}{127}$
6. Diseñar un tren de engranajes paralelos para conseguir una relación de transmisión igual a $i = \frac{184}{179}$
7. Diseñar un tren de engranajes paralelos para conseguir una relación de transmisión igual a $i = \frac{2228}{4189}$
8. Diseñar un tren de engranajes paralelos para conseguir una relación de transmisión igual a $i = \frac{126}{1123}$

Capítulo 6

EJERCICIOS DE EXÁMENES

6.1. problema de cinemática

En el mecanismo representado en la figura se conoce la velocidad y aceleración del eslabón de salida 6. Se pide:

1. Determinar el número de grados de libertad y centros instantáneos de rotación absolutos del mecanismo.
2. Calcular el cinema de velocidades de cada uno de los eslabones.
3. Calcular las velocidades angulares de los eslabones 2, 4 y 5.
4. Calcular el cinema de aceleraciones de cada uno de los eslabones.
5. Calcular las aceleraciones angulares de los eslabones 2, 4 y 5.

DATOS:

$$\begin{array}{ll} \overline{O_2C} = 4\sqrt{2} \text{ cm} & \overline{AB} = 36,6 \text{ cm} \\ \overline{O_5A} = 3\sqrt{2} \text{ cm} & \overline{AC} = 30,4 \text{ cm} \end{array}$$

Solución:

1.- Determinar el número de grados de libertad y centros instantáneos de rotación absolutos del mecanismo.

(a) Cálculo del número de grados de libertad Aplicamos la fórmula de Grübler (Gruebler) $G = 3 \cdot (n - 1) - 2 \cdot f_1 - f_2$

donde $n = 6$; $f_1 = 7$; $f_2 = 0$

$$G = 3 \cdot (6 - 1) - 2 \cdot 7 - 0 = 15 - 14$$

$G = 1$ es un mecanismo DESMODRÓMICO

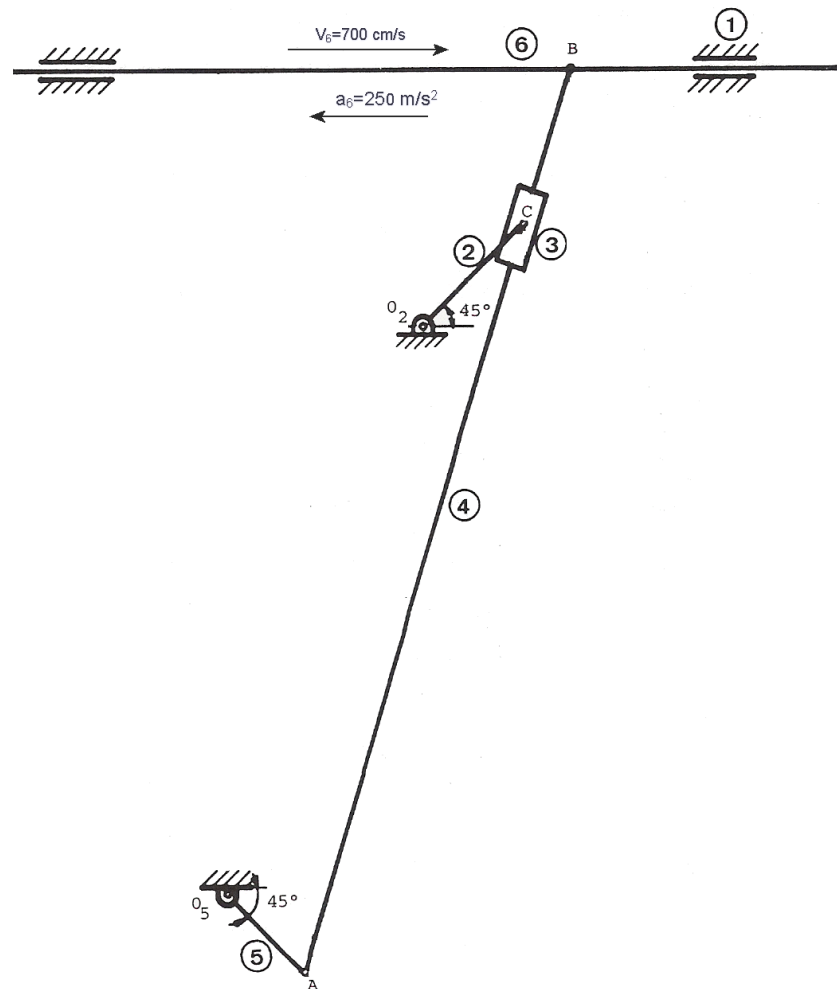


Figura 6.1: Mecanismo.

(b) Cálculo de los CIR absolutos

Determinamos los CIR inmediatos

$$I_{45}, I_{23}, I_{34}(\infty), I_{46}$$

$$I_{15}, I_{12}, I_{16}(\infty)$$

El resto de los CIR absolutos se calculan aplicando el teorema de Kennedy.

Los centros instantáneos aparecen en la siguiente figura

2.- Calcular el cinema de velocidades de cada uno de los eslabones.

DATOS: $|\vec{v}_6| = 700 \text{ cm/s}$

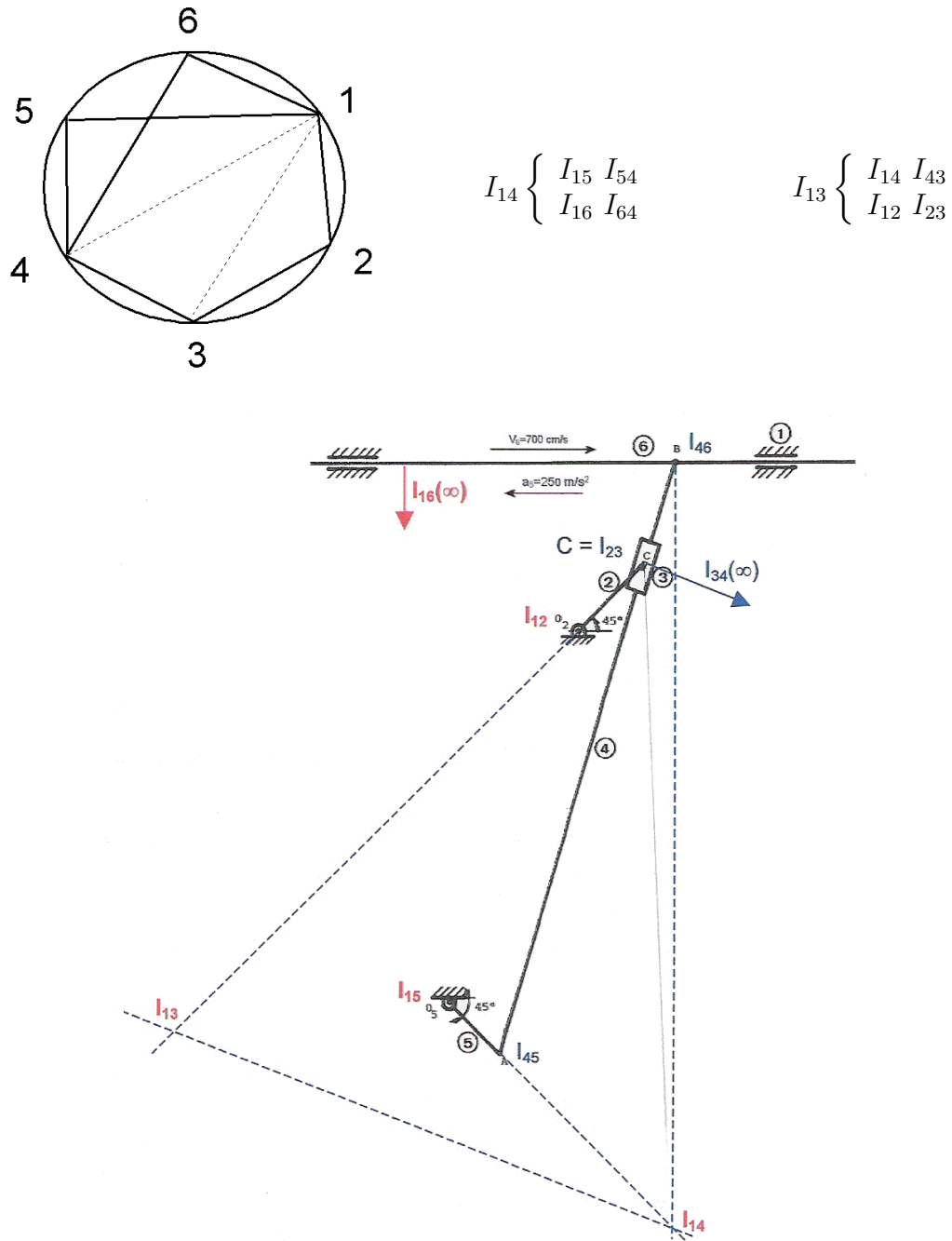


Figura 6.2: Centros instantáneos de rotación del mecanismo.

$$\begin{aligned}
 B \in \text{elto } 6 &\Rightarrow \vec{V}_B = \vec{V}_6 \quad (\text{cinema } \overline{ob} = \frac{700}{100} = 7 \text{ cm}) \\
 A \in \text{elto } 4 &\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{AB} \quad \left\{ \begin{array}{l} B \in \text{elto } 4 \Rightarrow \vec{V}_{B4} = \vec{V}_{B6} \\ \vec{V}_{AB} \text{ dir } \perp \overline{AB} \end{array} \right. \\
 A \in \text{elto } 5 &\left\{ \begin{array}{l} |\vec{V}_A| = \omega_5 \cdot \overline{O_5A} \\ \text{dir } \perp \overline{O_5A} \text{ sentido coherente con } \omega_5 \text{ (desconocida)} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$C \in elto 4$ homología entre el cinema y el mecanismo.

$$\frac{\overline{ac}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{ac} = \overline{ab} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = 5,6 \cdot \frac{30,4}{36,6} = 4,7 \text{ cm}$$

\overline{ab} medido del cinema $\overline{ab} = 5,6 \text{ cm}$

También puede calcularse sabiendo que:

- El punto c_4 se encuentra en el cinema del eslabón 4 (segmento \overline{ab}).
- La velocidad del punto C perteneciente al eslabón 4 es perpendicular al segmento $\overline{I_{14}C}$.

$C \in elto 3$ (corredera)

$$\overrightarrow{V_{C_3}} = \overrightarrow{V_{C_4}} + \overrightarrow{V_{C_3C_4}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{V_{C_4}} \text{ (ya calculado en el cinema)} \\ \overrightarrow{V_{C_3C_4}} \text{ mov de la corredera} \Rightarrow \\ \text{dir de deslizamiento } (\parallel \overline{AB}) \end{array} \right.$$

$$C \in elto 2 \text{ (manivela)} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\overrightarrow{V_{C_2}}| = \omega_2 \cdot \overline{O_2C} \\ \text{dir } \perp \overline{O_2C}, \text{ sentido coherente con } \vec{\omega}_2 \end{array} \right.$$

El cinema de velocidades de cada uno de los eslabones se representa a continuación.

Cinema del eslabón 2: segmento $\overline{oc_2}$.

Cinema del eslabón 3: punto $c_3 \equiv c_2$

Cinema del eslabón 4: segmento \overline{ab}

Cinema del eslabón 5: segmento \overline{oa}

Cinema del eslabón 6: punto b .

3.- Calcular las velocidades angulares de los eslabones 2, 4 y 5.

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{V_{C_2}}{\overline{O_2C}} = \frac{620 \text{ cm/s}}{4 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}} = 109,6 \text{ rad/seg (sentido horario)} \\ \omega_4 &= \frac{V_{AB}}{\overline{AB}} = \frac{560 \text{ cm/s}}{36,6 \text{ cm}} = 15,3 \text{ rad/seg (sentido horario)} \\ \omega_5 &= \frac{V_A}{\overline{O_5A}} = \frac{225 \text{ cm/s}}{3 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}} = 53,0 \text{ rad/seg (sentido antihorario)} \end{aligned}$$

4.- Calcular el cinema de aceleraciones de cada uno de los eslabones.

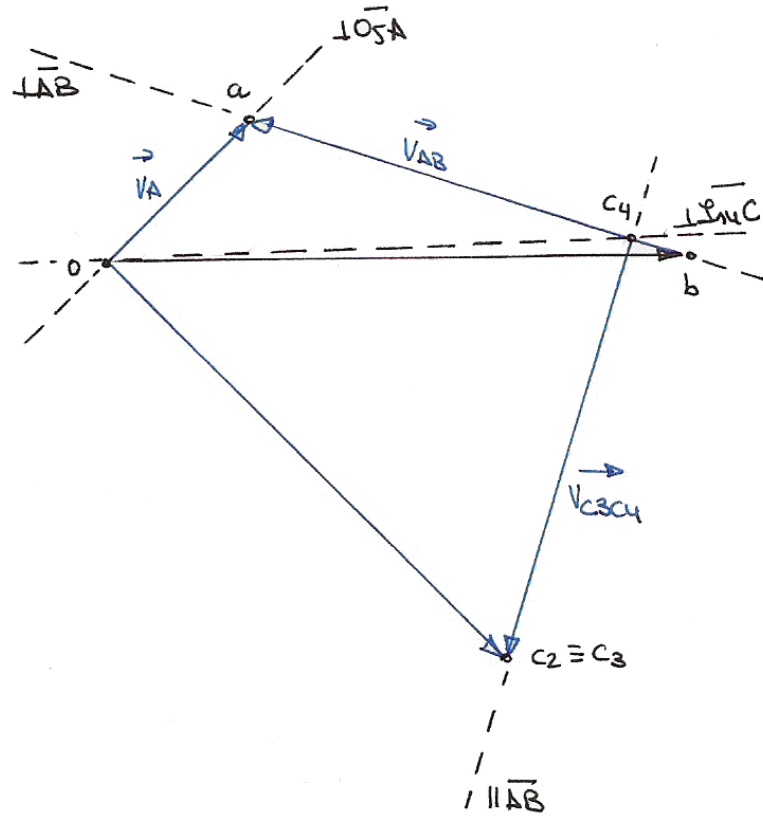


Figura 6.3: Cinemática de velocidades.

DATOS: $|\vec{a}_6| = 250 \text{ m/s}^2 = 25000 \text{ cm/s}^2$

$B \in \text{elto } 6 \Rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_6 \quad (\text{cinemática } \overline{o'b'} = \frac{25000}{5000} = 5,0 \text{ cm})$

$A \in \text{elto } 4 \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB} \quad \begin{cases} B \in \text{elto } 4 \Rightarrow \vec{a}_{B4} = \vec{a}_{B6} \\ \vec{a}_{AB} = \vec{a}_{AB}^n + \vec{a}_{AB}^t \end{cases}$

$\vec{a}_{AB} = \vec{a}_{AB}^n + \vec{a}_{AB}^t \quad \begin{cases} |\vec{a}_{AB}^n| = \omega_4^2 \cdot \overline{AB} = (15,3)^2 \cdot 36,6 = 8567,7 \text{ cm/s}^2 \\ \text{dir } \parallel \overline{AB}, \text{ sentido de } A \text{ a } B \\ |\vec{a}_{AB}^t| = \alpha_4 \cdot \overline{AB} \\ \text{dir } \perp \overline{AB}, \text{ sentido coherente con } \vec{\alpha}_4 \end{cases}$

$A \in \text{elto } 5 \text{ (manivela)} \Rightarrow$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^t \quad \left\{ \begin{array}{l} |\vec{a}_A^n| = \omega_5^2 \cdot \overline{O_5A} = (53)^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 11917,57 \text{ cm/s}^2 \\ \text{dir} \parallel \overline{O_5A}, \text{ sentido de } A \text{ a } O_5 \\ |\vec{a}_A^t| = \alpha_5 \cdot \overline{O_5A} \\ \text{dir} \perp \overline{O_5A}, \text{ sentido coherente con } \vec{\alpha}_5 \end{array} \right.$$

$C \in \text{elto 4 por homología entre el cinemayel mecanismo} :$

$$\frac{\overline{a'c'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{a'b'}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{a'c'} = \overline{a'b'} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = 2,7 \cdot \frac{30,4}{36,6} = 2,24 \text{ cm}$$

$\overline{a'b'}$ medido del cinema $\overline{a'b'} = 2,7 \text{ cm}$

$C \in \text{elto 3 (corredera)}$

$$\vec{a}_{C_3} = \vec{a}_{C_4} + \vec{a}_{C_3C_4} + \vec{a}_{cor} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_{C_4} \text{ medida en el cinema} \\ \vec{a}_{C_3C_4} \Rightarrow \text{movimiento de la corredera} \Rightarrow \\ \text{dir} \parallel \overline{AB} \\ \vec{a}_{cor} = 2 \cdot (\vec{\omega}_4 \times \vec{V}_{C_3C_4}) \end{array} \right.$$

$$\vec{a}_{cor} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{cor} = 2 \cdot (15,3 \text{ rad/s}) \cdot (480 \text{ cm/s}) = 14688 \text{ cm/s}^2 \\ \text{dir} \perp \vec{V}_{C_3C_4} \text{ sentido hacia la izquierda} \end{array} \right.$$

$C \in \text{elto 2 (manivela)} \Rightarrow$

$$\vec{a}_{C_3} \equiv \vec{a}_{C_2} = \vec{a}_{C_2}^n + \vec{a}_{C_2}^t \quad \left\{ \begin{array}{l} |\vec{a}_{C_2}^n| = \omega_2^2 \cdot \overline{O_2C} = (109,6)^2 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} = 67951,0 \text{ cm/s}^2 \\ \text{dir} \parallel \overline{O_2C}, \text{ sentido de } C \text{ a } O_2 \\ |\vec{a}_{C_2}^t| = \alpha_2 \cdot \overline{O_2C} \\ \text{dir} \perp \overline{O_2C}, \text{ sentido coherente con } \vec{\alpha}_2 \text{ (desconocida)} \end{array} \right.$$

El cinema de cada uno de los eslabones se representa a continuación:

Cinema del eslabón 2: segmento $\overline{o'c'_2}$.

