Geometría Lineal

Álvaro García Tenorio Clara Isabel López González

6 de noviembre de 2016

Índice general

Prefacio

Estas notas son una transcripción (reorganizada y con muchos añadidos) de las clases de la asignatura *Geometría Lineal*, impartidas por Antonio Valdés, y sus sustitutos, entre los que se contaban un esquizofrénico que no sabía por qué oía voces y un clon de Felipe González con pendiente, en el curso 2016–2017 a los cursos de tercero de los dobles grados de matemáticas e informática y matemáticas y física en la facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (UCM).

Se han incluido demostraciones que usualmente se dan por evidentes y algunas aclaraciones de otros textos que consideramos importantes para un correcto seguimiento de una asignatura como esta.

Consideramos un requisito indispensable para seguir estas notas haber entendido bien el álgebra lineal, no obstante, se incluye un anexo con los conocimientos que consideramos indispensables, para evitar que el lector tenga que desempolvar con demasiada frecuencia la bibliografía del primer curso.

Agradecimientos

Agradecemos las grandes aportaciones de Iván Prada a la hora de ilustrar este texto, así como para ayudar a limpiarlo de errores y erratas.

Capítulo 1

Espacio Proyectivo y Variedades Proyectivas

1.1. El Espacio Proyectivo

Sea E un $\mathbb{K}$–espacio vectorial arbitrario.

Podemos realizar dos aproximaciones equivalentes a la noción de espacio proyectivo, que confundiremos según nos convenga. Cabe destacar que la segunda de estas aproximaciones tiene especial interés en la *topología*, por estar basada en conjuntos cociente.

1.1.1. Primera Aproximación

Definición 1.1.1 (Espacio Proyectivo)**.** Se define el *espacio proyectivo* asociado a E como el conjunto de los subespacios vectoriales de dimensión 1 de E. Lo denotaremos por $\mathbb{P}(E)$.

Expresando el contenido de la definición 1.1.1 con una notación conjuntista obtenemos lo siguiente.

$$\mathbb{P}(E) :\overset{\text{def.}}{=} \{[u] \shortparallel u \in E \setminus \{0\}\} \tag{1.1}$$

En la ecuación (1.1) hay una notación implícita que pasamos a explicar a continuación.

Definición 1.1.2 (Rayo)**.** Sea $u \in E \setminus \{0\}$, se denomina *rayo* engendrado por u al conjunto de todos los vectores proporcionales a u, es decir:

$$[u] :\overset{\text{def.}}{=} \{\lambda u \shortparallel \lambda \in \mathbb{K}\}$$

Consideraremos, a partir de ahora, a los rayos como los *puntos* del espacio proyectivo.

Antes de continuar, notemos algunos casos curiosos.

Observación 1.1.1 (Casos Extremos)**.**

1. Si $E = \{0\}$ entonces, por definición $\mathbb{P}(E) = \emptyset$, ya que no hay ningún subespacio de dimensión 1.
2. Si $\dim(E) = 1$ entonces $\mathbb{P}(E)$ consta de ún único elemento, el rayo generado por el vector de la base de E (o cualquier otro no nulo).

$\diamondsuit$

1.1.2. Segunda Aproximación

La definición 1.1.1 tiene una traducción natural en términos de relaciones de equivalencia y conjuntos cociente.

Definición 1.1.3 (Relación de Proporcionalidad)**.** Se comprueba inmediatamente que la relación $\mathcal{R}$ definida en $E \setminus \{0\}$ como:

$$u\mathcal{R}v \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \exists\lambda \in \mathbb{K}^* \shortparallel u = \lambda v$$

es de equivalencia, siendo la clase de equivalencia de un vector v el conjunto de todos los proporcionales a él, es decir el *cuasirayo* generado por v (rayo al que se le ha sustraído el 0).

La clase del vector u según la relación de equivalencia definida en 1.1.3 será denotada por $u\mathcal{R}$. Es trivial ver que se cumple:

$$u\mathcal{R} = [u] \setminus \{0\}$$

Definición 1.1.4 (Espacio Proyectivo)**.** Definimos espacio proyectivo asociado a E como el conjunto de las clases de equivalencia de $\mathcal{R}$, es decir, el conjunto cociente $\frac{E\setminus\{0\}}{\mathcal{R}}$.

1.1.3. Equivalencia de las Aproximaciones

Veamos ahora que, intuitivamente, podemos confundir ambas aproximaciones a la noción de espacio proyectivo, estableciendo una biyección entre los conjuntos resultantes de las definiciones 1.1.1 y 1.1.4. La aplicación natural entre ambos conjuntos es la de asociar al cuasirayo engendrado por un vector su rayo correspondiente, es decir:

$$\begin{array}{ccc} \frac{E\setminus\{0\}}{\mathcal{R}} & \stackrel{\Phi}{\to} & \mathbb{P}(E) \\ u\mathcal{R} & \mapsto & [u] \end{array} \tag{1.2}$$

Ver que es una biyección y que está bien definida es un ejercicio fácil que se deja al lector.

1.1.4. Proyección Canónica

Una nueva forma muy útil de identificar el espacio proyectivo asociado a E es mediante la imágen de la llamada *proyección canónica*, que es la aplicación (evidentemente sobreyectiva) que a cada vector le asocia su rayo engendrado.

$$\begin{array}{ccc} E\setminus\{0\} & \stackrel{\pi}{\to} & \mathbb{P}(E) \\ u & \mapsto & [u] \equiv u\mathcal{R} \end{array} \tag{1.3}$$

1.2. Variedades Proyectivas

Como es típico en álgebra, trataremos de estudiar los subconjuntos de una estructura que mantienen dicha estructura, en este caso, estudiaremos las variedades o subespacios de espacios proyectivos. Este es un concepto que puede resultar lioso en una primera lectura, pero que es de importancia crucial.

Definición 1.2.1 (Variedad Proyectiva)**.** Dado un subconjunto X de un espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$, se dirá que X es una variedad proyectiva de $\mathbb{P}(E)$ si existe una variedad lineal de E, a la que llamaremos $\hat{X}$ de manera que el espacio proyectivo asociado a $\hat{X}$ coincide con X. Escrito de otra forma:

$$X = \mathbb{P}(\hat{X}) = \pi(\hat{X} \setminus \{0\})$$

El siguiente lema demuestra que hay dos enfoques equivalentes a la idea de variedad proyectiva. Es muy probable que la demostración pueda reducirse mucho.

Lema 1.2.1 (Caracterización de las Variedades)**.** *X es variedad proyectiva si y solo si $\pi^{-1}(X) \cup \{0\}$ es un subespacio vectorial de E.*

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Para esta implicación basta ver que $\pi^{-1}(X) \cup \{0\}$ es un subespacio vectorial. Como X es variedad proyectiva existe cierta variedad lineal $\hat{X}$ de forma que $\pi(\hat{X} \setminus \{0\}) = X$. Si Dios existe y está de nuestra parte se tendrá $\hat{X} = \pi^{-1}(X) \cup \{0\}$, con lo que habríamos terminado. En efecto, la igualdad que queremos obtener es equivalente (quitando el cero y aplicando la proyección canónica) a la igualdad $\pi(\hat{X}) = \pi(\pi^{-1}(X)) = X$, lo cual tenemos por hipótesis.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\pi^{-1}(X) \cup \{0\}$ es un espacio vectorial, su proyectivo asociado será $\pi(\pi^{-1}(X)) = X$, con lo que hemos encontrado una variedad lineal de E de forma que X es su espacio proyectivo asociado. Por la definición 1.2.1 hemos terminado.

■

Del lema 1.2.1 se deduce que los subespacios vectoriales de E y los subespacios proyectivos de $\mathbb{P}(E)$ están en biyección, siendo este un resultado análogo al del llamado *lema de la correspondencia* de la teoría de grupos y anillos. Estudiemos más a fondo este hecho.

Observación 1.2.1 (Lema de la Correspondencia)**.** Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de las variedades proyectivas de $\mathbb{P}(E)$. Asimismo sea el conjunto $\mathcal{L}$ compuesto por las variedades lineales de E. Es claro, por la definición de variedad proyectiva 1.2.1y por el lema 1.2.1 que la siguiente aplicación es una biyección.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \stackrel{\Phi}{\rightarrow} & \mathcal{L} \\ X & \mapsto & \pi^{-1}(X) \cup \{0\} \end{array}$$

Aunque trivial, es recomendable recordar, que se preservan las contenciones, es decir:

$$X \subset Y \Leftrightarrow \pi^{-1}(X) \subset \pi^{-1}(Y)$$

◊

1.2.1. Operaciones con Variedades Proyectivas

Tras estas observaciones estamos en condiciones de abordar dos problemas elementales pero importantes. Estos son:

1. Determinar si la intersección de variedades proyectivas es variedad proyectiva.
2. Obtener una descripción explícita de los elementos que conforman la mínima variedad que contiene a un subconjunto del espacio proyectivo.

Lema 1.2.2 (Intersección de Variedades Proyectivas)**.** *Sea la familia de variedades proyectivas $\{X_i \shortparallel i \in I\}$, se tiene que la intersección $\bigcap_{i \in I} X_i$ es una variedad proyectiva.*

Además, se verifica $\hat{X} = \bigcap_{i \in I} \hat{X}_i$

Demostración. Debemos demostrar que $\bigcap_{i \in I} X_i$ es variedad proyectiva. Esto pasa, por el lema 1.2.1 si y solo si $\pi^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \cup \{0\}$ es un espacio vectorial. Si tenemos suerte, se cumplirá que $\pi^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) = \bigcap_{i \in I} \pi^{-1}(X_i)$. Supongamos que tenemos suerte, en tal caso, por ser cada X_i una variedad proyectiva y por tanto $\pi^{-1}(X_i) \cup \{0\}$ un subespacio vectorial, y por ser la intersección arbitraria de espacios vectoriales un espacio vectorial, se tiene que $\pi^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \cup \{0\}$ es un subespacio vectorial, como queríamos demostrar.

Finalmente, comprobemos que, efectivamente, hemos tenido suerte.

$$x \in \pi^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \Leftrightarrow \pi(x) = [x] \in \bigcap_{i \in I} X_i \Leftrightarrow [x] \in X_i \ \forall i \in I \Leftrightarrow$$
$$\pi^{-1}([x]) = x \in \pi^{-1}(X_i) \forall i \in I \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} \pi^{-1}(X_i)$$

con lo que se obtiene la igualdad deseada.

El *además* se obtiene muy fácilmente:

$$\hat{X} = \pi^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \cup \{0\} = \bigcap \pi^{-1}(X_i) \cup \{0\} = \bigcap_{i \in I} \hat{X}_i$$

■

Con el lema 1.2.2 queda resuelto el primer problema planteado en esta sección. Pasemos ahora a estudiar la noción de variedad proyectiva engendrada por un subconjunto cualquiera A de $\mathbb{P}(E)$ así como sus propiedades.

Definición 1.2.2 (Variedad Engendrada por un Subconjunto)**.** Sea $A \subset \mathbb{P}(E)$ no vacío. Se define la *variedad proyectiva engendrada por* A al menor subespacio proyectivo que contiene a A. A esta, se la denotará por $\mathcal{V}(A)$.

Vamos a demostrar la existencia de dicha variedad construyéndola mediante un truco muy habitual en matemáticas.

Observación 1.2.2 (Existencia de la Variedad Engendrada)**.** Sea $\mathcal{L}$ la familia de las variedades proyectivas de $\mathbb{P}(E)$ que contienen a A. Es trivial demostrar que $\bigcap_{X\in\mathcal{L}} X$ es la menor variedad proyectiva que contiene a A.

Que es variedad proyectiva es evidente por el lema 1.2.2. Es la menor variedad ya que, dada cualquier otra variedad que contenga a A, esta pertenecerá a la familia $\mathcal{L}$, por lo que su intersección estará contenida en la variedad. $\diamondsuit$

La 1.2.2 demuestra la existencia de la variedad engendrada de la misma forma que demostramos la existencia de un subespacio vectorial engendrado por un conjunto, o del subgrupo generado por un conjunto, lo que deja claro la importancia de este truco. Sin embargo, esta demostración no nos da una descripción explícita de los elementos de la variedad.

Una forma de resolver este problema es, a la luz del lema 1.2.1, encontrar la variedad lineal asociada a la variedad engendrada.

Lema 1.2.3 (Variedad Lineal Asociada a una Variedad Engendrada)**.** *Se tiene que*

$$\widehat{\mathcal{V}(A)} = \mathcal{L}(\pi^{-1}(A))$$

Es decir, la variedad lineal asociada a la variedad proyectiva engendrada por A es aquella que engendra la preproyección de A sobre E.

Demostración. $\boxed{\supset}$ Como $A \subset \mathcal{V}(A)$ entonces $\pi^{-1}(A) \subset \widehat{\mathcal{V}(A)} \Rightarrow \mathcal{L}(\pi^{-1}(A)) \subset \widehat{\mathcal{V}(A)}$

$\boxed{\subset}$ $A \subset \pi(\mathcal{L}(\pi^{-1}(A)))$ ya que $\mathcal{L}(\pi^{-1}(A)) \supset \pi^{-1}(A)$. Como $\mathcal{L}(\pi^{-1}(A))$ es un subespacio vectorial, su proyectivizado será una subvariedad proyectiva X, por lo cual $X = \pi(\mathcal{L}(\pi^{-1}(A)))$. Como por la primera desigualdad conjusista de esta segunda parte de la demostración nos dice que $A \subset X$, tenemos la desigualdad:

$$A \subset \mathcal{V}(A) \subset X = \pi(\mathcal{L}(\pi^{-1}(A)))$$

Aplicando π^{-1} a la desigualdad obtenemos:

$$\pi^{-1}(\mathcal{V}(A)) = \widehat{\mathcal{V}(A)} \setminus \{0\} \subset \mathcal{L}(\pi^{-1}(A)) \setminus \{0\}$$

■

El lema 1.2.3 nos da una descripción explícita de los elementos de la variedad engendrada por un conjunto, basta aplicar la proyección canónica para obtener:

$$\mathcal{V}(A) = \pi(\mathcal{L}(\pi^{-1}(A))) \tag{1.4}$$

Tengamos especialmente en cuenta el caso de las variedades engendradas por conjuntos finitos.

Ejemplo 1.2.1 (Variedades Engendradas por Conjuntos Finitos)**.** Sea $A = \{p_1, \ldots, p_n\}$, denotaremos $\mathcal{V}(A) = \mathcal{V}(p_1, \ldots, p_n)$, escogiendo un representante arbitrario para cada $p_i = [u_i]$ obtenemos, por 1.4 que

$$\mathcal{V}(p_1, \ldots, p_n) = \pi(\mathcal{L}(u_1, \ldots, u_n))$$

$\diamondsuit$

1.3. Dimensiones y Fórmula de Grassmann

Prosiguiendo en nuestra traducción de los conceptos del mundo vectorial al idioma proyectivo introduciremos el concepto de dimensión de un espacio proyectivo y deduciremos la llamada fórmula de Grassmann.

1.3.1. Dimensiones y Fórmula de Grassmann

Es importante tener claro que los espacios proyectivos **no** son espacios vectoriales, ya que no hemos definido la noción de suma de rayos o producto de rayos por escalares. Sin embargo, parece razonable extender la noción de dimensión a los espacios proyectivos.

Intuitivamente, al considerar las rectas vectoriales como puntos, estamos, entre comillas, perdiendo un grado de libertad. Esta idea es recogida por la siguiente definición.

Definición 1.3.1 (Dimensión de un Espacio Proyectivo)**.** Si E es un espacio vectorial de dimensión n, se define la dimensión de $\mathbb{P}(E)$ como $n-1$. Es decir, la *codimensión* de un espacio proyectivo respecto de su espacio lineal asociado es 1.

Usualmente nos referiremos a los espacios proyectivos de dimensión 1 como *rectas proyectivas*, a los de dimensión 2 como *planos proyectivos* y a los de dimensión 3 como *espacios proyectivos*.

Es importante distinguir algunos casos extremos que pueden parecer chocantes.

Observación 1.3.1 (Casos Extremos)**.**

1. Si E es un espacio vectorial de dimensión 1, entonces $\mathbb{P}(E)$ tiene dimensión nula, lo cual tiene sentido al estar conformado por un solo punto.
2. Si $E = \{0\}$, es decir, un espacio vectorial de dimensión 0, resulta que su espacio proyectivo tiene dimensión -1.

$\diamondsuit$

Estamos ahora en condiciones de presentar el ejemplo de *espacio canónico*, cuya notación no hubiéramos entendido hasta ahora.

Ejemplo 1.3.1 (Espacio Canónico)**.** El espacio proyectivo asociado a un espacio vectorial de la forma $E = \mathbb{K}^{n+1}$ se denomina *espacio canónico* y se denota por:

$$\mathbb{P}(E) :\overset{\text{not.}}{=} \mathbb{P}^n$$

$\diamondsuit$

Una igualdad recurrente en matemáticas es la llamada *fórmula de Grassmann*, que se presenta con diversas versiones en áreas tan dispersas de las matemáticas como la teoría de conjuntos, la probabilidad, la teoría de grupos, el álgebra lineal,... Como no podía ser de otra manera, también está presente en los espacios proyectivos.

Teorema 1.3.1 (Fórmula de Grassmann, Teorema de la Incidencia)**.** *Sean $X, Y \subset \mathbb{P}(E)$ dos variedades proyectivas. Se tiene que:*

$$\dim(\mathcal{V}(X,Y)) = \dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y)$$

Demostración. Apoyándonos en la fórmula de Grassmann para espacios vectoriales, sale fácilmente. En efecto, como

$$\dim(\mathcal{V}(X,Y)) = \dim(\widehat{\mathcal{V}(X,Y)}) - 1$$

y además

$$\dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y) = \dim(\widehat{X}) - 1 + \dim(\widehat{Y}) - 1 - \dim(\widehat{X \cap Y}) + 1$$

por la fórmula de Grassmann en espacios vectoriales sabemos que los dos miembros de la derecha de sendas igualdades coinciden. ■

Este teorema arroja un corolario importante, del que debemos extraer la idea de que en los espacios proyectivos las cosas se cortan muy fácilmente. Es por esto que se conoce a la geometría proyectiva como *geometría de la incidencia*.

Corolario 1.3.2 (Hiperplanos y Rectas)**.** *Una recta y un hiperplano proyectivos siempre se cortan.*

Demostración. Basta sustituir las dimensiones en la fórmula de Grassmann teniendo en cuenta que $\dim(\mathbb{P}(E)) \geq \dim(\mathcal{V}(X,Y))$, despejando se concluye que $\dim(\mathcal{V}(X,Y)) \geq 0$, y por tanto hay al menos un punto común. ■

1.4. Referencias Proyectivas

En esta sección trataremos de extrapolar el concepto de *base* de un espacio vectorial a los espacios proyectivos.

Sea E un $\mathbb{K}$–espacio vectorial cualquiera de dimensión $n+1$. Sabemos por álgebra lineal que, dada $\mathcal{B} := \{e_0, \ldots, e_n\}$ una base de E, cualquier vector $x \in E$ puede escribirse de manera única como combinación lineal de los vectores que conforman la base, es decir, para ciertos λ_i con $i \in \{0, \ldots, n\}$ se tiene:

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i \overset{\text{not.}}{\equiv} (\lambda_0, \ldots, \lambda_n)_{\mathcal{B}} \overset{\text{not.}}{\equiv} \mathcal{B}X \tag{1.5}$$

Nótese que la tercera equivalencia de la ecuación (1.5), es un mero abuso de notación muy extendido para hacer la notación más compacta.

Volviendo al mundo proyectivo, queremos encontrar cierta colección de *entes* en función de los cuales poder escribir todos los demás.

1.4.1. Coordenadas Homogéneas

Si tomamos un punto proyectivo $x := [u]$, por la ecuación (1.5) podremos escribir:

$$x : [u] = [(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)_{\mathcal{B}}] :\overset{\text{not.}}{\equiv} (\lambda_0 : \cdots : \lambda_n) \tag{1.6}$$

Al último miembro de la ecuación (1.6) se le llama *escritura de x en coordenadas homogéneas.*

Nótese que, fijada una base, las coordenadas homogéneas de un punto proyectivo son únicas salvo proporcionalidad, ya que si se toma un representante u' distinto del rayo vectorial, su escritura respecto de la base $\mathcal{B}$ será proporcional a la de u.

Con esto podría decirse que hemos cumplido el objetivo de la sección, ya que, dada una base de E, podemos escribir en función de ella a cualquier punto proyectivo.

Sin embargo, estamos creando una referencia en base a otra ya existente, lo cual no es muy recomendable salvo si nuestra referencia base (base del espacio vectorial) es *estándar* o *canónica*, lo cual sólo ocurre en contadas ocasiones, por ejemplo, en los espacios canónicos.

1.4.2. Referencias Proyectivas

Para evitar los problemas derivados de la aproximación presentada en el apartado anterior, debemos concentrarnos en la idea de que lo que debemos hacer es encontrar una colección de elementos del espacio proyectivo en función de los cuales poder escribir todos los demás. A ese conjunto de puntos lo llamaremos *referencia proyectiva.*

Definición 1.4.1 (Independencia Proyectiva)**.** Sea un conjunto $\{p_0, \ldots, p_r\} \subset \mathbb{P}(E)$, diremos que son *proyectivamente independientes* si ninguno de ellos está en la variedad proyectiva engendrada por los restantes.

Con un poco de trabajo adicional extraemos la siguiente caracterización de la independencia proyectiva.

Lema 1.4.1 (Caracterización de la Indepencia Proyectiva)**.** *Un conjunto de puntos proyectivos es proyectivamente independiente si y solo si sus representantes son linealmente independientes, sin depender de la elección de los mismos.*

Demostración. Decir que los representantes son linealmente independientes es equivalente a decir que, dado un de ellos, no puede ser expresado como combinación lineal de los restantes y por ende no se encuentra en la variedad lineal engendrada por estos. Por la ecuación (1.4) sabemos que:

$$u_i \notin \mathcal{L}(u_0, \ldots, u_{i-1}, u_{u+1}, \ldots, u_r) \Leftrightarrow [p_i] \notin \mathcal{V}(p_0, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_r)$$

■

Observación 1.4.1 (Base Inducida)**.** En un espacio proyectivo de dimensión n, podemos escoger un conjunto de $n+1$ puntos proyectivamente independientes, ya que, para cualquier elección de representantes de estos puntos, se obtendrían $n+1$ vectores linealmente independientes del espacio vectorial asociado E, de dimensión $n+1$, en el cual estos vectores, por definición formarían una base a la que llamaremos *base inducida.* $\diamondsuit$

Hay un gran problema con la definición 1.4.1, y es que, dados $n+1$ puntos proyectivos, inducimos una familia de bases de E demasiado "grande". Con grande nos referimos a que no solo inducimos una base junto con todas las proporcionales a ella (resultantes de aplicarle el mismo factor de escala a todos sus vectores), sino muchas más.

Observación 1.4.2 (No Unidad de la Base Inducida)**.** Dada una elección de representantes $\{u_o, \ldots, u_n\}$ que son una base de E, entonces, el conjunto de representantes $\{\lambda_0 u_0, \ldots, \lambda_n u_n\}$, con $\lambda_i \in \mathbb{K}^*$ también conforma una base de E. $\diamondsuit$

Para solucionar este problema deberemos añadir alguna restricción más a la definición de base inducida.

Definición 1.4.2 (Referencia Proyectiva)**.** Dado un espacio proyectivo de dimensión n, una *referencia proyectiva* es un conjunto **ordenado** $\mathfrak{R}$ de $n+2$ puntos de tal forma que cada $n+1$ de ellos son proyectivamente independientes.

A pesar de ser una referencia proyectiva un conjunto ordenado normalmente lo escribiremos con la notación usual para conjuntos.

