Proceso Estocástico

Unidad I

¿Qué es un proceso estocástico?

- La principal característica de un proceso estocástico es su naturaleza aleatoria, lo que significa que su evolución no es predecible con certeza. Cada estado del sistema en un proceso estocástico se define a través de una función de probabilidad que determina los posibles resultados.
- El conjunto de valores que puede tomar la variable aleatoria se llama “espacio de estados” (espacio muestral) y se denota por “S”.

Ejemplos de procesos estocásticos.

Fluctuaciones del Mercado de Valores

Los precios de las acciones fluctúan debido a una variedad de factores, mostrando un comportamiento estocástico en el mercado financiero.

Predicción del Clima

Los patrones meteorológicos se pueden modelar mediante procesos estocásticos, ayudando a predecir el clima futuro de manera probabilística.

Teoría de Colas

La teoría de colas utiliza procesos estocásticos para analizar el comportamiento de las filas de espera en diversos sistemas, como servicios y atención al cliente.

Clasificación de los procesos estocásticos

S/T	Discreto	Continuo
Discreto	Serie estocástica con espacio de estados discretos.	Proceso estocástico con espacio de estados discreto.
Continuo	Serie estocástica con espacio de estados continuos.	Proceso estocástico con espacio de estados continuo.

- El espacio de estados “S” puede ser continuo o discreto.
- El espacio paramétrico “T” puede ser continuo o discreto.

Ejemplo 1

- Marcador de un partido de fútbol.
- X_t = Marcador de un partido de fútbol en el instante t.
- $S = \{0,1,2,3 \dots\}$ No de goles **Discreto**
- T$=$ $[0, 90]$ Minutos **Continuo**

- **Es un proceso estocástico con espacio de estados discreto**

Ejemplo 2

- Probabilidad de lluvia dentro de los próximos 5 días siendo que existe un porcentaje del 40% de que esto ocurra y un 60% de que no suceda así.
- X_t = Estado meteorológico en el día t.
- $S = \{0,1\}$ Lluvia (0), No lluvia (1) **Discreto**
- T= $[1,2,3,4,5]$ día de ocurrencia **Discreto**

- **Es una serie estocástica con espacio de estados discreto**

Ejemplo 3:

- Supóngase una caja que se está llenando de víveres para los damnificados teniendo una capacidad de 500 kg y se termina de llenar en 1 hora.
- X_t = Cantidad de peso en kg en la caja en el instante t.
- $S = [0, 500]$ Kg de carga **Continuo**
- T= $[0, 60]$ Minutos (instante de llenado) **Continuo**

- **Es un proceso estocástico con espacio de estados continuo**

En conclusión

- Estocástico = aleatoridad

- Entonces un proceso estocástico es un sistema que nos permite darle seguimiento a un fenómeno **aleatorio a través del tiempo**. Cada valor obtenido mediante la variable aleatoria definida, nos dará información de lo que sucede con el fenómeno aleatorio conforme transcurre el tiempo. A cada valor posible se le llama un **estado** y a los distintos cambios de un estado a otro **transición.** A cada registro de este seguimiento se le conoce como **realización del proceso**, y son aplicables a cualquier sistema que comprenda variabilidad al azar conforme transcurre el tiempo.

Tipos de procesos estocásticos

Procesos estocásticos **estacionarios:** aquellos que la distribución de probabilidad es constante a lo largo de grandes periodos de tiempo.

Procesos estocásticos **no estacionarios**: son aquellos cuya distribución varia de forma no constante.

Cadenas de Markov

Una cadena de Markov es un tipo de proceso estocástico que satisface la propiedad de Markov, la cual establece que el futuro del proceso depende únicamente del presente y no del pasado. Esta propiedad es conocida como memoria limitada.

