



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Análise de séries temporais via curvas complexidade-entropia em múltiplas escalas

Alvaro Franco Martins

Orientador: Prof. Dr. Haroldo Valentin Ribeiro

Maringá, 16 de outubro de 2018.

Objetivos

- Empregar o parâmetro *embedding delay*, τ , para acessar a dinâmica temporal de séries estocásticas e caóticas.
- Estudar a variação desse parâmetro por meio das curvas de complexidade-entropia de Tsallis e de Rényi.
- Mostrar que essa generalização pode ser útil para encontrar comportamentos periódicos em sinais ruidosos.

Entropia e Complexidade Estatística

- A entropia pode ser entendida como uma medida da quantidade de informações armazenadas em um dado sistema.
- Mas medidas de entropia deixam a desejar ao tentarmos quantificar o grau de estrutura dos sistemas. Exemplo: Gás ideal e cristal perfeito.
- E assim se faz necessário a ideia de complexidade estatística. Essa quantidade deve ser capaz de mensurar a estrutura do sistema.

Entropia e Complexidade Estatística

- Solução:

VOLUME 88, NUMBER 17

PHYSICAL REVIEW LETTERS

29 APRIL 2002

Permutation Entropy: A Natural Complexity Measure for Time Series

Christoph Bandt and Bernd Pompe

- Ambas medidas devem ser empregadas simultaneamente: curvas de complexidade-entropia.
- Por serem úteis para acessar a escala probabilística dos sistemas, utilizamos as generalizações dessas curvas: curvas q -complexidade-entropia e α -complexidade entropia.

PHYSICAL REVIEW E 95, 062106 (2017)

Characterizing time series via complexity-entropy curves

Haroldo V. Ribeiro,^{1,*} Max Jauregui,¹ Luciano Zunino,^{2,3} and Ervin K. Lenzi⁴

Physica A 498 (2018) 74–85

Characterization of time series via Rényi complexity–entropy curves

M. Jauregui^a, L. Zunino^{b,c}, E.K. Lenzi^d, R.S. Mendes^a, H.V. Ribeiro^{a,*}

Entropia de Shannon

The Bell System Technical Journal

Vol. XXVII

July, 1948

No. 3

A Mathematical Theory of Communication

By C. E. SHANNON

A entropia de Shannon associada a uma distribuição de probabilidade $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ é definida como

$$S(P) = \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{1}{p_i}.$$

E essa medida normalizada é

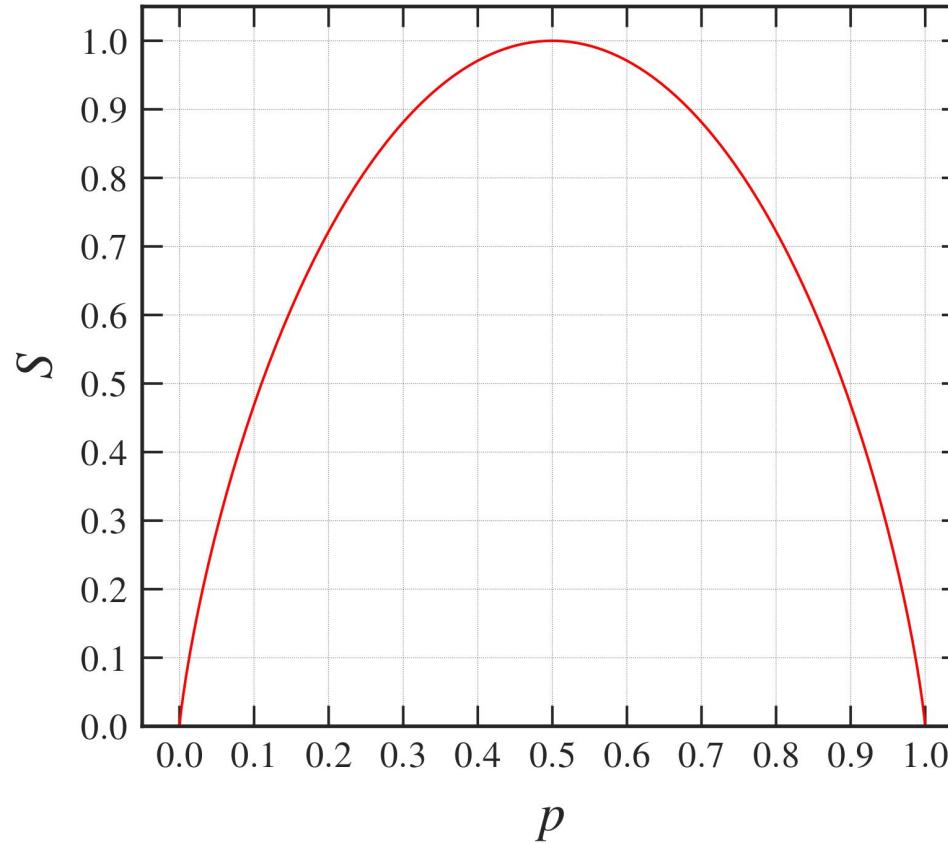
$$H(P) = \frac{S(P)}{S(U)},$$

onde a distribuição uniforme U resulta na entropia máxima do sistema.

Entropia de Shannon

Considerando um sistema de dois estados A e B sendo p a probabilidade de ocorrer o estado A e q a probabilidade de ocorrer o estado B . Dado que $p + q = 1$, a entropia de Shannon é

$$S = -(p \log p + q \log q).$$



Generalizações da entropia de Shannon

A definição de entropia de Shannon pode ser generalizada a fim de ponderar diferentes escalas probabilísticas do sistema. Podemos notar que medidas de entropias que dependem de potências da forma p_i^γ são mais sensíveis a eventos mais frequentes se $\gamma > 0$ e mais sensíveis a eventos raros quando $\gamma < 0$.

Duas entropias monoparamétricas que apresentam essa característica são a entropia de Tsallis (ou entropia q) e a de Rényi (ou entropia α).

$$S_q(P) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln_q p_i, \quad \ln_q(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{se } x \geq 0 \text{ e } q = 1 \\ \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \text{ ou } \int_1^x t^{-q} dt & \text{se } x \geq 0 \text{ e } q \neq 1, \\ \text{Indefinido} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}, \quad H_q(P) = \frac{S_q(P)}{S_q(U)}.$$

$$S_\alpha(P) = \frac{1}{1-\alpha} \ln \sum_{i=1}^n p_i^\alpha, \quad H_\alpha(P) = \frac{S_\alpha(P)}{S_\alpha(U)}.$$

Entropia de permutação: abordagem de Bandt e Pompe

Como exemplo, considerando uma série de $n = 8$ termos

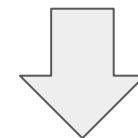
$$x = \{5, 8, 10, 11, 7, 12, 4, 3\},$$

escolhendo particionar a série com tamanho $d = 2$, construímos $n - d + 1 = 7$ partições com os seguintes vetores:

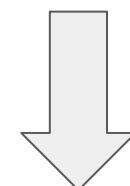
$$\begin{aligned}(\vec{2}) &= (5, 8), \\(\vec{3}) &= (8, 10), \\(\vec{4}) &= (10, 11), \\(\vec{5}) &= (11, 7), \\(\vec{6}) &= (7, 12), \\(\vec{7}) &= (12, 4), \\(\vec{8}) &= (4, 3).\end{aligned}$$



| permutação “01” | permutação “10” |
|------------------------|-----------------------|
| $(\vec{2}) = (5, 8)$ | $(\vec{5}) = (11, 7)$ |
| $(\vec{3}) = (8, 10)$ | $(\vec{7}) = (12, 4)$ |
| $(\vec{4}) = (10, 11)$ | $(\vec{8}) = (4, 3)$ |
| $(\vec{6}) = (7, 12)$ | |



$$p(\text{“01”}) = 4/7 \text{ e } p(\text{“10”}) = 3/7$$



$$S = -\frac{4}{7} \log_2 \left(\frac{4}{7} \right) - \frac{3}{7} \log_2 \left(\frac{3}{7} \right) \approx 0,985.$$

Entropia de permutação: abordagem de Bandt e Pompe

Considerando uma série temporal de n elementos

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{x_t\}_{t=1,2,\dots,n},$$

construímos $n - d + 1$ partições representadas por

$$(\vec{s}) = \{x_{s-(d-1)\tau}, x_{s-(d-2)\tau}, \dots, x_{s-\tau}, x_s\},$$

onde $s = d, d+1, \dots, n$, τ é o chamado *embedding delay*, o qual permite selecionar elementos espaçados em τ unidades de tempo, e d é a chamada *embedding dimension*.

