

# **Geometría Lineal**

Álvaro García Tenorio

Clara Isabel López González

16 de octubre de 2016

# Índice general

<b>1. Espacio Projectivo y Variedades Projectivas</b>	<b>3</b>
1.1. El Espacio Projectivo . . . . .	3
1.1.1. Primera Aproximación . . . . .	3
1.1.2. Segunda Aproximación . . . . .	3
1.1.3. Equivalencia de las Aproximaciones . . . . .	4
1.1.4. Proyección Canónica . . . . .	4
1.2. Variedades Projectivas . . . . .	4
1.2.1. Operaciones con Variedades Projectivas . . . . .	5
1.3. Dimensiones y Fórmula de Grassmann . . . . .	6
1.3.1. Dimensiones y Fórmula de Grassmann . . . . .	7
1.4. Referencias Projectivas . . . . .	8
1.4.1. Coordenadas Homogéneas . . . . .	8
1.4.2. Referencias Projectivas . . . . .	8
1.4.3. Base Asociada a una Referencia Projectiva . . . . .	9
1.5. Cambios de Referencia Projectiva . . . . .	11
1.6. El espacio dual . . . . .	12
1.6.1. Espacio projectivo dual . . . . .	14
1.7. Coordenadas de Subespacios Projectivos . . . . .	14
1.7.1. Rectas Projectivas . . . . .	14
1.7.2. Hiperplanos Projectivos . . . . .	15
1.7.3. Variedades projectivas . . . . .	16
1.7.4. El Teorema de Pappus . . . . .	18
1.8. Problemas . . . . .	19
<b>A. Álgebra Lineal</b>	<b>20</b>
A.1. Coordenadas en Espacios Vectoriales . . . . .	20
A.1.1. Matriz de Cambio de Base . . . . .	21
A.2. Ecuaciones de Subespacios . . . . .	22
A.2.1. Existencia de las Ecuaciones Cartesianas . . . . .	22
A.3. Dualidad . . . . .	24
A.3.1. Formas Lineales e Hiperplanos . . . . .	24
A.3.2. Dualidad Canónica . . . . .	25
A.3.3. Principio de Dualidad . . . . .	27

## Prefacio

Estas notas son una transcripción (reorganizada y con muchos añadidos) de las clases de la asignatura *Geometría Lineal*, impartidas por Antonio Valdés, y sus sustitutos, entre los que se contaban un esquizofrénico que no sabía por qué oía voces y un clon de Felipe González con pendiente, en el curso 2016–2017 a los cursos de tercero de los dobles grados de matemáticas e informática y matemáticas y física en la facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (UCM).

Se han incluido demostraciones que usualmente se dan por evidentes y algunas aclaraciones de otros textos que consideramos importantes para un correcto seguimiento de una asignatura como esta.

Consideramos un requisito indispensable para seguir estas notas haber entendido bien el álgebra lineal, no obstante, se incluye un anexo con los conocimientos que consideramos indispensables, para evitar que el lector tenga que desempolvar con demasiada frecuencia la bibliografía del primer curso.

## Agradecimientos

Agradecemos las grandes aportaciones de Iván Prada a la hora de ilustrar este texto, así como para ayudar a limpiarlo de errores y erratas.

# Capítulo 1

## Espacio Proyectivo y Variedades Projectivas

### 1.1. El Espacio Proyectivo

Sea  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial arbitrario.

Podemos realizar dos aproximaciones equivalentes a la noción de espacio proyectivo, que confundiremos según nos convenga. Cabe destacar que la segunda de estas aproximaciones tiene especial interés en la *topología*, por estar basada en conjuntos cociente.

#### 1.1.1. Primera Aproximación

**Definición 1.1.1** (Espacio Proyectivo). Se define el *espacio proyectivo* asociado a  $E$  como el conjunto de los subespacios vectoriales de dimensión 1 de  $E$ . Lo denotaremos por  $\mathbb{P}(E)$ .

Expresando el contenido de la definición 1.1.1 con una notación conjuntista obtenemos lo siguiente.

$$\mathbb{P}(E) \stackrel{\text{def.}}{=} \{[u] \mid u \in E \setminus \{0\}\} \quad (1.1)$$

En la ecuación 1.1 hay una notación implícita que pasamos a explicar a continuación.

**Definición 1.1.2** (Rayo). Sea  $u \in E \setminus \{0\}$ , se denomina *rayo* engendrado por  $u$  al conjunto de todos los vectores proporcionales a  $u$ , es decir:

$$[u] \stackrel{\text{def.}}{=} \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

Consideraremos, a partir de ahora, a los rayos como los *puntos* del espacio proyectivo.

Antes de continuar, notemos algunos casos curiosos.

- Observación 1.1.3** (Casos Extremos). 1. Si  $E = \{0\}$  entonces, por definición  $\mathbb{P}(E) = \emptyset$ , ya que no hay ningún subespacio de dimensión 1.
2. Si  $\dim(E) = 1$  entonces  $\mathbb{P}(E)$  consta de un único elemento, el rayo generado por el vector de la base de  $E$  (o cualquier otro no nulo).

#### 1.1.2. Segunda Aproximación

La definición 1.1.1 tiene una traducción natural en términos de relaciones de equivalencia y conjuntos cociente.

**Definición 1.1.4** (Relación de Proporcionalidad). Se comprueba inmediatamente que la relación  $\mathcal{R}$  definida en  $E \setminus \{0\}$  como:

$$u \mathcal{R} v \stackrel{\text{def.}}{\iff} \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \mid u = \lambda v$$

es de equivalencia, siendo la clase de equivalencia de un vector  $v$  el conjunto de todos los proporcionales a él, es decir el *cuasirayo* generado por  $v$  (rayo al que se le ha sustraído el 0).

La clase del vector  $u$  según la relación de equivalencia definida en 1.1.4 será denotada por  $u\mathcal{R}$ . Es trivial ver que se cumple:

$$u\mathcal{R} = [u] \setminus \{0\}$$

**Definición 1.1.5** (Espacio Projectivo). Definimos espacio projectivo asociado a  $E$  como el conjunto de las clases de equivalencia de  $\mathcal{R}$ , es decir, el conjunto cociente  $\frac{E \setminus \{0\}}{\mathcal{R}}$ .

### 1.1.3. Equivalencia de las Aproximaciones

Veamos ahora que, intuitivamente, podemos confundir ambas aproximaciones a la noción de espacio projectivo, estableciendo una biyección entre los conjuntos resultantes de las definiciones 1.1.1 y 1.1.5. La aplicación natural entre ambos conjuntos es la de asociar al cuasirayo engendrado por un vector su rayo correspondiente, es decir:

$$\begin{array}{ccc} \frac{E \setminus \{0\}}{\mathcal{R}} & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{P}(E) \\ u\mathcal{R} & \mapsto & [u] \end{array} \quad (1.2)$$

Ver que es una biyección y que está bien definida es un ejercicio fácil que se deja al lector.

### 1.1.4. Proyección Canónica

Una nueva forma muy útil de identificar el espacio projectivo asociado a  $E$  es mediante la imagen de la llamada *proyección canónica*, que es la aplicación (evidentemente sobreyectiva) que a cada vector le asocia su rayo engendrado.

$$\begin{array}{ccc} E \setminus \{0\} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}(E) \\ u & \mapsto & [u] \equiv u\mathcal{R} \end{array} \quad (1.3)$$

## 1.2. Variedades Projectivas

Como es típico en álgebra, trataremos de estudiar los subconjuntos de una estructura que mantienen dicha estructura, en este caso, estudiaremos las variedades o subespacios de espacios projectivos. Este es un concepto que puede resultar lioso en una primera lectura, pero que es de importancia crucial.

**Definición 1.2.1** (Variedad Projectiva). Dado un subconjunto  $X$  de un espacio projectivo  $\mathbb{P}(E)$ , se dirá que  $X$  es una variedad projectiva de  $\mathbb{P}(E)$  si existe una variedad lineal de  $E$ , a la que llamaremos  $\hat{X}$  de manera que el espacio projectivo asociado a  $\hat{X}$  coincide con  $X$ . Escrito de otra forma:

$$X = \mathbb{P}(\hat{X}) = \pi(\hat{X} \setminus \{0\})$$

El siguiente lema demuestra que hay dos enfoques equivalentes a la idea de variedad projectiva. Es muy probable que la demostración pueda reducirse mucho.

**Lema 1.2.1** (Caracterización de las Variedades).  $X$  es variedad projectiva si y solo si  $\pi^{-1}(X) \cup \{0\}$  es un subespacio vectorial de  $E$ .

*Demostración.*  $\Rightarrow$  Para esta implicación basta ver que  $\pi^{-1}(X) \cup \{0\}$  es un subespacio vectorial.

Como  $X$  es variedad projectiva existe cierta variedad lineal  $\hat{X}$  de forma que  $\pi(\hat{X} \setminus \{0\}) = X$ . Si Dios existe y está de nuestra parte se tendrá  $\hat{X} = \pi^{-1}(X) \cup \{0\}$ , con lo que habríamos terminado. En efecto, la igualdad que queremos obtener es equivalente (quitando el cero y aplicando la proyección canónica) a la igualdad  $\pi(\hat{X}) = \pi(\pi^{-1}(X)) = X$ , lo cual tenemos por hipótesis.

$\Leftarrow$  Si  $\pi^{-1}(X) \cup \{0\}$  es un espacio vectorial, su projectivo asociado será  $\pi(\pi^{-1}(X)) = X$ , con lo que hemos encontrado una variedad lineal de  $E$  de forma que  $X$  es su espacio projectivo asociado. Por la definición 1.2.1 hemos terminado. ■

Del lema 1.2.1 se deduce que los subespacios vectoriales de  $E$  y los subespacios proyectivos de  $\mathbb{P}(E)$  están en biyección, siendo este un resultado análogo al del llamado *lema de la correspondencia* de la teoría de grupos y anillos. Estudiemos más a fondo este hecho.

**Observación 1.2.2** (Lema de la Correspondencia). Sea  $\mathcal{P}$  el conjunto de las variedades proyectivas de  $\mathbb{P}(E)$ . Asimismo sea el conjunto  $\mathcal{L}$  compuesto por las variedades lineales de  $E$ . Es claro, por la definición de variedad proyectiva 1.2.1 y por el lema 1.2.1 que la siguiente aplicación es una biyección.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{L} \\ X & \mapsto & \pi^{-1}(X) \cup \{0\} \end{array}$$

Aunque trivial, es recomendable recordar, que se preservan las contenciones, es decir:

$$X \subset Y \Leftrightarrow \pi^{-1}(X) \subset \pi^{-1}(Y)$$

### 1.2.1. Operaciones con Variedades Proyectivas

Tras estas observaciones estamos en condiciones de abordar dos problemas elementales pero importantes. Estos son:

1. Determinar si la intersección de variedades proyectivas es variedad proyectiva.
2. Obtener una descripción explícita de los elementos que conforman la mínima variedad que contiene a un subconjunto del espacio proyectivo.