Características de una cadena de Markov:

- Estados discretos: Los estados posibles del proceso son finitos o numerables.
- Transiciones probabilísticas: Las probabilidades de pasar de un estado a otro están definidas por una matriz de transición de probabilidades.
- Memoria corta: Solo el estado actual afecta al futuro, y el pasado no tiene influencia.

Cadenas de Markov

- Por medio de estas se pronostica el comportamiento futuro de ciertas variables. Este pronóstico se hace mediante el análisis de los cambios que han sufrido dichas variables en el presente.
- Con el fin de hacer estas predicciones, se establece una **matriz llamada de transición (matriz estocástica)** que está dada por las probabilidades de los diferentes cambios observados.

Propiedades de una cadena de Markov tiempo discreto

- Una cadena de Markov de **tiempo discreto** tiene las siguientes propiedades:
- Un número finito de estados.
- Cumple con la propiedad Markoviana.
- Probabilidades de transición estacionarias.
- Un conjunto de probabilidades iniciales.

Planteamiento de una matriz de transición o estocástica

Propiedades

1. Sus elementos son no negativos.
2. La sumatorio de los elementos (estados) de cada fila debe ser igual a 1.
3. La matriz debe ser cuadrada.

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Estado y Transición

- Un estado es una caracterización de la situación en la que se halla un determinado sistema en un instante dado, y puede ser tanto cuantitativo como cualitativo.
- El sistema que pretende modelizar una cadena es, por consiguiente, una variable aleatoria que cambia de valor (cuantitativo o cualitativo) en el tiempo. A dicho cambio se le denomina transición.

Identifique de los siguientes enunciados:

- Los estados
- La unidad de transición

1. En una línea de ensamblaje automatizada, un robot puede encontrarse en una semana inactivo debido a un fallo técnico o funcionando correctamente.
2. En una plataforma de aprendizaje en línea, los estudiantes pueden no asistir al curso ese día o asistir al curso ese día, en un curso de 5 días.
3. Durante el funcionamiento de un motor, su temperatura puede encontrarse en baja o alta al finalizar un ciclo de operación.

Ejemplo 1

- Imagina que un jugador está en un juego de mesa en el que tiene tres posiciones posibles: Inicio (I), Medio (M) y Meta (T). El jugador puede moverse de una posición a otra en cada turno, y las probabilidades de las transiciones dependen del estado actual en el que se encuentra.
- Las siguientes condiciones se aplican para las transiciones: Si el jugador está en el estado "Inicio (I)": Hay un 50% de probabilidad de que se mueva a la posición "Medio (M)".Hay un 50% de probabilidad de que se quede en "Inicio (I)".
- Si el jugador está en el estado "Medio (M)": Hay un 40% de probabilidad de que se mueva a "Meta (T)". Hay un 40% de probabilidad de que vuelva a "Inicio (I)". Hay un 20% de probabilidad de que se quede en "Medio (M)".
- Si el jugador está en el estado "Meta (T)": El jugador se queda en "Meta (T)" con una probabilidad del 100%, es decir, el juego termina cuando el jugador llega a "Meta".
- **Plantea la matriz de transición de Markov para este sistema**

Ejemplo 2

- En una comunidad de 10,000 personas, los hábitos de actividad física se clasifican en tres categorías: Sedentarios: 4,000 personas; Activos moderados: 3,000 personas; Altamente activos: 3,000 personas.
- Se sabe que un sedentario tiene un 8% de probabilidad de volverse moderadamente activo y un 3% de probabilidad de pasar a ser altamente activo en un mes. Una persona moderadamente activa tiene un 6% de probabilidad de volverse sedentaria y un 7% de volverse altamente activa. Una persona altamente activa tiene un 5% de probabilidad de volverse sedentaria y un 10% de volverse moderadamente activa.