Assim, encontramos as probabilidades de cada padrão ordinal expresso por

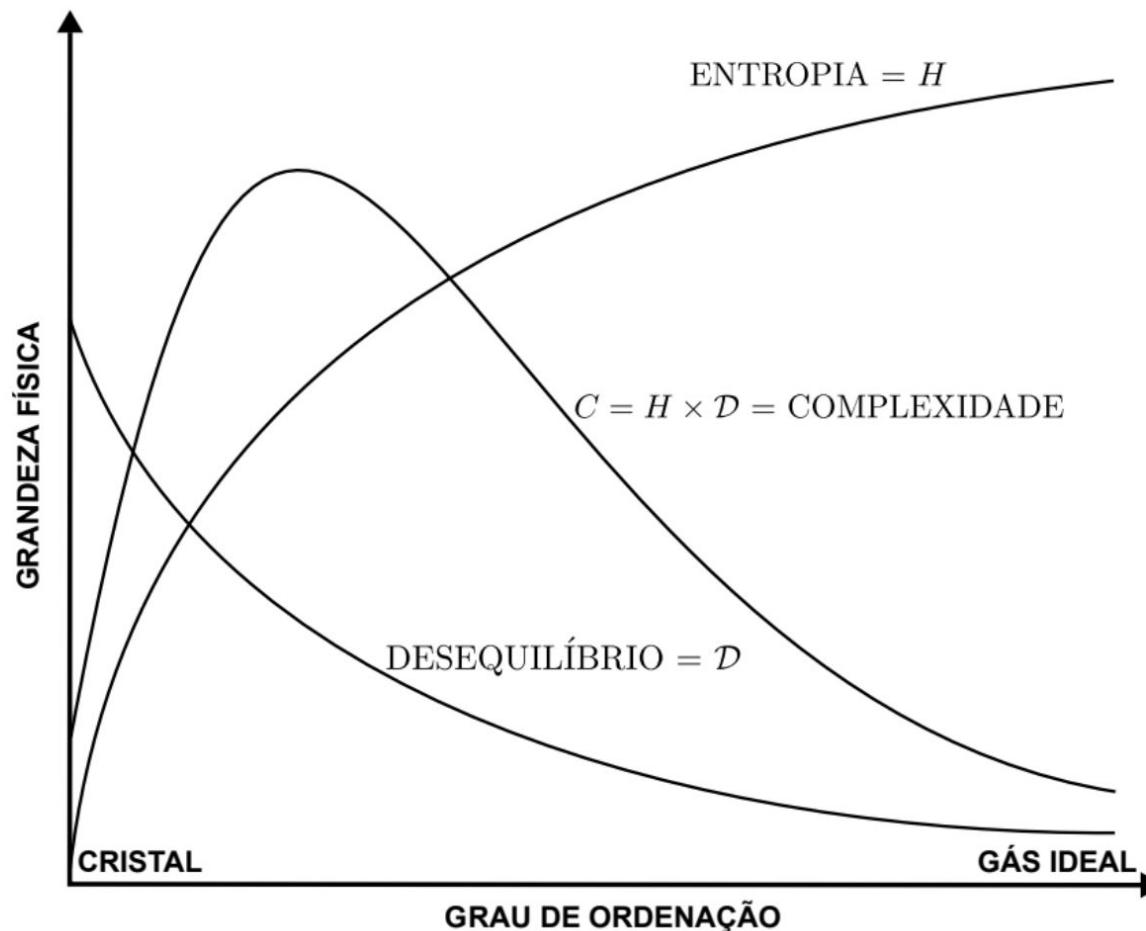
$$p(\pi_i) = \frac{\#(s|s \leq (n-d+1); (\vec{s}) \text{ do tipo } \pi_i))}{n-d+1},$$

e a entropia de permutação é escrita como

$$S[P] = - \sum_{i=1}^{d!} p(\pi_i) \log p(\pi_i),$$

$$H[P] = \frac{S[P]}{\log d!}.$$

Medidas de Complexidade

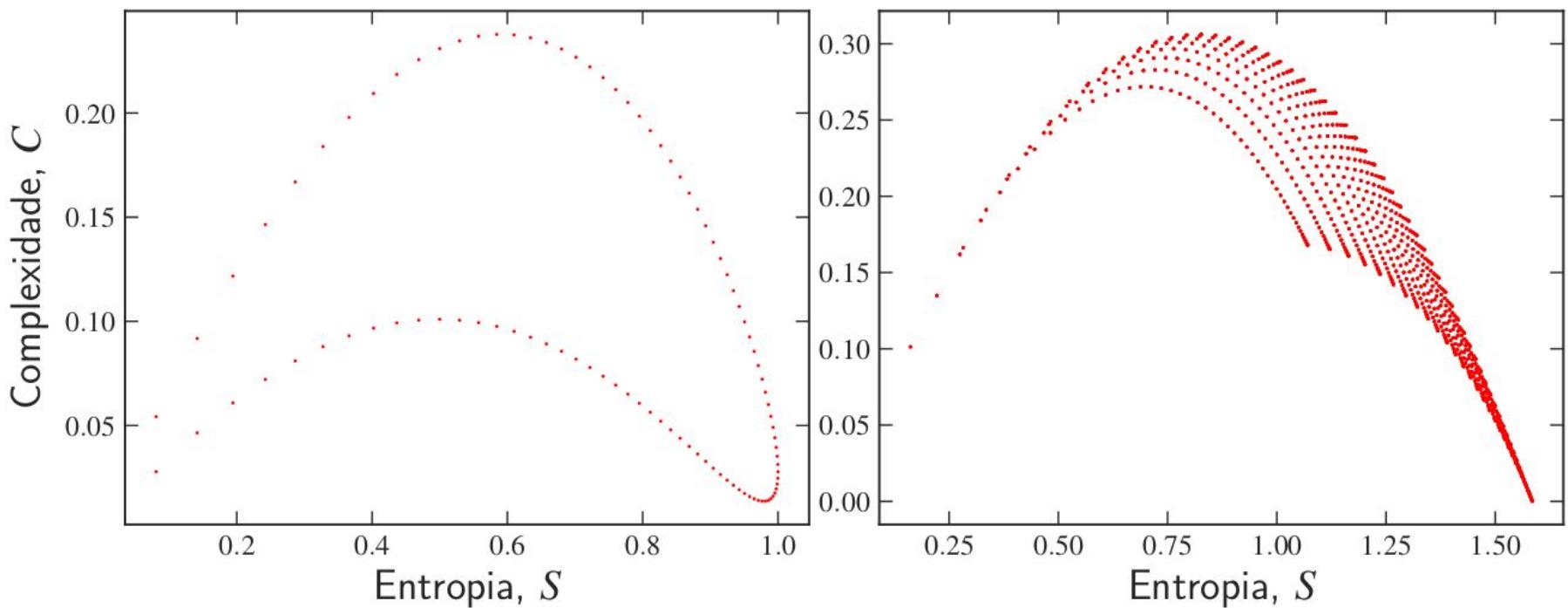


$$C[P] = H[P]\mathcal{D}[P] = -C_0 \left[\sum_{i=1}^{d!} p(\pi_i) \log p(\pi_i) \right] \left[\sum_{i=1}^{d!} \left(p(\pi_i) - \frac{1}{d!} \right)^2 \right]$$

Plano complexidade-entropia

$$C^{(1)} = [-p \log p - (1-p) \log(1-p)] \left\{ \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \left[(1-p) - \frac{1}{2}\right]^2 \right\},$$

$$C^{(2)} = (-p \log p - q \log q - [1 - (p+q)] \log[1 - (p+q)]) \left[\left(p - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(q - \frac{1}{3}\right)^2 + \left([1 - (p+q)] - \frac{1}{3}\right)^2 \right].$$



Plano complexidade-entropia

PRL 99, 154102 (2007)

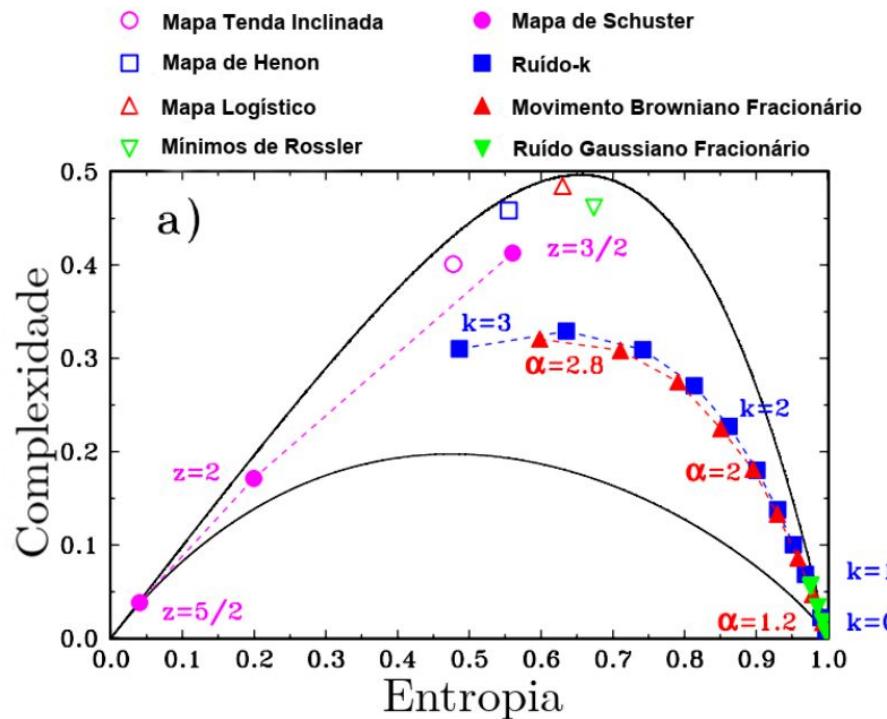
PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending
12 OCTOBER 2007

