

Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería:
Informe 5

Álvaro Céspedes

October 2015

Introducción

En el presente informe se pretende resolver la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 V(x, y) = -\rho(x, y)$$

Para ello, se requiere integrar la ecuación en un área rectangular de 10×15 $[cm^2]$ conectada a tierra (Condiciones de borde $V=0$ en los extremos). Este cuadrilátero se compone por una recta en la posición $y = -5.5$; $x = [-3 : 3]$ y un cuadrilátero centrado en $(0,0)$ de dimensiones 5×7 $[cm^2]$, en el cuál, a su vez, se encuentra dibujada la letra "A".

Las especificaciones del cuadrilátero son que, en los bordes de la línea, se debe cumplir que

$$\frac{dV}{dn} = \pm 1$$

Donde el signo se interpreta como la posición (Por sobre o por debajo) en donde se tiene dicha condición.

Respecto al cuadrilátero con la letra dentro, se tiene que, sólo sobre la letra, la carga total estará dada por

$$Q = \int \rho(x, y) dx dy = 1[C]$$

Es decir, se espera una densidad de carga relacionada con el área que ocupe la letra dentro del cuadrilátero de 35 $[cm^2]$. (Nota: Se decidió dibujar la letra "A" según la representación presentada en la Tarea, es decir, con la barra intermedia posicionada en $y = 0$ y con la misma forma, lo que deriva en un área de 20 cuadrados de 1 $[cm^2]$ de superficie).

Procedimiento

Para integrar la ecuación de Poisson se busca crear un algoritmo que proceda a través del método de sobre-relajación, con $h = 0.2[cm]$, el reticulado que se utilizará.

Lo primero que se debe hacer es definir, de algún modo, el área a integrar y sus condiciones tanto de densidad de carga como condiciones derivativas de potencial. Para esto se define una función que, en base a los parámetros básicos de posicionamiento (Longitud en eje x , en eje y , reticulado) caracteriza el espacio en base a la densidad de cada punto dentro del cuadrilátero mayor (Si el reticulado es de $0.2 [cm]$, los puntos en el eje x son 50 y en el y son 75).

Luego, como se tiene que la Ecuación de Poisson cabe en la categoría de ecuación elíptica, se utiliza una discretización de la forma

$$V_{i,k} = (1 - \omega)V_{i,k} + \frac{\omega}{4}(V_{i+1,k} + V_{i-1,k} + V_{i,k+1} + V_{i,k-1} - h^2 \rho_{i,k})$$

Donde ω corresponde a la frecuencia y toma valores entre 0 y 2. Finalmente se procede a integrar iterando utilizando la discretización en el área señalada, sin embargo, para poder integrar teniendo en consideración los distintos valores de la densidad y de las condiciones derivativas, se secciona el cuadrilátero en distintas partes.

Las secciones más importantes vendrían siendo el cuadrilátero menor y las cercanías de la línea, ya que, si bien la ecuación de Poisson cumple con la discretización anteriormente señalada, en esta zona existe una condición derivativa, por lo que se sugiere utilizar una discretización de tipo Neuman, que está dada por

$$V_{i,N-1} = (1 - \omega)V_{i,N-1} + \frac{\omega}{3}(V_{i+1,N-1} + V_{i-1,N-1} + V_{i,N-2} - h^2 \rho_{i,N-1} + hp_i)$$

Donde p_i se interpreta como la condición derivativa de la zona.

Resultados

Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 2 y 3, mientras que la figura 1 se decidió agregarla para tener una imagen que representara la geometría del problema en cuestión.