- **1. Realice un diagrama de transición de estados.**
- **2. Realice la matriz de transición.**

Ejemplo 3:

- El ascensor de un edificio con sótano y dos pisos realiza viajes de uno a otro piso. El piso en el que finaliza el viaje n-ésimo del ascensor sigue una cadena de Markov. Se sabe que la mitad de los viajes que parten del sótano se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que si un viaje comienza en el primer piso, sólo el 25% de las veces finaliza en el segundo. Por último, si un trayecto comienza en el segundo piso, siempre finaliza en el sótano. Plantee la matriz de probabilidad de transición de la cadena.

Potencias de una Matriz de Markov (probabilidades de transición de n-pasos)

- P(X(t+1) =Ej/ X(t) = Ei) se conoce como probabilidad de transición identificándola como pij, la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado j dado que está en el estado i en la fecha t.

- La matriz de probabilidades de transición de n pasos se puede obtener calculando la enésima potencia de la matriz de transición de un paso:
- $p^n = p * p * p \ldots$

Cadena de Markov de probabilidad estacionaria.

Estas probabilidades se dicen estacionarias ya que son independientes del tiempo.

Estado Estable

- Se puede decir que el estado estable es la distribución de probabilidades que en cierto punto quedará fija para el vector P y no presentará cambios en periodos posteriores.

- También se le conoce como probabilidad **a largo plazo** y cuando se alcanza este estado ya no habrá cambios, entonces, se dice que el proceso se ha estabilizado.

Ejemplo 1:

- Un agente comercial realiza su trabajo en tres departamentos: Petén, Izabal y Alta Verapaz. Para evitar desplazamientos innecesarios está todo el día en el mismo departamento y al día siguiente se desplaza a otro departamento, si no tiene suficiente trabajo. Después de estar trabajando un día en Alta Verapaz, la probabilidad de tener que seguir trabajando allí al día siguiente es 0.4, la de tener que viajar a Izabal es 0.4 y la de tener que ir a Petén es 0.2. Si el viajante duerme un día en Izabal, con probabilidad de un 20%, tendrá que seguir trabajando en el mismo departamento al día siguiente; en el 60% de los casos viajará a Alta Verapaz, mientras que irá a Petén con probabilidad de 0.2. Por último, si el agente comercial trabaja todo un día en Petén, permanecerá en ese mismo departamento al día siguiente con una probabilidad de 0.1, irá a Izabal con una probabilidad de 0.3 y a Alta Verapaz con una probabilidad de 0.6.
- Realice la matriz de transición P
- Si hoy el agente está en Alta Verapaz, ¿cuál es la probabilidad que también tenga que trabajar en el mismo lugar al cabo de cuatro días?
- Si hoy el agente está en Izabal, ¿cuál es la probabilidad de que al cabo de 6 días tenga que trabajar en Petén?
- ¿Cuáles son los porcentajes de días en los que el agente comercial está en cada uno de los tres departamentos?

Vector de probabilidad de la fecha t

- El vector de probabilidades iniciales (vector renglón) y la matriz de transición determinan la probabilidad para el estado de la cadena en el siguiente instante de tiempo.
- Una vector probabilidad es un vector en la que las entradas son no negativa y suman 1. Las entradas en un vector probabilidad pueden representar las probabilidades de encontrar un sistema de cada uno de los estados.

Ejemplo 2

- Un cliente de una telefonía móvil renueva su contrato cada año. El cliente al renovar se le da la opción de poder adquirir tres modelos de teléfono: M1, M2 y M3. Si el modelo actual es de la marca M1, el siguiente teléfono puede ser M2 con probabilidad 0,2 o M3 con probabilidad de 0,15. Si el modelo actual es de la marca M2, las probabilidades de cambiar a M1 y M3 son 0,6 y 0,25, respectivamente. Pero si el modelo actual es M3, entonces las probabilidades de comprar los modelos M1 y M2 son 0,5 y 0,1, respectivamente.