Cinema del eslabón 3: punto $c'_3 \equiv c'_2$

Cinema del eslabón 4: segmento $\overline{a'b'}$

Cinema del eslabón 5: segmento $\overline{o'a'}$

Cinema del eslabón 6: punto b'

5.- Calcular las aceleraciones angulares de los eslabones 2, 4 y 5.

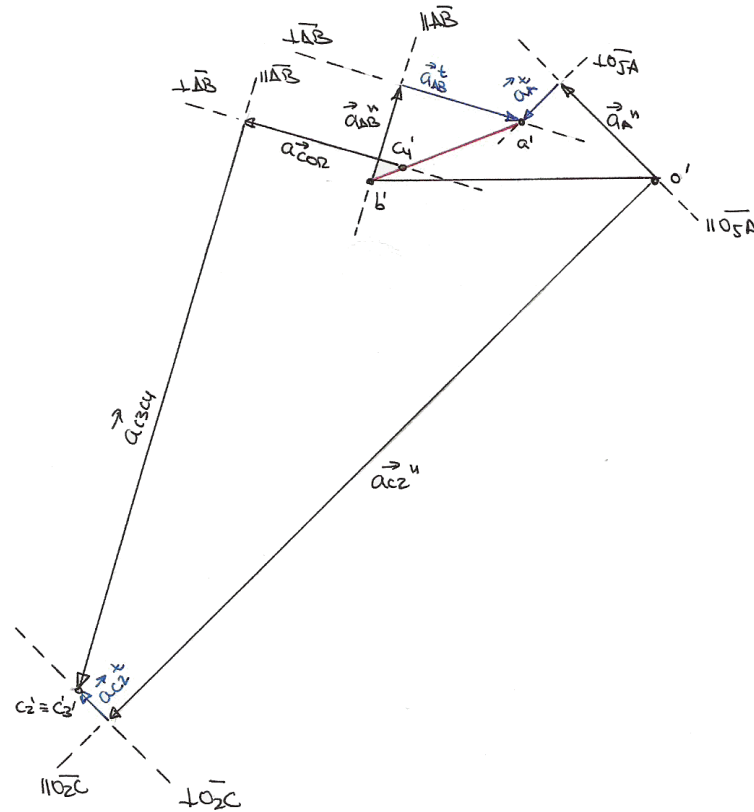


Figura 6.4: Cinemática de aceleraciones.

$$\alpha_2 = \frac{a_{C_2}^t}{O_2C} = \frac{3500 \text{ cm/s}}{4 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}} = 318,7 \text{ rad/s}^2 \text{ (sentido antihorario)}$$

$$\alpha_4 = \frac{a_{AB}^t}{AB} = \frac{10500 \text{ cm/s}}{36,6 \text{ cm}} = 286,88 \text{ rad/s}^2 \text{ (sentido antihorario)}$$

$$\alpha_5 = \frac{a_A^t}{O_5A} = \frac{5500 \text{ cm/s}}{3 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}} = 1296,4 \text{ rad/s}^2 \text{ (sentido horario)}$$

6.2. Problema de cinemática (Septiembre 2003)

Dado el mecanismo de la figura en la configuración señalada, obtener:

1. El número de grados de libertad del mecanismo.
2. Los centros instantáneos de rotación absolutos de los elementos del mecanismo.
3. Cinemática de velocidades de cada uno de los elementos del mecanismo.
4. Velocidad angular de los eslabones 4 y 5.
5. Cinemática de aceleraciones de cada uno de los elementos del mecanismo.
6. Aceleración angular de los eslabones 4 y 5.

Los datos geométricos del mecanismo son:

$$\begin{aligned} \overline{O_2O_4} &= 9 \text{ cm} & \overline{O_2A} &= 19 \text{ cm} & \overline{O_4B} &= 10 \text{ cm} \\ \overline{O_4A} &= 24 \text{ cm} & BC &= 36 \text{ cm} \end{aligned}$$

Los datos cinemáticos son:

$$\omega_2 = 30 \text{ rad/s, sentido horario y constante.}$$

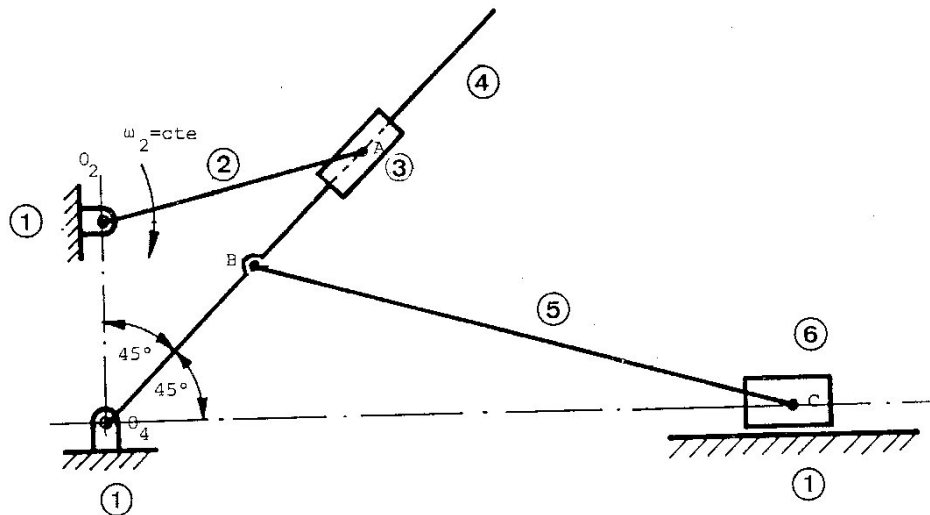


Figura 6.5: Mecanismo.

6.3. Problema de cinemática y dinámica (Febrero 2004)

En la figura se presenta a escala 1:2 un mecanismo de elevación. Los datos cinemáticos se corresponden con el eslabón 3 (manivela de entrada).

$$\begin{aligned}\omega_3 &= 0,5 \text{ rd/s (horario)} \\ \alpha_3 &= 0,1 \text{ rd/s}^2 \text{ (antihorario)}\end{aligned}$$

Se asume que el efecto de la inercia de las barras 3 y 4 sobre el estado de fuerzas del mecanismo es despreciable. El resto de datos dinámicos son:

$$\begin{aligned}m_2 &= 5 \text{ Kg} \\ I_{G2} &= 24 \text{ Kg cm}^2\end{aligned}$$

Se pide:

1.- Determinar el número de grados de libertad y centros instantáneos de rotación absolutos del mecanismo.

2.- Calcular el cinema de velocidades de cada uno de los eslabones. **3.-** Remarque el cinema del eslabón 3 (AO₃P). Calcular la velocidad angular del eslabón 2.

4.- Calcular el cinema de aceleraciones de cada uno de los eslabones.

5.- Remarque el cinema del eslabón 3 (AO₃P). Calcular la aceleración angular del eslabón 2.

6.- Calcular las fuerzas y momentos de inercia de los eslabones. Calcule la F necesaria a aplicar en el punto A (según figura) para conseguir que el mecanismo esté en equilibrio (no considerar los pesos).

Solución:

1.- Determinar el número de grados de libertad y centros instantáneos de rotación absolutos del mecanismo.

(a) Cálculo del número de grados de libertad

Aplicamos el criterio de Grübler (Gruebler) $G = 3 \cdot (n - 1) - 2 \cdot f_1 - f_2$

Donde $n = 4$; $f_1 = 4$; $f_2 = 0$

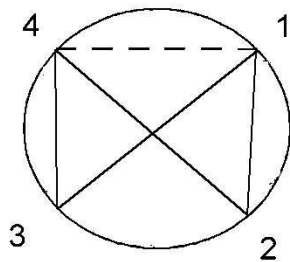
$$G = 3 \cdot (4 - 1) - 2 \cdot 4 - 0 = 9 - 8$$

$G = 1$ es un mecanismo DESMODRÓMICO.

(b) Cálculo de los CIR absolutos

Determinamos los CIR inmediatos I_{13} , I_{34} , $I_{24}(\infty)$, I_{12}

El CIR absoluto que queda I_{14} se calcula aplicando el teorema de Kennedy.



$$I_{14} \left\{ \begin{array}{l} I_{12} \quad I_{24}(\infty) \\ I_{13} \quad I_{34} \end{array} \right.$$

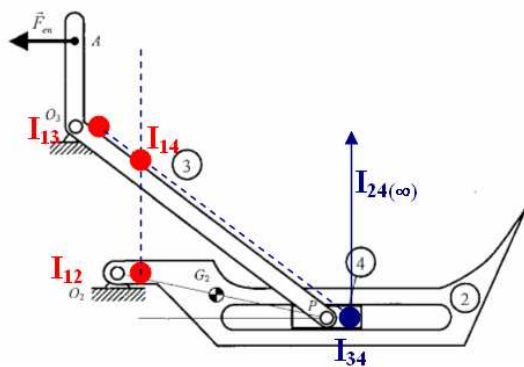


Figura 6.6: CIR absolutos

2.- Calcular el cinema de velocidades de cada uno de los eslabones

DATOS: $\omega_3 = 0,5 \text{ rd/s}$ (horario)

Las dimensiones reales del mecanismo se obtienen midiendo en la figura adjunta y multiplicando por la escala (x2).

- $P \in \text{elto } 3 \Rightarrow \text{MANIVELA}$

$$|\vec{V}_{P3}| = \omega_3 \cdot \overline{O_3P} = (0,5 \text{ rad/s}) \cdot (63 \text{ mm} \times 2) = 63 \text{ mm/s}$$

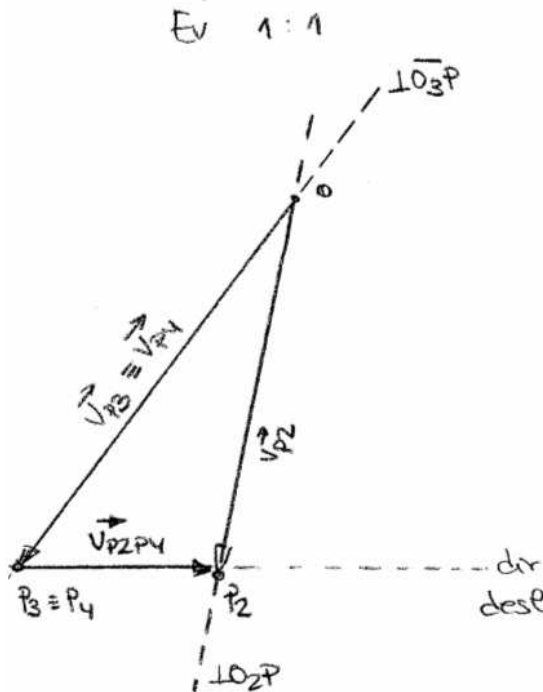
dir. $\perp \overline{O_3P}$ y sentido acorde con $\vec{\omega}_3$

$$(\text{cinema } \overline{op_3} = \frac{63 \text{ mm/s}}{1} = 63 \text{ mm})$$

- $P \in \text{elto } 4$

$$\vec{V}_{P3} = \vec{V}_{P4} \quad (\text{cinema } p_3 \equiv p_4)$$

$$\bullet \quad P \in \text{elto } 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_{P2} = \vec{V}_{P4}(\text{conocida}) + \vec{V}_{P2P4}(\text{dir. desl.}) \\ \text{MANIVELA} \left\{ \begin{array}{l} |\vec{V}_{P2}| = \omega_2 \cdot \overline{O_2P} \text{ (desconocida)} \\ \text{dir. } \perp \overline{O_2P} \text{ y sentido acorde con } \vec{\omega}_2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$



El cinema del eslabón 2 viene representado por el segmento $\overline{op_2}$
 El cinema del eslabón 4 viene representado por el segmento $\overline{op_3}$
 El cinema de la corredera 4 viene representado por el punto p_4

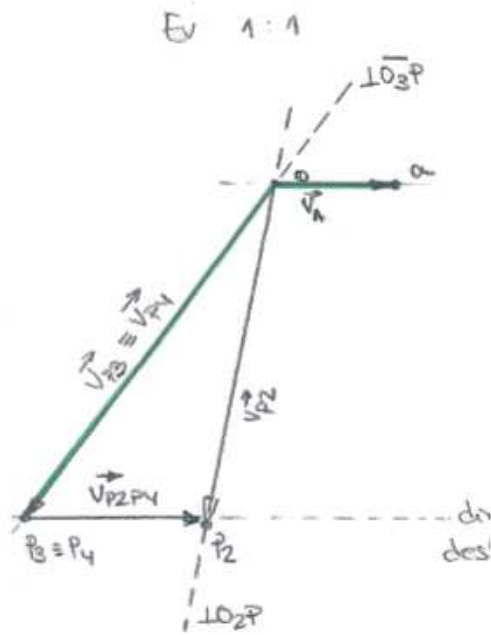
3.- Remarque el cinema del eslabón 3 (AO_3P). Calcular la velocidad angular del eslabón 2.

Necesitamos calcular el punto homólogo del mecanismo A en el cinema (a). Para ello aplicamos la propiedad de homología:

$$\frac{\overline{oa}}{\overline{O_3A}} = \frac{\overline{op_3}}{\overline{O_3P}} \quad \frac{\overline{oa}}{18 \text{ mm} \times 2} = \frac{63 \text{ mm}}{63 \text{ mm} \times 2}$$

$$\overline{oa} = 18 \text{ mm}$$

4.- Calcular el cinema de aceleraciones de cada uno de los eslabones.



El cinema del eslabón 3 aparece re-marcado en verde.

