Topología Elemental

Álvaro García Tenorio   Manuel Navarro García   Iván Prada Cazalla
Álvaro Rodríguez García   Clara Rodríguez Núñez

24 de mayo de 2017

Índice general

Prefacio

Estas notas son una transcripción libre de las clases de la asignatura "*Topología Elemental*", impartidas por Jesús María Ruiz Sancho en el curso 2016–2017 a los cursos de tercero de los Dobles Grados de Matemáticas e Informática y Matemáticas y Física en la facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (UCM).

Agradecimientos

En primer lugar hay que agradecer a todos aquellos que han estado pendientes de la evolución del texto durante su proceso de construcción, corrigiendo numerosas faltas de estilo, erratas de toda la clase, e incluso, colaborando en mayor o menor medida con la redacción del mismo.

Entre ellos queremos destacar a María José Belda Beneyto, Clara Isabel López González, Belén Serrano Antón y Miguel Pascual Domínguez.

Por otra parte, en términos de dominio de LaTeX y otras diversas herramientas que han mejorado mucho este texto destacamos especialmente a uno de los autores, Álvaro Rodríguez García.

Parte I

Topología general

Capítulo 1

Espacios topológicos

La necesidad del estudio de la proximidad y continuidad, de la forma más abstracta posible, (absteniéndose del uso de la noción de distancia) dio origen a la Topología.

La idea de espacio topológico se comenzó a desarrollar durante los siglos XIX y XX por matemáticos como Fréchet, Kuratowski, Alexandroff y Hausdorff entre otros.

La definición inicial de estos espacios se puede encontrar en el libro ***"Grundzüge der Mengenlehre"***[1] publicado por este último autor.

Al comienzo de este capítulo introducimos la noción moderna de espacio topológico, añadiendo unos cuantos ejemplos, y posteriormente, presentaremos los conjuntos abiertos y cerrados y sus relaciones.

1.1. Espacios topológicos. Definición y ejemplos.

Comenzamos, como no podía ser de otra manera, definiendo la estructura sobre la que trabajaremos a lo largo de todas estas notas, los llamados espacios topológicos.

Definición 1.1.1 (Espacio topológico)**.** Un ***espacio topológico*** es un conjunto arbitrario no vacío $\mathcal{X}$ equipado con una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ que cumplen las siguientes propiedades:

1. El vacío y el total están en la colección $\mathcal{T}$, es decir, $\{\emptyset, \mathcal{X}\} \subset \mathcal{T}$
2. La unión arbitraria de conjuntos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$. Escrito de forma más rigurosa, pero desde luego, menos elegante, $\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i \in \mathcal{T}$ donde cada $\mathcal{U}_i \in \mathcal{T}$.
3. La intersección finita de conjuntos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$. O, dicho de otra forma, $\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i \in \mathcal{T}$ donde cada $\mathcal{U}_i \in \mathcal{T}$.

A menudo hablaremos tan solo de ***espacio*** para referirnos a los espacios topológicos.

Hagamos un par de pequeñas observaciones antes de continuar con nuestro recién empezado viaje cósmico–topológico.

Observación 1.1.1 (Sutilezas)**.** Se desprende de la definición 1.1.1 que un espacio topológico no es más que un par $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$. Como es natural, salvo que sea necesario, nos referiremos a un espacio topológico por el conjunto que lo conforma, al igual que hacemos en casi todas las ramas de las matemáticas (Espacios Vectoriales, Grupos, Anillos,...). $\diamondsuit$

Introducimos ahora un poco de terminología con la que el lector no tiene más remedio que hacerse familiar.

Observación 1.1.2 (Terminología)**.** A la familia de conjuntos $\mathcal{T}$ que conforman un espacio topológico $\mathcal{X}$ se le denomina ***topología*** de $\mathcal{X}$.

Asimismo, los conjuntos que constituyen los elementos de $\mathcal{T}$ reciben el nombre de ***abiertos*** de $\mathcal{X}$. Normalmente los denotaremos con las letras $\mathcal{U}$ o $\mathcal{W}$.

Como es evidente, nos referiremos a los elementos de $\mathcal{X}$ como ***puntos***. $\diamondsuit$

[1] "Teoría abstracta de conjuntos", publicado en 1914 por ***Félix Hausdorff*** (1868-1942).

Introducimos ahora unos pocos ejemplos para irnos familiarizando con el concepto de espacio topológico viendo lo general que puede llegar a ser.

Ejemplo 1.1.1 (Topologías)**.** Las demostraciones de que, efectivamente, se cumplen las restricciones impuestas por la definición 1.1.1, o bien ya se han hecho en cursos anteriores, o bien se dejan al lector como ejercicio inmediato.

1. Un espacio métrico (M, d) es un espacio topológico con la topología definida por los conjuntos abiertos en el sentido de los espacios métricos, es decir

$$\mathcal{T} = \{\mathcal{U} \subset M \ : \ \forall x \in \mathcal{U} \ \exists \ \mathrm{B}_d(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}\} \tag{1.1}$$

   A esta topología la llamamos ***topología usual***.

2. Una topología interesante por su simpleza, y por que dota a cualquier conjunto no vacío $\mathcal{X}$ con estructura de espacio topológico, es la llamada ***topología trivial***, que viene definida por

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathcal{X}\} \tag{1.2}$$

3. Siguiendo la idea del ejemplo anterior, pero a la inversa, encontramos una topología que también dota de estructura topológica a cualquier conjunto no vacío $\mathcal{X}$. Esta topología viene dada por

$$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathcal{X}) \tag{1.3}$$

   A esta topología la llamaremos ***topología discreta***.

4. Como último ejemplo curioso nos queda la llamada ***topología del punto***. Consiste en considerar como abiertos a todos los subconjuntos de un conjunto $\mathcal{X}$ que contengan a un determinado punto a. Es decir

$$\mathcal{T}_a = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{X} \ : \ a \in \mathcal{U}\} \cup \{\emptyset\} \tag{1.4}$$

Con lo que ya tenemos una gama lo suficientemente amplia de ejemplos como para ir tirando. ♢

Para finalizar la sección observamos que en un mismo conjunto $\mathcal{X}$ podemos definir diversas topologías. Dichas topologías pueden "compararse" en determinado contexto.

Definición 1.1.2 (Relación de orden entre topologías)**.** Consideremos $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías definidas sobre un conjunto $\mathcal{X}$.

Si se verifica que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ diremos que $\mathcal{T}$ es más ***gruesa*** que $\mathcal{T}'$ y que $\mathcal{T}'$ es más ***fina*** que $\mathcal{T}$.

En lo que resta de capítulo iremos introduciendo algunos conceptos generales de los que haremos uso de forma constante a lo largo del curso.

1.2. Conjuntos abiertos e interior

En esta sección introducimos el concepto de entorno, cuya utilidad inmediata es caracterizar a los conjuntos abiertos de un espacio topológico $\mathcal{X}$.

Definición 1.2.1 (Entorno de un punto)**.** Un ***entorno*** de un punto $a \in \mathcal{X}$ es un conjunto que contiene a un abierto que contiene al punto a.

Normalmente denotaremos con la letra $\mathcal{V}$ a los entornos, esta costumbre se debe a un galicismo. Escribamos la definición de entorno 1.2.1 de forma conjuntista para que no quede ninguna duda. Dado $\mathcal{V}$ es un entorno de $a \in \mathcal{X}$ si existe un abierto $\mathcal{U}$ de forma que

$$a \in \mathcal{U} \subset \mathcal{V} \tag{1.5}$$

Como ya adelantamos, se puede usar la noción de entorno para caracterizar a los abiertos, tal y como muestra el siguiente lema.

Lema 1.2.1 (Caracterización de abiertos)**.** *$\mathcal{U}$ es abierto si y solo si es entorno de todos sus puntos.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U}$ es abierto, entonces, dado un punto $a \in \mathcal{U}$ es evidente que $\mathcal{U}$ contiene a un abierto (él mismo) que contiene al punto a. Luego $\mathcal{U}$ es, trivialmente, entorno de todos sus puntos.

Recíprocamente, si $\mathcal{U}$ es entorno de todos sus puntos, entonces, para cada punto $a \in \mathcal{U}$ se cumple que

$$a \in \mathcal{U}_a \subset \mathcal{U}$$

de donde se desprende que

$$A := \bigcup_{a \in \mathcal{U}} \mathcal{U}_a \subset \mathcal{U}$$

Más aún, se da la otra contención, y además, de forma trivial, ya que todo punto de $\mathcal{U}$ pertenece a algún $\mathcal{U}_a$, luego también a la unión de todos. Luego

$$\mathcal{U} = A$$

Como la unión arbitraria de abiertos es abierto, A es abierto, con lo que se sigue el resultado. ■

En general, un conjunto será entorno de algunos de sus puntos, en principio no de todos. De esta idea surge la siguiente definición.

Definición 1.2.2 (Punto interior)**.** Dado un conjunto $A \subset \mathcal{X}$, diremos que un punto $a \in \mathcal{X}$ es un ***punto interior*** de A si A es entorno de a.

Esto pretende modelizar matemáticamente la idea de "estar muy metido dentro de algo".

Será algo habitual de ahora en adelante tratar de determinar el conjunto de puntos interiores de un determinado conjunto $A \subset \mathcal{X}$, a este conjunto se le denomina ***interior*** de $\mathcal{X}$.

Antes de continuar, fijemos unas cuantas notaciones que utilizaremos según el contexto para referirnos al interior de un conjunto.

$$\mathrm{Int}_{\mathcal{X}}(A) = \mathring{A} = \mathrm{Int}(A) \tag{1.6}$$

Merece la pena notar que el interior de un conjunto puede ser el conjunto vacío, así como que trivialmente se da la desigualdad conjuntista

$$\mathring{A} \subset A \tag{1.7}$$

Veamos ahora unos resultados elementales, pero a la vez cruciales, del interior de un conjunto.

Lema 1.2.2 (Apertura del interior)**.** *El interior de un conjunto A es un abierto.*

Demostración. Para probar esto haremos uso del lema 1.2.1, es decir, trataremos de ver que es entorno de todos sus puntos.

En efecto, dado un punto $a \in \mathring{A}$, existe un abierto $\mathcal{U}_a \subset A$ de manera que $a \in \mathcal{U}_a$. Luego para ver que $\mathring{A}$ es un entorno de a basta demostrar la inclusión $\mathcal{U}_a \subset \mathring{A}$, hagámoslo.

Sea $x \in \mathcal{U}_a \subset A$, es claro que A es entorno de x, luego $x \in \mathring{A}$.

Con lo cual hemos demostrado que $\mathring{A}$ es entorno de todos sus puntos. ■

El otro resultado elemental que caracteriza al interior de un conjunto A, es que es el mayor abierto contenido en A.

Presentamos aquí los primeros pasos de la demostración por ser especialmente útiles y omnipresentes en las matemáticas en general.

Como la unión de abiertos es abierto, es claro que una forma de construir el mayor abierto contenido en cierto conjunto es, coleccionar los abiertos contenidos en dicho conjunto y unirlos. Escrito formalmente, tomamos el conjunto

$$B := \bigcup_{\mathcal{W} \subset A} \mathcal{W} \text{ con } \mathcal{W} \text{ abierto.} \tag{1.8}$$

Es claro que $B \subset A$, ya que es una unión de conjuntos contenidos en A, además, si hubiera un abierto más grande contenido en A que B, este pertenecería a la familia de conjuntos que estamos uniendo, lo cual es absurdo.

Presentamos el final de la demostración en forma de lema.

Lema 1.2.3 (Caracterización del interior)**.** *El interior de un conjunto A es el mayor abierto contenido en A.*

Demostración. Por el lema 1.2.2 sabemos que $\mathring{A}$ es abierto, luego, por la ecuación (1.8) solo queda probar la igualdad

$$\mathring{A} = \bigcup_{\mathcal{W} \subset A} \mathcal{W} \subset A$$

Y esto es prácticamente trivial. Veámoslo.

Por una parte, $\mathring{A}$ es un abierto contenido en A, luego está contenido en la unión de los abiertos contenidos en A.

Por otra parte, dado $x \in \bigcup_{\mathcal{W} \subset A} \mathcal{W}$, es claro que, como $\bigcup_{\mathcal{W} \subset A} \mathcal{W} \subset A$ es un abierto, A es entorno de x, luego $x \in \mathring{A}$, lo que concluye la demostración. ■

El lema 1.2.3 es bastante fuerte y produce algunos corolarios interesantes que presentamos a modo de observaciones.

Observación 1.2.1 (Propiedades del interior)**.** Enumeramos algunas propiedades del interior.

1. El interior del interior de un conjunto es el interior de dicho conjunto. Si lo escribimos sin que suene como un trabalenguas tenemos

   $$\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A} \tag{1.9}$$

   Esto es trivial ya que al ser $\mathring{A}$ un abierto, el mayor abierto contenido en él es él mismo.

2. Un conjunto es abierto si y solo si coincide con su interior, es decir

   $$A = \mathring{A} \tag{1.10}$$

   Esto es cierto por la misma razón que lo es la ecuación (1.9).

3. Los interiores preservan las contenciones. O lo que es lo mismo

   $$A \subset B \implies \mathring{A} \subset \mathring{B} \tag{1.11}$$

   Por la desigualdad (1.7) es claro que $\mathring{A} \subset B$, y como $\mathring{B}$ es el mayor abierto contenido en B, y $\mathring{A}$ es un abierto contenido en B, es claro que $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

Esto ya nos da cierta artillería para defendernos con estos conjuntos. ♢

Con esto podemos decir que ya hemos liquidado todo lo referente a conjuntos abiertos.

1.3. Conjuntos cerrados y adherencia

En esta sección estudiaremos los conjuntos cerrados.

Cabe destacar que la noción de ser cerrado no es exactamente la contraria a la de ser abierto, ya que, como veremos más adelante, hay conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados así como conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez.

Definición 1.3.1 (Conjunto cerrado)**.** Un conjuto $\mathcal{F}$ de un espacio topológico $\mathcal{X}$ se dice ***cerrado*** si su complementario, $\mathcal{X} \setminus \mathcal{F}$, es abierto.

Usualmente denotaremos a los conjuntos cerrados con las letras $\mathcal{F}$ o $\mathcal{H}$.

Usando propiedades básicas de teoría de conjuntos se obtienen algunas propiedades elementales de los conjuntos cerrados.

Lema 1.3.1 (Propiedades de los cerrados)**.** *Dado un espacio topológico $\mathcal{X}$ se verifica*

1. *El vacío y el total son cerrados.*

2. *La intersección arbitraria de cerrados es cerrada.*

3. *La unión finita de cerrados es cerrada.*

Demostración. Vayamos caso por caso.

1. $\mathcal{X}$ es cerrado pues $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X} = \emptyset$ es abierto.
   Asimismo, $\emptyset$ es cerrado pues $\mathcal{X} \setminus \emptyset = \mathcal{X}$ es abierto.
2. $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ es cerrado ya que
   $$\mathcal{X} \setminus \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i \right) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{X} \setminus \mathcal{F}_i$$
   es abierto por ser la unión arbitraria de abiertos un abierto.
3. $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$ es cerrado, basta tomar el complementario y ver que es abierto por ser intersección finita de abiertos.
   $$\mathcal{X} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{X} \setminus \mathcal{F}_i$$

Con lo que concluye la demostración. ■

Observación 1.3.1 (Abiertos y cerrados a la vez)**.** Basta con mirar con atención este lema 1.3.1 para darse cuenta de que hemos encontrado dos conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez, el vacío y el total.

Estos conjuntos abiertos y cerrados a la vez (o "***clopens***", del inglés close–open) son de vital importancia a la hora de estudiar la conexión, como veremos más adelante. ♢

Introducimos ahora un concepto elemental pero interesante, el concepto de puntos adherentes y adherencia.

Definición 1.3.2 (Punto adherente)**.** Un punto $a \in \mathcal{X}$ se dice ***adherente*** a un conjunto $A \subset \mathcal{X}$ si todo entorno de a corta al conjunto A.

Esta definición pretende modelizar la idea de estar "muy pegado" a algo.

Observación 1.3.2 (Definición equivalente)**.** Podríamos haber sustituido la definición 1.3.2 por una igual pero cambiando la palabra entorno por la palabra abierto.

La comprobación de que esto se puede hacer es inmediata y se deja al lector. ♢

Como ya es habitual, coleccionaremos los puntos adherentes a un conjunto dado y estudiaremos las propiedades del conjunto de puntos adherentes. Introduzcamos una definición para verlo formalmente.

Definición 1.3.3 (Adherencia)**.** Se define la ***adherencia*** o ***clausura*** de un conjunto $A \subset \mathcal{X}$ como el conjunto de los puntos adherentes de A.

Usualmente denotaremos a la adherencia de alguna de las siguientes formas

$$\mathrm{Adh}_{\mathcal{X}}(A) = \mathrm{Adh}(A) = \overline{A} \tag{1.12}$$

Vamos a desgranar ahora una serie de resultados que nos van a hacer ver que adherencia e interior de un conjunto son, de alguna manera, conceptos duales.

Comenzamos en primer lugar con algo casi trivial.

Observación 1.3.3 (Adherencia y conjunto)**.** Es claro que se verifica que

$$A \subset \overline{A} \tag{1.13}$$

Esto es debido a que, evidentemente, cualquier entorno de a contiene al punto a, luego, por definición, corta al conjunto A.

Visto en perspectiva, esta desigualdad es de alguna manera la dual a la (1.7).

Además, combinando ambas desigualdades obtenemos que un conjunto siempre queda "ensandwichado" entre su interior y su adherencia.

$$\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$$

Lo cual puede resultar de utilidad. ♢

Lema 1.3.2 (Clausura de la adherencia)**.** *La adherencia de un conjunto A es un cerrado.*

Demostración. Usaremos lo único que tenemos, es decir, la definición de conjunto cerrado. Por ende, probaremos que $\mathcal{X} \setminus \overline{A}$ es abierto, para lo cual veremos que es entorno de todos sus puntos, haciendo buen uso del lema 1.2.1.

Dado $x \in \mathcal{X} \setminus \overline{A}$, como x no es un punto adherente, entonces existirá un entorno $\mathcal{V}(\ni x)$, el cual podemos escoger abierto sin pérdida de generalidad tal que se verifica

$$\mathcal{V} \cap A = \emptyset$$

Si consiguiéramos demostrar que se de la igualdad

$$\mathcal{V} \cap \overline{A} = \emptyset$$

habríamos acabado ya que tendríamos que $x \in \mathcal{V} \subset \mathcal{X} \setminus \overline{A}$, que es, por definición que $\mathcal{X} \setminus \overline{A}$ sea entorno de x.

En efecto, la comprobación de esta igualdad es muy fácil, ya que, si tomamos un $y \in \mathcal{V}$, al ser $\mathcal{V}$ abierto, es entorno de y.

Por tanto, tendríamos que el punto y no es adherente, ya que existe un entorno, el propio $\mathcal{V}$ que no corta con el conjunto A, incumpliendo así la definición 1.3.2. ■

Continuamos esta dualización de conceptos dándonos cuenta de que la adherencia es el menor cerrado que contiene a A. Como antes, parte de la demostración se basa en un procedimiento estándar que pasamos a explicar.

Es fácil darse cuenta de que, como la intersección arbitraria de cerrados es un cerrado, el menor conjunto cerrado que contiene a uno dado puede ser construido de la siguiente manera

$$B := \bigcap_{\mathcal{H} \supset A} \mathcal{H} \tag{1.14}$$

En efecto es un conjunto que contiene a A ya que todos los conjuntos de la familia a intersecar contienen a A, además, es el menor de ellos, ya que, de haber uno más pequeño, pertenecería a la familia que se está intersecando, lo cual es absurdo (¡compruébese!).

Presentamos, otra vez, en forma de lema, el resto de la demostración.

Lema 1.3.3 (Caracterización de la adherencia)**.** *La adherencia de un conjunto A es el menor cerrado que contiene a A.*

Demostración. Por la ecuación (1.14) la demostración se reduce a comprobar que

$$\overline{A} = \bigcap_{\mathcal{H} \supset A} \mathcal{H}$$

Y esto es una comprobación inmediata.

Por un lado, como $\overline{A}$ es un cerrado que contiene a A, es claro que $\overline{A}$ se encuentra en la familia a intersecar, luego contiene a la intersección de la familia.

Recíprocamente, dado un punto adherente x, si hubiera un conjunto $\mathcal{H}$ de la familia tal que $x \notin \mathcal{H}$, entonces tendríamos que $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{H} \subset \mathcal{X} \setminus A$.

Como $\mathcal{H}$ es cerrado, $\mathcal{X} \setminus \mathcal{H}$ es abierto, y, por tanto existirá un entorno $\mathcal{V}$ de x de manera que

$$x \in \mathcal{V} \subset \mathcal{X} \setminus \mathcal{H} \subset \mathcal{X} \setminus A$$

Y, por ende, $\mathcal{V} \cap A = \emptyset$, contra la definición de punto adherente. ■

Presentamos a continuación unas cuantas igualdades conjuntistas que pueden resultar bastante útiles al lector.

Proposición 1.3.4 (Complementario de la adherencia)**.**

$$\mathcal{X} \setminus \overline{A} = \operatorname{Int}(\mathcal{X} \setminus A)$$

Demostración. Procedemos por doble contención.

$\boxed{\subset}$ Sea $z \in \mathcal{X} \setminus \overline{A}$. Como z no es adherente a A, por definición (1.3.3) habrá un entorno $\mathcal{V}_z$ de z de manera que $\mathcal{V}_z \cap A = \emptyset$. En particular, podremos extraer un entorno abierto $\mathcal{U}_z$ tal que verifique

$$\mathcal{U}_z \cap A = \emptyset$$

Tratamos de demostrar que z es punto interior de $\mathcal{X} \setminus A$, esto es, por definición (1.2.2), que $\mathcal{X} \setminus A$ sea entorno de z, esto a su vez significa que hay un abierto $\mathcal{U}'_z$ contenido en $\mathcal{X} \setminus A$ de forma que $z \in \mathcal{U}'_z$. Así pues el problema se reduce a encontrar dicho entorno, sin embargo, es trivial comprobar el entorno $\mathcal{U}_z$ anteriormente definido cumple los requisitos.

$\boxed{\supset}$ Sea $z \in \mathrm{Int}(\mathcal{X} \setminus A)$, demostremos que z no es adherente a A, para lo cual debemos encontrar un entorno de z, al que llamaremos $\mathcal{V}_z$, de manera que no corte al conjunto A. Esto es trivial, ya que z es punto interior de $\mathcal{X} \setminus A$, luego el propio $\mathcal{X} \setminus A$ es entorno de z, y, evidentemente, no corta a A.

Con lo que concluye la prueba. ■

Insistiendo es esta dualidad vía complementación entre abiertos y cerrados, presentamos un corolario inmediato.

Corolario 1.3.5 (Complementario del interior)**.**

$$\mathcal{X} \setminus \mathring{B} = \mathrm{Adh}(\mathcal{X} \setminus B)$$

Demostración. Nos limitaremos a comprobar que ambos conjuntos tienen el mismo complementario. En efecto, por una parte

$$\mathcal{X} \setminus (\mathcal{X} \setminus \mathring{B}) = \mathring{B}$$

Por otro lado, denotando $A := \mathcal{X} \setminus B$ tenemos

$$\mathcal{X} \setminus \mathrm{Adh}(\mathcal{X} \setminus B) = \mathcal{X} \setminus \overline{A} \overset{\text{Prp.1.3.4}}{=} \mathrm{Int}(\mathcal{X} \setminus A) = \mathrm{Int}(\mathcal{X} \setminus (\mathcal{X} \setminus B)) = \mathrm{Int}(B) = \mathring{B}$$

Con lo que se tiene el resultado. ■

Una última identidad notable, un poco más profunda que las anteriores es la que relaciona la unión de las adherencias con la adherencia de las uniones.

Proposición 1.3.6 (Unión de adherencias)**.** *La unión de las adherencias es la adherencia de las uniones.*

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Demostración. Procedemos por doble contención.

$\boxed{\subset}$ Dado $z \in \overline{A \cup B}$, todo entorno $\mathcal{V}_z$ de z corta a $A \cup B$. Veamos que z es, o bien adherente a A, o bien adherente a B (quizá a ambos). Para ello supondremos que no es adherente a ninguno de ellos, es decir, que existe un entorno $\mathcal{W}_z$ de z que no corta ni a A ni a B. Si este entorno existiera tampoco cortaría a la unión (compruébese), lo cual es absurdo.

$\boxed{\supset}$ Dado un punto $z \in \overline{A} \cup \overline{B}$, veamos que todo entorno de $\mathcal{V}_z$ de z corta a $A \cup B$. Si no lo hiciera, para cada punto $x \in \mathcal{V}_z$, x no estaría en A, luego $A \cap \mathcal{V}_z = \emptyset$. Análogamente ocurriría con B, lo cual contradice nuestra hipótesis.

Con lo que finaliza la demostración. ■

Observación 1.3.4 (Demostración alternativa)**.** Una demostración alternativa y quizá más contundente de la proposición 1.3.6 consistiría en usar las propiedades de distributividad de las operaciones conjuntistas. ♢

Por supuesto, este resultado presenta un dual inmediato.

Corolario 1.3.7 (Intersección de interiores). *El interior de la intersección es la intersección de los anteriores.*

$$\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathring{A} \cap \mathring{B}$$

Demostración. Comprobaremos, como ya hicimos anteriormente, que ambos conjuntos tienen el mismo complementario.

Por un lado

$$\mathcal{X} \setminus \mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Adh}(X \setminus (A \cap B))$$

Recíprocamente

$$\mathcal{X} \setminus (\mathring{A} \cap \mathring{B}) = (\mathcal{X} \setminus \mathring{A}) \cup (\mathcal{X} \setminus \mathring{B}) = \mathrm{Adh}(\mathcal{X} \setminus A) \cup \mathrm{Adh}(\mathcal{X} \setminus B)) = \\ = \mathrm{Adh}((\mathcal{X} \setminus A) \cup (\mathcal{X} \setminus B)) = \mathrm{Adh}(X \setminus (A \cap B))$$

Así, el resultado se sigue. ■

El resultado análogo a la proposición 1.3.6 con la intersección no se da, tal y como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.1 (Cuadrados abiertos). Si consideramos los conjuntos

$$A := (0,1) \times (0,1) \qquad B := (1,2) \times (0,1)$$

En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, es fácil demostrar (se deja al lector) que $\overline{A \cap B} = \emptyset$ mientras que $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\} \times [0,1]$. ♢

Vistas todas estas igualdades, al igual que hicimos en la observación 1.2.1, caractericemos los conjuntos cerrados a partir del concepto de adherencia.

