Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería: Informe 3

Álvaro Césped, run: 18.467.425-4

October 2015

1 Pregunta 1

1.1 Introducción

El oscilador de van der Pool funciona para describir el comportamiento de algunos circuítos eléctricos, y su ecuación queda expresada como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu(x^2 - a^2)\frac{dx}{dt}$$

Donde k es la constante elástica y μ es un coeficiente de roce. Si $|x| > \mu$, el movimiento se amortigua, mientras que si $|x| < \mu$, se inyecta energía. Se puede comprobar que usando el cambio de variable

$$t = \frac{s}{k}, x = ay$$

La ecuación queda expresada de la siguiente forma:

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -y - \mu^*(y^2 - 1)\frac{dy}{ds}$$

Con esto, la expresión queda en función únicamente del valor μ^*, constante que incluye μ y a^2:

$$\mu^* = \mu a^2$$

Se pretende crear un algoritmo que integre esta última ecuación a través del método Runge-Kutta de orden 3, considerando la constante μ^* como un valor específico ($\mu^* = 1.425$).

1.2 Procedimiento

Se escribió un algoritmo que sigue la ruta básica del método Runge-Kutta, es decir, se estableció un paso de tiempo, la cantidad de veces que se usó dicho salto (se hace un arreglo con tal de que se itere hasta 20π) y condiciones iniciales para las dos variables que se quieren obtener ($y, \frac{dy}{ds}$).

Luego se obtienen las constantes k_i del método, con $i = 1, 2, 3$ para este caso en particular, para finalmente ser usadas de manera iterante en la obtención de los valores de $y, \frac{dy}{ds}$ (que tienen forma de vector).

Este algoritmo se usó para dos sets de condiciones iniciales:

$$1)\frac{dy}{ds} = 0; y = 0.1 \;\; 2)\frac{dy}{ds} = 0; y = 4.0$$

1.3 Resultados

Para el primet set de resultados se observan los comportamientos de las funciones $y(s)$ según s y la trayectoria en el espacio ($\frac{dy}{ds}$ vs $y(s)$) en las figuras 1 y 2, respectivamente.

Los resultados para el segundo set de condiciones iniciales se observan en las figuras 3 y 4, donde la figura 3 representa la función $y(s)$ para valores del vector s y la figura 4 representa la trayectoria en el espacio.

1.4 Discusión

A partir de solamente dos sets de condiciones iniciales se puede apreciar un drástico cambio en la trayectoria en el espacio, basta con observar que para el set 1) la trayectoria converge a un punto encerrado dentro de ella misma, mientras que para el set 2) la trayectoria diverge, a pesar de haber completado un "ciclo" cerrado. Finalmente, se encontró, mediante prueba y error, que el valor de y_0 para el cual la trayectoria en el espacio traspasa el límite convergencia/divergencia es aproximadamente 2.4.

Las figuras 1 y 3 muestran que, a pesar de partir en valores distintos, la función $y(s)$ se comporta de igual manera en ambos casos, lo que se justifica en que la función no debe depender de las condiciones iniciales a partir de un instante específico.

2 Pregunta 2

2.1 Introducción

El sistema de Lorenz es un set de ecuaciones diferenciales ordinarias conocido por tener algunas soluciones caóticas. En esta sección se pretende estudiar un caso particular del sistema de Lorenz; el Atractator de Lorenz.

Las ecuaciones que conforman el sistema de Lorenz son:

$$\frac{dy}{ds} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{ds} = x(\rho - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

La solución más famosa corresponde a los valores de las constantes $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$, $\rho = 28$
Se busca resolver el sistema de Lorenz utilizando el método Runge-Kutta de orden 4.

2.2 Procedimiento

A diferencia de la sección anterior, el algoritmo a utilizar es el que viene incorporado en la librería *scipy.integrate*, específicamente el objeto *ode*.

Se trabaja con vectores inicializados con $0's$, un vector de tiempos (Con un tiempo inicial no nulo, un paso de tiempo a especificar, y un tiempo final a especificar) y un set de condiciones iniciales (x_0, y_0, z_0).
Luego se crea el objeto de clase *ode*, se le asigna el tipo de integrador a utilizar (en este caso, 'dopri5') y las condiciones iniciales y finalmente se itera sobre todos los tiempos (cardinalidad del vector de tiempos).