Distinguishing Noise from Chaos

O. A. Rosso,^{1,2} H. A. Larrondo,³ M. T. Martin,⁴ A. Plastino,⁴ and M. A. Fuentes^{5,6}

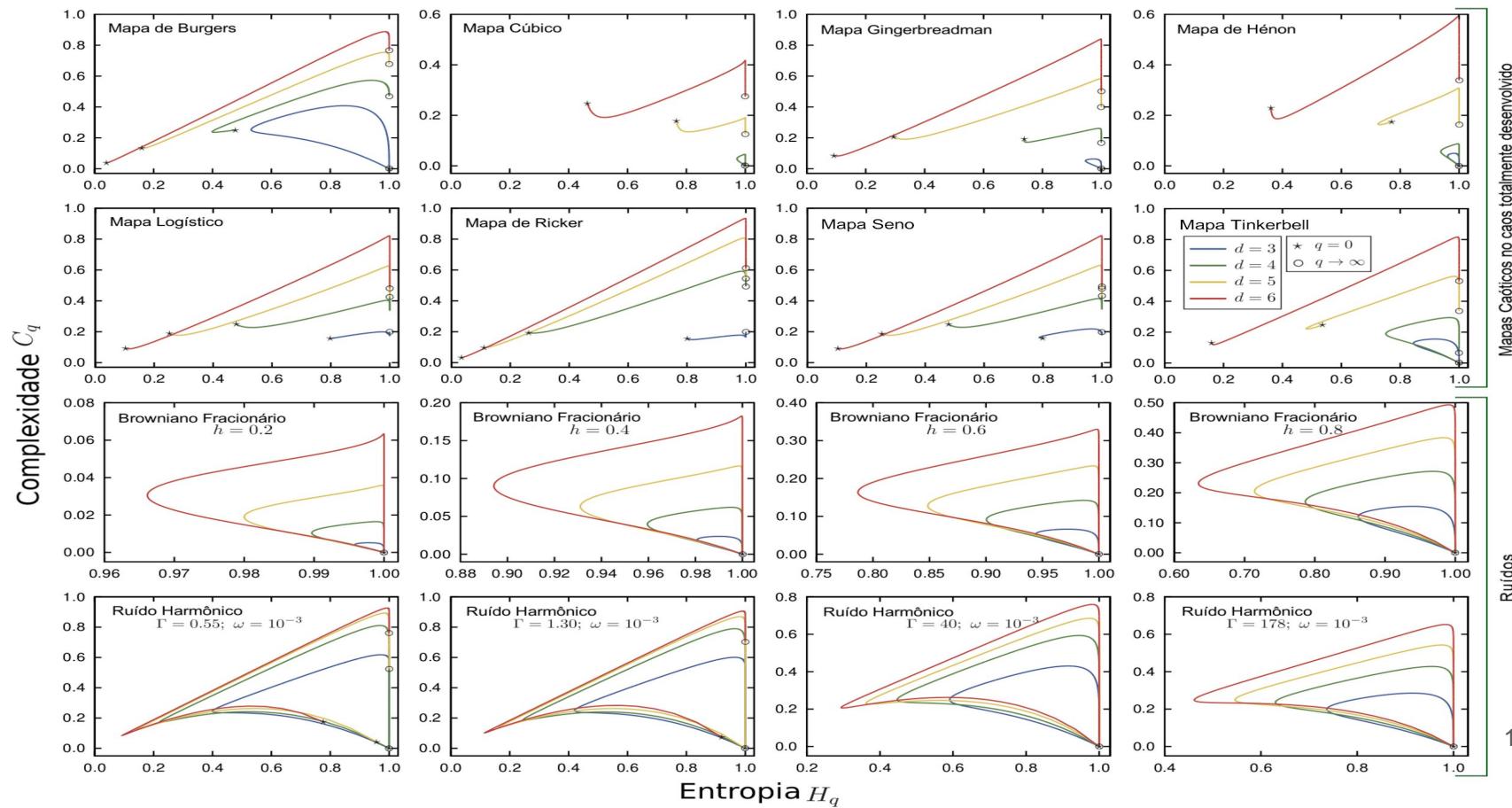
$$S[P] = -\frac{1}{\log d!} \sum_i p(\pi_i) \log p(\pi_i), \quad C[P] = \frac{H[P]\mathcal{D}[P]}{\mathcal{D}_0}, \quad \mathcal{D}[P] = \left[H\left(\frac{P+U}{2}\right) - \frac{H[P]}{2} - \frac{H[U]}{2} \right]$$



Generalização do plano complexidade-entropia para entropias monoparamétricas

Curvas q -complexidade-entropia de Tsallis

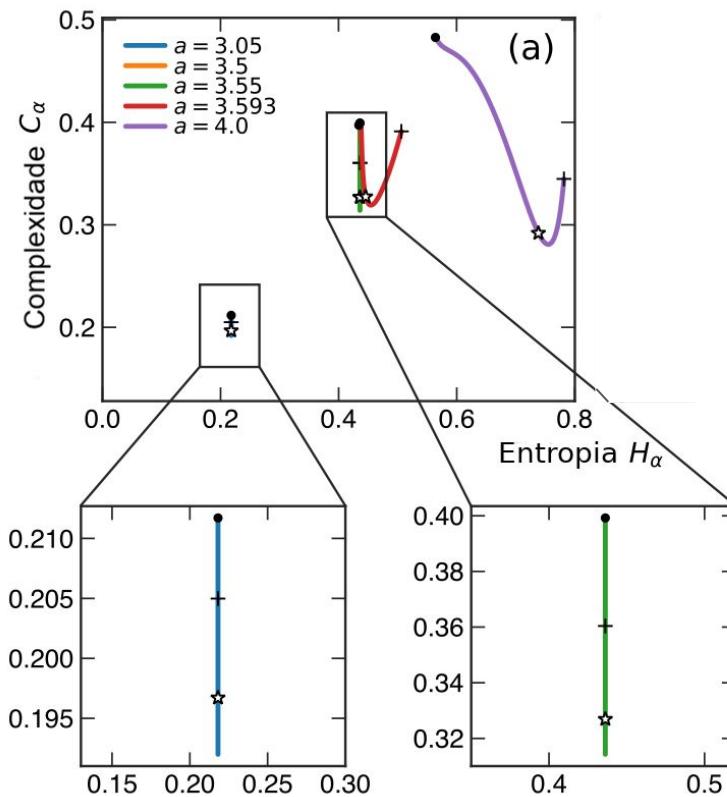
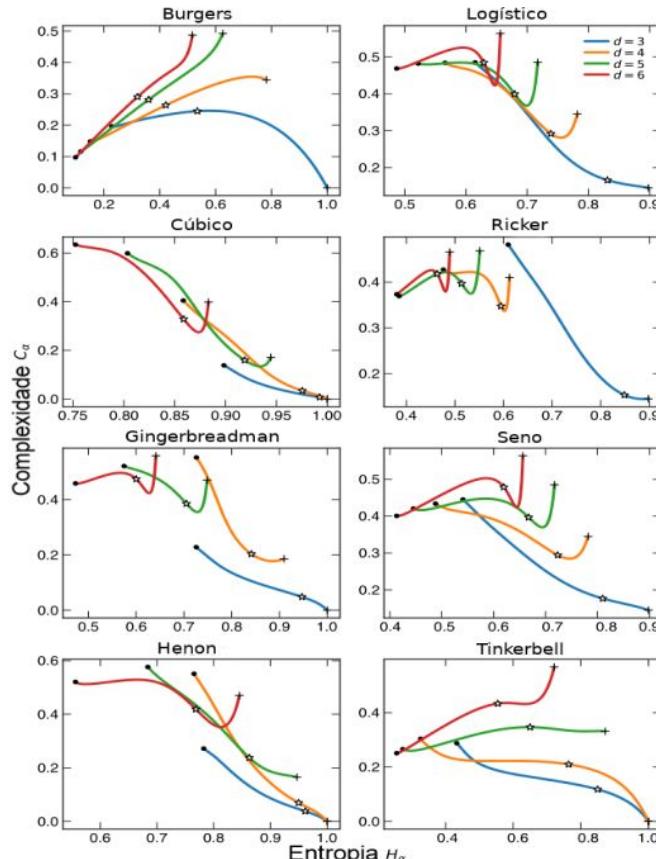
$$C_q(P) = \frac{D_q(P, U)H_q(P)}{D_q^*}, \quad D_q(P, U) = \frac{1}{2}K_q\left(P|\frac{P+U}{2}\right) + \frac{1}{2}K_q\left(U|\frac{P+U}{2}\right).$$



Generalização do plano complexidade-entropia para entropias monoparamétricas

Curvas α -complexidade-entropia de Rényi

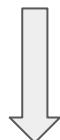
$$C_\alpha(P) = \frac{D_\alpha(p)H_\alpha(p)}{D_\alpha^*}, \quad D_\alpha(P, U) = \frac{1}{2(\alpha - 1)} \left[\ln \sum_{i=1}^n p_i^\alpha \left(\frac{p_i + 1/n}{2} \right)^{1-\alpha} + \ln \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^\alpha} \left(\frac{p_i + 1/n}{2} \right)^{1-\alpha} \right]$$



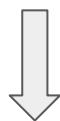
Análise das curvas complexidade-entropia via *embedding delay*

Família de curvas complexidade-entropia

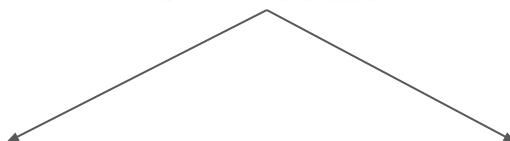
$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{x_t\}_{t=1,2,\dots,n}$$



$$(\vec{s}) = \{x_{s-(d-1)\tau}, x_{s-(d-2)\tau}, \dots, x_{s-\tau}, x_s\} \text{ com } \tau \in \{1, 2, \dots, n\}$$



