PRÁCTICA 4

REALIMENTACIÓN DEL ESTADO MEDIANTE TÉCNICAS DE DISEÑO ÓPTIMAS (LQ)

1. INTRODUCCIÓN

Los métodos de control basados en realimentación del estado son más versátiles y potentes que los correspondientes a la teoría de control clásico. En particular, permiten la asignación de los polos (autovalores) del lazo cerrado a 'voluntad'. Estos métodos pueden ser complementados con técnicas de observación de estado para permitir limitaciones (económicas y/o físicas) en la medida de los mismos.

Luego, es razonable el recurrir a un nuevo marco teórico, más complejo, para el diseño de controladores o reguladores. Con respecto a esta posible línea de actuación puede tenerse en cuenta, a modo de justificación, que:

- Ni en los métodos de diseño de control clásico, ni en los de realimentación de estados para la asignación de polos, se pone explícitamente de manifiesto el compromiso que existe entre las especificaciones dinámicas y el 'costo' para poder cumplirlas (por ejemplo, entre la velocidad de respuesta de la variable controlada y la acción de control necesaria).
- Restricciones en el control pueden imposibilitar un diseño de polos dominantes. Esto puede dificultar seriamente la selección de los polos de lazo cerrado para cumplir determinadas especificaciones temporales (hay que tener presente que las conocidas expresiones que vinculan el sobrepaso, el tiempo de establecimiento, etc. con la ubicación de los polos, sólo tienen validez en sistemas de segundo orden puro). Adicionalmente, si existe un espacio no controlable, sólo algunos autovalores podrán ser asignados, y por consiguiente, difícilmente pueda hacerse un diseño con polos dominantes.
- La presencia de ceros en la función de transferencia puede dificultar el diseño por asignación de autovalores, aún en aquellos casos en que las restricciones no sean fuertes.
- En sistemas MIMO no existe una correspondencia entre la respuesta temporal y la localización de los polos. Efectivamente, en sistemas MIMO, la misma asignación de polos puede hacerse con distintos juegos de ganancias, y de hecho, dan lugar a distintas respuestas temporales.
- Por otra parte, uno podría preguntarse, ¿por qué conformarse con ganancias de realimentación constantes? ¿No podría mejorarse la respuesta de seguimiento de un sistema si la(s) ganancia(s) de realimentación se asocian a la amplitud del error?

Estos argumentos expuestos sirven de motivación y justificación para la utilización de la teoría del control óptimo.

Cuando se habla de la solución óptima de un problema, intuitivamente se piensa en que ésta es "la mejor solución", es decir "insuperable". De hecho, éste es el significado que puede encontrarse en el Diccionario de la Real Academia Española:

Óptimo: forma procedente del superlativo latino optimus, que significa “bueno en grado sumo”, que no puede ser mejor. Por tanto, es incorrecto su empleo en combinación con muy, más, menos o tan: muy óptimo, más óptimo; menos óptimo, tan óptimo.

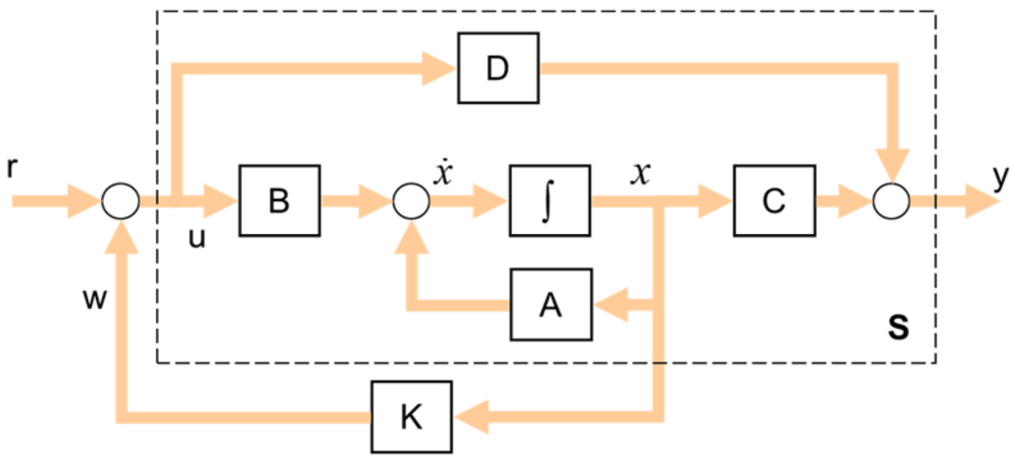
Sin embargo, como muchos otros adjetivos, la palabra óptimo tiene un alto grado de subjetividad. Efectivamente, un pésimo control desde el punto de vista del comportamiento dinámico podría ser óptimo desde el punto de vista económico y viceversa. Luego, para calificar la bondad de un control (en particular para poder decir que es óptimo) es necesario asociarlo a un índice de rendimiento o una función de coste. En términos de control diremos que un control es óptimo si minimiza un funcional de coste en el que claramente se manifiesta un compromiso entre distintas especificaciones y restricciones. A este funcional se le denomina índice de coste.