Observación 1.4.3 (Reordenación)**.** Dada una referencia $\mathfrak{R}$, cualquier reordenación de la misma sigue siendo referencia proyectiva. $\diamondsuit$

Ejemplo 1.4.1 (Referencias Proyectivas en Dimensiones Bajas)**.**

1. En caso de querer dar una referencia de la recta proyectiva deberemos elegir tres puntos proyectivamente independientes dos a dos.
2. Si queremos referenciar el plano proyectivo deberemos dar lo que se llama *triangulo de referencia*, es decir, una elección de cuatro puntos proyectivamente independientes tres a tres.
3. La misma idea se extrapola al espacio proyectivo, donde habría que escoger un *tetraedro de referencia*

$\diamondsuit$

1.4.3. Base Asociada a una Referencia Proyectiva

Siguiendo la idea de las observaciones 1.4.1 y 1.4.2 vamos a estudiar las propiedades de las bases asociadas a referencias proyectivas.

Definición 1.4.3 (Base Asociada)**.** Una base $\mathcal{B}$ de E se dice *asociada* a la referencia proyectiva $\mathfrak{R}$ si sus vectores son representantes de los $n+1$ primeros puntos proyectivos, y además, la suma de sus vectores es representante del último de los puntos.

Nótese que una base asociada no es más que una base inducida con una pequeña restricción más, con la suerte de que esta es fundamental para solucionar el problema de la no unicidad salvo proporcionalidad, tal y como muestra el siguiente teorema, cuya demostración es constructiva.

Teorema 1.4.2 (Unicidad de la Base Asociada)**.** *Para cada referencia proyectiva $\mathfrak{R}$ de $\mathbb{P}(E)$ hay una base asociada única salvo un factor no nulo común a todos los elementos de la base.*

Demostración.

1. Probemos la existencia de dicha base. Dada una referencia proyectiva $\mathfrak{R}$, tomemos representantes de cada uno de los puntos. Por ser $\mathfrak{R}$ referencia proyectiva y por el lema 1.4.1 los representantes de los $n+1$ primeros puntos forman una base de E, y por ende el representante del último punto puede escribirse como combinación lineal de los anteriores. Denotando por u_i al representante escogido para el i–ésimo punto se tiene que:

$$u_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} a_i u_i$$

Veamos que $\mathcal{B} = \{a_i u_i \shortparallel 0 \leq i \leq n\}$ es una base de E y además sus vectores son representantes de los $n+1$ primeros puntos de $\mathfrak{R}$. Esto es debido a que ninguno de los coeficientes a_i es nulo. Si alguno lo fuera, por ejemplo $a_0 = 0$, se tendríamos la relación:

$$u_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n)$$

Lo cual va contra la hipótesis de independencia proyectiva. Además, la suma de sus vectores es un representante del último punto de la referencia. Luego $\mathcal{B}$ es base asociada a $\mathfrak{R}$.

2. Para demostrar la unicidad supongamos la existencia de dos bases asociadas:

$$\mathcal{B} := \{u_0, \ldots, u_n\}$$
$$\mathcal{B}^* := \{u'_0, \ldots, u'_n\}$$

Instantáneamente se ve que $u'_i = u_i \lambda_i$ para algún $\lambda \in \mathbb{K}^*$ para todos los $i \in \{0, \ldots, n\}$, ya que si no no serían representantes de los primeros elementos de la referencia. Además, se debe dar la condición:

$$\left[\sum_{i=0}^{n} u_i\right] = \left[\sum_{i=0}^{n} u'_i\right]$$

y por ende las sumas deben ser proporcionales, de lo que se desprende:

$$\sum_{i=0}^{n} u'_i = \sum_{i=0}^{n} u_i \lambda_i = \lambda \sum_{i=0}^{n} u_i$$

Es decir, las bases son proporcionales.

■

La comprobación de que un conjunto ordenado de $n+2$ puntos es referencia proyectiva puede ser muy tediosa ya que consiste en realizar $\binom{n+2}{n+1} = n+2$ determiantes de orden $n+1$. El lema 1.4.3 es extramadamente útil pues reduce esta comprobación al cálculo de un determinante de orden $n+1$ y a la inversión de una matriz de orden $n+1$.

Lema 1.4.3 (Comprobación de Referencias Proyectivas). *Para comprobar que $n+2$ puntos proyectivos $x_i = [v_i]$ conforman una referencia proyectiva basta comprobar las siguientes condiciones:*

1. *Los $n+1$ primeros puntos son proyectivamente independientes.*
2. *Al escribir $v_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i$ se tiene que $\lambda_i \neq 0$ $\forall 0 \leq i \leq n$*

Demostración. Si se cumplen las condiciones del enunciado se tiene que $\{\lambda_0 u_0, \ldots, \lambda_n u_n\}$ es una base de E. Si a este conjunto le añadimos v_{n+1}, sabemos por álgebra lineal que es un conjunto linealmente dependiente y un sistema de generadores de E. Por ende, alguno de los vectores del conjunto puede ponerse como combinación lineal de los demás, y extrayendo este elemento del conjunto, este seguirá siendo sistema de generadores. Obviamente, v_{n+1} puede ponerse como combinación lineal de los demás, pero esto no nos ayuda. Lo interesante es, que como todos los coeficientes λ_i son no nulos, podemos despejar cualquier v_i de la ecuación, de esta forma:

$$v_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \Leftrightarrow v_i = \sum_{j \neq i, n+1} \frac{\lambda_j}{-\lambda_i} u_j + \frac{1}{\lambda_i} u_{n+1}$$

Entonces podemos formar $\binom{n+2}{n+1} = n+2$ conjuntos diferentes de $n+1$ vectores, si todos ellos formaran bases habríamos terminado, pero esto es evidente, ya que son sistemas de generadores de $n+1$ elementos, es decir, bases. ■

Para clarificar un poco las cosas se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4.2 (Referencia de $\mathbb{P}^2$)**.** En $\mathbb{P}^2$ nos dan los puntos:

$$a_0 = (1:0:1),\ a_1 = (0:2:1)$$
$$a_2 = (0:0:1),\ a_3 = (1:-1:0)$$

Donde las coordenadas homogéneas vienen dadas según la base estándar de $\mathbb{R}^3$.

Se pide estudiar si dichos puntos conforman una referencia proyectiva.

Siguiendo el lema 1.4.3 para ahorrarnos cálculos, vemos que los representantes de a_0, a_1 y a_2 son una base de $\mathbb{R}^3$

$$u_0 = (1,0,1),\ u_1 = (0,2,1),\ u_2 = (0,0,1)$$

En efecto, al calcular el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ahora, tomando $u_3 = (1,-1,0)$ como representante de a_3, bastaría resolver el sistema de ecuaciones lineales (que sabemos compatible determinado) dado por:

$$\alpha u_0 + \beta u_1 + \gamma u_2 = u_3$$

Si la matriz columna solución no tiene ningún coeficiente nulo la colección de puntos original conforma una referencia proyectiva de base asociada dada por el método de construcción de bases asociadas (teorema 1.4.2), es decir, la base asociada sería:

$$\mathcal{B} = \{\alpha u_0, \beta u_1, \gamma u_2\}$$

Con un poquito de magia se obtiene que:

$$\alpha = 1,\ \beta = -\frac{1}{2},\ \gamma = -\frac{1}{2}$$

Como no son todos nulos, los puntos originales conforman una referencia proyectiva.

Una base asociada sería:

$$\mathcal{B} = \left\{(1,0,1), \left(0,-1,-\frac{1}{2}\right), \left(0,0,-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

Como esta base es única salvo proporcionalidad, podríamos multiplicar todo por 2 para que nos queda algo más bonito.

$$\mathcal{B}' = \{(2,0,2), (0,-2,-1), (0,0,-1)\}$$

$\diamondsuit$

Antes de continuar, fijemos una notación para referirinos a referencias proyectivas.

Dada una referencia proyectiva $\mathfrak{R}$, la denotaremos por los puntos que la conforman de la siguiente manera:

$$\mathfrak{R} = \{p_0, \ldots, p_n; E\} \tag{1.7}$$

Donde E representa el último punto al que llamaremos *punto unidad.*

Definición 1.4.4 (Coordenadas Homogéneas Respecto de una Referencia $\mathfrak{R}$)**.** Dado un punto proyectivo $p \in \mathbb{P}(E)$ y una referencia proyectiva $\mathfrak{R}$, se dice que $p = (x_0 : \cdots : x_n)_{\mathfrak{R}}$ si, para cualquier elección de u (representante del rayo p) y cualquier elección de base asociada $\mathcal{B}$ a $\mathfrak{R}$, se tiene que:

$$u = \lambda(x_0, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$$

Es evidente, por lo visto en la sección 1.4.1 y en el teorema 1.4.2, que la definición 1.4.4 es sólida.

1.5. Cambios de Referencia Proyectiva

Cuando realizábamos cambios de base en álgebra lineal nos preguntábamos cuáles eran las relaciones entre las coordenadas de un vector respecto de una y otra base. Bajando al mundo proyectivo nos hacemos la misma pregunta. ¿Cómo cambian las coordenadas homogéneas de un punto al realizar cambios en la referencia proyectiva?

Sean dos referencias proyectivas $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{R}'$, las cuales tendrán sendas bases asociadas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ (únicas salvo múltiplos) (teorema 1.4.2).

Sea un punto $x \in \mathbb{P}(E)$. Es claro que podemos expresar este punto en coordenadas homogéneas respecto de la referencia $\mathfrak{R}$ de la siguiente manera:

$$x = [u] = [(\alpha_0, \dots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}]$$

Asimismo también es claro que x admite una representación en términos de la referencia $\mathfrak{R}'$:

$$x = [u] = [(\beta_0, \dots, \beta_n)_{\mathcal{B}'}]$$

Un problema que se presenta habitualmente es, conocida la representación de un vector respecto de cierta referencia $\mathfrak{R}$, ¿cómo obtengo la representación respecto de otra referencia $\mathfrak{R}'$ de mi elección?

Solucionemos este problema aplicando lo que ya sabemos de álgebra lineal. Antes de comenzar, fijemos notaciones:

$$u = \mathcal{B}X \equiv (\alpha_0, \dots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}$$
$$u = \mathcal{B}'X' \equiv (\beta_0, \dots, \beta_n)_{\mathcal{B}'}$$

Donde los símbolos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ representan las matrices fila que contienen los vectores de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ respectivamente. Asimismo, los símbolos X y X' representan las matrices columna de los coeficientes α_i (conocidos) y β_i (desconocidos) respectivamente. Nótese que es esto es un abuso de notación, ya que no hemos definido el producto de dos matrices de estos tipos.

Como sabemos (A.1.1), se cumplen las llamadas "ecuaciones del cambio de base", que dicen:

$$X' = P^{-1}X$$

Donde P es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base $\mathcal{B}'$ respecto de la base $\mathcal{B}$. Así pues, basta poner X' en "formato de coordenadas" para poder decir que hemos encontrado una representación (única salvo múltiplos) del punto x en base a la referencia $\mathfrak{R}'$.

Un ejemplo clarificará todos estos cambalaches.

Ejemplo 1.5.1 (Cambio de Referencia Proyectiva). Se considera el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ y las referencias proyectivas:

$$\mathfrak{R} := \{(2:0:-1), (1:-1:0), (1:-1:1); (1:0:-1)\}$$
$$\mathfrak{R}' := \{(1:1:1), (0:1:1), (1:0:1); (2:2:3)\}$$

Si queremos calcular las coordenadas homogéneas del punto $(2:2:2)$ respecto de $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{R}'$ deberemos tener en cuenta un par de cosas. La primera, es que las coordenadas homogéneas de todos los puntos escritos hasta ahora hace referencia a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Por ende, basta con calcular la matriz de cambio de base de la base canónica a las bases asociadas por $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{R}'$, lo cual es algo facilísimo (una vez obtenidas sendas bases).

Como la obtención de las mismas no es el objetivo de esta sección, las presentamos directamente:

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{R}} = \{(2,0,-1), (1,-1,0), (-1,1,-1)\}$$
$$\mathcal{B}_{\mathfrak{R}'} = \{(1,1,1), (0,1,1), (1,0,1)\}$$

Por ende las matrices de cambio de base serán:

$$P_{\mathfrak{R}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow P_{\mathfrak{R}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$
$$P_{\mathfrak{R}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow P_{\mathfrak{R}'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando las ecuaciones del cambio de base:

$$(\alpha, \beta, \gamma)_{\mathcal{B}_{\mathfrak{R}}} \equiv P_{\mathfrak{R}}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}^t \equiv (2, -6, -4)_{\mathcal{B}_{\mathfrak{R}}}$$
$$(\alpha', \beta', \gamma')_{\mathcal{B}_{\mathfrak{R}'}} \equiv P_{\mathfrak{R}'}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}^t \equiv (2, 0, 0)_{\mathcal{B}_{\mathfrak{R}'}}$$

Así pues el punto $(2 : 2 : 2)$ escrito en la referencia cuya base asociada es la canónica (o un múltiplo suyo) se escribe, salvo múltiplos, como $(2 : -6 : -4)$ en base a la referencia $\mathfrak{R}$ y como $(2 : 0 : 0)$ en base a la referencia $\mathfrak{R}'$.

Esto suele escribirse de la siguiente manera:

$$x = (2 : 2 : 2) = \rho(2 : -6 : -4)_{\mathfrak{R}} \ \forall \rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$x = (2 : 2 : 2) = \rho(2 : 0 : 0)_{\mathfrak{R}'} \ \forall \rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Por ende podemos escoger representaciones más o menos bonitas para nuestro punto dividiendo nuestras coordenadas homogéneas por el escalar no nulo que nos convenga. En ese caso:

$$x = (1 : -3 : -2)_{\mathfrak{R}}$$
$$x = (1 : 0 : 0)_{\mathfrak{R}'}$$

Esta última representación de x en la referencia $\mathfrak{R}'$ da que pensar, pues tiene aspecto de vector de la base canónica.

En efecto, cuanto trabajábamos con espacios vectoriales sabíamos que las coordenadas en cierta base $\mathcal{B}$ del i–ésimo vector de $\mathcal{B}$ eran las correspodientes al i–esimo vector de la base canónica.

En el contexto proyectivo esto sigue siendo cierto, basta darse cuenta de que x es en realidad el primer punto de la referencia $\mathfrak{R}$, por lo que admite una representación tan agradable. Este hecho, cuya comprobación se deja al lector es de gran utilidad, por lo que será empleado sin previo aviso a lo largo del texto. $\diamondsuit$

1.6. Problemas

Problema 1.1. ¿Cuál es el menor número de variedades proyectivas de dimensión 3 necesarias para generar una de dimensión 11? ¿Y para generar una de dimensión 8?

Problema 1.2. Sea $\mathfrak{R} := \{a_0, a_1, a_2; a_3\}$ una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^2$. Calcular la matriz de cambio de referencia entre dos reordenaciones cualesquiera de $\mathfrak{R}$.

Capítulo 2

Dualidad

El objetivo de capítulo es enunciar y justificar el llamado *principio de dualidad*, tanto para espacios vectoriales como para espacios proyectivos.

No debe alarmarse el lector al que no le quedaron claros los conceptos referentes al espacio dual en un primer curso de álgebra lineal, ya que la mayoría se vulve a explicar aquí con todo detalle.

Además, hemos evitado de uno de los conceptos que suele quedar menos claro, las "bases duales". No obstante, este es necesario para la demostración de algunos resultados complementarios incluídos en el apéndice A, donde se revisitan las bases duales.

2.1. Dualidad en espacios vectoriales

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita. Llamábamos *espacio dual* asociado a E al conjunto de todas las aplicaciones lineales (homomorfismos de espacios vectoriales) que nacen en E y mueren en $\mathbb{K}$. A estas aplicaciones lineales las denominamos *formas lineales* o 1–*formas*.

Al espacio dual asociado a E lo denotábamos por E^*. Expresado con una notación conjuntista:

$$E^* :\overset{\text{def.}}{=} \{\alpha : E \to \mathbb{K} \shortparallel \alpha \text{ es lineal } \} = \mathrm{Hom}(E, \mathbb{K}) \tag{2.1}$$

Recordamos sin detenernos que el la palabra *espacio* no le queda grande al conjunto E^* ya que es un espacio vectorial, siendo su dimensión la dimensión de E.

2.1.1. Formas Lineales e Hiperplanos

En esta sección iniciaremos la construcción del puente entre un espacio vectorial y su dual, tratando de "unir" las variedades más notables de un espacio vectorial, los hiperplanos, con otras variedades de su dual.

Antes de comenzar, fijemos una base $\mathcal{B}$ de E. Asimismo fijamos la base $\{1\}$ de $\mathbb{K}$.

Es claro que una forma lineal $h \in E^*$, tiene por matriz asociada cierta matriz $1 \times n$ (respecto de las base $\mathcal{B}$ y $\{1\}$), a esta matriz la denotaremos símplemente M.

Como ya sabemos, para cada vector $u \in E$, el valor $h(u)$ viene dado por:

$$h(u) = MX \tag{2.2}$$

Siendo X la matriz columna compuesta por las coordenadas de u en la base $\mathcal{B}$. Es decir, la expresión anterior (2.2) no es más que el producto de una matriz fila por una matriz columna, desarrollémoslo:

$$h(u) = \begin{pmatrix} h(e_1) & \cdots & h(e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = h(e_1)u_1 + \cdots + h(e_n)u_n \tag{2.3}$$

Como sabemos (es una comprobación inmediata), el kernel, o núcleo, de una aplicación lineal cualquiera, es un subespacio vectorial del espacio de donde nace.

Refrescamos asimismo la fórmula de las dimensiones para aplicaciones lineales, que nos será de utilidad en el futuro inmediato:

$$\dim(\ker(h)) + \dim(\mathrm{im}(h)) = \dim(E) \tag{2.4}$$

Nótese que en el contexto de las formas lineales, gracias a la fórmula de las dimensiones (2.4), los posibles valores de $\dim(\mathrm{im}(h))$ (a veces denominado *rango* de h) son 0 y 1.

En el primer caso, estaríamos ante la aplicación lineal idénticamente nula. En caso contrario, la dimensión del kernel de h (a veces denominada *nulidad* de h) sería $n-1$. Es decir, el núcleo de la forma lineal h es un hiperplano de E.

Esto significa que $\ker(h)$ podrá ser representado mediante una única *ecuación cartesiana*, ya que $\mathrm{codim}(\ker(h)) = 1$.

La ecuación cartesiana del núcleo de una forma lineal salta a la vista, ya que se extrae de su propia definición. No es otra que:

$$h(e_1)u_1 + \cdots + h(e_n)u_n = 0 \tag{2.5}$$

Esto es evidente ya que esa es la definición del núcleo de h. El conjunto de aquellos vectores que, pasados por h, se anulan.

Acabamos de probar que el núcleo de toda forma lineal no nula es un hiperplano de E. Es decir, hemos construido un puente entre un espacio vectorial y su dual, identificando cada elemento del dual con un hiperplano de espacio original.

Sin embargo es un puente un tanto quebradizo, ya que solo podemos cruzarlo en una dirección (del dual al original), y, además, es posible que varios elementos del dual queden asociados al mismo hiperplano.

Para afianzar mejor este puente, veamos en primer lugar que podemos cruzarlo en el otro sentido, es decir, que todo hiperplano está asociado "vía núcleos" a un elemento del dual.

En términos de aplicaciones:

Lema 2.1.1 (Pseudolema de la Correspondencia)**.** *La aplicación:*

$$\begin{aligned} E^* &\to \mathcal{H} \\ h &\mapsto \ker(h) \end{aligned}$$

es sobreyectiva.

$\mathcal{H}$ denota el conjunto de los hiperplanos de E.

Demostración. Dado un hiperplano H, obtenemos una ecuación cartesiana que lo describa:

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

Donde los α_i representan escalares y los x_i componentes de un vector respecto de la base $\mathcal{B}$.

Sabiendo por (2.5) que la ecuación cartesiana del núcleo de una forma lineal es de la forma:

$$h(e_1)x_1 + \cdots + h(e_n)x_n = 0$$

Podemos construir la forma lineal asociada al hiperplano H de forma explícita. Basta definir h como la forma lineal que manda el i–ésimo vector de la base $\mathcal{B}$ al escalar α_i. Es decir, la forma lineal con matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

■

Con el lema 2.1.1 hemos avanzado un paso más en la construcción del puente entre un espacio y su dual, pudiendo ir del uno al otro y del otro al uno. Sin embargo, todavía queda un problema pendiente. El elemento del dual asociado a un hiperplano no es único (ni mucho menos).

Dado un hiperplano H existen infinitud de formas lineales cuyo núcleo es H. Esto es debido a que toda ecuación lineal equivalente a la ecuación cartesiana del hiperplano es también una ecuación cartesiana del hiperplano, a partir de la cual se construye (lema 2.1.1) una forma lineal asociada a H distinta de la primera.

Por ende, ahora nos interesa encontrar relaciones entre las formas lineales con idéntico núcleo, para así agruparlas y conseguir una biyección.

Lema 2.1.2 (Lema de la Correspondencia)**.** *Todas las formas lineales asociadas a un mismo hiperplano H son múltiplos entre si. En términos de aplicaciones:*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E^*) &\to \mathcal{H} \\ [h] &\mapsto \ker(h) \end{aligned}$$

es biyectiva. Dicho de otra forma, los hiperplanos de un espacio vectorial se indentifican con las rectas de su dual.

Demostración. Sean dos ecuaciones cartesianas de H:

$$H \equiv \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \tag{2.6}$$

$$H \equiv \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n = 0 \tag{2.7}$$

Estas ecuaciones serán equivalentes, es decir, tendrán el mismo conjunto de soluciones (el hiperplano H). Por ende (proposición A.3.3) serán múltiplos entre sí, es decir:

$$\beta_i = \lambda \alpha_i \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \tag{2.8}$$

Aplicando el método de construcción (lema 2.1.1) de formas lineales asociadas a H respecto de ambas ecuaciones cartesianas se obtienen:

$$f \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

$$g \equiv \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Es decir $f = \lambda g$, o lo que es lo mismo $g \in [f]$. Esto prueba la inyectividad que queríamos, ya que la sobreyectividad se probó en el lema 2.1.1. ∎

Este último resultado pone fin a la construcción del puente entre un espacio y su dual. Recapitulando, un hiperplano queda asociado, "vía núcleos" a una única recta su dual. Asimismo, cada recta del dual tiene asociada un hiperplano del espacio "primal".

2.1.2. Dualidad Canónica

En esta sección tratamos de generalizar lo dicho en el caso anterior. Es decir, trataremos de identificar variedades lineales arbitrarias con variedades lineales del dual correspondiente.

Antes de comenzar consideramos fijadas las bases $\mathcal{B}$ de E y $\{1\}$ de $\mathbb{K}$, como en la sección anterior.

En el caso de los hiperplanos, los identificábamos con el conjunto de las formas lineales cuyo núcleo era dicho hiperplano. Dicho de otra forma, el conjunto de las aplicaciones lineales que anulaban todos los vectores del hiperplano.

Siguiendo esta idea, probaremos a identificar una variedad lineal arbitraria con con el conjunto de aplicaciones que anulan dicha variedad. Dicho conjunto es, si recordamos, nuestro viejo amigo el *anulador* de dicha variedad.

Definición 2.1.1 (Anulador de un subespacio vectorial)**.** Sea $W \subset E$ subespacio vectorial de E. Se define el *anulador* de W, al que denotaremos por $W^\perp$, como el conjunto formado por las 1–formas que anulan todos los vectores de W. Es decir:

$$W^\perp := \{\alpha \in E^* \shortparallel \alpha(u) = 0 \ \forall u \in W\} = \{\alpha \in E^* \shortparallel W \subset ker(\alpha)\} \tag{2.11}$$

Inmeditamente se comprueba que el anulador de un subespacio vectorial es un subespacio vectorial del dual asociado.