DATOS:

$$\alpha_3 = 0,1 \text{ rad/s}^2 \text{ (antihorario)}$$

- $P \in \text{elto } 3 \Rightarrow \text{MANIVELA}$

$$\overrightarrow{a_{P3}} = \overrightarrow{a_{P3}^n} + \overrightarrow{a_{P3}^t} \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{a_{P3}^n} \left\{ \begin{array}{l} |\overrightarrow{a_{P3}^n}| = \omega_3^2 \cdot \overline{O_3P} = (0,5 \text{ rad/s})^2 \cdot (63 \text{ mm} \times 2) = \\ = 31,5 \text{ mm/s}^2 \\ \text{dir. } \parallel \overline{O_3P} \text{ y sentido hacia } O_3 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{a_{P3}^t} \left\{ \begin{array}{l} |\overrightarrow{a_{P3}^t}| = \alpha_3 \cdot \overline{O_3P} = (0,1 \text{ rad/s}^2) \cdot (63 \text{ mm} \times 2) = \\ = 12,6 \text{ mm/s}^2 \\ \text{dir. } \perp \overline{O_3P} \text{ y sentido acorde con } \overrightarrow{\alpha_3} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(escala del cinema : $2 \text{ mm} \rightarrow 1 \text{ mm/s}^2$ obtenemos p'_3)

- $P \in \text{elto } 4$

$$\overrightarrow{a_{P3}} = \overrightarrow{a_{P4}} \quad (\text{cinema } p'_3 \equiv p'_4)$$

- $P \in \text{elto } 2 \Rightarrow \text{MANIVELA}$

$$\overrightarrow{a_{P2}} = \overrightarrow{a_{P2}^n} + \overrightarrow{a_{P2}^t} \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{a_{P2}^n} \left\{ \begin{array}{l} |\overrightarrow{a_{P2}^n}| = \omega_2^2 \cdot \overline{O_2P} = (0,6 \text{ rad/s})^2 \cdot (43 \text{ mm} \times 2) \\ = 30,96 \text{ mm/s}^2 \\ \text{dir. } \parallel \overline{O_2P} \text{ y sentido hacia } O_2 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{a_{P2}^t} \left\{ \begin{array}{l} |\overrightarrow{a_{P2}^t}| = \alpha_2 \cdot \overline{O_2P} \text{ (desconocida)} \\ \text{dir. } \perp \overline{O_2P} \text{ y sentido acorde con } \overrightarrow{\alpha_3} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

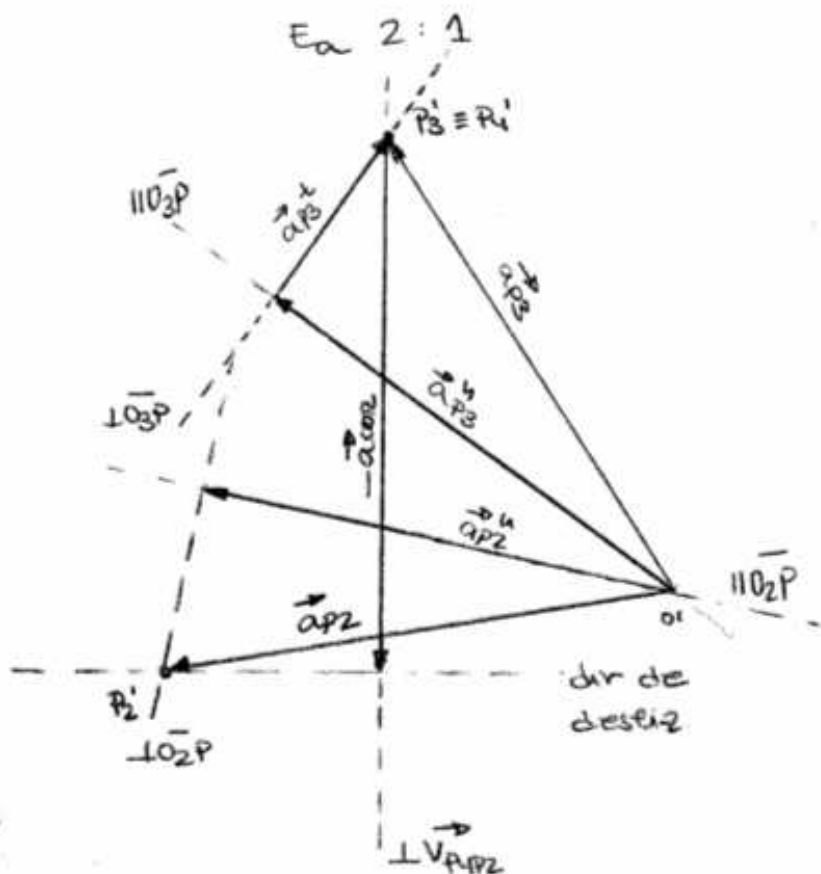
por otra parte :

$$\overrightarrow{a_{P4}} = \overrightarrow{a_{P2}} + \overrightarrow{a_{P4P2}} + \overrightarrow{a_{cor}}$$

$\overrightarrow{a_{P4P2}}$ lleva la dir de deslizamiento

$$\overrightarrow{a_{cor}} = \overrightarrow{\omega_2} \wedge \overrightarrow{V_{P4P2}} \left\{ \begin{array}{l} |\overrightarrow{a_{cor}}| = \omega_2 \cdot V_{P4P2}(\text{cinema}) = 0,60 \text{ rad/s} \cdot 28 \text{ mm/s} \\ = 33,6 \text{ mm/s}^2 \\ \text{dir. } \perp \overrightarrow{V_{P4P2}} \text{ y sentido acorde con la regla de} \\ \text{la mano derecha} \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{a_{P2}} = \overrightarrow{a_{P4}} - \overrightarrow{a_{P4P2}} - \overrightarrow{a_{cor}}$$



- El cinema del eslabón 2 viene representado por el segmento $\overline{o'p'_2}$
- El cinema del eslabón 4 viene representado por el segmento $\overline{o'p'_3}$
- El cinema de la corredera 4 viene representado por el punto p'_4

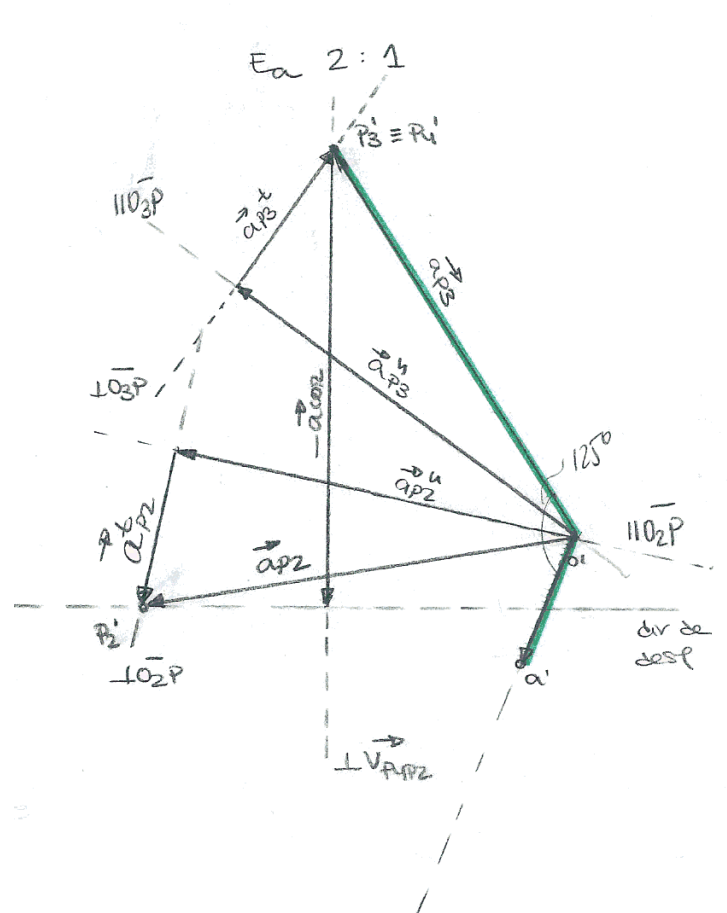
5.- Remarque el cinema del eslabón 3 (AO_3P). Calcular la aceleración angular del eslabón 2.

Necesitamos calcular el punto homólogo del mecanismo A en el cinema (a'). Para ello aplicamos la propiedad de homología:

$$\frac{\overline{o'a'}}{\overline{O_3A}} = \frac{\overline{o'p'_3}}{\overline{O_3P}} \quad \frac{\overline{o'a'}}{18\text{ mm} \times 2} = \frac{68\text{ mm}}{63\text{ mm} \times 2}$$

$$\overline{o'a'} = 19,43\text{ mm}$$

El cinema del eslabón 3 aparece remarcado en verde.



$$\alpha_2 = \frac{a_{P2}^t}{O_2P} = \frac{11,5 \text{ mm/s}}{43 \text{ mm} \times 2} = 0,13 \text{ rad/s}^2 \text{ (sentido antihorario)}$$

6.- Calcula las fuerzas y momentos de inercia de los eslabones. Calcule la F necesaria a aplicar en el punto A (según figura) para conseguir que el mecanismo esté en equilibrio (no considerar los pesos).

Cálculo de las fuerzas y momentos de inercia:

$$\begin{aligned}\vec{F}_i &= -m_i \cdot \vec{a}_{Gi} \\ \vec{M}_i &= -I_{Gi} \cdot \vec{\alpha}_i\end{aligned}$$

En el caso de los eslabones 3 y 4, el enunciado nos indica que son despreciables. Para el cálculo de la fuerza de inercia del eslabón 2, será necesario obtener, previamente la aceleración de su centro de gravedad. Para ello, aplicamos la homología con el cinema de aceleraciones del eslabón 2.

$$\begin{aligned}\frac{\overline{o'g_2'}}{\overline{O_2G_2}} &= \frac{\overline{o'p_2'}}{\overline{O_2P}} & \frac{\overline{o'g_2'}}{20 \text{ mm} \times 2} &= \frac{62 \text{ mm}}{43 \text{ mm} \times 2} \\ \overline{o'g_2'} &= 30,23 \text{ mm} & \rightarrow \vec{a}_{G2} &= 15,12 \text{ mm/s}^2\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}|\vec{F}_2| &= m_2 \cdot |\vec{a}_{G2}| = 5 \text{ Kg} \cdot 15,12 \text{ mm/s}^2 = 75 \cdot 10^{-3} \text{ N} \\ &\text{misma dir. que } \vec{a}_{G2} \text{ y sentido contrario} \\ |\vec{M}_2| &= I_{G2} \cdot |\vec{\alpha}_2| = 24 \text{ Kg} \cdot \text{cm}^2 \cdot 0,13 \text{ rd/s}^2 = 3,12 \text{ Kg} \cdot \text{cm}^2/\text{s}^2 \\ &\text{misma dir. que } \vec{\alpha}_2 \text{ y sentido contrario (antihorario)}\end{aligned}$$

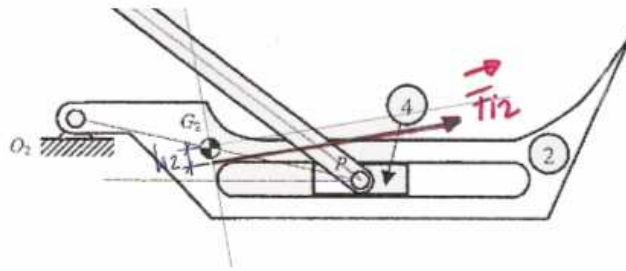
Calcular la F en el punto A para conseguir el equilibrio:

Para eliminar el momento en el mecanismo, desplazamos la fuerza de inercia una distancia tal que se consiga el efecto de M.

$$h_2 = \frac{|\vec{M}_2|}{|\vec{F}_2|} = \frac{3,12 \text{ Kg} \cdot \text{cm}^2/\text{s}^2}{75 \cdot 10^{-1} \text{ Kg} \cdot \text{cm}/\text{s}^2} = 4,16 \text{ mm}$$

A la hora de marcarla en el dibujo, hay que tener en cuenta que el mecanismo está a escala 1:2

Luego la fuerza debe desplazarse 2 mm, en su dirección perpendicular.



La escala de fuerzas en el dibujo es $1 \text{ cm} : 2 \cdot 10^{-3} \text{ N}$

Este apartado puede resolverse de diferentes maneras:

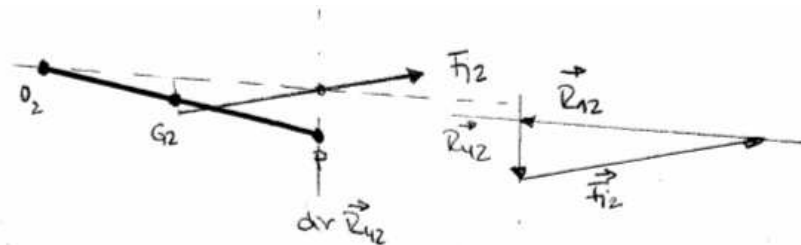
1.- Resultado gráfico: principio de superposición. Equilibrio cada uno de los eslabones.

Eslabón 2: fuerzas que actúan \vec{F}_{i2} , \vec{R}_{12} , \vec{R}_{42} , el equilibrio se da cuando:

$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{i2} + \vec{R}_{12} + \vec{R}_{42} = 0$ Los tres vectores deben formar un triángulo.

$\sum \vec{M} = 0$ Los tres vectores deben converger en un punto.

Por otro lado, conocemos la dirección del vector \vec{R}_{42} , que es perpendicular a la dirección de deslizamiento

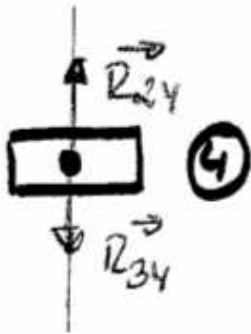


$$\begin{cases} |\vec{F}_{i2}| = 75,10^{-3} \text{ N} \\ |\vec{R}_{12}| = 18,10^{-3} \text{ N} \\ |\vec{R}_{42}| = 64,10^{-3} \text{ N} \end{cases}$$

Eslabón 4: fuerzas que actúan \vec{R}_{34} , $\vec{R}_{24} (= -\vec{R}_{42})$, el equilibrio se da cuando:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{24} + \vec{R}_{34} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{24} = -\vec{R}_{34}$$

$\sum \vec{M} = 0$ Se cumple, puesto que los dos vectores pasan por el punto P.



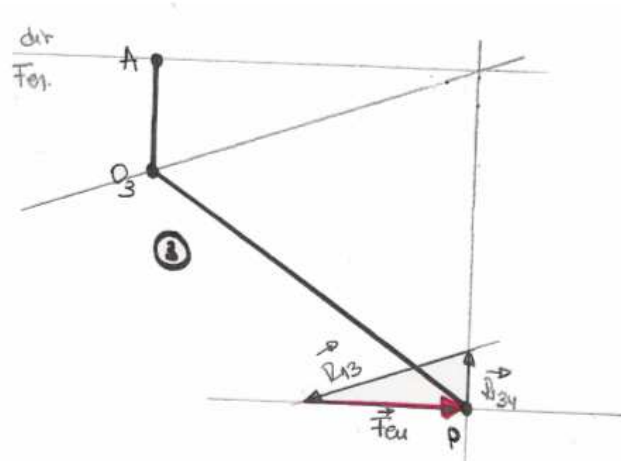
$$\begin{aligned} |\vec{R}_{24}| &= 64,10^{-3} N \\ |\vec{R}_{34}| &= 64,10^{-3} N \end{aligned}$$

Eslabón 3: fuerzas que actúan \vec{F}_{en} , \vec{R}_{13} , \vec{R}_{43} ($= -\vec{R}_{34}$), el equilibrio se da cuando:

$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{en} + \vec{R}_{13} + \vec{R}_{43} = 0$ Los tres vectores deben formar un triángulo.

$\sum \vec{M} = 0$ Los tres vectores deben converger en un punto.

Por otro lado, conocemos la dirección del vector \vec{F}_{en} , que es perpendicular al segmento $\overline{O_3A}$



$$\begin{aligned} \left| \overrightarrow{F_{en}} \right| &= 54,10^{-3} N \\ \left| \overrightarrow{R_{13}} \right| &= 56,10^{-3} N \\ \left| \overrightarrow{R_{43}} \right| &= 18,10^{-3} N \end{aligned}$$

2.- Resultado analítico: principio de los trabajos virtuales.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_{i2}} \cdot \overrightarrow{V_{G2}} + \overrightarrow{M_{i2}} \cdot \overrightarrow{\omega_2} + \overrightarrow{F_{en}} \cdot \overrightarrow{V_A} &= 0 \\ \left| \overrightarrow{F_{i2}} \right| \cdot \left| \overrightarrow{V_{G2}} \right| \cdot \cos(110) + \left| \overrightarrow{M_{i2}} \right| \cdot \left| \overrightarrow{\omega_2} \right| \cdot \cos(180) + \left| \overrightarrow{F_{en}} \right| \cdot \left| \overrightarrow{V_A} \right| \cos(0) &= 0 \\ (75 \cdot 10^{-3} N) \cdot (26,5 \cdot 10^{-3} m/s) \cdot \cos(110) + & \\ + (3,12 \cdot 10^{-4} Nm) \cdot (0,6 rad/s) \cdot \cos(180) + & \\ + \left| \overrightarrow{F_{en}} \right| \cdot (18 \cdot 10^{-3} m/s) \cos(0) &= 0 \\ \left| \overrightarrow{F_{en}} \right| &= 48,2 \cdot 10^{-3} N \end{aligned}$$

dirección como aparece en la figura, y sentido contrario al dibujo.

6.4. Problema de dinámica completo

El mecanismo de la figura es un cuadrilátero articulado. Calcular las acciones en las barras y reacciones en la bancada, así como el par acelerador M_{a_2} , necesario aplicar en la manivela de entrada (2), para equilibrar el sistema.