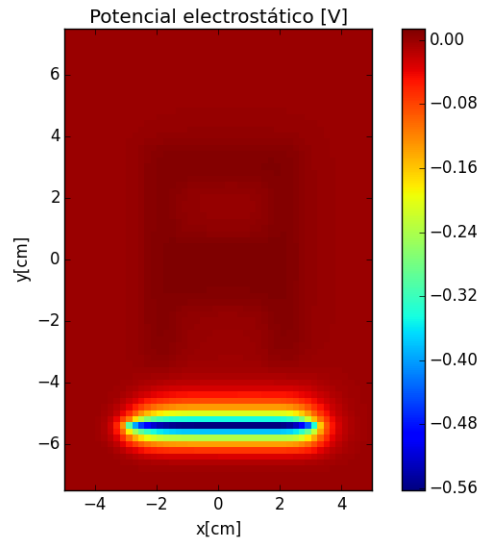


Figure 1: *Gráfico en planta del potencial electrostático calculado con $\omega = 1.2$ e iterado una cantidad de veces considerablemente baja, para así lograr identificar la configuración del problema. Notar que el origen se encuentra justo al centro del dibujo, por lo que las coordenadas son simétricas con respecto al origen.*

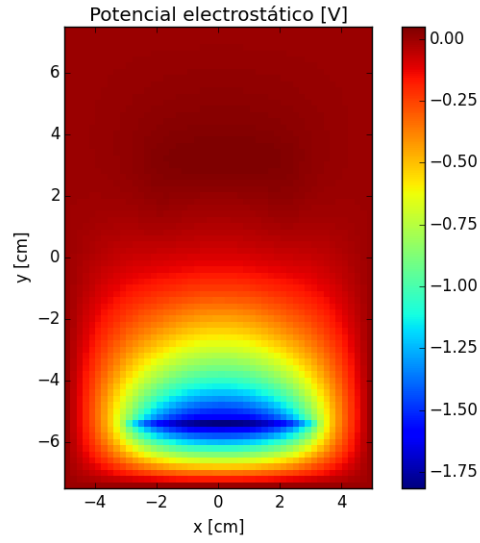


Figure 2: *Gráfico de planta del potencial electrostático calculado para $\omega = 1.2$.*

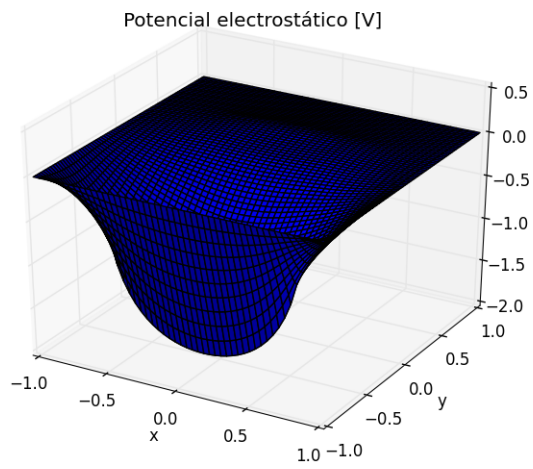


Figure 3: *Potencial electrostático calculado para $\omega = 1.2$ pero graficado en 3-D, es decir, visto como superficie.*

Conclusiones

Se encuentra que el problema descrito sí converge, y la convergencia dependerá fuertemente de los parámetros tolerancia y de ω . Esto último se debe a que, básicamente, a menor ω , mayor cantidad de iteraciones se necesitarán para lograr llegar a la convergencia, sin embargo, por contraparte, si se aumenta mucho el valor de ω , se pierde resolución del potencial en el gráfico.

Se encontró que el valor $\omega = 1.2$ necesita exactamente 1528 iteraciones para llegar a la convergencia, número que si bien no es bajo, se podría considerar una cantidad aceptable para computadores que no están diseñados para correr programas más pesados y otorga una resolución buena del resultado.

Finalmente, después de presenciar el ligero tiempo de demora que toma correr el programa, se cree que podría ser un programa más efectivo si en vez de crear una función que distribuya la densidad de carga a lo largo y ancho del cuadrilátero, se caracterice la zona a través de una matriz de las mismas dimensiones del problema y que contenga los valores de la densidad de carga en cada punto. Con esto, al momento de iterar, no tendrá que calcular la función 1528 veces, sino que simplemente deberá ir al casillero correspondiente al lugar donde se está calculando el potencial.