- 1. Realice un diagrama de transición de estados.
- 2. Realice la matriz de transición.
- 3. ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente año el cliente se decida por el modelo 2, si actualmente cuenta con el mismo modelo de teléfono?
- 4. Actualmente el cliente tiene el modelo 1 ¿Cuál es la probabilidad de que se decida por el modelo 3 al término de su cuarto año de renovación de contrato?
- 5. Actualmente el cliente tiene el modelo 3 ¿Cuál es la probabilidad de que se decida por el modelo 3 al término de su sexto año de renovación de contrato?
- 6. Suponga que el 60% de los clientes se deciden por el modelo 1, el 25% por el modelo 2 y el resto por el modelo 3. A 5 contratos a partir de ahora, ¿Qué fracción de los clientes estará comprando el modelo 2?

Ejemplo 3

- Los estudiantes de la facultad de Farmacia tienen preferencia por alguna de las tres carreras: Química farmacéutica, química bióloga o química pura. En cada caso los estudiantes tienden a seguir la profesión de su padre con probabilidades de 3/5, 2/3 y 1/4 respectivamente. Quienes no lo siguen eligen de manera equitativa alguna de las otras dos opciones.
- 1. ¿Cuál es la probabilidad de si el padre es químico puro, el bisnieto tenga la profesión de químico farmacéutico?
- 2. ¿Cuál es la probabilidad de si el padre es químico puro, el nieto tenga la misma profesión?
- 3. Calcule el porcentaje de los profesionales químicos farmacéuticos en la próxima generación, si actualmente el 30% es para químicos farmacéuticos, el 50% para químicos biólogos y el 20% para químicos puros.
- 4. Calcule el porcentaje de los profesionales químicos puros en la próxima generación, si actualmente el 30% es para químicos farmacéuticos, el 50% para químicos biólogos y el 20% para químicos puros.
- 5.Determine la probabilidad a largo plazo de que transcurridas muchas generaciones se tenga preferencia por la carrera de química farmacéutica.
- 6. Determine la probabilidad de que transcurridas muchas generaciones se tenga preferencia por la profesión de químico biólogo.
- 7. Determine la probabilidad de que a largo plazo un estudiante tenga preferencia por la profesión de químico puro.

Tiempo de retorno medio

- Tiempo promedio de primer regreso: número de transiciones esperadas para que el proceso, partiendo de Ei, regrese nuevamente al estado Ei, μ_{ii}
- $\mu_i = \frac{1}{\pi_\mathrm{i}}$
- $\pi_\mathrm{i} = \text{elementos del estado estable}$ (probabilidad de estar en el estado i en el vector de estado estable)

Ejemplo 4

- Una empresa de telecomunicaciones está interesada en modelar el comportamiento de sus clientes en términos de los servicios que contratan mes a mes. La empresa ofrece tres servicios principales: Internet (I), Televisión (T) y Telefonía (P). Basados en datos históricos, han construido la siguiente matriz de transición que describe la probabilidad de que un cliente cambie de un conjunto de servicios a otro de un mes a otro:

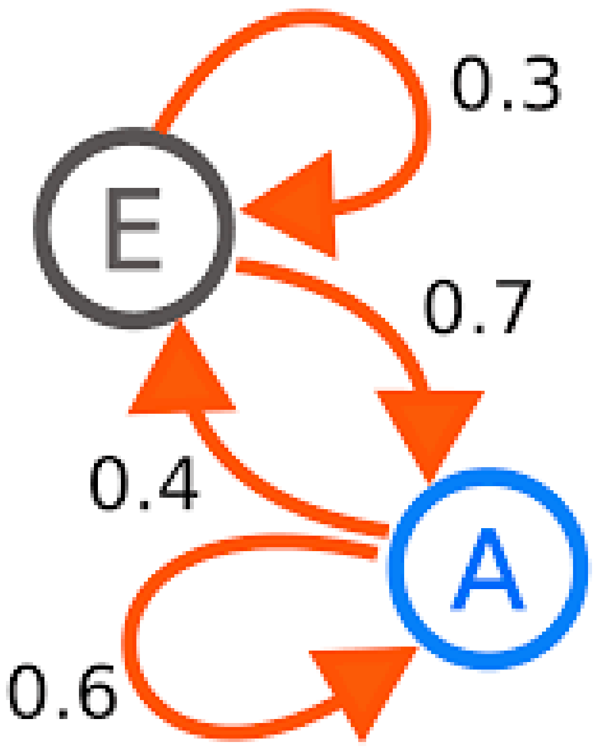
$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