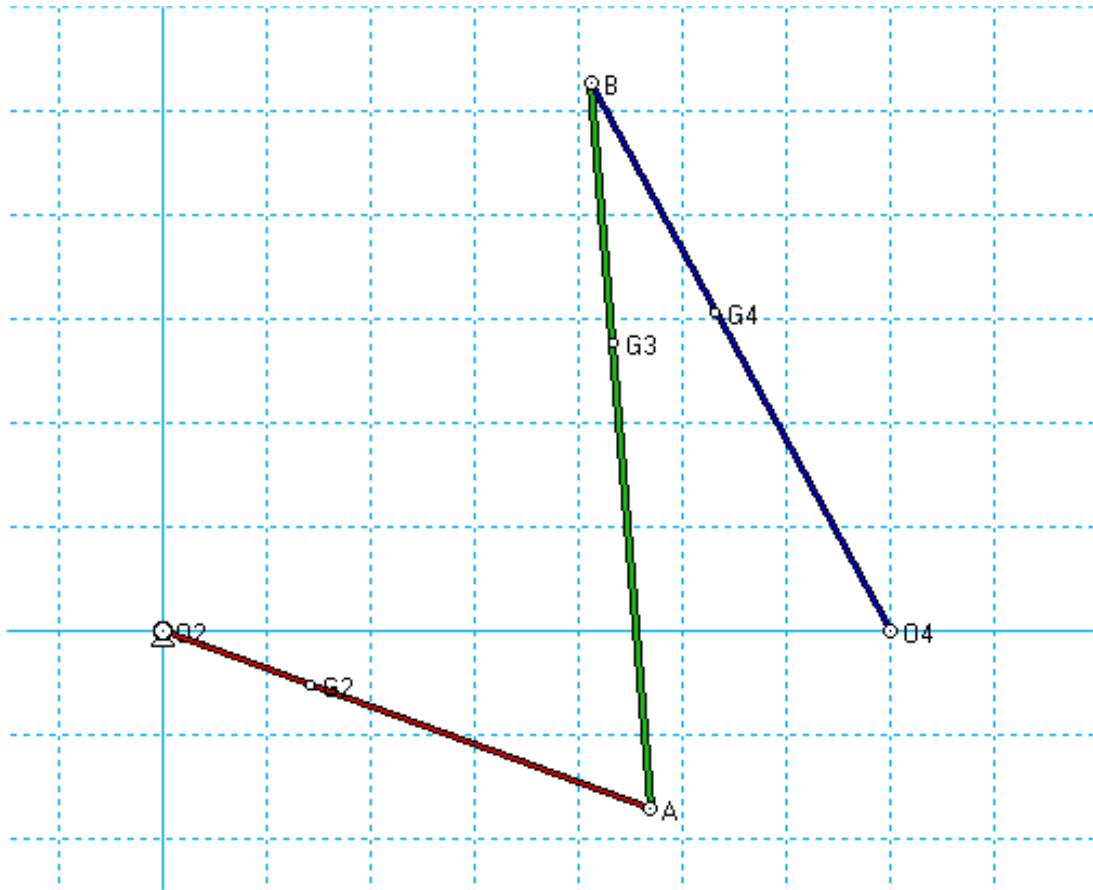


Figura 6.7: Análisis completo, cuadrilátero articulado.

Los datos del mecanismo son los siguientes:

velocidad angular de la manivela de entrada (2): $\omega_2 = 10 \text{ rd/s}$ antihorario y constante.

$$\begin{array}{llll}
 O_2A = 0,5 \text{ m} & O_2G_2 = 0,2 \text{ m} & m_2 = 0,5 \text{ Kg} & I_{G_2} = 0,0625 \text{ Kg m}^2 \\
 AB = 0,7 \text{ m} & AG_3 = 0,4 \text{ m} & m_3 = 0,7 \text{ Kg} & I_{G_3} = 0,172 \text{ Kg m}^2 \\
 BO_4 = 0,6 \text{ m} & O_4G_4 = 0,35 \text{ m} & m_4 = 0,6 \text{ Kg} & I_{G_4} = 0,108 \text{ Kg m}^2
 \end{array}$$

Solución:

Análisis cinemático. Cálculo de velocidades

- Eslabón 2: MANIVELA

$$\begin{aligned} |\vec{V}_A| &= \omega_2 \cdot \overline{O_2A} = (10 \text{ rd/s}) \cdot 0,5 \text{ m} = 5 \text{ m/s} \\ \text{dir. } &\perp \overline{O_2A}, \text{ sentido } \omega_2 \text{ (antihorario)} \end{aligned}$$

- Eslabón 3: BIELA

$$\begin{aligned} \vec{V}_B &= \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \\ \text{dir. } &\vec{V}_{BA} \perp \overline{BA} \end{aligned}$$

- Eslabón 4: MANIVELA

$$\text{dir. } \vec{V}_B \perp \overline{O_4B}$$

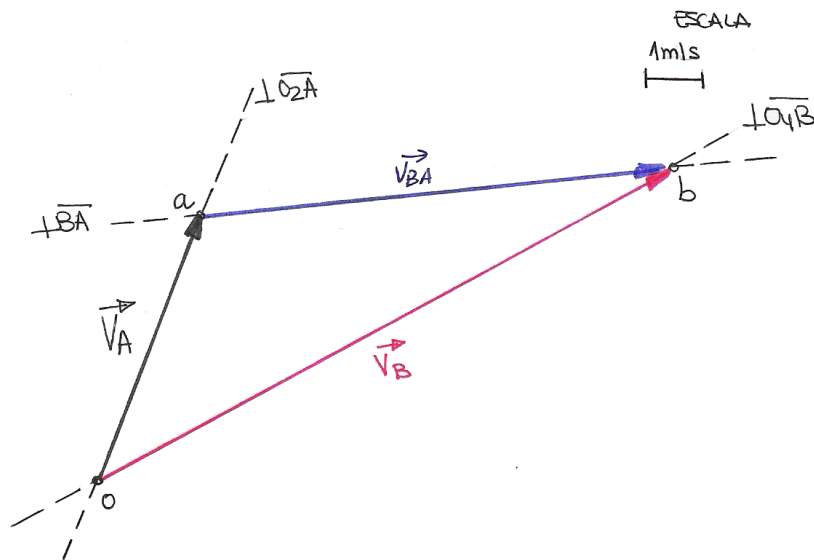


Figura 6.8: Cinemática de velocidades.

de los datos recogidos del cinemática de velocidades se obtiene que:

$$|\vec{V}_{BA}| = \omega_3 \cdot \overline{BA} \Rightarrow \omega_3 = \frac{|\vec{V}_{BA}|}{\overline{BA}} = \frac{8,3 \text{ m/s}}{0,7 \text{ m}} = 11,86 \text{ rd/s (horario)}$$

$$|\vec{V}_B| = \omega_4 \cdot \overline{O_4B} \Rightarrow \omega_4 = \frac{|\vec{V}_B|}{\overline{O_4B}} = \frac{11,5 \text{ m/s}}{0,6 \text{ m}} = 19,17 \text{ rd/s (horario)}$$

Análisis cinemático. Cálculo de aceleraciones

- Eslabón 2: MANIVELA

$$\begin{aligned}\vec{a}_A &= \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^t, \quad \omega_2 = cte \Rightarrow \alpha_2 = 0 \\ |\vec{a}_A^n| &= \omega_2^2 \cdot \overline{O_2A} = (10 \text{ rd/s})^2 \cdot 0,5 \text{ m} = 50 \text{ m/s}^2 \\ \text{dir} &\parallel \overline{O_2A}, \text{ sentido de } A \text{ a } O_2\end{aligned}$$

- Eslabón 3: BIELA

$$\begin{aligned}\vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \\ &= \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t\end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} |\vec{a}_{BA}^n| = \omega_3^2 \cdot \overline{BA} = (11,86 \text{ rd/s})^2 \cdot 0,5 \text{ m} = 70,33 \text{ m/s}^2 \\ \text{dir} \parallel \overline{BA}, \text{ sentido de } B \text{ a } A \\ \text{dir } \vec{a}_{BA}^t \perp \overline{BA} \end{array} \right. \quad (6.1)$$

- Eslabón 4: MANIVELA

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^t \quad \left\{ \begin{array}{l} |\vec{a}_B^n| = \omega_4^2 \cdot \overline{BO_4} = (19,17 \text{ rd/s})^2 \cdot 0,6 \text{ m} = 220,49 \text{ m/s}^2 \\ \text{dir} \parallel \overline{BO_4}, \text{ sentido de } B \text{ a } O_4 \\ \text{dir } \vec{a}_B^t \perp \overline{BO_4} \end{array} \right. \quad (6.2)$$

de los datos recogidos del cinema de aceleraciones se obtiene que:

$$|\vec{a}_{BA}^t| = \alpha_3 \cdot \overline{BA} \Rightarrow \alpha_3 = \frac{|\vec{a}_{BA}^t|}{\overline{BA}} = \frac{500 \text{ m/s}^2}{0,7 \text{ m}} = 714,28 \text{ rd/s}^2 \text{ (horario)}$$

$$|\vec{a}_B^t| = \alpha_4 \cdot \overline{O_4B} \Rightarrow \alpha_4 = \frac{|\vec{a}_B^t|}{\overline{O_4B}} = \frac{400 \text{ m/s}^2}{0,6 \text{ m}} = 666,66 \text{ rd/s}^2 \text{ (horario)}$$

Análisis cinemático. Cálculo de las aceleraciones de los centros de gravedad

Para el cálculo de las fuerzas de inercia, es necesario conocer previamente, los valores de las aceleraciones de los centros de gravedad de cada uno de los eslabones.

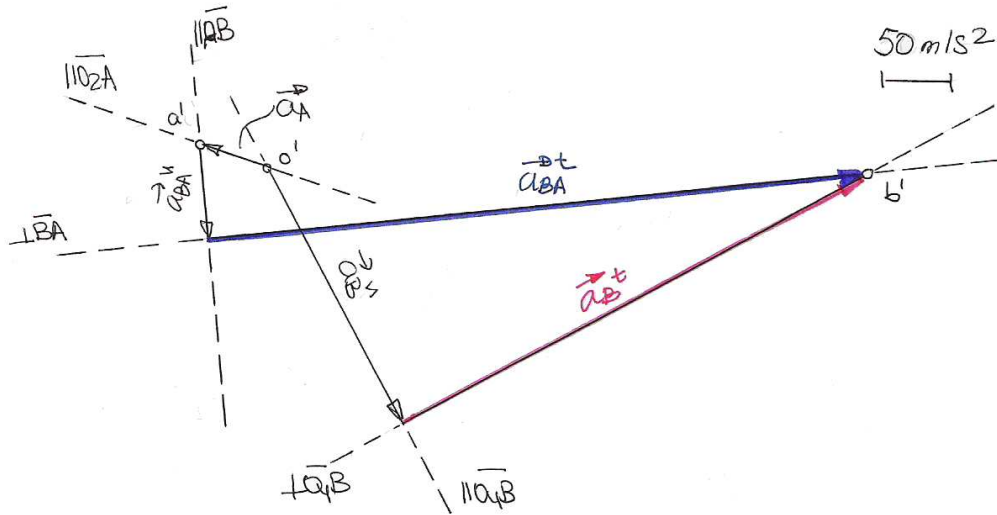


Figura 6.9: Cinemática de aceleraciones.

Una vez obtenido el cinemática de aceleraciones de la figura 6.9, los valores de aceleración de cualquier punto del mecanismo se obtienen utilizando la propiedad de homología entre el cinemática de aceleraciones y el mecanismo.

- Eslabón 2:

$$\frac{\overline{a'g'_2}}{\overline{O_2G_2}} = \frac{\overline{a'a'}}{\overline{O_2A}} \Rightarrow \overline{a'g'_2} = \overline{a'a'} \cdot \frac{\overline{O_2G_2}}{\overline{O_2A}} \Rightarrow \overline{a'g'_2} = 1\text{cm} \cdot \frac{0,2\text{m}}{0,5\text{m}} = 0,4\text{cm}$$

$$|\vec{a}_{G_2}| = 20 \text{ m/s}^2$$

- Eslabón 3:

$$\frac{\overline{a'g'_3}}{\overline{AG_3}} = \frac{\overline{a'b'}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{a'g'_3} = \overline{a'b'} \cdot \frac{\overline{AG_3}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{a'g'_3} = 10\text{cm} \cdot \frac{0,4\text{m}}{0,7\text{m}} = 5,7\text{cm}$$

$$|\vec{a}_{G_3}| = 225 \text{ m/s}^2$$

- Eslabón 4:

$$\frac{\overline{a'g'_4}}{\overline{O_4G_4}} = \frac{\overline{a'b'}}{\overline{O_4B}} \Rightarrow \overline{a'g'_4} = \overline{a'b'} \cdot \frac{\overline{O_4G_4}}{\overline{O_4B}} \Rightarrow \overline{a'g'_4} = 9\text{cm} \cdot \frac{0,35\text{m}}{0,6\text{m}} = 5,3\text{cm}$$

$$|\vec{a}_{G_4}| = 265 \text{ m/s}^2$$

Las direcciones y sentidos de los vectores se reflejan en el cinemática de aceleraciones:

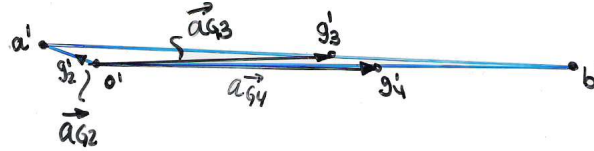


Figura 6.10: Obtención de las aceleraciones de los centros de gravedad de cada eslabón.

Análisis dinámico. Cálculo de los esfuerzos de inercia

Las fuerzas y momentos de inercia se calculan aplicando las siguientes expresiones, para cada eslabón k:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{ik} &= -m_k \cdot \vec{a}_{G_k} \\ \vec{M}_{ik} &= -I_{G_k} \cdot \vec{\alpha}_k\end{aligned}$$

Estas fórmulas se aplican a cada eslabón.

- Eslabón 2:

$$\begin{aligned}|\vec{F}_{i2}| &= m_2 \cdot |\vec{a}_{G_2}| = 0,5Kg \cdot 20m/s^2 = 10 \text{ N} \\ |\vec{M}_{i2}| &= I_{G_2} \cdot |\vec{\alpha}_2| = 0,0625Kg m^2 \cdot 0rad/s^2 = 0 \text{ Nm}\end{aligned}$$

- Eslabón 3:

$$\begin{aligned}|\vec{F}_{i3}| &= m_3 \cdot |\vec{a}_{G_3}| = 0,7Kg \cdot 225m/s^2 = 157,5 \text{ N} \\ |\vec{M}_{i3}| &= I_{G_3} \cdot |\vec{\alpha}_3| = 0,172Kg m^2 \cdot 714,28rad/s^2 = 122,85 \text{ Nm}\end{aligned}$$

- Eslabón 4:

$$\begin{aligned}|\vec{F}_{i4}| &= m_4 \cdot |\vec{a}_{G_4}| = 0,6Kg \cdot 265m/s^2 = 159 \text{ N} \\ |\vec{M}_{i4}| &= I_{G_4} \cdot |\vec{\alpha}_4| = 0,108Kg m^2 \cdot 666,66rad/s^2 = 72 \text{ Nm}\end{aligned}$$

La dirección y el sentido de cada uno de los vectores se representan en la siguiente figura 6.11:

Para hacer más sencillo el análisis dinámico del mecanismo, sustituimos los esfuerzos de inercia por la fuerza de inercia equivalente \vec{F}'_{ik} , cuyo módulo, dirección y sentido coincide con el de la fuerza de inercia, pero se encuentra desplazada (en la dirección perpendicular a la línea de acción de la fuerza de inercia) una distancia h_k tal que:

$$M_{ik} = F_{ik} \cdot h_k \quad \Rightarrow \quad h_k = \frac{M_{ik}}{F_{ik}}$$

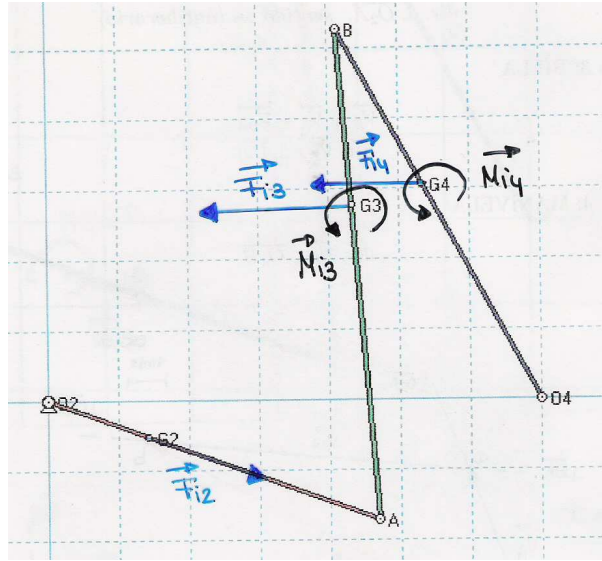


Figura 6.11: Obtención de los esfuerzos de inercia.

- Eslabón 2:

$$h_2 = \frac{M_{i2}}{F_{i2}} = \frac{0Nm}{10N} = 0 \text{ m} \quad (6.3)$$

- Eslabón 3:

$$h_3 = \frac{M_{i3}}{F_{i3}} = \frac{122,85Nm}{157,5N} = 0,78 \text{ m} \quad (6.4)$$

- Eslabón 4:

$$h_4 = \frac{M_{i4}}{F_{i4}} = \frac{72Nm}{159N} = 0,45 \text{ m} \quad (6.5)$$

Resultando el problema que se presenta en la figura:

Una vez conseguida toda la información de la dinámica del sistema, se obtienen las reacciones entre los eslabones, incluido la bancada, aplicando el principio de superposición.