Proposición 1.3.8 (Cerrados y adherencia). *Un conjunto es A cerrado si y solo si coincide con su adherencia. Es decir*

$$A = \overline{A}$$

Demostración. Si A es cerrado, como $\overline{A}$ es el mayor cerrado contenido en A, es claro que se tiene que dar la igualdad $A = \overline{A}$.

Recíprocamente, si se da la igualdad $A = \overline{A}$, como $\overline{A}$ es cerrado, también lo será A. ■

Añadimos una observación final trivial, simplemente por curiosidad.

Observación 1.3.5 (Doble adherencia). Dado un conjunto A, se tiene que

$$\overline{A} = \overline{\overline{A}}$$

Esto es inmediato ya que, como $\overline{A}$ es un cerrado, coincide con su adherencia. ♢

1.4. Puntos de acumulación y conjuntos densos

En esta sección presentamos el concepto de punto de acumulación, que es muy útil para trabajar con sucesiones, como veremos más adelante. Además, definiremos la idea de que un conjunto sea denso de varias maneras que nos serán muy útiles a la hora de resolver problemas.

Definición 1.4.1 (Punto de acumulación). Dado un conjunto A en un espacio topológico $\mathcal{X}$, se dice que un punto $x \in \mathcal{X}$ es un ***punto de acumulación*** de A si todo entorno de $\mathcal{V}_x$ de x verifica que

$$(\mathcal{V}_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

Observación 1.4.1 (Definición equivalente). Una observación análoga a 1.3.2 tienen vigencia aquí también. ♢

Presentemos un poco de terminología para el conjunto de los puntos de acumulación.

Definición 1.4.2 (Conjunto derivado)**.** Al conjunto de los puntos de acumulación de un conjunto A se le denomina ***conjunto derivado***. Usualmente denotaremos al conjunto derivado por A'.

Observación 1.4.2 (Entornos perforados)**.** Cuando consideramos un entorno $\mathcal{V}_x$ de un punto $x \in \mathcal{X}$, a veces (sobre todo cuando hablamos de puntos de acumulación) es útil no considerar el entorno entero, sino el entorno salvo un punto.

Cabe destacar que al conjunto $\mathcal{V}_x \setminus \{x\}$ se le suele denominar ***entorno perforado*** o ***entorno pinchado*** de x. ♢

Una propiedad interesante de los conjuntos derivados se presenta en el siguiente lema.

Lema 1.4.1 (Descomposición de la adherencia)**.**

$$\overline{A} = A \cup A'$$

Demostración. La demostración es inmediata, procedemos por doble contención.

$\boxed{\subset}$ Veamos que todos los puntos de $\overline{A} \setminus A$ están en A'. En efecto, dado un $x \notin A$ adherente a A se tiene que para todo entorno $\mathcal{V}_x$ de x

$$\mathcal{V}_x \cap A \neq \emptyset$$

Como $x \notin A$ se tiene que $(\mathcal{V}_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, cumpliendo la definición de punto de acumulación.

$\boxed{\supset}$ Es evidente que $A \subset \overline{A}$, luego solo queda comprobar que $A' \subset \overline{A}$. Esto es trivial y se deja al lector la comprobación.

Como queríamos demostrar. ■

Parémonos un segundo a reflexionar sobre las implicaciones de este resultado.

Observación 1.4.3 (Acumulación y cerrados)**.** Es claro que un conjunto es cerrado si y solo si contiene a todos sus puntos de acumulación.

Esto es consecuencia directa de la proposición 1.3.8 y el lema 1.4.1. ♢

Cabe señalar que, claramente, esta descomposición, en general, no es un partición, tal y como muestra el siguiente sencillo ejemplo.

Ejemplo 1.4.1 (Disco)**.** Si consideramos el disco unidad D en $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, es fácil demostrar que sus puntos de acumulación coinciden con su adherencia, con lo que obtenemos que

$$\overline{D} \setminus D \subsetneq D' \tag{1.15}$$

En general (compruébese) se verifica que $\overline{A} \setminus A \subset A'$. ♢

Según uno echa un ojo a la definición 1.4.1 le dan ganas de ver qué pasa con aquellos puntos que no cumplen esta definición por los pelos. Para esto introducimos la siguiente definición.

Definición 1.4.3 (Puntos aislados)**.** Se llaman ***puntos aislados*** de un conjunto A, a aquellos puntos de A que no son puntos de acumulación. Es decir, a los puntos $x \in A$ que poseen un entorno que cumple

$$\mathcal{V}_x \cap A = \{x\}$$

Por el momento no usaremos mucho esta definición, aunque la dejamos aquí aparcada por si las moscas.

Pasamos ahora a definir el concepto de densidad de un conjunto.

Definición 1.4.4 (Conjunto denso)**.** Decimos que un conjunto A es ***denso*** en un espacio topológico $\mathcal{X}$ si la adherencia de A es el propio espacio $\mathcal{X}$. Es decir

$$\overline{A} = \mathcal{X}$$

Esta definición es poco manejable en algunas circunstancias. Lo bueno que tiene es que, con relativamente poco esfuerzo podemos dar una definición equivalente en unos términos un poco más sencillos, tal y como muestra la siguiente proposición.

Proposición 1.4.2 (Caracterización de la densidad)**.** *Son equivalentes:*

1. *A es denso.*

2. *Todo abierto no vacío $\mathcal{U}$ contiene algún punto de A.*

Demostración. Veamos ambas implicaciones

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sea $\mathcal{U}$ un abierto de $\mathcal{X}$. Por ser $\mathcal{U}$ abierto, es entorno de todos sus puntos. En particular, si $x \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ es entorno de x, luego, por ser A denso, $\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $x \in X$ un punto cualquiera, tomemos un entorno arbitrario suyo $\mathcal{V}_x$, por definición de entorno, habrá un abierto $\mathcal{U}_x$ que verifique

$$x \in \mathcal{U}_x \subset \mathcal{V}_x$$

Como $\mathcal{U}_x$ es abierto, contiene, por hipótesis, algún punto de A, luego $\mathcal{V}_x \cap A \neq \emptyset$, cumpliendo así x la definición de punto adherente.

Con lo que ya hemos terminado. ■

De forma natural surge preguntarse si, como en el caso conocido de $\mathbb{R}^n$, los espacios topológicos en general poseen algún subconjunto numerable denso. La respuesta a esta pregunta es no (como veremos más adelante) razón por la cual surge la siguiente definición.

Definición 1.4.5 (Espacio topológico separable)**.** Se dice que un espacio topológico $\mathcal{X}$ es ***separable*** si posee un subconjunto numerable denso.

Para afianzar la idea de que en la topología la intuición no parará de tendernos trampas, presentamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4.2 (Espacios separables)**.** Recordamos en primer lugar por qué $\mathbb{R}^n$ es separable y después presentamos un ejemplo contraintuitivo.

1. $\mathbb{Q}^n$ es un conjunto denso y numerable en $\mathbb{R}^n$ con la topología usual. La numerabilidad de $\mathbb{Q}^n$ es consecuencia de la numerabilidad de $\mathbb{Q}$ (inducción). Asimismo, la densidad puede probarse fácilmente por inducción sobre n.

2. Dado un conjunto cualquiera $\mathcal{X}$ equipado con la topología de un punto $a \in X$, el espacio topológico $(\mathcal{X}, \mathcal{T}_a)$ es separable (nótese que $\{a\}$ es denso y finito).

Así se ve que, en espacios topológicos puestos con un poco de mala baba, pasan cosas que nos descarajan la intuición. ♢

Para finiquitar esta sección presentamos el concepto de frontera de un conjunto, que, de momento, al igual que el concepto de punto aislado, quedará en el baúl de los recuerdos.

Definición 1.4.6 (Frontera de un conjunto)**.** Definimos la frontera de un conjunto como los puntos adherentes al conjunto que no son interiores. Dicho de otra forma (e introduciendo notación de paso)

$$\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} \tag{1.16}$$

Es interesante comprobar que, como parece intuitivo, un conjunto y su complementario comparten frontera.

Lema 1.4.3 (Frontera y complementación)**.**

$$\operatorname{Fr}(\mathcal{X} \setminus A) = \operatorname{Fr}(A)$$

Demostración. Basta hacer uso de algunas de las igualdades conjuntistas probadas anteriormente para darse cuenta de que

$$\mathrm{Fr}(\mathcal{X} \setminus A) = \overline{\mathcal{X} \setminus A} \setminus \mathrm{Int}(\mathcal{X} \setminus A) = \overline{\mathcal{X} \setminus A} \setminus (\mathcal{X} \setminus \overline{A}) = (\mathcal{X} \setminus \mathring{A}) \setminus (\mathcal{X} \setminus \overline{A})$$

Sabiendo esto, solo queda comprobar la igualdad conjuntista

$$\overline{A} \setminus \mathring{A} = (\mathcal{X} \setminus \mathring{A}) \setminus (\mathcal{X} \setminus \overline{A})$$

La cual es trivial. Si tenemos un punto adherente y no interior, es evidente que este no pertenece al complementario de la adherencia, además, por ser un punto no interior, pertenecerá al complementario del interior.

La igualdad se da por que podemos repetir esta demostración a la inversa (compruébese). ■

Una última cosa que merece la pena observar es que la frontera de un conjunto puede ser vista como la intersección de las adherencias del conjunto y su complementario.

Lema 1.4.4 (Frontera y adherencia)**.**

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{\mathcal{X} \setminus A}$$

Demostración. Sabemos que se cumple

$$\overline{A} \cap \overline{\mathcal{X} \setminus A} = \overline{A} \cap (\mathcal{X} \setminus \mathring{A})$$

Así pues basta comprobar que $\overline{A} \cap (\mathcal{X} \setminus \mathring{A}) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$, lo cual es evidente. ■

1.5. Bases de entornos

Al igual que en los espacios vectoriales, para estudiar las aplicaciones lineales nos bastaba con fijarnos en qué les ocurría a los vectores de una base, en los espacios topológicos desarrollaremos un concepto similar a lo largo de esta sección y la siguiente.

Definición 1.5.1 (Base de entornos de un punto)**.** Una ***base de entornos*** de un punto $a \in \mathcal{X}$ es una colección $\mathcal{V}_a$ de entornos de a tales que todo entorno de a contiene a alguno de $\mathcal{V}_a$.

Digamos que lo que estamos haciendo es quedarnos con una familia “significativa” de entornos del punto, descartando algunos entornos “redundantes” en cierto sentido.

Veamos unos cuantos ejemplos para aclarar el concepto.

Ejemplo 1.5.1 (Topología usual)**.** Consideremos el espacio topológico $\mathbb{R}^n$ con la topología usual. Asimismo consideremos un punto $a \in \mathbb{R}^n$.

Algunos ejemplos naturales de bases de entornos de a son

1. $\mathcal{V}_a := \{\mathrm{B}(a, \varepsilon) \ : \ \varepsilon > 0\}$, la base usual de entornos abiertos.
2. $\overline{\mathcal{V}_a} := \{\overline{\mathrm{B}}(a, \varepsilon) \ : \ \varepsilon > 0\}$, la base usual de entornos cerrados.

La comprobación de que efectivamente son bases de entornos es evidente y se deja al lector (simplemente hay que usar la definición de abierto en el espacio topológico $\mathbb{R}^n$ usual).

Una base de entornos un poco más interesante es la siguiente

$$\mathcal{W}_a := \left\{\mathrm{B}\left(a, \frac{1}{k}\right) \ : \ k \geq 1\right\} \tag{1.17}$$

Lo interesante de esta base es que es numerable. Más adelante estudiaremos cuándo es posible extraer bases de entornos numerables de un punto.

De nuevo, la comprobación de que efectivamente es un base es evidente, basta usar la propiedad arquimediana de los números reales. ♢

Presentemos otro ejemplo para que el elector aprenda a digerir este concepto en ambientes un poco más abstrusos y hostiles.

Ejemplo 1.5.2 (Topología del punto). Consideramos un conjunto no vacío $\mathcal{X}$ y un punto $a \in \mathcal{X}$, a partir de aquí construimos el espacio topológico $\mathcal{X}$ con la topología del punto a.

Es curioso observar que una base de entornos de a es el propio conjunto $\{a\}$.

Esto es debido a que en la topología del punto $\{a\}$ es un abierto, y todos los abiertos del espacio topológico contienen a $\{a\}$, luego todo entorno de a contiene a $\{a\}$ (que es entorno de a).

Este último párrafo puede parecer un trabalenguas de mal gusto, pero animamos al lector a que lo compruebe por su cuenta.

Yendo un poco más allá, vamos a construir una base de entornos de un punto cualquiera $x \in \mathcal{X}$. Es evidente que todos los entornos de x contienen a x y a a, luego $\mathcal{V}_x := \{\{x, a\}\}$ es una base de entornos de x. $\diamondsuit$

Para concluir esta pequeña sección presentamos una definición sobre la cual trabajaremos con detalle en el capítulo 5.

Definición 1.5.2 (I Axioma de numerabilidad). Decimos que un espacio topológico $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ es ***primer axioma de numerabilidad*** (o simplemente I axioma) si todo punto posee una base de entornos numerable.

Visto lo visto salta a la vista que algunos de los espacios topológicos que hemos visitado desde nuestra nave del misterio cumplen el primer axioma.

Ejemplo 1.5.3 (Espacios I axioma). A la luz del ejemplo 1.5.1 sabemos que $\mathbb{R}^n$ con la topología usual verifica el primer axioma.

Asimismo el ejemplo 1.5.2 nos dice que cualquier espacio topológico con la topología de un punto $a \in \mathcal{X}$ verifica el primer axioma de numerabilidad (de hecho podemos encontrar bases finitas de un único entorno). $\diamondsuit$

En general, los espacios primer axioma son importantes dado que en ellos podremos fabricar sucesiones (y todos los potentes argumentos que se derivan de este hecho).

Por suerte o por desgracia, hay espacios que no verifican el primer axioma. Como veremos más adelante, el espacio topológico de las funciones continuas (con cierta topología) no es primer axioma.

Finalizamos la sección observando que, dada una base de entornos numerable de un punto, podemos obtener una ***base encajada***. Y además, ¡agárrense criaturas! La demostración de este hecho es constructiva.

Observación 1.5.1 (Extracción de una base encajada). Dada una base numerable de un punto $a \in \mathcal{X}$, a la que denotamos

$$\mathcal{V}_a := \{\mathcal{V}_i \ : \ i \in \mathbb{N}\}$$

Es claro que la base $\mathcal{V}_a^* := \{\mathcal{W}_i := \bigcap_{j=1}^{i} \mathcal{V}_j \ : \ i \in \mathbb{N}\}$ es encajada.

Esto es, $\mathcal{W}_k \subset \mathcal{W}_l$ para todo $k \geq l$. $\diamondsuit$

Usaremos esta construcción de forma asidua cuando estudiemos las sucesiones con detalle.

1.6. Bases de abiertos

Definición 1.6.1 (Base de abiertos). Una ***base*** de $\mathcal{T}$ es una colección $\mathcal{B}$ de abiertos, tal que todo abierto de $\mathcal{T}$ es unión (posiblemente arbitraria) de abiertos de $\mathcal{B}$.

Esto viene a ser una filosofía parecida a la del álgebra lineal, pero cambiando unión por combinación lineal y abiertos por vectores. Ahora vamos a ver una reformulación de este concepto bastante potente, pues relaciona los dos conceptos de base que tenemos hasta el momento.

Observación 1.6.1 (Unicidad de la topología asociada). Dado un conjunto arbitrario $\mathcal{X}$ y una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de $\mathcal{X}$. Si $\mathcal{B}$ es base de cierta topología $\mathcal{T}$, entonces dicha topología es única. Además $\mathcal{T} := \{\mathcal{U} \subset \mathcal{X} \ : \ \mathcal{U} := \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B\}$.

En efecto, si hubiera otra topología $\mathcal{T}' \neq \mathcal{T}$ de la que $\mathcal{B}$ fuera base, podrían presentarse dos situaciones:

1. Habría un conjunto $\mathcal{U}' \notin \mathcal{T}$ tal que $\mathcal{U}' \in \mathcal{T}'$, pero $\mathcal{U}' = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \notin \mathcal{T}$, lo cual es imposible por definición de $\mathcal{T}$, por ende, $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.
2. Si se diera el contenido estricto habría un $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ que no fuera abierto en $\mathcal{T}'$, no obstante $\mathcal{U} = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$, y, como por definición de base todos los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos en $\mathcal{T}'$ y por definición de topología la unión arbitraria de abiertos es abierta, $\mathcal{U} \in \mathcal{T}'$. Lo cual contradice nuestra hipótesis.

Finalmente, hemos deducido que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. $\diamondsuit$

Proposición 1.6.1 (Caracterización de las bases de una topología). *$\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$ si y solo si para cada $x \in \mathcal{X}$ el conjunto $\mathcal{V}_x := \{V \in \mathcal{B} \ : \ x \in V\}$ es una base de entornos de x.*

Demostración. Procedemos por doble implicación.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos que $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$. Veamos que $\mathcal{V}_x$ es base de entornos de x. Para ello, tomaremos V entorno de x y veremos que hay un elemento de $\mathcal{V}_x$ contenido en V.

Como V es entorno, hay un $\mathcal{U}$ abierto de manera que $x \in \mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. Como $\mathcal{B}$ es base de abiertos de $\mathcal{T}$, tenemos que $x \in \mathcal{U} = \bigcup_{V_i\in\mathcal{B}} V_i \subset V$.

Por tanto, habrá un $V_i \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V_i \subset \mathcal{U} \subset V$. Como por definición, $V_i \in \mathcal{V}_x$ se tiene el resultado.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Recíprocamente supongamos que $\mathcal{V}_x$ es base de entornos de x. Veamos que $\mathcal{B}$ es base de abiertos. Sea $\mathcal{U}$ un abierto no vacío y $x \in \mathcal{U}$.

Por ser $\mathcal{V}_x$ base de entornos de x y $\mathcal{U}$ entorno de x, pues es un abierto que contiene a x, habrá un $V \in \mathcal{V}_x$ tal que $x \in V \subset \mathcal{U}$.

Como podemos hacer esto para cada $x \in \mathcal{U}$, es fácil deducir que $\mathcal{U} = \bigcup_{x\in\mathcal{U}} V_x$ con lo que ya hemos ganado.

Con lo que concluye la demostración. ■

Hechas estas consideraciones, pasemos a ver ejemplos de bases de abiertos.

Ejemplo 1.6.1 (Bases de abiertos). En $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, es decir $\mathbb{R}^n$ con la topología usual, las siguientes colecciones son bases de abiertos de $\mathcal{T}_u$.

$$\mathcal{B}_1 = \{\mathrm{B}(x, \varepsilon) \ : \ x \in \mathbb{R}^n \ y \ \varepsilon > 0\} \tag{1.18}$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{\mathrm{B}\left(x, \frac{1}{k}\right) \ : \ x \in \mathbb{R}^n \ y \ k \geq 1\right\} \tag{1.19}$$

Usando la caracterización vista anteriormente, es trivial comprobar que B_1 y B_2 efectivamente son bases.

$$\mathcal{B}_3 = \{\mathrm{B}(q, r) \ : \ q \in \mathbb{Q}^n \ y \ r \in \mathbb{Q}\} \tag{1.20}$$

Esta última es especialmente importante, pues es una base numerable, e intuitivamente, cuantos menos elementos tenga una base, mucho mejor.

La comprobación de que $\mathcal{B}_3$ es base exige usar la densidad de $\mathbb{Q}$ y es un poco más laboriosa, pero el lector debería poderla llevar a cabo sin mayores complicaciones. $\diamondsuit$

Observación 1.6.2 (Bases pequeñas). Una vez hayamos demostrado que cierta $\mathcal{B}$ es base de abiertos, para demostrar que $\mathcal{B}'$ es base, basta con expresar los abiertos de $\mathcal{B}$ como unión de los de $\mathcal{B}'$. Por eso es importante encontrar bases lo más pequeñas posibles. $\diamondsuit$

Tras haber visto bases de abiertos 1.6.1 y bases de entornos 1.5.1, vamos a plantear el concepto análogo al I axioma de numerabilidad, el muy originalmente denominado “II axioma de numerabilidad”, que, aunque será tratado con profundidad en el capítulo 5, expone muy bien las ideas recién tratadas.

Definición 1.6.2 (II axioma de numerabilidad). Diremos que $\mathcal{X}$ es ***segundo axioma*** de numerabilidad (o simplemente II axioma) si tiene una base de abiertos numerable.

Observación 1.6.3 (II axioma $\implies$ I axioma)**.** Ya que, por la proposición 1.6.1, dado $x \in X$, la colección $\mathcal{V}_x := \{V \in \mathcal{B} \ : \ x \in V\} \subset \mathcal{B}$ es una base de entornos, y como $\mathcal{B}$ es numerable, $\mathcal{V}_x$ también lo será. $\diamondsuit$

Observación 1.6.4 (II axioma $\implies$ separable)**.** Elegiremos un punto x_i de cada abierto $\mathcal{U}_i$ de la base $\mathcal{B}$. Dado un abierto $\mathcal{U}$ arbitrario, como es unión de abiertos de la base, contendrá a algún punto x_i. Luego el conjunto $\{x_i \ : \ i \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto numerable denso.

El recíproco no se da. Un contraejemplo es la recta de Sorgenfrey, que veremos más adelante en el ejemplo 1.6.2. $\diamondsuit$

Hemos de comentar que ser II axioma es mucho más fuerte que ser I axioma. De hecho, hay espacios métricos que no son II axioma.

La siguiente proposición es una caracterización muy útil de las bases de abiertos.

Proposición 1.6.2 (Caracterización de las bases de abiertos)**.** *Una colección de subconjuntos $\mathcal{B}$ de $\mathcal{X}$ es base de una topología si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:*

1. *La base $\mathcal{B}$ cubre todo el espacio, es decir, $\mathcal{X} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$*

2. *Para cada par de abiertos de la base B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$ y para cada punto de su intersección $x \in B_1 \cap B_2$, hay un abierto de la base $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.*

Demostración. Procedemos por doble implicación

$\boxed{\implies}$ Supongamos que $\mathcal{B}$ es base, entonces se cumple trivialmente la primera condición. Además, $B_1 \cap B_2$ es abierto, luego entorno de x, por tanto, por la proposición 1.6.1 hay un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

$\boxed{\impliedby}$ Por definición $\mathcal{B}$ es base si y solo si $\Gamma := \{\mathcal{U} \subset X \ : \ \mathcal{U} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B\}$ es una topología.

Si $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ es claro que Γ cumple la primera propiedad de las topologías.

Por definición de Γ la unión arbitraria de elementos de Γ está en gamma, cumpliéndose así la segunda propiedad de las topologías.

Además, si se cumple la segunda condición veamos que se cumplen la propiedad restante.

Sean $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \Gamma$, supongamos que $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \neq \emptyset$, entonces hay un $x \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$. Esto implica que $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ son entornos de x. Por la proposición 1.6.1, existen sendos $B_1^x, B_2^x \in \mathcal{B}$ tales que

$$x \in B_1^x \cap B_2^x \subset \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$$

Además, como se cumple la segunda condición, hay un $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $B_x \subset B_1^x \cap B_2^x$.

Por ende, es inmediato comprobar que $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \bigcup_{x \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2} B_x$, verificándose pues (por inducción) que la intersección finita de elementos de Γ está en Γ.

Con lo que concluye la demostración. $\blacksquare$

La gran utilidad de la proposición 1.6.2 combinada con la unicidad de la topología inducida por una base es que podemos definir topologías sin necesidad de conocer todos los abiertos de las mismas, tal y como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.6.2 (Topología de Sorgenfrey en $\mathbb{R}$)**.** Consideramos la familia de conjuntos

$$\mathcal{B} := \{[a, b) \ : \ a, b \in \mathbb{R}\} \tag{1.21}$$

$\mathcal{B}$ es base de una topología, a la que llamaremos ***topología de Sorgenfrey*** o ***topología del límite inferior***. Para ver esto usaremos la proposición 1.6.2.

Que se cumple la primera condición es evidente.

Veamos que cumple la segunda. Sea $B_1 = [a, b)$ y $B_2 = [a', b')$ y sea $x \in B_1 \cap B_2$ vemos claramente que la intersección de estos dos intervalos (que suponemos no vacía) sigue siendo de la misma forma, y tendrá como extremo inferior $a'' = \text{máx}\{a, a'\}$ y superior $b'' = \text{mín}\{b, b'\}$ luego es el intervalo $B := B_1 \cap B_2 = [a", b")$ pertenece a la base. Luego llegamos a lo buscado (de hecho a algo más fuerte). $\diamondsuit$

Veamos una serie de propiedades extra de esta topología, que son muy ilustrativas.

Ejemplo 1.6.3 (Propiedades de la topología de Sorgenfrey)**.** A la topología de Sorgenfrey la denotamos por $\mathcal{T}_{[,)}$ y al espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[,)})$ lo denominamos ***recta de Sorgenfrey***. Algunas propiedades interesantes de la recta de Sorgenfrey son:

1. La topología Sorgenfrey es **estrictamente más fina que la topología usual**. En general, para demostrar esto dadas ciertas bases de sendas topologías, basta con demostrar que los abiertos de una base son unión de abiertos de la otra (de ahí la ventaja de trabajar con bases lo más pequeñas posibles). Hagámoslo.

   En efecto, sea el intervalo (a, b) (abierto de la base usual de $\mathbb{R}$). Describámoslo como unión de abiertos de la base de Sorgenfrey (¡compruébese!).

   $$(a, b) = \bigcup_{k \geq 1} \left[a + \frac{1}{k}, b\right) \tag{1.22}$$

   Sabemos que esta unión está en la topología de Sorgenfrey luego ya está. Para ver que efectivamente son distintas, basta tomar un abierto de Sorgenfrey $[a, b)$ y darse cuenta de que no es abierto en la usual (¡compruébese!).

2. La base de Sorgenfrey es una **base de clopens**.

   Ver esto es muy sencillo. Sea el abierto de la base $[a, b)$, demostremos que su complementario $(-\infty, a) \cup [b, \infty)$ es también abierto.

   Esto es debido a que el intervalo $(-\infty, a)$ es un abierto usual, luego Sorgenfrey, y $[b, \infty)$ lo poedmos escribir como $[b, \infty) = \bigcup_{k \geq 1} [b, b + k)$ luego es un abierto Sorgenfrey. Como la unión de abiertos es abierto se tiene el resultado.