Observación 2.1.1 (Generalización de la Noción de Anulador)**.** Se puede, generalizar la definición de anulador, no solo para subespacios sino tambien para subconjuntos arbitrarios de un espacio vectorial. La conveniencia de esta generalización viene dada porque desbloquea algunos resultados técnicos de gran utilidad. Como la importancia de esto aquí es muy reducida, tanto la generalización de la definición 2.1.1 como los resultados más elementales se han trasladado al apéndice. En concreto a la definición A.3.2 y al lema A.3.2. ♢

Intentemos reeditar el lema de la correspondencia 2.1.2 del apartado anterior, tratando de identificar a cada subespacio de E con su anulador correspondiente.

Lema 2.1.3 (Lema de la Correspondencia)**.** *Los subespacios de E están en biyección con los subespacios de E^* de la siguiente manera:*

$$\mathcal{U} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{U}^*$$
$$U \mapsto U^{\perp}$$

Donde $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}^*$ denotan el conjunto de los subespacios de E y E^* respectivamente. Dicho de otra forma, cada subespacio puede puede identificarse con su anulador.

Demostración. Para la sobreyectividad veamos que todo subespacio W de dimensión r de E^* es el anulador de un cierto subespacio U.

Para esto, trataremos de probar que el conjunto de vectores de E que son anulados por todas las formas lineales de W (imagen inversa de Φ) es un subespacio vectorial de E. A este conjunto le denominaremos *antianulador* o *anulador dual*. Este nombre se debe a que el anulador de dicho conjunto (por definición) es W.

Notamos que W admitirá una cierta base compuesta de r formas lineales. Esto tiene importancia, ya que, cada vector que sea anulado por todas las formas lineales de la base, también lo será, por linealidad, por todas las aplicaciones de W.

Dicho lo cual, tenemos que:
$$W = \mathcal{L}(f_1, \dots, f_r)$$
Dichas formas lineales tendrán ciertas matrices asociadas:

$$f_i \equiv \begin{pmatrix} a_1^i & \dots & a_n^i \end{pmatrix}$$

Dado un vector $x = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$, su valor por f_i viene dado por la ecuación (2.3):

$$f_i(x) = a_1^i x_1 + \dots + a_n^i x_n$$

Así, pues el conjunto de los vectores tales que son anulados por las formas lineales de W (antianulador) **es** el conjunto de vectores que cumplen las ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1^1 x_1 + \dots + a_n^1 x_n & = & 0 \\ \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^r x_1 + \dots + a_n^r x_n & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.12}$$

Estas ecuaciones pueden interpretarse por las ecuaciones cartesianas de cierto subesacio U de dimensión $n - r$ cuyo anulador es precisamente W.

Esto también prueba la inyectividad, ya que hemos visto que la imagen inversa de Φ es un único subespacio. ∎

Observación 2.1.2 (Dimensiones de los Dualizados)**.** Obsérvese que hemos probado algo bastante importante (además de lo queríamos probar en un principio), y es que, las dimensiones de un subespacio y su anulador suman la dimensión del espacio total, es decir:

$$\dim(U) + \dim(U^{\perp}) = \dim(E) \tag{2.13}$$

Dicho de otra forma, un subespacio U de dimensión r "dualiza" en un subespacio $U^{\perp}$ de dimensión $n - r$ (su codimensión). ♢

Recapitulando, hemos conseguido construir un puente "sólido" y "de ida y vuelta"entre las variedades de un espacio vectorial y las de su dual "vía anuladores" y "vía antianuladores" respectivamente.

Para el lector que haya optado por omitir la demostración del lema 2.1.3 el término "antianulador" resultará extraño. Definámoslo aparte:

Definición 2.1.2 (Antianulador)**.** Sea un subespacio W del dual E^*, se define su *antianulador* como el conjunto de los vectores que son anulados por todos los elementos de W. Expresado de forma conjuntista:

$$W^\top := \{u \in E \shortparallel \alpha(u) = 0 \ \forall \alpha \in W\}$$

Es claro que esto no es más que la imagen inversa de la aplicación del lema 2.1.3, que asigna a cada subespacio de E su anulador correspondiente. Como ese mismo lema demuestra que tal aplicación es biyectiva es trivial deducir que:

$$(W^\perp)^\top = W \tag{2.14}$$

Observación 2.1.3 (Abusos de Notación Habituales)**.** Algunos textos (y docentes) denotan al antianulador de la misma forma que lo hacen con el anulador. Además, para dar verosimilitud a este abuso de notación, definen el anulador de un subespacio de E^* como lo que nosotros conocemos como antianulador. Dicho abuso de notación les permite hacer afirmaciones como:

$$(W^\perp)^\perp = W$$

Lo cual, a priori, con nuestra notación, es una trola bastante grande.

Sin embargo, trabajando con cuidado, podemos demostrar que, efectivamente, con nuestras notaciones se cumple que el operador anulador es "esencialmente involutivo". Es decir:

$$(W^\perp)^\perp \cong W \tag{2.15}$$

Esto significa que existe un isomorfismo entre el anulador del anulador un subespacio (un subespacio del dual del dual) y el subespacio en sí. No solo eso, se puede demostrar que dicho isomorfismo es especialmente agradable, por lo que se le da el nombre de *canónico*.

Como la prueba de este hecho no pinta mucho aquí, se ha trasladado al apéndice A. $\diamondsuit$

Veamos a continuación una serie de propiedades que nos serán de gran ayuda cuando conozcamos el llamado "principio de dualidad", en la sección 2.1.3. Estas propiedades pueden resumirse en dos; la inversión de las contenciones y las leyes de DeMorgan.

Proposición 2.1.4 (Propiedades del Anulador)**.** *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Los contenidos se invierten al dualizar. Es decir:*

$$W \subset U \Leftrightarrow U^\perp \subset W^\perp$$

2. *Las sumas se convierten en intersecciones al dualizar:*

$$(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$$

3. *Las intersecciones se convierten en sumas:*

$$(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$$

Demostración. 1. $\boxed{\Rightarrow}$ Dado un $\alpha \in U^\perp$, veamos que $\alpha \in W^\perp$. En efecto, $\alpha(u) = 0$ para todo $u \in U$, pero como $W \subset U$ se tiene que $\alpha(w) = 0$ para todo $w \in W$, luego $\alpha \in W^\perp$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $w \in W$, veamos que $w \in U$. Es claro que $\alpha(w) = 0$ para toda $\alpha \in W^\perp$. Como $U^\perp \subset W^\perp$ se tiene que $\beta(w) = 0$ para toda $\beta \in U^\perp$. Luego w pertenece al antianulador del anulador de U. Por la ecuación (2.14) se tiene que $w \in (U^\perp)^\top = U$.

2. Sea $\alpha \in (U + W)^\perp$, inmediatamente se desprende que $\alpha(u + w) = \alpha(u) + \alpha(w) = 0$ para todo $u \in U$ y todo $w \in W$. Como $u \in U + W$ y $w \in U + W$ tenemos que $\alpha(u) = 0$ para todo $u \in U$ y $\alpha(w) = 0$ para todo $w \in W$. Luego α pertenece a los anuladores de U y W simultáneamente. Es decir, $\alpha \in U^\perp \cap W^\perp$. Como todos los pasos que hemos hecho son equivalencias, el resultado se sigue.

3. Dado $\alpha \in U^\perp + W^\perp$, veamos que $\alpha \in (U \cap W)^\perp$. Usando que $\alpha \in U^\perp + W^\perp$ tenemos que $\alpha = \beta+\gamma$ donde $\beta \in U^\perp$ y $\gamma \in W^\perp$. Para probar que pertenece al anulador de la intersección, tomemos un $\xi \in U \cap W$ arbitrario y veamos que α lo anula. En efecto:

$$\alpha(\xi) = (\beta + \gamma)(\xi) = \beta(\xi) + \gamma(\xi) = 0$$

Acabamos de ver que $U^\perp + W^\perp \subset (U \cap W)^\perp$. Para ver la igualdad, veamos que ambos tienen la misma dimensión. Para ello usaremos la fórmula de Grassmann, el apartado anterior de esta demostración y la observación 2.1.2:

$$\begin{aligned} \dim(U^\perp + W^\perp) &= \dim(U^\perp) + \dim(W^\perp) - \dim(U^\perp \cap W^\perp) = \\ &= \dim(U^\perp) + \dim(W^\perp) - \dim((U + W)^\perp) = \\ &= n - (\dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W)) = \\ &= n - (\dim(U \cap W)) = \\ &= \dim((U \cap W)^\perp) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Con lo que concluye la demostración. ■

A la identificación de un subespacio con su anulador se la denomina *dualidad canónica*.

2.1.3. Principio de Dualidad

Estamos en disposición de enunciar el llamado *principio de dualidad*, un resultado de extrema importancia, ya que, por cada teorema que demostremos obtendremos otro sin necesidad de demostrarlo. A continuación trataremos de enunciar y justificar este principio de forma natural, con un ejemplo. Presentamos los siguientes enunciados:

Teorema 2.1.5. *Sea un espacio vectorial de dimensión* 3 *entonces:*
Dos rectas distintas generan un plano.

Teorema 2.1.6. *Sea un espacio vectorial de dimensión* 3 *entonces:*
Dos planos distintos se cortan en una recta.

A simple vista los teoremas 2.1.5 y 2.1.6 parecen dos teoremas totalmente independientes de tal forma que cada cual requerirá una prueba.

Bien, tratemos de demostrar el teorema 2.1.5. (Recomendamos encarecidamente al lector no omitir la siguiente demostración).

Demostración del Teorema 2.1.5. Nos preguntamos si la suma de dos subespacios de dimensión uno cuya intersección es un espacio de dimensión nula tendrá dimensión 2. Es decir:

$$\dim(U + W) \stackrel{?}{=} 2$$

Como por la observación 2.1.2 preguntarse por la dimensión de un subespacio es preguntarse por la dimensión de su anulador obtenemos que nuestra pregunta inicial es equivalente a:

$$\dim((U + W)^\perp) \stackrel{?}{=} 3 - 2 = 1$$

Asimismo, por la proposicion 2.1.4 sabemos que el anulador de una suma es la intersección de anuladores, luego esta segunda pregunta es equivalente a:

$$\dim((U^\perp \cap W^\perp)) \stackrel{?}{=} 1$$

Donde, por la observación 2.1.2 tenemos que $\dim(U^\perp) = \dim(W^\perp) = 2$.

Además, como $\dim(U \cap W) = 0$, se tiene que $\dim(U^\perp + W^\perp) = 3$.

Así, a partir de nuestra primera pregunta, hemos obtenido una equivalente que reza:

¿En un espacio de dimensión 3*, dos planos distintos se cortan en una recta?*

Y esta es, precisamente la pregunta que deberíamos hacernos si estuviéramos tratando de demostrar el teorema 2.1.6.

Con esto hemos demostrado que los teoremas 2.1.5 y 2.1.6 son equivalentes. Es decir, si uno es cierto, es cierto el otro (y viceversa). Asimismo, si uno es falso, el otro también lo será (y al revés). Por ende, con probar uno de los dos nos valdrá.

En lo que respecta a la prueba del teorema, es un cálculo inmediato con la fórmula de Grassmann y se deja como ejercicio de cálculo mental al lector. ■

Quizá este no sea el mejor ejemplo para apreciar la gran utilidad de este principio, ya que, las demostraciones de ambos teoremas son extraordinariamente sencillas. Sin embargo, pueden darse casos (y se derán a lo largo del texto) en los que la demostración de un teorema sea extraordinariamente sencilla en el caso dual y algo más engorrosa en el caso "normal".

Así pues, dado cierto aserto sobre espacios vectoriales compuesto en términos de sumas, intersecciones y contenidos puede traducirse a un *aserto dual* equivalente gracias a las propiedades demostradas en la sección anterior.

Esto es una auténtica fábrica de teoremas, ya que, si demostramos la veracidad de un enunciado, obtendremos automáticamente la veracidad de su aserto dual equivalente.

2.2. Dualidad en espacios proyectivos

Una vez repasados y ampliados los conceptos de dualidad en espacios lineales, pasemos a introducir la dualidad en espacios proyectivos. Como siempre, iremos trasladando al contexto proyectivo los resultados del mundo lineal.

Definición 2.2.1 (Espacio Proyectivo Dual)**.** Dado un espacio vectorial E, se llama *espacio proyectivo dual* de E al espacio proyectivo asociado al espacio vectorial dual E^*.

Lo denotaremos, de forma natural, por $\mathbb{P}(E^*)$.

Observación 2.2.1 (Dimensión del Espacio Proyectivo Dual)**.** Dado que (si la dimensión es finita) el espacio dual E^* tiene la misma dimensión que E, deducimos inmediatamente que la dimensión del espacio proyectivo es la misma que la del espacio proyectivo dual. Es decir:

$$\dim(\mathbb{P}(E)) = \dim(\mathbb{P}(E^*)) \tag{2.17}$$

♢

2.2.1. Formas Lineales e Hiperplanos Proyectivos

Comenzamos este apartado recordando brevemente que un hiperplano vectorial no es otra cosa que un subespacio lineal de codimensión 1. Asimismo, un hiperplano proyectivo H no es más que el espacio proyectivo asociado a cierto hiperplano vectorial $\widehat{H}$. Es trivial observar que la dimensión de un hiperplano proyectivo es $\dim(\mathbb{P}(E)) - 1$. Luego son variedades de codimensión 1 respecto de la dimensión del espacion proyectivo total.

Recordemos importante resultado obtenido en el lema 2.1.2, que afirma que todo hiperplano vectorial $\widehat{H}$ está en biyección con las formas lineales cuyo núcleo es el propio $\widehat{H}$, las cuales conforman un rayo de E^*. Es decir, todo hiperplano está en biyección con un punto del espacio proyectivo dual.

Tratamos ahora de fabricarnos un puente entre los hiperplanos proyectivos y alguna variedad del espacio proyectivo dual, a imagen y semejanza de lo hecho en secciones anteriores.

Surge así el siguiente lema, casi idéntico al lema 2.1.2.

Lema 2.2.1 (Lema de la Correspondencia Proyectiva)**.** *La aplicación $\psi = \pi \circ \varphi$ es biyectiva.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H} \arrow[r, "\pi^{-1}"] \arrow[dr, "\varphi\equiv\Phi\circ\pi^{-1}"'] & \widehat{\mathcal{H}} \arrow[d, "\Phi\equiv\widehat{H}^{\perp}"] & \\
& E^* \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{P}(E^*)
\end{tikzcd}$$

Aclarando la notación, $\mathcal{H}$ denota el conjunto de los hiperplanos proyectivos de $\mathbb{P}(E)$, π^{-1} representa la imagen inversa de la proyección canónica y Φ es la dualidad canónica.

Demostración. El conjunto de los hiperplanos proyectivos de $\mathbb{P}(E)$ está en biyección vía π^{-1} con el conjunto de los hiperplanos vectoriales de E (observación 1.2.1).

A su vez, por el lema 2.1.2, los hiperplanos vectoriales están en biyección con las rectas del espacio dual vía dualidad canónica.

Asimismo, las rectas del dual están en biyección con los puntos del espacio proyectivo dual vía proyección canónica π.

Dado que la composición de biyecciones es biyección, queda demostrado que los hiperplanos proyectivos están en biyección con los puntos del espacio proyectivo dual. ■

Entonces, dado un hiperplano proyectivo H, podemos escribirlo de la forma:

$$H = \mathbb{P}(\hat{H}) = \{[u] \in \mathbb{P}(E) \mid h(u) = 0\} \tag{2.18}$$

2.2.2. Dualidad Canónica

Hemos conseguido identificar los hiperplanos proyectivos con puntos del espacio proyectivo dual. Al igual que hicimos en la sección anterior, tratemos ahora de generalizar ese resultado para variedades proyectivas arbitrarias.

Recordemos que, dada una variedad lineal, esta estaba en biyección con su anulador, el cual es una variedad lineal de E^*. Trasladando de forma natural esta idea al contexto proyectivo obtenemos el siguiente resultado.

Lema 2.2.2 (Lema de la Correspondencia Proyectiva)**.** *La aplicación $\psi = \pi \circ \varphi$ es biyectiva.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V} \arrow[r, "\pi^{-1}"] \arrow[dr, "\varphi\equiv\Phi\circ\pi^{-1}"'] & \widehat{\mathcal{V}} \arrow[d, "\widehat{\mathcal{V}}^{\perp}\equiv\Phi"] & \\
 & \widehat{\mathcal{V}^*} \arrow[r, "\pi"'] & \mathcal{V}^*
\end{tikzcd}$$

Aclarando la notación, los conjuntos $\mathcal{V}$, $\widehat{\mathcal{V}}$, $\widehat{\mathcal{V}^*}$ y $\mathcal{V}^*$ denotan el conjunto de las variedades de $\mathbb{P}(E)$, E, E^* y $\mathbb{P}(E^*)$ respectivamente.

Así, dada una variedad proyectiva $\mathcal{X}$, se corresponde su su dualizada $X^* = \psi(X) = \mathbb{P}(\widehat{X}^{\perp})$

Demostración. Es idéntica a la del lema 2.2.1. ■

Obsérvese que, lo que estamos haciendo, no es otra cosa que identificar cada variedad proyectiva $X = \mathbb{P}(\hat{X})$ con el proyectivizado del anulador de $\widehat{X}$.

Observación 2.2.2 (Caso Particular de los Hiperplanos)**.** Veamos, a modo de aclaración suplementaria, que el lema 2.2.2 funciona también (por supuesto), para hiperplanos.

$$H^* = \mathbb{P}(\hat{H}^{\perp}) = \mathbb{P}(\{h \in E^* \mid h(u) = 0 \ \forall u \in \hat{H}\}) = [h]$$

♢

Las propiedades que se desprendían del lema 2.1.2 pueden extenderse sin esfuerzo al contexto proyectivo, tal y como muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.2.3 (Propiedades de la Dualidad Proyectiva)**.** *Sean E un espacio vectorial y su correspondiente espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$. Sean $X, Y \subset \mathbb{P}(E)$ variedades proyectivas. Se cumple:*

1. $X \subset Y \Leftrightarrow Y^* \subset X^*$
2. $(X \cap Y)^* = \mathcal{V}(X^*, Y^*)$
3. $\mathcal{V}(X, Y)^* = X^* \cap Y^*$

4. $\dim(X) + \dim(X^*) = \dim(\mathbb{P}(E)) - 1$

Demostración. 1. Si $X \subset Y$, entonces $\hat{X} \subset \hat{Y}$. Por la proposición 2.1.4 tenemos que $\hat{Y}^\perp \subset \hat{X}^\perp$, y por tanto $Y^* \subset X^*$. Recíprocamente, basta leer la demostración al revés.

2. Por el lema 1.2.2 se tiene que $X \cap Y = \mathbb{P}(\hat{X} \cap \hat{Y})$. Por tanto $(X \cap Y)^* = \mathbb{P}((\hat{X} \cap \hat{Y})^\perp)$. Aplicando la proposición 2.1.4 se tiene que $\mathbb{P}((\hat{X} \cap \hat{Y})^\perp) = \mathbb{P}(\hat{X}^\perp + \hat{Y}^\perp) = \mathcal{V}(X^*, Y^*)$.

3. Se tiene que $\mathcal{V}(X,Y) = \hat{X} + \hat{Y}$. Por tanto $\mathcal{V}(X,Y)^* = \mathbb{P}((\hat{X} + \hat{Y})^\perp)$. Por la proposición 2.1.4 sabemos que $\mathbb{P}((\hat{X} + \hat{Y})^\perp) = \mathbb{P}(\hat{X}^\perp \cap \hat{Y}^\perp)$. Atendiendo de nuevo al lema 1.2.2 queda que $\mathbb{P}(\hat{X}^\perp \cap \hat{Y}^\perp) = \mathbb{P}(\hat{X}^\perp) \cap \mathbb{P}(\hat{Y}^\perp) = X^* \cap Y^*$

4. Se tiene inmediatamente:

$$\dim(X) + \dim(X^*) = \dim(\hat{X}) - 1 + \dim(E) - \dim(\widehat{X}) - 1 = \dim(\mathbb{P}(E)) - 1$$

■

Observación 2.2.3. El lema anterior reafirma, aún más si cabe, que el dualizado de un hiperplano proyectivo es un punto. En efecto supongamos que $\dim(E) = m + 1$, entonces:

$$\dim(X) + \dim(X^*) = m - 1$$

Como $\dim(X) = m - 1$, se sigue que $\dim(X^*) = 0$. ♢

2.2.3. Principio de Dualidad para espacios proyectivos

Comencemos con una definición.

Definición 2.2.2. Sea $\mathcal{P}$ una proposición relativa a los subespacios de un espacio proyectivo y formulada en términos de intersecciones, variedades generadas por uniones, contenidos y dimensiones de estos subespacios. Se llama *proposición dual* $\mathcal{P}'$ a la que se obtiene a partir de $\mathcal{P}$ sustituyendo los términos anteriores por sus duales.

Observemos que sustituir un término por su dual no es más que aplicar la proposición 2.2.3 en el sentido adecuado. Por ejemplo, hallemos la proposición dual de "*en un plano proyectivo real toda recta contiene al menos tres puntos diferentes*" . Dado que un plano proyectivo real $\mathbb{P}^2$ tiene dimensión 2, el dual de una recta es un punto y el de un punto una recta

$$\dim(X) + \dim(X^*) = 1.$$

Por tanto su proposición dual será "*en un plano proyectivo real por todo punto pasan al menos tres rectas diferentes*".

Una vez definido este concepto, podemos enunciar un teorema de gran importancia.

Teorema 2.2.4 (Principio de Dualidad)**.** *Una proposición $\mathcal{P}$ relativa a variedades proyectivas de espacios de dimensión finita n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es cierta si y solo si lo es su proposición dual $\mathcal{P}'$*

Demostración. PENDIENTE Sea P un espacio proyectivo de dimensión n sobre $\mathbb{K}$ y sea una proposición $\mathcal{P}$ cierta en P^*. Tenemos que demostrar que $\mathcal{P}'$ es cierta. Esta última se obtiene de sustituir las intersecciones, variedades generadas por uniones, contenidos y dimensiones de estos subespacios que haya en $\mathcal{P}$ por sus duales. Por lo que si estos eran ciertos en P^*, al pasar a su dual, seguirán siendo ciertos en su espacio dual, es decir en $P^{**} = P$, donde se enuncia $\mathcal{P}'$. Por lo que $\mathcal{P}'$ es cierta.

El recíproco es análogo. ■

La gran importancia de este teorema radica en que permite obtener, sin necesidad de demostración, un nuevo teorema a partir de cada teorema conocido. En efecto dado un teorema, este constituye una proposición $\mathcal{P}$, y por el principio de dualidad, automáticamente su proposición dual $\mathcal{P}'$ es cierta, es decir, el dual del teorema, es cierto.

NO SABÍA MUY BIEN DONDE PONER EL PRINCIPIO ESTE, SI DELANTE O DETRÁS DEL EJEMPLO, LO HE PUESTO DELANTE PERO PUEDES CAMBIARLO DONDE TE PLAZCA

Todas estas caracterizaciones no serían de ninguna utilidad si no nos permitiesen resolver problemas de espacio proyectivo con mayor facilidad. Hasta ahora no hemos visto ninguna aplicación. Simplemente hemos ido explicando como se hace ese paso al espacio proyectivo dual, insistiendo una y otra vez en su importancia. Pero ¿realmente es tan importante? ¿No podemos simplemente resolver los problemas en el espacio proyectivo o echando mano del espacio vectorial? Es posible, sí, pero muchas veces hacer la asociación entre una variedad proyectiva y su dual, es decir la proyección del anulador, facilita enormemente la resolución. Veamos a continuación un ejemplo.