Análisis dinámico. Aplicación del principio de superposición

Se resolverán 3 problemas diferentes correspondientes a las tres fuerzas de inercia equivalentes obtenidas.

Primer problema

Consideramos exclusivamente los efectos producidos por la fuerza de inercia equivalente aplicada en el eslabón 2.

Equilibramos eslabón a eslabón.

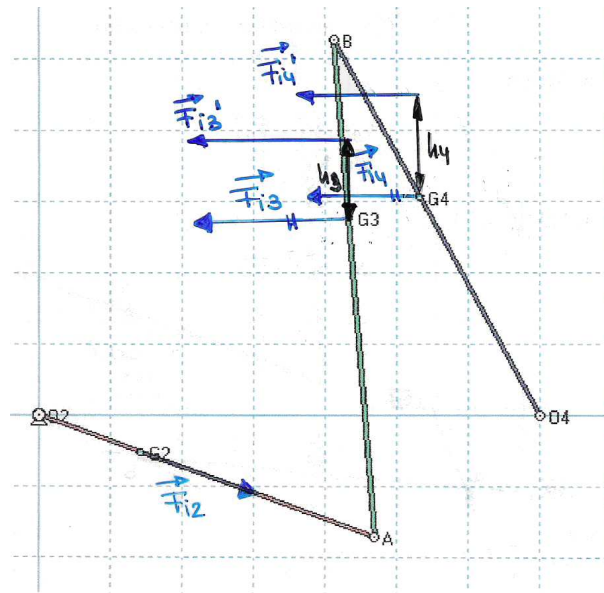


Figura 6.12: Obtención de la fuerza de inercia equivalente.

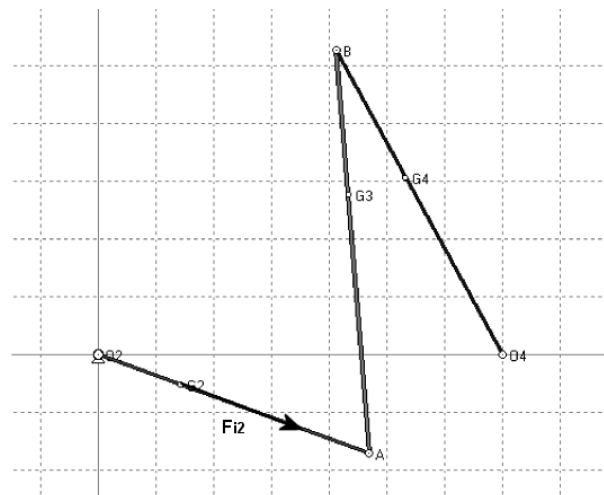


Figura 6.13: Problema 1.

- Eslabón 4: Fuerzas que actúan $\Rightarrow \overrightarrow{R_{14}}, \overrightarrow{R_{34}}$
- Eslabón 3: Fuerzas que actúan $\Rightarrow \overrightarrow{R_{43}}, \overrightarrow{R_{23}}$

Observando los resultados obtenidos hasta ahora, y sabiendo que $\overrightarrow{R_{34}} = -\overrightarrow{R_{43}}$ se llega a la conclusión de que la única solución posible para dos

$$\sum F = 0 \Rightarrow \vec{R}_{14} = -\vec{R}_{34}$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow \text{las direcciones de las dos reacciones deben estar alineadas con el eslabón.}$$

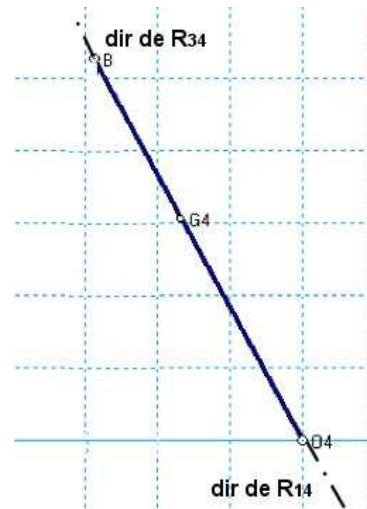


Figura 6.14: Equilibrio en el eslabón 4.

$$\sum F = 0 \Rightarrow \vec{R}_{43} = -\vec{R}_{23}$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow \text{las dirección de las dos reacciones deben estar alineadas con el eslabón.}$$



Figura 6.15: Equilibrio en el eslabón 3.

vectores iguales en módulo y dirección, pero con direcciones diferentes, es el vector nulo, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\vec{R}_{34} &= 0 \\ \vec{R}_{14} &= 0 \\ \vec{R}_{23} &= 0\end{aligned}$$

- Eslabón 2: Fuerzas que actúan $\Rightarrow \vec{R}_{12}, \vec{R}_{32} = -\vec{R}_{32} = 0 \quad \vec{F}_{i2}$

$$\sum F = 0 \Rightarrow \vec{R}_{12} = -\vec{F}_{i2}$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow \text{las dirección de las dos reacciones deben estar alineadas con el eslabón.}$$
 Esto se cumple.

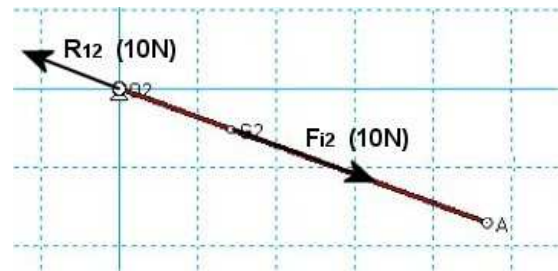


Figura 6.16: Equilibrio en el eslabón 2.

Segundo problema

Consideramos exclusivamente los efectos producidos por la fuerza de inercia equivalente aplicada en el eslabón 3.

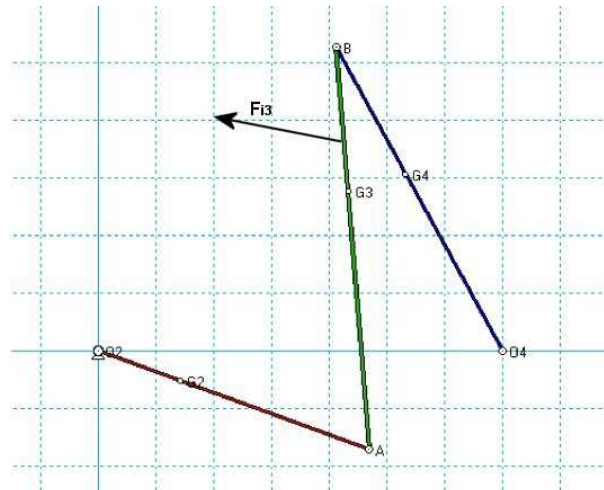


Figura 6.17: Problema 2.

Equilibramos eslabón a eslabón.

- Eslabón 4: Fuerzas que actúan $\Rightarrow \vec{R}_{14}, \vec{R}_{34}$
- Eslabón 3: Fuerzas que actúan $\Rightarrow \vec{R}_{43} = -\vec{R}_{34}, \vec{R}_{23}, \vec{F}_{i3}$

$\sum F = 0 \Rightarrow$ los tres vectores deben cerrar un triángulo.

$\sum M = 0 \Rightarrow$ las dirección de los tres vectores deben confluir en un punto.

$$\sum F = 0 \Rightarrow \overrightarrow{R_{14}} = -\overrightarrow{R_{34}}$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow \text{las direcciones de las dos reacciones deben estar alineadas con el eslabón.}$$

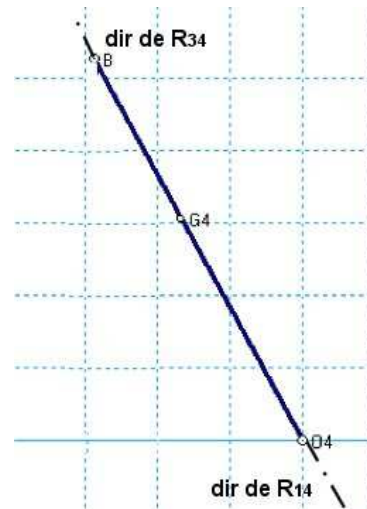


Figura 6.18: Equilibrio en el eslabón 4.

- Eslabón 2: Fuerzas que actúan $\Rightarrow \overrightarrow{R_{12}}, \overrightarrow{R_{32}} = -\overrightarrow{R_{32}}$

Tercer problema

Consideramos exclusivamente los efectos producidos por la fuerza de inercia equivalente aplicada en el eslabón 4.

Equilibramos eslabón a eslabón.

- Eslabón 4: Fuerzas que actúan $\Rightarrow \overrightarrow{R_{14}}, \overrightarrow{R_{34}}, \overrightarrow{F_{i4}}$

$\sum F = 0 \Rightarrow$ los tres vectores deben cerrar un triángulo.

$\sum M = 0 \Rightarrow$ las direcciones de los tres vectores deben confluir en un punto.

Como no tenemos suficiente información debemos pasar al siguiente eslabón.

- Eslabón 3: Fuerzas que actúan $\Rightarrow \overrightarrow{R_{43}}, \overrightarrow{R_{23}}$
- Eslabón 4:
 $\overrightarrow{R_{34}} = -\overrightarrow{R_{43}}$ nos da una de las direcciones necesarias, que junto con la de la fuerza de inercia $\overrightarrow{F_{i4}}$, nos permitirán calcular el punto de confluencia.

Con esta solución se consiguen los valores de las reacciones en el eslabón 3:

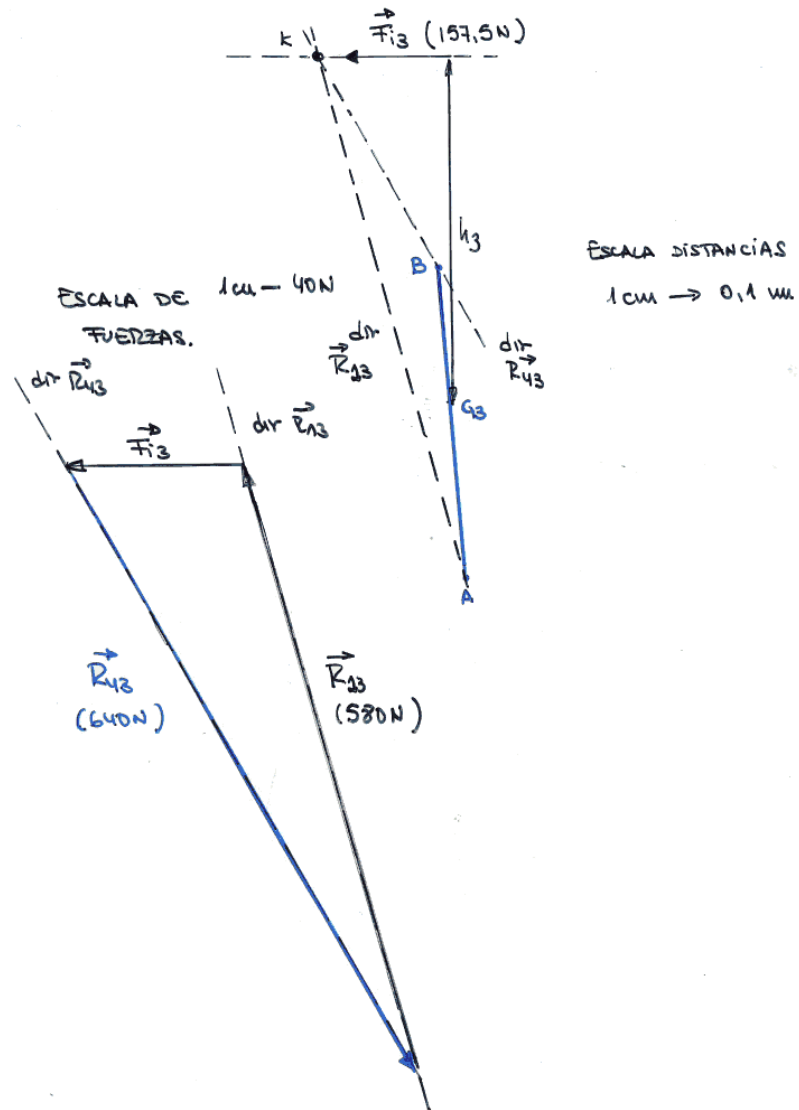


Figura 6.19: Equilibrio en el eslabón 3.

$$\sum F = 0 \Rightarrow \vec{R}_{12} = -\vec{R}_{32}$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow \Rightarrow M(\vec{R}_{32}) + \vec{M}_{a2} = 0$$

$$M_{a2} = R_{32} \cdot d_2 = 580N \cdot 0,42m = 253,6 Nm$$

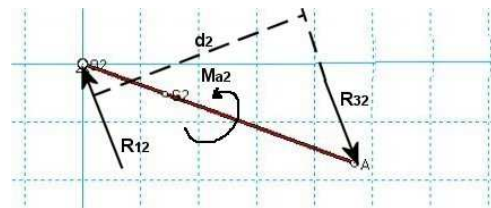


Figura 6.20: Equilibrio en el eslabón 2.

$$\begin{aligned} \vec{R}_{43} &= -\vec{R}_{34} \quad (464N) \\ \vec{R}_{23} &= -\vec{R}_{43} \quad (464N) \end{aligned} \quad (6.6)$$

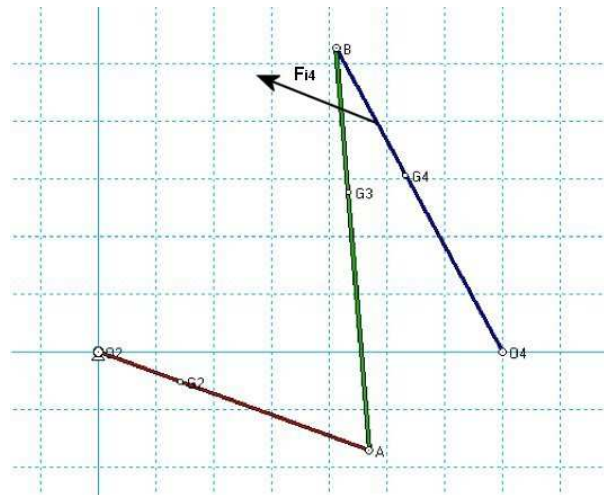


Figura 6.21: Problema 3.

$$\sum F = 0 \Rightarrow \vec{R}_{43} = -\vec{R}_{23}$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow \text{las direcciones de las dos reacciones deben estar alineadas con el eslabón.}$$

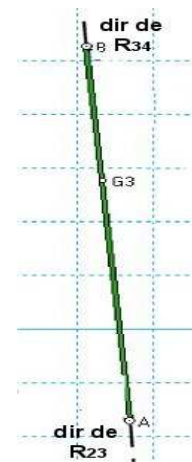


Figura 6.22: Equilibrio en el eslabón 3.

- Eslabón 2: Fuerzas que actúan $\Rightarrow \vec{R}_{12}, \vec{R}_{32} = -\vec{R}_{32}$

Resolución completa al problema de dinámica

Con las soluciones de los tres problemas, se obtienen los valores de las reacciones en cada eslabón y el par acelerador, mediante la suma vectorial.