3. La recta de Sorgenfrey es separable.

   En efecto, $\mathbb{Q}$ es denso, ya que todo elemento de la base $[a, b) \supset (a, b)$ contiene algún racional.

4. La recta de Sorgenfrey es I axioma.

   Sea $a \in \mathbb{R}$, tomamos como base numerable la familia $[a, a + \frac{1}{k})$ con $k \in \mathbb{N}$. La comprobación de que efectivamente es base de entornos es muy sencilla y se deja al lector como ejercicio, como pista diremos que hay que usar la propiedad arquimediana.

Con esto ya conocemos bastante de este espacio tan exótico (aunque adelantamos que todavía queda bastante por conocer). ♢

1.7. Topología relativa

Introducimos ahora el concepto de "subespacio" topológico, para lo cual, fijado un espacio topológico "induciremos" una topología a cada uno de sus subconjuntos a la que llamaremos "relativa".

Definición 1.7.1 (Topología relativa)**.** Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ un espacio topológico, asimismo sea un subconjunto $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X} \neq \emptyset$.

Definimos la ***topología relativa*** en $\mathcal{Y}$ como

$$\mathcal{T}\restriction_{\mathcal{Y}} = \{U \cap \mathcal{Y} \ : \ U \in \mathcal{T}\} \tag{1.23}$$

En general, decimos que $(\mathcal{Y}, \mathcal{T}\restriction_{\mathcal{Y}})$ es un ***subespacio topológico***. Y a los abiertos de $\mathcal{Y}$ se les denomina ***abiertos relativos***.

Observación 1.7.1 (Buena definición)**.** Comprobemos que efectivamente la topología relativa es merecedora de su nombre (y por tanto no hemos hecho un pan como unas hostias).

1. La topología relativa contiene el vacío y el total (que en este caso es $\mathcal{Y}$). En efecto, $\emptyset \in \mathcal{T}\restriction_{\mathcal{Y}}$ pues $\emptyset \cap \mathcal{Y} = \emptyset$ y $\mathcal{Y} \in \mathcal{T}\restriction_{\mathcal{Y}}$ pues $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathcal{Y}$.

2. Es cerrado respecto de uniones arbitrarias. En efecto, $\bigcup_{i\in I}(\mathcal{U}_i\cap\mathcal{Y})=\left(\bigcup_{i\in I}\mathcal{U}_i\right)\cap\mathcal{Y}$.

3. Es cerrado respecto de intersecciones finitas. Basta ver, $\bigcap_{i=1}^{n}(\mathcal{U}_i\cap\mathcal{Y})=\left(\bigcap_{i=1}^{n}\mathcal{U}_i\right)\cap\mathcal{Y}$.

Y por tanto ya podemos dormir tranquilos. $\diamondsuit$

Gracias a esta definición, siempre que hablemos de un subconjunto de $\mathcal{X}$ y necesitemos una topología definida en él, se usará por defecto la relativa.

Veamos ahora cómo se comportan los cerrados, los entornos, las adherencias y las bases de los subespacios respecto de sus análogos originales.

Lema 1.7.1 (Cerrados relativos)**.** *Los cerrados de $\mathcal{Y}$ son los cerrados de $\mathcal{X}$ cortados con $\mathcal{Y}$.*

Demostración. Procedemos por doble implicación.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sea $\mathcal{F}$ cerrado relativo, luego $\mathcal{Y}\setminus\mathcal{F}$ es abierto relativo. Por ende, para cierto $\mathcal{U}$ abierto de $\mathcal{X}$ se verifica $\mathcal{Y}\setminus\mathcal{F}=\mathcal{Y}\cap\mathcal{U}$. Complementando de nuevo respecto de $\mathcal{Y}$ obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}&=\mathcal{Y}\setminus(\mathcal{Y}\cap\mathcal{U})=\mathcal{Y}\cap(\mathcal{X}\setminus(\mathcal{Y}\cap\mathcal{U}))=\mathcal{Y}\cap((\mathcal{X}\setminus\mathcal{Y})\cup(\mathcal{X}\setminus\mathcal{U}))=\\&=\mathcal{Y}\cap(\mathcal{X}\setminus\mathcal{Y})\cup\mathcal{Y}\cap(\mathcal{X}\setminus\mathcal{U})=\emptyset\cup\mathcal{Y}\cap(\mathcal{X}\setminus\mathcal{U})=\mathcal{Y}\cap(\mathcal{X}\setminus\mathcal{U})\end{aligned}$$

Como $\mathcal{X}\setminus\mathcal{U}$ es cerrado hemos terminado.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $\mathcal{U}$ abierto de $\mathcal{X}$, veamos que $\mathcal{Y}\cap(\mathcal{X}\setminus\mathcal{U})$ es cerrado relativo. Para ello complementamos respecto de $\mathcal{Y}$.

$$\begin{aligned}&\mathcal{Y}\setminus(\mathcal{Y}\cap(\mathcal{X}\setminus\mathcal{U}))=\mathcal{Y}\cap(\mathcal{X}\setminus(\mathcal{Y}\cap(\mathcal{X}\setminus\mathcal{U})))=\\&=\mathcal{Y}\cap((\mathcal{X}\setminus\mathcal{Y})\cup\mathcal{U})=(\mathcal{Y}\cap(\mathcal{X}\setminus\mathcal{Y}))\cup(\mathcal{Y}\cap\mathcal{U})=\emptyset\cup(\mathcal{Y}\cap\mathcal{U})=(\mathcal{Y}\cap\mathcal{U})\end{aligned}$$

Con lo que concluye la demostración. $\blacksquare$

Lema 1.7.2 (Entornos relativos)**.** *Los entornos de un punto $a\in\mathcal{Y}$ en $\mathcal{Y}$ son los entornos de a en $\mathcal{X}$ cortados con $\mathcal{Y}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ un entorno de a en $\mathcal{X}$, entonces hay un abierto $\mathcal{U}$ tal que $x\in\mathcal{U}\subset\mathcal{V}$. Veamos que $\mathcal{V}\cap\mathcal{Y}$ es entorno de a en $\mathcal{Y}$. En efecto, $a\in\mathcal{U}\cap\mathcal{Y}\subset(\mathcal{V}\cap\mathcal{Y})$ (¡compruébese!). Como $\mathcal{U}\cap\mathcal{Y}$ es abierto relativo el resultado se sigue.

Recíprocamente, sea $\mathcal{V}'$ un entorno de a en $\mathcal{Y}$, entonces hay un abierto relativo $\mathcal{U}'$ tal que $x\in\mathcal{U}'\subset\mathcal{V}'$. Por tanto, $a\in\mathcal{U}\cap\mathcal{Y}\subset\mathcal{V}'$ para cierto $\mathcal{U}\in\mathcal{T}$. Veamos que $\mathcal{V}'=\mathcal{V}\cap\mathcal{Y}$ siendo $\mathcal{V}$ un entorno de a en $\mathcal{X}$. Es claro que $\mathcal{U}$ es entorno de a en $\mathcal{X}$, por ende, basta tomar $\mathcal{V}=\mathcal{V}'\cup\mathcal{U}$. En efecto

$$\mathcal{V}\cap\mathcal{Y}=(\mathcal{V}'\cup\mathcal{U})\cap\mathcal{Y}=(\mathcal{V}'\cap\mathcal{Y})\cup(\mathcal{U}\cap\mathcal{Y})=\mathcal{V}'\cup\mathcal{U}'=\mathcal{V}'$$

Con lo que hemos ganado. $\blacksquare$

Proposición 1.7.3 (Adherencia relativa)**.** *Sea $M\subset\mathcal{Y}$, entonces*

$$\mathrm{Adh}_{\mathcal{Y}}(M)=\mathrm{Adh}_{\mathcal{X}}(M)\cap\mathcal{Y}$$

Demostración. Si $a\in\mathrm{Adh}_{\mathcal{Y}}(M)$ se verifica que dado $\mathcal{V}'$ entorno relativo de a

$$\emptyset\neq\mathcal{V}'\cap M=(\mathcal{V}\cap\mathcal{Y})\cap M=\mathcal{V}\cap M\subset\mathcal{Y}$$

Recíprocamente seguimos los mismos pasos pero leyendo como los árabes. $\blacksquare$

Lema 1.7.4 (Bases relativas)**.** *Sea $\mathcal{Y}$ un subespacio topológico, se verifica.*

1. *Si $\mathcal{V}_y$ es base de y en $\mathcal{X}$, entonces $\mathcal{V}_y\cap\mathcal{Y}$ es base de y en $\mathcal{Y}$.*

2. *Si $\mathcal{B}$ es base en $\mathcal{X}$, $\mathcal{B}\cap\mathcal{Y}$ es base en $\mathcal{Y}$.*

Demostración. 1. Hay que ver que dado un entorno de y en $\mathcal{Y}$, que son de la forma $V \cap \mathcal{Y}$, hay uno de la forma $W \cap \mathcal{Y}$ tal que $(W \cap \mathcal{Y}) \subset (V \cap \mathcal{Y})$ con $W \in \mathcal{V}_y$. Es claro que tomando el $W \in \mathcal{V}_y$ correspondiente a V, $W \cap \mathcal{Y}$ lo cumple.

2. Dado un abierto $\mathcal{U}$ en $\mathcal{Y}$, tenemos que $\mathcal{Y} \cap \mathcal{U} = \mathcal{Y} \cap \left(\bigcup B\right) = \bigcup (B \cap \mathcal{Y})$.
Fin de la cita. ■

Observación 1.7.2 (Axiomas hereditarios)**.** Si un espacio es I axioma (respectivamente II axioma), en virtud del lema 1.7.4 todo subespacio suyo será I axioma (respectivamente II axioma). ♢

Lema 1.7.5 (Otras propiedades)**.** *Unas últimas propiedades interesantes son*

1. $\mathcal{Y}$ *es abierto de* $\mathcal{X}$ *si y solo si todo abierto de* $\mathcal{Y}$ *es abierto de* $\mathcal{X}$*.*

2. $\mathcal{Y}$ *es cerrado de* $\mathcal{X}$ *si y solo si todo cerrado de* $\mathcal{Y}$ *es cerrado de* $\mathcal{X}$*.*

3. $\mathcal{Y}$ *es entorno de* x *en* $\mathcal{X}$ *si y solo si todo entorno de* x *en* Y *es entorno de* x *en* X*.*

Demostración. Únicamente demostraremos 1. y 3.

1. Como $\mathcal{U}'$ es abierto relativo si y solo si $\mathcal{U}' = \mathcal{Y} \cap \mathcal{U}$ si $\mathcal{Y}$ es abierto en $\mathcal{X}$ todos los demás abiertos de la topología relativa también serán abiertos en $\mathcal{X}$ (intersección finita de abiertos).

   Recíprocamente, como $\mathcal{Y}$ es abierto relativo, $\mathcal{Y}$ será abierto usual.

3. Como todo entorno relativo es de la forma $\mathcal{V} \cap \mathcal{Y}$, y tanto $\mathcal{V}$ como $\mathcal{Y}$ son entornos del total por hipótesis, es claro que $\mathcal{V} \cap \mathcal{Y}$ es entorno en el total.

   Recíprocamente, como $\mathcal{Y}$ es entorno relativo, por hipótesis $\mathcal{Y}$ es entorno del total.

Con lo que nos podemos dar por satisfechos. ■

Capítulo 2

Continuidad

La continuidad es la propiedad por excelencia que queremos que nuestras funciones verifiquen. En este breve capítulo vamos a generalizar la noción de continuidad que ya conocemos y dominamos para espacios como $\mathbb{R}^n$, de forma que la podamos aplicar a cualquier espacio topológico conocido (sin necesidad de que sea métrico). La continuidad, además, será clave para definir más adelante la noción de homeomorfismo, es decir, una transformación que preserva las propiedades topológicas de un espacio dado.

2.1. Definición y propiedades elementales

Para empezar, tratamos de dar una justificación intuitiva del cómo se llegó a la definición que presentaremos a continuación.

Hasta ahora conocíamos una definición de continuidad válida en el ámbito de los espacios métricos, que nos decía que si (M, d) y (N, d') eran espacios métricos arbitrarios y $f : M \to \mathbb{N}$ una aplicación entre ellos, era continua en un punto $x_0 \in M$ si y solo si dado un $\varepsilon > 0$ podíamos encontrar un $\delta > 0$ de forma que $f(\mathrm{B}_d(x_0, \delta)) \subset \mathrm{B}_{d'}(f(x_0), \varepsilon)$.

Dicho de otra forma, si cierto punto dista de x_0 menos que δ, entonces su imagen deberá distar menos que ε de la imagen de x_0. Informalmente, una aplicación continua es la que manda puntos próximos a puntos próximos.

En los espacios topológicos no tenemos la noción de distancia, pero si cierta noción de "proximidad", o al menos de "ligadura" entre puntos, esta es la noción de entorno, que usaremos para extender esta definición.

Definición 2.1.1 (Continuidad en un punto)**.** Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espacios topológicos. Consideremos asimismo una aplicación $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.

Diremos que f es ***continua*** en un punto $x_0 \in \mathcal{X}$ si para todo entorno $V_{f(x_0)}$ de $f(x_0)$, la imagen inversa de dicho entorno, $f^{-1}(V_{f(x_0)})$, es entorno de x_0.

Dicho con palabras llanas, f es continua en un punto si transforma entornos en entornos por imágenes inversas.

Una forma totalmente equivalente de entender este concepto es pensar que dado un entorno $V_{f(x_0)}$ de $f(x_0)$ siempre podremos encontrar un entorno V_{x_0} de forma que $f(V_{x_0}) \subset V_{f(x_0)}$.

Observación 2.1.1 (Importancia de las topologías)**.** Si la topología de $\mathcal{X}$ es fina (con muchos abiertos), o la topología de $\mathcal{Y}$ es muy grosera (con muy pocos abiertos), la continuidad suele ser más fácil de comprobar, ya que hay pocos entornos que chequear en el espacio de llegada y muchos candidatos en el espacio de partida. $\diamondsuit$

Al hilo de la observación 2.1.1 veamos algunos casos extremos que pueden resultar chocantes para una mente poco experimentada en los exóticos placeres topológicos.

Observación 2.1.2 (Casos extremos)**.** Veamos cual es el comportamiento de la continuidad con las topologías más drásticas que conocemos.

1. En la topología discreta, cualquier conjunto es abierto, con lo cual $\{x_0\}$ es abierto y, por tanto, cualquier conjunto que contenga a x_0 es entorno suyo. Entonces, para cualquier entorno de $f(x_0)$ su imagen inversa contendrá a x_0 y por lo anterior será entorno suyo. Es decir, cualquier función que nazca en $\mathcal{X}$ con la topología discreta es continua.

2. En la topología trivial, los únicos abiertos son el vacío y el total, con lo cual dado un punto, su único entorno es el total. Entonces, si $\mathcal{Y}$ con la topología trivial es el espacio de llegada de una función f, f es continua, pues la imagen inversa del total es el total, y este es abierto (y por tanto entorno) en cualquier topología. $\diamondsuit$

De la misma forma que podemos estudiar la continuidad para unas ciertas topologías concretas, podemos estudiarla para algunas funciones concretas sin limitarnos a una topología particular. En particular, nos van a interesar la función constante y la función identidad.

Observación 2.1.3 (Aplicaciones constante e identidad)**.**

1. Si $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es la aplicación constante $f \equiv b$, entonces f es continua con cualquier topología. En efecto, la imagen inversa de cualquier subconjunto (y en particular de cualquier entorno) de $\mathcal{Y}$ que contenga a b es el total, que es entorno de todos los puntos (por ser abierto).

2. La continuidad de la aplicación identidad depende de los espacios topológicos sobre los que está definida, al contrario de lo que pueda parecer. Caso curioso es el siguiente:

$$\mathrm{id} : (\mathcal{X}, \mathcal{T}_{\text{discreta}}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{T}_{\text{trivial}})$$

   Esta aplicación es continua (y biyectiva), por la observación 2.1.2. Sin embargo, su inversa, que también es la aplicación identidad, no es continua. Esto se sigue directamente de que, por ser la topología del espacio de llegada la discreta, $\{f(x_0)\}$ es abierto y por tanto entorno de $f(x_0)$, pero su imagen inversa es $\{x_0\}$ que con la topología trivial del espacio de salida no es entorno. $\diamondsuit$

Ahora, veremos un par de propiedades interesantes de la continuidad en un punto.

Proposición 2.1.1 (Continuidad y restricciones)**.** *Dada $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, continua en $x_0 \in \mathcal{X}$, si $A \subset \mathcal{X}$ tal que $x_0 \in A$, entonces $f\restriction_A : A \to \mathcal{Y}$ es continua en x_0.*

Demostración. Sea $V_{f(x_0)}$ un entorno de $f(x_0)$. Se verifica que $(f\restriction_A^{-1})(V_{f(x_0)}) = A \cap f^{-1}(V_{f(x_0)})$. Pero como por la continuidad de f en x_0 tenemos que $f^{-1}(V_{f(x_0)})$ es entorno de x_0 en $\mathcal{X}$, entonces $A \cap f^{-1}(V_{f(x_0)})$ es entorno de x_0 en A (nótese que consideramos la topología relativa en A). $\blacksquare$

Este lema viene a decirnos que la continuidad no depende del conjunto donde nos encontremos, no obstante, si depende (y mucho) de la topología.
La siguiente proposición es el recíproco de la anterior.

Proposición 2.1.2 (Continuidad como propiedad local)**.** *Si hay un entorno V_{x_0} de x_0 tal que $f\restriction_{V_{x_0}}$ es continua en x_0 entonces f es continua.*

Demostración. Sea $V_{f(x_0)}$ un entorno de $f(x_0)$, por continuidad de $f\restriction_{V_{x_0}}$ en x_0 se cumple que $(f\restriction_{V_{x_0}})^{-1}(V_{f(x_0)}) = f^{-1}(V_{f(x_0)}) \cap V_{x_0}$ es entorno de x_0 en V_{x_0}, luego, por topología relativa, $f^{-1}(V_{f(x_0)})$ es entorno de x_0 en $\mathcal{X}$ y, por tanto, f es continua. $\blacksquare$

La idea que define a las llamadas "propiedades locales", es que para ver si se cumplen en un punto no es necesario mirar como se comporta todo el espacio en su conjunto, sino tan solo debemos comprobar como se comporta en un entorno del punto.
La idea intuitiva de esto es que nos da igual lo que pase "lejos" del punto.

2.2. Caracterizaciones de la continuidad

Tras definir la continuidad en un punto, el paso instintivo es por supuesto definir la continuidad en todo el espacio (o en cualquiera de sus subconjuntos). Vamos a hacerlo y a dar una serie de definiciones equivalentes de continuidad, que abren muchas posibilidades a la hora de verificar esta propiedad.

Definición 2.2.1 (Continuidad en un conjunto)**.** Se dice que $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es ***continua*** en un conjunto $A \subset \mathcal{X}$ si lo es en todo punto de A.

Vamos a ver ahora una serie de definiciones equivalentes de la noción de continuidad.

Proposición 2.2.1 (Caracterizaciones de la continuidad)**.** *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

0. *f es continua*

1. *La imagen inversa de cualquier abierto es abierta.*

2. *La imagen inversa de cualquier cerrado es cerrada.*

3. *$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ para cualquier subconjunto A de $\mathcal{X}$.*

4. *Existe un recubrimiento abierto arbitrario de $\mathcal{X}$ de la forma:*

$$\mathcal{X} = \bigcup_{i \in I} U_i$$

que verifica que todas las restricciones $f{\restriction}_{U_i}$ son continuas.

5. *Existe un recubrimiento cerrado finito de $\mathcal{X}$ de la forma:*

$$\mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$$

que verifica que todas las restricciones $f{\restriction}_{F_i}$ son continuas.

Demostración. Procederemos según el siguiente diagrama, no obstante, se reta al lector a tratar de efectuar cualquiera de las implicaciones no demostradas explícitamente.

$$\begin{tikzcd}
& (0.) \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[ddl, Rightarrow] & (1.) \arrow[dr, Leftrightarrow] & & \\
& (4.) \arrow[ur, Rightarrow] & & (2.) \arrow[r, Leftrightarrow] & (3.) \\
(5.) \arrow[urrr, Rightarrow] & & & &
\end{tikzcd}$$

$\boxed{(0) \implies (1)}$ Sea un abierto $U \subset \mathcal{Y}$. Por ser abierto, es entorno de todos sus puntos. Pero para cada punto $f(x_0) \in U$, por ser f continua, la imagen inversa de U es también entorno de x_0. De esta forma, para cualquier $x_0 \in f^{-1}(U)$, se cumple que $f^{-1}(U)$ es entorno de x_0, y por tanto $f^{-1}(U)$ es abierto.

$\boxed{(1) \implies (0)}$ Sea $V_{f(x_0)}$ un entorno en $\mathcal{Y}$. Por definición, contiene un abierto U tal que $f(x_0) \in U$. Ahora, por hipótesis, $f^{-1}(U)$ es abierto, y como $x_0 \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V_{f(x_0)})$, se verifica que $f^{-1}(V_{f(x_0)})$ contiene un abierto que contiene a x_0 y por tanto es entorno.

$\boxed{(1) \iff (2)}$ $F \subset \mathcal{Y}$ es cerrado si y solo si $\mathcal{Y} \setminus F$ es abierto. Pero entonces por hipótesis $f^{-1}(\mathcal{Y} \setminus F)$ es abierto, y $f^{-1}(\mathcal{Y} \setminus F) = \mathcal{X} \setminus f^{-1}(F)$, luego $f^{-1}(F)$ es cerrado. La otra implicación es análoga.

$\boxed{(2) \implies (3)}$ Basta con ver que cualquier A verifica que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ o, lo que es equivalente, $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. Sin embargo, la imagen inversa del cerrado $\overline{f(A)}$ es cerrada, con lo que basta con demostrar que $A \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, ya que $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A. Por tanto, simplemente:

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$$

porque $f(A) \subset \overline{f(A)}$.

$\boxed{(3) \implies (2)}$ Sea $F \subset \mathcal{Y}$ cerrado. Queremos probar que $G = f^{-1}(F)$ también lo es, y tenemos, por hipótesis y por las propiedades de la imagen inversa:

$$f(\overline{G}) \subset \overline{f(G)} = \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F$$

pero entonces $\overline{G} \subset f^{-1}(F) = G$, luego $\overline{G} = G$ y entonces G es cerrado por la proposición 1.3.8.

$\boxed{(0) \implies (4)}$ Trivial, con el recubrimiento cuyo único abierto es $\mathcal{X}$.

$\boxed{(4) \implies (1)}$ Vamos a aprovechar que ya hemos demostrado $(0) \iff (1)$. Entonces, sea $U \subset \mathcal{Y}$ un abierto. Ahora, escribimos su imagen inversa:

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (f^{-1}(U) \cap U_i) = \bigcup_{i \in I} (f\restriction_{U_i})^{-1}(U)$$

pero como cada $f\restriction_{U_i}$ es continua, entonces cada una de estas imágenes inversas es abierta en U_i. Como U_i a su vez es abierto en $\mathcal{X}$, por el lema 1.7.5 $(f\restriction_{U_i})^{-1}(U)$ es abierto también en $\mathcal{X}$, luego la imagen inversa de U también lo es por ser unión arbitraria de abiertos.

$\boxed{(0) \implies (5)}$ Trivial, con el recubrimiento cuyo único cerrado es $\mathcal{X}$.

$\boxed{(5) \implies (2)}$ Es análogo a $(4) \implies (1)$. ■

Terminamos con una propiedad fundamental de las funciones continuas, y es que la composición respeta la continuidad.

Proposición 2.2.2 (Composición)**.** *Sean $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$, con f, g continuas. Entonces, $h = g \circ f$ es continua.*

Demostración. Esta es una consecuencia casi directa de la definición. En efecto, si consideramos $x_0 \in \mathcal{X}$ y sus imágenes:

$$x_0 \mapsto f(x_0) =: y_0 \mapsto g(f(x_0)) = g(y_0) =: z_0$$

entonces basta con estudiar los entornos. En efecto, si V_{z_0} es entorno de z_0, por la continuidad de g su imagen inversa es un entorno V_{y_0} en $\mathcal{Y}$ y, ahora, por la continuidad de f, la imagen inversa de este último es un entorno de x_0. ■

Ahora que ya sabemos un poco más, a modo de satisfacción personal, para que veamos que las matemáticas funcionan, vamos a deducir condiciones necesarias y suficientes para que la aplicación identidad entre dos espacios topológicos sea continua.

Observación 2.2.1 (Aplicación identidad)**.** Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{T}_1)$ y $(\mathcal{X}, \mathcal{T}_2)$ espacios topológicos y la aplicación identidad entre ellos. Sabemos que id es continua si y solo si transforma abiertos en abiertos por imágenes inversas. Luego si $\mathcal{U}$ es abierto en $\mathcal{T}_2$, $\mathrm{id}^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ debe ser abierto en $\mathcal{T}_1$. Dicho de otra forma, id es continua si y solo si $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. ♢

2.3. Homeomorfismos y homeomorfismos locales

Intuitivamente, una aplicación continua es la que no "rompe" el espacio. Nos permite deformar, aplastar, girar... pero no cortar o pegar. No obstante en esta sección estudiaremos las aplicaciones que no solo "no rompen" el espacio, sino que también son en cierto sentido "reversibles", estas serán los llamados "homeomorfismos".

A bote pronto los homeomorfismos son las aplicaciones que preservan la estructura topológica, es decir los abiertos (véase la proposición 2.2.1) del mismo modo que los isomorfismos de grupos preservaban las operaciones.

Definición 2.3.1 (Homeomorfismo)**.** Un ***homeomorfismo*** entre espacios topológicos $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es una biyección continua con inversa continua.

Si existe un homeomorfismo entre dos espacios $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ se dice que estos son ***homeomorfos***.

Hagamos ahora una pequeña observación antes de pasar a una serie de ejemplos que nos permitan asentar estos conceptos.

Observación 2.3.1 (Continuidad de la inversa)**.** Como vemos en la definición 2.3.1, no nos basta únicamente con que nuestra aplicación f sea biyectiva (y de este modo tenga inversa) y continua, sino que además exigimos esta inversa sea continua.

Nótese que, por ejemplo, en los isomorfismos de grupos, siempre que teníamos un homomorfismo biyectivo automáticamente era un isomorfismo. Esto no ocurre en este contexto como veremos a continuación.