$$\{(\vec{s})_{\tau=1,2,\dots,n}\}$$



Curvas q -complexidade-entropia de Tsallis

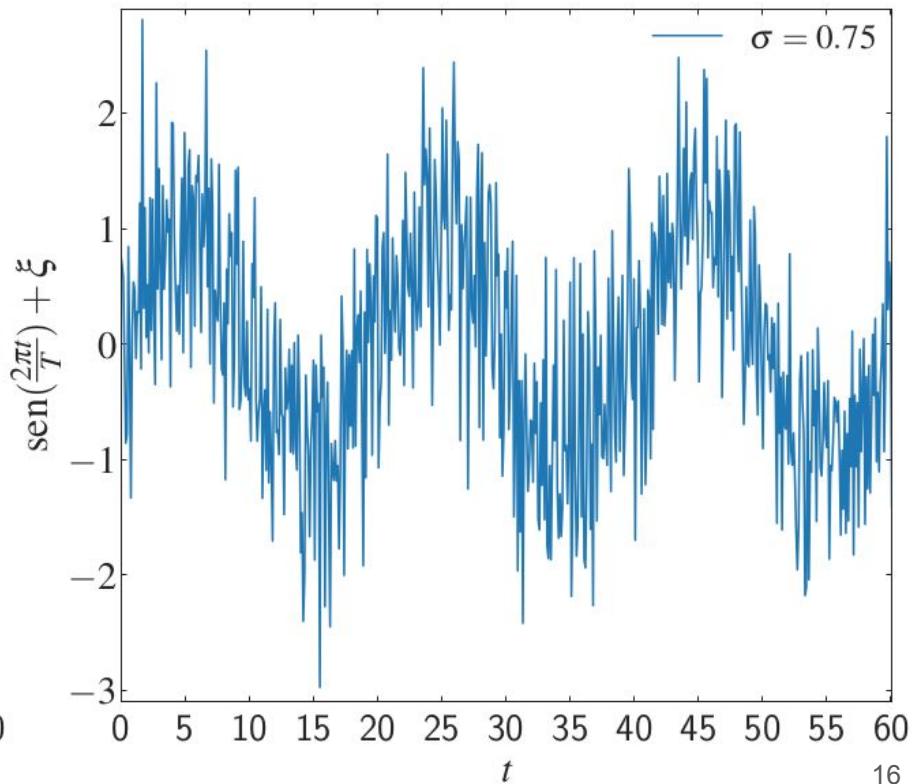
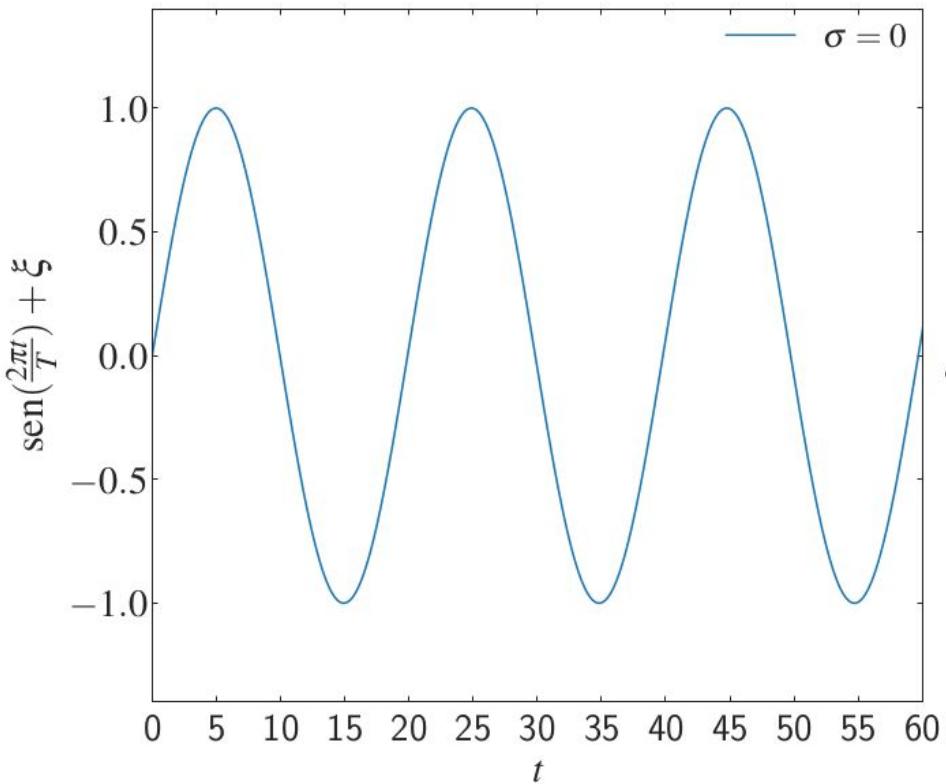
$$\{(H_q, C_q)_{\tau=1,2,\dots,n}\}$$

Curvas α -complexidade-entropia de Rényi

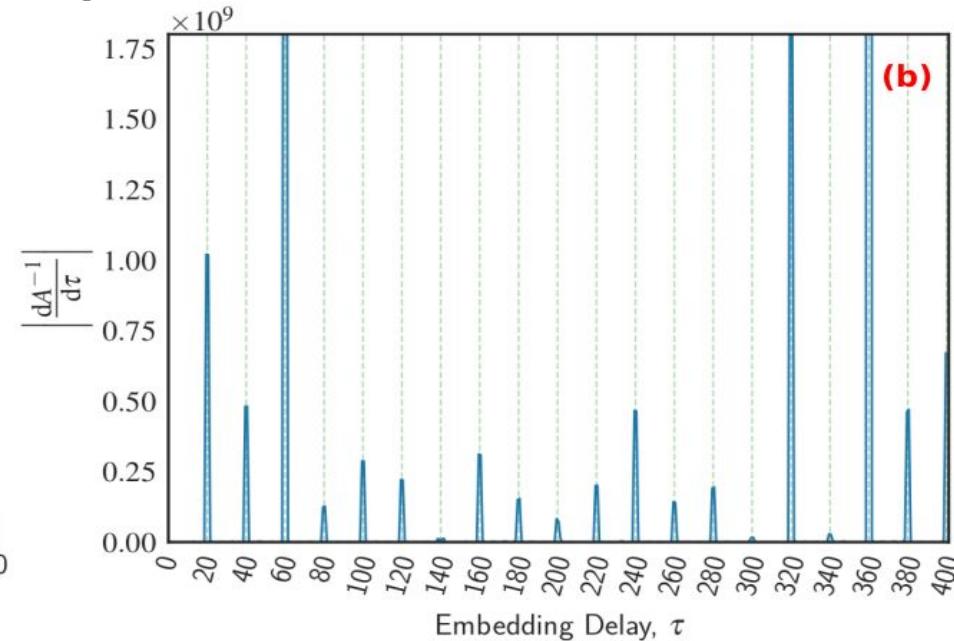
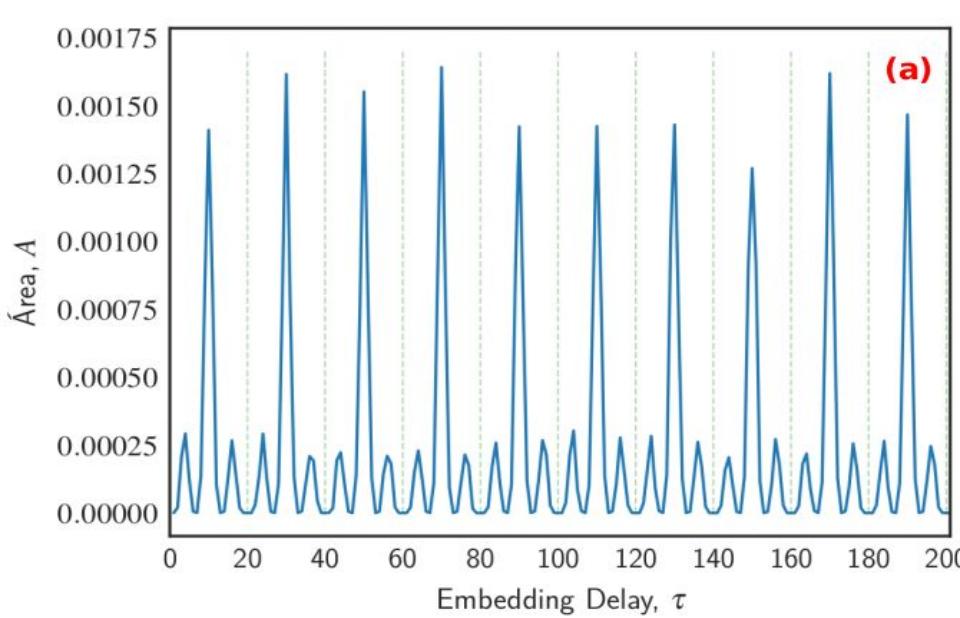
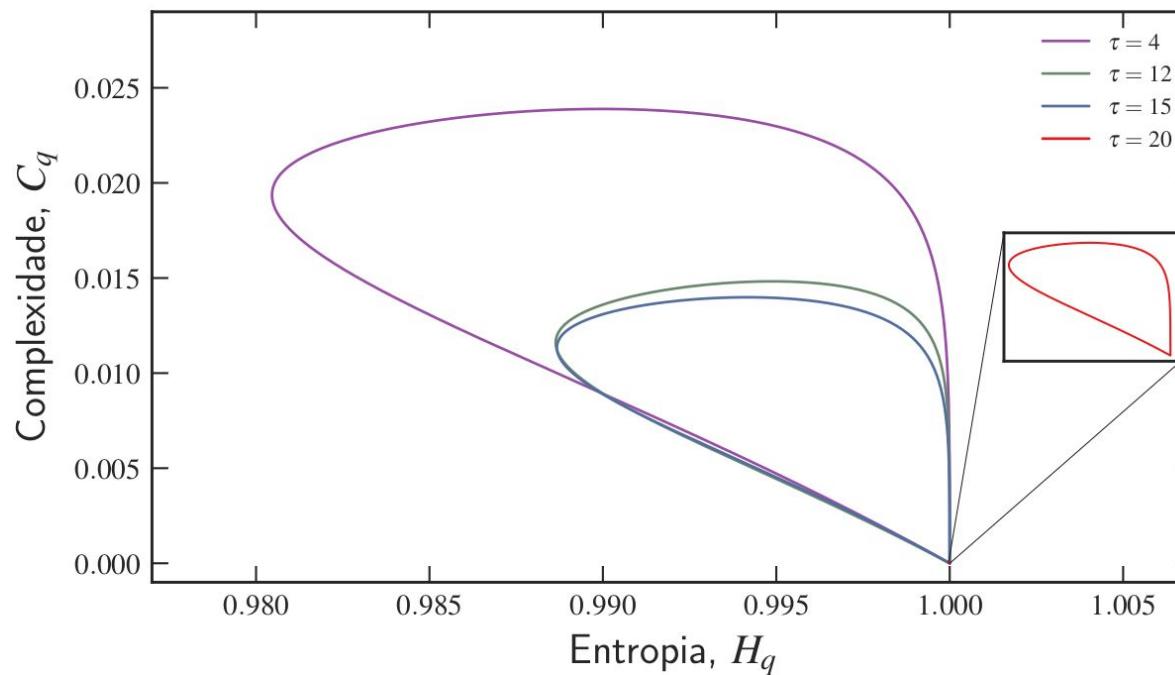
$$\{(H_\alpha, C_\alpha)_{\tau=1,2,\dots,n}\}$$