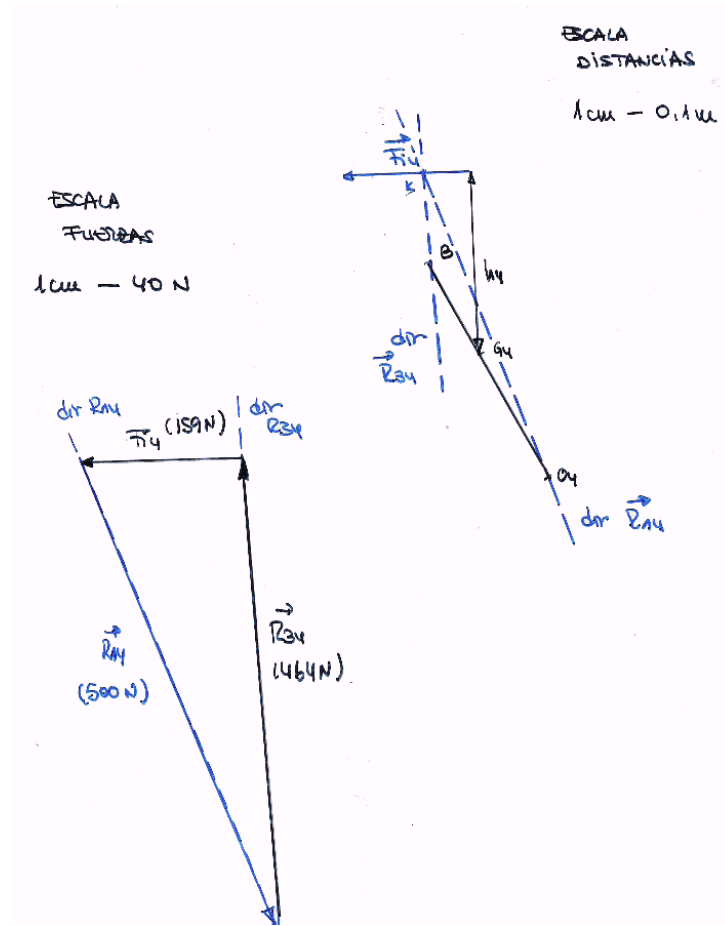


Figura 6.23: Equilibrio en el eslabón 4.

$$\sum F = 0 \Rightarrow \vec{R}_{12} = -\vec{R}_{32} \quad (464N)$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow \Rightarrow M(\vec{R}_{32}) + \vec{M}_{a2} = 0$$

$$M_{a2} = R_{32} \cdot d_2 = 564N \cdot 0,45m = 253,8 Nm$$

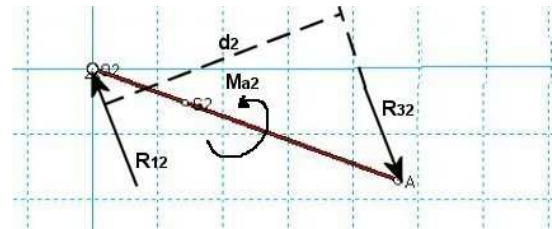


Figura 6.24: Equilibrio en el eslabón 2.

$$\begin{aligned}\vec{R}_{14} &= \vec{R}_{14}^I(0N) + \vec{R}_{14}^{II} + \vec{R}_{14}^{III} \\ \vec{R}_{34} &= \vec{R}_{34}^I(0N) + \vec{R}_{34}^{II} + \vec{R}_{34}^{III} \\ \vec{R}_{23} &= \vec{R}_{23}^I(0N) + \vec{R}_{23}^{II} + \vec{R}_{23}^{III} \\ \vec{R}_{12} &= \vec{R}_{12}^I + \vec{R}_{12}^{II} + \vec{R}_{12}^{III} \\ \vec{M}_{2a} &= \vec{M}_{2a}^I(0Nm) + \vec{M}_{2a}^{II} + \vec{M}_{2a}^{III}\end{aligned}$$

Estos resultados se obtienen gráficamente, excepto en el caso del para acelerador, cuyas direcciones son perpendiculares al plano de trabajo y tienen la misma dirección, por lo que sus módulos se suman.

$$M_{2a} = 0Nm + 253,6Nm + 253,8Nm = 507,4 \text{ sentido antihorario.}$$

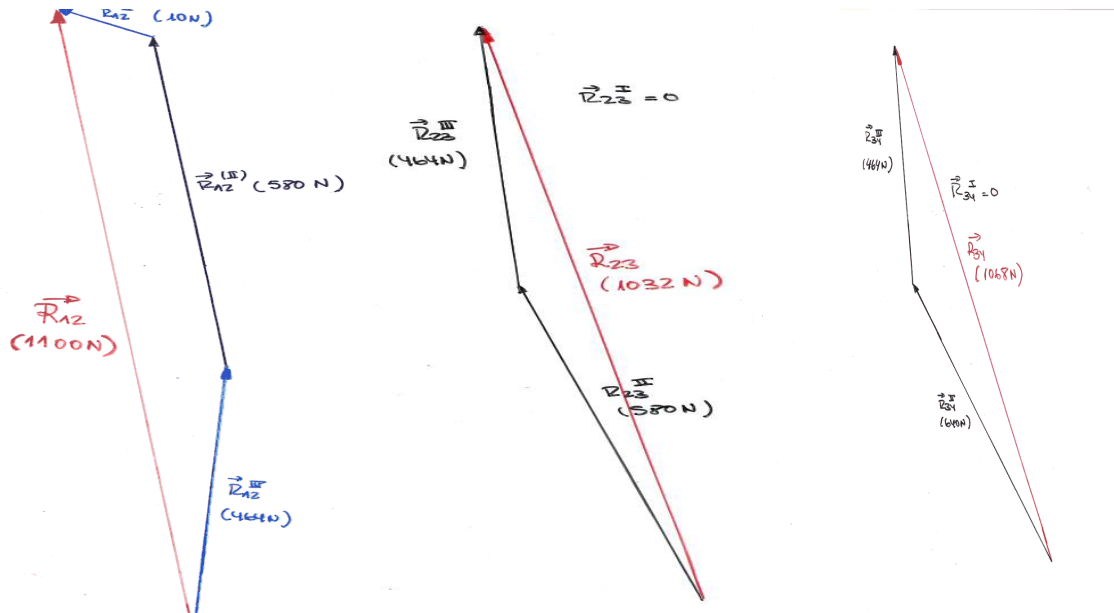


Figura 6.25: Suma de reacciones R_{12} . Figura 6.26: Obtención de R_{23} . Figura 6.27: Obtención de R_{34} .

6.5. Problema de engranajes (Junio 2000)

Se quiere diseñar un tren de engranajes ordinario compuesto recurrente formado por dos pares de ruedas dentadas externas cilíndrico rectas, para lo cual se dispone de los siguientes datos:

- Razón de velocidades de una de las parejas (considerándola como la relación de velocidades entre el eje de salida y el de entrada del engrane): 1319 / 237.
- Distancia entre centros: 184 mm.

Sabiendo que todas las ruedas de que se dispone tienen el mismo módulo, y que oscilan entre 14 y 98 dientes, se pide:

1. Para la pareja cuya razón de velocidades se indica:

- Obtener el número de dientes de cada rueda y el módulo, indicando cuál de ellas es el piñón y cuál la rueda.

- b)* Paso, espesor, hueco, adendo, dedendo, juego en cabeza, diámetro primitivo y diámetro de base para cada rueda (considerando que el ángulo de presión es de 20°).
 - c)* A la vista de los datos obtenidos en el apartado 1.2, ¿se puede asegurar que en ninguna de las ruedas se producirá el fenómeno de penetración?
 - d)* Indicar el error (absoluto y relativo) cometido en la relación de transmisión de esta pareja.
2. Para la otra pareja:
 - a)* ¿Cuál es la máxima relación de transmisión entera que se puede obtener?
 - b)* Para esa relación de transmisión, obtener el número de dientes de cada rueda, indicando cuál de ellas es el piñón y cuál la rueda.
 - c)* Para cada rueda, obtener el paso, espesor, hueco, adendo, dedendo, juego en cabeza, diámetro primitivo y diámetro de base (considerando que el ángulo de presión es de 20°).
3. Indicar la disposición más razonable para ambos pares de ruedas.
4. Si el tren se transforma en uno epicicloidal recurrente en el que la rueda directamente montada sobre el eje de entrada se fija al marco, y considerando ahora como velocidad angular de entrada la asociada al soporte en el que van montados los satélites:
 - a)* Calcular la velocidad de salida cuando el soporte gira a 100 rpm.
 - b)* Obtener la relación analítica entre la relación de transmisión de un tren ordinario compuesto recurrente de dos pares de ruedas dentadas externas de número de dientes a , b , c y d , y la del tren epicicloidal recurrente homólogo.

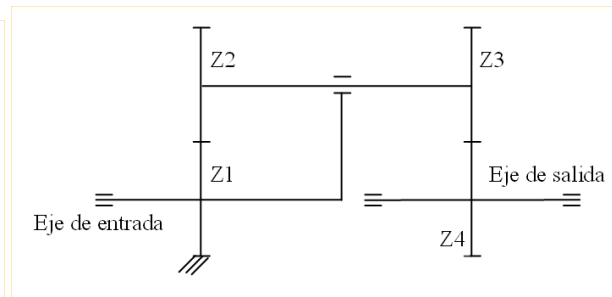
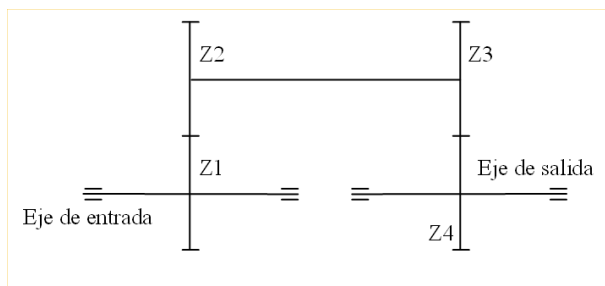


Figura 6.28: Esquema del tren ordinario compuesto recurrente formado por dos pares de ruedas dentadas externas. **Figura 6.29:** Esquema del tren epicicloidal recurrente homólogo.

1.c.

	r - ha	rb * cos 20°	r - ha ≥ rb * cos 20°	¿PENETRACIÓN?
Rueda	152	137.75	SI	NO
Piñón	24	24.72	NO	SI (aunque despreciable)

1.d.

$$Error\ absoluto : \left| \frac{1319}{237} - \frac{8}{14} \right| = 0,0060$$

$$Error\ relativo : \frac{Error\ absoluto}{\frac{1319}{237}} = 0,11\%$$

2.a.

Dado que la distancia entre centros debe ser la misma para ambos pares de ruedas y que todas ellas tienen el mismo módulo:

$$\frac{m \cdot Z1}{2} + \frac{m \cdot Z2}{2} = \frac{m \cdot Z3}{2} + \frac{m \cdot Z4}{2}$$

$$Z1 + Z2 = Z3 + Z4 \quad (1)$$

La relación de transmisión tendrá la siguiente expresión:

$$\frac{Z3}{Z4} = n \quad (2)$$

donde n es un número entero entre 1 y 7 ($\frac{98}{14}$).

(Designamos con los subíndices 3 y 4 las ruedas de la pareja desconocida, aunque aún no sabemos si es la 1ª o la 2ª).

Por tanto:

$$78 + 14 = n \cdot Z4 + Z4$$

$$92 = (1 + n) \cdot Z4$$

Como n y Z_4 tienen que ser números enteros, averiguamos los divisores de 92:

92	2
46	2
23	23
1	

a) $n = 1$

b) $n = 3 \leftarrow$

c) $n = 22$ (no vale pues $22 > 7$, que es la máxima relación de transmisión que se puede conseguir con un par de ruedas)

La máxima relación de transmisión entera que se puede obtener es 3.

2.b.

La rueda tiene 69 dientes y el piñón 23

2.c.

Todas las magnitudes son iguales que en la primera pareja salvo el diámetro primitivo y el diámetro base:

	Diámetro primitivo ($2 \cdot r$)	Diámetro base ($2 \cdot r_b$)
Rueda	276	259.36
Piñón	92	86.45

3. Ya que la relación de transmisión global es superior a la unidad, tendremos mayor velocidad en el eje de salida que en el de entrada, y, por tanto, menor par en el eje de salida que en el de entrada.

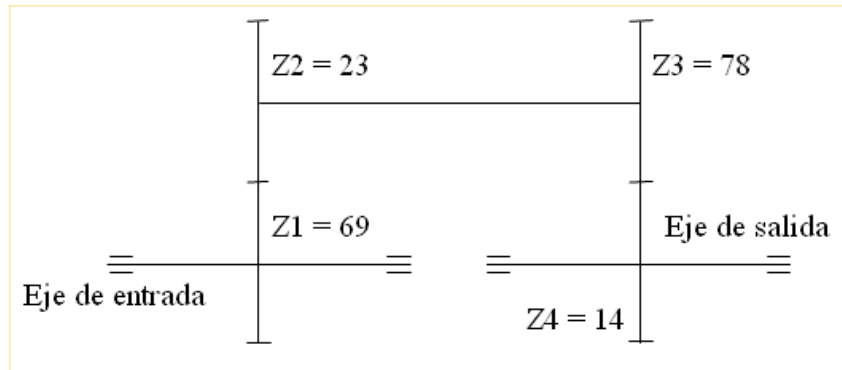
Esto implica:

- El diámetro del eje de entrada ha de ser mayor que el de salida.
- Los dientes del primer engrane estarán sometidos a un mayor esfuerzo que los del segundo.

Por tanto, los dientes de las ruedas del primer engrane deberán ser más anchos que los del segundo, lo cual implica que podrá haber más en este último que en aquel, permitiéndose una mayor multiplicación en la pareja

del eje de salida que en la del eje de entrada.

	Relación de transmisión	Rueda	Piñón
1º engrane	3	69	23
2º engrane	78 / 14	78	14



4. Aplicando la fórmula de Willis, llamando ω_s a la velocidad angular del soporte, y sabiendo que $\omega_1 = 0$:

$$\mu = \frac{\omega_4 - \omega_s}{\omega_1 - \omega_s} = \frac{\omega_4 - \omega_s}{0 - \omega_s} = \frac{69 \cdot 78}{23 \cdot 14}$$

Operando:

$$-\mu \cdot \omega_s = \omega_4 - \omega_s$$

$$\frac{\omega_4}{\omega_s} = 1 - \mu \quad (4.b)$$

Si $\omega_s = 100$ rpm:

$$\omega_4 = -1571,43 \text{ rpm} \quad (4.a.)$$

6.6. Problema de engranajes (Septiembre 2002)

Calcular mediante la técnica de la "fracciones continuas" un engranaje con ruedas cilíndrico rectas con una relación de transmisión $\mu = 127/141$, fijando un error máximo de $1/1000$.

Debido a lo limitado del espacio disponible, se utilizará una de las reducidas obtenidas cuya rueda conducida tiene 10 dientes y módulo 8. Expresar el tipo de montaje y talla de la pareja de ruedas y acotar la geometría del

par, indicando los siguientes valores:

Para cada rueda:

- Número de dientes
- Módulo
- Radio primitivo de referencia
- Radio primitivo de funcionamiento
- Radio base
- Radio de cabeza
- Radio de pie
- Ángulo de presión de referencia
- Paso
- Espesor
- Hueco
- Factor de desplazamiento
- Desplazamiento de la cremallera en la talla a V

Para la pareja de ruedas dentadas:

- Ángulo de presión de funcionamiento
- Distancia entre ejes de funcionamiento

Solución:

Apartado a

Dado que 127 es un número primo superior al número máximo de dientes de una rueda, intentamos obtener la relación más cercana a la dada mediante el método de descomposición en fracciones continuas:

	1	9	14
141	127	14	1
14	1	0	

Las reducidas sucesivas son:

a) 1

- b) $9 / 10 \quad \leftarrow \quad$ La reducida más alta construible es $9 / 10$
c) $127 / 141$

El error absoluto cometido en cada reducida es el siguiente:

- a) $9,93 \cdot 10^{-2}$
b) $7,09 \cdot 10^{-4}$
c) 0

El máximo permitido es de $1 / 1000 = 10^{-3}$. De este modo, la reducida $9 / 10$ cumple la condición.

Se tomará un engrane formado por un piñón de 9 dientes y una rueda de 10.

Apartado b

La reducida con rueda de 10 dientes es $9 / 10$. Dado que la suma del número de dientes de ambas ruedas es menor que 28, el montaje será a V, debiéndose tallar ambas ruedas a V.

Se usarán las siguientes fórmulas:

Módulo	$m = \frac{2 \cdot r}{Z}$
Paso	$p = m \cdot \pi$
Radio primitivo de funcionamiento	$r' = r \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha')}$
Espesor	$s = \frac{p}{2} + 2 \cdot m \cdot x \cdot \tan(\alpha)$
Radio base	$r_b = r \cdot \cos(\alpha)$
Hueco	$h = \frac{p}{2} - 2 \cdot m \cdot x \cdot \tan(\alpha)$
Radio de cabeza	$r_a = r + m \cdot (1 + x)$
Ángulo de presión de funcionamiento	$Ev(\alpha') = 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{Z_1 + Z_2} \cdot \tan(\alpha) + Ev(\alpha)$
Radio de pie	$r_f = r - m \cdot (1,25 - x)$
Distancia entre ejes de funcionamiento	$a' = r'_1 + r'_2$
Factor de desplazamiento	$x = \frac{14 - Z}{17}$
Desplazamiento en la talla en V	$m \cdot x$

	Piñón	Rueda
Número de dientes (Z)	9	10
Módulo (m) (mm)	8	8
Radio primitivo de referencia (r) (mm)	36	40
Radio primitivo de funcionamiento (r') (mm)	37.7350	41.9278
Radio base (rb) (mm)	33.8289	37.5877
Radio de cabeza (rc) (mm)	46.3529	49.8824
Radio de pie (rf) (mm)	28.3529	31.8824
Ángulo de presión de referencia (α) (°)	20	20
Paso (p) (mm)	25.1327	25.1327
Espesor (s) (mm)	14.2792	13.9366
Hueco (e) (mm)	10.8536	11.1961
Factor de desplazamiento (x)	0.2941	0.2353
Desplazamiento en la talla (mm)	2.3529	1.8824

Ángulo de presión de funcionamiento (°)	26.3
Distancia entre ejes de funcionamiento (mm)	79.6628

6.7. Problema de engranajes (Junio 2003)

Discutir, para obtener la reducción 13/15 entre dos ejes paralelos, la talla y montaje correspondiente siendo el piñón de 13 dientes y módulo 5.