**Lema 1.2.2** (Intersección de Variedades Proyectivas). *Sea la familia de variedades proyectivas  $\{X_i \mid i \in I\}$ , se tiene que la intersección  $\bigcap_{i \in I} X_i$  es una variedad proyectiva.*

*Además, se verifica  $\hat{X} = \bigcap_{i \in I} \hat{X}_i$*

*Demostración.* Debemos demostrar que  $\bigcap_{i \in I} X_i$  es variedad proyectiva. Esto pasa, por el lema 1.2.1 si y solo si  $\pi^{-1}(\bigcap_{i \in I} X_i) \cup \{0\}$  es un espacio vectorial. Si tenemos suerte, se cumplirá que  $\pi^{-1}(\bigcap_{i \in I} X_i) = \bigcap_{i \in I} \pi^{-1}(X_i)$ . Supongamos que tenemos suerte, en tal caso, por ser cada  $X_i$  una variedad proyectiva y por tanto  $\pi^{-1}(X_i) \cup \{0\}$  un subespacio vectorial, y por ser la intersección arbitraria de espacios vectoriales un espacio vectorial, se tiene que  $\pi^{-1}(\bigcap_{i \in I} X_i) \cup \{0\}$  es un subespacio vectorial, como queríamos demostrar.

Finalmente, comprobemos que, efectivamente, hemos tenido suerte.

$$\begin{aligned} x \in \pi^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) &\Leftrightarrow \pi(x) = [x] \in \bigcap_{i \in I} X_i \Leftrightarrow [x] \in X_i \quad \forall i \in I \Leftrightarrow \\ &\pi^{-1}([x]) = x \in \pi^{-1}(X_i) \quad \forall i \in I \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} \pi^{-1}(X_i) \end{aligned}$$

con lo que se obtiene la igualdad deseada.

El *además* se obtiene muy fácilmente:

$$\hat{X} = \pi^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \cup \{0\} = \bigcap_{i \in I} \pi^{-1}(X_i) \cup \{0\} = \bigcap_{i \in I} \hat{X}_i$$

■

Con el lema 1.2.2 queda resuelto el primer problema planteado en esta sección. Pasemos ahora a estudiar la noción de variedad proyectiva engendrada por un subconjunto cualquiera  $A$  de  $\mathbb{P}(E)$  así como sus propiedades.

**Definición 1.2.3** (Variedad Engendrada por un Subconjunto). Sea  $A \subset \mathbb{P}(E)$  no vacío. Se define la *variedad proyectiva engendrada por  $A$*  al menor subespacio proyectivo que contiene a  $A$ . A esta, se la denotará por  $\mathcal{V}(A)$ .

Vamos a demostrar la existencia de dicha variedad construyéndola mediante un truco muy habitual en matemáticas.

**Observación 1.2.4** (Existencia de la Variedad Engendrada). Sea  $\mathcal{L}$  la familia de las variedades proyectivas de  $\mathbb{P}(E)$  que contienen a  $A$ . Es trivial demostrar que  $\bigcap_{X \in \mathcal{L}} X$  es la menor variedad proyectiva que contiene a  $A$ .

Que es variedad proyectiva es evidente por el lema 1.2.2. Es la menor variedad ya que, dada cualquier otra variedad que contenga a  $A$ , esta pertenecerá a la familia  $\mathcal{L}$ , por lo que su intersección estará contenida en la variedad.

La 1.2.4 demuestra la existencia de la variedad engendrada de la misma forma que demostramos la existencia de un subespacio vectorial engendrado por un conjunto, o del subgrupo generado por un conjunto, lo que deja claro la importancia de este truco. Sin embargo, esta demostración no nos da una descripción explícita de los elementos de la variedad.

Una forma de resolver este problema es, a la luz del lema 1.2.1, encontrar la variedad lineal asociada a la variedad engendrada.

**Lema 1.2.3** (Variedad Lineal Asociada a una Variedad Engendrada). *Se tiene que*

$$\widehat{\mathcal{V}(A)} = \mathcal{L}(\pi^{-1}(A))$$

*Es decir, la variedad lineal asociada a la variedad proyectiva engendrada por  $A$  es aquella que engendra la preproyección de  $A$  sobre  $E$ .*

*Demostración.*  $\square$  Como  $A \subset \mathcal{V}(A)$  entonces  $\pi^{-1}(A) \subset \widehat{\mathcal{V}(A)} \Rightarrow \mathcal{L}(\pi^{-1}(A)) \subset \widehat{\mathcal{V}(A)}$

$\square$   $A \subset \pi(\mathcal{L}(\pi^{-1}(A)))$  ya que  $\mathcal{L}(\pi^{-1}(A)) \supset \pi^{-1}(A)$ . Como  $\mathcal{L}(\pi^{-1}(A))$  es un subespacio vectorial, su proyectivizado será una subvariedad proyectiva  $X$ , por lo cual  $X = \pi(\mathcal{L}(\pi^{-1}(A)))$ . Como por la primera desigualdad conjusista de esta segunda parte de la demostración nos dice que  $A \subset X$ , tenemos la desigualdad:

$$A \subset \mathcal{V}(A) \subset X = \pi(\mathcal{L}(\pi^{-1}(A)))$$

Aplicando  $\pi^{-1}$  a la desigualdad obtenemos:

$$\pi^{-1}(\mathcal{V}(A)) = \widehat{\mathcal{V}(A)} \setminus \{0\} \subset \mathcal{L}(\pi^{-1}(A)) \setminus \{0\}$$

■

El lema 1.2.3 nos da una descripción explícita de los elementos de la variedad engendrada por un conjunto, basta aplicar la proyección canónica para obtener:

$$\mathcal{V}(A) = \pi(\mathcal{L}(\pi^{-1}(A))) \quad (1.4)$$

Tengamos especialmente en cuenta el caso de las variedades engendradas por conjuntos finitos.

**Ejemplo 1.2.1** (Variedades Engendradas por Conjuntos Finitos). Sea  $A = \{p_1, \dots, p_n\}$ , denotaremos  $\mathcal{V}(A) = \mathcal{V}(p_1, \dots, p_n)$ , escogiendo un representante arbitrario para cada  $p_i = [u_i]$  obtenemos, por 1.4 que

$$\mathcal{V}(p_1, \dots, p_n) = \pi(\mathcal{L}(u_1, \dots, u_n))$$

### 1.3. Dimensiones y Fórmula de Grassmann

Prosiguiendo en nuestra traducción de los conceptos del mundo vectorial al idioma proyectivo introduciremos el concepto de dimensión de un espacio proyectivo y deduciremos la llamada fórmula de Grassmann.

### 1.3.1. Dimensiones y Fórmula de Grassmann

Es importante tener claro que los espacios proyectivos **no** son espacios vectoriales, ya que no hemos definido la noción de suma de rayos o producto de rayos por escalares. Sin embargo, parece razonable extender la noción de dimensión a los espacios proyectivos.

Intuitivamente, al considerar las rectas vectoriales como puntos, estamos, entre comillas, perdiendo un grado de libertad. Esta idea es recogida por la siguiente definición.

**Definición 1.3.1** (Dimensión de un Espacio Proyectivo). Si  $E$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$ , se define la dimensión de  $\mathbb{P}(E)$  como  $n - 1$ . Es decir, la *codimensión* de un espacio proyectivo respecto de su espacio lineal asociado es 1.

Usualmente nos referiremos a los espacios proyectivos de dimensión 1 como *rectas proyectivas*, a los de dimensión 2 como *planos proyectivos* y a los de dimensión 3 como *espacios proyectivos*.

Es importante distinguir algunos casos extremos que pueden parecer chocantes.

**Observación 1.3.2** (Casos Extremos). 1. Si  $E$  es un espacio vectorial de dimensión 1, entonces  $\mathbb{P}(E)$  tiene dimensión nula, lo cual tiene sentido al estar conformado por un solo punto.

2. Si  $E = \{0\}$ , es decir, un espacio vectorial de dimensión 0, resulta que su espacio proyectivo tiene dimensión  $-1$ .

Estamos ahora en condiciones de presentar el ejemplo de *espacio canónico*, cuya notación no hubiéramos entendido hasta ahora.

**Ejemplo 1.3.1** (Espacio Canónico). El espacio proyectivo asociado a un espacio vectorial de la forma  $E = \mathbb{K}^{n+1}$  se denomina *espacio canónico* y se denota por:

$$\mathbb{P}(E) \stackrel{\text{not.}}{=} \mathbb{P}^n$$

Una igualdad recurrente en matemáticas es la llamada *fórmula de Grassmann*, que se presenta con diversas versiones en áreas tan dispersas de las matemáticas como la teoría de conjuntos, la probabilidad, la teoría de grupos, el álgebra lineal,... Como no podía ser de otra manera, también está presente en los espacios proyectivos.

**Teorema 1.3.1** (Fórmula de Grassmann, Teorema de la Incidencia). Sean  $X, Y \subset \mathbb{P}(E)$  dos variedades proyectivas. Se tiene que:

$$\dim(\mathcal{V}(X, Y)) = \dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y)$$

*Demostración.* Apoyándonos en la fórmula de Grassmann para espacios vectoriales, sale fácilmente. En efecto, como

$$\dim(\mathcal{V}(X, Y)) = \dim(\widehat{\mathcal{V}(X, Y)}) - 1$$

y además

$$\dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y) = \dim(\widehat{X}) - 1 + \dim(\widehat{Y}) - 1 - \dim(\widehat{X \cap Y}) + 1$$

por la fórmula de Grassmann en espacios vectoriales sabemos que los dos miembros de la derecha de sendas igualdades coinciden. ■

Este teorema arroja un corolario importante, del que debemos extraer la idea de que en los espacios proyectivos las cosas se cortan muy fácilmente. Es por esto que se conoce a la geometría proyectiva como *geometría de la incidencia*.

**Corolario 1.3.2** (Hiperplanos y Rectas). Una recta y un hiperplano proyectivos siempre se cortan.

*Demostración.* Basta sustituir las dimensiones en la fórmula de Grassmann teniendo en cuenta que  $\dim(\mathbb{P}(E)) \geq \dim(\mathcal{V}(X, Y))$ , despejando se concluye que  $\dim(\mathcal{V}(X, Y)) \geq 0$ , y por tanto hay al menos un punto común. ■



## 1.4. Referencias Projectivas

En esta sección trataremos de extrapolar el concepto de *base* de un espacio vectorial a los espacios proyectivos.

Sea  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial cualquiera de dimensión  $n + 1$ . Sabemos por álgebra lineal que, dada  $\mathcal{B} := \{e_0, \dots, e_n\}$  una base de  $E$ , cualquier vector  $x \in E$  puede escribirse de manera única como combinación lineal de los vectores que conforman la base, es decir, para ciertos  $\lambda_i$  con  $i \in \{0, \dots, n\}$  se tiene:

$$x = \sum_{i=0}^n \lambda_i e_i \stackrel{\text{not.}}{=} (\lambda_0, \dots, \lambda_n)_{\mathcal{B}} \stackrel{\text{not.}}{=} \mathcal{B}X \quad (1.5)$$

Nótese que la tercera equivalencia de la ecuación 1.5, es un mero abuso de notación muy extendido para hacer la notación más compacta.

Volviendo al mundo proyectivo, queremos encontrar cierta colección de *entes* en función de los cuales poder escribir todos los demás.

### 1.4.1. Coordenadas Homogéneas

Si tomamos un punto proyectivo  $x := [u]$ , por la ecuación 1.5 podremos escribir:

$$x : [u] = [(\lambda_0, \dots, \lambda_n)_{\mathcal{B}}] \stackrel{\text{not.}}{=} (\lambda_0 : \dots : \lambda_n) \quad (1.6)$$

Al último miembro de la ecuación 1.6 se le llama *escritura de  $x$  en coordenadas homogéneas*.