Séries Estocásticas

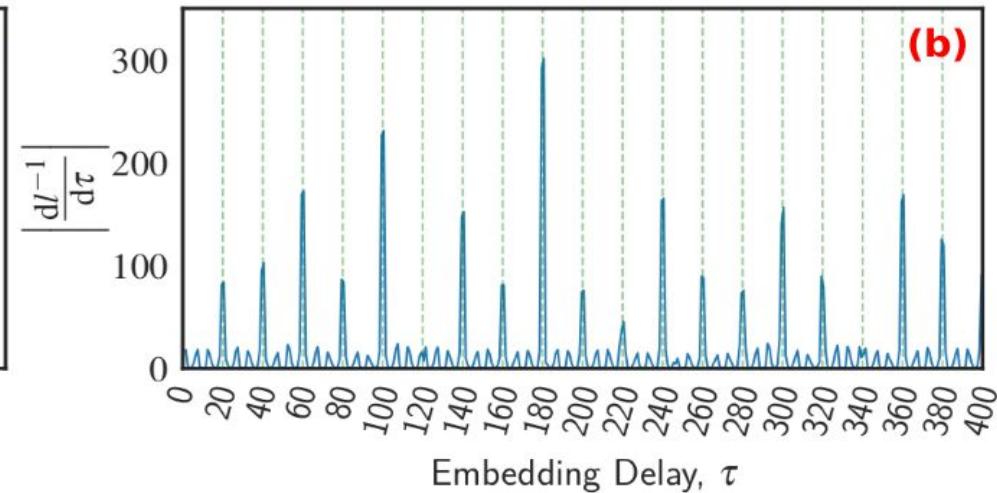
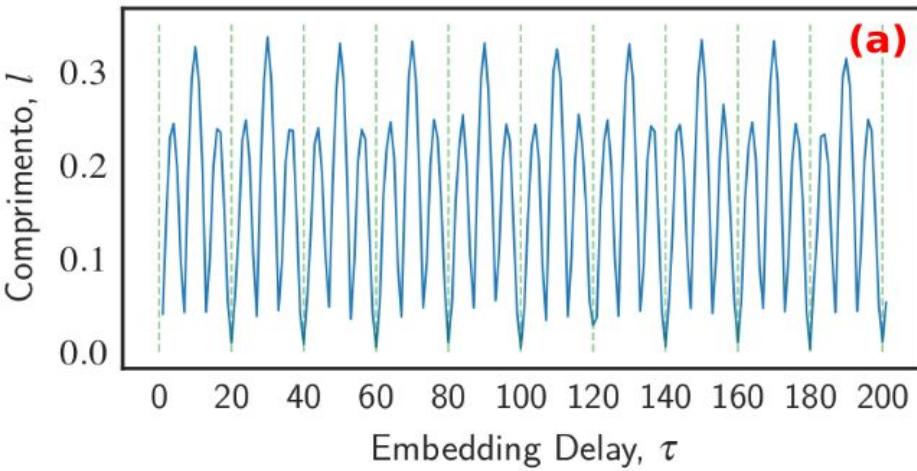
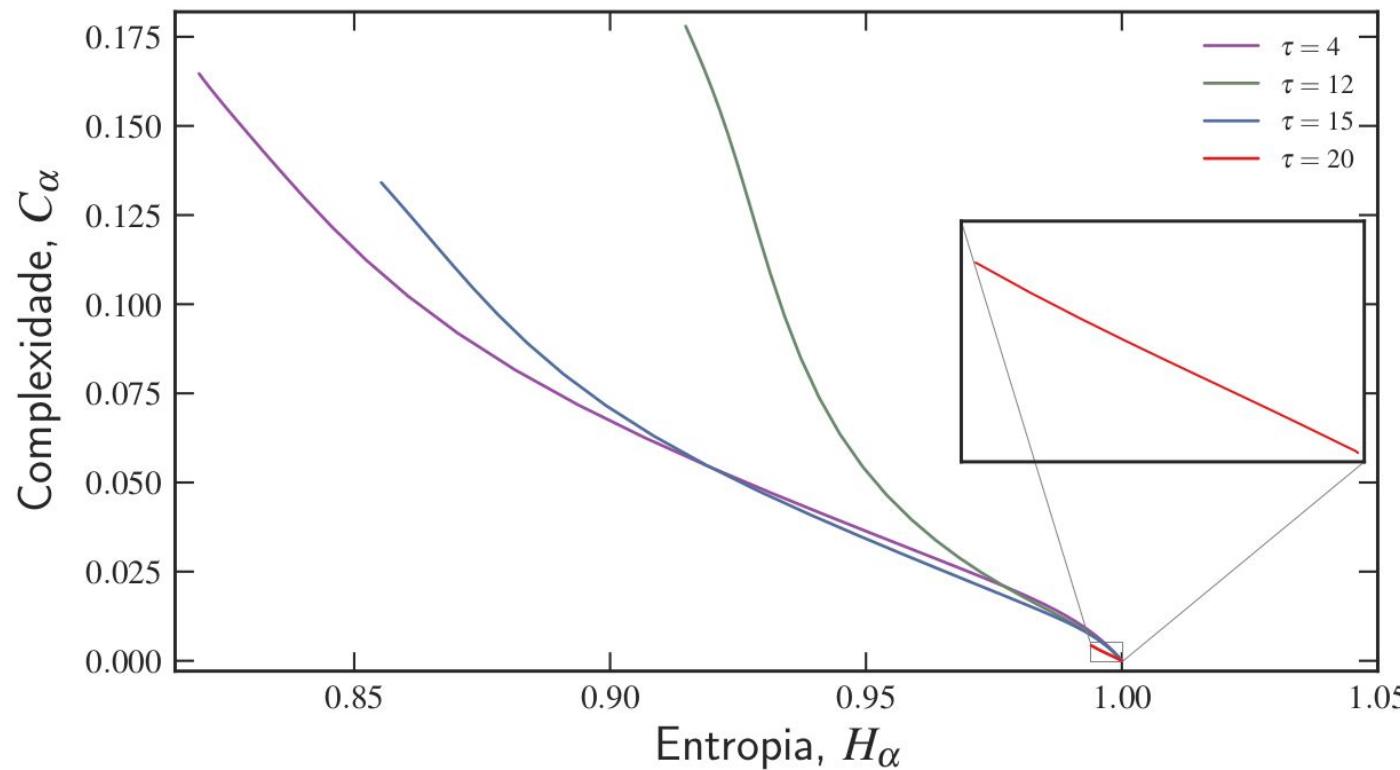
Sinal periódico com ruído gaussiano



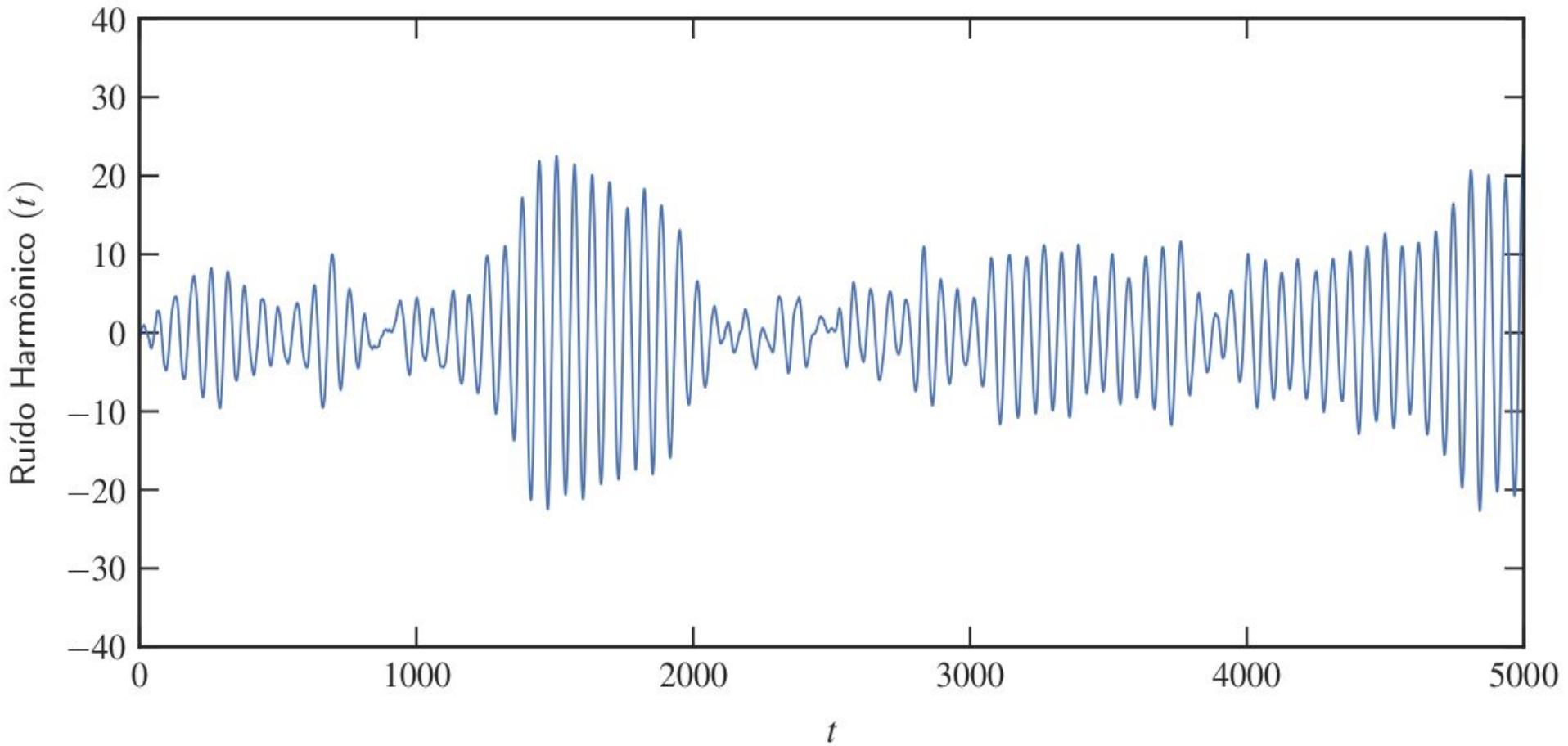
Curvas q -complexidade-entropia de Tsallis