Ejemplo 2.2.1. Sea $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$. Sean dos rectas del espacio proyectivo $r_1, r_2 \in \mathbb{P}^3$, las cuales no se cortan, y un punto $p \in \mathbb{P}^3$ que no pertenece a ninguna de las rectas. Demuestre que existe una única recta $r \in \mathbb{P}^3$ que pasa por p y corta a ambas rectas r_1, r_2.

Según el enunciado del problema tenemos dos rectas $r_1, r_2 \in \mathbb{P}^3$ y un punto $p \in \mathbb{P}^3$ tales que $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ y $p \notin r_1 \cup r_2$. Debemos probar que existe una única recta $r \in \mathbb{P}^3$ tal que $p \in r$, $r_1 \cap r \neq \emptyset$ y $r_2 \cap r \neq \emptyset$. Resolvamos el problema primero sin dualizar, y luego pasando al dual.

1. Tomemos la variedad proyectiva engendrada por r_1 y p, la cual es un plano ya que

$$\dim(\mathcal{V}(p, r_1)) = \dim(p) + \dim(r_1) - \dim(r_1 \cap p) = 0 + 1 - (-1) = 2$$

   Podemos aplicar el corolario 1.3.2 al plano $\mathcal{V}(p, r_1)$ y la recta r_2, según el cual una recta y un hiperplano siempre se cortan. Antes, y para obtener el resultado deseado, debemos asegurarnos de que $r_2 \not\subset \mathcal{V}(p, r_1)$, pues en caso contrario existirían más de un punto de corte entre la recta y el hiperplano y r no sería única. Es fácil comprobar que esto no ocurre, ya que si $r_2 \subset \mathcal{V}(p, r_1)$, entonces $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$, llegando así a un absurdo. Existirá por tanto un único punto $q \in r_2 \cap \mathcal{V}(p, r_1)$. Definimos entonces la recta r como la variedad engendrada por los puntos p y q, pudiéndose comprobar con la fórmula de las dimensiones que efectivamente es una recta. Por un lado r es única, ya que lo es el punto q. Además $r_1 \cap r \neq \emptyset$ y $r_2 \cap r \neq \emptyset$, ya que $q \in r_2 \cap \mathcal{V}(p, r_1)$. Queda así demostrado el ejercicio.

2. Dado que es la primera vez que dualizamos un problema, hagámoslo paso a paso. Para empezar, y atendiendo a la proposición 2.2.3, la ecuación de las dimensiones que caracteriza la dualización es, en nuestro caso,

$$\dim(X) + \dim(X^*) = 2.$$

   Por tanto el dual de un punto es un plano del espacio proyectivo dual y el dual de una recta, una recta. Tenemos entonces que p^* es un plano y r_1^*, r_2^* son rectas. Por otro lado que $p \in r$ implica, por la proposición 2.2.3, que $r^* \subset p^*$. De igual forma que $p \notin r_1 \cup r_2$ implica que $r_1^* \not\subset p^*$ y $r_2^* \not\subset p^*$. Además si $r_1 \cap r_2 = \emptyset$, entonces $r_1^* \cap r_2^* = \emptyset$. En caso contrario existiría un plano dual π^* tal que $r_1^* \subset \pi^*$ y $r_2^* \subset \pi^*$. Utilizando de nuevo la fórmula de las dimensiones y la proposición 2.2.3, esto equivaldría a decir que existe un punto q tal que $q \in r_1$ y $q \in r_2$, llegando así a un absurdo.

   Por tanto el enunciado del problema se traduce en, dadas dos rectas $r_1^*, r_2^* \in \mathbb{P}^{3^*}$ y un plano $p^* \in \mathbb{P}^{3^*}$ tales que $r_1^* \cap r_2^* = \emptyset$, $r_1^* \not\subset p^*$ y $r_2^* \not\subset p^*$; demostrar que existe una única recta r^* tal que $r_1^* \cap r^* \neq \emptyset$, $r_2^* \cap r^* \neq \emptyset$ y $r^* \subset p^*$.

   Dado que las rectas r_1^*, r_2 no están contenidas en el plano p^*, cortarán con él en dos puntos únicos. Es claro que la recta engendrada por esos dos puntos es única y cumple las condiciones requeridas.

$\diamondsuit$

Observación 2.2.4. Este enunciado es falso en espacio afín. Podemos encontrar dos rectas paralelas, r_1 y r_2, y un punto p, que cumplan las hipótesis del enunciado, para los cuales no existe ninguna recta r; o bien para los cuales existan infinitas rectas r, tales que $p \in r$, $r_1 \cap r \neq \emptyset$ y $r_2 \cap r \neq \emptyset$. Ello se debe a que en el espacio afín dos rectas paralelas no se cortan, mientras que en el espacio proyectivo sí (en el infinito), y por lo tanto no cumplen las hipótesis del enunciado. $\diamondsuit$

Observación 2.2.5. Una vez resuelto este ejercicio podemos observar diferencias en los métodos de resolución. Mientras que en el primer caso hemos tenido que construir la recta sin mucha idea de a donde nos llevaría e ir comprobando que cumple los requisitos, al traducir el problema al espacio dual, la recta ha surgido por sí sola, como consecuencia de las hipótesis del enunciado. Es cierto que, debido a la sencillez de este ejercicio, la diferencia en la dificultad de resolución no es tan clara. Sin embargo, es posible darse cuenta de que, en problemas más complicados, el espacio proyectivo dual nos da un camino más rápido. La única dificultad radica en traducir bien los enunciados. $\diamondsuit$

Capítulo 3

Ecuaciones de variedades proyectivas

Nuestra tarea aquí es tratar de, dado un una recta o un plano proyectivos, dar una referencia proyectiva de ese subespacio mediante la cual hacer una descripción explícita de sus elementos.

3.1. Rectas Proyectivas

Definición 3.1.1 (Recta en $\mathbb{P}(E)$)**.** Se define *recta proyectiva* que pasa por los puntos proyetivos P y Q como la variedad engendrada por dichos puntos. A dicha recta se la denomina *recta PQ*.

3.1.1. Ecuaciones paramétricas

Sean $P = [u]$ y $Q = [v]$ dos puntos proyectivos, vamos a describir los elementos de la recta PQ, que no es otra cosa que $\mathcal{V}(P, Q)$.

Para describir los elementos de esta variedad (o de cualquiera) deberemos dar una referencia en función de la cual *coordenar* todos los puntos de la misma.

Como P y Q son dos puntos proyectivos distintos, los vectores u, v son linealmente independientes, formando una base de la variedad lineal $\mathcal{L}(u, v)$.

Para construir una referencia bastaría tomar los puntos P, Q y añadirle como punto unidad un tercer punto cuyo representante pueda ser escrito como combinación lineal de u y v con todos los coeficientes no nulos, por ejemplo $[u + v]$.

De esta forma tenemos la referencia:

$$\mathfrak{R} = \{P, Q; [u + v]\}$$

Por el método de construcción de bases asociadas tenemos que la base asociada a esta referencia es $\mathcal{B} = \{u, v\}$. Como sabemos, todo punto $p \in \mathcal{V}(P, Q)$ es un rayo representado por un vector de $\mathcal{L}(u, v)$. Es decir, un vector $w = \alpha u + \beta v$ con alguno de los coeficientes no nulo.

Esto quiere decir que todo punto de la recta PQ es un rayo de la forma:

$$[\alpha u + \beta v] = (\alpha : \beta)$$

expresado en *coordenadas homogéneas*.

Sin embargo, podemos reducir esto aún un poco más, cambiemos el representante del rayo dividiendo todo por β.

$$\left[\frac{\alpha}{\beta} u + v\right] :\stackrel{\text{not.}}{=} [\theta u + v]$$

De esta forma la recta ya no queda descrita por dos coordenadas homogéneas α y β como antes, sino por una única coordenada θ a la que llamaremos *no homogénea*.

Sin embargo, hemos de tener cuidado, pues, como más de uno ya se habrá dado cuenta, es posible que en algunos casos β se anule, por ende, θ no estaría definida. Como este caso se corresponde con un único punto, y este es el punto P, diremos que una recta queda descrita por lo siguiente:

$$PQ : \{[\theta u + v] \shortmid\shortmid \theta \in \mathbb{K}\} \cup \{P\} \tag{3.1}$$

De esta forma, cuando $\beta = 0$ podemos decir que $\theta = \infty$, y así $\theta \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$, que podemos identificar con $\mathbb{P}^1$. Describiremos pues la recta como

$$PQ : \{[\theta u + v] \shortmid\shortmid \theta \in \mathbb{P}^1\} \tag{3.2}$$

donde se entiende que si $\theta = \infty$ nos estamos refiriendo al punto P.

Dados los vectores $u = (u_0, u_1, \cdots, u_n)$ y $v = (v_0, v_1, \cdots, v_n)$ si los sustituimos en la ecuación (3.2) obtenemos

$$\begin{aligned} PQ :& \{[\theta(u_0, u_1, \cdots, u_n) + (v_0, v_1, \cdots, v_n)] \shortmid\shortmid \theta \in \mathbb{P}^1\} = \\ &= \{[(\theta u_0 + v_0, \theta u_1 + v_1, \cdots, \theta u_n + v_n)] \shortmid\shortmid \theta \in \mathbb{P}^1\} \end{aligned}$$

que se puede escribir a su vez como

$$PQ : \{(\theta u_0 + v_0 : \theta u_1 + v_1 : \cdots : \theta u_n + v_n) \shortmid\shortmid \theta \in \mathbb{P}^1\} \tag{3.3}$$

denominada **ecuación paramétrica de la recta**, en coordenadas no homogéneas.

Ejemplo 3.1.1 (Parametrización de una Recta Concreta)**.** Dados los puntos $P = (1 : 2 : -1)$ y $Q = (0 : 1 : 3)$ se nos pide parametrizar la recta PQ. Siguiendo los pasos expuestos en este apartado, la ecuación paramétrica de la recta PQ queda:

$$PQ : \{(\theta : 2\theta + 1 : -\theta + 3) \shortmid\shortmid \theta \in \mathbb{P}^1\}$$

donde, cuando $\theta = \infty$, nos referimos al punto $P = (1 : 2 : -1)$. ♢

3.1.2. Ecuación implícita

Durante este apartado nos situaremos en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$, donde las rectas son hiperplanos. Como ya sabemos, todo hiperplano proyectivo es proyección de un hiperplano vectorial. Por tanto, una recta de $\mathbb{P}^2$ es proyección de un plano de $\mathbb{R}^3$.

Además, por ser hiperplano, este plano tiene una, y solo una, ecuación implícita (o cartesiana) que cumplen todos sus vectores. Por tanto, todos los representantes de los puntos de la recta proyectiva cumplen dicha ecuación, ya que son los vectores del plano o sus múltiplos.

De esta forma, asignamos a la recta de $\mathbb{P}^2$ la ecuación implícita del plano vectorial del que es proyección

$$ax + by + cz = 0 \tag{3.4}$$

con a, b, c no todos nulos. Esta será la **ecuación implicita** de la recta, expresada en coordenadas homogéneas.

Veamos a continuación varias formas de obtener la ecuación implícita, en coordenadas homogéneas, de una recta proyectiva que pasa por dos puntos.

Sean $P = [u] = [(u_0, u_1, u_2)]$ y $Q = [v] = [(v_0, v_1, v_2)]$ dos puntos de $\mathbb{P}^2$. La ecuación implícita de la recta PQ tendrá la forma

$$ax + by + cz = 0$$

donde a, b, c son coeficientes a determinar.

Dado que $P, Q \in PQ$, la primera forma de hallar esos coeficientes consiste simplemente en sustituir en x, y, z de la ecuación implícita las coordenadas de un vector representante de P y de uno de Q y resolver el sistema de ecuaciones resultante:

$$\begin{aligned} au_0 + bu_1 + cu_2 = 0 \\ av_0 + bv_1 + cv_2 = 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Sin embargo, este método puede resultar un poco tedioso. Observemos que, aunque en el espacio proyectivo no está definido el producto escalar, la primera ecuación del sistema podría identificarse con el producto escalar entre el vector (a, b, c) y (u_0, u_1, u_2). Al ser cero, esto implicaría que son perpendiculares. A partir de la segunda ecuación podemos deducir algo similar, que (a, b, c) es perpendicular al vector (v_0, v_1, v_2).

De esta forma, el vector que debemos hallar es perpendicular a u y v. Por tanto, nos basta con hallar un vector perpendicular a ambos para determinar los coeficientes de la ecuación implícita, pues es única salvo múltiplos. Una forma rápida de hallar un vector (a, b, c) que cumpla esto es hacer el producto vectorial de u y v. Así los coeficientes serán el resultado de

$$(a, b, c) = u \times v = \begin{vmatrix} x & y & z \\ u_0 & u_1 & u_2 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{vmatrix} \tag{3.6}$$

por lo que la ecuación implícita de la recta vendrá dada por

$$(u \times v) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \tag{3.7}$$

3.1.3. Intersección de dos rectas proyectivas

Una vez que sabemos describir una recta proyectiva a través de sus ecuaciones, no está de menos calcular la intersección de dos rectas. Para ello, nos situamos de nuevo en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$, debido a la facilidad con la que allí se opera, pero bien sería válido para cualquier espacio proyectivo.

Sean pues dos rectas proyectivas $r, r' \in \mathbb{P}^2$. Al igual que con la ecuación implícita de la recta, quizás la primera ocurrencia para hallar la intersección de dos rectas sea combinar sus ecuaciones implícitas y resolver el sistema resultante

$$\begin{aligned} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{aligned}$$

donde a, b, c, a', b', c' son conocidos.

Sin embargo, este método no es del todo práctico. Si nos paramos a reflexionar un momento sobre que debe cumplir la intersección, hallaremos formas mucho más fáciles de calcularla. Para empezar la intersección de r y r' es un punto p del espacio proyectivo. Esto se debe a que en $\mathbb{P}^2$ los hiperplanos son rectas, y por tanto, por el Corolario 1.3.2, la intersección de r y r' no puede ser vacía. Además, dicho punto pertenece tanto a r, como a r'. Por tanto, debe cumplir las ecuaciones de ambas rectas. Estas ecuaciones pueden ser tanto paramétricas como implícitas.

Si, por ejemplo, la recta r está descrita a través de su ecuación paramétrica, donde $[(u_0, u_1, u_2)]$ y $[(v_0, v_1, v_2)]$ son dos puntos de la recta

$$r : \{(\theta u_0 + v_0 : \theta u_1 + v_1 : \theta u_2 + v_2) \shortparallel \theta \in \mathbb{P}^1\}$$

existirá un valor de θ tal que

$$(\theta u_0 + v_0 : \theta u_1 + v_1 : \theta u_2 + v_2) = p \tag{3.8}$$

Una vez hallado ese valor, queda hallado el punto p y con ello la intersección de ambas rectas.

Si, por otro lado, la recta r' se describe a través de su ecuación implícita

$$a'x + b'y + c'z = 0$$

el punto p debe satisfacer dicha ecuación. Por tanto, podemos sustituir en la ecuación implícita de r', en vez de las coordenadas de un representante arbitrario del punto p, las del vector $(\theta u_0 + v_0, \theta u_1 + v_1, \theta u_2 + v_2)$. Así, resolviendo la ecuación

$$a'(\theta u_0 + v_0) + b'(\theta u_1 + v_1) + c'(\theta u_2 + v_2) = 0$$

obtenemos el valor de θ que asegura que el punto p, descrito por la ecuación (3.8) pertenece a ambas rectas. Sustituyendo este valor en la ecuación (3.8) queda hallada la intersección de las rectas r y r'.

Supongamos ahora que ambas rectas vienen descritas por su ecuación implícita. Al ser la intersección un punto $p = (p_0 : p_1 : p_2)$, podemos escoger un vector representante, por ejemplo (p_0, p_1, p_2), y sustituirlo en ambas ecuaciones de tal forma que ambas deben cumplirse

$$\begin{aligned} ap_0 + bp_1 + cp_2 &= 0 \\ a'p_0 + b'p_1 + c'p_2 &= 0 \end{aligned}$$

donde p_0, p_1, p_2 son desconocidos.

Detengámonos un segundo y observemos la ecuación (3.5). ¿No se aprecia cierta similitud?. En efecto, en este caso el vector (p_0, p_1, p_2) hace el papel de (a, b, c). Si hacemos la misma interpretación, aunque no del todo correcta, de perpendicularidad a través del producto escalar, podemos afirmar que el vector que buscamos es perpendicular a los vectores $\vec{a} = (a, b, c)$ y $\vec{a}' = (a', b', c')$. Al igual que hicimos anteriormente, una forma rápida de hallar un vector perpendicular a otros dos, es hacer su producto vectorial. Por tanto, un vector representante del punto p viene dado por

$$(p_0, p_1, p_2) = \vec{a} \times \vec{a}' = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

Es decir, la intersección de las rectas r y r' es el punto

$$p = [(p_0, p_1, p_2)] = [\vec{a} \times \vec{a}'] \tag{3.9}$$

Es importante observar que para encontrar el punto de corte entre dos rectas de $\mathbb{P}^2$ se realiza la misma operación que para hallar los coeficientes de la ecuación implícita de la recta engendrada por dos puntos, correspondiente a la ecuación (3.6).

3.2. Planos Proyectivos

Una vez completada la descripción de una recta, pasemos a realizar la de un plano de $\mathbb{P}^3$. Este no es más que una variedad proyectiva de dimensión dos. Hallaremos sus ecuaciones paramétricas e implícitas generalizando los procedimientos del apartado anterior.

3.2.1. Ecuaciones paramétricas

Dados tres puntos proyectivos dis tintos $P = [u]$, $Q = [v]$ y $S = [s]$, vamos a describir lo elementos del plano engendrado por ellos, es decir, los elementos de $\mathcal{V}(P, Q, S)$.

Para ello, y al igual que se hizo en el caso de la recta, debemos dar una referencia en función de la cual *coordenar* los puntos de la variedad. Dado que los tres puntos P, Q y S son distintos, los vectores u, v y s son linealmente independientes, por lo que forman una base de $\mathcal{L}(u, v, s)$.

Así, utilizando el mismo razonamiento que en el apartado 3.1.1, tomamos la referencia proyectiva dada por

$$\mathfrak{R} = \{P, Q, S; [u + v + s]\}$$

cuya base asociada es $\mathcal{B} = \{u, v, s\}$.

Todo punto p perteneciente al plano $\mathcal{V}(P, Q, S)$ es un rayo representado por un vector w de $\mathcal{L}(u, v, s)$. Por tanto, este vector puede ser escrito como $w = \alpha u + \beta v + \mu s$, con alguno de los coeficientes no nulo. Esto implica que los puntos del plano $\mathcal{V}(P, Q, S)$, expresados en coordenadas homogéneas, tienen la forma

$$[\alpha u + \beta v + \mu s] = (\alpha : \beta : \mu)$$

Al igual que en el caso de la recta proyectiva, podemos reducir la expresión del plano y reescribirlo en función de dos coordenadas no homogéneas θ y γ:

$$\left[u + \frac{\beta}{\alpha} v + \frac{\mu}{\alpha} s\right] \overset{\text{not.}}{:=} [u + \theta v + \gamma s]$$

Sin embargo, en este caso, debemos tener más cuidado con los problemas que surgen cuando $\alpha = 0$.

Si $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0 \neq \mu$, entonces estaremos haciendo referencia al punto $[v + s]$. En este caso diremos que $\theta = \infty = \gamma$. Por otro lado, si $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, entonces el punto resultante se corresponde con S, y diremos que esto se da cuando $\gamma = \infty$. Asimismo, cuando $\theta = \infty$, estamos haciendo referencia al punto Q.

Teniendo en cuenta estas indeterminaciones, el plano $\mathcal{V}(P, Q, S)$ puede describirse a través de

$$\mathcal{V}(P, Q, S) : \{[u + \theta v + \gamma s] \shortmid\shortmid \theta, \gamma \in \mathbb{P}^1\} \tag{3.10}$$

siendo esta la **ecuación paramétrica del plano**, en coordenadas no homogéneas.

Observación 3.2.1. Este procedimiento para hallar las ecuaciones paramétricas de un plano de $\mathbb{P}^3$ no es más que una adaptación del procedimiento que se llevó a cabo en el apartado 3.1.1. Observemos que es un procedimiento fácilmente generalizable a cualquier variedad proyectiva, sea cual sea su dimensión y la del espacio proyectivo. Por tanto, no se explicará como hallar las ecuaciones paramétricas de una variedad proyectiva general, pues basta seguir los pasos del apartado 3.1.1, adaptándolo a las dimensiones de su caso. $\diamondsuit$

3.2.2. Ecuación implícita

Dado que un plano en $\mathbb{P}^3$ es un hiperplano, al igual que ocurría con la recta en $\mathbb{P}^2$ y siguiendo el mismo razonamiento, le asignaremos la ecuación implícita del hiperplano de $\mathbb{R}^4$ del que es proyección

$$ax + by + cz + dt = 0 \tag{3.11}$$

con los coeficientes no todos nulos. Esta será la **ecuación implicita** del plano, expresada en coordenadas homogéneas.

Dados tres puntos proyectivos $P = [(u_0, u_1, u_2, u_3)]$, $Q = [(v_0, v_1, v_2, v_3)]$ y $S = [(s_0, s_1, s_2, s_3)]$ de $\mathbb{P}^3$, desarrollemos un procedimiento para hallar la ecuación implícita del plano que engendran $\mathcal{V}(P, Q, S)$. Al igual que con la ecuación paramétrica, no haremos más que adaptar el apartado 3.1.2 a nuestro caso.

Recordemos que la primera forma de hacer esto que se comentó era, dado que $P, Q, S \in \mathcal{V}(P, Q, S)$, sustituir en la ecuación (3.11) las coordenadas de vectores representantes de los tres puntos proyectivos y resolver el sistema. Sin embargo, no era la más eficaz.

$$\begin{aligned} au_0 + bu_1 + cu_2 + du_3 = 0 \\ av_0 + bv_1 + cv_2 + dv_3 = 0 \\ as_0 + bs_1 + cs_2 + ds_3 = 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Otra forma, bastante mejor que la anterior, era interpretar las ecuaciones anteriores como el producto escalar entre el vector (a, b, c, d) y los vectores representantes de los puntos P, Q y S. Esto en la recta nos llevaba a un producto vectorial. Sin embargo, en $\mathbb{R}^4$ no está definido. Por tanto, debemos darle a las ecuaciones otra interpretación, para así hallar una forma más fácil de calcular la ecuación implícita de un plano.

Por un momento, observemos la eucación (3.11) como la ecuación implícita del hiperplano H cuya proyección es el plano proyectivo $\mathcal{V}(P, Q, S)$. Si consideramos x, y, z y t como coordenadas de un punto de H, dado que los vectores u, v, t forman una base de dicho plano, como se explicó en el apartado anterior, el vector (x, y, z, t) será combinación lineal de ellos, y por tanto el conjunto $\{(x, y, z, t), u, v, s\}$ será linealmente dependiente. Con ello el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.13}$$

debe ser nulo. De esta forma, dado que las únicas incógnitas con x, y, z y t y la ecuación implícita es única salvo múltiplos, el resultado de ese determinante será la ecuación implícita del hiperplano H, que por definición es la ecuación implícita del plano proyectivo $\mathcal{V}(P, Q, S)$.

Observación 3.2.2. Aunque el procedimiento utilizado para calcular la ecuación implícita de una recta de $\mathbb{P}^2$ a través del producto vectorial no es generalizable a otros hiperplanos, como acabamos de ver, el desarrollado en este apartado sí lo es. Por ello, no se explicará como hallar la ecuación implícita de un hiperplano proyectivo general, ya que bastará con seguir los pasos de esta sección, adaptándolos a las dimensiones pertinentes. Esto implica evidentemente, que la ecuación implícita de una recta de $\mathbb{P}^2$ se puede hallar también a través de este procedimiento. ♢

3.3. Haz de hiperplanos

En este apartado retomaremos el espacio proyectivo dual y le daremos otra utilidad, que nos será de gran ayuda a la hora de calcular intersecciones de hiperplanos.