Nótese que, fijada una base, las coordenadas homogéneas de un punto proyectivo son únicas salvo proporcionalidad, ya que si se toma un representante  $u'$  distinto del rayo vectorial, su escritura respecto de la base  $\mathcal{B}$  será proporcional a la de  $u$ .

Con esto podría decirse que hemos cumplido el objetivo de la sección, ya que, dada una base de  $E$ , podemos escribir en función de ella a cualquier punto proyectivo.

Sin embargo, estamos creando una referencia en base a otra ya existente, lo cual no es muy recomendable salvo si nuestra referencia base (base del espacio vectorial) es *estándar* o *canónica*, lo cual sólo ocurre en contadas ocasiones, por ejemplo, en los espacios canónicos.

### 1.4.2. Referencias Projectivas

Para evitar los problemas derivados de la aproximación presentada en el apartado anterior, debemos concentrarnos en la idea de que lo que debemos hacer es encontrar una colección de elementos del espacio proyectivo en función de los cuales poder escribir todos los demás. A ese conjunto de puntos lo llamaremos *referencia projectiva*.

**Definición 1.4.1** (Independencia Projectiva). Sea un conjunto  $\{p_0, \dots, p_r\} \subset \mathbb{P}(E)$ , diremos que son *projectivamente independientes* si ninguno de ellos está en la variedad projectiva engendrada por los restantes.

Con un poco de trabajo adicional extraemos la siguiente caracterización de la independencia projectiva.

**Lema 1.4.1** (Caracterización de la Independencia Projectiva). *Un conjunto de puntos proyectivos es projectivamente independiente si y solo si sus representantes son linealmente independientes, sin depender de la elección de los mismos.*

*Demostración.* Decir que los representantes son linealmente independientes es equivalente a decir que, dado uno de ellos, no puede ser expresado como combinación lineal de los restantes y por ende no se encuentra en la variedad lineal engendrada por estos. Por la ecuación 1.4 sabemos que:

$$u_i \notin \mathcal{L}(u_0, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_r) \Leftrightarrow [p_i] \notin \mathcal{V}(p_0, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_r)$$

■

**Observación 1.4.2** (Base Inducida). En un espacio proyectivo de dimensión  $n$ , podemos escoger un conjunto de  $n + 1$  puntos proyectivamente independientes, ya que, para cualquier elección de representantes de estos puntos, se obtendrían  $n + 1$  vectores linealmente independientes del espacio vectorial asociado  $E$ , de dimensión  $n + 1$ , en el cual estos vectores, por definición formarían una base a la que llamaremos *base inducida*.

Hay un gran problema con la definición 1.4.1, y es que, dados  $n + 1$  puntos proyectivos, inducimos una familia de bases de  $E$  demasiado “grande”. Con grande nos referimos a que no solo inducimos una base junto con todas las proporcionales a ella (resultantes de aplicarle el mismo factor de escala a todos sus vectores), sino muchas más.

**Observación 1.4.3** (No Unidad de la Base Inducida). Dada una elección de representantes  $\{u_0, \dots, u_n\}$  que son una base de  $E$ , entonces, el conjunto de representantes  $\{\lambda_0 u_0, \dots, \lambda_n u_n\}$ , con  $\lambda_i \in \mathbb{K}^*$  también conforma una base de  $E$ .

Para solucionar este problema deberemos añadir alguna restricción más a la definición de base inducida.

**Definición 1.4.4** (Referencia Proyectiva). Dado un espacio proyectivo de dimensión  $n$ , una *referencia proyectiva* es un conjunto **ordenado**  $\mathfrak{R}$  de  $n + 2$  puntos de tal forma que cada  $n + 1$  de ellos son proyectivamente independientes.

A pesar de ser una referencia proyectiva un conjunto ordenado normalmente lo escribiremos con la notación usual para conjuntos.

**Observación 1.4.5** (Reordenación). Dada una referencia  $\mathfrak{R}$ , cualquier reordenación de la misma sigue siendo referencia proyectiva.

**Ejemplo 1.4.1** (Referencias Proyectivas en Dimensiones Bajas). 1. En caso de querer dar una referencia de la recta proyectiva deberemos elegir tres puntos proyectivamente independientes dos a dos.

2. Si queremos referenciar el plano proyectivo deberemos dar lo que se llama *triángulo de referencia*, es decir, una elección de cuatro puntos proyectivamente independientes tres a tres.

3. La misma idea se extrapola al espacio proyectivo, donde habría que escoger un *tetraedro de referencia*

### 1.4.3. Base Asociada a una Referencia Proyectiva

Siguiendo la idea de las observaciones 1.4.2 y 1.4.3 vamos a estudiar las propiedades de las bases asociadas a referencias proyectivas.

**Definición 1.4.6** (Base Asociada). Una base  $\mathcal{B}$  de  $E$  se dice *asociada* a la referencia proyectiva  $\mathfrak{R}$  si sus vectores son representantes de los  $n + 1$  primeros puntos proyectivos, y además, la suma de sus vectores es representante del último de los puntos.

Nótese que una base asociada no es más que una base inducida con una pequeña restricción más, con la suerte de que esta es fundamental para solucionar el problema de la no unicidad salvo proporcionalidad, tal y como muestra el siguiente teorema, cuya demostración es constructiva.

**Teorema 1.4.2** (Unicidad de la Base Asociada). *Para cada referencia proyectiva  $\mathfrak{R}$  de  $\mathbb{P}(E)$  hay una base asociada única salvo un factor no nulo común a todos los elementos de la base.*

**Demostración.** 1. Probemos la existencia de dicha base. Dada una referencia proyectiva  $\mathfrak{R}$ , tomemos representantes de cada uno de los puntos. Por ser  $\mathfrak{R}$  referencia proyectiva y por el lema 1.4.1 los representantes de los  $n + 1$  primeros puntos forman una base de  $E$ , y por ende el representante del último punto puede escribirse como combinación lineal de los anteriores. Denotando por  $u_i$  al representante escogido para el  $i$ -ésimo punto se tiene que:

$$u_{n+1} = \sum_{i=0}^n a_i u_i$$

Veamos que  $\mathcal{B} = \{a_i u_i \mid 0 \leq i \leq n\}$  es una base de  $E$  y además sus vectores son representantes de los  $n + 1$  primeros puntos de  $\mathfrak{R}$ . Esto es debido a que ninguno de los coeficientes  $a_i$  es nulo. Si alguno lo fuera, por ejemplo  $a_0 = 0$ , se tendríamos la relación:

$$u_{n+1} = \sum_{i=1}^n a_i v_i \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$$

Lo cual va contra la hipótesis de independencia proyectiva. Además, la suma de sus vectores es un representante del último punto de la referencia. Luego  $\mathcal{B}$  es base asociada a  $\mathfrak{R}$ .

2. Para demostrar la unicidad supongamos la existencia de dos bases asociadas:

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &:= \{u_0, \dots, u_n\} \\ \mathcal{B}^* &:= \{u'_0, \dots, u'_n\}\end{aligned}$$

Instantáneamente se ve que  $u'_i = u_i \lambda_i$  para algún  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  para todos los  $i \in \{0, \dots, n\}$ , ya que si no no serían representantes de los primeros elementos de la referencia. Además, se debe dar la condición:

$$\left[ \sum_{i=0}^n u_i \right] = \left[ \sum_{i=0}^n u'_i \right]$$

y por ende las sumas deben ser proporcionales, de lo que se desprende:

$$\sum_{i=0}^n u'_i = \sum_{i=0}^n u_i \lambda_i = \lambda \sum_{i=0}^n u_i$$

Es decir, las bases son proporcionales. ■

La comprobación de que un conjunto ordenado de  $n + 2$  puntos es referencia proyectiva puede ser muy tediosa ya que consiste en realizar  $\binom{n+2}{n+1} = n + 2$  determinantes de orden  $n + 1$ . El lema 1.4.3 es extramadadamente útil pues reduce esta comprobación al cálculo de un determinante de orden  $n + 1$  y a la inversión de una matriz de orden  $n + 1$ .

**Lema 1.4.3** (Comprobación de Referencias Proyectivas). *Para comprobar que  $n + 2$  puntos proyectivos  $x_i = [v_i]$  conforman una referencia proyectiva basta comprobar las siguientes condiciones:*

1. Los  $n + 1$  primeros puntos son proyectivamente independientes.
2. Al escribir  $v_{n+1} = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i$  se tiene que  $\lambda_i \neq 0 \forall 0 \leq i \leq n$

*Demostración.* Si se cumplen las condiciones del enunciado se tiene que  $\{\lambda_0 u_0, \dots, \lambda_n u_n\}$  es una base de  $E$ . Si a este conjunto le añadimos  $v_{n+1}$ , sabemos por álgebra lineal que es un conjunto linealmente dependiente y un sistema de generadores de  $E$ . Por ende, alguno de los vectores del conjunto puede ponerse como combinación lineal de los demás, y extrayendo este elemento del conjunto, este seguirá siendo sistema de generadores. Obviamente,  $v_{n+1}$  puede ponerse como combinación lineal de los demás, pero esto no nos ayuda. Lo interesante es, que como todos los coeficientes  $\lambda_i$  son no nulos, podemos despejar cualquier  $v_i$  de la ecuación, de esta forma:

$$v_{n+1} = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i \Leftrightarrow v_i = \sum_{j \neq i, n+1} \frac{\lambda_j}{-\lambda_i} u_j + \frac{1}{\lambda_i} u_{n+1}$$

Entonces podemos formar  $\binom{n+2}{n+1} = n + 2$  conjuntos diferentes de  $n + 1$  vectores, si todos ellos formaran bases habríamos terminado, pero esto es evidente, ya que son sistemas de generadores de  $n + 1$  elementos, es decir, bases. ■

Para clarificar un poco las cosas se presenta el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.4.2** (Referencia de  $\mathbb{P}^2$ ). En  $\mathbb{P}^2$  nos dan los puntos:

$$\begin{aligned} a_0 &= (1 : 0 : 1), \quad a_1 = (0 : 2 : 1) \\ a_2 &= (0 : 0 : 1), \quad a_3 = (1 : -1 : 0) \end{aligned}$$

Donde las coordenadas homogéneas vienen dadas según la base estándar de  $\mathbb{R}^3$ .

Se pide estudiar si dichos puntos conforman una referencia proyectiva.

Siguiendo el lema 1.4.3 para ahorrarnos cálculos, vemos que los representantes de  $a_0, a_1$  y  $a_2$  son una base de  $\mathbb{R}^3$

$$u_0 = (1, 0, 1), \quad u_1 = (0, 2, 1), \quad u_3 = (0, 0, 1)$$

En efecto, al calcular el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ahora, tomando  $u_3 = (1, -1, 0)$  como representante de  $a_3$ , bastaría resolver el sistema de ecuaciones lineales (que sabemos compatible determinado) dado por:

$$\alpha u_0 + \beta u_1 + \gamma u_2 = u_3$$

Si la matriz columna solución no tiene ningún coeficiente nulo la colección de puntos original conforma una referencia proyectiva de base asociada dada por el método de construcción de bases asociadas (teorema 1.4.2), es decir, la base asociada sería:

$$\mathcal{B} = \{\alpha u_0, \beta u_1, \gamma u_2\}$$

Con un poquito de magia se obtiene que:

$$\alpha = 1, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad \gamma = -\frac{1}{2}$$

Como no son todos nulos, los puntos originales conforman una referencia proyectiva.