Curvas α -complexidade-entropia de Rényi

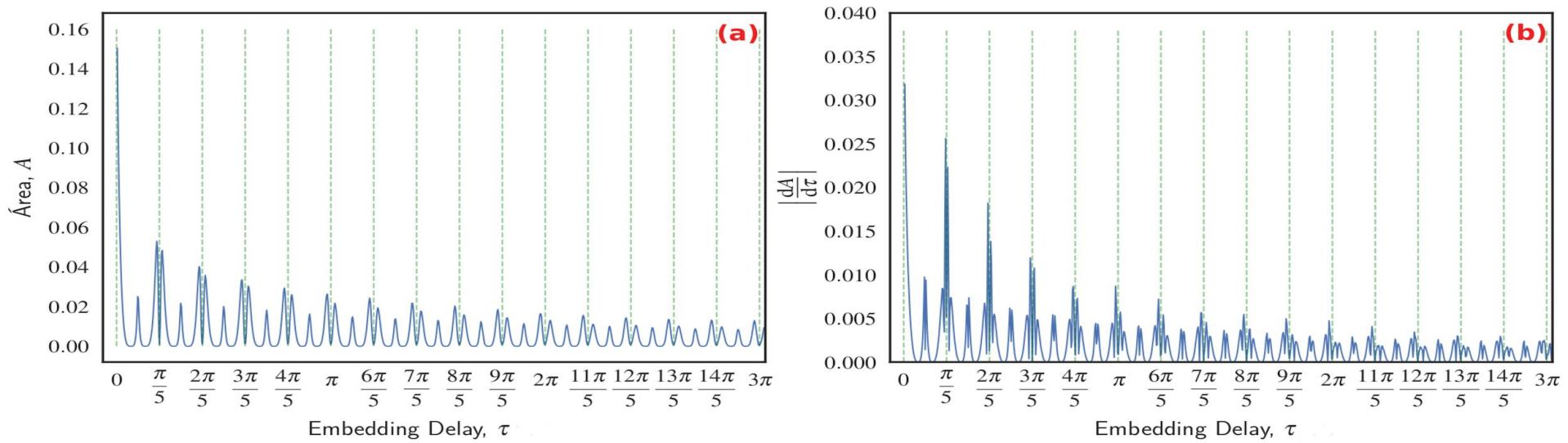
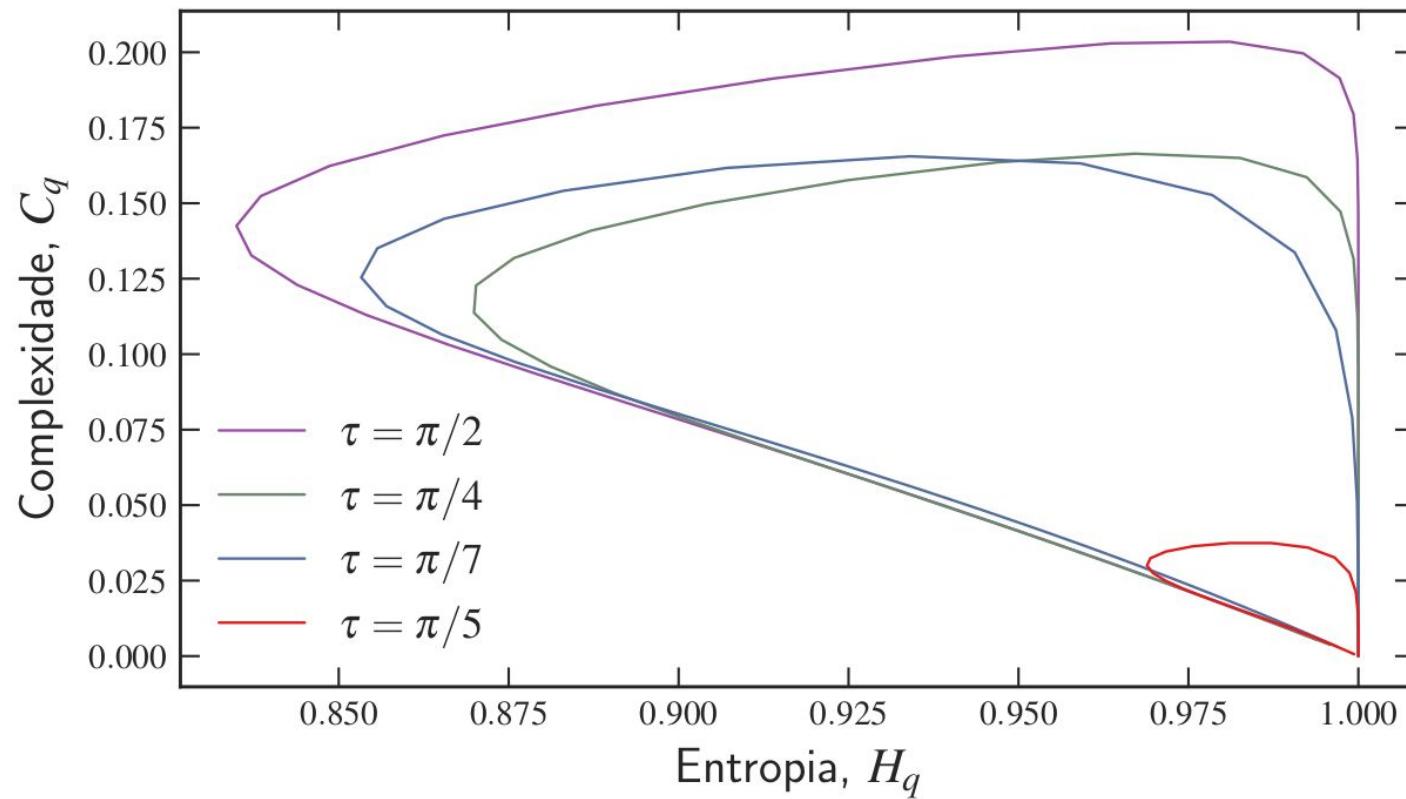