3.3.1. Haz de rectas

Por el momento, dado que es mucho más intuitivo explicar el concepto con hiperplanos concretos, empezaremos trabajando con rectas en $\mathbb{P}^2$.

Definición 3.3.1. Dado un punto $p \in \mathbb{P}^2$, se define el *haz de rectas* por el punto p, o con base p, al conjunto de todas las rectas de $\mathbb{P}^2$ que pasan por p.

Observemos que dos cualesquiera rectas de este haz generan el plano proyectivo. Por tanto dadas tres rectas del haz con ecuaciones implícitas

$$\begin{aligned} r &: a_0x + a_1y + a_2z = 0 \\ r' &: b_0x + b_1y + b_2z = 0 \\ r'' &: c_0x + c_1y + c_2z = 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

los sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} a_0x + a_1y + a_2z = 0 \\ b_0x + b_1y + b_2z = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} a_0x + a_1y + a_2z = 0 \\ b_0x + b_1y + b_2z = 0 \\ c_0x + c_1y + c_2z = 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

son equivalentes. Esto implica que una de las ecuaciones es combinación lineal de las otras dos. Por tanto, conocidas dos rectas del haz r y r', la ecuación implícita en coordenadas homogéneas de cualquiera otra recta del haz vendrá dada por

$$\alpha(a_0x + a_1y + a_2z) + \beta(b_0x + b_1y + b_2z) = 0 \tag{3.16}$$

para determinados α y β. Si $\alpha \neq 0$ podemos dividir por él, y la ecuación quedaría

$$(a_0x + a_1y + a_2z) + \theta(b_0x + b_1y + b_2z) = 0 \shortparallel \theta = \frac{\beta}{\alpha} \tag{3.17}$$

en coordenadas no homogéneas.

Así, si dadas dos rectas del haz queremos determinar otra recta s que pase por un punto q, distinto del punto p del haz, basta sustituir las coordenadas de un vector representante de dicho punto q que la ecuación (3.17), obteniendo así un valor de θ. Sustituyendo θ de nuevo en la ecuación (3.17) obtenemos la ecuación implícita de s.

Sin embargo, un haz de rectas admite una interpretación dual, que da mucho más juego. Veremos que lo obtenido sin el espacio proyectivo dual es compatible con lo que obtendremos a partir de él.

Recordando el principio de dualidad, *traduzcamos* la definición de haz de rectas. De esta forma, y dado que estamos en $\mathbb{P}^2$, los puntos pasan a ser rectas, y las rectas, puntos. Por tanto, todas las rectas que se cortan en el punto p son todos los puntos que engendran la recta dual p^*. Con ello, todo haz de rectas con base p de $\mathbb{P}^2$ representa una recta p^* en el dual. Asimismo, gracias a la dualidad, toda recta p^* de ${\mathbb{P}^2}^*$ representa un haz de rectas con base p en $\mathbb{P}^2$.

Por tanto, un haz de rectas p^* es una variedad proyectiva dual de dimensión 1, engendrada por dos puntos duales

$$p^* := \{\mathbb{P}(\mathcal{L}(r, r')) \shortparallel r, r' \text{ son puntos de } \mathbb{P}^{2^*}\} \quad (3.18)$$

Estos puntos son rectas en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^2$, por lo que tienen una ecuación implícita

$$a_0x + a_1y + a_2z = 0$$

Así, las coordenadas de una recta en el espacio proyectivo dual serán $(a_0 : a_1 : a_2)$. Por tanto, si se conocen dos rectas del haz, se conocen dos puntos del haz p^*, y podemos describirlo a través de ecuaciones paramétricas e implícitas.

Esta descripción es la misma que la realizada en el apartado 3.1, ya que al fin y al cabo se trata de describir una recta a partir de dos puntos, aunque todo ello se desarrolle en el espacio proyectivo dual.

Sean pues dos rectas r y r' del haz de rectas en $\mathbb{P}^2$. Estas, por la ecuación (3.14), representan los puntos $(a_0 : a_1 : a_2)$ y $(b_0 : b_1 : b_2)$ en $\mathbb{P}^{2^*}$. La ecuación paramétrica del haz de rectas, o recta dual p^*, es, en coordenadas homogéneas

$$p^* : \{[\alpha(a_0, a_1, a_2) + \beta(b_0, b_1, b_2) \shortparallel \alpha, \beta \in \mathbb{R}]\} \quad (3.19)$$

En coordenadas no homogéneas adopta la forma

$$p^* : \{[(a_0, a_1, a_2) + \theta(b_0, b_1, b_2)] \shortparallel \theta \in \mathbb{P}^1\} = \{(a_0 + \theta b_0 : a_1 + \theta b_1 : a_2 + \theta b_2) \shortparallel \theta \in \mathbb{P}^1\} \quad (3.20)$$

Hagamos una rápida comprobación de que esto es coherente con lo explicado al principio de este apartado, sin tener en cuenta la dualidad.

Los punto que pertenecen al haz de rectas p^* en el dual son aquellos de la forma $(a_0 + \theta b_0 : a_1 + \theta b_1 : a_2 + \theta b_2)$. Es decir, traduciendo de nuevo, aquellas rectas de $\mathbb{P}^2$ cuya ecuación implícita es

$$(a_0 + \theta b_0)x + (a_1 + \theta b_1)y + (a_2 + \theta b_2)z = 0$$

son las que pertenecen al haz de rectas de $\mathbb{P}^2$. Observamos que esta ecuación coincide con la ecuación (3.17), con la cual también habíamos deducido que todas las rectas del haz debían tener por ecuación implícita la ecuación (3.17). Por tanto, ambas representaciones coinciden.

Por último, hallemos la ecuación implícita de p^*. Guiándonos por el apartado 3.1 de nuevo, tenemos que la ecuación implícita de una recta, conocidos dos de sus puntos, es

$$((a_0, a_1, a_2) \times (b_0, b_1, b_2)) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0 \quad (3.21)$$

O bien, a partir del apartado 3.2

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.22)$$

Nótese que, en vez de llamar a las variables x, y, z, las hemos llamado u, v, w, para no confundir ecuaciones de rectas proyectivas con ecuaciones de rectas proyectivas duales.

Observación 3.3.1. Es importante observar que, por el mismo procedimiento, se puede describir una recta de $\mathbb{P}^2$ o una de $\mathbb{P}^{2^*}$. La única diferencia es si consideramos los coeficientes de una ecuación como coordenadas de un punto o como coeficientes de una recta. $\diamondsuit$

Intersección de dos rectas proyectivas

Anteriormente hemos estudiado varias formas de calcular la intersección de dos rectas de $\mathbb{P}^2$. Sin embargo, el concepto de haz de rectas aun no había sido introducido. Una vez conocida su existencia, utilicémoslo para hallar la intersección de dos rectas r y r' en $\mathbb{P}^2$, descritas por las siguientes ecuaciones implícitas

$$r : a_0x + a_1y + a_2z = 0$$
$$r' : b_0x + b_1y + b_2z = 0$$

Como bien sabemos, dicha intersección es un punto $p = (p_0 : p_1 : p_2)$. Esto quiere decir que las dos rectas r y r' pertenecen al haz de rectas con base p.

Pasando al espacio dual estamos buscando una recta p^* de $\mathbb{P}^{2^*}$, con ecuación implícita

$$p_0u + p_1v + p_2w = 0 \tag{3.23}$$

que contiene a los puntos $(a_0 : a_1 : a_2)$ y $(b_0 : b_1 : b_2)$.

La ecuación implícita de una recta que pasa por dos puntos viene dada por la ecuación (3.22). Sustituyendo los valores de los puntos contenidos en p^* obtenemos

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)u + (a_2b_0 - a_0b_2)v + (a_0b_1 - a_1b_0)w = 0$$

que se corresponde a la ecuación implícita de la recta dual p^*. Comparando con la eucación (3.23) obtenemos que la intersección de las rectas r y r' de $\mathbb{P}^2$ es el punto

$$p = (a_1b_2 - a_2b_1 : a_2b_0 - a_0b_2 : a_0b_1 - a_1b_0)$$

3.3.2. Haz de hiperplanos

El concepto de haz de rectas puede generalizarse a un espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$, siempre que se considere un conjunto de hiperplanos. Hagamos una definición general.

Definición 3.3.2. Se llama haz de hiperplanos al conjunto de todos los hiperplanos de $\mathbb{P}(E)$ que contienen una variedad proyectiva dada $X \subset \mathbb{P}(E)$ de codimensión 2. Esa variedad X se llama base del haz.

Por ejemplo, en $\mathbb{P}^3$, estaríamos hablando de un haz de planos con base la recta r por la cual pasan todos ellos.

Dado que se habla de haz de hiperplanos, estos vendrán descritos por una ecuación implícita. Por tanto, todas las explicaciones realizadas en el apartado anterior basándonos en las ecuaciones implícitas, sin usar el dual, son válidas para el caso general.

Además, la interpretación dual sigue correcta. Cada hiperplano de $\mathbb{P}(E)$ es un punto en el espacio proyectivo dual. La variedad X contenida en todos ellos, dado que tiene codimensión 2, es una recta en $\mathbb{P}^*$. Por tanto, todo haz de hiperplanos con base X de $\mathbb{P}(E)$ representa una recta X^* en el dual. De forma general, un haz de hiperplanos es una variedad proyectiva dual de dimensión 1.

Al igual que hicimos en el apartado anterior, podemos describir el haz de hiperplanos X^*, dado que es una recta del dual, a través de sus ecuaciones paramétricas. Dados dos hiperplanos del haz, tenemos dos puntos de X^* conocidos. Así, se reduce a hallar al ecuación implícita de una recta que pasa por dos puntos, problema descrito en la sección 3.1.1.

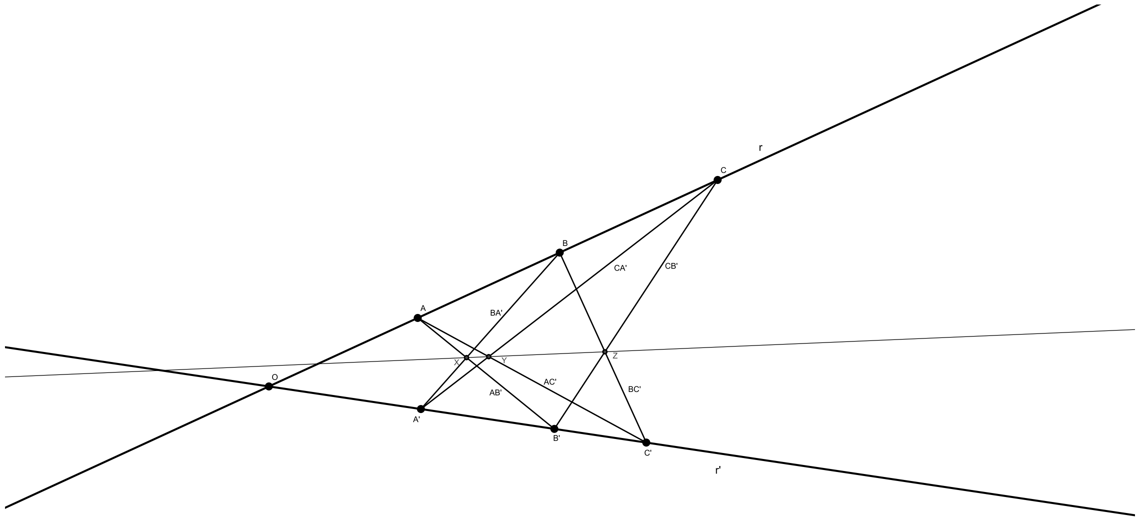
3.4. Teorema de Pappus

En esta sección enunciaremos un teorema clásico de la geometría del plano proyectivo, en cuya demostración usaremos lo visto a lo largo de este capítulo.

Teorema 3.4.1 (Teorema de Pappus)**.** *Sea $\mathbb{P}(E)$ un plano proyectivo y sean r y r' dos rectas diferentes de $\mathbb{P}(E)$. Entonces, para cualesquiera seis puntos distintos $A, B, C \in r$ y $A', B', C' \in r'$, los puntos*

$$X = AB' \cap A'B \ ; \qquad Y = AC' \cap A'C \ ; \qquad Z = BC' \cap B'C$$

están alineados.



Demostración. Dado que en el plano proyectivo las rectas son hiperplanos, y haciendo uso del corolario 1.3.2, las rectas r y r' se cortan en un punto O.

Si alguno de los seis puntos es O, el teorema es trivial ya que dos de los puntos X, Y y Z coincidirían, con lo que tendríamos dos puntos trivialmente alineados. Trataremos pues el caso en que todos ellos son diferentes de O.

La demostración consistirá en hallar las coordenadas de los puntos X, Y, Z y comprobar que están alineados. Para ello es necesario establecer una referencia proyectiva. Por comodidad elegimos

$$\mathfrak{R} = \{A, B, C'; B'\}$$

Comprobemos que es referencia. Por hipótesis, dado que son distintos, los puntos A, B y C' forman un triángulo no degenerado. Por tanto, para ver que cada 3 de ellos son proyectivamente independientes, bastaría comprobar que el punto B' no está en ninguno de los lados del triángulo ABC'.

Dado que $B' \in r' \setminus \{0\}$ es claro que no pertenece a la recta $AB = r$. Tampoco está en AC' ya que, en caso contrario, $B' \in r' \cap AC' = \{C'\}$, lo cual es absurdo pues los puntos B' y C' son distintos. Por último, no pertenece a BC', pues en caso contrario de nuevo tendríamos que $B' \in r' \cap BC' = \{C'\}$.

Una vez demostrado que $\mathfrak{R}$ es una referencia proyectiva, las coordenadas de los puntos A, B, C' y B' respecto a dicha referencia son

$$A = (1:0:0)\ ; \qquad B = (0:1:0)\ ; \qquad C' = (0:0:1)\ ; \qquad B' = (1:1:1)$$

Estamos en situación de hallar las coordenadas de los puntos X, Y y Z respecto a la referencia $\mathfrak{R}$. Realizaremos el mismo procedimiento para todos los puntos: hallaremos las ecuaciones, paramétricas o implícitas, de las rectas cuya intersección es el punto en cuestión, y a partir de ellas calcularemos posteriormente dicha intersección.

- Punto $X = AB' \cap A'B$.

  Dado que las coordenadas respecto a nuestra referencia de los puntos A y B' son conocidas, la ecuación implícita de la recta AB' es

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z - y = 0$$

  Para la recta $A'B$ primero debemos hallar las coordenadas de A' respecto de $\mathfrak{R}$. Es un punto de $B'C' = r'$ distinto de O, B', C'. Las ecuaciones paramétricas de $B'C'$, tomando como representantes los vectores $(1,1,1)$ y $(0,0,1)$, son

$$r' = B'C' := \{[\lambda(1,1,1) + \mu(0,0,1)] \parallel \lambda, \mu \in E\} = \{(\lambda : \lambda : \mu + \lambda) \parallel \lambda, \mu \in E\} \tag{3.24}$$

Por lo que A' es un punto de la forma $(\lambda : \lambda : \mu + \lambda)$. Dado que no es el punto C', $\lambda \neq 0$, pudiendo así dividir por λ. Queda

$$A' = (1 : 1 : 1 + \frac{\mu}{\lambda}) = (1 : 1 : \theta) \parallel \theta = 1 + \frac{\mu}{\lambda}$$

Tengamos en cuenta que como $A' \neq B'$, $\theta \neq 1$. Además, $A' \neq O$ por lo que nos falta una restricción para θ. Calculamos el punto O para hallarla. La ecuación implícita de $r = AB$ es

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

Con ello se obtiene que el punto de corte cumple $\mu = -\lambda$. Por tanto, la intersección de ambas rectas es el punto $(\lambda : \lambda : 0) = (1 : 1 : 0)$. La restricción que debemos imponer a θ para que $A' \neq O$ es que $\theta \neq 0$. Así

$$A' = (1 : 1 : \theta) \parallel \theta = 1 + \frac{\mu}{\lambda}, \theta \neq 0, \theta \neq 1$$

La ecuación implícita de la recta $A'B$ es

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \theta x + z = 0$$

Finalmente resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} AB' :& z - y = 0 \\ A'B :& \theta x + z = 0 \end{aligned} \tag{3.25}$$

obtenemos el punto $X = AB' \cap A'B$

$$X = (1 : \theta : \theta) \tag{3.26}$$

- Punto $Z = BC' \cap B'C$.

  La ecuación implícita de la recta BC' es

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

  Para describir la recta $B'C$ debemos hallar antes el punto C. Este se encuentra en la recta AB, que descrita a través de las ecuaciones paramétricas es

$$AB := \{[\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0)] \parallel \alpha, \beta \in E\} = \{(\alpha : \beta : 0) \parallel \alpha, \beta \in E\}$$

  Dado que $C \neq B$, se tiene que $\alpha \neq 0$, por lo que podemos dividir por ella

$$C = (1 : \frac{\beta}{\alpha} : 0) = (1 : \mu : 0) \parallel \mu = \frac{\beta}{\alpha}$$

  Por otro lado $C \neq O = (1 : 1 : 0)$, lo cual implica que $\mu \neq 1$. Además $C \neq A$, por lo que $\mu \neq 0$. Así, finalmente el punto C es

$$C = (1 : \mu : 0) \parallel \mu = \frac{\beta}{\alpha}, \mu \neq 0, \mu \neq 1$$

Ahora ya podemos calcular las ecuaciones paramétricas de la recta $B'C$, las cuales, en coordenadas no homogéneas, vienen dadas por

$$B'C := \{[(1,\mu,0)+\nu(1,1,1)] \shortmid\shortmid \nu \in \mathbb{P}^1\} = \{(1+\nu : \mu+\nu : \nu) \shortmid\shortmid \nu \in \mathbb{P}^1\}$$

El punto de intersección de las rectas BC' y $B'C$ cumple $1+\nu = 0$. Por tanto, $\nu = -1$ y la intersección de ambas es

$$Z = (0 : \mu - 1 : -1) \tag{3.27}$$

- Punto $Y = AC' \cap A'C$.

  La ecuación implícita de la recta AC' es

  $$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

  Por otro lado, las ecuaciones paramétricas de $A'C$, teniendo en cuenta las restricciones antes impuestas a θ y μ, son

  $$A'C := \{[(1,1,\theta)+\xi(1,\mu,0)] \shortmid\shortmid \xi \in \mathbb{P}^1\} = \{(1+\xi : 1+\mu\xi : \theta) \shortmid\shortmid \xi \in \mathbb{P}^1\}$$

  El punto de intersección de ambas rectas cumple $1+\mu\xi = 0$, con lo cual $\xi = \frac{-1}{\mu}$. Finalmente el punto Y es

  $$Y = (1 - \frac{1}{\mu} : 0 : \theta) = (\mu - 1 : 0 : \mu\theta) \tag{3.28}$$

Una vez que tenemos las coordenadas de los tres puntos respecto a la referencia $\mathfrak{R}$ falta comprobar que están alineados. Para ello, sus representantes deben ser coplanarios, es decir, su determinante debe ser nulo. Haciendo uso de las ecuaciones (3.26), (3.28) y (3.27) comprobamos que esto se cumple

$$\begin{vmatrix} 1 & \mu-1 & 0 \\ \theta & 0 & \mu-1 \\ \theta & \mu\theta & -1 \end{vmatrix} = (\mu-1)^2\theta - (\mu-1)\mu\theta + (\mu-1)\theta = \mu^2\theta + \theta - 2\mu\theta - \mu^2\theta + 2\mu\theta - \theta = 0$$

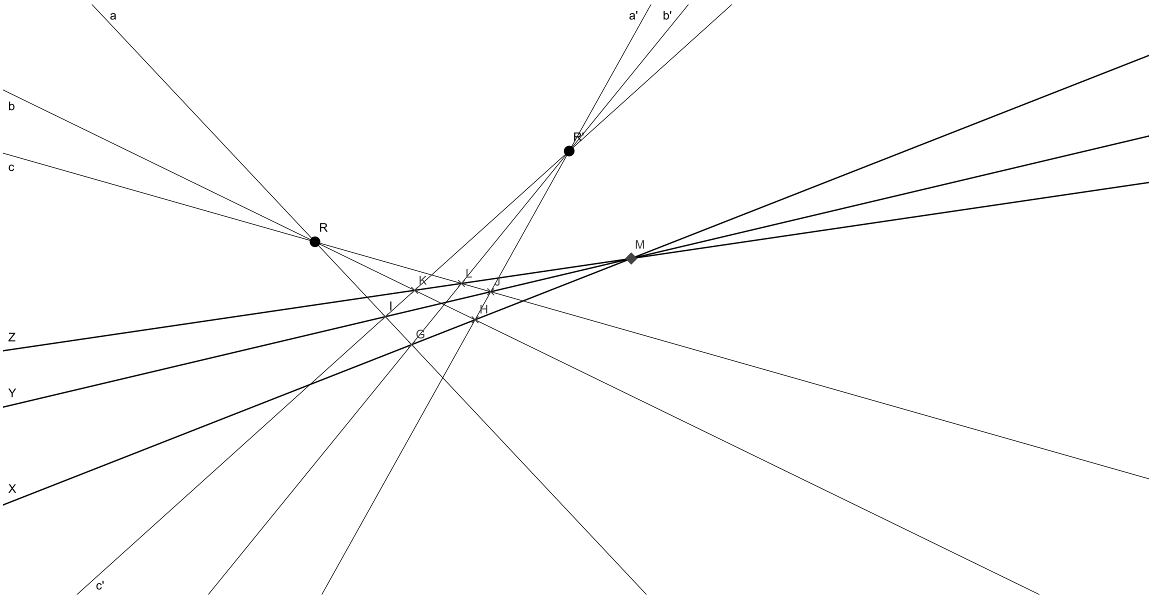
Es importante observar que en general el determinante de los representantes de tres puntos proyectivos no está bien definido, debido a que podemos coger múltiplos. Sin embargo en este caso, al ser igual a cero, sí lo está. Por ello, el teorema queda demostrado. ■

Recordemos que gracias al principio de dualidad, dado un teorema, automáticamente su dual es cierto. Así, podemos enunciar el Teorema de Pappus para el plano proyectivo dual y quedará demostrado, por el simple hecho de haber demostrado el teorema en el plano proyectivo.

Teorema 3.4.2 (Teorema de Pappus Dual)**.** *Sea $\mathbb{P}(E^*) = \mathbb{P}^*$ un plano proyectivo dual y sean R y R' dos puntos distintos de $\mathbb{P}^*$. Entonces, para cualesquiera seis rectas distintas a, b, c, a', b', c' tales que $R \in a, b, c$ y $R' \in a', b', c'$; las rectas*

$$\mathcal{V}(a \cap b', a' \cap b) \ ; \qquad \mathcal{V}(a \cap c', a' \cap c) \ ; \qquad \mathcal{V}(b \cap c', b' \cap c)$$

son concurrentes.


a
a'
b'
b
c
R'
R
M
K
L
J
I
H
G
Z
Y
X
c'

Capítulo 4

Aplicaciones Proyectivas

En este capítulo vamos a tratar de extrapolar uno de los conceptos más centrales del álgebra lineal al contexto proyectivo. Tratamos de estudiar las aplicaciones entre espacios proyectivos cuyo comportamiento consideramos "bueno".

En el mundo lineal, estas aplicaciones eran los llamados homomorfismos entre espacios vectoriales o símplemente aplicaciones lineales. Aquí, en el mundo de los rayos, las llamaremos *aplicaciones proyectivas*.

4.1. Definición

Sean dos espacios proyectivos X e Y asociados a sendos espacios vectoriales, $\widehat{X}$ e $\widehat{Y}$ respectivamente.