Una base asociada sería:

$$\mathcal{B} = \left\{ (1, 0, 1), \left(0, -1, -\frac{1}{2}\right), \left(0, 0, -\frac{1}{2}\right) \right\}$$

Como esta base es única salvo proporcionalidad, podríamos multiplicar todo por 2 para que nos queda algo más bonito.

$$\mathcal{B}' = \{(2, 0, 2), (0, -2, -1), (0, 0, -1)\}$$

Antes de continuar, fijemos una notación para referirnos a referencias proyectivas.

Dada una referencia proyectiva  $\mathfrak{R}$ , la denotaremos por los puntos que la conforman de la siguiente manera:

$$\mathfrak{R} = \{p_0, \dots, p_n; E\} \tag{1.7}$$

Donde  $E$  representa el último punto al que llamaremos *punto unidad*.

**Definición 1.4.7** (Coordenadas Homogéneas Respecto de una Referencia  $\mathfrak{R}$ ). Dado un punto proyectivo  $p \in \mathbb{P}(E)$  y una referencia proyectiva  $\mathfrak{R}$ , se dice que  $p = (x_0 : \dots : x_n)_{\mathfrak{R}}$  si, para cualquier elección de  $u$  (representante del rayo  $p$ ) y cualquier elección de base asociada  $\mathcal{B}$  a  $\mathfrak{R}$ , se tiene que:

$$u = \lambda(x_0, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$$

Es evidente, por lo visto en la sección 1.4.1 y en el teorema 1.4.2, que la definición 1.4.7 es sólida.

## 1.5. Cambios de Referencia Proyectiva

POSPUESTO HASTA QUE LO DEMOS EN CLASE!!!

## 1.6. El espacio dual

Hasta el momento hemos conseguido establecer relaciones sólidas entre espacios vectoriales y espacios proyectivos. Relaciones que engloban tanto bases como subespacios, coordenadas o dimensiones. Así, si se quiere tratar cierto problema referente a estos conceptos en el espacio proyectivo, siempre será posible trasladarnos al territorio conocido de espacios vectoriales, y resolverlo allí. Y, como no podía ser de otra manera, esto también ocurre con el espacio dual.

Es vital entender la relación que existe entre el espacio dual y el espacio proyectivo dual, pues el procedimiento para dar coordenadas de subespacios proyectivos se basa en esta relación. Pero antes de nada, hagamos un pequeño repaso de espacio dual y sus propiedades.

Si su conocimiento sobre espacio dual anda escaso, se recomienda al lector echar un vistazo al apéndice A.

Definíamos el espacio vectorial dual  $E^*$  como el conjunto de todas las formas lineales del espacio vectorial  $E$

$$E^* = \{\alpha : E \rightarrow \mathbb{K} \mid \alpha \text{ es lineal}\} = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K}) \quad (1.8)$$

Recordemos el concepto de anulador de un subespacio vectorial.

**Definición 1.6.1** (Anulador). Sea  $W \subset E$  subespacio vectorial de  $E$ , se define el anulador de  $W$  como el conjunto

$$\text{an}(W) := \{\alpha \in E^* \mid \alpha(u) = 0 \forall u \in W\} = \{\alpha \in E^* \mid W \subset \ker(\alpha)\} \quad (1.9)$$

siendo este a su vez un subespacio vectorial de  $E^*$ .

Esto nos proporciona un camino para conectar el espacio vectorial con el espacio dual. Camino que también puede ser recorrido a la inversa.

**Definición 1.6.2** (Anulador dual). Sea  $W^* \subset E^*$  subespacio vectorial del dual  $E^*$ , se define el anulador de  $W^*$  como el conjunto

$$\text{an}(W^*) := \{u \in E \mid \beta(u) = 0 \forall \beta \in W^*\} \quad (1.10)$$

siendo a su vez un subespacio vectorial de  $E$ .

Por tanto, cuando nos encontramos en el espacio vectorial  $E$ , buscamos las formas lineales que se anulan en los vectores de nuestro subespacio. Sin embargo, cuando nos encontramos en el espacio dual  $E^*$  hacemos justo lo contrario, buscamos los vectores que anulan las formas lineales de nuestro subespacio dual.

Hemos trazado así un camino de ida y vuelta entre un espacio vectorial y su espacio dual. Además, este camino es “bueno”, pues permite preservar, en cierto modo, relaciones entre subespacios vectoriales. Veamos a continuación algunos casos para poder entender a que nos referimos exactamente.

**Lema 1.6.1** (Propiedades del paso al dual). Sean  $W, W_1, W_2 \subset E$  subespacios vectoriales de  $E$ . Supongamos que  $\dim(E) = n$ . Entonces, se cumple

1. Si  $W_1 \subset W_2$ , entonces  $\text{an}(W_2) \subset \text{an}(W_1)$
2.  $\dim(W) + \dim(\text{an}(W)) = \dim(E) = \dim(E^*)$
3.  $\text{an}(\text{an}(W)) = W$
4.  $\text{an}(W_1 + W_2) = \text{an}(W_1) \cap \text{an}(W_2)$

*Demostración.* Sean  $W_1, W_2 \subset E$  dos subespacios vectoriales de  $E$ .

LAS DEMOSTRACIONES ESTARAN TODAS MAL ASI QUE TE RUEGO QUE LAS REVISES Y CAMBIES.

1. Sea  $\alpha \in \text{an}(W_2)$  cualquiera. Esto implica que  $\alpha(u) = 0$  para todo  $u \in W_2$ . Como  $W_1 \subset W_2$  en concreto para todos los vectores  $v \in W_1$  se tiene que  $\alpha(v) = 0$ . Por tanto  $\alpha \in \text{an}(W_1)$ .

2. Basta ver que  $\dim(\text{an}(W)) = n^\circ$  de ecuaciones cartesianas, pues en ese caso como

$$\dim(W) + n^\circ \text{ de ecuaciones cartesianas} = \dim(E) = \dim(E^*)$$

queda demostrado.

Sea el subespacio vectorial  $W \subset E$ . Supongamos que este viene definido por  $r$  ecuaciones cartesianas de la forma

$$a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \quad \text{con } a_0, a_1, \dots, a_n \text{ no todos nulos}$$

Así el vector  $u \in E$  pertenece a  $W$  si y solo si cumple dichas ecuaciones. Observemos que dichas ecuaciones definen  $r$  formas lineales  $\alpha_i(x_0, x_1, \dots, x_n) = a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$  linealmente independientes y que todos los vectores de  $u \in W$  cumplen  $\alpha_i(u) = 0$ , para  $i = 1, \dots, r$ . Por tanto dichas formas lineales pertenecen al anulador de  $W$ . Tenemos así que  $\dim(\text{an}(W)) \geq r$ .

Supongamos que no se da la igualdad. Entonces existe  $\beta \in \text{an}(W)$  linealmente independiente a  $\alpha_i$  para todo  $i = 1, \dots, r$ . Podríamos definir dicha forma lineal como  $\beta(x_0, x_1, \dots, x_n) = b_0x_0 + b_1x_1 + \cdots + b_nx_n$ , no todos nulos. Al ser linealmente independientes, la matriz formada por los  $b_i$  y los coeficientes de las ecuaciones cartesianas tiene rango  $r + 1$ . Además al pertenecer  $\beta$  al  $\text{an}(W)$  se cumple  $\beta(u) = 0$  para todo  $u \in W$ . Por tanto podemos definir una nueva ecuación cartesiana  $b_0x_0 + b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = 0$ , lo cual es absurdo.

3. Definíamos

$$\text{an}(W) := \{\alpha \in E^* \mid \alpha(u) = 0 \forall u \in W\}$$

que es un subespacio vectorial del espacio dual  $E^*$ . Por tanto su anulador viene dado por

$$\text{an}(\text{an}(W)) := \{v \in E \mid \alpha(v) = 0 \forall \alpha \in \text{an}(W)\},$$

Es claro que los vectores  $u \in W$  cumplen  $\alpha(u) = 0 \forall \alpha \in \text{an}(W)$ , por lo que  $W \subseteq \text{an}(\text{an}(W))$ . Supongamos que no se da la igualdad. Entonces existe  $v \in E$  perteneciente al  $\text{an}(\text{an}(W))$  tal que  $v \notin W$ . Por tanto  $\mathcal{L}(v) \cap W = \emptyset$ . Por otro lado, como  $v \in \text{an}(\text{an}(W))$  se cumple que  $\alpha(v) = 0 \forall \alpha \in \text{an}(W)$ . Esto implica que  $\text{an}(W) \subseteq \text{an}(v)$ . Además es sabido que  $\text{an}(v) = \text{an}(\mathcal{L}(v))$ , por lo que  $\text{an}(W) \subseteq \text{an}(\mathcal{L}(v))$ . Utilizando la primera propiedad del lema que viene a continuación esto implica que  $\mathcal{L}(v) \subseteq W$ , llegando así a un absurdo.

4. PENDIENTE

■

Como dijimos, este camino es “bueno”, y por tanto todas estas propiedades se tienen también en sentido inverso.

**Lema 1.6.2.** Sean  $W^*, W_1^*, W_2^* \subset E^*$  subespacios vectoriales de  $E^*$ . Supongamos que  $\dim(E^*) = n$ . Entonces, se cumple

1. Si  $W_1^* \subset W_2^*$ , entonces  $\text{an}(W_2^*) \subset \text{an}(W_1^*)$
2.  $\dim(W^*) + \dim(\text{an}(W^*)) = \dim(E) = \dim(E^*)$
3.  $\text{an}(\text{an}(W^*)) = W^*$

*Demostración.* PENDIENTE

■

Todas estas propiedades, y otras derivadas de ellas, nos permiten “traducir” enunciados de problemas en espacio vectorial a espacio dual. Para ello es imprescindible saber si, que algo sea verdad en espacio vectorial implica que su “traducción” será verdad en el espacio dual y viceversa. Se enuncia así el siguiente principio.

**Proposición 1.6.3** (Principio de dualidad). PENDIENTE

### 1.6.1. Espacio proyectivo dual

Una vez repasados y ampliados los conceptos de espacio dual y anulador, pasemos a introducir el espacio proyectivo dual. Iremos adentrándonos en él poco a poco a lo largo de las siguientes secciones, hasta finalmente comprender su juego en la geometría proyectiva. Comencemos con una definición.

**Definición 1.6.3** (Espacio proyectivo dual). Dado un espacio vectorial  $E$  y su correspondiente espacio proyectivo  $\mathbb{P}(E)$ , se llama espacio proyectivo dual de  $P$  al espacio proyectivo  $\mathbb{P}(E^*)$  asociado al espacio vectorial dual  $E^*$  de  $E$ . Se denota por  $\mathbb{P}(E^*)$ . En el caso de ser  $E = \mathbb{K}^{n+1}$ , su espacio proyectivo dual se denota por  $\mathbb{P}^*$ .