2. DISEÑO EN VARIABLES DE ESTADO CON MATLAB

El modelado de sistemas en variables de estado en el entorno de MATLAB fue tratado en la práctica 3, por lo que para cualquier duda o recordatorio se aconseja repasar y tener a mano el guión de la misma.

Las nuevas funciones que trataremos para el desarrollo de esta práctica son aquellas que tienen que ver con el diseño de compensadores mediante la técnica de regulación basada en la realimentación del estado.

Básicamente consiste en fijar los valores del vector de realimentación K en función de diferentes criterios o métodos.



Uno de ellos consiste en directamente fijar los polos del sistema realimentado en puntos del semiplano real negativo, garantizando de esta forma la estabilidad en lazo cerrado, atendiendo a criterios únicamente geométricos, correspondientes en el lugar de las raíces a zonas donde se garanticen ciertas premisas en cuanto a la respuesta de régimen transitorio (tiempos de establecimiento, sobreoscilación, etc …).

Para ello, sabiendo que $A_r = A + BK$, siendo A_r la matriz A del sistema realimentado, A y B las correspondientes del sistema en lazo abierto y K el vector de ganancias objetivo, simplemente conociendo los polos del sistema realimentado (punto de partida), será posible fijar A_r y siendo A y B conocidos, obtener K de una manera sencilla.

Esto en MATLAB lo conseguiremos simplemente utilizando la función:

>> K=place(A,B,p);

Donde A y B son las matrices del sistema sin realimentar y p es un vector con los polos del sistema realimentado, así por ejemplo, si partimos de un sistema inicialmente definido por:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cuyos polos se encuentran en $s_1 = -2$, $s_2 = -3$ y $s_3 = -4$, al plantear una modificación de sus polos a $s_1 = -4$, $s_2 = -6$ y $s_3 = -8$, el resultado obtenido sería:

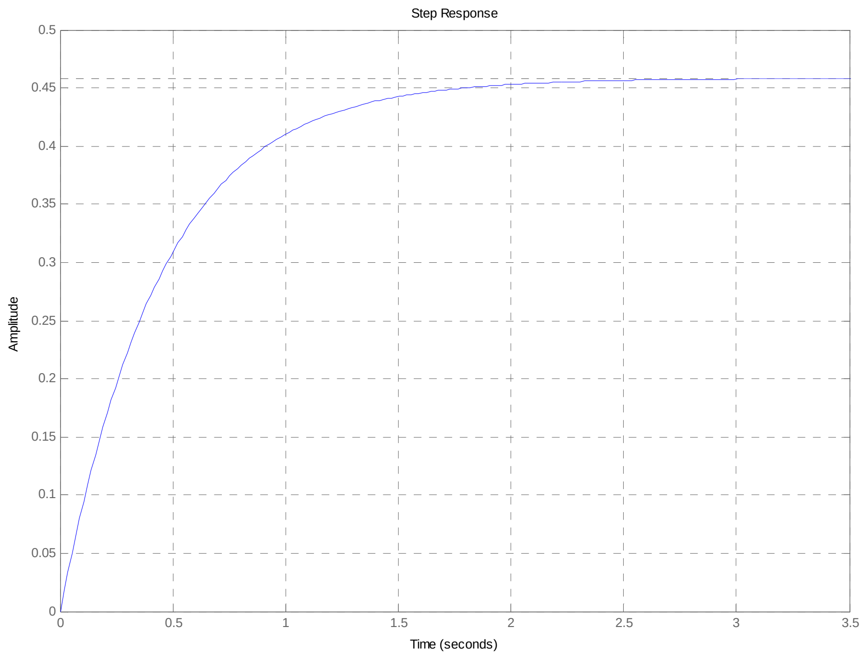
>> p=[-4 -6 -8];