Esta continuidad en ambos sentidos del homeomorfismo nos va a resultar muy útil como veremos más adelante, dado que las muchas propiedades (abiertos, cerrados...) se van a transladar entre los dos espacios homeomorfos que nos proporciona f. ♢

Ahora pasamos a observar una serie de funciones homeomorfas y no homeomorfas, para comprender las diferencias entre ambas y así afianzar la definición.

Ejemplo 2.3.1 (Homeomorfismos)**.** Comencemos volviendo al ejemplo recurrente de la aplicación identidad.

1. La función $\mathrm{id}\colon (X, \mathcal{T}_{\mathrm{dis}}) \to (X, \mathcal{T}_{\mathrm{triv}})$ verifica ser continua y biyectiva, pero como vimos en la observación 2.2.1 su inversa no es continua, por lo que no es un homeomorfismo.

2. Cualquier función f que mande $\mathbb{R}$ a la ***lemniscata*** $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^2$ (con la topología relativa) no es homeomorfismo, a pesar de que f pudiera llegar a ser biyectiva y continua.

   La lemniscata viene descrita por la imagen de la siguiente función.

   $$\varphi(t) := \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4} \right)$$

   Esto no podemos afirmarlo con nuestros conocimientos actuales, no obstante daremos una demostración intuitiva (ver ilustración 2.1) que no pretende ser formal sino tan solo aumentar el interés del lector.

   La justificación sería la siguiente. Dado el punto $O := (0, 0)$ tenemos que:

   - Todo entorno pinchado de O tiene cuatro "componentes conexas" (sean lo que sean).
   - Todo entorno pinchado de $f^{-1}(O)$ tiene dos componentes conexas.

   Por lo tanto, al no mantenerse la cantidad de componentes conexas entre X e Y se verifica que f no es homeomorfismo (ya veremos por qué).

3. Sea $\mathcal{X}$ un conjunto de 3 segmentos cualesquiera de $\mathbb{R}^2$ que comparten un punto extremo e $\mathcal{Y}$ otro conjunto de 3 segmentos arbitrarios que comparten otro punto extremo (véase la ilustración 2.2). Si equipamos a ambos conjuntos con la topología relativa inducida por la topología usual de $\mathbb{R}^2$, entonces son homeomorfos.

   En efecto, tomando el recubrimiento por cerrados de $\mathcal{X}$ compuesto por cada uno de los segmentos y definiendo un homeomorfismo f que a cada segmento (cerrado del recubrimiento

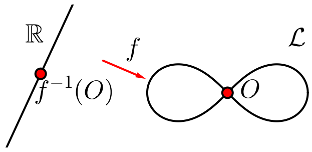


Figura 2.1: Ilustración del argumento intuitivo.

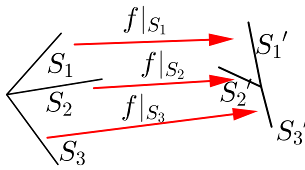


Figura 2.2: Ilustración del homeomorfismo.

de $\mathcal{X}$) le haga corresponder otro segmento de $\mathcal{Y}$ (sin repetir). Tenemos, por la proposición 2.2.1 que $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ son homeomorfos (así de paso vemos que las proposiciones sirven para algo).

Dicho homeomorfismo f será la ***interpolación lineal*** que definimos como

$$\begin{aligned} f_{ab}: \quad & [0,1] \to \mathbb{R}^2 \\ & t \mapsto ta + (1-t)b \end{aligned} \tag{2.1}$$

Que es un homeomorfismo (¡compruébese!) que transforma el intervalo $[0,1]$ en el segmento de $\mathbb{R}^2$ determinado por los puntos $a, b \in \mathbb{R}^2$, al que denotamos por $[a,b]$ con cierto abuso de notación.

Para conseguir un homeomorfismo entre dos segmentos $[a,b]$ y $[c,d]$ cualesquiera basta seguir el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "f_{ab}"] \arrow[d, "f_{cd}"'] & {[a,b]} \\ {[c,d]} \arrow[ur, "f_{ab}\circ f_{cd}^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

Con esto ya tenemos suficiente artillería para resolver gran cantidad de problemas. ♢

Una vez definido el concepto de homeomorfismo y vista a través de los ejemplos su gran fuerza, vamos a pasar al concepto de homeomorfismo local, el cual, a pesar de ser una relación más débil que la que proporciona el homeomorfismo, también será muy utilizado.

Definición 2.3.2 (Homeomorfismo local)**.** Sea $f : X \to Y$ aplicación entre espacios topológicos y $x_0 \in X$. Se dice que f es ***homeomorfismo local*** en x_0 si x_0 tiene un entorno abierto U_{x_0} tal que $f(U_{x_0})$ es entorno abierto de $f(x_0)$ en Y y se tiene que $f|_{U_{x_0}} : U_{x_0} \to f(U_{x_0})$ es homeomorfismo.

De esta definición se desprende que todo un homeomorfismo entre dos espacios es en un homeomorfismo local en todos sus puntos. Este resultado resulta evidente, pero su contrarreciproco (no homeomorfo local implica no homeomorfo) nos puede resultar enormemente útil ya que es mucho más sencillo estudiar el homeomorfismo local al global.

Vemos ahora, a modo de ejemplo que la esfera $\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ \|x\| = 1\}$ es localmente homeomorfa al plano $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 2.3.2 (Esfera y plano)**.** Vamos a contruir un homeomorfismo local entre la esfera y el plano.

Resulta de interés destacar que no es necesario que la aplicación sea la misma en todo el espacio, sino que podemos tomar una distinta para cada punto del espacio.

En efecto, sea $p := (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{S}^2$ con $z_0 \neq 0$, entonces, dado un entorno abierto de p que no corta al ecuador de la esfera y queda contenido en el hemisferio de p, definimos la aplicación

$$f(x,y,z) := (x,y) \qquad f^{-1}(x,y) := (x, y, \tfrac{z_0}{|z_0|}\sqrt{1-x^2-y^2})$$

que es homeomorfismo local (¡compruébese!).

Análogamente, si tomamos un $p' := (x_1, y_1, 0) \in \mathbb{S}^2$ con $x_1 > 0$, dado un entorno abierto de p' con todos los puntos con primera coordenada positiva definimos el siguiente homeomorfismo local (¡compruébese!)

$$f(x, y, z) := (y, z) \qquad f^{-1}(y, z) := (\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z)$$

Nótese que aún quedan puntos de la esfera por tratar (se dejan como ejercicio). $\diamondsuit$

Una vez vistas ambas definiciones pasamos a ver una serie de propiedades y observaciones propias de los homeomorfismos (globales), pero que también nos valdrán para la restricción homeomorfa de los locales (dado que en ella por definición la aplicación es homeomorfa).

Observación 2.3.2 (Propiedades de los homeomorfismos)**.**

1. Sea $f : X \to Y$ aplicación biyectiva.

   Que f sea continua es equivalente a que si $U \in Y$ es abierto, $f^{-1}(U)$ también lo será. Del mismo modo, es equivalente a que si $F \in Y$ es cerrado, $f^{-1}(F)$ también lo será.

   Igualmente, que f^{-1} sea continua es equivalente a que si $F \in X$ es cerrado, entonces $f(F)$ es cerrado, asimismo si $U \in X$ es abierto, $f(U)$ también lo será.

   Vemos como si se verifican ambas (la continuidad de f y de su inversa) será homeomorfismo, de modo que f es homeomorfismo si y solo si es continua, biyectiva y transforma abiertos en abiertos por imágenes directas.

2. Una aplicación f no necesariamente biyectiva se dice ***abierta*** cuando la imagen de abiertos es un abierto (es decir, cuando $f(U)$ es abierta si U es abierto).

   Análogamente, una aplicación f no necesariamente biyectiva se llama ***cerrada*** cuando la imagen de cerrados es un cerrado (es decir, cuando $f(F)$ es cerrado si F es cerrado).

   Dejamos como ejercicio al lector ver que si una es aplicación no es abierta no tiene por qué ser cerrada (y viceversa) y que si una aplicación es abierta y cerrada no tiene por qué ser biyectiva. $\diamondsuit$

Capítulo 3

Construcciones de topologías

A lo largo de este capítulo vamos a seguir una rutina de trabajo que resultará enormemente fructífera. Tratamos de explicarla brevemente aquí, no obstante recomendamos que una vez finalizado este capítulo el lector vuelva aquí a modo de retrospectiva.

Nuestro "modus operandi" será, en primer lugar, dotar a un conjunto de la topología "más drástica" (en cierto sentido) que haga continua a una (o varias) aplicaciones entrantes (o salientes) a dicho conjunto.

Tras esto, trataremos de dar condiciones necesarias y suficientes para que una aplicación entrante (o saliente) al espacio topológico anteriormente construido sea continua. De esta idea nacen las llamadas "propiedades universales", que a la postre veremos que caracterizan a la topología.

Por último iremos jugando con nuestras pequeñas y diabólicas creaciones, buscándoles aplicaciones y desgranando sus propiedades.

Repetiremos este proceso un total de 4 veces.

3.1. Imágenes inversas (inmersiones)

En esta sección formalizaremos la idea de "meter" un espacio topológico dentro de otro.

3.1.1. Construcción de continuidad menos fina

Esta sección se centrará en dar solución al siguiente problema. Dado un espacio topológico $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$, un conjunto $\mathcal{Y}$, y una aplicación f que nace en $\mathcal{Y}$ y muere en $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$, queremos dotar a $\mathcal{Y}$ de una topología que haga que f sea continua.

Visto en forma de diagrama

$$(\mathcal{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}}) \xrightarrow{f} (\mathcal{X}, \mathcal{T})$$

Observación 3.1.1 (Solución trivial)**.** Evidentemente, una elección fácil para que esto ocurra es escoger la topología discreta, puesto que es la que cuenta con más abiertos y, por lo tanto, para todo abierto $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{X}$ entonces $f^{-1}(\mathcal{U}')$ es abierto en $\mathcal{Y}$, lo que implica que f es continua. $\diamondsuit$

Sin embargo, este caso no es realmente interesante, por lo cual refinaremos el enunciado de nuestro problema, ahora no buscaremos una topología cualquiera sino la topología menos fina posible que haga continua a f.

Observación 3.1.2 (Aproximación a la solución)**.** Un truco que se nos podría ocurrir para atacar este problema es usar la caracterización de la continuidad que afirma que una aplicación f es continua si y solo si transforma abiertos en abiertos por imágenes inversas.

Usando esto, es claro que la topología que buscamos deberá tener como abiertos al menos a las imágenes inversas de los abiertos de $\mathcal{X}$. De hecho, como vemos ahora mismo, esta es la solución de nuestro problema. $\diamondsuit$

La solución a este problema es la topología $f^{-1}(\mathcal{T})$, definida como

$$f^{-1}(\mathcal{T}) := \{f^{-1}(\mathcal{U}) \ : \ \mathcal{U} \in \mathcal{T}\}$$

y que llamamos ***topología imagen inversa***.

La comprobación de que verdaderamente es una topología se desprende de las propiedades de la función inversa aplicada a conjuntos. Por otro lado, es la menos fina que hace a f continua por construcción, luego cualquier otra topología con estas características contiene a esta. Finalmente, se tiene que es única. En efecto, si tenemos que $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ cumplen que son las menos finas por construcción, entonces se tiene que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ y $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, luego son iguales.

3.1.2. Caracterización de la continuidad entrante

Es hora de profundizar un poco más. Tomemos otro espacio topológico arbitrario $(Z, \mathcal{T}')$ y consideremos una función g que nace en este y muere en $\mathcal{Y}$.

El problema que se nos plantea ahora es determinar qué aplicaciones $g : Z \to \mathcal{Y}$ son continuas.

Damos sin rodeos la solución a este problema.

Proposición 3.1.1 (Propiedad universal de las inmersiones)**.** *Una aplicación $g : Z \to \mathcal{Y}$ es continua si y solo si se verifica que $f \circ g$ es continua.*

Demostración. Para ponernos en situación nos dibujamos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{Y}, f^{-1}(\mathcal{T})) \arrow[r, "f"] & (\mathcal{X}, \mathcal{T}) \\
(Z, \mathcal{T}') \arrow[u, "g"] \arrow[ur, dashed, "f\circ g"'] &
\end{tikzcd}$$

En primer lugar, observemos que como f es continua por definición, si g es continua, entonces trivialmente la composición $f \circ g$ también lo será. Con lo que la primera de las implicaciones es evidente.

Recíprocamente, queremos ver que g transforma abiertos en abiertos por imágenes inversas. En efecto, dado $W \in f^{-1}(\mathcal{T})$, comprobemos que $g^{-1}(W) \in \mathcal{T}'$. Por definición $W = f^{-1}(\mathcal{U})$, con $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$. Por ende,

$$g^{-1}(W) = g^{-1}(f^{-1}(\mathcal{U})) = (f \circ g)^{-1}(\mathcal{U})$$

Como $f \circ g$ es continua, el resultado se sigue. ■

Observación 3.1.3 (Irrelevancia de la topología de $\mathcal{Y}$)**.** La proposición 3.1.1 es realmente interesante, puesto que nos dice que la topología que haya en $\mathcal{Y}$ no es relevante a la hora de estudiar las aplicaciones continuas que mueren en $\mathcal{Y}$. ♢

3.1.3. Propiedad universal de las inmersiones

Definición 3.1.1 (Propiedad universal)**.** Si para cierta topología $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$ de $\mathcal{Y}$ se verifica el enunciado de la proposición 3.1.1 se dice que la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$ verifica la ***propiedad universal de las inmersiones***.

Ahora tratamos de determinar para qué topologías de $\mathcal{Y}$ se verifica la propiedad universal para las inmersiones.

Desde luego, la proposición 3.1.1 nos dice que para la topología $f^{-1}(\mathcal{T})$ se verifica la propiedad universal (y que es la menos fina que lo hace, pues es la menos fina que hace a f continua).

Ahora vamos a ver que no solo ocurre esto sino que es la única topología que verifica esta propiedad universal.

Proposición 3.1.2 (Unicidad de la propiedad universal)**.** *Sea $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$ una topología que verifica la propiedad universal, entonces $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}} = f^{-1}(\mathcal{T})$.*

Demostración. Razonaremos por doble contención y haciendo algunos cambalaches útiles para retorcer la propiedad universal a nuestro gusto.

Consideramos el siguiente diagrama, análogo al de la demostración de la proposición 3.1.1 pero tomando $(Z, \mathcal{T}') = (\mathcal{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}})$ y $g = \text{id}$.

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}}) \arrow[r, "f"] & (\mathcal{X}, \mathcal{T}) \\ (\mathcal{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}}) \arrow[u, "\text{id}"] \arrow[ur, dashed, "f\circ \text{id} = f"'] & \end{tikzcd}$$

Sabemos que la identidad de un espacio en sí mismo es una aplicación continua. De este modo, por la propiedad universal, tenemos por lo anterior que $f \circ \text{id} = f$ es continua. En consecuencia, $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$ hace que f sea continua y, por tanto, por construcción de $f^{-1}(\mathcal{T})$, $f^{-1}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$. Ya tenemos demostrada una inclusión.

Para la otra inclusión consideramos un diagrama análogo, pero tomando $(Z, \mathcal{T}') = (\mathcal{Y}, f^{-1}(\mathcal{T}))$ y $g = \text{id}$.

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}}) \arrow[r, "f"] & (\mathcal{X}, \mathcal{T}) \\ (\mathcal{Y}, f^{-1}(\mathcal{T})) \arrow[u, "\text{id}"] \arrow[ur, dashed, "f\circ \text{id} = f"'] & \end{tikzcd}$$

Ahora, por definición de $f^{-1}(\mathcal{T})$, sabemos que $f \circ \text{id} = f$ es continua. Ahora, aplicando la propiedad universal tenemos que id debe ser continua, y esto solo es posible si $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}} \subset f^{-1}(\mathcal{T})$. ■

Observación 3.1.4 (Inyectividad)**.** Vamos a ver ahora un caso particular muy importante (el que realmente es de interés) de esta construcción.

Supongamos que dos puntos y_1 e y_2 terminan en el mismo punto tras ser evaluados en una aplicación (lo que quiere decir que esta no es inyectiva). Los abiertos $\mathcal{U}$ que contienen a la imagen de los dos puntos mencionados x (que es la misma) cumplen que $f^{-1}(\mathcal{U})$ contiene a y_1 e y_2, luego estos dos puntos resultan ser topológicamente indistinguibles (no puedo separarlos en dos abiertos distintos). Por ello, este tipo de aplicaciones no presentan mucho interés puesto que no es posible conocer con certeza ciertas propiedades. ♢

3.1.4. Inmersiones

El caso verdaderamente interesante ocurre cuando f es inyectiva. En este caso, si se considera el subespacio $(f(\mathcal{Y}), \mathcal{T}\restriction_{f(\mathcal{Y})}) \subset (\mathcal{X}, \mathcal{T})$, entonces f es biyectiva:

$$(\mathcal{Y}, f^{-1}(\mathcal{T})) \xrightarrow{f} (f(\mathcal{Y}), \mathcal{T}\restriction_{f(\mathcal{Y})}) \subset (\mathcal{X}, \mathcal{T}).$$

Además, la aplicación es **continua** puesto que, dado $\mathcal{W}$ un abierto de $f(\mathcal{Y})$, entonces, por topología relativa $\mathcal{W} = f(\mathcal{Y}) \cap \mathcal{U}$ para cierto abierto $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$. Esto implica que

$$f^{-1}(\mathcal{W}) = f^{-1}(\mathcal{U} \cap f(\mathcal{Y})) = f^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{Y} = f^{-1}(\mathcal{U}),$$

que es abierto de $\mathcal{Y}$ por la definición de topología que hemos tomado.

Sin embargo, esto no termina aquí, ya que f es **abierta**. En efecto, como $\mathcal{U}$ está contenido en $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Y}$ está equipado con la topología inversa de la topología de $\mathcal{X}$, tenemos que existe un abierto $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ tal que $f^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{W}$. Aplicando f a esta igualdad obtenemos que $f(\mathcal{W}) = f(f^{-1}(\mathcal{U})) = \mathcal{U} \cap f(\mathcal{W})$ que es un abierto de $f(\mathcal{Y})$.

Por tanto, al ser f continua y abierta, es **homeomorfismo**. Esto es sorprendente, ya que una aplicación inyectiva de $\mathcal{Y}$ en $\mathcal{X}$ es homeomorfismo de $\mathcal{Y}$ en $f(\mathcal{Y})$.

Definición 3.1.2 (Inmersión o embebimiento)**.** A una función $f : (\mathcal{Y}, f^{-1}(\mathcal{T})) \to (\mathcal{X}, \mathcal{T})$ inyectiva se la denomina ***inmersión*** o ***embebimiento***.

Proposición 3.1.3 (Caracterización). *$f : (\mathcal{Y}, \mathcal{T}_\mathcal{Y}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{T})$ es inmersión si y solo si $f\restriction_{f(\mathcal{Y})}$ es homeomorfismo.*

Demostración. La implicación a la derecha ya la hemos visto.

Recíprocamente basta con demostrar la igualdad $\mathcal{T}_\mathcal{Y} = f^{-1}(\mathcal{T}\restriction_{f(\mathcal{Y})})$, para lo cual veremos ambas contenciones.

Por un lado, si $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_\mathcal{Y}$ entonces, habrá que demostrar que hay un $\mathcal{W} \in \mathcal{T}\restriction_{f(\mathcal{Y})}$ tal que $\mathcal{U} = f^{-1}(\mathcal{W})$. En efecto, como f es homeomorfismo (y por tanto abierta) bastará tomar $\mathcal{W} := f(\mathcal{U})$. En efecto, $f^{-1}(f(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$.

Por otra parte, si $\mathcal{U} \in f^{-1}(\mathcal{T}\restriction_{f(\mathcal{Y})})$ tendremos que ver que $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_\mathcal{Y}$. En efecto, por ser $\mathcal{U}$ de la topología relativa de imágenes inversas $\mathcal{U} = f^{-1}(\mathcal{W} \cap f(\mathcal{Y}))$ para cierto $\mathcal{W} \in \mathcal{T}$. Luego $\mathcal{U} = f^{-1}(\mathcal{W}) \cap \mathcal{Y}$, como f es continua $f^{-1}(\mathcal{W})$ es abierto, luego el resultado se sigue. ■

3.2. Imágenes directas (cocientes e indentificaciones)

En esta sección formalizaremos la idea de "pegar" unos puntos con otros. Al final tendremos el superpoder de trabajar con espacios topológicos como si fueran recortables infantiles, lo cual es sorprendentemente útil.

3.2.1. Construcción de continuidad más fina

Después de haber realizado todo el desarrollo anterior, una posibilidad que se nos plantea es dualizar las cuestiones que nos han ido apareciendo. Coloquialmente, podríamos decir que vamos a cambiarle el sentido a todo.

Así pues, consideremos un espacio topológico $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$, un conjunto $\mathcal{Y}$, y una aplicación f que nace en $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ y muere en $\mathcal{Y}$.

El problema ahora consiste en dotar a $\mathcal{Y}$ de una topología que haga que f sea continua.

Observación 3.2.1 (Solución trivial). Como antes, la solución más sencilla sería elegir la topología trivial, puesto que sus únicos abiertos son el vacío y el total y siempre se cumpliría que para cada $\mathcal{U}'$ abierto de $\mathcal{Y}$ entonces la imagen inversa de este es un abierto del espacio de partida. ♢

No obstante, es interesante encontrar la topología más fina que cumpla esto.

Como queremos hacer a f continua, es claro que las imágenes inversas de los abiertos de $\mathcal{Y}$ tendrán que ser abiertos de $\mathcal{X}$. Si somos radicales en nuestras pretensiones obtenemos la solución al problema.

$$\mathcal{T}_\mathcal{Y} := f(\mathcal{T}) := \{\mathcal{U} \subset \mathcal{Y} \ : \ f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{T}\}$$

La comprobación de que $f(\mathcal{T})$ es una topología es muy fácil y se deja el lector. La razón por la que $f(\mathcal{T})$ es la topología más fina que hace a más fina que permite que f sea continua es que si se añade algún abierto $\mathcal{U}$, por construcción $f^{-1}(\mathcal{U}) \notin \mathcal{T}$ luego f dejaría de ser continua.

Por último, realizando un razonamiento por doble inclusión al análogo al de la sección anterior, se puede ver que es única.

Llamamos a esta topología ***topología imagen*** o ***topología imagen directa***.

3.2.2. Caracterización de la continuidad saliente

Continuando con nuestra filosofía particular, tomemos un espacio topológico arbitrario $(Z, \mathcal{T}')$. Asimismo consideremos una función g que nace en $(\mathcal{Y}, f(\mathcal{T}))$ y muere en Z.

El problema que nos planteamos es caracterizar a las aplicaciones continuas $g : \mathcal{Y} \to Z$.

La solución a este problema no merece un premio a la originalidad.

Proposición 3.2.1 (Propiedad universal de las identificaciones). *Una aplicación $g : \mathcal{Y} \to Z$ es continua si y solo si se verifica que $g \circ f$ es continua.*

Demostración. Orientémonos en la oscuridad que nos envuelve con un bonito diagrama.

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g\circ f"'] & (\mathcal{Y}, f(\mathcal{T})) \arrow[d, "g"] \\
 & (Z, \mathcal{T}')
\end{tikzcd}$$

Como antes, es evidente que si g es continua, entonces $g \circ f$ es continua.

Recíprocamente, queremos ver que g transforma abiertos en abiertos por imágenes inversas. El hecho de que si $\mathcal{U} \in \mathcal{T}'$ entonces $g^{-1}(\mathcal{U}) \in f(\mathcal{T})$ es equivalente (por definición de $f(\mathcal{T})$) a

$$f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{U})) = (g \circ f)^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{T}$$

Como $\mathcal{U} \in \mathcal{T}'$ y, por hipótesis, $g \circ f$ es continua, podemos irnos a casa, hemos ganado. ■

3.2.3. Propiedad universal de las identificaciones

Si hacemos un poco de "copy-paste" de la sección anterior obtenemos lo siguiente.

Definición 3.2.1 (Propiedad universal). Si para cierta topología $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$ de $\mathcal{Y}$ se verifica el enunciado de la proposición 3.2.1 se dice que la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$ verifica la ***propiedad universal de las identificaciones***.

Ahora vemos rápidamente que la propiedad universal (como en el caso de la sección anterior) caracteriza a la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$.

Proposición 3.2.2 (Unicidad de la propiedad universal). *Sea $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$ una topología que verifica la propiedad universal, entonces $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}} = f(\mathcal{T})$.*

Demostración. Razonaremos por doble contención con exactamente los mismos trucos que en la sección anterior.

Consideramos el siguiente diagrama, análogo al de la demostración de la proposición 3.2.1 pero tomando $(Z, \mathcal{T}') = (\mathcal{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}})$ y $g = \mathrm{id}$.

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "\mathrm{id}\circ f = f"'] & (\mathcal{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}}) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
 & (\mathcal{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}})
\end{tikzcd}$$

En las condiciones del diagrama la identidad es continua, luego por la propiedad universal $\mathrm{id} \circ f = f$ es continua. Por ende, al ser $f(\mathcal{T})$ la más fina que hace a f continua $\mathcal{T}_Y \subset f(\mathcal{T})$.

Recíprocamente, consideramos un diagrama análogo, pero tomando $(Z, \mathcal{T}') = (\mathcal{Y}, f(\mathcal{T}))$.

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "\mathrm{id}\circ f = f"'] & (\mathcal{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}}) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
 & (\mathcal{Y}, f(\mathcal{T}))
\end{tikzcd}$$

Por definición de $f(\mathcal{T})$, $\mathrm{id} \circ f = f$ es continua, luego por la propiedad universal lo es la identidad, por ende $f(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$. ■

Observación 3.2.2 (Sobreyectividad). Veamos qué patología nos encontramos en el caso de que f no sea sobreyectiva.

Si f no fuera sobreyectiva habría un $y \in \mathcal{Y}$ de manera que $f^{-1}(y) = \emptyset \in \mathcal{T}$, siendo, por continuidad de f un punto abierto.

Por tanto, $f(\mathcal{T})\restriction_{\mathcal{Y} \setminus f(\mathcal{X})}$ sería la topología discreta. No obstante la cosa no acaba aquí.

Además de eso, vamos a poder particionar el espacio $\mathcal{Y}$ en dos clopens no triviales, lo cual, como veremos más adelante, nos dice que que $\mathcal{Y}$ es "disconexo".