**Observación 1.6.4.** Dado que el espacio dual  $E^*$  tiene la misma dimensión que  $E$ , si la dimensión es finita, esto implica que la dimensión del espacio proyectivo es la misma que la del espacio proyectivo dual

$$\dim(\mathbb{P}(E)) = \dim(\mathbb{P}(E^*))$$

Propiedades similares a las dadas para espacios vectoriales, se dan entre variedades proyectivas. Sin embargo, para poder entenderlas en su completitud es necesario hablar primero de coordenadas de variedades proyectivas. Por ello aguardaremos a la sección 1.7 para abordar este tema.

Nótese que a lo largo de la demostración del lema 1.6.1 se ha probado que toda ecuación cartesiana de un subespacio se puede asociar a una forma lineal, es decir, a un vector del espacio dual. Esto da pie a pensar en la relación entre el espacio dual y las coordenadas de subespacios proyectivos, ya que, al fin y al cabo, estos pueden trasladarse a espacios vectoriales, tema que abordaremos en la siguiente sección.

## 1.7. Coordenadas de Subespacios Proyectivos

REPASAR ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y CARTESIANAS DE UN SUBESPACIO Y ESPACIO DUAL!!! (HASTA RECTAS ES MÁS O MENOS LEGIBLE)

Nuestra tarea aquí es tratar de, dado un subespacio proyectivo, por ejemplo una recta o un plano proyectivos, dar una referencia proyectiva de ese subespacio mediante la cual dar una descripción explícita de sus elementos. Comenzaremos estudiando el caso más sencillo, las rectas proyectivas, tras esto estudiaremos los hiperplanos proyectivos en general.

### 1.7.1. Rectas Proyectivas

**Definición 1.7.1** (Recta en  $\mathbb{P}(E)$ ). Se define *recta proyectiva* que pasa por los puntos proyectivos  $P$  y  $Q$  como la variedad engendrada por dichos puntos. A dicha recta se la denomina *recta*  $PQ$ .

**Ejemplo 1.7.1** (Descripción de una Recta). Sean  $P = [u]$  y  $Q = [v]$  dos puntos proyectivos, vamos a describir los elementos de la recta  $PQ$ , que no es otra cosa que  $\mathcal{V}(P, Q)$ .

Para describir los elementos de esta variedad (o de cualquiera) deberemos dar una referencia en función de la cual *coordinar* todos los puntos de la misma.

Como  $P$  y  $Q$  son dos puntos proyectivos distintos, los vectores  $u, v$  son linealmente independientes, formando una base de la variedad lineal  $\mathcal{L}(u, v)$ .

Para construir una referencia bastaría tomar los puntos  $P, Q$  y añadirle como punto unidad un tercer punto cuyo representante pueda ser escrito como combinación lineal de  $u$  y  $v$  con todos los coeficientes no nulos, por ejemplo  $[u + v]$ .

De esta forma tenemos la referencia:

$$\mathfrak{R} = \{P, Q; [u + v]\}$$

Por el método de construcción de bases asociadas tenemos que la base asociada a esta referencia es  $\mathcal{B} = \{u, v\}$ . Como sabemos, todo punto  $p \in \mathcal{V}(P, Q)$  es un rayo representado por un vector de  $\mathcal{L}(u, v)$ . Es decir, un vector  $w = \alpha u + \beta v$  con alguno de los coeficientes no nulo.

Esto quiere decir que todo punto de la recta  $PQ$  es un rayo de la forma:

$$[\alpha u + \beta v] = (\alpha : \beta)$$

Sin embargo, podemos reducir esto aún un poco más, cambiemos el representante del rayo dividiendo todo por  $\beta$ .

$$\left[ \frac{\alpha}{\beta} u + v \right] : \stackrel{\text{not.}}{=} [\theta u + v]$$

De esta forma la recta ya no queda descrita por dos coordenadas homogéneas  $\alpha$  y  $\beta$  como antes, sino por una única coordenada  $\theta$  a la que llamaremos *no homogénea*.

Sin embargo, hemos de tener cuidado, pues, como más de uno ya se habrá dado cuenta, es posible que en algunos casos  $\beta$  se anule, por ende,  $\theta$  no estaría definida. Como este caso se corresponde con un único punto, y este es el punto  $P$ , diremos que una recta queda descrita por lo siguiente:

$$PQ : \{[\theta u + v] \mid \theta \in \mathbb{K}\} \cup \{P\} \quad (1.11)$$

**Ejemplo 1.7.2** (Parametrización de una Recta Concreta). Dados los puntos  $P = (1 : 2 : -1)$  y  $Q = (0 : 1 : 3)$  se nos pide parametrizar la recta  $PQ$ , siguiendo los pasos del ejemplo 1.7.1 nos queda:

$$PQ : \{(\theta : 2\theta + 1 : -\theta + 3) \mid \theta \in \mathbb{K}\} \cup \{(1 : 2 : -1)\}$$

## 1.7.2. Hiperplanos Projectivos

### CAMBIARLOOO

Comenzamos este apartado recordando brevemente que los hiperplanos vectoriales son subespacios lineales de codimensión 1. Asimismo todo hiperplano proyectivo  $H = \mathbb{P}(\hat{H})$  es la proyección de un hiperplano vectorial  $\hat{H}$

$$\dim(E) - 2 = \dim(\mathbb{P}) - 1 = \dim(H) = \dim(\hat{H}) - 1 \Rightarrow \dim(\hat{H}) = \dim(E) - 1. \quad (1.12)$$

Recordemos también que un hiperplano vectorial  $\hat{H}$  viene definido por una ecuación cartesiana de la forma

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \quad \text{con } a_0, a_1, \dots, a_n \text{ no todos nulos.}$$

Por tanto, puede definirse como el núcleo de una forma lineal, la cual está a su vez definida por la ecuación cartesiana del hiperplano

$$h(x_0, x_1, \dots, x_n) = a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n.$$

De igual manera, dada una forma lineal  $h$ , no idénticamente nula, por la fórmula de las dimensiones de las aplicaciones lineales, su *núcleo*, es decir, el conjunto de los puntos de  $E$  que son anulados por  $h$ , es un hiperplano vectorial.

Por tanto podemos intentar expresar un hiperplano proyectivo a partir de dicha  $h$ , ya que es la proyección de un hiperplano vectorial. Sin embargo, esta forma lineal no está bien definida en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}(E)$ . Ello se debe a que puedo escoger dos vectores  $u, \lambda u \in E$ , que pertenecen al mismo punto en el espacio proyectivo, tales que sus imágenes no pertenecen al mismo rayo. Esto no puede ocurrir con aquellos que pertenezcan al núcleo de  $h$ . Por tanto los ceros de  $h$  sí están bien definidos en  $\mathbb{P}(E)$ . Así, dado un hiperplano vectorial  $\hat{H}$  definido por los ceros de  $h$ , podemos asegurar que la siguiente definición es válida

$$H = \mathbb{P}(\hat{H}) = \{[u] \in \mathbb{P}(E) \mid h(u) = 0\} \quad (1.13)$$

Uno podría hacerse la siguiente pregunta. ¿Solo habrá una forma lineal  $h$  que se anule en el hiperplano  $\hat{H}$ ? Y si no es así, entonces, ¿cómo definir su proyección  $H$ ? Obsérvese que dichas formas lineales  $h$  no son más que las pertenecientes al anulador de  $\hat{H}$ . Pero este subespacio pertenece al espacio dual. Cabría entonces preguntarse si existe alguna relación entre el  $\text{an}(\hat{H})$  y el espacio dual proyectivo. Para ello se enuncia el siguiente lema, que nos llevará rápidamente a esta conexión.

**Lema 1.7.1.** *Todas las formas lineales que se anulan en un mismo hiperplano son las mismas, salvo un factor de proporcionalidad*

*Demostración.* PENDIENTE ■



Esto implica que un hiperplano proyectivo está asociado a un conjunto de formas lineales múltiples, es decir, a un rayo de formas lineales, un punto del espacio proyectivo dual. Existe por tanto una biyección entre el conjunto de hiperplanos del espacio proyectivo  $\mathbb{P}(E)$  y el espacio proyectivo dual  $\mathbb{P}(E^*)$ , que asocia a cada hiperplano proyectivo el rayo de formas lineales cuyos ceros forman el hiperplano

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{P}(E^*) \\ H &\rightarrow [h]\end{aligned}\tag{1.14}$$

donde  $\mathcal{H} = \{H \mid H \text{ es hiperplano de } \mathbb{P}(E)\}$ .

Otra implicación inmediata de este lema, y que nos lleva de vuelta a las preguntas formuladas con anterioridad, es que, dado  $\hat{H}$  hiperplano vectorial, se tiene

$$\mathbb{P}(\text{an}(\hat{H})) = \mathbb{P}(\{h \in E^* \mid h(u) = 0 \ \forall u \in \hat{H}\}) = [h]\tag{1.15}$$

denotándose la proyección del anulador como  $H^*$  y lo llamaremos dual del hiperplano  $H$

Aquí se encuentra el puente que conecta nuestro espacio proyectivo con el espacio proyectivo dual

$$H = \mathbb{P}(\hat{H}) \Leftrightarrow \hat{H} \Leftrightarrow \text{an}(\hat{H}) \Leftrightarrow \mathbb{P}(\text{an}(\hat{H})) = H^* = [h]\tag{1.16}$$

Como podría uno imaginarse, esto no solo se puede hacer con hiperplanos proyectivos, sino que se puede generalizar a cualquier variedad proyectiva.

### 1.7.3. Variedades proyectivas

Se ha visto la importancia del espacio dual a la hora de caracterizar hiperplanos. De la misma forma, esta caracterización dual es realmente útil para variedades proyectivas en general. Se expondrá a continuación en que consiste dicha caracterización y algunas de sus propiedades, para poder así finalmente describir cualquier variedad en el espacio proyectivo.

Empecemos caracterizando el paso del espacio proyectivo al espacio proyectivo dual. Sea  $X$  una variedad del espacio proyectivo  $\mathbb{P}(E)$ , por la definición 1.2.1 sabemos que existe un subespacio vectorial  $\hat{X} \subset E$  tal que  $\mathbb{P}(\hat{X}) = X$ . Este subespacio vectorial se puede describir a través de sus ecuaciones cartesianas. Como vimos en secciones anteriores, a cada ecuación cartesiana se le puede asociar una forma lineal  $\alpha_i$  que se anule sobre  $\hat{X}$ , siendo además todas ellas linealmente independientes. Por tanto,  $\hat{X}$  tendrá asociadas tantas formas lineales  $\alpha_i$  como ecuaciones cartesianas tenga.

Gracias al lema 1.7.1 sabemos que cualquier otra forma lineal que se anule sobre  $\hat{X}$  debe ser múltiplo de algún  $\alpha_i$ . Por tanto podemos identificar  $X$  con las ecuaciones cartesianas de  $\hat{X}$ , que a su vez podemos identificar con rayos de formas lineales, tantos como ecuaciones cartesianas tenga el subespacio vectorial. Estos rayos de formas lineales pertenecen al espacio proyectivo dual, quedando así trazado el camino desde el espacio proyectivo al espacio proyectivo dual. Un punto del espacio proyectivo, por ejemplo, se identifica con dos elementos del dual linealmente independientes, es decir, un plano, ya que el subespacio del que es proyección es una recta, la cual posee dos ecuaciones cartesianas.