a. ¿Qué servicio predomina en el largo plazo?
b. Si un cliente actualmente tiene Internet, ¿cuál es la probabilidad de que tenga Televisión después de un mes?

c. ¿cuántos meses, en promedio, un cliente que tiene Internet volverá a tener Internet después de cambiar a otro servicio?

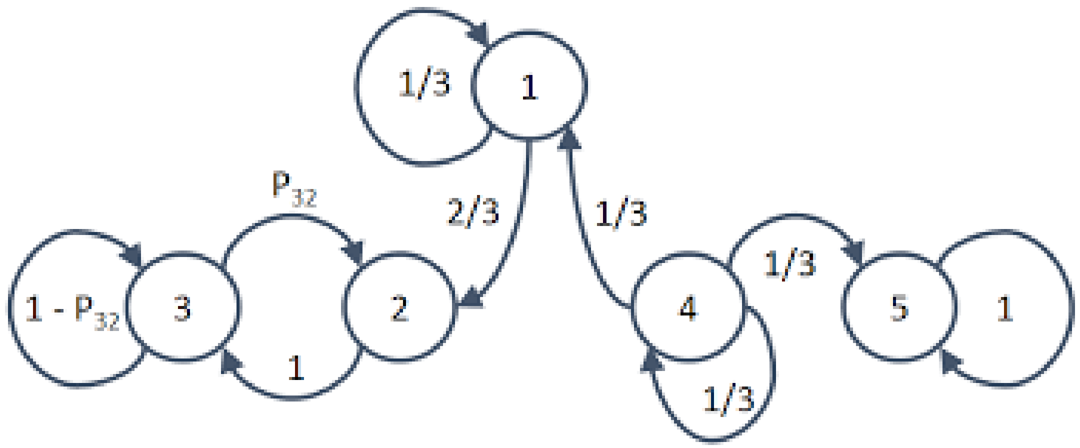
Estados de una matriz

- Comunicación:
  - Se dice que un estado se comunica con otro si el estado j es accesible desde el estado i y el estado i es accesible desde el estado j.



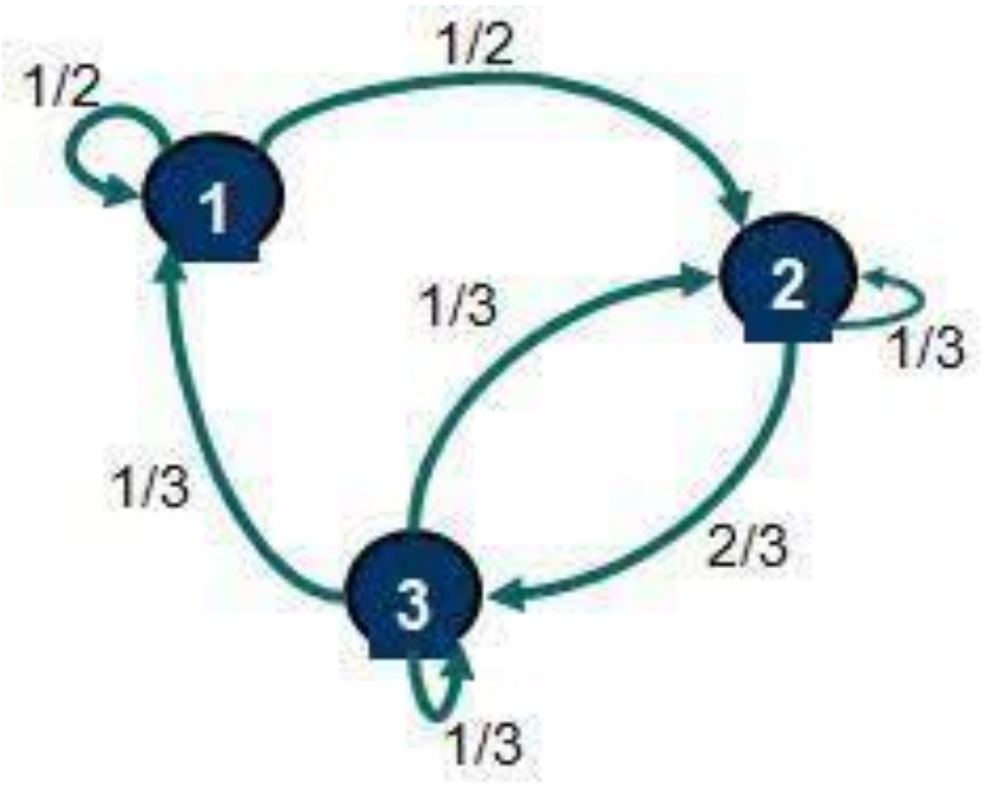
Estado transitorio:

- Se dice que un estado es transitorio cuando un proceso pasa por un estado y este, después de n pasos, ya no regresa a él. Esto quiere decir que un estado j es alcanzable desde un estado i, pero el estado i no es alcanzable desde el estado j.



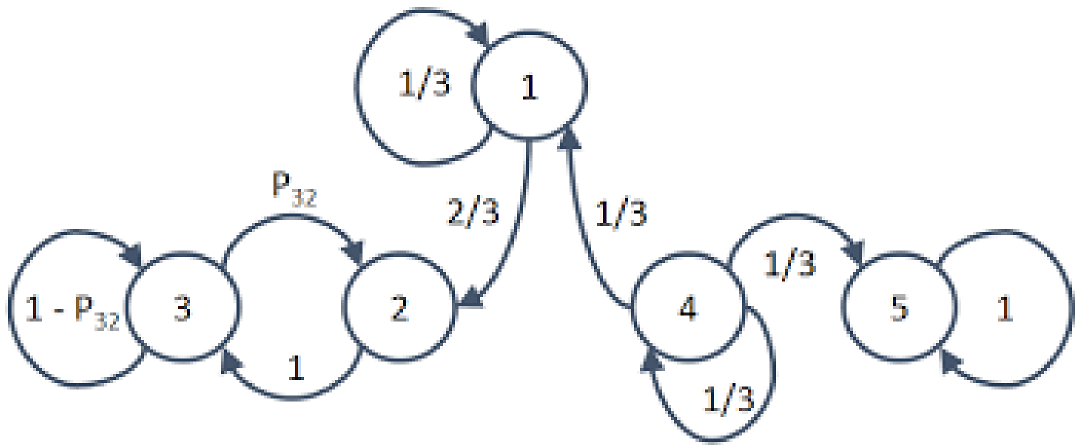
Estado recurrente:

- Un estado es recurrente en la medida que comenzando en él se tenga la certeza de volver en algún momento del tiempo.



Estado absorbente:

- Se dice que un estado es absorbente si es cero la probabilidad de hacer una transición fuera de este estado.