>> K=place(A,B,p);

K =

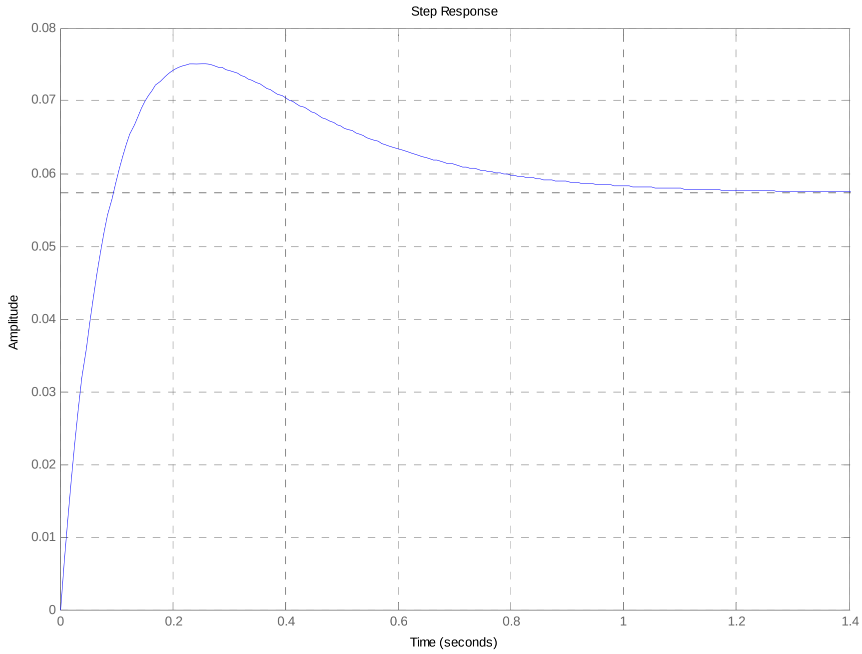
9.0000 15.0000 39.0000

Respuesta ante entrada escalón del sistema en lazo abierto:



```
>> Ar=A-B*K
```

Respuesta ante entrada escalón del sistema en lazo cerrado



Como puede observarse, el sistema se vuelve más oscilatario pero también más rápido al situar sus polos más alejados del eje imaginario.

El sistema debe ser controlable y observable:

```
>> rank(ctrb(A,B))

ans =

    3

>> rank(obsv(A,C))

ans =

    3
```

Efectivamente lo es.

Fijar los polos de esta manera nos deja un margen muy pequeño para poder evaluar a priori las condiciones de calidad en la respuesta. Como se mencionó en la introducción, resulta muy útil el establecer una función de coste, que en función de los objetivos buscados en cada aplicación particular, pueda optimizarse la obtención del vector K.

De una manera general, se podría definir un índice que nos permita decidir las condiciones previas idóneas para el cálculo de K, este índice se denomina J y está definido de la siguiente manera:

$$J = x^t\left(t_f\right)Sx\left(t_f\right) + \int_{t_0}^{t_f}\left[x^t\left(t\right)Qx\left(t\right) + u^t\left(t\right)Ru\left(t\right)\right]dt$$

Con $S = I$, $Q = 0$ y $R = 0$ tendríamos que $J = \left\|x\left(t_f\right)\right\|^2$, lo que nos permitiría trabajar con un índice que dependiese directamente del valor de régimen permanente y por tanto su optimización nos daría como resultado una solución del vector de ganancias para obtener una respuesta con error mínimo.

Con $S = 0$, $Q = 0$ y $R = I$ se tendría que $J = \int_{t_0}^{t_f}\left\|u\left(t\right)\right\|^2 dt$, lo que garantizaría un diseño con área mínima del cuadrado de la entrada, es decir, conseguir acciones de control con mínima acción de la entrada.