Obsérvese que, al igual que ocurría con hiperplanos, esas formas lineales  $\alpha_i$  pertenecen al  $\text{an}(\hat{X})$ . De hecho, dado que la dimensión del anulador es el número de ecuaciones cartesianas, que a su vez es el número de formas lineales  $\alpha_i$  linealmente independientes, se tiene que el  $\text{an}(\hat{X})$  es el conjunto de las formas lineales  $\alpha_i$ . Por tanto los rayos de estas formas lineales, que identificábamos con  $X$ , no son más que la proyección del  $\text{an}(\hat{X})$ , la cual denotaremos por  $X^*$  y denominaremos dual de la variedad proyectiva  $X$ .

Por supuesto, el hiperplano es un caso particular de esta caracterización, en la que solo hay una ecuación cartesiana y por tanto la variedad se identifica con un único punto en el espacio proyectivo dual.

Este camino puede resumirse con el siguiente esquema

$$\mathbb{P}(\hat{X}) = X \subset \mathbb{P}(E) \Leftrightarrow \hat{X} \subset E \Leftrightarrow \text{an}(\hat{X}) \subset E^* \Leftrightarrow \mathbb{P}(\text{an}(\hat{X})) = X^* \subset \mathbb{P}(E^*)\tag{1.17}$$

donde  $\Leftrightarrow$  indica que se puede recorrer el camino en ambos sentidos. Veamos a continuación algunas de las propiedades que presenta esta caracterización.

**Lema 1.7.2** (Propiedades del paso proyectivo al dual). *Sea  $E$  un espacio vectorial y su correspondiente espacio proyectivo  $\mathbb{P}(E)$ . Sean  $X, Y \subset \mathbb{P}(E)$  variedades proyectivas. Se cumple*

1. Si  $X \subset Y$ , entonces  $Y^* \subset X^*$
2.  $\dim(X) + \dim(X^*) = \dim(\mathbb{P}) - 1$

*Demostración.* Sean  $X = \mathbb{P}(\hat{X})$  e  $Y = \mathbb{P}(\hat{Y})$  variedades proyectivas.

1. Si  $X \subset Y$ , entonces  $\hat{X} \subset \hat{Y}$ . Por el lema 1.6.1 esto implica que  $\text{an}(\hat{Y}) \subset \text{an}(\hat{X})$ , y por tanto  $Y^* \subset X^*$ .
2. Por el lema 1.6.1 se tiene que  $\dim \hat{X} + \dim \text{an}(\hat{X}) = \dim E = \dim \mathbb{P}(E) + 1$ . Teniendo en cuenta la definición 1.3.1 queda

$$\dim(X) + \dim(X^*) = \dim(\hat{X}) - 1 + \dim(\text{an}(\hat{X})) - 1 = \dim(\mathbb{P}(E)) + 1 - 2 = \dim(\mathbb{P}(E)) - 1$$

■

**Observación 1.7.2.** El lema anterior confirma que el dual de un hiperplano proyectivo es un punto. En efecto supongamos que  $\dim(E) = m + 1$ , entonces

$$\dim(X) + \dim(X^*) = m - 1 + \dim(X^*) = \dim(\mathbb{P}(E)) - 1 = m - 1 \Leftrightarrow \dim(X^*) = 0$$

Todos estos cálculos y caracterizaciones no serían de ninguna utilidad si no nos permitiesen resolver problemas de espacio proyectivo con mayor facilidad. Hasta ahora no hemos visto ninguna aplicación, simplemente hemos ido explicando como se hace ese paso al espacio proyectivo dual, insistiendo una y otra vez en su importancia. Pero ¿realmente es tan importante? ¿No podemos simplemente resolver los problemas en el espacio proyectivo o echando mano del espacio vectorial? Es posible, sí, pero muchas veces hacer la asociación entre una variedad proyectiva y su dual, es decir la proyección del anulador, facilita enormemente la resolución. Veamos a continuación un ejemplo.

**Ejemplo 1.7.3.** Sea  $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ . Sean dos rectas del espacio proyectivo  $r_1, r_2 \in \mathbb{P}^3$ , las cuales no se cortan, y un punto  $p \in \mathbb{P}^3$  que no pertenece a ninguna de las rectas. Demuestre que existe una única recta  $r \in \mathbb{P}^3$  que pasa por  $p$  y corta a ambas rectas  $r_1, r_2$ .

Según el enunciado del problema tenemos dos rectas  $r_1, r_2 \in \mathbb{P}^3$  y un punto  $p \in \mathbb{P}^3$  tales que  $r_1 \cap r_2 = \emptyset$  y  $p \notin r_1 \cup r_2$ . Debemos probar que existe una única recta  $r \in \mathbb{P}^3$  tal que  $p \in r$ ,  $r_1 \cap r \neq \emptyset$  y  $r_2 \cap r \neq \emptyset$ . Resolvamos el problema primero sin dualizar, y luego pasando al dual.

1. Tomemos la variedad proyectiva engendrada por  $r_1$  y  $p$ , la cual es un plano ya que

$$\dim(\mathcal{V}(p, r_1)) = \dim(p) + \dim(r_1) - \dim(r_1 \cap p) = 0 + 1 - (-1) = 2$$

Podemos aplicar el corolario 1.3.2 al plano  $\mathcal{V}(p, r_1)$  y la recta  $r_2$ , según el cual una recta y un hiperplano siempre se cortan. Antes, y para obtener el resultado deseado, debemos asegurarnos de que  $r_2 \not\subset \mathcal{V}(p, r_1)$ , pues en caso contrario existirían más de un punto de corte entre la recta y el hiperplano y  $r$  no sería única. Es fácil comprobar que esto no ocurre, ya que si  $r_2 \subset \mathcal{V}(p, r_1)$ , entonces  $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$ , llegando así a un absurdo. Existirá por tanto un único punto  $q \in r_2 \cap \mathcal{V}(p, r_1)$ . Definimos entonces la recta  $r$  como la variedad engendrada por los puntos  $p$  y  $q$ , pudiéndose comprobar con la fórmula de las dimensiones que efectivamente es una recta. Por un lado  $r$  es única, ya que lo es el punto  $q$ . Además  $r_1 \cap r \neq \emptyset$  y  $r_2 \cap r \neq \emptyset$ , ya que  $q \in r_2 \cap \mathcal{V}(p, r_1)$ . Queda así demostrado el ejercicio.

2. Dado que es la primera vez que dualizamos un problema, hagámoslo paso a paso. Para empezar, y atendiendo al lema 1.7.2, la ecuación de las dimensiones que caracteriza la dualización es, en nuestro caso,

$$\dim(X) + \dim(X^*) = 2.$$

Por tanto el dual de un punto es un plano del espacio proyectivo dual y el dual de una recta, una recta. Tenemos entonces que  $p^*$  es un plano y  $r_1^*, r_2^*$  son rectas. Por otro lado que  $p \in r$  implica, por el lema 1.7.2, que  $r^* \subset p^*$ . De igual forma que  $p \notin r_1 \cup r_2$  implica que  $r_1^* \not\subset p^*$  y  $r_2^* \not\subset p^*$ . Además si  $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ , entonces  $r_1^* \cap r_2^* = \emptyset$ . En caso contrario existiría un plano dual  $\pi^*$  tal que  $r_1^* \subset \pi^*$  y  $r_2^* \subset \pi^*$ . Utilizando de nuevo la fórmula de las dimensiones y el lema 1.7.2 esto equivaldría a decir que existe un punto  $q$  tal que  $q \in r_1$  y  $q \in r_2$ , llegando así a un absurdo.

Por tanto el enunciado del problema se traduce en, dadas dos rectas  $r_1^*, r_2^* \in \mathbb{P}^{3*}$  y un punto  $p \in \mathbb{P}^{3*}$  tales que  $r_1^* \cap r_2^* = \emptyset$ ,  $r_1^* \not\subset p^*$  y  $r_2^* \not\subset p^*$ ; demostrar que existe una única recta  $r^*$  tal que  $r_1^* \cap r^* \neq \emptyset$ ,  $r_2^* \cap r^* \neq \emptyset$  y  $r^* \subset p^*$ .

Dado que las rectas  $r_1^*, r_2^*$  no están contenidas en el plano  $p^*$ , cortarían con él en dos puntos únicos. Es claro que la recta engendrada por esos dos puntos es única y cumple las condiciones requeridas.

**Observación 1.7.3.** Este enunciado es falso en espacio afín...

**Observación 1.7.4.** Una vez resuelto este ejercicio podemos observar diferencias en los métodos de resolución. Mientras que en el primer caso hemos tenido que construir la recta con mucha idea de a donde nos llevaría e ir comprobando que cumple los requisitos, al traducir el problema al espacio dual, la recta ha surgido por sí sola, como consecuencia de las hipótesis del enunciado. Es cierto que, debido a la sencillez de este ejercicio, la diferencia en la dificultad de resolución no es tan clara. Sin embargo, es posible darse cuenta de que, en problemas más complicados, el espacio proyectivo dual nos da un camino más rápido. La única dificultad radica en traducir bien los enunciados.

#### 1.7.4. El Teorema de Pappus

decir forma lineal define hiperplano e hiperplano definido por forma lienal. pero la forma lineal no esta bien definida en proyectivo, si sus ceros, dabuti pues son el hiperplano proyectivo.

## 1.8. Problemas

**Problema 1.1.** ¿Cuál es el menor número de variedades proyectivas de dimensión 3 necesarias para generar una de dimensión 11? ¿Y para generar una de dimensión 8?

**Problema 1.2.** Sea  $\mathfrak{R} := \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$  una referencia proyectiva de  $\mathbb{P}^2$ . Calcular la matriz de cambio de referencia entre dos reordenaciones cualesquiera de  $\mathfrak{R}$ .

# Apéndice A

## Álgebra Lineal

Este apéndice está especialmente pensado para los alumnos de los dobles grados, que, a fecha de escribir este texto, cursan la asignatura de geometría lineal y la de álgebra lineal con un año de separación.

Este hecho añade a la presente materia un plus de dificultad, pues hace echar mano constantemente de la bibliografía de primer curso, que, en muchas ocasiones, no es suficiente, por ejemplo en el estudio de la *dualidad*.

Algo que merece la pena recalcar es que aquí únicamente se incluyen los resultados más elementales acerca de dualidad, ya que sabemos por experiencia que los resultados más profundos se omiten en un primer curso de álgebra lineal (a pesar de ser harto necesarios aquí). Es por esta razón, no hacer visitar un apéndice al lector sin necesidad, que estos conceptos gozan de sección propia en el texto ordinario.

El objetivo de este anexo no es otro que recopilar los conceptos y resultados que consideramos totalmente imprescindibles para seguir el texto, no obstante, no pretende ser, ni mucho menos, tan completo o rico en ejemplos como otros títulos específicos de álgebra lineal que se recomiendan en la bibliografía.

### A.1. Coordenadas en Espacios Vectoriales

El objetivo de esta sección es servir como pequeño área de repaso a la hora de entrar en conceptos íntimamente ligados con los cambios de base en espacios vectoriales. Un ejemplo claro de esto son los cambios de referencia proyectiva.

Sea  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión finita  $n$ .

Asimismo, consideraremos la base  $\mathcal{B} := \{b_1, \dots, b_n\}$  de  $E$ .