En efecto, $f^{-1}(\mathcal{Y} \setminus f(\mathcal{X})) = \emptyset$ que es abierto, por ende, $\mathcal{Y} \setminus f(\mathcal{X})$ es abierto y $f(\mathcal{X})$ es cerrado. Pero además $f^{-1}(f(\mathcal{X})) = \mathcal{X}$, luego $f(\mathcal{X})$ es abierto y cerrado, siendo por tanto $\mathcal{Y} \setminus f(\mathcal{X})$ también un clopen. ♢

Así pues a partir de ahora nos centraremos en el caso sobreyectivo.

Finalizamos la sección dando una última definición.

Definición 3.2.2 (Indentificación)**.** Una aplicación $f : (\mathcal{X}, \mathcal{T}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}})$ se dice ***indentificación*** si es sobreyectiva y $\mathcal{T}_Y = f(\mathcal{T})$.

3.2.4. Construcción de cocientes

En este apartado vamos a ver exactamente cuáles son las virtudes de trabajar con el caso sobreyectivo.

Si f es sobreyectiva podemos definir una relación de equivalencia $\sim$ sobre $\mathcal{X}$ de forma que la aplicación $\overline{f} : \frac{\mathcal{X}}{\sim} \to \mathcal{Y}$ esté bien definida y sea una biyección. Donde $\overline{f}([x]) = f(x)$.

En este caso $\frac{\mathcal{X}}{\sim}$ denota el conjunto cociente inducido por la relación de equivalencia $\sim$ y $[x]$ la clase de equivalencia de x.

Evidentemente, la relación de equivalencia $\sim$ será la inherente a la inyectividad.

Definición 3.2.3 (Relación de inyectividad)**.** Definimos la relación de equivalencia $\sim$ sobre $\mathcal{X}$ (¡compruébese!) como la que relaciona aquellos elementos de $\mathcal{X}$ que comparten imagen por f. Es decir $x \sim y$ si y solo si $f(x) = f(y)$. Normalmente diremos que esta es la relación de equivalencia inducida o asociada a f.

Nótese el gran parecido de este cambalache con el primer teorema de isomorfía para grupos o anillos. Por supuesto, se deja como ejericio al lector comprobar que $\overline{f}$ está bien definida y es biyectiva.

Antes de continuar presentamos una pequeña definición.

Definición 3.2.4 (Proyección canónica)**.** Dados un conjunto $\mathcal{X}$ y una relación de equivalencia $\sim$ sobre $\mathcal{X}$, definimos la ***proyección canónica*** como la aplicación

$$p: \begin{aligned} \mathcal{X} &\to \tfrac{\mathcal{X}}{\sim} \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

Donde $[x]$ denota la clase de equivalencia de x.

Ya con todos estos preliminares en la cabeza, vamos a dotar a $\frac{X}{\sim}$ de estructura de espacio topológico, y lo haremos (por comodidad) dotándole de la topología de las imágenes directas respecto de la proyección canónica p.

Como esto ya empieza a ser un poco tenebroso, hagamos un diagrama.

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{X}, \mathcal{T}) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & (\mathcal{Y}, f(\mathcal{T})) \\ (\frac{\mathcal{X}}{\sim}, p(\mathcal{T})) \arrow[ur, "\overline{f} = f \circ p^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

Introduzcamos una definición por comodidad.

Definición 3.2.5 (Topología cociente)**.** Definimos la ***topología cociente*** como

$$\mathcal{T}/\!\sim := \left\{ \mathcal{U} \subset \frac{\mathcal{X}}{\sim} \ : \ p^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{T} \right\}$$

es decir, la topología cociente es la topología imagen por p.

Nuestro objetivo ahora es ver qué relación hay entre los espacios $\frac{\mathcal{X}}{\sim}$ e $\mathcal{Y}$. Sin rodeos adelantamos que son homeomorfos.

Proposición 3.2.3 (Teorema de homeomorfía)**.** *$(\frac{\mathcal{X}}{\sim}, \mathcal{T}/\sim)$ es homeomorfo a $(\mathcal{Y}, f(\mathcal{T}))$. Además, $\overline{f}$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Probemos el "además" con lo cual tendremos el resultado.

Sabemos que $\overline{f}$ es una biyección entre $\frac{\mathcal{X}}{\sim}$ e $\mathcal{Y}$, luego únicamente queda demostrar la continuidad en ambos sentidos.

La propiedad universal de $\frac{\mathcal{X}}{\sim}$ nos dice que $\overline{f}$ es continua si y solo si $\overline{f} \circ p$ es continua.

Teniendo en cuenta que $\overline{f} = f \circ p^{-1}$ tenemos que $\overline{f} \circ p = f \circ p^{-1} \circ p = f$,como f es continua hemos terminado.

Para la continuidad de $\overline{f}^{-1}$ seguimos un argumento similar.

Por la propiedad universal de $f(\mathcal{T})$, $\overline{f}^{-1}$ es continua si y solo si $\overline{f}^{-1} \circ f$ es continua.

Pero $\overline{f}^{-1} \circ f = p \circ f^{-1} \circ f = p$, y p es continua por definición. ■

3.2.5. Saturación

En este apartado estudiaremos en detalle la topología de $\frac{\mathcal{X}}{\sim}$. Al ser este espacio homeomorfo al espacio $\mathcal{Y}$, si comprendemos la topología del cociente comprenderemos de regalo la topología de $\mathcal{Y}$ (lo cual es una estrategia tremendamente fecunda).

Antes de comenzar introduzcamos una definición.

Definición 3.2.6 (Conjunto saturado)**.** Decimos que $A \subset \mathcal{X}$ es ***saturado*** si para todo punto $x \in A$ se verifica que también están todos los de su clase de equivalencia.

Dicho de otra manera, si $x \in A$ entonces $p^{-1}([x]) \subset A$.

Por ende, un conjunto saturado será unión (obviamente disjunta) de clases de equivalencia por ende se verifica la ecuación

$$p^{-1}(p(A)) = A \tag{3.1}$$

Esta definición de conjunto saturado es útil pues caracteriza a la topología cociente como vemos a continuación.

Proposición 3.2.4 (Caracterización de la topología cociente)**.** *La topología cociente está conformada por la proyección canónica de los abiertos saturados. Es decir*

$$\mathcal{T}/\sim = \{p(\mathcal{W}) \ : \ \mathcal{W} \in \mathcal{T} \text{ y } \mathcal{W} \text{ saturado}\}$$

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ abierto del cociente veamos que podemos expresarlo como la proyección canónica de un abierto saturado.

Por construcción $p^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto saturado de $\mathcal{X}$. Si se diera la igualdad $p(p^{-1}(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$ habríamos demostrado un contenido (y efectivamente así es por sobreyectividad de p).

Recíprocamente, sea $\mathcal{W}$ abierto saturado es claro que $p(\mathcal{W})$ es abierto ya que, por ser $\mathcal{W}$ saturado $p^{-1}(p(\mathcal{W})) = \mathcal{W} \in \mathcal{T}$. ■

Observación 3.2.3 (Cerrados saturados)**.** Con un argumento análogo al de la proposición 3.2.4 puede demostrarse que los cerrados del cociente son las proyecciones canónicas de los cerrados saturados. ♢

Con lo que ya sabemos podemos dar algunas condiciones suficientes para que una aplicación sea una identificación entre espacios topológicos.

Proposición 3.2.5 (Condiciones suficientes de identificación)**.** *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ una aplicación sobreyectiva.*

Si se verifica alguna de las siguientes condiciones, f es una identificación:

1. *f es una aplicación continua abierta.*

2. *f es una aplicación continua cerrada.*

Demostración. Demostraremos únicamente (1.), (2.) es análogo y se deja como ejercicio.

Como f es sobreyectiva únicamente queda comprobar que la topología de $\mathcal{Y}$ sea la topología imagen. Al ser f continua automáticamente se tiene que $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}} \subset f(\mathcal{T})$.

Recíprocamente, dado $\mathcal{U} \in f(\mathcal{T})$, por construcción $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{T}$, como f es sobreyectiva y abierta se verifica que $f(f^{-1}(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$ es abierto de $\mathcal{Y}$, por ende se da la igualdad de las topologías. ∎

Nótese que puede haber identificaciones que no verifiquen ninguna de las condiciones anteriores. Además, como no se exige que las identificaciones sean biyectivas, las dos condiciones anteriores no son equivalentes.

Toda esta construcción abstracta debe servirnos para formalizar todo el concepto de cociente de un espacio. Esta es quizá la idea más importante que se va a ver en toda la asignatura, y es excepcionalmente útil para construir una gigantesca variedad de homeomorfismos y encontrar objetos simples homeomorfos a otros mucho más complejos.

En el siguiente apartado veremos un fragmento de la potencia de estas ideas, que insistimos en que son esencialmente las que las vistas en álgebra abstracta cuando estudiábamos los anillos inducidos por un homomorfismo evaluación usando el cociente del anillo por un polinomio.

3.2.6. Aplicaciones

En este apartado presentamos un montón de ejemplos para familiarizarnos con todas estas ideas. En primer lugar, vamos a estudiar la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1$ como un cociente de la recta real.

Ejemplo 3.2.1 (Circunferencia unidad)**.** Definimos la aplicación φ como

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\to \mathbb{S}^1 \\ t &\mapsto e^{2\pi i t} = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t) \end{aligned}$$

Compruébese que la relación de equivalencia inducida por la no inyectividad es:

$$s \sim t \iff e^{2\pi i s} = e^{2\pi i t} \iff s - t \in \mathbb{Z}$$

Vamos a ver que la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1$ es homeomorfa a $\mathbb{R}/\sim$.

Nos queda, pues, el siguiente esquema:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathbb{S}^1 \arrow[dl, leftrightarrow] \\
\mathbb{R}/\sim &
\end{tikzcd}$$

Está claro que la aplicación que manda $\mathbb{R}$ a $\mathbb{S}^1$ es una identificación, pues es sobreyectiva, continua y homeomorfismo local, luego es abierta (¡compruébese!).

Ahora, nótese que considerando $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ podemos tomar las restricciones correspondientes con el siguiente esquema:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[dd] & \mathbb{S}^1 \arrow[ddl, leftrightarrow] \\
{[0,1]} \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & & \\
 & \mathbb{R}/\sim &
\end{tikzcd}$$

y llegar a otra identificación $\varphi\restriction_{[0,1]}$ (compruébese). Ahora la relación de equivalencia asociada es simplemente aquella en la que $1 \sim 0$ y todos los demás puntos son solamente equivalentes a sí mismos.

Por ende hemos concluido que la circunferencia unidad es homeomorfa al intervalo $[0, 1]$ si "pegamos" los extremos, es decir, la circunferencia unidad es homeomorfa a $[0, 1]/\sim$. ♢

Esta posibilidad de encontrar, a veces, un cociente más simple que tiene la misma topología nos motiva a definir:

Definición 3.2.7 (Dominio fundamental)**.** Dada una identificación f entre espacios topológicos llamamos ***dominio fundamental*** al menor subconjunto D de $\mathcal{X}$ tal que $f\restriction_D$ continúa siendo identificación.

A veces se exigen también algunas condiciones de regularidad extra, por ejemplo, que D sea cerrado o "compacto". Normalmente nosotros pediremos que sea cerrado.

Observación 3.2.4 (Definición equivalente)**.** Es claro que si la restricción de una identificación $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ a un conjunto D continúa siendo identificación, el conjunto D posee al menos un representante de cada clase de equivalencia de $\frac{\mathcal{X}}{\sim}$ (si no se rompe la sobreyectividad).

Recíprocamente, si restringimos una identificación a un subconjunto que contenga al menos un representante de cada clase de equivalencia continúa siendo una identificación, ya que $\mathcal{U}$ es abierto de $\mathcal{Y}$ si y solo si $f^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto de $\mathcal{X}$ lo cual es equivalente a que $f^{-1}(\mathcal{U}) \cap D$ sea abierto de D, pero resulta que $f\restriction_D(\mathcal{U}) = f^{-1}(\mathcal{U}) \cap D$ (luego hemos ganado).

Como conclusión obtenemos que podríamos haber definido dominio fundamental como el menor subconjunto de $\mathcal{X}$ que contiene al menos un representante de cada clase de equivalencia (con las condiciones de regularidad adicionales que queramos). $\diamondsuit$

Ejemplo 3.2.2 (Toro)**.** Ahora, vamos a considerar el ***toro plano*** $\mathbb{T}^2$. El toro $\mathbb{T}^2$ se define como el producto cartesiano $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^4$ con la topología relativa correspondiente.

El toro plano admite una representación en $\mathbb{R}^3$ como vemos en la figura 3.1. Informalmente se trata de una figura generada por revolución de una circunferencia en torno a un eje (o símplemente de un rosco).

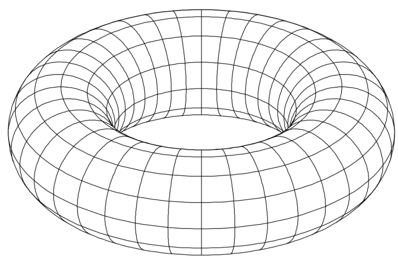


Figura 3.1: Ilustración de un toro

Si consideramos la aplicación $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definida por:

$$\begin{aligned} x &= \cos(2\pi x), \\ y &= \operatorname{sen}(2\pi x), \\ z &= \cos(2\pi y), \\ t &= \operatorname{sen}(2\pi y). \end{aligned}$$

Vamos a hacer pues una construcción similar a la ya vista para la circunferencia unidad. Nos queda un esquema del siguiente tipo:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^4 \\ {[0,1]^2} \arrow[ur, hook] \arrow[r] & \mathbb{R}^2/\sim \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

En este caso, la relación de equivalencia inducida es (¡háganse las cuentas!):

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x - x' \in \mathbb{Z},\ y - y' \in \mathbb{Z}$$

y como dominio fundamental encontramos el cuadrado $[0, 1]^2$.

La demostración de que φ es indentificación sigue la misma filosofía que la del ejemplo anterior, es decir, se basa en demostrar que es homeomorfismo local (no lo haremos aquí).

Así pues queda demostrado que si cogemos un cuadrado y "pegamos" sus bordes tal y como indica la figura 3.2 obtenemos un espacio homeomorfo al toro, es decir a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Dicho formalmente $[0,1]^2/\sim$ es homeomorfo al toro plano. $\diamondsuit$

A menudo, los dominios fundamentales son representables mediante esquemas llamados ***polígonos fundamentales*** (recortables ifantiles exóticos).

La forma de entenderlos es que la relación de equivalencia "pega" los puntos de A y de B en el sentido que indican las flechas, como vemos en el ejemplo siguiente, que representa el toro que acabamos de describir:

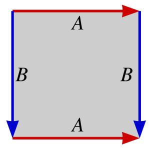


Figura 3.2: Polígono fundamental de un toro plano

En el siguiente ejemplo, vamos a ver varios homeomorfismos cociente importantes pero sin entrar en tantos detalles como en los ejemplos previos. Para familiarizarnos íntimamente con el espacio cociente, es un buen ejercicio mental tratar de visualizar cómo podemos deformar un objeto del ejemplo siguiente para transformarlo en otro homeomorfo. Al fin y al cabo, la homeomorfia, intuitivamente, es poder deformar sin romper, y los cocientes formalizan la noción de "pegar" puntos.

Ejemplo 3.2.3 (Otros espacios cociente interesantes)**.**

1. La esfera $\mathbb{S}^2$ se puede identificar con el disco unidad si la relación de equivalencia es la que hace que todos los puntos del borde (la circunferencia) estén relacionados entre sí y los demás, solo consigo mismos. De la misma forma, la podemos identificar con dos discos donde la relación de equivalencia "pega" los bordes.

   Por último, una esfera puede identificar con un polígono fundamental de la siguiente manera

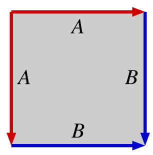


Figura 3.3: Polígono fundamental de la esfera.

2. Podemos identificar el plano proyectivo real $\mathbb{P}^2$ con un disco y una banda de Möbius donde la relación de equivalencia "pega" los bordes (tiene su miga y no lo haremos aquí).

   También podemos identificarlo con una semiesfera en la que cada punto del borde es equivalente a su antípoda, o con una esfera completa en la que dos puntos están relacionados si y solo si son antipodales.

   Además, también admite una identificación como polígono fundamental

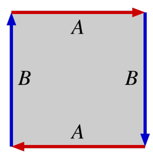
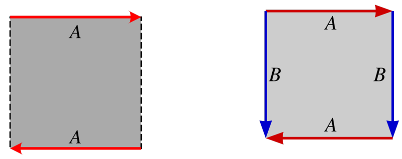


Figura 3.4: Polígono fundamental del plano proyectivo real.



(a) Banda de Möbius (b) Botella de Klein

Figura 3.5: Banda de Möbius y Botella de Klein

3. Ya como colofón podemos definir como espacios con topología cociente dos objetos más.

Esto es objetivamente bonito. $\diamondsuit$

Observación 3.2.5 (Otro tipo de problema)**.** Puede ocurrir que no tengamos ni idea de cual puede ser una posible identificación entre un espacio y otro pero si sepamos a qué cociente podría ser homeomorfo el espacio a estudiar, lo cual, a la postre puede ayudarnos a encontrar una identificación cuyo cociente inducido sea el candidato (y demostrar así la homeomorfía). $\diamondsuit$

Ejemplo 3.2.4 (Cilindro)**.** Para ilustrar el problema descrito en la observación 3.2.5 vamos a imaginar que estamos en el jardín de infancia jugando con cartulinas, nuestro objetivo será construir un cilindro. Nosotros, que somos chavales avispados, sabemos que el cilindro se define como $\mathbb{S}^1 \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3$, pero sólo tenemos una cartulina, eso es $[0,1]^2$. De pronto se nos enciende la bombilla y decimos, "¡anda coño!" (Arquímedes hubiera dicho "¡eureka!") y comprobamos que si pegamos los bordes del cuadrado nos sale algo, así a ojo, muy parecido a un cilindro, no obstante somos desconfiados y queremos comprobarlo formalmente.

Esta idea de pegar los bordes la podemos modelizar con la relación de equivalencia

$$(x,y) \sim (x',y') \iff x - x' \in \mathbb{Z},\ y = y'$$

Visto con polígono fundamental

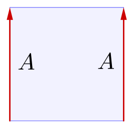


Figura 3.6: Polígono fundamental del cilindro.

Dicho formalmente, estamos considerando el espacio cociente $[0,1]^2/\!\sim$ como candidato a ser homeomorfo al cilindro. Para demostrar que así es debemos encontrar una aplicación $\varphi : [0,1]^2 \to \mathbb{S}^1 \times [0,1]$ tal que su relación de equivalencia asociada sea $\sim$ y además sea identificación.

Es claro que se debe cumplir (entre otras cosas) $\varphi(0,y) = \varphi(1,y) = (x',y',z')$ y que $x'^2 + y'^2 = 1$ para todo $y \in [0,1]$.

Llegados a este punto más vale que se te ilumine la cabeza y te des cuenta de que una función trigonométrica te haría muy buen apaño. Por ejemplo

$$\begin{aligned} \varphi : x' &= \cos(2\pi x) \\ y' &= \mathrm{sen}(2\pi x) \\ z' &= y \end{aligned}$$

Esta función cumple trivialmente todas las propiedades requeridas. Es evidente que es sobreyectiva en $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ además también es continua, y, no solo eso sino que es homeomorfismo local, con lo cual es abierta (y por tanto identificación).

En ningún momento hemos demostrado que ninguna de las aplicaciones vistas en ejemplos sean homeomorfismos locales (que parece ser la clave para demostrar que son abiertas y por tanto identificaciones), sin embargo, no lo hacemos porque más adelante veremos resultados potentes que nos permitirán demostrar este tipo de cosas de un plumazo.

Bien, si damos por hecho eso, ya habríamos demostrado formalmente (por el teorema de homeomorfía) que $[0,1]^2/\sim$ es homeomorfo al cilindro, y, por tanto, podríamos ir a pedir una pegatina con forma de estrella sonriente, que nos la hemos ganado. $\diamondsuit$

3.3. Producto de espacios topológicos

Una vez visto el caso de los espacios cociente, pasamos ahora a realizar un desarrollo similar para otras construcciones como son los productos y sumas de espacios topológicos (esta sección y la siguiente).

Como es natural se va a realizar un procedimiento análogo, no obstante, nos permitiremos la licencia de ir un pelín más ágiles.

3.3.1. Construcción de continuidad menos fina

Sean $(X_i, \mathcal{T}_i)_{1\leq i\leq r}$ espacios topológicos y sea $Y = \prod_{i=1}^{r} X_i$ el producto cartesiano de dichos espacios.

Definición 3.3.1 (Proyecciones)**.** Definimos de ***proyección*** i–ésima de Y sobre X_i como la aplicación

$$\begin{aligned} p_i : \quad & Y \to X_i \\ & (y_1,\dots,y_r) \mapsto (0,\dots,y_i,\dots,0) \end{aligned} \tag{3.2}$$

El problema que nos planteamos ahora es el de dotar a Y de la topología $\mathcal{T}_Y$ menos fina que haga continuas a todas las aplicaciones proyecciones.

De este modo, como queremos que p_i sea continua tenemos que exigir la imagen inversa todo abierto $U_i \in \mathcal{T}_i$ sea un abierto de Y, es decir

$$(p_i^r)^{-1}(U_i) = X_1 \times \cdots \times U_i \times \cdots X_r \in \mathcal{T} \tag{3.3}$$

Sin embargo, al contrario de lo que ha ocurrido hasta ahora, esta ya no es directamente la solución al problema, ya que si coleccionamos los conjuntos descritos en la ecuación 3.3, estos no son una topología (falla la intersección finita).

Por ende, vamos a añadir a la colección anterior los conjuntos del tipo

$$(p_i^r)^{-1}(U_i) \cap (p_j^r)^{-1}(U_j) = X_1 \cdots \times U_i \times \cdots \times U_j \times \cdots X_r$$

o más en general

$$\mathcal{B} := \{U_1 \times \cdots \times U_r \ : \ U_i \in \mathcal{T}_i\} \tag{3.4}$$

Pero ahora nos falla la unión arbitraria (basta dibujarse un ejemplo en el plano usual). Sin embargo, esto ya es fácil de solucionar.

Si coseguimos demostrar el conjunto $\mathcal{B}$ definido en 3.4 es una base entonces habremos ganado.

Antes de pasar a demostrarlo, que es muy fácil, vamos a presentar una igualdad conjuntista utilísima en el contexto de los productos.

Lema 3.3.1 (Producto cartesiano e intersección)**.** *Sean $A_1,\dots,A_n$ y $B_1,\dots,B_n$ conjuntos arbitrarios, entonces se cumple*

$$(A_1 \times \cdots \times A_n) \cap (B_1 \times \cdots \times B_n) = (A_1 \cap B_1) \times \cdots \times (A_n \cap B_n)$$

Demostración. Un elemento $(x_1,\dots,x_n)$ vive en el miembro de la izquierda si y solo si cada una de sus componentes x_i vive tanto en A_i como en B_i, lo cual es equivalente a vivir en el miembro de la derecha. ■

Proposición 3.3.2 (Base de la menos fina)**.** *El conjunto $\mathcal{B}$ definido en 3.4 es base de la topología menos fina que hace a todas las proyecciones continuas.*

Demostración. Que es base es evidente ya que $Y = \prod_{i=1}^r X_i \in \mathcal{B}$, y no solo se cumple la segunda condición de la caracterización de bases sino que se da algo más fuerte, la intersección de dos elementos de la base es elemento de la base.

En efecto, dados $U_1 \times \cdots \times U_r$ y $V_1 \times \cdots \times V_r$ elementos de la base su intersección es $(U_1 \cap V_1) \times \cdots \times (U_r \cap V_r)$ y como $(U_i \cap V_i) \in \mathcal{T}_i$, afirmamos que forma parte de la base por la definición de la misma.

Además $\mathcal{B}$ es base de la topología menos fina que resuelve nuestro problema, ya que si hubiera otra topología más fina que lo resolviera, al menos debería contener a los abiertos de $\mathcal{B}$ y sus uniones arbitrarias, siendo por tanto más fina que la topología engendrada por $\mathcal{B}$ (absurdo). ∎

Así pues ya podemos definir formalmente la "topología producto" como la topología engendrada por $\mathcal{B}$. Condensemos todo esto en forma de definición.

Definición 3.3.2 (Topología producto)**.** Sean $(X_i, \mathcal{T}_i)_{1 \leq i \leq r}$ espacios topológicos y sea $Y = \prod_{i=1}^r X_i$. Entonces, se conoce como ***topología producto*** a la topología $\mathcal{T}_Y \overset{\text{not.}}{:=} \prod \mathcal{T}_i$ de Y que viene dada por la base $\{U_1 \times \cdots \times U_r \ : \ U_i \in \mathcal{T}_i\}$.

3.3.2. Caracterización de la continuidad entrante

Como estamos haciendo una construcción bastante parecida a la de las inmersiones, vamos a tratar de resolver el problema de caracterizar a las aplicaciones continuas que mueren en un espacio con la topología producto.

Lema 3.3.3 (Propiedad universal del producto)**.** *En la siguiente situación,*

$$\begin{tikzcd}
Y = \prod_i X_i \arrow[r, "p_i"] & (X_i, \mathcal{T}_i) \\
(Z, \mathcal{T}') \arrow[u, "{(f_1,\dots,f_n)=f}"] \arrow[ur, "p_i \circ f = f_i"'] &
\end{tikzcd}$$

tenemos que f es continua si y solo si $f_i \overset{!}{=} p_i \circ f$ es continua para todo $i \in \{1, \dots, r\}$.

Demostración. Vemos que si f es continua, como p_i es continua, tenemos que f_i también lo será al ser composición de estas.

Recíprocamente, como la continuidad basta con comprobarla para los abiertos de la base, queremos demostrar que dado $W = \prod_{i=1}^r U_i$ abierto en Y, entonces $f^{-1}(W)$ es abierto. En efecto

$$f^{-1}(W) = f^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_r) = f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^r p_i^{-1}(U_i)\right) = \bigcap_{i=1}^r f_i^{-1}(U_i)$$

será abierto dado que los $f_i^{-1}(U_i)$ son abiertos por ser f_i continua. ∎

Observación 3.3.1 (Extensión)**.** Esto viene a ser una extensión del teorema para aplicaciones que morían en $\mathbb{R}^n$ que decía que dicha aplicación era continua si y solo si lo era cada componente. No obstante, la razón profunda es el lema anterior. ♢

3.3.3. Propiedad universal del producto

A la condición necesaria y suficiente descrita en el lema 3.3.3 se la denomina ***propiedad universal del producto***. Como en los casos anteriores, esta propiedad caracteriza a la topología producto.