Ruído harmônico

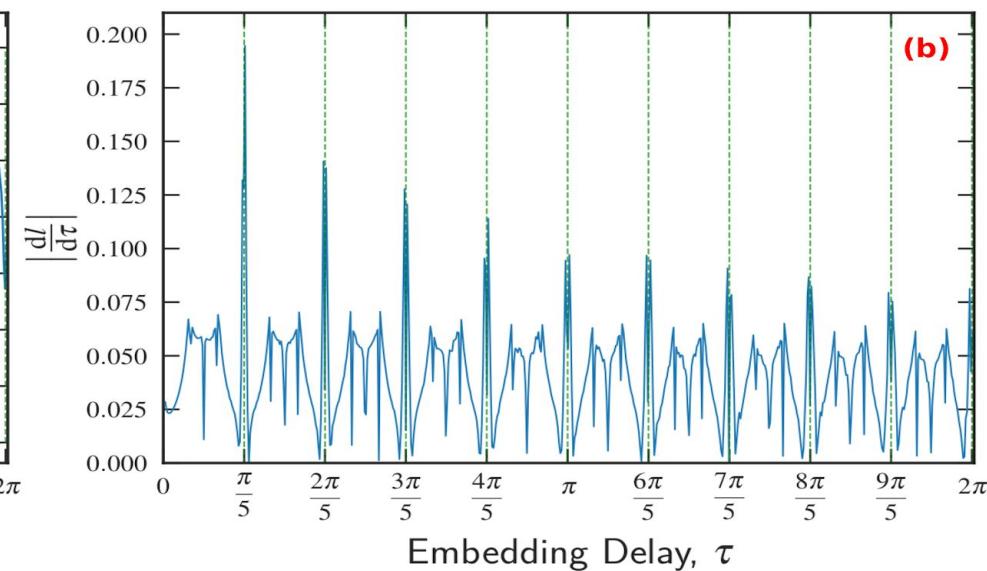
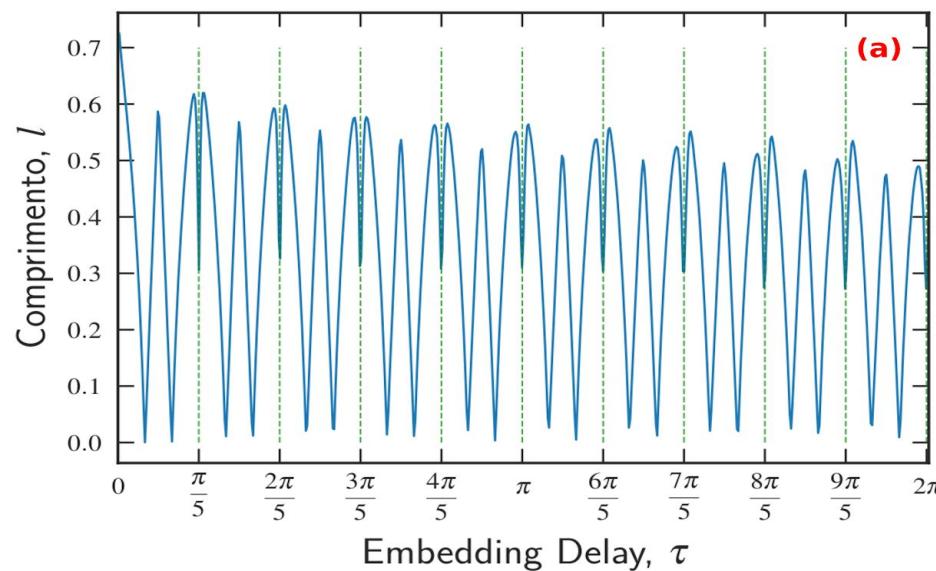
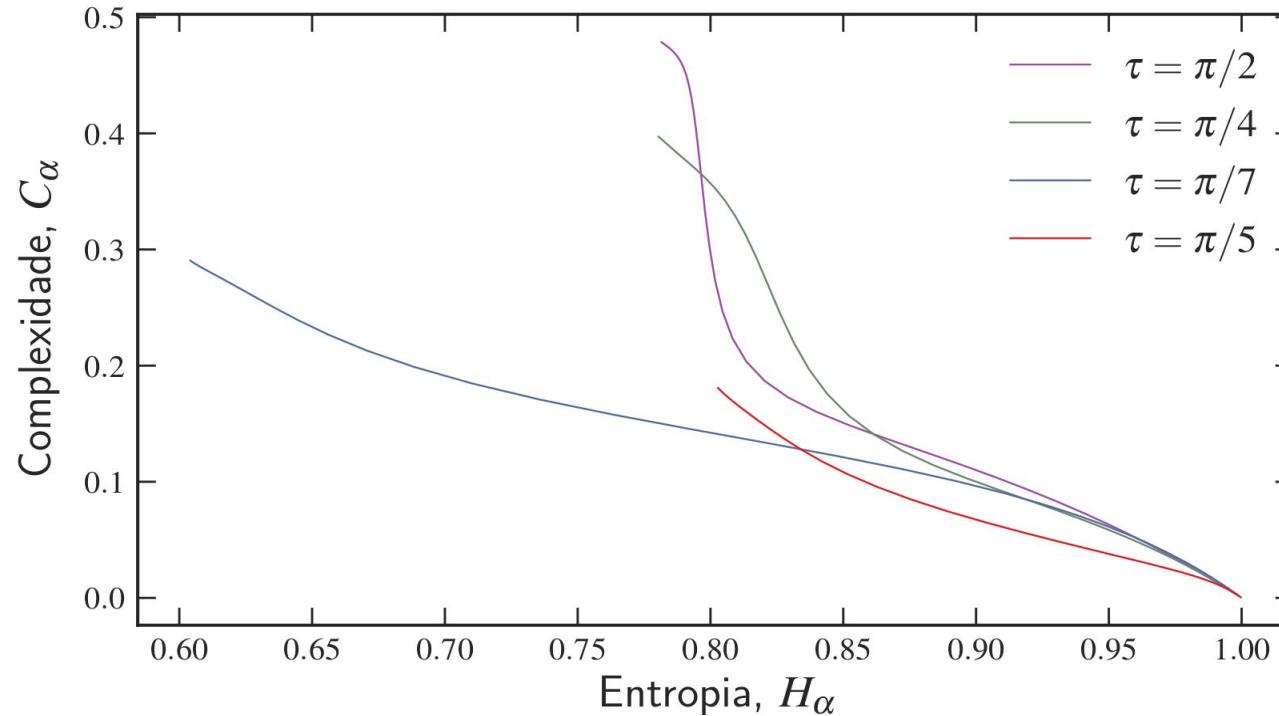