**Proposición A.1.1** (Escritura Única de un Vector). *Dado un vector  $u \in E$ , este tiene una escritura **única** como combinación lineal de los vectores de la base  $\mathcal{B}$ .*

*Demostración.* La existencia de esta escritura es evidente, por ser  $\mathcal{B}$  una base de  $E$ , y, por tanto, un sistema de generadores. En consecuencia, lo único que hay que probar es la unicidad de dicha combinación lineal. En efecto, supongamos que hubiera dos:

$$u = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$$

Pasando todo al segundo miembro y sacando factor común obtenemos:

$$(\alpha_1 - \beta_1)b_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)b_n = 0$$

Como los vectores de la base son linealmente independientes, se tiene que todos los coeficientes deben ser nulos. Es decir:

$$\alpha_i - \beta_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

De donde se sigue la necesaria igualdad de ambas escrituras. ■

**Observación A.1.1** (Coordenadas de un Vector Respecto de una Base). Es evidente que,  **fijada una base**, todo vector queda caracterizado por su escritura como combinación lineal de los vectores de dicha base. Es por este motivo que, dado un vector  $u \in E$  cualquiera, emplearemos la siguiente notación:

$$u = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n \stackrel{\text{not.}}{=} (\alpha_1, \dots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}$$

A la tupla de escalares  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  la denominaremos *coordenadas de  $u$  respecto de la base  $\mathcal{B}$* .

Por supuesto, si decidimos tomar otra base  $\mathcal{B}'$ , las coordenadas de los vectores respecto de la base  $\mathcal{B}'$  serán, en general, distintas a las coordenadas respecto de  $\mathcal{B}$ .

Un problema interesante, y que resolveremos en A.1.1, consiste en encontrar una relación o ligadura entre ambas coordenadas.

**Observación A.1.2** (Coordenadas del  $i$ -ésimo Vector de la Base). Dado el vector  $b_i$ , es interesante notar que sus coordenadas respecto de la base  $\mathcal{B}$ , de la que, recordemos, es el  $i$ -ésimo vector, son:

$$b_i = (0, \dots, \overbrace{1}^i, \dots, 0)_{\mathcal{B}}$$

La comprobación es inmediata y se deja al lector.

### A.1.1. Matriz de Cambio de Base

Sean  $\mathcal{B} := \{e_1, \dots, e_n\}$  y  $\mathcal{B}' := \{e'_1, \dots, e'_n\}$  dos bases de un espacio vectorial  $E$ . En estas condiciones, dado un vector cualquiera  $u \in E$ , podemos escribirlo de dos maneras distintas:

$$u = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n \tag{A.1}$$

$$u = \beta_1 e'_1 + \cdots + \beta_n e'_n \tag{A.2}$$

Escribiendo cada vector de  $\mathcal{B}'$  como combinación lineal de los vectores de  $\mathcal{B}$ , es decir, en coordenadas de  $\mathcal{B}$  obtenemos (los exponentes son simplemente superíndices):

$$e'_i = \gamma_1^i e_1 + \cdots + \gamma_n^i e_n \tag{A.3}$$

Uniendo las ecuaciones se tiene:

$$\begin{aligned} u &= \beta_1 (\gamma_1^1 e_1 + \cdots + \gamma_n^1 e_n) + \cdots + \beta_n (\gamma_1^n e_1 + \cdots + \gamma_n^n e_n) = \\ &= (\beta_1 \gamma_1^1 e_1 + \cdots + \beta_1 \gamma_n^1 e_n) + \cdots + (\beta_n \gamma_1^n e_1 + \cdots + \beta_n \gamma_n^n e_n) = \\ &= (\beta_1 \gamma_1^1 + \cdots + \beta_n \gamma_1^n) e_1 + \cdots + (\beta_1 \gamma_n^1 + \cdots + \beta_n \gamma_n^n) e_n \end{aligned} \tag{A.4}$$

La traducción de esto a términos de coordenadas nos arroja (los corchetes son simplemente corchetes para una mejor visualización):

$$u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)_{\mathcal{B}} = ([\beta_1 \gamma_1^1 + \cdots + \beta_n \gamma_1^n], \dots, [\beta_1 \gamma_n^1 + \cdots + \beta_n \gamma_n^n])_{\mathcal{B}} \tag{A.5}$$

Esto, por comodidad, lo interpretaremos como producto de matrices (compruébese):

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1^1 & \cdots & \gamma_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_n^1 & \cdots & \gamma_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

Usando una notación más compacta:

$$X_{\mathcal{B}} = C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'} \tag{A.7}$$

Obsérvese que la matriz  $P$  es **cuadrada** e **invertible**, por ser la matriz formada al poner por columnas los vectores de la base  $\mathcal{B}'$  respecto de la base  $\mathcal{B}$ .

Por esta razón, podemos despejar  $X_{\mathcal{B}'}$ , obteniendo la relación inicialmente buscada:

$$X_{\mathcal{B}'} = C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1} X_{\mathcal{B}} \tag{A.8}$$

A la matriz  $C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$  se la denomina *matriz de cambio de base de  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$* . Es interesante comprobar que su inversa es la matriz de cambio entre las mismas bases en sentido contrario.

Para cerrar la sección diremos, como curiosidad, que toda matriz invertible constituye una matriz de cambio entre ciertas bases.

## A.2. Ecuaciones de Subespacios

El objetivo de esta sección será caracterizar un subespacio vectorial por el conjunto de soluciones de una ecuación o conjunto de ecuaciones (siempre lineales y homogéneas). A estas ecuaciones las denominaremos *ecuaciones cartesianas*. Son de importancia capital en el estudio de la dualidad.

### A.2.1. Existencia de las Ecuaciones Cartesianas

Sea  $E$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  y sea  $U$  un subespacio vectorial cualquiera de  $E$ . Sea  $\mathcal{B}_U := \{u_1, \dots, u_r\}$  una base de  $U$ .

#### Ecuaciones Paramétricas

Sea  $x \in U$ , entonces podemos escribirlo tanto en coordenadas de  $\mathcal{B}_U$  como en coordenadas de la base del espacio total  $\mathcal{B}$ . Es decir:

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \quad (\text{A.9})$$

$$x = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_r u_r \quad (\text{A.10})$$

Usando los mismos trucos que utilizamos para cálculo de la matriz de cambio de base, podemos escribir los vectores de la base  $\mathcal{B}_U$  como combinación lineal de los vectores del espacio total:

$$u_i = \gamma_1^i e_1 + \dots + \gamma_n^i e_n \quad (\text{A.11})$$

Sustituyendo y reagrupando:

$$\begin{aligned} x &= \beta_1(\gamma_1^1 e_1 + \dots + \gamma_n^1 e_n) + \dots + \beta_r(\gamma_1^r e_1 + \dots + \gamma_n^r e_n) = \\ &= (\beta_1 \gamma_1^1 e_1 + \dots + \beta_1 \gamma_n^1 e_n) + \dots + (\beta_r \gamma_1^r e_1 + \dots + \beta_r \gamma_n^r e_n) = \\ &= (\beta_1 \gamma_1^1 + \dots + \beta_r \gamma_1^r) e_1 + \dots + (\beta_1 \gamma_n^1 + \dots + \beta_r \gamma_n^r) e_n \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Expresado de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1^1 & \dots & \gamma_1^r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_n^1 & \dots & \gamma_n^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Con una notación más compacta escribimos:

$$X = P\Lambda \quad (\text{A.14})$$

Nótese que la matriz  $P$  no es cuadrada por lo general, además, es la matriz resultante de poner por columnas las coordenadas de los vectores de  $\mathcal{B}_U$  en la base  $\mathcal{B}$ .

Reflexionemos un segundo acerca de lo que acabamos de hacer. Dado un subespacio  $U$ , queríamos caracterizarlo como el conjunto de vectores que verificaban un conjunto de ecuaciones.

Pues bien, dada una base de  $U$ , hemos conseguido una serie de ecuaciones tales que, dado un vector  $u = (u_1, \dots, u_n)_{\mathcal{B}} \in E$ , nos escupen un sistema de  $n$  ecuaciones lineales con  $r$  incógnitas, que, en caso de resultar ser incompatible nos avisa de que  $u \notin U$ , y en caso contrario, tras la resolución del sistema obtenemos las coordenadas de  $u$  en la base  $\mathcal{B}_U$ .

Sin embargo, esto se puede afinar un poco más todavía. Es por eso que en el siguiente apartado se estudian las coordenadas cartesianas o implícitas.

Nótese que el camino que hemos hecho también es de vuelta, ya que, dadas unas ecuaciones paramétricas de un subespacio, podemos hallar una base del mismo, basta tomar las columnas de la matriz de coeficientes.

De momento tenemos:

$$\boxed{\text{BASE}} \rightleftharpoons \boxed{\text{EC. PARAMÉTRICAS}}$$

### Ecuaciones Cartesianas o Implícitas

Como dijimos en el apartado anterior, las ecuaciones paramétricas son un gran paso, pero deben afinarse un poco más, pues aún no son un conjunto de ecuaciones lineales homogéneas que caractericen por sí solas al subespacio  $U$ .

A continuación daremos dos métodos para hallar las ecuaciones cartesianas a partir de las ecuaciones paramétricas. A uno de ellos le bautizaremos cariñosamente como “método ortopédico”.

**Método Ortopédico** Como ya aventuramos en el apartado anterior, si insertamos un vector  $x \in U$  a las ecuaciones  $X = P\Lambda$ , se nos remitía a un sistema de ecuaciones lineales compatible determinado.

Esto quiere decir, por el teorema de Rouché–Frobenius que:

$$\text{rg}(P|X) = \text{rg}(P)$$

Por ende ninguna submatriz cuadrada de la matriz ampliada  $(P|X)$  es regular, es decir, todas tienen determinante nulo.

Esto es maravilloso, puesto que proporciona un conjunto de ecuaciones lineales homogéneas (nunca podrán ser no lineales ya que las incógnitas se encuentran en la misma columna de la matriz ampliada).

**Observaciones** Dicho lo cual, si  $x \in U$ , insertando el vector en las ecuaciones obtenidas, las deberá verificar a la fuerza, con lo que lo hemos conseguido, hemos caracterizado a un subespacio mediante el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales.

Para realizar el camino de vuelta, es decir, deducir unas ecuaciones paramétricas a partir de unas implícitas, basta resolver el sistema de ecuaciones homogéneo (cosa siempre posible).

Con lo que tenemos:

$$\boxed{\text{BASE}} \Leftrightarrow \boxed{\text{EC. PARAMÉTRICAS}} \Leftrightarrow \boxed{\text{EC. CARTESIANAS}}$$

Antes de meternos con el segundo método (que aligera los cálculos), necesitamos ver la relación que existe entre el número de ecuaciones cartesianas y la dimensión del subespacio al que caracterizan.

**Proposición A.2.1** (Ecuaciones Cartesianas y Dimensión). *Sea  $U$  un subespacio vectorial de dimensión  $r$  de  $E$ , el número de ecuaciones cartesianas esenciales que le caracteriza es igual a su codimensión.*

*Demostración.* Dado un sistema homogéneo de  $n$  ecuaciones lineales, para que su conjunto de soluciones dependa de  $r$  parámetros, es decir, para que obtenegamos unas ecuaciones paramétricas con  $r$  incógnitas, debe haber exactamente  $n - r$  “ecuaciones esenciales”. ■

**Método de Eliminación de Parámetros** Para obtener unas ecuaciones cartesianas a partir de unas ecuaciones paramétricas, basta interpretar a las ecuaciones paramétricas como la solución al sistema homogéneo de ecuaciones lineales que queremos encontrar. Es decir, deberemos aplicar el algoritmo de Gauss–Jordan al revés.