Proposición 3.3.4 (Unicidad de la propiedad universal)**.** *Si $(Y, \mathcal{T}_Y)$ cumple la propiedad universal del producto, entonces $\mathcal{T}_Y = \prod \mathcal{T}_i$*

Demostración. Vamos a demostrarlo por doble contención y haciendo algún cambalache con la identidad. Empecemos con un diagrama para aclarar las ideas.

$$\begin{tikzcd} (Y, \mathcal{T}_Y) \arrow[r, "p_i"] & (X_i, \mathcal{T}_i) \\ (Y, \mathcal{T}_Y) \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, "p_i = p_i \circ \mathrm{id}"'] & \end{tikzcd}$$

Como la topología $\mathcal{T}_Y$ cumple la propiedad universal y la aplicación identidad es continua, tenemos que p_i es continua. Luego por finura $\prod \mathcal{T}_i \subset \mathcal{T}_Y$.

Ahora razonamos con este diagrama:

$$\begin{tikzcd} (Y, \mathcal{T}_Y) \arrow[r, "p_i"] & (X_i, \mathcal{T}_i) \\ (Y, \prod \mathcal{T}_i) \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, "p_i = p_i \circ \mathrm{id}"'] & \end{tikzcd}$$

Como por construcción p_i es continua, entones id es continua. Esto solo ocurre si $\mathcal{T}_Y \subset \prod \mathcal{T}_i$. ■

3.3.4. Propiedades de los espacios producto

Vamos a ver ahora una serie de proposiciones relacionadas con la topología producto, las cuales a pesar de resultar sencillas de comprobar nos proporcionan resultados interesantes.

Proposición 3.3.5 (Apertura de proyecciones). *Las proyecciones son abiertas.*

Demostración. Sea W abierto en el espacio producto, veamos que $p_i(W)$ es abierto.

Basta con comprobarlo con los abiertos de la base. Como $p_i(U_1 \times \cdots \times U_r) = U_i$ es abierto podemos concluir la demostración. ■

Proposición 3.3.6 (Inmersiones). *La aplicación $f : X_i \to \{a_1\} \times \cdots \times X_i \times \cdots \times \{a_r\} \subset X_1 \times \cdots \times X_r$ tal que $x \mapsto (a_1, \ldots, x, \ldots, a_r)$ es una inmersión.*

Demostración. Evidentemente, f es inyectiva, luego solo queda demostrar que X_i tiene la topología imágenes inversas $f^{-1}(\prod_{k=1}^r \mathcal{T}_k)$. En efecto, aunque un poco engorroso

$$f^{-1}\left(\prod_{k=1}^r \mathcal{T}_k\right) = \left\{ f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} \prod_{k=1}^r U_k\right) \ : \ U_k \in \mathcal{T}_k \right\} = \left\{ \bigcup_{l \in L} U_i \ : \ U_i \in \mathcal{T}_i \right\} = \mathcal{T}_i$$

Nótese el cambio de índices arbitrarios de $j \in J$ a $l \in L$ con $L \subset J$ para recalcar que hay abiertos del producto cuya imagen inversa por f es el vacío. ■

Una demostración alternativa (y quizá más contundente) consistiría en demostrar que f es un homeomorfismo.

Observación 3.3.2 (Consecuencias). La topología de $\{a_1\} \times \cdots \times X_i \times \cdots \times \{a_r\}$ es exactamente la de X_i, pues al ser una inmersión, la restricción es un homeomorfismo.

Esto constituye un truco muy importante para comprobar si una topología es una topología producto, en concreto, para descartar candidatos. ♢

Ahora pasamos a ver si somos capaces de construir bases más sencillas para nuestra topología producto, es decir, conformadas por menos abiertos. Igualmente, veremos el modo de construcción de bases de entornos en el espacio producto.

Proposición 3.3.7 (Reducción de la base). *Dado el espacio producto $(Y, \prod \mathcal{T}_i)$ tenemos que:*

$$\mathcal{B} = \{W_1 \times \cdots \times W_r : W_i \in \mathcal{B}_i \text{ base de } \mathcal{T}_i\}$$

es base de abiertos de $(Y, \prod \mathcal{T}_i)$.

Demostración. Basta probar que todo abierto de la base antigua puede ser escrito como unión de abiertos de la base nueva.

En efecto, sea $\mathcal{U}$ abierto de la base vieja, luego $\mathcal{U} = U_1 \times \cdots \times U_r$ con $U_i \in \mathcal{T}_i$, poniendo cada abierto como unión de abiertos de su base correspondiente obtenemos $U_i = \bigcup_j W_{ij}$ con $W_{ij} \in \mathcal{B}_i$.

Ahora basta razonar con cada punto, es decir, dado $x \in \mathcal{U}$, entonces

$$x \in \mathcal{W}_{1x} \times \cdots \times W_{rx} \subset \bigcup_j W_{1x} \times \cdots \times \bigcup_j W_{rx} = U_1 \times \cdots \times U_r$$

Luego evidentemente $\mathcal{U} = \bigcup_{x \in \mathcal{U}} \mathcal{W}_{1x} \times \cdots \times W_{rx}$ con lo que se tiene el resultado. ■

Proposición 3.3.8. *Dado el espacio producto $(Y, \prod \mathcal{T}_i)$ y $a := (a_1, \ldots, a_r) \in Y$ tenemos que:*

$$\mathcal{V} = \{V_{a_1} \times \cdots \times V_{a_r} : V_{a_i} \in \mathcal{V}_{a_i} \textit{ base de entornos de } a_i \textit{ en } \mathcal{T}_i\}$$

es base de entornos de a en el producto.

Demostración. En primer lugar es evidente que los elementos de $\mathcal{V}$ son entornos. Por otra parte, dado V entorno de a entonces hay un abierto (que sin pérdida de generalidad puede ser de la base) tal que $a \in \prod_{i=1}^r U_i \subset V$.

Es claro que U_i es entorno de a_i para todo i, luego, habrá un $V_{a_i} \in \mathcal{V}_{a_i}$ de manera que $a_i \in V_{a_i} \subset U_i$, con lo que se tiene el resultado. ■

Estas últimas propiedades nos sugieren hacer un par de observaciones.

Observación 3.3.3 (Axiomas hereditarios)**.** El producto de espacios I axioma es I axioma, y lo mismo sucede con II axioma. ♢

Observación 3.3.4 (Asociatividad)**.** Dados X_1, X_2, X_3 espacios topológicos, es claro que $X_1 \times (X_2 \times X_3)$ es homeomorfo a $(X_1 \times X_2) \times X_3$ y a $X_1 \times X_2 \times X_3$, es decir, las topologías producto son las mismas.

Esto se deduce fácilmente de la proposición 3.3.7. ♢

Por último, presentamos algunas observaciones útiles sobre la topología de los productos.

Proposición 3.3.9 (Adherencia)**.** *Sean X_i espacios topológicos y A_i subconjuntos de X_i. Tenemos que*

$$\mathrm{Adh}_{\prod_{i=1}^r X_i}(A_1 \times \cdots \times A_r) = \mathrm{Adh}_{X_1}(A_1) \times \cdots \times \mathrm{Adh}_{X_r}(A_r)$$

Demostración. Por una parte tenemos que $x \in \mathrm{Adh}(A_1 \times \cdots \times A_r)$ si y solo si dado un abierto $U_1 \times \cdots \times U_r$ de x, dicho abierto corta a $A_1 \times \cdots \times A_r$.

Por otra parte, $x = (x_1, \ldots, x_r) \in \mathrm{Adh}(A_1) \times \cdots \times \mathrm{Adh}(A_r)$ si y solo si para todo $U_1 \times \cdots \times U_r$ donde U_i es abierto de x_i, se cumple que $U_i \cap A_i \neq \emptyset$ para todo i.

Finalmente, gracias al lema 3.3.1 se llega al resultado. ■

Corolario 3.3.10 (Cerrados)**.** *Sean X_i espacios topológicos y A_i subconjuntos de X_i. Tenemos que $A_1 \times \cdots \times A_r$ es cerrado si y solo si A_i es cerrado para todo i.*

Demostración. $A_1 \times \cdots \times A_r$ es cerrado si y solo si coincide con su adherencia, que por la proposición 3.3.9 coincide con $\mathrm{Adh}(A_1) \times \cdots \times \mathrm{Adh}(A_r)$. En definitiva

$$A_1 \times \cdots \times A_r = \mathrm{Adh}(A_1 \times \cdots \times A_r) = \mathrm{Adh}(A_1) \times \cdots \times \mathrm{Adh}(A_r)$$

y esto es equivalente a que $A_i = \mathrm{Adh}(A_i)$ para todo i, de donde se sigue el resultado. ■

Proposición 3.3.11 (Subespacios)**.** *Sean $A_1 \subset X_1, \ldots, A_r \subset X_r$ subespacios topológicos.*

Se verifica que la topología producto de $A_1 \times \cdots \times A_r$ equipando a cada A_i con la topología relativa como subespacio de X_i, coincide con la topología relativa de $A_1 \times \cdots \times A_r$ como subespacio de $\prod_{i=1}^r X_i$

Demostración. Los abiertos de una base de $\prod_{i=1}^r A_i$ como topología producto de topologías relativas son de la forma $(U_1 \cap A_1) \times \cdots \times (U_r \cap A_r)$, mientras que los abiertos de una base de $\prod_{i=1}^r A_i$ como topología relativa de una topología producto son de la forma $(U_1 \times \cdots \times U_r) \cap (A_1 \times \cdots \times A_r)$.

Por el lema 3.3.1 estas dos bases son la misma, luego la topología es la misma. ■

3.4. Suma de espacios topológicos

Vamos a ver como última la construcción la suma, la cual gracias al desarrollo previo de los casos anteriores va a resultar de fácil comprensión para el lector (también iremos más rápido). La idea de esta construcción va a ser la de realizar copias de objetos a distintas “alturas” (como si los colocáramos en estantes).

Como antes, vamos a comenzar viendo las propiedades que debe cumplir la topología que caracterice nuestro espacio para luego pasar a construirla.

Dados los espacios $(X_i, \mathcal{T}_i)_{1\leq i\leq r}$ con sus correspondientes topologías, consideramos la “suma” de los conjuntos como

$$Y := \sum_{i=1}^{r} X_i := \bigcup_{i=1}^{r} \{i\} \times X_i \tag{3.5}$$

Antes de continuar introducimos la siguiente definición.

Definición 3.4.1 (Inclusiones)**.** Definimos la ***inclusión*** de X_i en Y como la aplicación

$$\begin{aligned} j_i: \quad X_i &\to Y \\ x_i &\mapsto (i, x_i) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ahora bien, nuestro objetivo en esta construcción será el de crear la topología $\mathcal{T}_Y$ más fina en Y de modo que haga a todas las inclusiones continuas simultáneamente.

Por definición de continuidad, podemos (y debemos, ya que buscamos que sea la más fina) incluir en $\mathcal{T}_Y$ todos los conjuntos de Y cuya inversa vía todas las inclusiones sea abierta (tal y como hicimos en la construcción del cociente).

De este modo, exigiremos que $\{i\}\times U_i$ (siendo $U_i \in \mathcal{T}_i$) sea abierto dado que $j^{-1}(\{i\}\times U_i) = U_i$, que es abierto en $\mathcal{T}_i$.

Evidentemente, la colección de conjuntos de esta forma no es una topología, es claro que la unión falla, no obstante, hay una forma muy sencilla de arreglar esto, tal y como hicimos con los productos.

Si construimos la topología que tiene como base $\mathcal{B} = \{\{i\} \times U_i : U_i \in \mathcal{T}_i\}$ se comprueba fácilmente que efectivamente es base y que, además, resuelve nuestro problema.

En efecto, es claro que cubre el espacio, estudiemos las intersecciones.

$$(\{i\} \times U_i) \cap (\{j\} \times U_j) = \begin{cases} \{i\} \times (U_i \cap U_j) \in \mathcal{B} & si \quad i = j \\ \\ \emptyset \in \mathcal{B} & si \quad i \neq j \end{cases} \tag{3.7}$$

Como podemos ver, ambos casos verifican que la intersección de abiertos de la base es está en $\mathcal{B}$ (que es, de hecho, más fuerte de lo que necesitamos). Además, es claro que la topología engendrada por $\mathcal{T}$ es la más fina ya que si añadiéramos algún abierto más romperíamos la continuidad de alguna inclusión.

Condensemos todo esto en una definición.

Definición 3.4.2 (Topología suma)**.** Sean r espacios topológicos $(X_i, \mathcal{T}_i)_{1\leq i\leq r}$ y el espacio suma $Y = \sum_{i=1}^{r} X_i$, construimos la ***topología suma***, y la denotamos $\sum \mathcal{T}_i$ como aquella topología que tiene como base

$$\mathcal{B} = \{\{i\} \times U_i : U_i \in \mathcal{T}_i\}$$

Ahora volvemos a hacer lo que hacemos siempre, es decir, tratar de caracterizar a las aplicaciones continuas que mueren en el espacio suma, para posteriormente ver que es precisamente esa caracterización la que caracteriza a la topología suma ¡valga la redundancia!

Lema 3.4.1 (Propiedad universal de la suma)**.** *En la siguiente situación:*

$$\begin{tikzcd} (X_i, \mathcal{T}_i) \arrow[r, "j_i"] \arrow[dr, "g\circ j_i = g\restriction_{X_i\times\{i\}}"'] & (Y, \sum \mathcal{T}_i) \arrow[d, "g"] \\ & (Z, \mathcal{T}') \end{tikzcd}$$

g es continua si y solo si $g \circ j_i \overset{!}{=} g\restriction_{X_i \times \{i\}} =: g_i$ es continua para todo i.
A esta condición necesaria y suficiente se llama ***propiedad universal de la suma****.*

Demostración. Si g es continua, como j_i son continuas, tenemos que g_i también lo será al ser composición de estas.
Por otro lado, como $\{i\} \times X_i$ es un recubrimiento abierto de Y, y además g_i es continua en cada abierto del recubrimiento, es claro que, por definición de g_i, g es continua. ■

Veamos que en efecto la propiedad universal de la suma caracteriza a la topología suma, y, por tanto, si un espacio topológico no cumple esta propiedad podemos asegurar que no tiene la topología suma.

Lema 3.4.2 (Unicidad de la propiedad universal)**.** *Si en el espacio topológico $Y = (\sum_{i=1}^{r} X_i, \mathcal{T}_Y)$ se verifica la propiedad universal de la suma , entonces $\mathcal{T}_Y = \sum \mathcal{T}_i$.*

Demostración. Exactamente igual que en las anteriores, basta con considerar los diagramas

$$\begin{tikzcd} (X_i, \mathcal{T}_i) \arrow[r, "j_i"] \arrow[dr, "j_i \circ \mathrm{id} = j_i"'] & (Y, \mathcal{T}_Y) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ & (Y, \mathcal{T}_Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (X_i, \mathcal{T}_i) \arrow[r, "j_i"] \arrow[dr, "j_i \circ \mathrm{id} = j_i"'] & (Y, \mathcal{T}_Y) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ & (Y, \sum \mathcal{T}_i) \end{tikzcd}$$

y razonar por doble contención.
Centrándonos en el diagrama de la izquierda, la identidad es continua luego las inclusiones son continuas, por ende, $\mathcal{T}_Y \subset \sum \mathcal{T}_i$.
Mirando ahora a la derecha, las inclusiones son continuas por construcción luego id es continua, luego $\sum \mathcal{T}_i \subset \mathcal{T}_Y$. ■

Para poner punto y final a este capítulo veamos algunas propiedades de los espacios suma.

Observación 3.4.1 (Propiedades del espacio suma)**.** Veamos por último un par de observaciones sobre esta topología que pueden resultar interesantes de cara a conocer el mecanismo de la misma.

1. Como hemos visto, $\{i\} \times X_i \subset \sum_{j=1}^{r} X_j$ siendo $\{i\} \times X_i$ abierto. Veamos que también es cerrado.

   En efecto, $\sum_{j=1}^{r} X_j \setminus \{i\} \times X_i = \bigcup_{j \neq i} X_j$ es abierto, luego lo tenemos.

   Como hemos comentado en un par de ocasiones, adelantándonos a los acontecimientos, el hecho de que haya clopens no triviales (vacío o total) implica cierta noción de desconexión, (lo cual cuadra con la idea de poner los espacios bien separaditos en estantes).

2. A es cerrado de $\sum_{i=1}^{r} X_i$ es cerrado si y solo si su imagen inversa vía todas las inclusiones es cerrada.

   En efecto, por las propiedades de las funciones inversas con las restas conjuntistas

   $$X_i \setminus j_i^{-1}(A) = j_i^{-1}\left(\left(\sum_{i=1}^{r} X_i\right) \setminus A\right)$$

   Como $(\sum_{i=1}^{r} X_i) \setminus A$ es abierto por hipótesis, entonces $X_i \setminus j_i^{-1}(A)$ es abierto por construcción.

   Recíprocamente, si $j_i^{-1}\left((\sum_{i=1}^{r} X_i) \setminus A\right)$ es abierto por hipótesis para todo i, entonces, por construcción, $(\sum_{i=1}^{r} X_i) \setminus A$ debe ser abierto. Hemos terminado.

3. Las inclusiones son inmersiones abiertas y cerradas. Esto lo dejamos como ejercicio al lector, es un ejercicio sencillo, diremos como pista la demostración de que son inmersiones es análoga a la de la proposición 3.3.6 (un poco engorrosa). ♢

Capítulo 4

Separación

4.1. Separación de puntos

La separación de puntos consiste en, dados dos puntos distintos, saber "distinguirlos topológicamente" (sea lo que sea eso). Presentamos algunas formas de entender el significado de la pedante expresión entrecomillada.

Definición 4.1.1 (Axiomas de separación)**.** Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ un espacio topológico.

- Se dice que $\mathcal{X}$ es T_0 o ***Kolmogorov*** si para cada par de puntos existe un entorno de uno de los dos puntos (sin especificar cuál) que no contiene al otro.
- $\mathcal{X}$ es T_1 o ***Fréchet*** si dados dos puntos x e y, existe un entorno $\mathcal{V}_x$ de x que no contiene a y y también existe un entorno $\mathcal{V}_y$ de y que no contiene a x.
- Por último, se dice que $\mathcal{X}$ es T_2 o ***Hausdorff*** si dados $x, y \in \mathcal{X}$ existen un entorno $\mathcal{V}_x$ de x y un entorno $\mathcal{V}_y$ de y tales que son disjuntos.

Observación 4.1.1 (Consecuencias inmediatas)**.** De la definición 4.1.1 se desprende que:

1. Todo espacio métrico es T_2. En efecto, si consideramos dos puntos distintos x e y, podemos tomar bolas centradas en cada uno de los puntos de radio menor que la mitad de la distancia que los separa. Compruébese que de este modo resolvemos el problema.
2. Es claro que se da la cadena de implicaciones $\mathrm{T}_2 \implies \mathrm{T}_1 \implies \mathrm{T}_0$. $\diamondsuit$

4.2. Caracterizaciones

En esta subsección vamos a estudiar varios resultados útiles que se desprenden directamente de la defnición 4.1.1.

Comencemos con una reformulación de lo que significa ser T_1

Proposición 4.2.1 (Caracterización de T_1)**.** *$\mathcal{X}$ es T_1 si y solo si sus puntos son cerrados.*

Demostración. Procedemos por doble implicación.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Consideremos un par de puntos cualquiera $x, y \in \mathcal{X}$. Como $\{x\}$ es cerrado, su complementario, $\mathcal{U} := \mathcal{X} \backslash \{x\}$, es abierto, y, por tanto, entorno de todos sus puntos. Como $y \in \mathcal{U}$, tenemos un entorno de y que no contiene a x. Para encontrar un entorno de x que no contenga a y basta intercambiar los papeles de x e y.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sea $x \in \mathcal{X}$, veamos que $\mathcal{X} \setminus \{x\}$ es abierto viendo que es entorno de todos sus puntos. En efecto, dado $y \in \mathcal{X} \setminus \{x\}$, como $\mathcal{X}$ es T_1, hay un abierto de y que no contiene a x, luego $\mathcal{X} \setminus \{x\}$, como y es arbitrario hemos terminado. ■

Veamos a continuación una de las propiedades más importantes de los espacios T_2.

Teorema 4.2.2 (Clausura del conjunto coincidente). *Si* $f, g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *son funciones continuas e* $\mathcal{Y}$ *es* T_2*, entonces* $\{f = g\} := \{x \in \mathcal{X} \ : \ f(x) = g(x)\} \subset \mathcal{X}$ *es cerrado.*

Demostración. Procederemos demostrando que el conjunto $\{f \neq g\}$ es abierto, para lo cual usaremos (¡oh, sorpresa!) que es entorno de todos sus puntos.

Dado $x \in \{f \neq g\}$, al ser $\mathcal{Y}$ T_2, existen entornos $\mathcal{V}_f$ de $f(x)$ y $\mathcal{V}_g$ de $g(x)$ disjuntos.

Como f y g son continuas, transforman entornos en entornos por imágenes inversas, por ende, tenemos que $W := f^{-1}(\mathcal{V}_f) \cap g^{-1}(\mathcal{V}_g)$ es entorno de x (por ser intersección de entornos).

Veamos pues que W está contenido en $\{f \neq g\}$. En efecto, si hubiera un $y \in W$ tal que $f(y) = g(y) =: z$, entonces, por definición de $\mathcal{V}_f$ y $\mathcal{V}_g$, $z \in \mathcal{V}_f \cap \mathcal{V}_g$, lo cual es imposible. ■

En general el recíproco de este teorema no se da, no obstante, hay un caso particular en el que sí. Antes de ver la demostración de este hecho, estudiemos el caso particular, que tiene interés por sí mismo.

Observación 4.2.1 (Proyecciones). Consideremos el espacio producto $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ y las proyecciones p_1 y p_2.

El resultado anterior nos da que $\{p_1 = p_2\}$ es un conjunto cerrado. Nótese que dicho conjunto no es más que $\{(x, y) \in \mathcal{X}^2 \ : \ x = y\}$.

Interpretado geométricamente en el caso particular de $\mathbb{R}^2$, es la recta diagonal $y = x$. ♢

Lema 4.2.3 (Recíproco). *En las condiciones de la observación 4.2.1.*

Si $\{p_1 = p_2\}$ *es cerrado entonces* $\mathcal{X}$ *es* T_2*.*

Demostración. Sea un par de puntos arbitrarios $x, y \in \mathcal{X}$.

Como $x \neq y$ es claro que $(x, y) \notin \{p_1 = p_2\}$ (abierto), luego habrá un abierto (que podemos tomar de la base sin pérdida de generalidad) tal que $(x, y) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \subset \{p_1 \neq p_2\}$.

Además, $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ son disjuntos, ya que si hubiera un $z \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ entonces $(z, z) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, pero $(z, z) \in \{p_1 = p_2\}$, lo cual entra en contradicción con que $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \subset \{p_1 \neq p_2\}$. ■

Corolario 4.2.4 (Densos). *Si* $f, g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *son funciones continuas que coinciden en un conjunto denso en* $\mathcal{X}$ *e* $\mathcal{Y}$ *es* T_2 *entonces* f *y* g *son iguales.*

Demostración. Sea $A \subset \mathcal{X}$ un conjunto denso, es decir, $\overline{A} = \mathcal{X}$. Por hipótesis, $A \subset \{f = g\}$.

Como $\{f = g\}$ es cerrado, por ende, $\mathcal{X} = \overline{A} \subset \{f = g\}$, luego $\{f = g\} = \mathcal{X}$. ■

Observación 4.2.2 (Teoremas de extensión de la continuidad). Sea f una función continua. Tomemos como espacio topológico la adherencia del dominio de f.

Si f admite una extensión continua a la adherencia, por el corolario 4.2.4 esta es única, ya que si hubiera dos extensiones distintas estas coincidirían en un conjunto denso. ♢

4.3. Comportamiento topológico

A partir de ahora dedicaremos la última sección de cada capítulo a estudiar si la propiedad estudiada en el mismo es “hereditaria” a las diferentes construcciones que hemos visto. Es decir, subespacios, productos, cocientes y sumas. Como hay que dar un nombre a todo, nosotros a esto lo llamaremos estudiar el “comportamiento topológico”.

Inauguramos esta tradición estudiando el comportamiento topológico de T_2, T_1 y T_0.

4.3.1. Comportamiento topológico de T_2, T_1 y T_0

Comenzamos estudiando el comportamiento respecto de los subespacios.

Lema 4.3.1 (Subespacios). *Si* $\mathcal{X}$ *es* T_2*, entonces* $A \subset \mathcal{X}$ *es* T_2*.*

Demostración. Sean $x, y \in A$. Al pertenecer estos puntos también a $\mathcal{X}$, existen sendos entornos disjuntos $\mathcal{V}_x$ y $\mathcal{V}_y$ de x e y en $\mathcal{X}$ respectivamente. Tomando los correspondientes entornos relativos $\mathcal{V}^x \cap A$ y $\mathcal{V}^y \cap A$ se sigue el resultado. ■

Pasamos a estudiar los cocientes, tenido en mente que la filosofía de "pegar puntos" es bastante dañina para que las propiedades se conserven (luego iremos buscando contraejemplos).

Observación 4.3.1 (Cocientes). La propiedad de ser T_2 no se traspasa a los cocientes.

Un contraejemplo sencillo se da con el espacio topológico $\mathbb{R}$ y su cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, donde se ha "cocientado" por la relación de equivalencia que relaciona a cada punto consigo mismo y a todos los racionales entre sí (y se le ha equipado con la topología cociente, claro).

La idea que uno debe tener en la cabeza es que colapsamos todos los racionales a un solo punto.

La clave para darse cuenta de que $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ no es T_2 es que los abiertos de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ son las proyecciones de los abiertos saturados de $\mathbb{R}$. Como en $\mathbb{R}$ todo abierto contiene algún racional (por ser los intervalos una base de $\mathbb{R}$), todos los abiertos saturados contienen a $\mathbb{Q}$.

Por ende, $[\mathbb{Q}] \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es un punto denso ya que todo abierto del cociente lo contiene. Luego dados dos abiertos cualesquiera nunca son disjuntos (y por tanto no puede ser T_2). $\diamondsuit$

Lema 4.3.2 (Productos). *Si X_i es T_2 para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, entonces $\prod_{i=1}^r X_i$ también es T_2.*

Demostración. Dados $x_i, y_i \in X_i$ es claro que hay sendos entornos U_i y V_i de x_i e y_i respectivamente tales que $U_i \cap V_i = \emptyset$.