1. Calcular los parámetros de talla y montaje.

Para cada rueda:

- Número de dientes
- Módulo
- Radio primitivo de referencia
- Radio primitivo de funcionamiento
- Radio base
- Radio de cabeza
- Radio de pie
- Ángulo de presión de referencia
- Paso
- Espesor
- Hueco
- Factor de desplazamiento (x_1 , x_2)
- Desplazamiento de la cremallera en la talla a V

Para la pareja de ruedas dentadas:

- Ángulo de presión de funcionamiento
- Distancia entre ejes de funcionamiento

2. Debido a dificultades en el posicionamiento de uno de los ejes, la distancia entre ejes debe modificarse a 71 mm. Discutir si el tipo de montaje y talla calculado anteriormente es válido para la nueva configuración. Calcular los nuevos parámetros de talla y montaje de la pareja de ruedas para eliminar la holgura circunferencial.

Solución:

- 1.- Calcular los parámetros de talla y montaje.

Dado que la suma del número de dientes de ambas ruedas es mayor o igual que 28, se pueden tallar a V y montar a 0.

Se usarán las siguientes fórmulas:

Módulo	$m = \frac{2 \cdot r}{Z}$
Paso	$p = m \cdot \pi$
Radio primitivo de funcionamiento	$r' = r \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha')}$
Espesor	$s = \frac{p}{2} + 2 \cdot m \cdot x \cdot \tan(\alpha)$
Radio base	$r_b = r \cdot \cos(\alpha)$
Hueco	$h = \frac{p}{2} - 2 \cdot m \cdot x \cdot \tan(\alpha)$
Radio de cabeza	$r_a = r + m \cdot (1 + x)$
Ángulo de presión de funcionamiento	$Ev(\alpha') = 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{Z_1 + Z_2} \cdot \tan(\alpha) + Ev(\alpha)$
Radio de pie	$r_f = r - m \cdot (1,25 - x)$
Distancia entre ejes de funcionamiento	$a' = r'_1 + r'_2$
Factor de desplazamiento	$x = \frac{14 - Z}{17}$
Desplazamiento en la talla en V	$m \cdot x$

Por tanto:

	Piñón	Rueda
Número de dientes (Z)	13	15
Módulo (m) (mm)	5	5
Radio primitivo de referencia (r) (mm)	32.5	37.5
Radio primitivo de funcionamiento (r') (mm)	32.5	37.5
Radio base (rb) (mm)	30.5400	35.2385
Radio de cabeza (rc) (mm)	37.7941	42.2059
Radio de pie (rf) (mm)	26.5441	30.9559
Ángulo de presión de referencia (α) (°)	20	20
Paso (p) (mm)	15.7080	15.7080
Espesor (s) (mm)	8.0681	7.6399
Hueco (e) (mm)	7.6399	8.0681
Factor de desplazamiento (x)	0.0588	-0.0588
Desplazamiento en la talla (mm)	0.2941	-0.2941

Ángulo de presión de funcionamiento (°)	20
Distancia entre ejes de funcionamiento (mm)	70

2.- Calcular los parámetros de talla y montaje al modificar la distancia entre ejes de funcionamiento.

Al variar la distancia entre ejes de funcionamiento el montaje no puede ser a 0. El factor de desplazamiento aplicado al piñón ha de ser obligatoriamente el calculado en el apartado anterior para evitar la penetración.

Sabiendo que la distancia entre ejes de funcionamiento responde a la siguiente expresión

$$a' = a * \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'}$$

se calcula el ángulo de presión de funcionamiento: $\alpha' = 22,1108^\circ$.

Haciendo uso de la siguiente ecuación

$$Ev\alpha' = 2 * \frac{x_1 + x_2}{Z_1 + Z_2} * tg\alpha + Ev\alpha$$

se calcula el factor de desplazamiento para la rueda: $x_2 = 0,1515$.

Por tanto:

	Piñón	Rueda
Número de dientes (Z)	13	15
Módulo (m) (mm)	5	5
Radio primitivo de referencia (r) (mm)	32.5	37.5
Radio primitivo de funcionamiento (r') (mm)	32.9643	38.0357
Radio base (rb) (mm)	30.5400	35.2385
Radio de cabeza (rc) (mm)	37.7941	43.2575
Radio de pie (rf) (mm)	26.5441	32.0075
Ángulo de presión de referencia (α) ($^\circ$)	20	20
Paso (p) (mm)	15.7080	15.7080
Espesor (s) (mm)	8.0681	8.4054
Hueco (e) (mm)	7.6399	7.3026
Factor de desplazamiento (x)	0.0588	0.1515
Desplazamiento en la talla (mm)	0.2941	0.7575

Ángulo de presión de funcionamiento ($^{\circ}$)	22.1108
Distancia entre ejes de funcionamiento (mm)	71

6.8. Problema de engranajes (Septiembre 2003)

En una aplicación industrial se desea conseguir, con ruedas cilíndrico rectas, una relación de transmisión $\mu = 221/1005$.

Se pide:

1. Calcular el número de dientes de cada rueda para obtener la relación de transmisión dada con un tren de engranajes ordinario. Especificar la disposición de las ruedas y la condición que deben cumplir para que el tren sea recurrente.
2. Obtener la relación de transmisión dada con un tren de engranajes epicicloidales de balancín. Dibujarlo y especificar el número de dientes de cada rueda.
3. Calcular la relación de transmisión necesaria para obtener, con una pareja de ruedas de las disponibles, un error absoluto menor de 0,0001 respecto a la dada. (Tomar una precisión de 8 decimales).
4. Con una relación de transmisión $\mu = 11/50$ y para un módulo $m = 4$ mm., expresar el tipo de montaje y talla de la pareja de ruedas y acotar la geometría del par, indicando los siguientes valores:

Para cada rueda:

- Radio primitivo de referencia y radio primitivo de funcionamiento
- Radio base, radio de cabeza y radio de pie
- Paso, espesor y hueco

Para la pareja de ruedas dentadas

- Ángulo de presión de funcionamiento
- Distancia entre ejes de funcionamiento

NOTA.- Debido a condiciones de diseño:

- La relación de transmisión de cada engrane individual no puede sobrepasar el valor $= 5$.
- El número máximo de dientes por rueda será de $Z_{MAX} = 80$ y el mínimo de $Z_{MIN} = 10$ ($10 \leq Z \leq 80$).

solución:

Para hallar una posible disposición de un tren ordinario que cumpla la relación de transmisión pedida ($\mu = 221/1005$), se descomponen el denominador y el numerador:

$$\mu = \frac{221}{1005} = \frac{13 \cdot 17}{3 \cdot 5 \cdot 67} = \frac{17}{67} \cdot \frac{13}{15}$$

Una posible solución sería la siguiente disposición:

$$Z_1 = 17 \quad Z_2 = 67 \quad Z_3 = 13 \quad Z_4 = 15$$

Para que el tren ordinario sea recurrente se tiene que cumplir que la distancia entre los dos ejes en cada engranaje sea igual:

$$r_1 + r_2 = r_3 + r_4$$

$$\frac{m_1}{2} \cdot (Z_1 + Z_2) = \frac{m_2}{2} \cdot (Z_3 + Z_4)$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_3 + Z_4}$$

Para la disposición propuesta, para que el tren sea recurrente, la relación entre los módulos de las ruedas que participan en cada engrane será:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_3 + Z_4} = \frac{17 + 67}{13 + 15} = \frac{84}{28} = 3$$

NOTA 1.- Otra posible solución sería:

$$Z_1 = 13 \quad Z_2 = 67 \quad Z_3 = 17 \quad Z_4 = 15$$

Donde la relación entre los módulos sería: $\frac{m_2}{m_1} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_3 + Z_4} = \frac{13 + 67}{17 + 15} = \frac{80}{32} = 2$,

NOTA 2.- Si se desea trabajar con ruedas de 14 dientes o más, se puede recurrir a multiplicar el numerador y el denominador por 2:

$$\mu = \frac{221}{1005} = \frac{13 \cdot 17}{3 \cdot 5 \cdot 67} \cdot \frac{2}{2} = \frac{17}{67} \cdot \frac{26}{30}$$

Y otra posible solución sería: $Z_1 = 17 \quad Z_2 = 67 \quad Z_3 = 26 \quad Z_4 = 30$

Donde la relación entre los módulos sería: $\frac{m_2}{m_1} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_3 + Z_4} = \frac{17 + 67}{26 + 30} = \frac{84}{56} = 1,5$

Para obtener la relación de transmisión real de un tren epicicloidal de balancín, a partir de la relación de transmisión aparente, se particulariza para este caso la fórmula de Willis:

$$\mu_A = \frac{\omega_M - \omega_L}{\omega_O - \omega_L}$$

Para el caso del tren epicicloidal de balancín $\omega_M = 0$, luego $\mu_A = \frac{\omega_L}{\omega_O - \omega_L}$

Si se considera que la relación de transmisión real es $\mu = \frac{\omega_O}{\omega_L}$

Las ecuaciones que vinculan la relación de transmisión real y la aparente serán:

$$\mu = 1 - \frac{1}{\mu_A} \Rightarrow \mu_A = \frac{1}{1 - \mu}$$

Para obtener la relación de transmisión pedida ($\mu = 221/1005$) se opera:

$$\mu_A = \frac{1}{1 - \frac{221}{1005}} = \frac{1005}{784} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 67}{2^4 \cdot 7^2} = \frac{15}{16} \cdot \frac{67}{49}$$

Y una posible solución sería la siguiente disposición:

$$Z_1 = 15 \quad Z_2 = 16 \quad Z_3 = 67 \quad Z_4 = 49$$

Una posible representación esquemática de un tren epicicloidal de balancín es el que se ofrece en la siguiente figura.

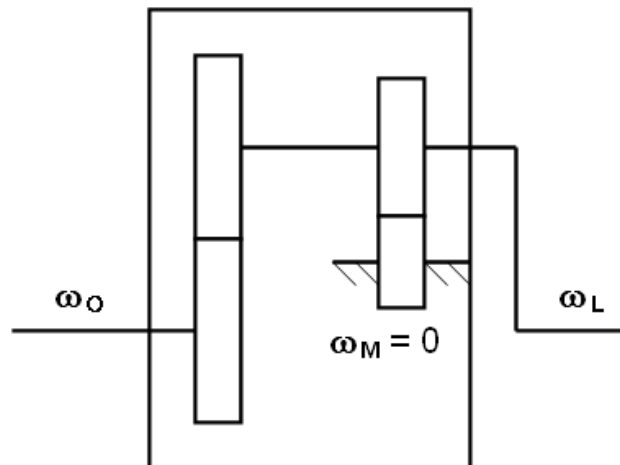


Figura 6.30: Representación de un tren epicicloidal.

Para hallar la relación de transmisión con una pareja de ruedas y un error absoluto menor de 10^{-4} respecto a la dada ($= 221/1005$), se usa el método de

descomposición en fracciones continuas hasta hallar una reducida que cumpla las especificaciones.

	4	1	1	4	1	3	5
1005	221	121	100	21	16	5	1
121	100	21	16	5	1	0	

$$R_1 = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$E_1 = |\mu - R_1| = |0,21990049 - 0,25| = 3,009951 \cdot 10^{-2} > 10^{-4}$$

$$R_2 = \frac{1}{4+\frac{1}{1}} = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$E_2 = |\mu - R_2| = 1,990049 \cdot 10^{-2} > 10^{-4}$$

$$R_3 = \frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = \frac{2}{9} = 0,22222222$$

$$E_3 = |\mu - R_3| = 2,32173 \cdot 10^{-3} > 10^{-4}$$

$$R_4 = \frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}} = \frac{9}{41} = 0,21951219$$

$$E_4 = |\mu - R_4| = 3,883 \cdot 10^{-4} > 10^{-4}$$

$$R_5 = \frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{1}}}}}} = \frac{11}{50} = 0,22$$

$$E_5 = |\mu - R_5| = 9,951 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}$$

$$R_6 = \frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}}}} = \frac{42}{191} = 0,21989528$$

$$E_6 = |\mu - R_6| = 5,21 \cdot 10^{-6} < 10^{-4}$$

$$R_7 = \mu = \frac{221}{1005} = 0,21990049 \quad E_7 = |\mu - R_7| = 0$$

Luego la relación de transmisión que cumple las especificaciones es $\mu' = \frac{11}{50}$

Se dispone de un engrane con un módulo $m = 4$ mm. y un número de dientes $Z_1 = 11$ (piñón) y $Z_2 = 50$ (rueda).

Dado que una de las ruedas tiene un número de dientes inferior a 14 dientes pero la suma del número de dientes de ambas ruedas es mayor de 28, se pueden efectuar dos tipos de montaje:

- **Montaje en V:** Se tallará a V el piñón (menor de 14 dientes) pero no así la rueda (mayor de 14 dientes) y se montarán en V.
- **Montaje a cero:** Se tallarán a V tanto el piñón como la rueda y se montarán a cero.

Se usarán las siguientes fórmulas:

Módulo	$m = \frac{2 \cdot r}{Z}$
Paso	$p = m \cdot \pi$
Radio primitivo de funcionamiento	$r' = r \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha')}$
Espesor	$s = \frac{p}{2} + 2 \cdot m \cdot x \cdot \tan(\alpha)$
Radio base	$r_b = r \cdot \cos(\alpha)$
Hueco	$h = \frac{p}{2} - 2 \cdot m \cdot x \cdot \tan(\alpha)$
Radio de cabeza	$r_a = r + m \cdot (1 + x)$
Ángulo de presión de funcionamiento	$Ev(\alpha') = 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{Z_1 + Z_2} \cdot \tan(\alpha) + Ev(\alpha)$
Radio de pie	$r_f = r - m \cdot (1,25 - x)$
Distancia entre ejes de funcionamiento	$a' = r'_1 + r'_2$
Factor de desplazamiento	$x = \frac{14 - Z}{17}$
Desplazamiento en la talla en V	$m \cdot x$

Montaje en V

Se talla a cero ($x_2 = 0$) la rueda de 50 dientes (posible ya que $50 \geq 14$) y en V el piñón con un factor de desplazamiento:

$$x_1 = \frac{14 - Z}{17} = \frac{14 - 11}{17} = 0,1765$$

y se efectúa un montaje en V.

Montaje a cero

Se talla a V la rueda de 50 dientes con un desplazamiento igual y de signo contrario al dado al piñón:

$$x_2 = -x_1 = -0,1765$$

y se efectúa un montaje a cero.

	Piñón	Rueda
Número de dientes (Z)	11	50
Módulo (m) (mm)	4	4
Radio primitivo de referencia (r) (mm)	22	100
Radio primitivo de funcionamiento (r') (mm)	22,13	100,59
Radio base (r_b) (mm)	20,67	93,97
Radio de cabeza (r_c) (mm)	26,71	104
Radio de pie (r_f) (mm)	17,71	95
Ángulo de presión de referencia (α) (°)	20	20
Paso (p) (mm)	12,56	12,56
Espesor (e) (mm)	5,77	6,28
Hueco (h) (mm)	6,79	6,28

Ángulo de presión de funcionamiento (α') (°)	20,9
Distancia entre ejes de funcionamiento (a) (mm)	122,72

	Piñón	Rueda
Número de dientes (Z)	11	50
Módulo (m) (mm)	4	4
Radio primitivo de referencia (r) (mm)	22	100
Radio primitivo de funcionamiento (r') (mm)	22	100
Radio base (r_b) (mm)	20,67	93,97
Radio de cabeza (r_c) (mm)	26,71	103,29
Radio de pie (r_f) (mm)	17,71	94,29
Ángulo de presión de referencia (α) (°)	20	20
Paso (p) (mm)	12,56	12,56
Espesor (e) (mm)	5,77	6,79
Hueco (h) (mm)	6,79	5,77

Ángulo de presión de funcionamiento (α') (°)	20
Distancia entre ejes de funcionamiento (a) (mm)	122

6.9. Problema de engranajes (Febrero 2004)

Se quiere efectuar la talla y montaje de una pareja de ruedas de 11 y 13 dientes con un módulo $m = 8$, asegurando que no haya holgura circunferencial y evitando la penetración durante la talla y la interferencia durante el funcionamiento. Se pide:

1. En caso de utilizar el método de variar el ángulo de inclinación del diente

de la cremallera de talla, determinar estos ángulos.