### A.3. Dualidad

Sea  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión  $n$ .

**Definición A.3.1** (Espacio Dual). Se llama *espacio dual* de  $E$  al conjunto todas de las aplicaciones lineales que nacen en  $E$  y mueren en  $\mathbb{K}$ . Es decir:

$$E^* := \{f \in \text{Hom}(E, \mathbb{K})\}$$

A las aplicaciones lineales que conforman el espacio dual se las denomina *formas lineales*.

Nótese que si  $E^*$  recibe el nombre de “espacio”, es porque se lo merece, es decir,  $E^*$  tiene estructura de espacio vectorial (la comprobación es inmediata).

A continuación calculamos de manera inmediata la dimensión del espacio dual.

**Lema A.3.1** (Dimensión del Espacio Dual).  $\dim(E) = \dim(E^*)$

*Demostración.* contenidos... ■

#### A.3.1. Formas Lineales e Hiperplanos

Antes de comenzar, fijemos una base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Asimismo fijamos la base  $\{1\}$  de  $\mathbb{K}$ . Es claro que una forma lineal  $h \in E^*$ , tiene por matriz asociada cierta matriz  $1 \times n$ , a la que denotaremos simplemente  $M$ .

Como ya sabemos, para cada vector  $u \in E$ , el valor  $h(u)$  viene dado por:

$$h(u) = MX$$

Siendo  $X$  la matriz columna compuesta por las coordenadas de  $u$  en la base  $\mathcal{B}$ . Es decir, la expresión anterior no es más que el producto de una matriz fila por una matriz columna, desarrollémoslo:

$$h(u) = (h(e_1) \quad \cdots \quad h(e_n)) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = h(e_1)u_1 + \cdots + h(e_n)u_n$$

Como sabemos, el kernel, o núcleo, de una aplicación lineal cualquiera, es un subespacio vectorial del espacio de donde nace.

Refrescando brevemente la fórmula de Grassmann para aplicaciones lineales:

$$\dim(\ker(h)) + \dim(\text{im}(h)) = \dim(E)$$

A no ser que  $h$  sea la aplicación idénticamente nula, se tiene que  $\dim(\text{im}(h)) = 1$ , y, por ende, la dimensión del kernel es  $n - 1$ . Equivalentemente,  $\ker(h)$  es un hiperplano de  $E$ . Y, por ende, tendrá ciertas ecuaciones cartesianas, en concreto una ecuación cartesiana, por ser  $1 = \text{codim}(\ker(h))$ .

Pero esta ecuación cartesiana salta a la vista. No es otra que:

$$h(e_1)u_1 + \cdots + h(e_n)u_n = 0$$

Esto es evidente ya que esa es la definición del núcleo de  $h$ . El conjunto de aquellos vectores que, pasados por  $h$ , se anulan.

Veamos ahora que, todo hiperplano  $H$  de  $E$ , está asociado a alguna forma lineal  $h$  de  $E^*$ . El recíproco ya lo hemos visto, ya que el núcleo de toda forma lineal no nula es un hiperplano. En términos de biyecciones:

**Lema A.3.2** (Pseudolema de la Correspondencia). *La aplicación:*

$$\begin{aligned} E^* &\rightarrow \mathcal{H} \\ h &\mapsto \ker(h) \end{aligned}$$

*es sobreyectiva.*

$\mathcal{H}$  denota el conjunto de los hiperplanos de  $E$ .

*Demostración.* Dado un hiperplano  $H$ , basta con deducir una ecuación cartesiana suya. Que será de la forma  $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ . A partir de aquí, basta con construir la forma lineal cuya matriz asociada es:

$$(\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_n)$$

En efecto, el kernel de dicha aplicación viene dado por una ecuación lineal homogénea que coincide con la ecuación cartesiana de  $H$ . ■

Sin embargo, la aplicación del lema A.3.2 no es biyectiva. Dado un hiperplano  $H$  existen infinitud de formas lineales cuyo núcleo es  $H$ . Por ende, ahora nos interesa encontrar relaciones entre las formas lineales con idéntico núcleo.

**Lema A.3.3** (Lema de la Correspondencia). *Todas las formas lineales asociadas a un mismo hiperplano  $H$  son múltiplos entre si. En términos de aplicaciones:*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E^*) &\rightarrow \mathcal{H} \\ [h] &\mapsto \ker(h) \end{aligned}$$

*es biyectiva. Es decir, los hiperplanos de  $E$  están en biyección con las rectas vectoriales de  $E^*$ .*

*Demostración.* Sea un hiperplano  $H$ , podemos escoger una ecuación cartesiana suya y fabricar, como hicimos en el lema A.3.2 una forma lineal cuyo núcleo tenga la misma ecuación cartesia que  $H$ . Ahora, si cogemos una ecuación cartesiana de  $H$  equivalente a la primera que escogimos, es decir, con el mismo conjunto de soluciones, o lo que es lo mismo, una ecuación que sea múltiplo de la primera, fabricaremos una forma lineal que será múltiplo de la primera. ■

### A.3.2. Dualidad Canónica

En esta sección tratamos de generalizar lo dicho en el caso anterior. Es decir, trataremos de identificar variedades lineales arbitrarias con variedades lineales del dual correspondiente.

En el caso de los hiperplanos, los identificábamos con el conjunto de las formas lineales cuyo núcleo era dicho hiperplano. Dicho de otra forma, el conjunto de las aplicaciones lineales que anulaban todos los vectores del hiperplano.

Siguiendo esta idea, la definimos en un ámbito más general.

**Definición A.3.2** (Anulador de un Subconjunto). Sea  $S$  un subconjunto de  $E$ , denominamos *anulador de  $S$*  al conjunto de las formas lineales tales que anulan todos los vectores de  $S$ . Es decir:

$$S^\perp = \{f \in E^* \mid f(u) = 0 \ \forall u \in S\}$$

Es un ejercicio de cálculo rutinario la demostración de que el anulador de un subespacio de  $E$  es un subespacio de  $E^*$ .

Una propiedad interesante de los anuladores es que el anulador de un subconjunto  $S$ , coincide con el anulador de la variedad lineal engendrada por  $S$ . Veámoslo.

**Lema A.3.4** (Anuladores y Variedades Engendradas). *Sea  $S$  un subconjunto arbitrario no vacío de  $E$ , entonces:*

$$S^\perp = \mathcal{L}(S)^\perp$$

*Demostración.*  $\square$  Consideremos una forma lineal  $f \in S^\perp$ , como todo vector de  $x \in \mathcal{L}(S)$  se escribe de la forma  $x = \alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_r s_r$ , está claro que, usando la linealidad de  $f$ ,  $f(x) = 0$ .

$\square$  Como  $S \subset \mathcal{L}(S)$ , toda forma lineal que anule los vectores de  $\mathcal{L}(S)$  también anulará a los vectores de  $S$ . ■

Intentemos reeditar el lema de la correspondencia del apartado anterior, tratando de identificar a cada subespacio de  $E$  con su anulador correspondiente.

**Lema A.3.5** (Lema de la Correspondencia). *Los subespacios de  $E$  están en biyección con los subespacios de  $E^*$  de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &\rightarrow \mathcal{U}^* \\ U &\mapsto U^\perp\end{aligned}$$

Donde  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{U}^*$  denotan el conjunto de los subespacios de  $E$  y  $E^*$  respectivamente.

*Demostración.* Para la sobreyectividad basta ver que todo subespacio  $W$  de dimensión  $r$  de  $E^*$  es el anulador de un cierto subespacio  $U$ .

Buscamos el probar que el conjunto de vectores de  $E$  que son anulados por todas las formas lineales de  $W$  es un subespacio vectorial de  $E$ .

Para verlo, notamos que  $W$  tendrá una cierta base compuesta de  $r$  formas lineales. Esto tiene importancia, ya que cada vector que sea anulado por todas las formas lineales de la base, también lo será, por linealidad, por todas las aplicaciones de  $W$ .

Dicho lo cual, tenemos que:

$$W = \mathcal{L}(f_1, \dots, f_r)$$

Dichas formas lineales tendrán ciertas matrices asociadas:

$$f_i \equiv (a_1^i \quad \dots \quad a_n^i)$$

Sabemos que, dado un vector  $x = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$ , su valor por  $f_i$  viene dado por la ecuación:

$$f_i(x) = a_1^i x_1 + \dots + a_n^i x_n$$

Así, pues el conjunto de los vectores tales que son anulados por las formas lineales de  $W$  es el conjunto de vectores que cumplen las ecuaciones:

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + \dots + a_n^1 x_n = 0 \\ \vdots \\ a_1^r x_1 + \dots + a_n^r x_n = 0 \end{cases}$$

Estas ecuaciones pueden interpretarse por las ecuaciones cartesianas de cierto subespacio  $U$  de dimensión  $n - r$  cuyo anulador es precisamente  $W$ .

Lo anterior también prueba la inyectividad. ■

Obsérvese que hemos probado algo bastante importante además de lo queríamos probar en un principio, y es que, las dimensiones de un subespacio y su anulador suman la dimensión del espacio total, es decir:

$$\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(E) \tag{A.15}$$

De esto se desprenden muchas propiedades muy útiles, tal y como muestra la siguiente proposición.

**Proposición A.3.6** (Propiedades de la Dualidad). *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Los contenidos se invierten al dualizar. Es decir:*

$$W \subset U \Leftrightarrow U^\perp \subset W^\perp$$

2. *Las sumas se convierten en intersecciones al dualizar:*

$$(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$$

3. *Las intersecciones se convierten en sumas:*

$$(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$$

*Demostración.* PENDIENTE ■

**A.3.3. Principio de Dualidad**

SON PÁRRAFOS INCONEXOS, REVISAR

Todo enunciado tiene un enunciado dual, y si es cierto uno es cierto el otro.

Como los espacios vectoriales  $E$  y  $E^*$  son isomorfos por tener la misma dimensión, todas las propiedades que sean ciertas en uno serán ciertas en el otro.

Todas las propiedades válidas en  $E^*$ , lo son en  $E$  aplicando la biyección de la dualidad canónica, ya que es un espacio vectorial.

Las propiedades de la dualidad canónica actúan como un diccionario que traduce los enunciados del espacio vectorial usual al espacio vectorial dual.

**Ejemplo A.3.1** (Principio de Dualidad). Sea un  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión 3.

Entonces, se tiene que dos rectas distintas generan un plano.

En efecto, esto puede demostrarse fácilmente mediante la fórmula de Grassmann.

Por el principio de dualidad, los respectivos anuladores de dichas dos rectas se intersectan en el anulador de un plano.

Traduciendo por la propiedad de las dimensiones complementarias:

Dos planos se intersectan en una recta.

Este último enunciado no hay que probarlo ya que es lo que se llama enunciado dual del primero, y por las propiedades anteriormente demostradas es trivialmente cierto.

La idea del principio de dualidad es que, demostrando un teorema, ya sea en el espacio habitual o en el espacio dual, obtenemos el teorema dual de forma automática y gratuita.