2.3 Resultados

En la figura 5 se puede observar el comportamiento de las tres componentes (x, y, z) luego de resolver el Atractor de Lorenz mediante Runge-Kutta de orden 4.

2.4 Discusión

Se probaron un par de condiciones iniciales más (no muy lejanas a las que se muestran en el presente) y se observa que, a pesar de que la forma de la función se ve alterada, siempre se observa un comportamiento de oscilación en torno a dos ejes.

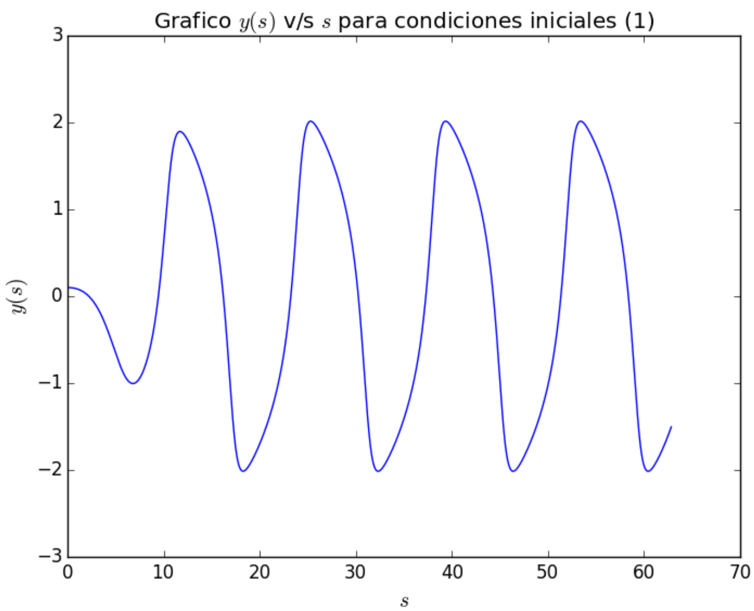

Figure 1: Función y(s), con condiciones iniciales 1)

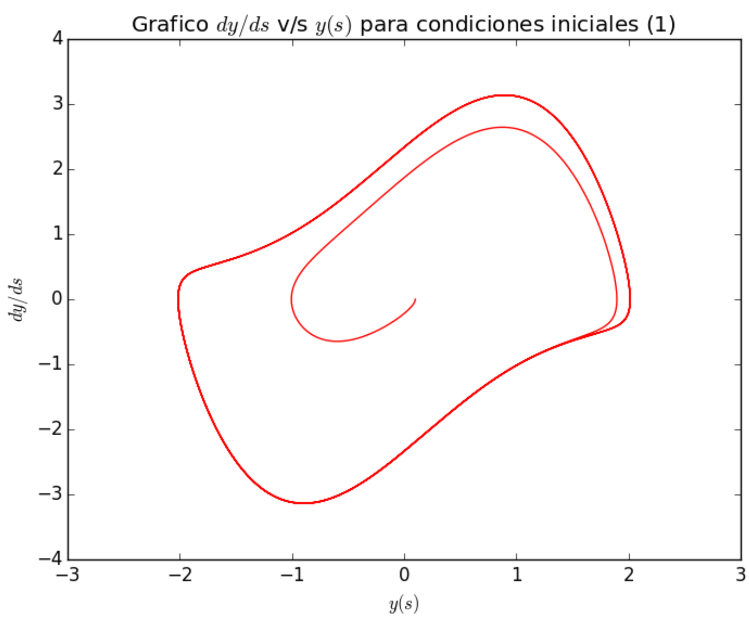

Figure 2: Trayectoria en el espacio, con condiciones iniciales 1)