Nuestro objetivo es definir una aplicación proyectiva entre dos espacios proyectivos a partir de una aplicación lineal entre sus respectivos espacios lineales de forma natural. Intentémoslo y veamos qué dificultades se nos presentan.

Sea $\widehat{h} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ una aplicación lineal arbitraria. Lo deseable sería definir la aplicación proyectiva asociada a $\widehat{h}$ como aquella que, a cada rayo le asigna el rayo engendrado por la imagen de uno de sus representantes. Visto formalmente, si $x = [u]$:

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{h} Y \\ x &\mapsto \left[\widehat{h}(u)\right] \end{aligned}$$

Este intento de definición tan intuitivo e inocente presenta dos problemas. El primero de ellos es que si $\widehat{h}(u) = 0$ entonces el rayo $\left[\widehat{h}(u)\right]$ no está definido.

Esto lo arreglamos de una forma natural, restringiendo el dominio de $\widehat{h}$ a los vectores de $\widehat{X}$ que no se anulan mediante $\widehat{h}$. Es decir, ahora $\widehat{h}$ queda definida en $\widehat{X} \setminus \ker\left(\widehat{h}\right)$.

Trasladando esta restricción al contexto proyectivo obtenemos este segundo intento de definición de aplicación proyectiva asociada a cierta aplicación lineal:

$$\begin{aligned} X \setminus \mathbb{P}\left(\ker\left(\widehat{h}\right)\right) &\xrightarrow{h} Y \\ x &\mapsto \left[\widehat{h}(u)\right] \end{aligned}$$

Antes de hacer algunas aclaraciones adicionales acerca de este primer problema que se nos ha presentado, demos una pequeña definición (por comodidad tipográfica).

Definición 4.1.1 (Centro)**.** Se denomina *centro* de una aplicación h, dada la aplicación lineal asociada $\widehat{h}$ entre dos espacios lineales $\widehat{X}$ e $\widehat{Y}$, a la variedad proyectiva:

$$\mathcal{Z} \stackrel{\text{not.}}{:=} \mathbb{P}\left(\ker\left(\widehat{h}\right)\right)$$

Tras este breve inciso sobre la notación, veamos que, en efecto, hemos resuelto el problema que se nos planteaba, es decir, hemos eliminado del dominio todos los rayos que no tenían imagen definida. Si hubiera algún rayo con imagen no definida, alguno de sus representantes debería pertenecer al núcleo de $\widehat{h}$ (y por tanto todos). Pero esto no es posible ya que el rayo engendrado por este representante estaría en el centro de h.

El segundo problema que planteaba nuestra definición era saber si está bien definida. En efecto, siempre que definamos una aplicación y los elementos de nuestro conjunto de salida no tengan una representación única, debemos comprobar que la imagen de la función es independiente del representante escogido. En este caso es un juego de niños:

Sean $[u'] = x = [u]$. Es evidente que $u' = \lambda u$ para cierto λ no nulo. Entonces:

$$\left[\widehat{h}(u')\right] = \left[\widehat{h}(\lambda u)\right] = \left[\lambda\widehat{h}(u)\right] = \left[\widehat{h}(u)\right]$$

Para terminar la sección advertimos de que en algunos textos, a la hora de representar una aplicación proyectiva omiten (abusando de notación) especificar que al espacio de partida se le extrae el centro $\mathcal{Z}$.

4.2. Propiedades Elementales

En esta sección estudiaremos diversas propiedades básicas de las aplicaciones proyectivas. Propiedades tales como el comportamiento de las aplicaciones proyectivas inyectivas y sobreyectivas, la clausura de estas respecto de la composición, cómo estas aplicaciones parametrizan variedades proyectivas y un lema de la correspondencia bastante útil.

POSPUESTO HASTA QUE LO VEAMOS EN CLASE

Un resultado deseable, aunque para nada inmediato, es el de que podamos clasificar a las aplicaciones lineales que inducen cierta aplicación proyectiva por ser múltiplos entre si. Veamoslo:

Teorema 4.2.1 (Lema de la Correspondencia)**.** *Dos aplicaciones lineales no nulas producen la misma aplicación proyectiva si y solo si son múltiplos la una de la otra.*

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Sean dos aplicaciones lineales $\widehat{g}, \widehat{h} : E \to E'$ tales que inducen la misma variedad proyectiva. Esto es:

$$\begin{gathered} \mathbb{P}(E) \setminus \mathcal{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}(E') \\ x = [u] \mapsto \varphi(x) = [\widehat{g}(u)] = \left[\widehat{h}(u)\right] \end{gathered}$$

Para que esto pueda suceder es condición indispensable que ambas aplicaciones tengan el mismo kernel:

$$\mathcal{Z} = \mathbb{P}(\ker(\widehat{h})) = \mathbb{P}(\ker(\widehat{g})) \Leftrightarrow \ker(\widehat{h}) = \ker(\widehat{g})$$

Por ende nuestro objetivo es demostrar que dicho λ_u (cual? si no ha sido nombrado hasta ahora) es el mismo para todos los vectores.

Distingamos dos casos (para no talar árboles de más echaremos las cuentas rápido).

- Sean $u, v \in E \setminus \ker(\widehat{g})$ tales que $u = \mu v$. Tenemos que:

$$\widehat{g}(u) = \lambda_u \widehat{h}(u) \Leftrightarrow \mu\widehat{g}(v) = \lambda_u \mu \widehat{h}(v) \Leftrightarrow \lambda_v \widehat{h}(v) = \lambda_u \widehat{h}(v) \Leftrightarrow \lambda_u = \lambda_v$$

- Sea $u, v \in E \setminus \ker(\widehat{g})$ linealmente independientes y sea $w = u + v$. Echando las cuentas:

$$\begin{aligned} &\widehat{g}(w) = \lambda_w \widehat{h}(w) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \widehat{g}(u) + \widehat{g}(v) = \lambda_w(\widehat{h}(u) + \widehat{h}(v)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda_u \widehat{h}(u) + \lambda_v \widehat{h}(v) = \lambda_w(\widehat{h}(u) + \widehat{h}(v)) \Leftrightarrow \\ &(\lambda_u - \lambda_w)\widehat{h}(u) + (\lambda_v - \lambda_w)\widehat{h}(v) = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Como $\widehat{h}(u)$ y $\widehat{h}(v)$ son linealmente independientes (compruébese), se tiene que:

$$\lambda_u = \lambda_v = \lambda_w$$

.

$\boxed{\Leftarrow}$ Inmediato, ya que si $\widehat{h}(u) = \lambda \widehat{g}(u)$ para todo u, tomando clases:

$$h(u) = \left[\widehat{h}(u)\right] = [\lambda \widehat{g}(u)] = [\widehat{g}(u)] = g(u)$$

Sabemos que las imágenes de $\widehat{g}$ y $\widehat{h}$ son iguales salvo múltiplos para todos los vectores que no pertenecen al núcleo, con lo que:

$$[\widehat{g}(u)] = \left[\widehat{h}(u)\right] \ \forall u \notin \widehat{\mathcal{Z}} \Rightarrow \widehat{g}(u) = \lambda_u \widehat{h}(u)$$

■

Al teorema 4.2.1 le bautizamos con el nombre de "lema de la correspondencia", porque lo que viene a decir (siendo muy retorcidos) es que las aplicaciones proyectivas entre dos espacios proyectivos están en biyección con los elementos del espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\widehat{X}, \widehat{Y}))$.

4.3. Homografías

4.4. Proyecciones Cónicas

Dedicaremos esta sección al estudio de un tipo especialmente relevante de aplicaciones proyectivas no homográficas, las llamadas *proyecciones cónicas.*

Antes de lanzarnos al estudio general de estas aplicaciones presentemos un par de ejemplos que más adelante nos ayudarán a entender intuitivamente el por qué del apellido "cónicas" de estas aplicaciones.

Ejemplo 4.4.1 (Punto sobre Recta)**.** En el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ consideramos un punto z y una recta Y (recordemos que es un subespacio proyectivo) tal que $z \notin Y$. En estas condiciones definimos la aplicación:

$$\begin{gathered}\mathbb{P}^2 \setminus \{z\} \xrightarrow{h} Y \\ x \mapsto h(x) = \mathcal{V}(x, z) \cap Y\end{gathered}$$

♢

No demostraremos que la aplicación del ejemplo 4.4.1 es, en efecto, una aplicación proyectiva, ya que al final de la sección daremos una demostración general para todas las proyecciones cónicas, de las que esta aplicación en concreto es un caso particular.

El ejemplo 4.4.1 se puede generalizar para dimensiones superiores, basta mantener que z sea un punto de $\mathbb{P}^n$ e Y un hiperplano.

Ejemplo 4.4.2 (Punto sobre Hiperplano)**.** En el plano proyectivo $\mathbb{P}^n$ consideramos el punto z y el hiperplano Y tal que $z \notin Y$. Definimos la aplicación:

$$\begin{gathered}\mathbb{P}^n \setminus \{z\} \xrightarrow{h} Y \\ x \mapsto h(x) = \mathcal{V}(x, z) \cap Y\end{gathered}$$

♢

Otra generalización de los ejemplos anteriores es la siguiente (menos intuitiva y más dificil de ver):

Ejemplo 4.4.3. En el espacio proyectivo $\mathbb{P}^3$ se consideran las rectas l y l tales que $l \cap l' = \emptyset$. Definimos la aplicación:

$$\mathbb{P}^3 \setminus l \xrightarrow{h} l'$$
$$x \mapsto \mathcal{V}(x, l) \cap l'$$

$\diamondsuit$

Observamos simplemente que $\mathcal{V}(x, l) \cap l'$ siempre se corta con l en un punto (consecuencia inmediata de la fórmula de Grassmann).

Llegados a este punto, ha llegado la hora de definir *proyección cónica* en toda su generalidad.

Definición 4.4.1 (Proyección Cónica)**.** Sean X un espacio proyectivo y Z e Y dos variedades proyectivas de X tales que:

1. $Z \cap Y = \emptyset$
2. $\dim(Z) + \dim(Y) = \dim(X) - 1$

Definimos la aplicación:

$$X \setminus Z \xrightarrow{h} Y$$
$$x \mapsto \mathcal{V}(x, Z) \cap Y$$

Automáticamente se nos presentan una serie de cuestiones que trataremos de responder a continuación:

1. ¿La intersección $\mathcal{V}(x, Z) \cap Y$ es siempre un único punto?
2. ¿h es una aplicación proyectiva? ¿Cuál es su aplicación lineal asociada?

Como diría Jack el Destripador, vayamos por partes:

Proposición 4.4.1 (Intersección Unipuntual)**.** *En las condiciones de la definición 4.4.1 la intersección $\mathcal{V}(x, Z) \cap Y$ tiene dimensión nula. Es decir, es un punto proyectivo.*

Demostración. Usando la fórmula de Grassmann:

$$\dim \mathcal{V}(\mathcal{V}(x, Z), Y) = \dim \mathcal{V}(x, Z) + \dim \mathcal{V}(Y) - \dim \mathcal{V}(x, Z) \cap Y \tag{4.2}$$

En primer lugar, veamos cuál es la dimensión de $\mathcal{V}(x, Z)$, para lo cual usaremos, de nuevo, la fórmula de Grassmann.

$$\dim \mathcal{V}(x, Z) = \dim(x) + \dim(Z) + \dim(x \cap Z) \tag{4.3}$$

Como $\dim(x) = 0$ (por ser un punto) y la dimensión de $\dim(x \cap Z) = -1$, ya que, por definición de proyección cónica $x \notin Z$, y por tanto $x \cap Z = \emptyset$. Sustituyendo en (4.3) se obtiene:

$$\dim \mathcal{V}(x, Z) = \dim(Z) + 1 \tag{4.4}$$

Sustituyendo este resultado en (4.2) obtenemos:

$$\dim \mathcal{V}(\mathcal{V}(x, Z), Y) = \dim(Z) + 1 + \dim \mathcal{V}(Y) - \dim \mathcal{V}(x, Z) \cap Y \tag{4.5}$$

Como, por hipótesis $\dim(Z) + \dim(Y) = \dim(X) - 1$, sustituyendo en (4.5) queda:

$$\dim \mathcal{V}(\mathcal{V}(x, Z), Y) = \dim(X) - \dim \mathcal{V}(x, Z) \cap Y \tag{4.6}$$

Centrémonos ahora en el otro miembro de la igualdad. En primer lugar, es claro que:

$$\dim \mathcal{V}(\mathcal{V}(x, Z), Y) = \dim \mathcal{V}(x, Z, Y)$$

Parece intuitivo pensar que Z e Y generan X. Veámoslo:

$$\dim \mathcal{V}(Z, Y) = \dim(Z) + \dim(Y) - \dim(Z \cap Y) \tag{4.7}$$

Como, por hipótesis, $Z \cap Y$ es el vacío, y, además, la suma de las dimensiones de Z e Y dan la dimensión de X menos 1, nos queda que, efectivamente:

$$\dim \mathcal{V}(Z, Y) = \dim(X) \tag{4.8}$$

Por ende, $\dim \mathcal{V}(Z, Y, x) = \dim(X)$, y, podemos sustituir en (4.6):

$$\dim(X) = \dim(X) - \dim \mathcal{V}(x, Z) \cap Y \tag{4.9}$$

Despejando, el resultado se sigue inmediatamente. ■

La proposición 4.4.1 prueba que h está bien definida como aplicación.

Una pequeña observación antes de probar que las proyecciones cónicas son, efectivamente, aplicaciones proyectivas, es que los espacios lineales asociados a Z y a Y son complementarios.

Observación 4.4.1 (Espacios Lineales Complementarios)**.** Como la intersección de las variades proyectivas Z e Y es el vacío, esta intersección tiene dimensión -1. Por ende, el espacio lineal asociado a esta intersección es el nulo. Es decir:

$$Z \cap Y = \emptyset \Leftrightarrow \widehat{Z} \cap \widehat{Y} = \{0\}$$

Además, la suma de las dimensiones de Z e Y es la dimensión de X menos 1. Usando esto:

$$\begin{aligned}
&\dim(Y) + \dim(Z) = \dim(X) - 1 \Leftrightarrow \\
&\qquad \Leftrightarrow \dim(\widehat{Y}) - 1 + \dim(\widehat{Z}) - 1 = \dim(\widehat{X}) - 1 - 1 \Leftrightarrow \\
&\qquad \Leftrightarrow \dim(\widehat{Y}) + \dim(\widehat{Z}) - 2 = \dim(\widehat{X}) - 2 \Leftrightarrow \\
&\qquad\qquad \Leftrightarrow \dim(\widehat{Y}) + \dim(\widehat{Z}) = \dim(\widehat{X})
\end{aligned}$$

En su conjunto, esto quiere decir que se tiene la siguiente descomposición en suma directa del espacio lineal:

$$\widehat{X} = \widehat{Y} \oplus \widehat{Z}$$

♢

Probemos ahora que las proyecciones cónicas son aplicaciones proyectivas. Y que, de hecho, son las aplicaciones proyectivas asociadas a *proyecciones vectoriales.* (De ahí surge el nombre de "proyección").

Proposición 4.4.2 (Proyección Vectorial)**.** *La aplicación h tiene a la siguiente aplicación lineal (proyección vectorial de $\widehat{X}$ sobre $\widehat{Y}$) como asociada:*

$$\begin{gathered}
\widehat{X} = \widehat{Z} \oplus \widehat{Y} \xrightarrow{\widehat{h}} \widehat{Y} \\
u = v + w \mapsto w
\end{gathered}$$

Siendo $v \in \widehat{Z}$ y $w \in \widehat{Y}$, es decir, la descomposición de x en suma de vectores de $\widehat{Z}$ e $\widehat{Y}$.

Demostración. Comprobar que $\widehat{h}$ es una aplicación lineal con núcleo $\widehat{Z}$ es inmediato y se deja al lector. Hecho esto, suponiendo que $x = [u]$, basta ver que $h(x) = \left[\widehat{h}(u)\right]$ para cualquier $x \in X$.

$$\left[\widehat{h}(u)\right] = \left[\widehat{h}(v + w)\right] = [w]$$

Veamos que $[w] \in \mathcal{V}(x, Z) \cap Y$, demostrando así lo que queríamos.

En primer lugar, sabemos que w no es el vector nulo, ya que si lo fuera, el rayo x estaría en el centro. Dicho esto, como $Y = \mathbb{P}(\widehat{Y})$, y como $w \in \widehat{Y}$, entonces $[w] \in Y$.

Para demostrar que $[w] \in \mathcal{V}(x, Z)$ basta con darse cuenta de que $\mathcal{V}(x, Z) = \mathbb{P}(\mathcal{L}(u, \widehat{Z}))$. Como $u = v + w$ se tiene que $w = u - v \in \mathcal{L}(u, \widehat{Z})$, luego, tomando clases:

$$[w] = [u - v] \in \mathbb{P}(\mathcal{L}(u, \widehat{Z})) = \mathcal{V}(x, Z)$$

■

La proposición 4.4.2 demuestra que las proyecciones cónicas en general son aplicaciones proyectivas, dando la aplicación lineal asociada (una proyección vectorial).

Antes de finalizar la sección daremos una explicación del por qué del apellido "cónicas" de estas aplicaciones. Además, daremos dos ejemplos detallados para que el lector se familiarice con el tratamiento de estas aplicaciones, y que, además, constituye un gran repaso de capítulos anteriores. Por último propondremos un ejercicio al lector.

Observación 4.4.2 (Cónicas)**.** Este apellido es debido a que, en el caso particular presentado en el ejemplo 4.4.2, si tomamos la imagen de una circunferencia por la proyección cónica obtenemos una curva cónica. Esta curva es la formada por la intersección entre el hiperplano Y la familia de rectas que pasan por z y un punto de la circunferencia. $\diamondsuit$

Ejemplo 4.4.4 (Proyección Punto – Plano Degenerada)**.** Dado el punto z y el plano π, se pide hallar la imagen de un punto genérico p por la proyección cónica con centro z sobre π. (POR HACER) $\diamondsuit$

Ejemplo 4.4.5 (Proyección Punto – Plano)**.** Dado el punto z y el plano π, se pide hallar la imagen de un punto genérico p por la proyección cónica con centro z sobre π. (POR HACER) $\diamondsuit$

Problema 4.1. Enumere las proyecciones cónicas de $\mathbb{P}^4$, clasificándolas en función de las subvariedades Z e Y que las caracterizan.

4.5. Teorema de Desargues

Capítulo 5

Razón Doble

El objetivo de este capítulo es ver que, dadas dos rectas proyectivas $\mathbb{P}(E)$ y $\mathbb{P}(E')$, es decir con $\dim(E) = \dim(E') = 2$, existe una homografía que transforma cuatro puntos distintos cualesquiera de $\mathbb{P}(E)$ en otros cuatro puntos distintos de $\mathbb{P}(E')$. Esto nos llevará a la definición de razón doble y a estudiar sus características y propiedades.

5.1. Definición

Empecemos tratando un caso más sencillo, tres puntos. Es fácil demostrar haciendo uso del álgebra lineal, como haremos a continuación, que, dadas dos rectas proyectivas, existe una única homografía que transforma tres puntos distintos cualesquiera en otros tres puntos distintos.

Proposición 5.1.1. *Dadas dos rectas proyectivas, $\mathbb{P}(E)$ y $\mathbb{P}(E')$, y dadas dos ternas diferentes siempre existe una única homografía que transforma la una en la otra.*

Demostración. Sean $\{p_0, p_1, p_2\}$ tres puntos distintos de $\mathbb{P}(E)$. Al ser diferentes podemos tomar dicha terna como referencia proyectiva $\mathfrak{R}$ de $\mathbb{P}(E)$. Esto nos proporcionará una base de E, la correspondiente base asociada $\mathcal{B}$ a la referencia $\mathfrak{R}$. Sea la terna de puntos distintos $\{p'_0, p'_1, p'_2\}$ de la recta proyectiva $\mathbb{P}(E')$, podemos hacer lo mismo. Con ello obtenemos una base $\mathcal{B}'$ de E'.

Existe un único isomorfismo

$$\widehat{h} : E \to E'$$

que trasforma $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$. La aplicación proyectiva asociada a esta aplicación lineal es una homografía que transforma p_i en p'_i, para $i = 0, 1, 2$. Además es única al serlo $\widehat{h}$. ■

Observación 5.1.1. La demostración de la proposición anterior nos permite deducir que dadas dos referencias proyectivas $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{R}'$ de dos rectas proyectivas, existe una única homografía que transforma $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}'$. ♢

Veamos un ejemplo. Para ello recordemos primero que una homografía de la recta proyectiva en sí misma, tomando la misma referencia, puede definirse a través de coordenadas no homogéneas como

$$\frac{x'}{y'} = \theta' = \frac{a\frac{x}{y} + b}{c\frac{x}{y} + d} = \frac{a\theta + b}{c\theta + d} \shortparallel ad - bc \neq 0 \tag{5.1}$$

Ejemplo 5.1.1. Encontrar la homografía

$$h : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$$

que trasforma los puntos $\{(0:1), (1:0), (2:1)\}$ en los puntos $\{(1:1), (-1:1), (0:1)\}$.

Podemos resolver este ejercicio de varias formas. La primera consistiría en plantear las ecuaciones con la matriz asociada

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

y, sustituyendo los valores de los puntos dados, resolver el sistema de ecuaciones, cuyas incógnitas son a, b, c, d y ρ:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, esto puede resultar muy pesado. Si utilizamos la definición de homografía dada por la ecuación (5.1), el cáculo resulta mucho más llevadero. Así, para determinar la homografía basta hallar la expresión en coordenadas no homogéneas que la define, que se obtiene sustituyendo los valores proporcionados en la ecuación (5.1) y resolviendo el sistema. Observamos que el punto $(1 : 0)$ se transforma en $\theta = \infty$. Para resolver esta indeterminación, se multiplica la fracción arriba y abajo por y

$$\theta' = \frac{a\frac{x}{y} + b}{c\frac{x}{y} + d} = \frac{ax + by}{cx + dy} \text{ ıı } ad - bc \neq 0 \tag{5.2}$$

Así, las ecuaciones resultantes son

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{a0 + b1}{c0 + d1} = \frac{b}{d} \Rightarrow b = d \\ -1 &= \frac{a1 + b0}{c1 + d0} = \frac{a}{c} \Rightarrow a = -c \\ 0 &= \frac{a2 + b1}{c2 + d1} \Rightarrow 2a + b = 0 \end{aligned}$$

Por lo que, tomando $a = 1$, la homografía pedida viene dada por

$$\theta' = \frac{2 - \theta}{2 + \theta}$$

Nótese que no es necesario tener tanto cuidado con $\theta = \infty$. Si tenemos en cuenta que $\infty + b = \infty$ y que $\frac{\infty}{\infty} = 1$, el resultado es el mismo

$$\theta' = -1 = \frac{a\theta + b}{c\theta + d} = \frac{a\infty + b}{c\infty + d} = \frac{a\infty}{c\infty} = \frac{a}{c} \Rightarrow a = -c$$

Por tanto, a partir de ahora, daremos por buenos estos cálculos con ∞ en principio sin sentido. $\diamondsuit$

Encontrar una homografía de una recta proyectiva que lleve cuatro puntos distintos cualesquiera en otros cuatro no es tan sencillo. Para poder caracterizar esta propiedad empezaremos estudiando las características de una homografía que la cumpla.