Tiempos de primera pasada

- ¿Cuántas transiciones hará el proceso para ir del estado Ei al estado Ej por primera vez?
- Este número de transiciones se le conoce como tiempos de primera pasada. Es el número de transiciones que hace el sistema para, que partiendo de un estado Ei, se llegue al estado Ej por primera vez, y no es un número completamente determinado.
- Es variable aleatoria (Y) toma los valores de 1, 2, 3, ………. Por lo que es importante asignar la distribución de probabilidades. La probabilidad de que el tiempo de primera pasada para llegar al estado Ej partiendo del estado Ei sea k, P(Y=k)= fik

Cálculo de la probabilidad

- Para calcular la distribución de probabilidades se usan las siguientes ecuaciones recursivas:
- $f_{ij}(1) = p_{ij}(1)$
- $f_{ij}(2) = p_{ij}(2) - f_{ij}(1)^{*}\, p_{jj}(1)$
- $f_{ij}(3) = p_{ij}(3) - f_{ij}(1)^{*}\, p_{jj}(2) - f_{ij}(2) * p_{jj}(1)$
- $f_{ij}(n) = p_{ij}(n) - f_{ij}(1)^{*}\, p_{jj}(n-1) - f_{ij}(2) * p_{jj}(n-2) - \cdots .\, f_{ij}(n-1) * p_{jj}(1)$

- Si la suma de probabilidades es menor que uno significa que un proceso que inicia en el estado Ei puede que nunca llegue al estado Ej, Ej es un estado transitorio.

Cálculo del tiempo de primera pasada

- Es el número de pasos promedio que el sistema tarda para pasar de un estado i a un estado j considerando las probabilidades de transición.
- $\mu_{ik} = |I - N_k^*|^{-1}(1)$
- Donde:
- N_k^* es una matriz recortada que se obtiene a partir de la matriz de transición.
- (1) es un vector 1.
- Para obtener la matriz recortada se debe eliminar la columna y fila del estado destino.

Ejemplo 5

- El clima de un día, está fuertemente ligado al clima del día anterior. Se puede observar que se puede distinguir entre tres tipos de clima: soleado, nublado o lluvioso. Cuando hay mucho sol, la probabilidad de que al día siguiente sea soleado es de 0,3 y de que sea nublado es de 0,4. Cuando ha estado nublado, la probabilidad de que al día siguiente sea soleado es de 0,3 y de que sea lluvioso es de 0,35. Cuando ha estado lloviendo, la probabilidad de que el siguiente día sea nublado es de 0,4 y de que sea soleado es de 0,5.

a. Si hoy esta lloviendo, ¿cuál es la probablidad de que llueva mañana? ¿Y de que llueva en tres días?

b. ¿Qué porcentaje del año tenemos días soleados?

c. Calcule los tiempos de recurrencia.

d. ¿Cuál es la probabilidad de que partiendo de que hoy está soleado, en 3 días se encuentre nublado por primera vez?

e. ¿Cuál es el número promedio de días transcurridos para que de un clima soleado se llegue a tener un día nublado por primera vez?

Ejemplo 6

- Se tienen 4 páginas web (W, X, Y, Z) que contienen enlaces entre sí.

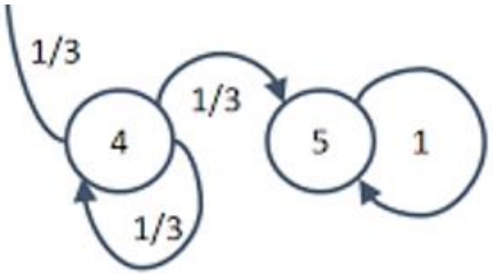
1. De la página W, el 30% de las personas enlazan a la página X, el 50% enlazan a la página Y y el 20% enlazan a la página Z.
2. De la página X, el 50% de las personas enlazan a la página W y el 50% a la página Z.
3. De la página Y, el 10% de las personas enlazan a la página X, el 70% a la página Y y el 20% enlazan a la página Z.
4. De la página Z, el 20% de las personas enlazan a la página W, el 40% a la página X, el 10% a la página Y y el 30% enlazan a la página Z.