2. En caso de emplear el método de variar la altura máxima del diente de la cremallera de talla, calcular las citadas alturas.
3. En caso de usar el método de desplazamiento en la talla expresar el tipo de montaje y talla de la pareja de ruedas y acotar la geometría del par, indicando los siguientes valores:

Para cada rueda:

	Piñón	Rueda
Número de dientes (Z)	11	13
Módulo (m) (mm)	8	8
Ángulo de presión de referencia (α) ($^{\circ}$)	20	20
Factor de desplazamiento (x)		
Desplazamiento en la talla (mm)		
Radio primitivo de referencia (r) (mm)		
Radio primitivo de funcionamiento (r') (mm)		
Radio base (r_b) (mm)		
Radio de cabeza (r_c) (mm)		
Radio de pie (r_f) (mm)		
Paso (p) (mm)		
Hueco (e) (mm)		
Espesor (s) (mm)		
Espesor en la circunferencia de cabeza (s_c) (mm)		

Para la pareja de ruedas:

Ángulo de presión de funcionamiento (α') ($^{\circ}$)	
Distancia entre ejes de funcionamiento (a) (mm)	
Grado de recubrimiento o coeficiente de engrane (ϵ)	

Solución:

1. Método de la variación del ángulo de inclinación del flanco del diente de la cremallera de talla

El número mínimo de dientes que se puede construir sin que exista penetración en la talla viene determinado por la siguiente expresión:

$$Z_{\text{límite}} = \frac{2}{\text{sen}^2 \alpha}$$

siendo α el ángulo de inclinación del flanco de los dientes de la cremallera generadora.

Para que no haya penetración al tallar una rueda con un número de dientes X , inferior a 14 dientes, hay que encontrar un ángulo α tal que produzca un número de dientes límite inferior a X .

$$X \geq \frac{2}{\sin^2 \alpha} \quad \alpha \geq \arcsin \left(\sqrt{\frac{2}{Z}} \right)$$

En el caso del piñón ($Z = 11$) el ángulo α será:

$$\alpha \geq 25,24^\circ$$

Y en el caso de la rueda ($Z = 13$) el ángulo α será:

$$\alpha \geq 23,09^\circ$$

2. Método del rebajado de la altura del diente de la cremallera de talla

La expresión que determina la altura de cabeza que debe tener la cremallera de talla para garantizar que no existe penetración es la siguiente:

$$r - m \cdot y \geq r_b \cdot \cos \alpha$$

Operando se llega a una expresión que relaciona el factor “ y ” con el número de dientes de una rueda que no sufre penetración durante la talla.

$$r - m \cdot y \cdot \cos^2 \alpha \Rightarrow r \cdot (1 - \cos^2 \alpha) \geq m \cdot y \Rightarrow r \cdot \sin^2 \alpha \geq m \cdot y \Rightarrow y \leq \frac{2 \cdot r \cdot \sin^2 \alpha}{m}$$

$$y \leq \frac{Z \cdot \sin^2 \alpha}{2}$$

En el piñón ($Z = 11$) y considerando que el ángulo $\alpha = 20^\circ$, será $y \leq 0,6434$, siendo la altura de cabeza de los dientes de la cremallera de talla $h_c \leq m \cdot y = 8 \cdot 0,6434$:

$$h_c \leq 5,1472 \text{ mm.}$$

En la rueda ($Z = 13$) con el ángulo $\alpha = 20^\circ$, será $y \leq 0,7604$, siendo la altura de cabeza de los dientes de la cremallera de talla $h_c \leq m \cdot y = 8 \cdot 0,7604$:

$$h_c \leq 6,0832 \text{ mm.}$$

3. Método del desplazamiento de la cremallera de talla

Se dispone de un engrane con un módulo $m = 8 \text{ mm.}$ y un número de dientes $Z_1 = 11$ (piñón) y $Z_2 = 13$ (rueda).

Dado que las dos ruedas tienen un número de dientes inferior a 14 (la suma del número de dientes de ambas ruedas es menor de 28), para evitar la penetración en la talla se deben tallar en V. Para asegurar que no haya holgura circunferencial ni interferencia durante el funcionamiento se debe efectuar el montaje en V.

Se usarán las siguientes fórmulas:

Factor de desplazamiento	$x = \frac{14 - Z}{17}$
Desplazamiento en la talla en V	$m \cdot x$
Módulo	$m = \frac{2 \cdot r}{Z}$
Radio base	$r_b = r \cdot \cos \alpha$
Radio de cabeza	$r_c = r + m \cdot (1 + x)$
Radio de pie	$r_f = r - m \cdot (1,25 - x)$
Evolvente de un ángulo	$\text{Ev} \alpha = \text{tg} \alpha - \alpha$
Ángulo de presión de funcionamiento	$\text{Ev} \alpha' = 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{Z_1 + Z_2} \cdot \text{tg} \alpha + \text{Ev} \alpha$
Radio primitivo de funcionamiento	$r' = r \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'}$
Distancia entre ejes de funcionamiento	$a' = r'_1 + r'_2$
Paso	$p = m \cdot \pi$
Espesor	$e = \frac{p}{2} + 2 \cdot m \cdot x \cdot \text{tg} \alpha$
Hueco	$h = \frac{p}{2} - 2 \cdot m \cdot x \cdot \text{tg} \alpha$
Ángulo desarrollado por la evolvente en una circunferencia de radio r_x ($r_x \geq r_b$)	$\alpha_x = \arccos \left(\frac{r_b}{r_x} \right)$
Espesor del diente en la circunferencia de radio r_x	$S_x = 2 \cdot r_x \cdot \left(\frac{\pi}{2 \cdot Z} + \frac{2 \cdot x}{Z} \cdot \text{tg} \alpha + \text{Ev} \alpha - \text{Ev} \alpha_x \right)$
Grado de engrane o coeficiente de recubrimiento	$\varepsilon = \frac{\sqrt{r_{c1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{c2}^2 - r_{b2}^2} - (r'_1 + r'_2) \cdot \sin \alpha'}{m \cdot \pi \cdot \cos \alpha}$

A continuación se ofrecen los valores obtenidos para cada variable del piñón y la rueda, derivados de la talla y montaje seleccionados, y teniendo en cuenta que se deber evitar la penetración en la talla y asegurar que no haya holgura circunferencial ni interferencia durante el funcionamiento.

Para cada rueda:

	Piñón	Rueda
Número de dientes (Z)	11	13
Módulo (m) (mm)	8	8
Ángulo de presión de referencia (α) ($^{\circ}$)	20	20
Factor de desplazamiento (x)	0,1765	0,0588
Desplazamiento en la talla (mm)	1,4120	0,4704
Radio primitivo de referencia (r) (mm)	44	52
Radio primitivo de funcionamiento (r') (mm)	44,8096	52,9568
Radio base (r_b) (mm)	41,3465	48,8640
Radio de cabeza (r_c) (mm)	53,4120	60,4704
Radio de pie (r_f) (mm)	35,4120	42,4704
Paso (p) (mm)	25,1327	25,1327
Hueco (e) (mm)	11,5385	12,2239
Espesor (s) (mm)	13,5942	12,9088
Espesor en la circunferencia de cabeza (s_c) (mm)	3,9320 ($\alpha_c = 39,28^{\circ}$)	4,8229 ($\alpha_c = 36,09^{\circ}$)

Para la pareja de ruedas:

Ángulo de presión de funcionamiento (α') ($^{\circ}$)	22,67°
Distancia entre ejes de funcionamiento (a') (mm)	97,7664
Grado de recubrimiento o coeficiente de engrane (ϵ)	1,3445

Capítulo 7

CUESTIONES DE TEORÍA

7.1. Introducción a la teoría de máquinas y mecanismos

1. Par cinemático. Clasificación.
2. Esquema general de un conjunto mecánico. Describa los diferentes subconjuntos del sistema transmisor.
3. Determinar razonada y analíticamente la movilidad de los mecanismos representados en las siguientes figuras. aplicar la regla de Gruebler.

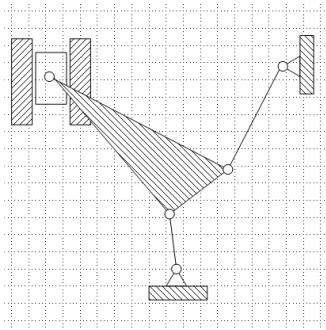


Figura 7.1:

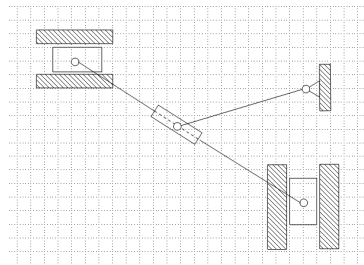


Figura 7.2:

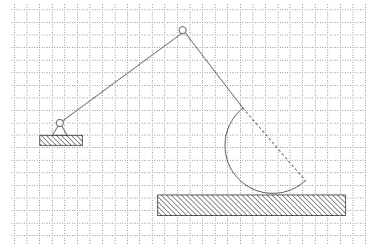


Figura 7.3:

4. Esquema general de un conjunto mecánico. Sistema transmisor.
5. Par elemental: cierre de forma, cierre de fuerza y cierre de enlace. Ejemplos.
6. Definición de par elemental. Pares fundamentales inferiores.
7. Mecanismo de biela-manivela: inversiones.

7.2. Resistencias Pasivas y principios de lubricación

8. Tipos de resistencias pasivas. Coeficiente de rodadura.
9. Curva de Stribeck. Engrase perfecto.
10. Resistencia al pivotamiento. Indicar valores comparativos con otros tipos de resistencias pasivas.
11. Ley de Harrison en la lubricación de cojinetes.
12. Resistencias pasivas en pares elementales. Explique las reacciones en el punto de contacto (fuerzas y pares). Identifique los vectores con los diferentes tipos de resistencias pasivas.
13. Coeficiente de rigidez en correas.
14. Indicar la expresión del coeficiente de rozamiento al deslizamiento para un par lubricado.
15. Cono de rozamiento. Círculo de rozamiento.
16. Describa el modelo de deslizamiento de un eje sobre el portaejes: círculo de rozamiento.
17. Enuncie la ley de Harrison en cojinetes: gráfico explicativo. 19. Rendimiento de una máquina.
18. Coeficiente de rigidez en correas: ecuación experimental de Coulomb.
19. Expresión gráfica de la ley de Hersey (Stribeck).
20. Expresión gráfica del círculo de rozamiento.

7.3. Análisis cinemático de máquinas

21. Velocidad de cambio de polo en mecanismos planos.
22. Para un punto dado de un eslabón genérico, dibuje la posición del centro de curvatura de la trayectoria del punto y el centro instantáneo de rotación del eslabón.
23. Expresión gráfica de la fórmula de Euler-Savary.
24. Análisis gráfico de las aceleraciones en un cuadrilátero articulado plano. Se supondrá una velocidad angular ω_2 y una aceleración angular α_2 en la manivela de entrada.
25. Sean dos puntos A y B pertenecientes a dos elementos mecánicos en movimiento relativo. Referir la aceleración del punto A a la de B, explicando el significado de cada uno de los vectores involucrados. Introducir los sistemas de referencia y los vectores cinemáticos necesarios.

26. Velocidad de cambio de polo. Cálculo para la biela de un cuadrilátero articulado.
27. Cinema de velocidades. Características geométricas.
28. Análisis gráfico de la velocidad de cambio de polo de la biela, en un cuadrilátero articulado plano. Se supondrá una velocidad angular ω_2 y una aceleración angular α_2 en la manivela de entrada.
29. Sean dos puntos A y B pertenecientes a un elemento mecánico en movimiento. Referir la posición, la velocidad y la aceleración del punto A a la de B. Introducir los sistemas de referencia y los vectores cinemáticos correspondientes.
30. Expresión gráfica del círculo de inflexiones.
31. Cálculo gráfico de la aceleración normal en un punto A respecto a otro punto B. Considerar que los puntos A y B pertenecen al mismo eslabón.
32. Velocidad de cambio de polo: gráfico explicativo del cálculo de la componente de la velocidad de cambio de polo según la perpendicular al radio de curvatura de la trayectoria de un punto genérico P en un instante determinado t.
33. Enumere técnicas de determinación de velocidades en los mecanismos articulados en el plano.

7.4. Análisis dinámico de máquinas

34. Aplique el Teorema del Centro de Masas a un eslabón genérico de un mecanismo plano.
35. Explique brevemente los tipos de análisis dinámicos sobre un mecanismo.
36. Reducción dinámica de un sistema articulado de un grado de libertad a la manivela de salida. Cálculo de la masa reducida.
37. Condiciones para que un sistema de masas puntuales (m_i , $i=1, \dots, n$) sea dinámicamente equivalente a un eslabón de centro de masas G, masa M y momento de inercia respecto a G igual a I_G .
38. Explicar la forma de calcular los esfuerzos y pares de inercia en un elemento mecánico en movimiento. Introducir cuantos vectores, teoremas y sistemas de referencia sean necesarios.
39. Reducción dinámica de un sistema articulado de un grado de libertad a la manivela de salida.

40. Aplique el principio de los trabajos virtuales al mecanismo de la figura 7.4. Calcule la fuerza reducida y equilibrante en el punto C, suponiendo conocidas las velocidades en A y en C (\vec{V}_A y \vec{V}_C) y sabiendo que se le aplica una fuerza vertical en A igual a F_A (formando 60° con \vec{V}_A).

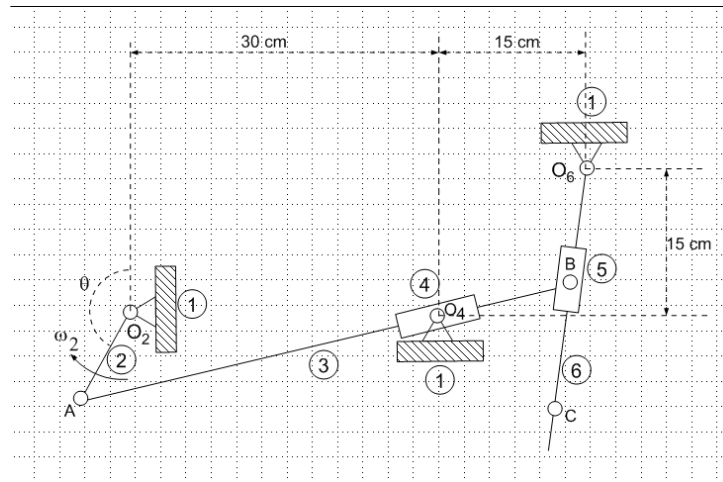


Figura 7.4:

7.5. Teoría general de engranajes

41. Explique los conceptos de: talla y montaje en engranajes.
42. Penetración e interferencia en el engrane de ruedas cilíndrico rectas: número límite de dientes.
43. Representar gráficamente el segmento de engrane de un par de ruedas cilíndrico rectas estándar de $m = 5$, $Z_1 = 10$ y $Z_2 = 14$.
44. Trenes de engranajes epicicloides: fórmula de Willis.
45. Hágase el montaje de un par de ruedas cilíndrico rectas estándar de $m = 5$, $Z_1 = 10$ y $Z_2 = 14$. Represente gráficamente los parámetros de las dentaduras y de las ruedas.
46. Palancas rodantes: condición de relación de transmisión constante.
47. Nomenclatura del dentado en ruedas cilíndrico rectas.
48. Fórmula de Willis. Aplicación a un tren de engranajes epicicloidal simple y de balancín.
49. Palancas rodantes: condición de contacto permanente.
50. Representar gráficamente las relaciones geométricas entre: línea de engrane, circunferencia base, circunferencia primitiva y evolvente.

51. Expresar gráficamente la condición geométrica límite para evitar la penetración en ruedas dentadas talladas a cero.
52. Hágase el montaje de un par de ruedas cilíndrico rectas estándar de $m = 5$, $Z_1 = 10$ y $Z_2 = 14$. Represente gráficamente los parámetros de las dentaduras y de las ruedas.
53. Fórmula de Willis. Aplicación a un tren epicicloidal recurrente.
54. Engranajes cónicos: construcción de Tredgold.
55. Representar gráficamente la penetración e interferencia en el engrane de ruedas cilíndrico rectas. Obtener la relación geométrica del número límite de dientes para evitarla.
56. Fórmula de Willis. Aplicación a un tren epicicloidal de balancín.
57. Hágase el montaje de un par de ruedas cilíndrico rectas estándar de $m = 5$, $Z_1 = 10$ y $Z_2 = 14$. Represente gráficamente el segmento de engrane.
58. Nomenclatura de una rueda estándar de módulo m y Z dientes tallada con desplazamiento $+xm$: paso, paso angular, radio base, radio de cabeza, radio de pie, radio primitivo de talla, espesor.
59. Comparar los parámetros geométricos del diente de perfil de evolvente normalizado de una rueda de módulo m tallada a cero con otra del mismo módulo m tallada a $V (+x\Delta m)$.
60. Calcular un par de ruedas dentadas que, para un número máximo de 150 dientes por rueda, verifiquen una relación de transmisión $\mu = 142/249$ con un error inferior a 10^{-4} .
61. Dibuje y describa un tren epicicloidal simple recurrente: obtenga la relación de transmisión aparente y la real que se establece entre el eje de salida y el de entrada, especificando que eje es cada cual.