Lema 5.1.2. *Sean* $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ *y* $\{p'_1, p'_2, p'_3, p'_4\}$ *ocho puntos distintos de la recta proyectiva* $\mathbb{P}(E)$ *respecto a la referencia* $\mathfrak{R}$. *Sea una homografía*

$$h : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$$

que cumple $h(\theta_i) = \theta'_i$ *para todo* $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, *donde* θ_i *es el parámetro no homogéneo de* p_i. *Entonces*

$$\frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_3 - \theta_2} : \frac{\theta_4 - \theta_1}{\theta_4 - \theta_2} = \frac{\theta'_3 - \theta'_1}{\theta'_3 - \theta'_2} : \frac{\theta'_4 - \theta'_1}{\theta'_4 - \theta'_2} \tag{5.3}$$

Demostración. Dado que h es una homografía de una recta proyectiva en sí misma, y hemos tomado la misma referencia, podemos escribir

$$\theta' = \frac{a\theta + b}{c\theta + d} \text{ ıı } ad - bc \neq 0$$

para determinados a, b, c y d. Así

$$\frac{\theta_3' - \theta_1'}{\theta_3' - \theta_2'} : \frac{\theta_4' - \theta_1'}{\theta_4' - \theta_2'} = \frac{\frac{a\theta_3+b}{c\theta_3+d} - \frac{a\theta_1+b}{c\theta_1+d}}{\frac{a\theta_3+b}{c\theta_3+d} - \frac{a\theta_2+b}{c\theta_2+d}} : \frac{\frac{a\theta_4+b}{c\theta_4+d} - \frac{a\theta_1+b}{c\theta_1+d}}{\frac{a\theta_4+b}{c\theta_4+d} - \frac{a\theta_2+b}{c\theta_2+d}}$$

Operando se obtiene

$$\frac{\theta_3' - \theta_1'}{\theta_3' - \theta_2'} : \frac{\theta_4' - \theta_1'}{\theta_4' - \theta_2'} = \frac{\frac{(\theta_3-\theta_1)(ad-bc)}{(c\theta_3+d)(c\theta_1+d)}}{\frac{(\theta_3-\theta_2)(ad-bc)}{(c\theta_3+d)(c\theta_2+d)}} : \frac{\frac{(\theta_4-\theta_1)(ad-bc)}{(c\theta_4+d)(c\theta_1+d)}}{\frac{(\theta_4-\theta_2)(ad-bc)}{(c\theta_4+d)(c\theta_2+d)}} = \frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_3 - \theta_2} : \frac{\theta_4 - \theta_1}{\theta_4 - \theta_2}$$

■

Por tanto, toda homografía de una recta proyectiva en sí misma que lleve cuatro puntos distintos a otros cuatro, mantiene invariante el cociente

$$\frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_3 - \theta_2} : \frac{\theta_4 - \theta_1}{\theta_4 - \theta_2}$$

Conviene entonces dar un nombre a dicho cociente.

Definición 5.1.1 (Razón doble)**.** Sean cuatro puntos diferentes de una recta proyectiva $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, se define su *razón doble* como el cociente

$$\{p_1, p_2; p_3, p_4\} = \{\theta_1, \theta_2; \theta_3, \theta_4\} = \frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_3 - \theta_2} : \frac{\theta_4 - \theta_1}{\theta_4 - \theta_2} \tag{5.4}$$

donde θ_i es el parámetro no homogéneo de p_i respecto a una referencia $\mathfrak{R}$ de la recta proyectiva.

Observación 5.1.2. Dado que θ_i es el parámetro no homogéneo de p_i, el cálculo de la razón doble se puede hacer también usando coordenadas homogéneas. Si $p_i = (x_i, y_i)$, entonces, sustituyendo en la definición y operando

$$\{p_1, p_2; p_3, p_4\} = \frac{\frac{x_3}{y_3} - \frac{x_1}{y_1}}{\frac{x_3}{y_3} - \frac{x_2}{y_2}} : \frac{\frac{x_4}{y_4} - \frac{x_1}{y_1}}{\frac{x_4}{y_4} - \frac{x_2}{y_2}} = \frac{(x_3y_1 - x_1y_3)/y_1y_3}{x_3y_2 - x_2y_3)/y_3y_2} : \frac{(x_4y_1 - x_1y_4)/y_4y_1}{(x_4y_2 - x_2y_4)/y_4y_2}$$

la razón doble se puede escribir como

$$\{p_1, p_2; p_3, p_4\} = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & x_2 \\ y_3 & y_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_4 & x_1 \\ y_4 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_4 & x_2 \\ y_4 & y_2 \end{vmatrix}} \tag{5.5}$$

Observemos que, como los puntos son distintos las columnas de los determinantes no son proporcionales y, por tanto, ningún determinante es nulo. ♢

Con esta definición el lema se traduce en que toda homografía de una recta proyectiva en sí misma, que lleve cuatro puntos diferentes cualesquiera en otros cuatro, mantiene invariante la razón doble. Consecuencia de este resultado es el corolario siguiente.

Corolario 5.1.3. *Dada una homografía de la recta en sí misma y dados cuatro puntos distintos cualesquiera* $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$*, se cumple*

$$\{p_1, p_2; p_3, p_4\} = \{h(p_1), h(p_2); h(p_3), h(p_4)\} \tag{5.6}$$

Demostración. Dado que $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ son distintos y una homografía es una aplicación proyectiva inyectiva, los puntos $\{h(p_1), h(p_2), h(p_3), h(p_4)\}$ son distintos.

Por otro lado, denotando $p_i = (x_i : y_i)$ y $h(p_i) = (x_i' : y_i')$ y teniendo en cuenta que toda homografía se puede describir con la relación

$$\theta' = \frac{a\theta + b}{c\theta + d} \;\shortparallel\; ad - bc \neq 0$$

para determinados a, b, c y d, donde $\theta = \frac{x_i}{y_i}$ y $\theta' = \frac{x'_i}{y'_i}$, es obvio que $h(\theta_i) = h(\frac{x_i}{y_i}) = \frac{x'_i}{y'_i} = \theta'_i$ para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Del lema anterior se deduce que

$$\{p_1, p_2; p_3, p_4\} = \{h(p_1), h(p_2); h(p_3), h(p_4)\}$$

■

Observación 5.1.3. Observamos que la razón doble está bien definida, es decir, que no depende de la referencia elegida. En efecto, dada otra referencia $\mathfrak{R}'$ de la recta sabemos que existe una única homografía que trasforma la referencia inicial en $\mathfrak{R}'$, y, por tanto, relaciona la coordenada θ respecto a la referencia inicial y la coordenada θ' respecto a $\mathfrak{R}'$. Al ser una homografía de la recta en sí misma la razón doble de sus imágenes, razón doble respecto a $\mathfrak{R}'$, es igual a la razón doble respecto a la referencia inicial. ♢

Hasta ahora hemos establecido varias relaciones entre las homografías y la razón doble. Hemos visto que, no solo las homografía de una recta proyectiva en sí misma que transforma cuatro puntos distintos cualesquiera en otros cuatro conserva la razón doble, sino todas las homografías de una recta proyectiva en sí misma. El recíproco de ambos también es cierto. Sin embargo, en vez de demostrarlo para este caso particular, generalicemos lo resultados a homografías de una recta proyectiva $\mathbb{P}(E)$ a otra recta $\mathbb{P}(E')$.

5.2. Propiedades

La razón doble ha sido descrita respecto a una referencia $\mathfrak{R}$ arbitraria de la recta proyectiva, por lo que esta puede ser calculada respecto a cualquier referencia. Si dados cuatro puntos distintos $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ de $\mathbb{P}(E)$ tomamos como referencia de la recta $\mathfrak{R} = \{p_1, p_2, p_3\}$, lo cual es posible al ser diferentes, entonces las coordenadas homogéneas de los cuatro puntos pasan a ser

$$\{(1:0), (0:1), (1:1), (\alpha:\beta)\}$$

donde $(\alpha : \beta)$ son las coordenadas homogéneas de p_4 respecto a la referencia. Si calculamos la razón doble obtendríamos que

$$\{p_1, p_2; p_3, p_4\} = \{(1:0), (0:1); (1:1), (\alpha:\beta)\} = \{\infty, 0; 1, \frac{\alpha}{\beta}\} = \frac{\alpha}{\beta} \tag{5.7}$$

Surge así una nueva definición de razón doble.

Definición 5.2.1. (Razón doble) La razón doble de cuatro puntos distintos de una recta proyectiva es la coordenada no homogénea del cuarto punto respecto a la referencia formada por los tres primeros.

Una vez dada esta definición podemos generalizar los resultados obtenidos en el apartado anterior. Para ello hagamos antes una pequeña observación.

Observación 5.2.1. Sea $g : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$ la única homografía que trasforma $\mathfrak{R} = \{a, b, c\}$ en $\mathfrak{R}' = \{a', b', c'\}$. Sea un punto $p \in \mathbb{P}(E)$ cuyas coordenadas respecto a la referencia $\mathfrak{R}$ son $p = (\alpha : \beta)_{\mathfrak{R}}$. Indicaremos un vector representante de un punto q por $\vec{q}$. Entonces, teniendo en cuenta que $\widehat{g}$ es lineal, se tiene que

$$g(p) = [\widehat{g}(\vec{p})] = \left[\widehat{g}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b})\right] = \left[\alpha\widehat{g}(\vec{a}) + \beta\widehat{g}(\vec{b})\right] = \left[\alpha\vec{a}' + \beta\vec{b}'\right] = (\alpha : \beta)_{\mathfrak{R}'}$$

Por tanto, las coordenadas de p respecto a la referencia $\mathfrak{R}$ son las mismas que las coordenadas de $g(p)$ respecto a $\mathfrak{R}'$. ♢

Teorema 5.2.1. *Sean $\mathbb{P}(E)$ y $\mathbb{P}(E')$ dos rectas proyectivas, a, b, c, d puntos distintos de $\mathbb{P}(E)$ y a', b', c', d' puntos distintos de $\mathbb{P}(E')$. Entonces, existe una homografía $h : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$ que transforma los puntos a, b, c, d en los puntos a', b', c', d' respectivamente si y solo si*

$$\{a, b; c, d\} = \{a', b'; c', d'\}$$

Demostración. Tomamos como referencia de $\mathbb{P}(E)$ los puntos $\mathfrak{R} = \{a, b, c\}$ y como referencia de $\mathbb{P}(E')$ los puntos $\mathfrak{R}' = \{a', b', c'\}$. Sean $\rho(d)$ las coordenadas de d respecto a $\mathfrak{R}$ y $\rho'(d')$ las coordenadas de d' respecto a $\mathfrak{R}'$. Por la definición anterior de razón doble sabemos que

$$\{a, b; c, d\} = \rho(d) \qquad y \qquad \{a', b'; c', d'\} = \rho'(d')$$

Sea $g : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$ la única homografía que trasforma $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}'$. Entonces, por la observación 5.2.1, las coordenadas de d respecto a $\mathfrak{R}$ son las mismas que las coordenadas de $g(d)$ respecto a $\mathfrak{R}'$. Siguiendo nuestra notación $\rho(d) = \rho'(g(d))$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que existe una homografía $h : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$ que transforma los puntos a, b, c, d en los puntos a', b', c', d' respectivamente. Entonces $\rho'(d') = \rho'(h(d))$. Dado que g es única y h transforma a en a', b en b' y c en c', es decir $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}'$, se tiene que $h = g$. Con ello
$\rho'(d') = \rho'(h(d)) = \rho'(g(d)) = \rho(d)$, dándose así la igualdad de razones dobles.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que se da la igualdad de razones dobles. Entonces $\rho'(d') = \rho(d) = \rho'(g(d))$. Por tanto, las coordenadas de d' respecto a $\mathfrak{R}'$ son las mismas que las coordenadas de $g(d)$ respecto a la misma referencia. Esto implica que $g(d) = d'$, con lo que g es la homografía h que buscábamos. ■

Observemos que en la demostración hemos concluido que $h = g$. Esto nos permite reenunciar el teorema de la siguiente forma.

Teorema 5.2.1 Sea $h : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$ la única homografía que transforma a, b, c en a', b', c'. Entonces

$$h(d) = d' \Leftrightarrow \{a, b; c, d\} = \{a', b'; c', d'\}. \tag{5.8}$$

Corolario 5.2.2. *Las homografías de rectas proyectivas son las biyecciones que conservan la razón doble.*

Demostración. Demostremos primero que dada una homografía de rectas proyectivas, esta preserva la razón doble.

Sea $h : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$ una homografía de rectas proyectivas y denotemos $h(a) = a'$, $h(b) = b'$, $h(c) = c'$. Es obvio que acabamos de construir la única homografía que transforma a, b, c en a', b', c'. Tomando $d' = h(d)$, por el teorema anterior, se tiene que $\{a, b; c, d\} = \{a', b'; c', d'\}$.

Demostremos el recíproco. Dada $g : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$ biyección que conserva la razón doble, denotamos $g(a) = a'$, $g(b) = b'$, $g(c) = c'$. Sea por otro lado $h : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$ la única homografía de rectas que transforma a, b, c en a', b', c'. Como g conserva la razón doble, si denotamos $g(d) = d'$ se tiene que $\{a, b; c, d\} = \{g(a), g(b), g(c), g(d)\} = \{a', b'; c', d'\}$. Por tanto, aplicando el teorema anterior esto implica que $h(d) = d' = g(d)$. Como d es arbitrario, se tiene que $h = g$, con lo cual g es homografía de rectas. ■

Como se puede observar en la demostración, la razón doble nos permite definir homografías. Veamos un ejemplo para que esto quede claro.

Ejemplo 5.2.1. Encontrar una homografía $h : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ tal que

$$\begin{array}{rrcr} h: & 0 & \to & \infty \\ & 1 & \to & -1 \\ & -1 & \to & 0 \end{array}$$

Se tiene que h es la única homografía que lleva el 0 al ∞, el 1 al -1 y el -1 al 0. Nótese que se puede enunciar el teorema anterior con las coordenadas no homogéneas de los puntos sin problema alguno. Por tanto podemos aplicar el corolario, según el cual h, al ser una homografía de rectas proyectivas, conserva la razón doble, es decir

$$\{0, 1; -1, \theta\} = \{h(0), h(1); h(-1), h(\theta) = \theta'\} = \{\infty, -1; 0; \theta'\}$$

Desarrollando las razones dobles

$$\frac{0+1}{0-\theta} : \frac{0-\theta}{1-\theta} = \frac{\infty-0}{-1-0} : \frac{\infty-\theta'}{-1-\theta'}$$

Dado que h es una homografía de $\mathbb{P}^1$ en $\mathbb{P}^1$, basta encontrar la transformación de möebius para describirla por completo, es decir la relación entre θ y θ'. Para ello operamos y despejamos, obteniendo

$$\theta' = \frac{-\theta-1}{2\theta}$$

Por tanto, la homografía h tal que $\theta' = \frac{-\theta-1}{2\theta}$ es la homografía pedida. ♢

5.3. Simetrías de la razón doble

La razón doble ha sido descrita como un cociente de parámetros no homogéneos ordenados de la siguiente manera $\{\theta_1, \theta_2; \theta_3, \theta_4\}$. Cabe preguntarse si las 24 posibles permutaciones de las coordenadas θ_i darán la misma razón doble.

A continuación se dará el valor de la razón doble resultante de permutar las coordenadas no homogéneas, respecto a $\{\theta_1, \theta_2; \theta_3, \theta_4\}$. Dado que para probar dichos resultados basta con aplicar la definición de razón doble, desarrollar el cociente y simplificar, no se harán las demostraciones.

Dada la razón doble $\{\theta_1, \theta_2; \theta_3, \theta_4\}$, se tiene que:

- Permutar la primera y la segunda componente por un lado, y la tercera y la cuarta por otro, mantiene invariante la razón doble:

$$\{\theta_1, \theta_2; \theta_3, \theta_4\} = \{\theta_2, \theta_1; \theta_4, \theta_3\}$$

- Permutar el par θ_1, θ_2 con el par θ_3, θ_4, mantiene invariante la razón doble:

$$\{\theta_1, \theta_2; \theta_3, \theta_4\} = \{\theta_3, \theta_4; \theta_1, \theta_2\}$$

- Si $\{\theta_1, \theta_2; \theta_3, \theta_4\} = \lambda$, entonces:

$$\begin{aligned}
\{\theta_1, \theta_3; \theta_2, \theta_4\} &= 1-\lambda \\
\{\theta_2, \theta_1; \theta_3, \theta_4\} &= \frac{1}{\lambda} \\
\{\theta_2, \theta_3; \theta_1, \theta_4\} &= 1-\frac{1}{\lambda} \\
\{\theta_3, \theta_1; \theta_2, \theta_4\} &= \frac{1}{1-\lambda} \\
\{\theta_3, \theta_2; \theta_1, \theta_4\} &= \frac{\lambda}{1-\lambda}
\end{aligned}$$

Esto nos da las 24 reordenaciones posibles. Resulta entonces que si $\{\theta_1, \theta_2; \theta_3, \theta_4\} = \lambda$, los valores que aparecen al efectuar todas las permutaciones son

$$\rho, 1-\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

Definición 5.3.1 (Cuaterna armónica)**.** Diremos que p_1, p_2, p_3, p_4 es una *cuaterna armónica*, o que el par p_1, p_2 separa armónicamente al par p_3, p_4, si su razón doble es -1.

$$\{p_1, p_2; p_3, p_4\} = -1 \tag{5.9}$$

Si cuatro puntos de una recta proyectiva son una cuaterna armónica, entonces es posible hacer la siguiente construcción geométrica, donde $p_1 p_{arbitrario}$, $p_2 p_{arbitrario}$ y $p_1 p_{arbitrario1}$ son rectas arbitrarias, por tanto también lo son los puntos $p_{arbitrario}$ y $p_{arbitrario1}$.

El recíproco también es cierto, como se muestra en la siguiente proposición.

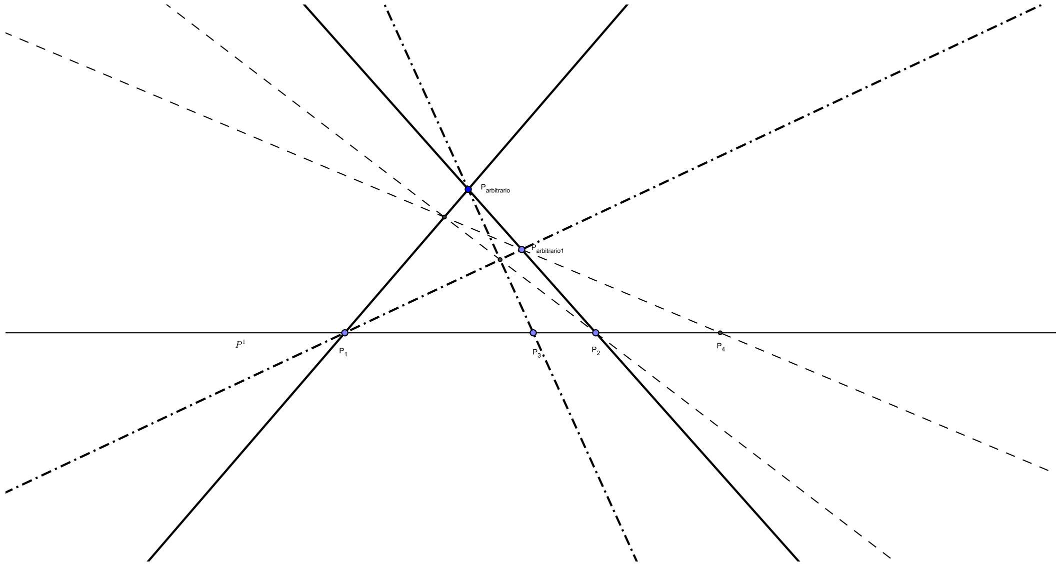


Figura 5.1: Cuaterna armónica

Proposición 5.3.1. *Dada la construcción geométrica mostrada en la figura 5.1, se tiene que* $\{p_1, p_2; p_3, p_4\} = -1$.

Demostración. Tomamos como referencia los puntos $p_1, p_2, p_{arbitario}$ y el punto de corte de las rectas $p_1 p_{arbitrario1}$ y $p_3 p_{arbitrario}$, que denotaremos E. Esto es posible ya que, como se observa en la figura, son proyectivamente independientes.

$$\mathfrak{R} = \{p_1, p_2, p_{arbitrario}; E\}$$

Debemos entonces expresar los puntos p_1, p_2, p_3 y p_4 respecto a esta referencia. Los primeros son sencillos, $p_1 = (1:0:0)$ y $p_2 = (0:1:0)$.

Por otro lado, p_3 es la intersección de las rectas $Ep_{arbitario}$ y $p_1 p_2$. Estas pueden ser descritas por las ecuaciones

$$Ep_{arbitrario} := [\alpha(1,1,1) + \beta(0,0,1) \shortparallel \alpha, \beta \in \mathbb{R}] = (1:1:1+\theta) \cup \{p_{arbitrario}\} \shortparallel \theta \in \mathbb{R}$$

$$p_1 p_2 : z = 0$$

siendo por tanto el punto de corte

$$p_3 = (1:1:0)$$

De la misma forma podemos calcular p_4 como la intersección de las rectas $p_1 p_2$ y $Dp_{arbitrario1}$, donde D es el punto de corte de las rectas $p_1 p_{arbitrario}$ y $p_2 E$. Por tanto, para calcular las coordenadas de p_4 respecto a la referencia $\mathfrak{R}$, primero debemos obtener las de D y las de $p_{arbitrario1}$.

Comencemos con D. Las rectas de las cuales es intersección pueden describirse a través de

$$p_2 E : [\alpha(1,1,1) + \beta(0,1,0) \shortparallel \alpha, \beta \in \mathbb{R}] = (1:1+\theta:1) \cup \{p_2\} \shortparallel \theta \in \mathbb{R}$$

$$p_1 p_{arbitrario} : y = 0$$

por lo que el punto buscado es

$$D = (1:0:1)$$

Para calcular $p_{arbitrario1}$ tenemos que las rectas correspondientes vienen dadas por

$$p_1 E : [\alpha(1,1,1) + \beta(1,0,0) \shortparallel \alpha, \beta \in \mathbb{R}] = (1+\theta:1:1) \cup \{p_1\} \shortparallel \theta \in \mathbb{R}$$

$$p_2 p_{arbitrario} : x = 0$$

siendo el punto de corte

$$p_{arbitrario1} = (0:1:1)$$

Podemos ya calcular las coordenadas de p_4 como la intersección de

$$Dp_{arbitrario1} : [\alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1) \shortparallel \alpha, \beta \in \mathbb{R}] = (1 : \theta : 1 + \theta) \cup \{p_{arbitrario1}\} \shortparallel \theta \in \mathbb{R}$$

$$p_1p_2 : z = 0$$

Con ello obtenemos que

$$p_4 = (1 : -1 : 0)$$

Una vez hecho esto basta comprobar que la razón doble de p_1, p_2p_3 y p_4 es -1. Para ello haremos uso de resultados del apartado de cálculo de razones dobles, ya que de momento no hemos visto como calcular la razón doble de puntos que no pertenecen a una recta proyectiva, como es el caso.

Entonces, como veremos más adelante

$$\{p_1, p_2; p_3, p_4\} = \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0); (1 : 1 : 0), (1 : -1 : 0)\} = \{\infty, 0; 1, -1\} = -1 \tag{5.10}$$

■

Dado que en esta construcción las rectas $p_1p_{arbitrario}$, $p_2p_{arbitrario}$ y $p_1p_{arbitrario1}$ y los puntos $p_{arbitrario}$ y $p_{arbitrario1}$ son arbitrarios, elijamos los que elijamos vamos a obtener siempre el mismo punto p_4.

El orden de la cuaterna armónica es relativamente importante ya que, aunque algunas permutaciones cambian su valor, las reordenaciones

$$\{p_2, p_1; p_4, p_3\} \quad , \quad \{p_3, p_4; p_1, p_2\} \quad , \quad \{p_2, p_1; p_3, p_4\}$$

siguen dando como resultado -1.