Conteste:

- Si actualmente alguien está visitando la página Y, ¿cuál es la probabilidad de que en el siguiente enlace este en la página Z?
- Si actualmente alguien está visitando la página X, ¿cuál es la probabilidad de que se encuentre en la página Z en el segundo enlace?
- ¿Qué porcentaje de las veces un usuario se encuentra en la página Y?
- Si actualmente alguien está visitando la página W, ¿después de cuántos enlaces volverá a visitar la misma página?
- Si actualmente alguien está visitando la página Z, ¿después de cuántos enlaces volverá a visitar la misma página?
- ¿Cuál es el número de enlaces promedio para que a partir de la página W llegue a la página Z por primera vez?
- Si actualmente alguien se encuentre visitando la página Y, ¿cuál es la probabilidad de que en el tercer enlace se encuentre en la página X por primera vez?

Cadenas de Markov Absorbentes

- Un estado E_i se dice que es absorbente si, una vez alcanzado el estado E_i en algún intento el sistema permanece en el estado E_i en todos los intentos posibles.
- Si un proceso comienza en un estado transitorio, entonces se tiene la seguridad de que en algún momento lo dejará y terminará en un estado absorbente.
- Si el estado E_i es absorbente, la probabilidad de transición de E_i a E_i es 1.
- Si E_i es un estado absorbente y un proceso comienza en el estado E_j , transitorio, la probabilidad de llegar en algún momento al estado E_i se llama probabilidad de absorción.



Pasos a realizar

- Obtener la matriz T
- Obtener la matriz T´. (Eliminar de T las filas correspondientes a los estados absorbentes)
- Dividir la matriz T´
  - Q matriz que corresponde a estados transitorios (no absorbentes)
  - R matriz que corresponde a los estados que son transitorios y en algún momento pasan a ser absorbentes.
  - O matriz nula
  - I matriz de estados absorbentes (identidad)

Continuación…

- $(I - Q)^{-1}R$
- Se procede a restar la matriz normal de la identidad y se halla la inversa para ver los tiempos entre estados, para posteriormente esta última ser multiplicada por la matriz absorbente y saber las probabilidades de cambio de estado.

Ejemplo 7:

Un pequeño club campestre tiene la siguiente política, contratar tres tipos de personas: subalternos, superiores y socios.
Durante cierto año el 10% de los subalternos ascienden a superiores y a un 10% se les piden que abandonen la empresa. Durante un año cualquiera un 5% de los superiores ascienden a socios y a un 13% se les pide la renuncia. Los subalternos deben ascender a superiores antes de llegar a socios. Los colaboradores que no se desempeñan adecuadamente, jamás ascienden de categoría.

- Realice la matriz de transición T
- Calcule la probabilidad de que un subalterno llegue a ser socio.
- Calcule la probabilidad de que un subalterno llegue a renunciar.
- ¿Cuánto tiempo deberá permanecer en su categoría un subalterno recién contratado?
- Calcule la probabilidad de que un superior llegue a socio.
- ¿Cuánto tiempo deberá permanecer en el club un subalterno recién graduado?

Ejemplo 8:

- De años anteriores se sabe que la carrera de un cantante tiene 3 fases:
- La primera es la etapa donde es reconocido.
- La segunda es la etapa en donde adquiere fama.
- La tercera es la etapa en donde su fama decae.
- La base de datos de la industria indica que el 80% que están en la fase de reconocimiento adquieren fama, el 15% siguen en la misma fase y 5% pasa a tener un contrato a largo plazo en el que se asegura un éxito de por vida.
- Por otra parte cuando el artista tiene fama tiene un 30% de posibilidad de firmar un contrato a largo plazo, un 55% de seguir en la fase de fama y el resto de decaer debido a la falta de nuevas canciones.
- Por último se ha indicado que los están en la etapa de que la fama decae tienen una esperanza de recobrar su fama de un 30% y el resto decide abandonar.
- Calcule:
- 1. ¿Cuál es la probabilidad que un cantante recién surgido abandone su carrera?
- 2. ¿Qué esperanzas tiene un cantante que perdió su fama de firmar un contrato a largo plazo?
- 3. ¿Cuál es el tiempo promedio para que un artista que tiene fama alcance el éxito?