Haciendo lo anterior para cada i obtenemos dos puntos $x = (x_1, \ldots, x_r)$, $y = (y_1, \ldots, y_r)$ de los cuales (por construcción de la topología producto) tenemos dos entornos $\prod_{i=1}^r U_i$ y $\prod_{i=1}^r V_i$ que son disjuntos por el lema 3.3.1. ■

Lo mismo se hace para la suma.

Lema 4.3.3 (Suma). *La suma finita de espacios T_2 es T_2*

Demostración. Usaremos que las inclusiones son inmersiones. Sean dos puntos $x, y \in \sum_{i=1}^r X_i$.

Si están en el mismo estante, es decir $x, y \in \{i\} \times X_i$ para cierto i, entonces tomamos $(j_i)^{-1}(x)$ y $(j_i)^{-1}(y)$ (puntos distintos de X_i). Como X_i es T_2 tomamos los abiertos correspondientes U y V disjuntos. Como j_i es homeomorfismo los abiertos imagen también son disjuntos.

Si están en estantes distintos basta coger como abiertos disjuntos $\{i\} \times X_i$ y $\{j\} \times \{X_j\}$ ■

De manera totalmente análoga puede demostrarse que la propiedad de ser un espacio T_0 y T_1 se preserva para subespacios, productos finitos y sumas finitas; y no lo hace para el cociente.

4.3.2. Tabla de comportamiento topológico

A continuación, y como haremos de aquí en adelante cada vez que hablemos de comportamiento topológico, se muestra una tabla que resume todo lo demostrado. No se especificará, pero es claro que los productos y las sumas son finitos.

	Subespacios	**Cociente**	**Producto**	**Suma**
T_0	Sí	No	Sí	Sí
T_1	Sí	No	Sí	Sí
T_2	Sí	No	Sí	Sí

Tabla 4.1: Tabla resumen de separación.

La tabla anterior se leería de la siguiente forma: Si un espacio X es T_0, cualquier subespacio suyo es T_0. El producto de espacios T_0 es T_0,...

Capítulo 5

Numerabilidad

En matemáticas, un ***axioma de numerabilidad*** es una propiedad de un cierto objeto (en nuestro caso, un espacio topológico) que afirma la existencia de un conjunto numerable con ciertas propiedades. Estas restricciones sobre el espacio pueden ser más o menos fuertes y a menudo garantizan en el espacio ciertas propiedades que hacen que se parezca a los espacios que conocemos y amamos, como $\mathbb{R}$. En resumen, que se verifiquen ciertos axiomas de numerabilidad hacen mucho más cómodo el trabajar con ciertos espacios.

5.1. Sucesiones

Las sucesiones eran, en $\mathbb{R}^n$, una herramienta fundamental para el trabajo. En un espacio topológico en general son mucho menos potentes de lo que estamos acostumbrados por falta de estructura, pero aun así son dignas de mención. Una teoría más general de la convergencia para suplir esta carencia es la teoría de la convergencia de redes, pero no vamos a detallarla aquí.

Definición 5.1.1 (Sucesión)**.** Una ***sucesión*** en un espacio $\mathcal{X}$ es una aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$. Habitualmente denotaremos una sucesión por $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, es decir, el conjunto ordenado de las imágenes de la función f, donde x_n es el "n-ésimo término" de la sucesión, o sea, $f(n)$.

El concepto más importante de las sucesiones es la convergencia. Nótese que esta definición es equivalente a la que se ve en $\mathbb{R}^n$ con bolas.

Definición 5.1.2 (Convergencia)**.** Decimos que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\mathcal{X}$ ***converge*** a $x_0 \in \mathcal{X}$ si para cada entorno V_{x_0} de x_0 existe $k_0 \geq 1$ tal que $x_k \in V_{x_0}$ para todo $k \geq k_0$. A menudo lo expresamos como:

$$x_0 = \lim x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Observación 5.1.1 (Bases)**.** Para que una sucesión sea convergente, es suficiente que la definición 5.1.2 se verifique para una base de entornos. No es necesario comprobar que se cumple para un entorno cualquiera. ♢

Observación 5.1.2 (Consecuencias de la definición de convergencia)**.**

1. Si $x_0 = \lim x_k$, con $x_k \in A$, entonces $x_0 \in \overline{A}$. En efecto, en todo entorno de x_0 hay por definición de convergencia algún punto de A, y entonces es punto adherente por definición.

2. El límite de una sucesión no es necesariamente único, es decir, una sucesión puede converger a varios puntos. En efecto, consideramos un conjunto $\mathcal{X}$ con la topología del punto $\mathcal{T}_a$, para un punto $a \in \mathcal{X}$. Aquí, la sucesión constantemente a converge simultáneamente a todos los puntos del espacio.

   Esto es claro puesto que cualquier entorno de cualquier punto contiene a a. ♢

Para afianzar en el lector la idea de que la intuición que pudiera tener ya nos es válida aquí vamos a introducir un ejemplo.

Definición 5.1.3 (Complementarios)**.** Sea $\mathcal{X}$ un conjunto arbitrario, definimos la ***topología de los complementarios numerables*** como

$$\mathcal{T}_{\text{CN}} := \{\mathcal{U} \subset \mathcal{X} \;:\; \mathcal{X} \setminus \mathcal{U} \text{ es numerable}\}$$

De manera análoga se define la ***topología de los complementarios finitos*** $\mathcal{T}_{\text{CF}}$.

Es un sencillo ejercicio comprobar que ambas son efectivamente topologías.

Lema 5.1.1 (Convergencia en $\mathcal{T}_{\text{CN}}$)**.** *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico con la topología de los complementarios numerables. Entonces, una sucesión en $\mathcal{X}$ converge si y solo si todos sus términos son iguales a partir de cierto $k_0 \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Procedemos por doble implicación.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Evidentemente, si la sucesión es constantemente x_0 a partir de cierto término k_0, la sucesión converge a x_0 ya que todo entorno de x_0 contiene a x_0 y la sucesión es siempre x_0 a partir de término k_0, luego se cumple algo más fuerte de lo que nos pide la convergencia.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si una sucesión converge a un punto x_0, el conjunto A de los términos de la sucesión que no coinciden con x_0 es numerable (ya que el conjunto de términos de la sucesión es numerable en sí mismo). Luego su complementario, que contiene a x_0 es abierto, y, por tanto, entorno de x_0. Como x_0 es el límite habrá un cierto k_0 a partir del cual los términos de la sucesión queden confinados en $\mathcal{X} \setminus A$, no obstante, el único valor que puede tomar la sucesión en este conjunto es x_0. ■

Para ver la potencia del resultado anterior hagamos una pequeña observación.

Observación 5.1.3 (Sucesión armónica)**.** Es harto conocido que la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente a 0 en $\mathbb{R}$ con la topología usual, no obstante no lo será, por el lema anterior en $\mathbb{R}$ con la topología de los complementarios numerables. Esto es evidente ya que la sucesión jamás toma el valor 0. ♢

5.2. Primer axioma de numerabilidad

Definición 5.2.1 (Primer axioma)**.** Decimos que un espacio $\mathcal{X}$ es ***primer axioma de numerabilidad*** o simplemente ***I axioma*** si todo punto de $\mathcal{X}$ tiene una base de entornos numerable.

Observación 5.2.1 (Bases encajadas)**.** Esta base numerable, si existe, siempre se podrá tomar encajada, como ya mencionamos en la observación 1.5.1. ♢

Veamos que cuando le vamos exigiendo algunas cosas más al espacio vamos desbloqueando argumentos que usábamos con naturalidad en el contexto de los espacios métricos, haciendo de las sucesiones una herramienta cada vez más y más potente.

Observación 5.2.2 (Construcción de sucesiones convergentes)**.** En un espacio $\mathcal{X}$ I axioma podemos construir sucesiones convergentes a cualquier punto x_0 del mismo. El procedimiento que veremos a continuación (con ligeras modificaciones quizá) puede resultarnos muy útil a la hora de elaborar argumentos como veremos en el lema 5.2.1. Veamos cómo se hace.

Tomamos el punto x_0 al que queremos que nuestra sucesión converja. Asimismo tomamos una base numerable encajada $\{V_k \;:\; k \in \mathbb{N}\}$ del mismo. Y para cada $k \in \mathbb{N}$ tomamos un punto en $x_k \in V_k$.

Veamos que la sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge a x_0. En efecto, dado un entorno de x_0, siempre podemos encontrar uno de la base V_{k_0} contenido. Luego todos los términos de la sucesión a partir de k_0 se encuentran en el entorno inicial (por ser la base encajada). ♢

Lema 5.2.1 (Caracterización de la adherencia)**.** *Si $\mathcal{X}$ es I axioma y A un subconjunto de X. Entonces x es adherente a A si y solo si hay una sucesión contenida en A que converge a x.*

Demostración. Vamos a ver solo la implicación hacia la derecha, la otra ya la vimos en la observación 5.1.2.

Basta con construir una sucesión convergente a x por el procedimiento de la observación 5.2.2 pero a la hora de seleccionar los puntos de la sucesión exigimos que además de estar en el V_k correspondiente de la base encajada también estén en A, cosa siempre posible por ser x un punto adherente a A. ■

Para ver las cosas con un poco de perspectiva vamos a demostrar desde un punto de vista puramente "secuencial" que en la topología del punto, el punto en cuestión es denso.

Ejemplo 5.2.1 (Adherencias curiosas)**.** Sea $\mathcal{X}$ un conjunto equipado con la topología $\mathcal{T}_a$ del punto $a \in \mathcal{X}$.

Como la sucesión constantemente a (y por tanto contenida en $\{a\}$) converge simultáneamente a todo el espacio, como vimos en la observación 5.2.1, resulta que, por la observación 5.2.1, el punto a es denso en $\mathcal{X}$. ♢

El hecho de que el límite no sea único puede resultar perturbador para las mentes acostumbradas a los espacios métricos. Por esa razón a veces es buenos exigirle ciertas condiciones adicionales de separación a nuestro espacio.

Proposición 5.2.2 (Unicidad del límite)**.** *Si X es T_2, entonces el límite es único.*

Demostración. Si no lo fuera, podríamos tomar dos entornos disjuntos alrededor de los dos límites, y la sucesión tendría que estar en ambos al mismo tiempo a partir de un cierto punto. ■

Observación 5.2.3 (Espacios métricos)**.** Un espacio métrico es siempre I axioma (basta tomar las bolas de radio $\frac{1}{n}$) y T_2, de forma que en él las sucesiones se comportan como esperamos. ♢

Otra virtud intrínseca de los espacios primer axioma es que, en ellos, la continuidad y la convergencia de sucesiones guardan una relación muy estrecha.

Proposición 5.2.3 (Caracterización de la continuidad)**.** *Sea una aplicación $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, siendo $\mathcal{X}$ un espacio I axioma. En estas condiciones f es continua en x_0 si y solo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente a x_0 la sucesión de los términos imagen $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente a $f(x_0)$.*

Demostración. Hagamos ambas implicaciones.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sea V un entorno arbitrario de $f(x_0)$, como f es continua, transforma entornos en entornos por imágenes inversas, luego $f^{-1}(V)$ es entorno de x_0. Por ser x_0 el límite, es claro que a partir de cierto $k_0 \in \mathbb{N}$ todos los términos de la sucesión caen en $f^{-1}(V)$.

Por ende, todos los términos imagen $f(x_n)$ con $n \geq k_0$ caen en V, y esa es exactamente la definición de convergencia para $f(x_0)$ con la sucesión de términos imagen.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Recíprocamente razonamos por reducción al absurdo. Si f no fuera continua en x_0 habría un V entorno de $f(x_0)$ tal que la imagen de cualquier entorno W de x_0 no estuviera contenida en V. No obstante (y aquí es donde ponemos a funcionar el primer axioma), construyendo una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente a x_0 con el método de la observación 5.2.2, exigiendo además que la imagen del punto que se escoja como término no caiga en V (lo cual podemos hacer por hipótesis). Tenemos que, por hipótesis $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x_0)$, no obstante, ningún término de la sucesión está en V, lo cual contradice que $f(x_0)$ sea el límite. ■

5.3. Otros axiomas de numerabilidad

Exploremos otros axiomas de numerabilidad, que, a pesar de tener mucho interés, explotaremos menos asiduidad en este texto.

Definición 5.3.1 (Segundo axioma)**.** Decimos que un espacio $\mathcal{X}$ es ***segundo axioma de numerabilidad*** o simplemente ***II axioma*** si tiene una base de abiertos numerable.

Definición 5.3.2 (Separable)**.** Decimos que un espacio $\mathcal{X}$ es ***separable*** si en él existe un conjunto denso numerable.

Ejemplo 5.3.1 (Espacios separables). Refrescamos algunos ejemplos de espacios separables:

1. $\mathbb{R}$ con la topología usual es separable, pues $\mathbb{Q}$ es denso y numerable. De la misma forma, $\mathbb{R}^n$ también lo es, por $\mathbb{Q}^n$.

2. Un espacio $(\mathcal{X}, \mathcal{T}_a)$, donde $\mathcal{T}_a$ es la topología del punto, es automáticamente separable. En efecto, ya vimos en el ejemplo 5.2.1 que la adherencia del conjunto $\{a\}$ es el total, luego es denso; y desde luego es numerable. $\diamondsuit$

Definición 5.3.3 (Lindelöf). Decimos que un espacio $\mathcal{X}$ es ***Lindelöf*** si para todo recubrimiento por abiertos de $\mathcal{X}$ podemos extraer un subrecubrimiento numerable.

Definición 5.3.4 (Fuertemente Lindelöf). Un espacio topológico $\mathcal{X}$ se dice ***fuertemente Lindelöf*** si es Lindelöf y además todos sus subespacios (equipados con la topología relativa) también lo son.

Observación 5.3.1. Nótese que la noción de compacidad (que veremos en el capítulo 6) es más fuerte que la de Lindelöf. De hecho, aunque no la hemos mencionado aquí, esta propiedad está a caballo entre los axiomas de numerabilidad y los de compacidad (que también veremos en el capítulo 6). $\diamondsuit$

5.3.1. Relaciones entre los axiomas de numerabilidad

Las relaciones entre los axiomas de numerabilidad se resumen en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{II axioma} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow, shift left] \arrow[dr, Rightarrow, shift left] & \\
\text{I axioma} & \text{Lindelöf} \arrow[u, Rightarrow, shift left, "\star"] & \text{Separable} \arrow[ul, Rightarrow, shift left, "\star"']
\end{tikzcd}$$

Donde $\star$ significa que dicha implicación únicamente se cumple para espacios métricos.

En este apartado (cuya lectura puede omitirse una primera vez) veremos las demostraciones de algunas de las implicaciones y algunos contraejemplos para las que no se dan. Se anima al lector a que intente probar algunas por su cuenta.

No obstante, para que este no malgaste su tiempo en vano, marcamos con ($\not{}$) las demostraciones que consideramos de mayor dificultad.

Observación 5.3.2 (Concimiento previo). Por las observaciones 1.6.2 y 1.6.3 sabemos que ser II axioma es más fuerte que ser I axioma y que ser separable. $\diamondsuit$

Teorema 5.3.1 ($\not{}$ II axioma $\implies$ Lindelöf). *Todo espacio topológico II axioma es Lindelöf.*

Demostración. En efecto, sea $\mathcal{X}$ un espacio II axioma y sea Γ un recubrimiento abierto de $\mathcal{X}$. Veamos que podemos extraer uno numerable.

En efecto, por ser $\mathcal{X}$ segundo axioma, tiene una base numerable $\mathcal{B} := \{B_n \in \mathcal{T} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

Para cada n tomamos un abierto $\mathcal{U}_n$ de Γ que verifique que $B_n \subset \mathcal{U}_n$ (si existe). De este modo son hemos quedado con un subrecubrimiento numerable (a lo sumo) de Γ. Para terminar tendremos que ver que, en efecto, cubre.

Si hubiera algún $x \in \mathcal{X}$ que no viviera en ningún $\mathcal{U}_n$, x viviría en algún $\mathcal{U}_i$ que no estuviera en el subrecubrimiento, sin embargo, $\mathcal{U}_i = \bigcup_{n \in A \subset \mathbb{N}} B_n$, y, por tanto, $\mathcal{U}_i$ contiene a algún conjunto de la base (en particular a alguno, digamos B_{n_0} que contenga a x) luego tenemos garantizada la existencia de un $\mathcal{U}_{n_0}$ tal que $x \in \mathcal{B}_{n_0} \subset \mathcal{U}_{n_0}$ que está en el subrecubrimiento. Lo que entra en contradicción con que x no esté cubierto. $\blacksquare$

Observación 5.3.3 (Demostración inmediata). La demostración de 5.3.1 es trivial si damos por conocido el resultado expuesto en la proposición 6.2.2. $\diamondsuit$

Lema 5.3.2 (Fuertemente Lindelöf y II axioma). *Si $\mathcal{X}$ es II axioma entonces es fuertemente Lindelöf.*

Demostración. En efecto, si $\mathcal{X}$ es II axioma, $\mathcal{X}$ es Lindelöf, además, por la observación 1.7.2 todos sus subespacios son II axioma (luego Lindelöf). ■

Observación 5.3.4 (I axioma $\not\Longrightarrow$ II axioma)**.** Un contraejemplo para esto es la topología discreta en un conjunto $\mathcal{X}$ no numerable. Esto se debe a que cada punto es abierto.

En efecto, cada punto debe poder expresarse como unión de abiertos de la base, luego la base debe contener a los propios puntos como abiertos (al menos), de esta forma debe ser forzosamente no numerable (como poco). ♢

Ejemplo 5.3.2 ($(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[,)})$ no es II axioma)**.** Sea $\mathcal{B}$ una base. Para cada $x \in \mathbb{R}$ es claro que $[x, \infty)$ es abierto, luego es unión de abiertos de la base. En particular, habrá un abierto de la base, al que llamaremos B_x tal que $x \in B_x$. Además B_x tiene a x por mínimo.

Por ende, hemos establecido aplicación inyectiva entre $\mathbb{R}$ y los conjuntos de la base, luego la base debe ser al menos no numerable. ♢

Observación 5.3.5 (Separable $\not\Longrightarrow$ II axioma)**.** Se sigue de los ejemplos 5.3.2 y 1.6.3 ♢

Observación 5.3.6 ($(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es fuertemente Lindelöf)**.** Evidentemente, $\mathbb{R}$ es II axioma, tal y como se vio en el ejemplo 1.6.1, luego $\mathbb{R}$ es lindelöf y fuertemente Lindelöf (por ser II axioma). ♢

Teorema 5.3.3 ($\not{f}$ Lindelöf $\not\Longrightarrow$ II axioma)**.** *La recta de Sorgenfrey es Lindelöf.*

Demostración. Sea Γ un recubrimiento de abiertos Sorgenfrey de $\mathbb{R}$.

$$\Gamma := \{\mathcal{U}_i \in \mathcal{T}_{[,)} \ : \ i \in I\} = \left\{ \bigcup_{j \in J} [x_j^i, y_j^i) \ : \ i \in I, \ j \in J \right\}$$

Consideramos el conjunto $\Gamma_u := \left\{ \bigcup_{j \in J} (x_j^i, y_j^i) \ : \ i \in I, \ j \in J \right\}$ (el resultante de quitar los extremos izquierdos).

Notemos que Γ_u puede que no sea recubrimiento de $\mathbb{R}$ (podría fallar algún extremo x_j^i). Llamemos $\mathcal{U}$ a la unión de todos los conjuntos de Γ_u. Como Γ_u es un recubrimiento de abiertos usuales y $\mathcal{U}$ es Lindelöf por el ejemplo 5.3.6, podemos extraer un subrecubrimiento numerable Γ_u^n.

Como $\mathbb{R} \backslash \mathcal{U}$ es un conjunto compuesto de extremos izquierdos de los "intervalitos" que conforman los conjuntos de Γ, si fuera numerable, bastaría con considerar el subrecubrimiento

$$\left\{ \bigcup_{j \in J} [x_j^n, y_j^n) \ : \ n \in \mathbb{N}, \ j \in J \right\} \cup \left\{ \bigcup_{j \in J} [x_j^m, y_j^m) \ : \ \forall m \in \mathbb{N} \ \exists \ j_0 \in J \text{ tal que } x_{j_0}^m \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{U} \right\}$$

Donde el miembro de la izquierda es Γ_u^n añadiéndole el extremo izquierdo a cada intervalo y el miembro de la derecha el conjunto de los abiertos Sorgenfrey originales para los que falla alguno de los extremos izquierdos de los intervalos que lo componen.

Es claro que todo esto en su conjunto es numerable y que es un subrecubrimiento de Γ.

Comprobemos que $\mathbb{R} \setminus \mathcal{U}$ es numerable definiendo una aplicación inyectiva desde $\mathbb{R} \setminus \mathcal{U}$ hasta $\mathbb{Q}$.

Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{U}$, luego x es el extremo izquierdo de algún intervalo (x_j^i, y_j^i), por densidad de $\mathbb{Q}$, en dicho intervalo hay algún racional q_x, que tomaremos como imagen de x.

Nuestra aplicación es inyectiva, ya que si cogemos dos puntos $x, x' \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{U}$ tomando $x < x'$ tendríamos que si $q_{x'} = q_x$ entonces $x' \in (x, y_j^i)$, lo cual es absurdo, ya que entonces x' quedaría cubierto por Γ_u y por tanto viviría en $\mathcal{U}$. ■

Veamos que además ninguna de las otras posibles implicaciones se da, para ello introduzcamos el siguiente lema.

Lema 5.3.4 (I axioma)**.** *Si $\mathcal{X}$ es no numerable, $(\mathcal{X}, \mathcal{T}_{\text{CF}})$ no es I axioma.*

Demostración. Comprobemos que para cada punto $a \in \mathcal{X}$ toda base de entornos (sin pérdida de generalidad abiertos) es no numerable. Si fuera numerable, digamos

$$\{V_k \in \mathcal{T}_{\text{CF}} \ : \ k \geq 1\}$$

La intersección de todos ellos es no vacía (de hecho es no numerable). En efecto, basta tomar complementarios

$$\mathcal{X}\backslash\left(\bigcap_{k\geq 1} V_k\right) = \left(\bigcup_{k\geq 1} \mathcal{X}\backslash V_k\right)$$

Nótese que el miembro de la derecha es numerable por ser unión numerable de conjuntos finitos. Al ser $\mathcal{X}$ no numerable y

$$\mathcal{X} = \left(\bigcap_{k\geq 1} V_k\right) \cup \left(\bigcup_{k\geq 1} \mathcal{X}\backslash V_k\right),$$

la intersección de todos los abiertos de la base es no numerable.

Tomemos ahora un punto cualquiera b de esta intersección con la condición de que sea distinto de a y consideremos el entorno abierto de a dado por $W := \mathcal{X}\backslash\{b\}$.

De forma evidente la condición $V_k \subset W$ no se verifica para ningún k ya que $b \in V_k$ para todo k. Lo que contradice que el conjunto inicial fuera base. ■

Observación 5.3.7 (Lindelöf $\not\Longrightarrow$ I axioma)**.** En efecto, $(\mathcal{X}, \mathcal{T}_{\mathrm{CF}})$ con $\mathcal{X}$ no numerable es Lindelöf ya que dado un recubrimiento arbitrario por abiertos Γ, si me quedo con uno de ellos, me queda una cantidad finita de puntos por cubrir.

Como Γ es recubrimiento hará falta una cantidad finita de abiertos de Γ para cubrir el resto, luego puedo extraer así el recubrimiento numerable (de hecho finito). ♢

Observación 5.3.8 (Separable $\not\Longrightarrow$ I axioma)**.** Si $\mathcal{X}$ es no numerable $(\mathcal{X}, \mathcal{T}_{\mathrm{CF}})$ es separable. Es más, todo conjunto abierto es denso. En efecto, si hubiera un conjunto $A \subset \mathcal{X}$ abierto no denso, entonces habría un abierto $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ tal que $\mathcal{U} \cap A = \emptyset$. Tomando complementarios, se tiene

$$(\mathcal{X} \setminus \mathcal{U}) \cup (\mathcal{X} \setminus A) = \mathcal{X}$$

Como el miembro de la izquierda es finito y el de la derecha infinito hemos terminado. ♢

Se pueden encontrar contraejemplos para el resto de implicaciones con la topología discreta sobre diferentes conjuntos.

Pasemos a dar la idea de las demostraciones (dejando como ejercicio los detalles) de las implicaciones que únicamente se dan para espacios métricos.

Lema 5.3.5 (Separabilidad)**.** *Sea (M, d) espacio métrico. Si es separable, entonces es II axioma.*

Demostración. Sea A el conjunto numerable denso. Para cada punto de A tomamos el conjunto de todas las bolas de radio racional. Por ende, el conjunto $\mathcal{B}$ formado por todas las bolas de centro un punto de A y radio racional es un conjunto numerable, siendo sencillo demostrar que es, además, una base (gracias a la propiedad triangular). ■

Lema 5.3.6 (Lindelöf)**.** *Sea (M, d) espacio métrico. Si es Lindelöf, entonces es II axioma.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos el recubrimiento abierto

$$\Gamma := \left\{\mathrm{B}\left(x, \frac{1}{n}\right) \;:\; x \in M\right\}$$

como M es Lindelöf, podemos extraer un subrecubrimiento numerable Γ_n. Si consideramos el conjunto numerable de abiertos

$$\mathcal{B} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$$

es sencillo demostrar que $\mathcal{B}$ es base. ■

5.4. Comportamiento topológico

Estudiemos ahora el comportamiento topológico de los axiomas de numerabilidad.

5.4.1. Subespacios

Llegados a este punto, podemos recoger los frutos de nuestra cosecha, con sudor y sangre plantada, a costa de pasar hambre durante el largo y frío invierno que fue el capítulo 1.

Observación 5.4.1 (Conocimiento previo). Las observación 1.7.2 nos dice que tanto I axioma como II axioma se heredan a subespacios. ♢

Lamentablemente, para la separabilidad el comportamiento no es tan bueno.

Ejemplo 5.4.1 (Topología del punto). Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{T}_a)$ con $\mathcal{X}$ no numerable. Sabemos de sobra que el punto a es denso en $\mathcal{X}$. No obstante, si tomamos el subespacio $\mathcal{X}\setminus\{a\}$, la topología relativa asociada a dicho subespacio resulta ser la discreta. Como $\mathcal{X} \setminus \{a\}$ es no numerable, evidentemente es no separable, ya que todo conjunto numerable es cerrado y por tanto coincide con su adherencia. ♢

A pesar de no tener la separabilidad un buen comportamiento en general, si que hay un oasis en medio del desierto, los abiertos.