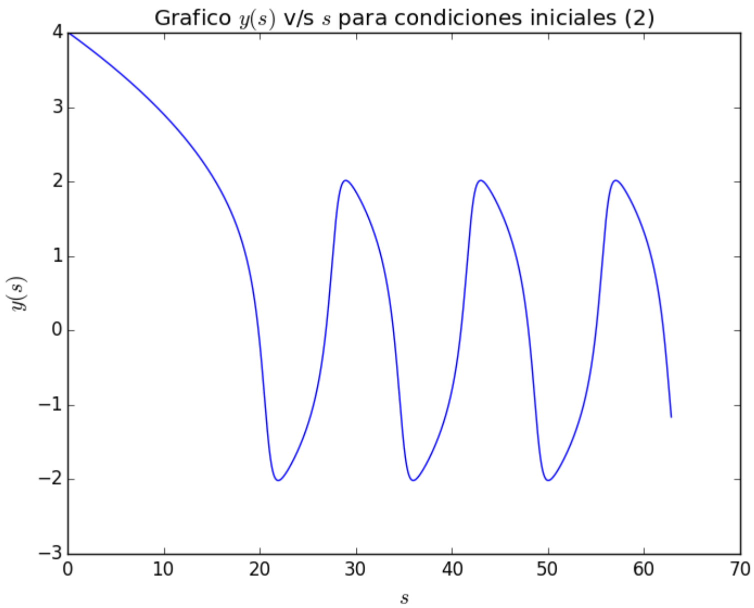

Figure 3: Función y(s), con condiciones iniciales 2)

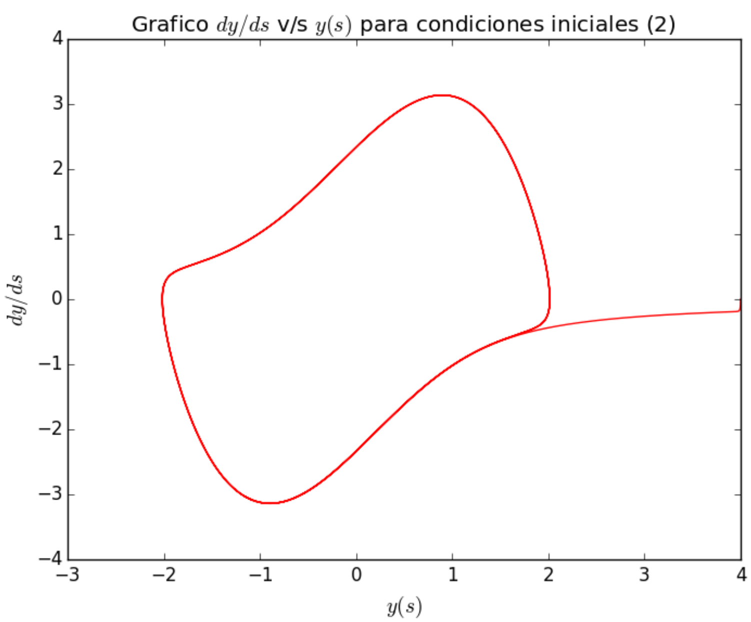

Figure 4: Trayectoria en el espacio, con condiciones iniciales 2)

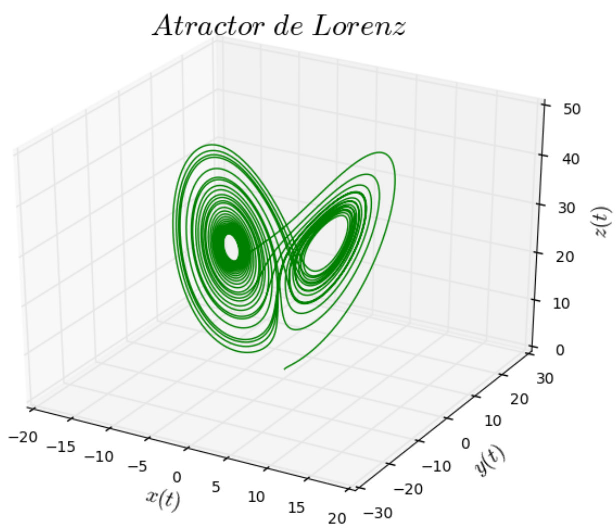

Figure 5: Comportamiento de las variables (x,y,z) en el Atractor de Lorenz, con condiciones iniciales=(1,1,1).