Curvas q -complexidade-entropia de Tsallis

20

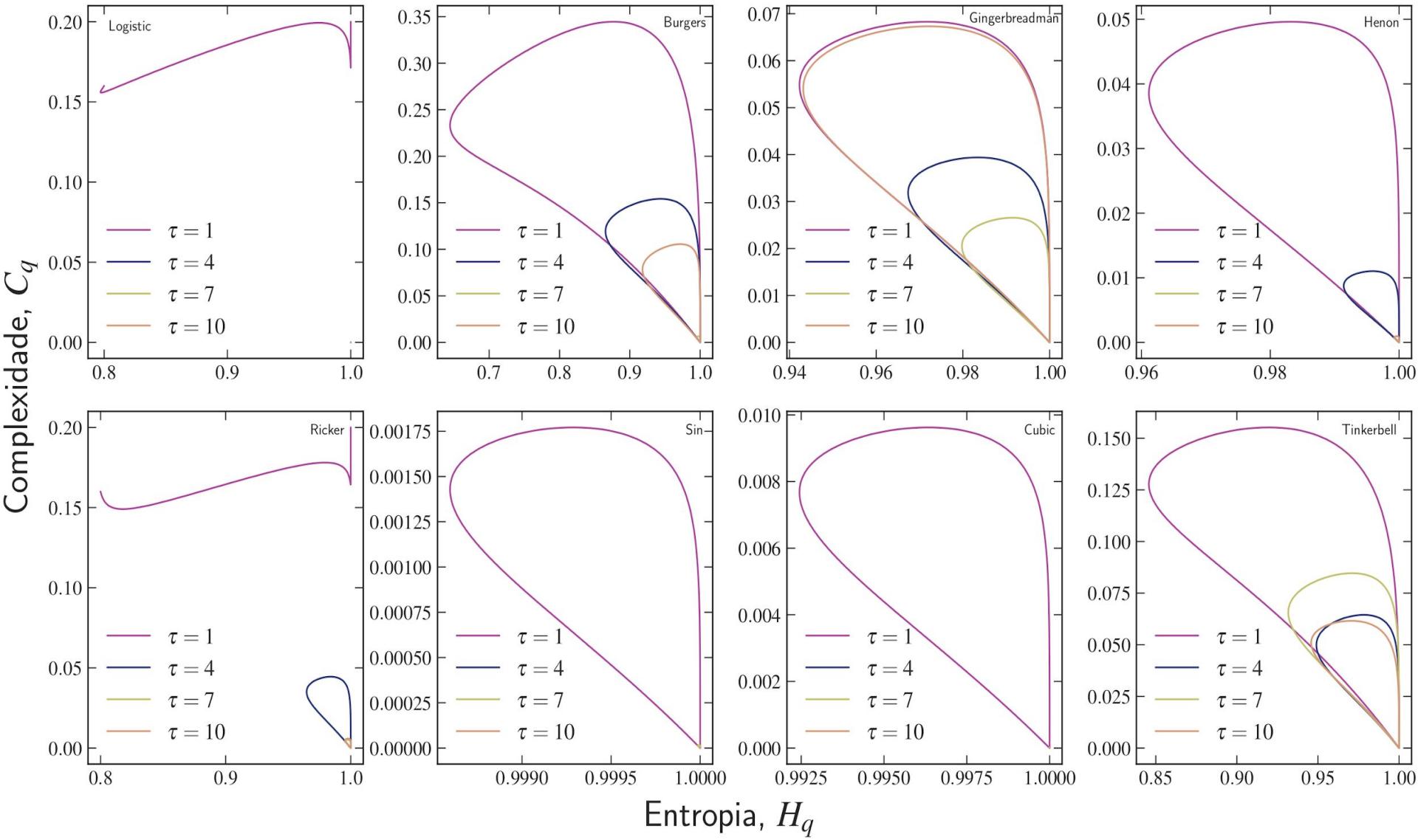


Curvas α -complexidade-entropia de Rényi

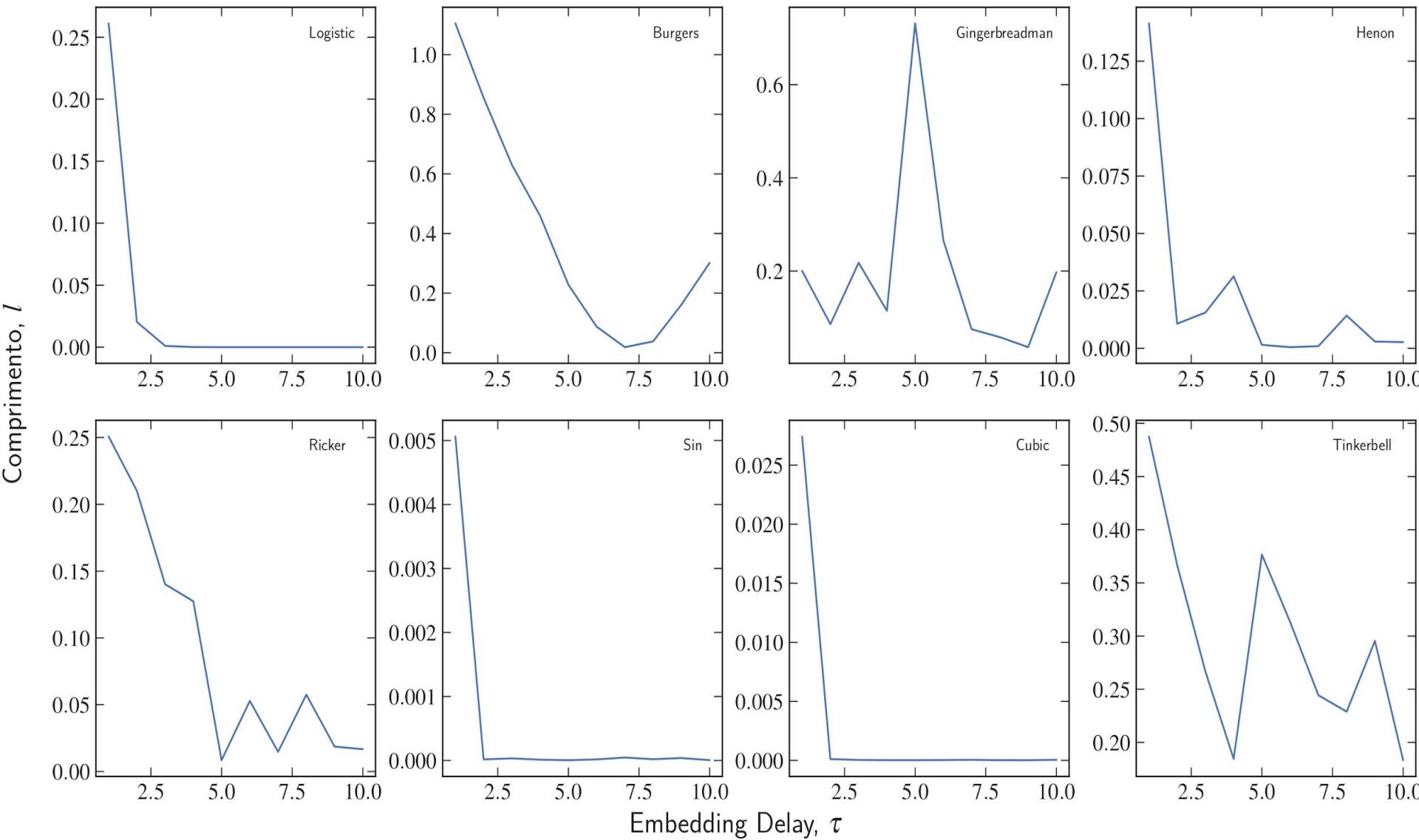


Séries caóticas

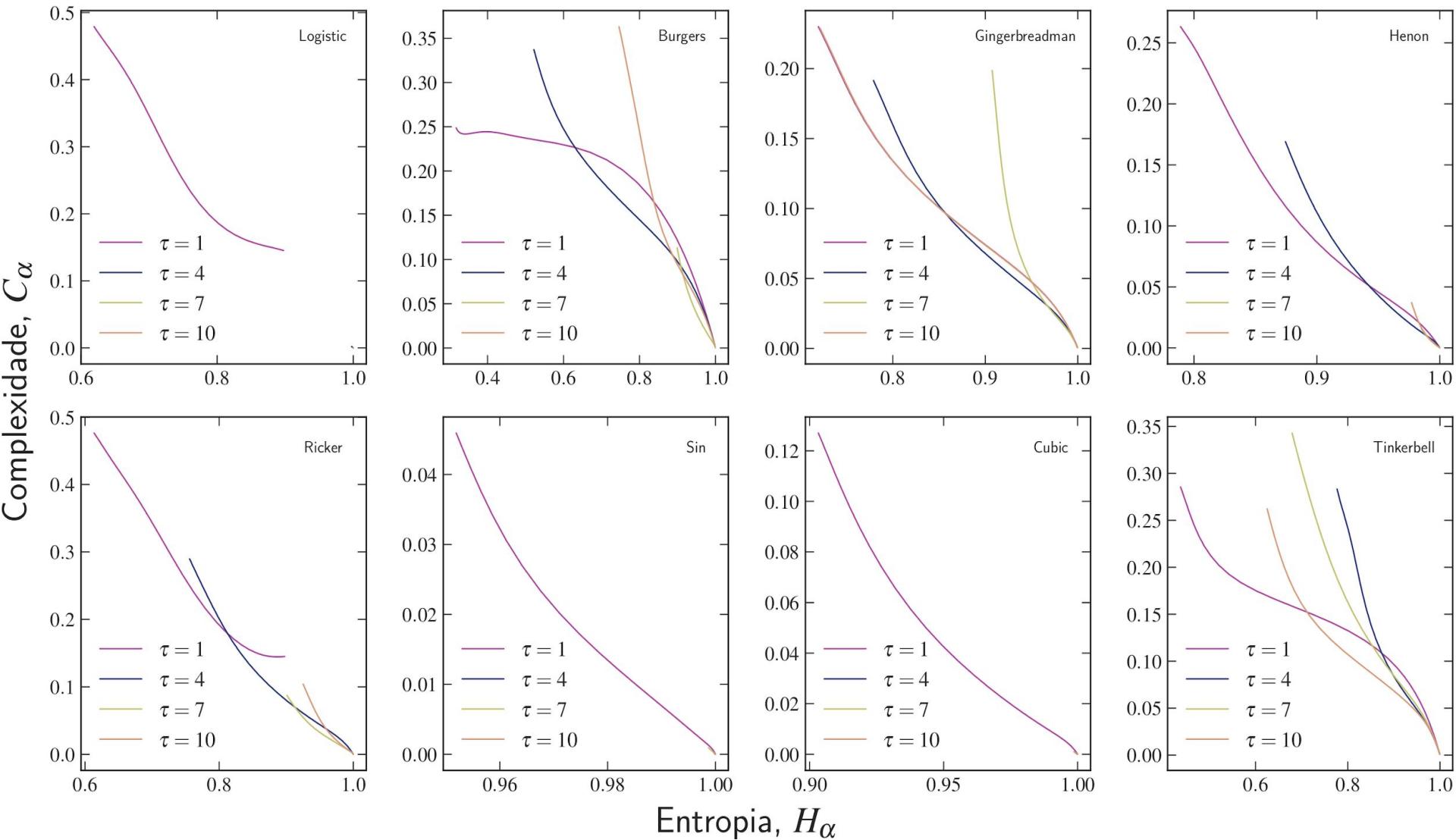
Curvas q -complexidade-entropia de Tsallis



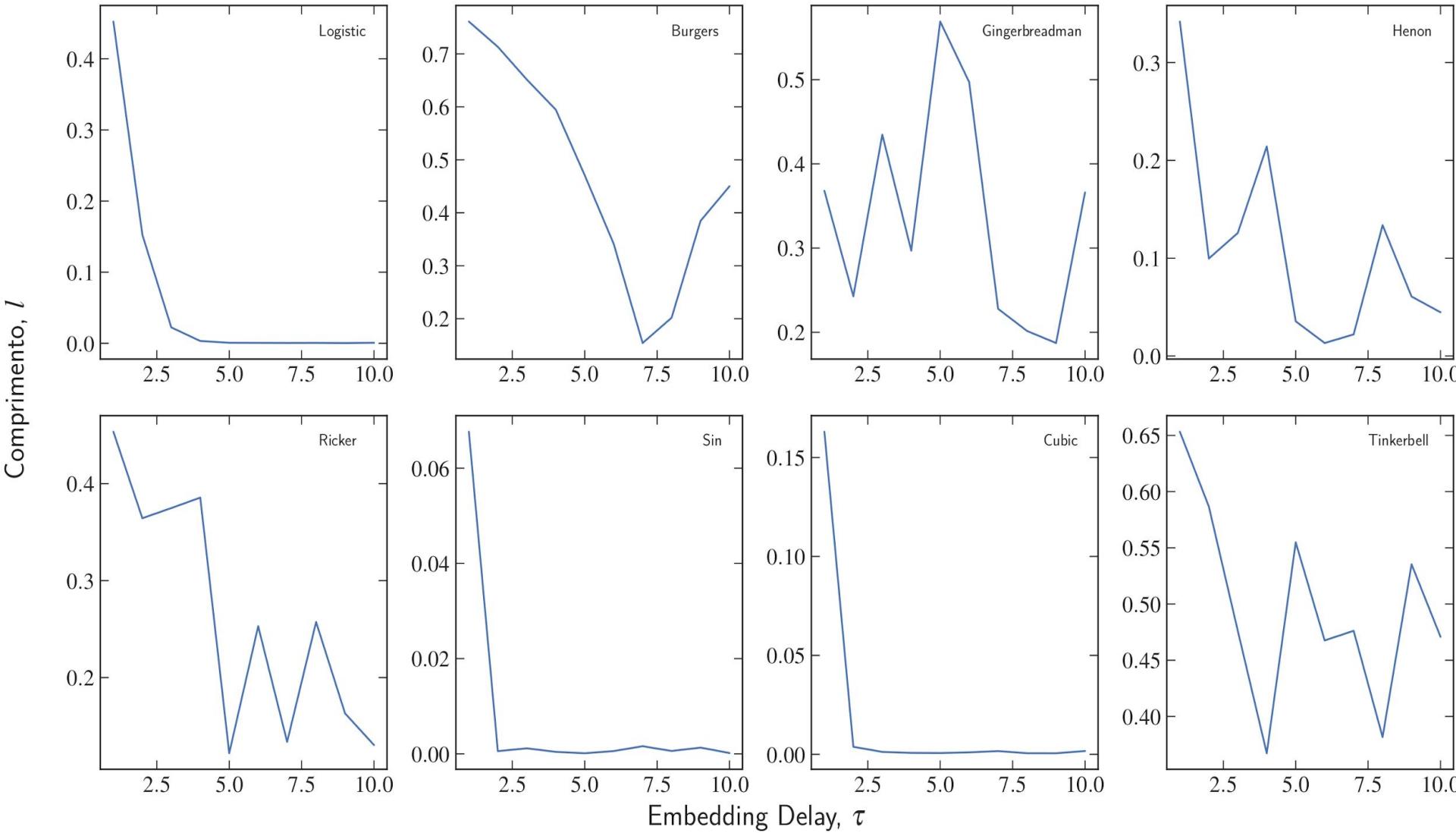
Comprimento das curvas q -complexidade-entropia de Tsallis



Curvas α -complexidade-entropia de Rényi



Comprimento das curvas α -complexidade-entropia de Rényi



Conclusões

- Generalizamos a abordagem das curvas de complexidade-entropia por meio do parâmetro *embedding delay*.
- Estudando as famílias de curvas geradas por esse parâmetro, observamos que:
 - No caso de séries temporais estocásticas e periódicas, a variação do *embedding delay* permite a obtenção do período da série.
 - Em geral, para séries temporais caóticas, o aumento desse parâmetro causa uma diminuição nas curvas do plano complexidade-entropia.