Contenidos
**Siguiente:** Introducción a los procesos estocásticos **Nivel anterior:** Ampliación Modelos I.O. **Previa:** Objetivos

# Modelos de colas determinísticos

En el modelo determinístico los tiempos de servicio son conocidos con exactitud (no son aleatorios). Con la notación que se introdujo anteriormente, se estudiará el modelo D/D/1/k-1, donde:

- $D/\cdot/\cdot/\cdot$ significa que el tiempo entre llegadas es constantemente igual a $\frac{1}{\lambda}$, $\lambda > 0$. (Luego $\lambda$ denota el número de llegadas por unidad de tiempo, llamado *tasa de llegadas*)
- $\cdot/D/\cdot/\cdot$ significa que el tiempo de servicio es constantemente igual a $\frac{1}{\mu}$, $\mu > 0$, de donde $\mu$ es el número de servicios por unidad de tiempo en período de ocupación, llamado *tasa de servicio*.
- $\cdot/\cdot/1/\cdot$ indica que hay un servidor.
- $\cdot/\cdot/\cdot/k-1$ es la *capacidad del sistema*, el número máximo de clientes que admite el sistema. Cuando un cliente está en el servicio sólo puede haber k-2 clientes en cola, y el k-ésimo cliente que aspire a entrar en el sistema es rechazado.

**Observación:** Salvo que se diga lo contrario, de aquí en adelante se supondrá $\lambda > \mu$, pues en caso contrario todo cliente puede ser servido sin problema y no se produce el fenómeno de cola.

Interesa conocer el estado del sistema en el instante t, es decir, conocer N(t) y L(t) y los tiempos que afectan al cliente n, es decir, $W_n$ y $\theta_n$.

N(t) denota el número de clientes en el sistema, es decir, el número de clientes en cola más el número de clientes que están siendo servidos en el instante t.

Suponemos que en t=0 no hay clientes (N(0)=0).

Definimos $\tau$ como el instante de tiempo en el que se produce el primer rechazo, es decir, llega un cliente cuando en el sistema ya hay k-1 clientes.

Si $t \in (0, \frac{1}{\lambda})$, no ha llegado todavía ningún cliente, por lo que en este intervalo de tiempo no hay clientes en el sistema.

Si $t \in (\frac{1}{\lambda}, \tau)$, entonces N(t) es igual al número de llegadas menos el número de salidas hasta t, donde

"nº de llegadas hasta t" = $[\frac{t}{\frac{1}{\lambda}}] = [\lambda t]$.

"nº de salidas hasta t" = $[\frac{t-\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\mu}}] = [\mu t - \frac{\mu}{\lambda}]$.

Por lo tanto $N(t) = [\lambda t] - [\mu t - \frac{\mu}{\lambda}]$.

Para $t \geq \tau$, vamos a restringirnos al caso más sencillo: el tiempo de servicio es un múltiplo entero del tiempo entre llegadas, es decir,

$$m\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu}.$$

En este caso, siempre que se produce la salida de un cliente hay una llegada simultánea. Así, no puede suceder que haya simultáneamente una salida y un rechazo, pues si un cliente sale, se deja una plaza libre en el sistema para el otro cliente que llega en ese momento. En consecuencia, el número de clientes es creciente hasta que a partir del instante $\tau$ es constantemente igual a la capacidad del sistema, k-1. Por lo tanto, se tiene

$$N(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & si & t < \frac{1}{\lambda}, \\ [\lambda t] - [\mu t - \frac{\mu}{\lambda}] & si & \frac{1}{\lambda} < t < \tau, \\ k-1 & si & t \geq \tau. \end{array} \right.$$

Suponiendo que se tiene disciplina FIFO, vamos a definir los valores asociados a cada cliente.

$W_n$= es el tiempo de espera en cola del cliente n-ésimo.

$S_n$= es el tiempo del n-ésimo servicio.

$T_n$= es el tiempo entre la n-ésima y la (n+1)-ésima llegada aceptadas.

Expresemos $W_{n+1}$ en función de $W_n$, $S_n$ y $T_n$.

Si $W_n + S_n \leq T_n$ entonces $W_{n+1}$=0.

Si $W_n + S_n \geq T_n$ entonces $W_{n+1}$=$W_n$+$S_n$-$T_n$.

Aunque esto es cierto en general, en el caso del sistema que estamos estudiando, si $t < \tau$, entonces

$$S_n = \frac{1}{\mu} \qquad T_n = \frac{1}{\lambda},$$

por lo que

$$W_{n+1} = W_n + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda}.$$

Si $t \geq \tau$, entonces cualquier cliente que sea aceptado será servido después de que hayan sido atendidos los k-2 que le preceden (y no los k-1, pues su llegada ha coincidido con una salida). Así

$$W_n = \frac{k-2}{\mu}$$

En resumen:

$$W_n = \left\{ \begin{array}{ccc} (n-1)(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda}) & si & n = 1, 2, \ldots, \lambda\tau - 1 \\ \frac{k-2}{\mu} & si & n \geq \lambda\tau \end{array} \right.$$

---