Es importante mencionar varias cosas acerca de esta construcción. El punto p_3 está entre el punto p_1 y el punto medio entre p_1 y p_2 si y solo si el punto p_4 está a la izquierda de p_1. Por el contrario, p_3 está entre el punto medio y el punto p_2 si y solo si el punto p_4 está a la derecha de p_2. Si el punto p_3 no está entre p_1 y p_2, entonces lo estará p_4. Por último, p_3 está en el punto medio si y solo si p_4 está en el infinito. Esto significa que la recta $p_4p_{arbitrario1}$ es paralela a la recta donde se encuentran los puntos.

Observemos que si, al calcular la razón doble tomamos como referencia los puntos p_1, p_2, p_3, entonces, necesariamente, $\theta_4 = -1$.

$$\{p_1, p_2; p_3, p_4\} = \{\infty, 0, 1, -1\} = -1$$

Apéndice A

Álgebra Lineal

Este apéndice está especialmente pensado para los alumnos de los dobles grados, que, a fecha de escribir este texto, cursan la asignatura de geometría lineal y la de álgebra lineal con un año de separación.

Este hecho añade a la presente materia un plus de dificultad, pues hace echar mano constantemente de la bibliografía de primer curso, que, en muchas ocasiones, no es sufiente, por ejemplo en el estudio de la *dualidad*.

Algo que merece la pena recalcar es que aquí únicamente se incluyen los resultados más elementales acerca de dualidad, ya que sabemos por experiencia que los resultados más profundos se omiten en un primer curso de álgebra lineal (a pesar de ser harto necesarios aquí). Es por esta razón, no hacer visitar un apéndice al lector sin necesidad, que estos conceptos gozan de sección propia en el texto ordinario.

El objetivo de este anexo no es otro que recopilar los conceptos y resultados que consideramos totalmente imprescindibles para seguir el texto, no obstante, no pretende ser, ni mucho menos, tan completo o rico en ejemplos como otros títulos específicos de álgebra lineal que se recomiendan en la bibliografía.

A.1. Coordenadas en Espacios Vectoriales

El objetivo de esta sección es servir como pequeño área de repaso a la hora de entrar en conceptos íntimamente ligados con los cambios de base en espacios vectoriales. Un ejemplo claro de esto son los cambios de referencia proyectiva.

Sea E un $\mathbb{K}$–espacio vectorial de dimensión finita n.

Asimismo, consideraremos la base $\mathcal{B} := \{b_1, \dots, b_n\}$ de E.

Proposición A.1.1 (Escritura Única de un Vector)**.** *Dado un vector $u \in E$, este tiene una escritura **única** como combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{B}$.*

Demostración. La existencia de esta escritura es evidente, por ser $\mathcal{B}$ una base de E, y, por tanto, un sistema de generadores. En consecuencia, lo único que hay que probar es la unicidad de dicha combinación lineal. En efecto, supongamos que hubiera dos:

$$u = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n = \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n$$

Pasando todo al segundo miembro y sacando factor común obtenemos:

$$(\alpha_1 - \beta_1)b_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)b_n = 0$$

Como los vectores de la base son linealmente independientes, se tiene que todos los coeficientes deben ser nulos. Es decir:

$$\alpha_i - \beta_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

De donde se sigue la necesaria igualdad de ambas escrituras. ∎

Observación A.1.1 (Coordenadas de un Vector Respecto de una Base)**.** Es evidente que, **fijada una base**, todo vector queda caracterizado por su escritura como combinación lineal de los vectores de dicha base. Es por este motivo que, dado un vector $u \in E$ cualquiera, emplearemos la siguiente notación:

$$u = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n \overset{\text{not.}}{=} (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}$$

A la tupla de escalares $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ la denominaremos *coordenadas de u respecto de la base $\mathcal{B}$.* $\diamondsuit$

Por supuesto, si decidimos tomar otra base $\mathcal{B}'$, las coordenadas de los vectores respecto de la base $\mathcal{B}'$ serán, en general, distintas a las coordenadas respecto de $\mathcal{B}$.

Un problema interesante, y que resolveremos en A.1.1, consiste en encontrar una relación o ligadura entre ambas coordenadas.

Observación A.1.2 (Coordenadas del i–ésimo Vector de la Base)**.** Dado el vector b_i, es interesante notar que sus coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}$, de la que, recordemos, es el i–ésimo vector, son:

$$b_i = (0, \ldots, \overbrace{1}^{i}, \ldots, 0)_{\mathcal{B}}$$

La comprobación es inmediata y se deja al lector. $\diamondsuit$

A.1.1. Matriz de Cambio de Base

Sean $\mathcal{B} := \{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\mathcal{B}' := \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ dos bases de un espacio vectorial E. En estas condiciones, dado un vector cualquiera $u \in E$, podemos escribirlo de dos maneras distintas:

$$u = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n \tag{A.1}$$

$$u = \beta_1 e'_1 + \cdots + \beta_n e'_n \tag{A.2}$$

Escribiendo cada vector de $\mathcal{B}'$ como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$, es decir, en coordenadas de $\mathcal{B}$ obtenemos (los exponentes son símplemente superíndices):

$$e'_i = \gamma_1^i e_1 + \cdots + \gamma_n^i e_n \tag{A.3}$$

Uniendo las ecuaciones se tiene:

$$\begin{aligned} u &= \beta_1(\gamma_1^1 e_1 + \cdots + \gamma_n^1 e_n) + \cdots + \beta_n(\gamma_1^n e_1 + \cdots + \gamma_n^n e_n) = \\ &= (\beta_1\gamma_1^1 e_1 + \cdots + \beta_1\gamma_n^1 e_n) + \cdots + (\beta_n\gamma_1^n e_1 + \cdots + \beta_n\gamma_n^n e_n) = \\ &= (\beta_1\gamma_1^1 + \cdots + \beta_n\gamma_1^n)e_1 + \cdots + (\beta_1\gamma_n^1 + \cdots + \beta_n\gamma_n^n)e_n \end{aligned} \tag{A.4}$$

La traducción de esto a términos de coordenadas nos arroja (los corchetes son símplemente corchetes para una mejor visualización):

$$u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{B}} = ([\beta_1\gamma_1^1 + \cdots + \beta_n\gamma_1^n], \ldots, [\beta_1\gamma_n^1 + \cdots + \beta_n\gamma_n^n])_{\mathcal{B}} \tag{A.5}$$

Esto, por comodidad, lo interpretaremos como producto de matrices (compruébese):

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1^1 & \cdots & \gamma_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_n^1 & \cdots & \gamma_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

Usando una notación más compacta:

$$X_{\mathcal{B}} = P X_{\mathcal{B}'} \tag{A.7}$$

Obsérvese que la matriz P es **cuadrada** e **invertible**, por ser la matriz formada al poner por columnas los vectores de la base $\mathcal{B}'$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

Por esta razón, podemos despejar $X_{\mathcal{B}'}$, obteniendo la relación inicialmente buscada:

$$X_{\mathcal{B}'} = P^{-1} X_{\mathcal{B}} \tag{A.8}$$

A la matriz P^{-1} se la denomina *matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$*. Es intersante comprobar que su inversa es la matriz de cambio entre las mismas bases en sentido contrario.

Para cerrar la sección diremos, como curiosidad, que toda matriz invertible constituye una matriz de cambio entre ciertas bases.

A.2. Ecuaciones de Subespacios

El objetivo de esta sección será caracterizar un subespacio vectorial por el conjunto de soluciones de una ecuación o conjunto de ecuaciones (siempre lineales y homogéneas). A estas ecuaciones las denominaremos *ecuaciones cartesianas*. Son de importancia capital en el estudio de la dualidad.

A.2.1. Existencia de las Ecuaciones Cartesianas

Sea E un espacio vectorial de dimensión n y sea U un subespacio vectorial cualquiera de E. Sea $\mathcal{B}_U := \{u_1, \ldots, u_r\}$ una base de U.

Ecuaciones Paramétricas

Sea $x \in U$, entonces podemos escribirlo tanto en coordenadas de $\mathcal{B}_U$ como en coordenadas de la base del espacio total $\mathcal{B}$. Es decir:

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n \tag{A.9}$$
$$x = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_r u_r \tag{A.10}$$

Usando los mismos trucos que utilizamos para cálculo de la matriz de cambio de base, podemos escribir los vectores de la base $\mathcal{B}_U$ como combinación lineal de los vectores del espacio total:

$$u_i = \gamma_1^i e_1 + \cdots + \gamma_n^i e_n \tag{A.11}$$

Sustituyendo y reagrupando:

$$\begin{aligned} x = \beta_1(\gamma_1^1 e_1 + \cdots + \gamma_n^1 e_n) + \cdots + \beta_r(\gamma_1^n e_1 + \cdots + \gamma_n^n e_n) = \\ = (\beta_1\gamma_1^1 e_1 + \cdots + \beta_1\gamma_n^1 e_n) + \cdots + (\beta_r\gamma_1^n e_1 + \cdots + \beta_r\gamma_n^n e_n) = \\ = (\beta_1\gamma_1^1 + \cdots + \beta_r\gamma_1^n)e_1 + \cdots + (\beta_1\gamma_n^1 + \cdots + \beta_r\gamma_n^n)e_n \end{aligned} \tag{A.12}$$

Expresado de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1^1 & \cdots & \gamma_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_n^1 & \cdots & \gamma_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \end{pmatrix} \tag{A.13}$$

Con una notación más compacta escribimos:

$$X = P\Lambda \tag{A.14}$$

Nótese que la matriz P no es cuadrada por lo general, además, es la matriz resultante de poner por columnas las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}_U$ en la base $\mathcal{B}$.

Reflexionemos un segundo acerca de lo que acabamos de hacer. Dado un subespacio U, queríamos caracterizarlo como el conjunto de vectores que verificaban un conjunto de ecuaciones.

Pues bien, dada una base de U, hemos conseguido una serie de ecuaciones tales que, dado un vector $u = (u_1, \ldots, u_n)_{\mathcal{B}} \in E$, nos escupen un sistema de n ecuaciones lineales con r incógnitas, que, en caso de resultar ser incompatible nos avisa de que $u \notin U$, y en caso contrario, tras la resolución del sistema obtenemos las coordenadas de u en la base B_U.

Sin embargo, esto se puede afinar un poco más todavía. Es por eso que en el siguiente apartado se estudian las coordenadas cartesianas o implícitas.

Nótese que el camino que hemos hecho también es de vuelta, ya que, dadas unas ecuaciones paramétricas de un subespacio, podemos hallar una base del mismo, basta tomar las columnas de la matriz de coeficientes.

De momento tenemos:

$$\boxed{\text{BASE}} \rightleftarrows \boxed{\text{EC. PARAMÉTRICAS}}$$

Ecuaciones Cartesianas o Implícitas

Como dijimos en el apartado anterior, las ecuaciones paramétricas son un gran paso, pero deben afinarse un poco más, pues aún no son un conjunto de ecuaciones lineales homogéneas que caractericen por si solas al subespacio U.

A continuación daremos dos métodos para hallar las ecuaciones cartesianas a partir de las ecuaciones paramétricas. A uno de ellos le bautizaremos cariñosamente como "método ortopédico".

Método Ortopédico Como ya aventuramos en el apartado anterior, si insertamos un vector $x \in U$ a las ecuaciones $X = P\Lambda$, se nos remitía a un sistema de ecuaciones lineales compatible determinado.

Esto quiere decir, por el teorema de Rouché–Frobenius que:

$$\mathrm{rg}(P|X) = \mathrm{rg}(P)$$

Por ende ninguna submatriz cuadrada de la matriz ampliada $(P|X)$ es regular, es decir, todas tienen determinante nulo.

Esto es maravilloso, puesto que proporciona un conjunto de ecuaciones lineales homogéneas (nunca podrán ser no lineales ya que las incógnitas se encuentran en la misma columna de la matriz ampliada).

Observaciones Dicho lo cual, si $x \in U$, insertando el vector en las ecuaciones obtenidas, las deberá verificar a la fuerza, con lo que lo hemos conseguido, hemos caracterizado a un subespacio mediante el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales.

Para realizar el camino de vuelta, es decir, deducir unas ecuaciones paramétricas a partir de unas implícitas, basta resolver el sistema de ecuaciones homogéneo (cosa siempre posible).

Con lo que tenemos:

$$\boxed{\text{BASE}} \rightleftarrows \boxed{\text{EC. PARAMÉTRICAS}} \rightleftarrows \boxed{\text{EC. CARTESIANAS}}$$

Antes de meternos con el segundo método (que aligera los cálculos), necesitamos ver la relación que existe entre el número de ecuaciones cartesianas y la dimensión del subespacio al que caracterizan.

Proposición A.2.1 (Ecuaciones Cartesianas y Dimensión)**.** *Sea U un subespacio vectorial de dimensión r de E, el número de ecuaciones cartesianas esenciales que le caracteriza es igual a su codimensión.*

Demostración. Dado un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales, para que su conjunto de soluciones dependa de r parámetros, es decir, para que obtenegamos unas ecuaciones paramétricas con r incógnitas, debe haber exactamente $n - r$ "ecuaciones esenciales". ■

Método de Eliminación de Parámetros Para obtener unas ecuaciones cartesianas a partir de unas ecuaciones paramétricas, basta interpretar a las ecuaciones paramétricas como la solución al sistema homogéneo de ecuaciones lineales que queremos encontrar. Es decir, deberemos aplicar el algoritmo de Gauss–Jordan al revés.

A.3. Dualidad

Sea E un $\mathbb{K}$–espacio vectorial de dimensión n.

Definición A.3.1 (Espacio Dual)**.** Se llama *espacio dual* de E al conjunto todas de las aplicaciones lineales que nacen en E y mueren en $\mathbb{K}$. Es decir:

$$E^* := \{f \in \mathrm{Hom}(E, \mathbb{K})\}$$

A las aplicaciones lineales que conforman el espacio dual se las denomina *formas lineales.*

Nótese que si E^* recibe el nombre de "espacio", es porque se lo merece, es decir, E^* tiene estructura de espacio vectorial (la comprobación es inmediata).

A continuación calculamos de manera inmediata la dimensión del espacio dual.

Lema A.3.1 (Dimensión del Espacio Dual)**.** $\dim(E) = \dim(E^*)$

Demostración. contenidos... ∎

Continuemos definiendo varios conceptos imprescindibles del espacio dual.

Definición A.3.2 (Anulador de un Subconjunto)**.** Sea S un subconjunto de E, denominamos *anulador de* S al conjunto de las formas lineales tales que anulan todos los vectores de S. Es decir:

$$S^\perp = \{f \in E^* \shortparallel f(u) = 0 \ \forall u \in S\}$$

Es un ejercicio de cálculo rutinario la demostración de que el anulador de un subespacio de E es un subespacio de E^*.

Una propiedad interesante de los anuladores es que el anulador de un subconjunto S, coincide con el anulador de la variedad lineal engendrada por S. Veámoslo.

Lema A.3.2 (Anuladores y Variedades Engendradas)**.** *Sea S un subconjunto arbitrario no vacío de E, entonces:*

$$S^\perp = \mathcal{L}(S)^\perp$$

Demostración. $\boxed{\subset}$ Consideremos una forma lineal $f \in S^\perp$, como todo vector de $x \in \mathcal{L}(S)$ se escribe de la forma $x = \alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_r s_r$, está claro que, usando la linealidad de f, $f(x) = 0$.

$\boxed{\supset}$ Como $S \subset \mathcal{L}(S)$, toda forma lineal que anule los vectores de $\mathcal{L}(S)$ también anulará a los vectores de S.

∎

Se presenta a continuación un resultado importante en el estudio de la dualidad. Se incluye aquí por poseer una demostración que solo aportaría ruido en el texto principal. A pesar de parecer trivial, a mi entender, no lo es tanto.

Proposición A.3.3 (Criterio de Equivalencia de Ecuaciones Homogéneas)**.** *Dadas dos ecuaciones lineales homogéneas equivalentes:*

$$A \equiv a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$
$$B \equiv b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = 0$$

Entonces son múltiplos la una de la otra, es decir:

$$b_i = \lambda a_i \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Demostración. Supongamos que no.

Cada ecuación tendrá una matriz fila asociada:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

Por definición de "equivalencia por filas", estas dos matrices serán equivalentes por filas si y solo si una es múltiplo de la otra, como esto no pasa, las matrices no son equivalentes por filas y por ende tendrán distinta forma normal de Hermite por filas.

$$A \equiv H_A^f = \begin{pmatrix} 1 & a_2' & \cdots & a_n' \end{pmatrix}$$
$$B \equiv H_B^f = \begin{pmatrix} 1 & b_2' & \cdots & b_n' \end{pmatrix}$$

Estas matrices inducen sendas ecuaciones lineales equivalentes a la primera y segunda ecuación respectivamente.

Como $H_A^f \neq H_B^f$ existe al menos un $i \in \{2, \ldots, n\}$ tal que $a_i' \neq b_i'$. Supongamos sin pérdida de generalidad (pues siempre podemos renombrar y recolocar incógnitas) que:

$$a_i' = b_i' \ \forall i \in \{2, \ldots, r\}$$
$$a_j' \neq b_j' \ \forall j \in \{r+1, \ldots, n\}$$

Sea $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ una solución no trivial con las $n-r$ últimas componentes no nulas (esto siempre puede hacerse al depender la solución de la ecuación de $n-1$ parámetros) para la primera ecuación. Veámos que, en caso de ser solución de la segunda, ambas ecuaciones serían múltiplos la una de la otra (llegando así a un absurdo).

Por el momento tenemos:

$$B \equiv \alpha_1 + b_2'\alpha_2 + \cdots + b_n'\alpha_n = \xi$$

Sumamos la primera ecuación a la segunda y reagrupamos términos:

$$2\alpha_1 + 2a_2'\alpha_2 + \cdots + 2a_r'\alpha_r + \alpha_{r+1}(a_{r+1}' + b_{r+1}') + \cdots + \alpha_n(a_n' + b_n') = \xi + 0 = \xi$$

Con una notación más compacta:

$$2\alpha_1 + 2\sum_{i=2}^{r} a_i'\alpha_i + \sum_{j=r+1}^{n} (a_j' + b_j')\alpha_j = \xi$$

Tratemos de encontrar una expresión para ξ, partiendo de que:

$$A \equiv 2\alpha_1 + 2\sum_{i=2}^{r} a_i'\alpha_i + 2\sum_{j=r+1}^{n} a_j'\alpha_j = 0$$

Pasando el segundo término al otro lado:

$$2\alpha_1 + 2\sum_{i=2}^{r} a_i'\alpha_i = -2\sum_{j=r+1}^{n} a_j'\alpha_j$$

Sumando $\sum_{j=r+1}^{n}(a_j' + b_j')\alpha_i$ a ambos lados:

$$2\alpha_1 + 2\sum_{i=2}^{r} a_i'\alpha_i + \sum_{j=r+1}^{n} (a_j' + b_j')\alpha_j = -2\sum_{j=r+1}^{n} a_j'\alpha_j + \sum_{j=r+1}^{n} (a_j' + b_j')\alpha_j = \xi$$

Luego por fin, reagrupando:

$$\xi = \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_j(b_j' - a_j')$$

Recapitulemos. Teníamos que:

$$\alpha_1 + b_2'\alpha_2 + \cdots + b_n'\alpha_n = \xi$$

Si $\xi = 0$ tendríamos que:

$$B \equiv \alpha_1 + b_2'\alpha_2 + \cdots + b_n'\alpha_n \overset{\xi=0}{=} \alpha_1 + b_2'\alpha_2 + \cdots + b_n'\alpha_n - \xi =$$
$$= \alpha_1 + \sum_{i=2}^{r} a_i'\alpha_i + \sum_{j=r+1}^{n} b_j'\alpha_j - \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_j(b_j' - a_j') = \alpha_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k'\alpha_k = 0$$

Luego $b_k' = a_k' \ \forall j \in \{r+1, \ldots, n\}$, lo cual contradice que las formas normales de Hermite sean distintas. ■

Apéndice B

Mierdas varias

En este apéndice irán, de momento, los conceptos sin fundamentar (y mal explicados).

Comencemos con un ejemplo de ecuaciones paramétricas, completado con cierta interpretación del espacio proyectivo no formalizada aún.

Ejemplo B.0.1 (Parametrización de una Recta Concreta)**.** Dados los puntos $P = (1 : 2 : -1)$ y $Q = (0 : 1 : 3)$ se nos pide parametrizar la recta PQ. Siguiendo los pasos expuestos en este apartado, la ecuación paramétrica de la recta PQ queda:

$$PQ : \{(\theta : 2\theta + 1 : -\theta + 3) \mid\mid \theta \in \mathbb{P}^1\}$$

donde, cuando $\theta = \infty$, nos referimos al punto $P = (1 : 2 : -1)$.

Imaginemos que ahora queremos hacernos una idea de donde se encuentra esa recta en $\mathbb{R}^3$, es decir, queremos "pintar" los rayos de esa variedad proyectiva de dimensión uno. Para ello, debemos escoger un representante afín, y los rayos serán las rectas que vayan desde el $(0, 0, 0)$ hasta el punto de corte de los vectores representantes de la recta proyectiva con ese plano. Así, además, determinamos donde se encuentran los puntos del infinito del espacio proyectivo. Si elegimos el plano $z = 1$, entonces los puntos del infinito estarán en el plano xy.

Elegimos pues el plano $z = 1$ como representante afín. Para poder representar los rayos de nuestra recta proyectiva debemos determinar su punto de corte con el plano $z = 1$. Por ello dividimos entre z. Obtenemos así las ecuaciones

$$x = \frac{\theta}{-\theta + 3}, \quad y = \frac{2\theta + 1}{-\theta + 3}, \quad z = 1$$

Nótese que hay dos indeterminaciones. Cuando $\theta = \infty$, como ya dijimos, nos referimos al punto P, que al dividir entre z nos da el vector representante $(-1, -2, 1)$. Cuando $\theta = 3$, entonces $z = 0$ y nos vamos al plano xy, al infinito. $\diamondsuit$

Pasamos al apartado de ecuaciones implícitas, donde esta misma idea se utiliza para expresar una recta, y en la siguiente observación un plano, a partir de su ecuación implícita en coordenadas no homogéneas.

Observación B.0.1. Recordemos que, al describir una recta por sus ecuaciones paramétricas, lo hicimos a través de coordenadas homogéneas y no homogéneas. Se puede hacer lo mismo con la ecuación implícita. Observemos que cualquier punto de coordenadas (x, y) queda definido, salvo una constante de proporcionalidad, por la terna (z_0x, z_0y, z_0), con $z_0 \neq 0$. Asimismo, cualquier terna (z_0x, z_0y, z_0), con $z_0 \neq 0$, o sus proporcionales, determina un único punto de coordenadas $(x, y) = (\frac{z_0x}{z_0}, \frac{z_0y}{z_0})$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \hookrightarrow & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{P}(\mathbb{R}^3) = \mathbb{P}^2 \\ (x, y) & \to & (z_0x, z_0y, z_0) & \to & (z_0x : z_0y : z_0) \\ (\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) & & \longleftarrow & & (x : y : z) \end{array}$$

Por tanto, las coordenadas homogéneas (x, y, z) de la ecuación implícita pasan a ser las coordenadas no homogéneas $(X, Y) = (\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$, quedando así la ecuación de la recta

$$aX + bY + c = 0 \tag{B.1}$$

donde no están incluidos los puntos con $z = 0$.

$\diamondsuit$

Observación B.0.2. Recordemos que podíamos describir la recta a través de la ecuación implícita en coordenadas no homogéneas. En este caso, esto también es posible. Generalizando la observación B.0.1 a nuestro caso, es decir a $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$, la ecuación implícita del plano en coordenadas no homogéneas quedaría

$$aX + bY + cZ + d = 0 \tag{B.2}$$

donde

$$X = \frac{x}{t}; \qquad Y = \frac{y}{t}; \qquad Z = \frac{z}{t}$$

$\diamondsuit$