Concretando para el diseño de la compensación óptima (LQR), partiendo de un sistema representado en variables de estado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

Considerando un índice de coste:

$$J = \int_{t_0}^{t_f}\left[x^t\left(t\right)Qx\left(t\right) + u^t\left(t\right)Ru\left(t\right)\right]dt$$

Donde Q y R son matrices simétricas, no definida negativa y definida positiva respectivamente, el control óptimo que minimiza J está dado por la ley de realimentación del estado:

$$u(t) = -\mathrm{K}\bullet x(\mathrm{t}) \text{ con } K = R^{-1}B^tP$$

Donde P es la solución de la Ecuación Algebraica de Ricatti (EAR):

$$A^tP + PA - PBR^{-1}B^tP + Q = 0$$

En MATLAB para resolver el problema del diseño del compensador óptimo se utilizará la función:

```
>> K = lqr(A,B,Q,R)
```

Para elegir valores adecuados de Q y R, hay que plantearse el objetivo a minimizar por el algoritmo de optimización, como se mencionaba anteriormente. Una posibilidad es seleccionar $Q = C^t C$ y $R = \lambda I$ con $\lambda > 0$, para conseguir un equilibrio entre las energías de entrada y salida del sistema.

$$J = \int_0^\infty \left[\|y(\tau)\|^2 + \lambda \|u(\tau)\|^2 \right] dt$$

El uso de λ's pequeñas da lugar a convergencias más rápidas de la salida, pero al mismo tiempo, requieren de comandos de control en las entradas mayores (ganancias de control mayores). Por el contrario para λ's grandes, ocurriría justo al contrario, requiriendo de acciones de control más comedidas.

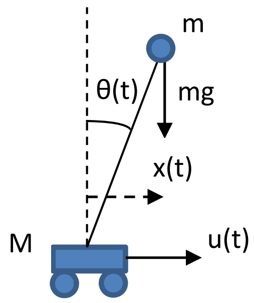
3. REALIZACIÓN PRÁCTICA EVALUABLE DURANTE LA SESIÓN

Una vez leídos los contenidos de introducción deberán realizarse previamente a la sesión de prácticas, las cuestiones enumeradas en el ejercicio propuesto. Dichas cuestiones deberán traerse resueltas el día de la práctica, como condición imprescindible para superar la misma. Durante la realización de la práctica se prestará especial atención a los siguientes aspectos:

a) Deberán hacerse todos los pasos solicitados utilizando la herramienta de MATLAB, haciendo uso de las funciones específicas necesarias de la toolbox de control.
b) El resultado de dichos ejercicios será evaluable como calificación de la sesión de laboratorio.
c) Se requerirá al alumno no sólo los valores absolutos finales sino la justificación de los mismos, razonando las conclusiones de las soluciones, por lo que deberá haberse asistido a las clases de teoría y llevar al día todos los conceptos teóricos necesarios.
d) Durante la sesión el tiempo está limitado por lo que deberán poseerse las habilidades necesarias en los contenidos de la asignatura habiendo realizado previamente todos los ejercicios que se han planteado en las sesiones teórico-prácticas.
e) Los contenidos tratados en la práctica anterior deben tenerse al día para realizar con éxito los objetivos del presente guión.

4. EJERCICIO

Partiremos de un sistema físico conocido como es el péndulo invertido:



Cuestiones a realizar previamente, se llevarán resueltas a la práctica:

a. Obtener las ecuaciones físicas del sistema considerando como variables de estado: $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = \theta$ y $x_4 = \dot{\theta}$

b. Linealizar las ecuaciones en torno al punto de trabajo $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

c. Obtener el modelo en variables de estado linealizado.

d. Comprobar la controlabilidad y observabilidad del sistema.

e. Situación de los polos del sistema.

f. Respuesta ante entrada escalón.

g. Comentar y justificar los resultados.

Realización práctica:

a. Para $g = 10\, m/s^2$, $m = 1\, kg$, $M = 1\, kg$ y $l = 1\, m$ diseñar una compensación por realimentación del estado que tenga como objetivo posicionar los polos en $s_1 = -1$, $s_2 = -1.1$, $s_3 = -1.2$ y $s_4 = -1.3$

b. Comparar las respuestas ante entrada escalón antes y después de compensar, comentar los resultados.

c. Con los mismos parámetros físicos del apartado a), volver a repetir el diseño esta vez con objetivos en $s_1 = -10$, $s_2 = -10.1$, $s_3 = -10.2$ y $s_4 = -10.3$

d. Obtener las respuestas ante entrada escalón, comparar resultados.

e. Con $g = 10\, m/s^2$, $m = 0.2\, kg$, $M = 0.5\, kg$ y $l = 0.3\, m$ realizar un control LQR con:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = 1$$

f. Obtener las respuestas ante entrada escalón, comentar resultados.

g. Con los parámetros del apartado e) y eligiendo como matrices:

$$Q = \begin{bmatrix} 5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = 1$$

Obtener el nuevo vector K de realimentación y obtener las matrices del sistema realimentado.

h. Conclusiones sobre las nuevas respuestas.