Lema 5.4.1 (Separabilidad y abiertos). *Si $\mathcal{X}$ es un espacio separable, todo subespacio abierto suyo también lo es.*

Demostración. Sea Y un subespacio abierto de $\mathcal{X}$. Por el lema 1.7.5 sabemos que todo abierto relativo de Y es abierto de $\mathcal{X}$. Como $\mathcal{X}$ es separable, habrá un conjunto A numerable tal que todo abierto de $\mathcal{X}$ (y en particular los de Y) contiene algún punto de A. Por ende, Y es separable. ■

Veamos pues como se comporta Lindelöf, que adelantamos que en general también mal.

Ejemplo 5.4.2 (Topología pseudodiscreta). Sea $\mathcal{X}$ un conjunto no numerable y sea $\{x\}$ tal que $x \notin \mathcal{X}$. Consideramos pues el conjunto $Y := \mathcal{X} \cup \{x\}$ al que equipamos con la siguiente topología.

$$\mathcal{T} := \{\emptyset, Y\} \cup \mathcal{P}(\mathcal{X})$$

Es claro que Y es Lindelöf ya que todo recubrimiento por abiertos debe contener a Y, luego de todo recubrimiento podemos extraer un recubrimiento finito (el propio Y) luego numerable. No, obstante, $\mathcal{X}$ como subespacio de Y tiene la topología discreta, y por tanto no es Lindelöf. ♢

Tal y como ocurría en el caso de la separabilidad, hay luz al final del túnel y la propiedad de Lindelöf si que es hereditaria para subespacios cerrados.

Lema 5.4.2 (Lindelöf y cerrados). *Si $\mathcal{X}$ es un espacio Lindelöf, todo subespacio cerrado suyo también lo es.*

Demostración. Sea Y un subespacio cerrado Sea Γ un recubrimiento abierto de Y. De esta forma podemos descomponer $\mathcal{X}$ de la siguiente forma

$$\mathcal{X} = (\mathcal{X} \setminus Y) \cup \bigcup \Gamma$$

Como $\mathcal{X} \setminus Y$ es abierto, $\Gamma \cup (\mathcal{X} \setminus Y)$ es un recubrimiento abierto de $\mathcal{X}$. Como $\mathcal{X}$ es Lindelöf podemos extraer un recubrimiento numerable Γ_n, sin pérdida de generalidad podemos suponer que nos quedamos con el abierto $\mathcal{X} \setminus Y$. Dicho de una forma más clara

$$\mathcal{X} = \mathcal{X} \setminus Y \cup \bigcup \Gamma_n$$

Como $Y \cap (\mathcal{X} \setminus Y) = \emptyset$ es claro que Γ_n es un subrecubrimiento numerable de Y. ■

5.4.2. Cocientes

El estudio de los cocientes para los casos de I y II axioma se basa en encontrar contraejemplos que muestran que pegar puntos no es buena idea si deseamos preservar estas propiedades. En concreto, nos bastará con encontrar un espacio topológico II axioma y un cociente suyo que no sea ni siquiera primer axioma.

Para encontrarlo, podemos hacer un pacto con Belcebú, quien a cambio de una demostración un poco dolorosa nos dará una flor con infinitos pétalos que abrirá la caja de Pandora.

Ejemplo 5.4.3 (Flor infinita)**.** Consideremos el espacio topológico $\mathbb{R}$ con la topología usual, que es un espacio II axioma. Ahora tomemos su cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, es decir, el resultante de relacionar a todos los números enteros entre sí y a los demás solo consigo mismo.

Efectivamente, podemos imaginarnos esto como una flor con infinitos pétalos cuyo centro es el punto $\mathbb{Z}$ (que recordemos que es un punto en el cociente). Para demostrar que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ no es primer axioma deberemos encontrar un punto que no posea una base de entornos numerable. Dicho punto, como se ve venir, es $\mathbb{Z}$.

Para demostrar esto tomemos una familia numerable de entornos (sin pérdida de generalidad abiertos) de $\mathbb{Z}$ a cuyos elementos los llamaremos U_n. Vamos a construir un abierto V que no contenga a ningún abierto de la familia. Como sabemos, los abiertos del cociente son las proyecciones de los abiertos saturados del espacio original.

Para cada abierto U_n y cada número entero k definimos un intervalo $(k-\varepsilon_n^k, k+\varepsilon_n^k)$ de manera que se verifique

$$p\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k-\varepsilon_n^k, k+\varepsilon_n^k)\right)\subset U_n$$

La pieza maestra de la demostración consiste en definir un $\delta_k := \frac{1}{2}\varepsilon_k^k$, a partir del cual definimos nuestro abierto V.

$$V := p\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k-\delta_k, k+\delta_k)\right)$$

Veamos que V no contiene a ningún U_n. En efecto, como $\delta_n < \varepsilon_n^n$ podemos considerar un elemento x del intervalo $x \in (n-\delta_n, n+\varepsilon_n^n)$ que sea mayor que $n+\delta_n$. De esta forma $p(x) \in U_n$ pero no a V.

Esto demuestra que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ no es I axioma. $\diamondsuit$

Al contrario de lo que pasaba en el caso de los subespacios, aquí la separabilidad y Lindelöf se comportan extraordinariamente bien.

Antes de nada hay que refrescar que un espacio cociente no es más que un espacio que es resultado de transformar continuamente el espacio original, teniendo el espacio de llegada una topología un poco drástica. Aquí veremos que el cómo sea la topología del espacio de llegada nos da igual a la hora de que se preserven las propiedades de separabilidad y Lindelöf. Únicamente nos interesará que la transformación sea continua.

Proposición 5.4.3 (Imagen continua de Separable)**.** *Sea $\mathcal{X}$ un espacio separable y $f:\mathcal{X}\to f(\mathcal{X})$ una función continua, entonces $f(\mathcal{X})$ es un espacio separable.*

Demostración. Sea A el conjunto numerable denso en $\mathcal{X}$, como f es continua se verifica que

$$Y = f(X) = f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

Y como $f(A)$ es numerable hemos terminado. ∎

Proposición 5.4.4 (Imagen continua de Lindelöf)**.** *Sea $\mathcal{X}$ un espacio Lindelöf y $f:\mathcal{X}\to Y$ una función continua, entonces $f(\mathcal{X})$ es un espacio Lindelöf.*

Demostración. Sea $\Gamma := \{\mathcal{U}_i \in \mathcal{T}_Y \ : \ i \in Y\}$ un recubrimiento por abiertos de Y. Como f es continua $f^{-1}(\mathcal{U}_i)$ es abierto en $\mathcal{X}$. Por ende, se verifica que $\mathcal{X} = f^{-1}(\bigcup_{i\in I}\mathcal{U}_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(\mathcal{U}_i)$, luego $f^{-1}(\Gamma)$ es un recubrimiento por abiertos de $\mathcal{X}$. Como $\mathcal{X}$ es Lindelöf, podemos extraer un subrecubrimiento numerable. Es decir

$$\mathcal{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\mathcal{U}_n)$$

Tomando imágenes a ambos lados tenemos que $f(\mathcal{X}) \overset{!}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{U}_n$. Con lo que hemos extraído un subrecubrimiento numerable de $f(\mathcal{X})$. ∎

5.4.3. Productos

A la hora de estudiar los productos también podemos recurrir a trabajo anterior, en este caso al capítulo 3.

Observación 5.4.2 (Conocimiento previo)**.** Sabemos por las proposiciones 3.3.7 y 3.3.8 que el producto de espacios tanto I como II axioma es un espacio I o II axioma respectivamente. ♢

La separabilidad también es agradecida en este contexto.

Lema 5.4.5 (Productos y separabilidad)**.** *Sean $X_1, \dots, X_r$ espacios separables, entonces su producto es separable.*

Demostración. Tomamos A_i los conjuntos densos numerables de cada espacio X_i. Es claro que el conjunto $\prod_{i=1}^{r} A_i$ es numerable. Además, por la proposición 3.3.9 es denso. ■

Lindelöf sin embargo no se comporta bien para productos, para ver esto basta un contraejemplo con la topología de Sorgenfrey.

Ejemplo 5.4.4 (Sorgenfrey y productos)**.** Sabemos que $\mathbb{R}$ equipado con la topología de Sorgenfrey es Lindelöf, veamos que su producto no lo es. Para ello consideramos un recta oblicua de $\mathbb{R}^2$, que, por ser la topología de Sorgenfrey más fina que la usual, es cerrado. No obstante, la topología relativa asociada a una recta oblicua en el producto de topologías de Sorgenfrey es la discreta, ya que el punto es abierto (¡compruébese!). Por ende, la recta no es Lindelöf, pero Lindelöf se traspasaba a subespacios cerrados, luego $\mathbb{R}^2$ con el producto de topologías Lindelöf no es Lindelöf. ♢

5.4.4. Sumas

Las sumas, como hasta ahora, conservan todas las propiedades. Veámoslo una a una y sin rodeos.

Lema 5.4.6 (I axioma y sumas)**.** *La suma de espacios I axioma es I axioma.*

Demostración. En efecto, dado un punto del espacio suma, este estará en alguno de los estantes. Es decir, será un punto de la forma $(i, x_i) \subset \{i\} \times X_i$. Como $\{i\} \times X_i$ es homeomorfo a X_i vía la inclusión j_i y X_i es primer axioma, podemos tomar una base de entornos (sin pérdida de generalidad abiertos) numerable de $j_i^{-1}(i, x_i) \in X_i$, digamos V_k. Como las inclusiones abiertas, $j_i(V_k)$ es una base numerable de entornos abiertos de (i, x_i). ■

Lema 5.4.7 (II axioma y sumas)**.** *La suma de espacios II axioma es II axioma.*

Demostración. Sean $\mathcal{B}_i$ bases numerables de los sumandos, demostremos que

$$\widehat{\mathcal{B}} := \left\{ \{i\} \times U_n^i \ : \ n \in \mathbb{N},\ U_n^i \in \mathcal{B}_i \right\}$$

es base (obviamente numerable) del espacio suma $\sum_{i=1}^{r} X_i$. En efecto, vemos que todo abierto de la base "estándar" es expresable como unión de abiertos de $\widehat{\mathcal{B}}$.

$$\mathcal{B} = \left\{ \{i\} \times \bigcup_{A \subset \mathbb{N}} U_n^i \ : \ U_n^i \in \mathcal{B}_i \right\} = \left\{ \bigcup_{A \subset \mathbb{N}} \{i\} \times U_n^i \ : \ U_n^i \in \mathcal{B}_i \right\}$$ ■

Lema 5.4.8 (Separabilidad y sumas)**.** *La suma de espacios separables es separable.*

Demostración. En efecto, tomemos los conjuntos A_i numerables y densos en los factores X_i. Veamos que el conjunto numerable

$$\bigcup_{i=1}^{r} \{i\} \times A_i$$

es denso en el espacio suma. En efecto, como las inclusiones j_i son inmersiones, si la adherencia de A_i es X_i, la adherencia de $\{i\} \times A_i$ es $\{i\} \times X_i$. Como la unión de las adherencias es la adherencia de las uniones el resultado se sigue. ■

Lema 5.4.9 (Lindelöf y sumas)**.** *La suma de espacios Lindelöf es Lindelöf*

Demostración. Dado un recubrimiento por abiertos $\Gamma := \{U_i \ : \ i \in I\}$ de la suma, fijamos un $j \in \{1, \dots, r\}$ y tomamos la imagen inversa por j_j del recubrimiento, lo cual nos dará un recubrimiento abierto de X_j.

Como X_j es Lindelöf, podemos extraer un subrecubrimiento numerable

$$\Gamma_j := \{(j_j)^{-1}(U_i) \ : \ i \in \sigma \subset I\}$$

Tomamos como parte de nuestro subrecubrimiento a los U_i del recubrimiento original que se corresponden con los abiertos del recubrimiento Γ_j. Iteramos este proceso con cada $j \in \{1, \dots, r\}$ añadiendo cada vez a nuestro subrecubrimiento los abiertos que correspondan.

Al final nos queda un subrecubrimiento numerable del original. Que es numerable es evidente por ser unión finita de conjuntos numerables y que es recubrimiento es consecuencia de que las inclusiones son inmersiones. Además, es un subrecubrimiento por la propia construcción. ■

5.4.5. Tabla de comportamiento topológico

A modo de recapitulación presentamos la siguiente tabla. En la tabla anterior, el símbolo *

	Subespacios	**Cociente**	**Producto**	**Suma**
I axioma	Sí	No	Sí	Sí
II axioma	Sí	No	Sí	Sí
Separable	Sí, en el caso de abiertos	Sí*	Sí	Sí
Lindelöf	Sí, en el caso de cerrados	Sí*	No	Sí

Tabla 5.1: Tabla resumen de numerabilidad.

indica que, en esos casos, la propiedad de ser separable o Lindelöf se preserva porque la imagen continua de un espacio separable (Lindelöf) es separable (Lindelöf). En tablas posteriores se usará el mismo símbolo para indicar esto mismo.

Capítulo 6

Compacidad

La compacidad en espacios topológicos es una noción bastante elaborada, y su generalización llevó a los matemáticos bastante tiempo. Desde principios del siglo XX la idea que buscaban era generalizar para espacios topológicos arbitrarios las propiedades de los intervalos cerrados y acotados $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ que permitía demostrar teoremas como el del valor medio o la continuidad uniforme. Surgieron así distintos tipos de compacidad, tales como la compacidad por punto límite, la compacidad numerable,... pero no siendo estas las más adecuadas, se acabo por formalizar en términos de abiertos (en concreto, como recubrimientos de abiertos). Eso dio lugar a la definición actual.

6.1. Definición y propiedades

Definición 6.1.1 (Recubrimiento y recubrimiento de abiertos)**.** Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos del espacio $\mathcal{X}$ se dice que es un ***recubrimiento*** si la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ cubre $\mathcal{X}$, es decir,

$$\mathcal{X} = \bigcup_{A_i \in \mathcal{A}} A_i$$

Como su propio nombre indica, $\mathcal{A}$ será un ***recubrimiento abierto*** de $\mathcal{X}$ si es un recubrimiento de $\mathcal{X}$ formado por conjuntos abiertos.

Definición 6.1.2 (Compacto)**.** Diremos que un espacio $\mathcal{X}$ es ***compacto*** si de cada recubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$ podemos extraer un subrecubrimiento finito que también recubre $\mathcal{X}$.

Veamos algunos ejemplos ya conocidos.

Ejemplo 6.1.1 (Miscelánea de ejemplos)**.** Presentamos algunos ejemplos de conjuntos compactos y no compactos esbozando una demostración en cada uno.

1. Todo espacio topológico finito es trivialmente compacto.
2. El intervalo $[a, b]$ es compacto. Un posible argumento para demostrar este hecho se basa en el razonamiento por contradicción. Si dividimos el intervalo en dos. Alguna de las dos mitades no será "cubrible" con una cantidad finita de abiertos de un recubrimiento inicial. Tomando la mitad problemática y repitiendo el argumento obtenemos una familia de intervalos cerrados y encajados sobre la que aplicar el teorema de Cantor, llegando así a una contradicción (se dejan los detalles al lector).
3. El intervalo (a, b) no es compacto. Basta con tomar un recubrimiento del tipo $(a + \frac{1}{n}, b)$ y demostrar que no se puede extraer ningún subrecubrimiento finito.
4. La recta real $\mathbb{R}$ no es compacta. En efecto, si tomamos un recubrimiento por abiertos, por ejemplo $\mathcal{A} = \{(n, n+2) \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$ podemos demostrar fácilmente que todo subrecubrimiento finito no cubre a $\mathbb{R}$. Una forma de demostrarlo es tomar el mínimo de los extremos izquierdos y el máximo de los extremos derechos y ver que aún quedan muchos puntos por cubrir.

5. El subespacio $\mathcal{X} = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ es compacto. En efecto, dado un recubrimiento abierto $\mathcal{A}$, existe un abierto $\mathcal{U}$ de $\mathcal{A}$ que contiene al 0. De hecho, $\mathcal{U}$ contiene todos los puntos de la forma $\frac{1}{n}$ salvo un número finito de ellos (esto es consecuencia de la convergencia de la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$). Para cada uno de estos puntos cogemos un abierto del recubrimiento. Por lo tanto tenemos un subrecubrimiento finito. $\diamondsuit$

En la siguiente proposición veremos que la noción de ser compacto es independiente del espacio ambiente, es decir, si un conjunto K es compacto lo es independientemente de si puede ser visto como subespacio de otro más grande o no.

Proposición 6.1.1 (Independencia del ambiente)**.** *Sea $\mathcal{Y}$ un subespacio de $\mathcal{X}$. Entonces $\mathcal{Y}$ es compacto si y sólo si cada recubrimiento de $\mathcal{Y}$ por abiertos de $\mathcal{X}$ contiene una subcolección finita que cubre $\mathcal{Y}$.*

Demostración. Demostremos ambas implicaciones.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos que $\mathcal{Y}$ es compacto y que $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in J}$ es un recubrimiento de $\mathcal{Y}$ por abiertos de $\mathcal{X}$. Entonces la colección formada por

$$\{A_i \cap \mathcal{Y} \ : \ i \in J\}$$

es un recubrimiento de $\mathcal{Y}$ por conjuntos abiertos de $\mathcal{Y}$, y como $\mathcal{Y}$ es compacto, existe un subrecubrimiento finito de $\mathcal{Y}$ de la forma

$$\{\mathcal{A}_{i_1} \cap \mathcal{Y}, ..., \mathcal{A}_{i_n} \cap \mathcal{Y}\}$$

luego $\{\mathcal{A}_{i_1}, ..., \mathcal{A}_{i_n}\}$ es un subrecubrimiento finito de abiertos de $\mathcal{X}$ que cubre a $\mathcal{Y}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $\mathcal{A}' = \{A'_i\}_{i\in J}$ un cubrimiento de $\mathcal{Y}$ por abiertos de $\mathcal{Y}$. Para cada i podemos elegir un conjunto A_i abierto en $\mathcal{X}$ tal que

$$A'_i = A_i \cap \mathcal{Y}$$

La colección formada por estos A_i a la que llamaremos $\mathcal{A}$ es un recubrimiento de $\mathcal{Y}$ por abiertos de $\mathcal{X}$. Por hipótesis, existe algún subrecubrimiento finito $\{A_{i_1}, ..., A_{i_n}\}$ que cubre $\mathcal{Y}$. Entonces $\{A'_{i_1}, ..., A'_{i_n}\}$ es una subrecubrimiento finito de $\mathcal{Y}$, luego $\mathcal{Y}$ es compacto. ■

Veamos que podríamos haber definido la compacidad con cerrados en lugar de con abiertos, de hecho, a veces puede resultar bastante útil.

Observación 6.1.1 (Definición alternativa)**.** Podemos expresar la compacidad mediante cerrados "dualizando" la definición mediante complementación. Veámoslo.

Por definición $\mathcal{X}$ es compacto si dado un recubrimiento abierto de $\mathcal{X}$, es decir $\mathcal{X} = \bigcup_{i\in I} U_i$, entonces existe un subrecubrimiento finito, o sea $\mathcal{X} = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.

Definamos $F_i := \mathcal{X} \setminus U_i$ y tomando complementarios (aplicando las leyes de De Morgan) obtenemos que, equivalentemente $\mathcal{X}$ es compacto si y solo si dada una familia de cerrados con intersección vacía, es decir, $\emptyset = \bigcap_i F_i$, entonces podemos extraer una subfamilia finita que ya tenga intersección vacía, o sea, $\emptyset = F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_n}$.

Para rizar el rizo podemos tomar el contrarrecíproco, quedando que $\mathcal{X}$ es compacto si y solo si dada una familia de cerrados donde todas las intersecciones finitas son no vacías entonces la intersección de toda la familia también es no vacía. $\diamondsuit$

De ahora en adelante revisaremos algunas consecuencias ya conocidas de la compacidad. Sin embargo, adoptaremos el nuevo alfabeto topológico para ello, viendo como algunas propiedades ciertas en espacios métricos se pierden aquí como lágrimas en la lluvia. Es hora de morir...

Proposición 6.1.2 (Cerrado en compacto es compacto)**.** *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico compacto, e $\mathcal{Y}$ un subespacio suyo. Si $\mathcal{Y}$ es cerrado entonces es compacto.*

Demostración. Es una adaptación a la demostración del lema 5.4.2.

Tomamos un recubrimiento de $\mathcal{Y}$ tal que $\mathcal{Y} \subset \bigcup_{i\in J} U_i$. Como $\mathcal{Y}$ es cerrado $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$ es abierto. Esto implica que $\{U_i\}_{i\in J} \cup (\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y})$ es un recubrimiento por abiertos de $\mathcal{X}$.

Como $\mathcal{X}$ es compacto podemos extraer un subrecubrimiento finito al que, sin pérdida de generalidad le añadimos el abierto $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$. Es decir

$$\mathcal{X} = (\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}) \cup U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_n}$$

De donde automáticamente se concluye que $\mathcal{Y} \subset U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_n}$, luego $\mathcal{Y}$ es compacto. ■

A continuación demostraremos que la compacidad y la continuidad se comportan bien.

Proposición 6.1.3 (Compacidad y continuidad)**.** *Sea $\mathcal{X}$ compacto y $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ una aplicación continua. Entonces, $f(\mathcal{X})$ es compacto.*

Demostración. De nuevo, esta demostración es análoga a la de la proposición 5.4.4.

Nótese que $f : \mathcal{X} \to f(\mathcal{X})$ es sobreyectiva. Sea $\{U_i\}_{i\in J}$ un recubrimiento abierto de $f(\mathcal{X})$ tal que $f(\mathcal{X}) = \bigcup_{i\in J} U_i$. Tomando imágenes inversas tenemos que $\mathcal{X} = \bigcup_{i\in J} f^{-1}(U_i)$.

Como f es continua los $f^{-1}(U_i)$ son abiertos, luego tenemos un recubrimiento abierto de $\mathcal{X}$. Como $\mathcal{X}$ es compacto, podemos extraer un subrecubrimiento finito. $\mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_i)$.

Tomando imágenes directas, se tiene que $f(\mathcal{X}) = \bigcup_{i=1}^n U_i$, luego $f(\mathcal{X})$ es compacto. ■

Una de las cosas que tenemos grabadas a fuego en nuestras frágiles mentes es que los compactos son cerrados y acotados. No obstante, la acotación es una idea que lleva implícita la noción de distancia, cosa que estos mundos oscuros no existe, por tanto debemos desterrarla al olvido para siempre.

Sin embargo, la idea de cerrado es perfectamente legítima en los espacios topológicos lo cual nos induce a pensar que lo que era cierto es espacios métricos lo seguirá siendo en este contexto. Para nuestra desgracia, esto no es así salvo que pidamos condiciones adicionales de regularidad.

Proposición 6.1.4 (Compacidad y clausura)**.** *Si $\mathcal{Y}$ es un subespacio compacto de un espacio* T_2*, entonces $\mathcal{Y}$ es cerrado.*

Demostración. Denotando por $\mathcal{X}$ al espacio T_2 ambiente, demostraremos que $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$ es abierto viendo que es entorno de todos sus puntos.

Sea un punto $a \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$, veamos que hay un entorno abierto de a contenido en $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$.

En efecto, dado un punto $y \in \mathcal{Y}$, como $\mathcal{X}$ es T_2 podemos tomar entornos abiertos disjuntos U_y y V_y de los puntos a e y respectivamente.

Es claro que la colección $\{V_y \ : \ y \in \mathcal{Y}\}$ es un recubrimiento abierto de $\mathcal{Y}$, y por ser este compacto existirá un subrecubrimiento finito $\{V_y^1, \dots, V_y^n\}$.

Es evidente que $V := \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ contiene a $\mathcal{Y}$. Además, V y $U := \bigcap_{i=1}^n U_y^i$ son disjuntos.

Por lo tanto U es entorno de a contenido en $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$. ■

Observación 6.1.2 (Compacidad y separación)**.** Notemos que hemos demostrado más de lo que nos pedían. En la demostración anterior se prueba que un compacto $\mathcal{Y}$ y un punto $a \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$, en un espacio topológico $\mathcal{X}$ que es T_2, tienen entornos disjuntos.

Nótese además la importancia de que $\mathcal{X}$ sea T_2. Obsérvese que en $\mathcal{X} = \{a, b\}$ con la topología del punto $\mathcal{T}_a$ todo es compacto por ser finito y, sin embargo, $\{a\}$ no es cerrado. ♢

Continuemos nuestra noble andadura por estos senderos que sin duda alguna nos llevarán o bien a la tumba o bien a la más profunda de las demencias.

Proposición 6.1.5 (Weierstrass)**.** *Sea $\mathcal{X}$ compacto y $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ una aplicación continua entonces f alcanza el máximo y el mínimo.*

Demostración. Como $f(\mathcal{X})$ es compacto en $\mathbb{R}$ por ser f continua, tenemos que $f(\mathcal{X})$ es cerrado y acotado, luego $f(\mathcal{X})$ tendrá supremo e ínfimo que pertenecen al conjunto por formar parte de su adherencia. ■

Cavando en las tumbas de los teoremas muertos nos encontramos con el viejo y omnipresente teorema de Bolzano–Weierstrass, del que en este mundo aún queda un pequeño remanente.

Proposición 6.1.6 (Bolzano–Weierstrass)**.** *Sea $\mathcal{X}$ compacto e $\mathcal{Y}$ un subespacio infinito de $\mathcal{X}$. Entonces $\mathcal{Y}$ tiene algún punto de acumulación en $\mathcal{X}$.*

Demostración. Si $\mathcal{Y}$ no tuviese ningún punto de acumulación en $\mathcal{X}$, entonces todo punto de $\mathcal{X}$ tendría un entorno abierto U_x que intersecado con $\mathcal{Y}$ fuera a lo sumo él mismo.

Consideramos el recubrimiento abierto formado por los U_x. Como $\mathcal{X}$ es compacto, podemos extraer un subrecubrimiento finito tal que $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Por tanto

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y} \cap \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{Y} \cap U_{x_i} \subset \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$$

Lo cual es absurdo por ser $\mathcal{Y}$ infinito. ■

Observación 6.1.3 (Recíproco)**.** Al contrario de lo que ocurría en espacios métricos, en general, el recíproco de la proposición anterior no se cumple. Se anima al lector a encontrar un contraejemplo. ♢

Por último, y antes de introducir una serie de definiciones dedicadas a alimentar la curiosidad del lector, hagamos una pequeña observación de gran importancia en forma de lema.

Lema 6.1.7 (Aplicaciones cerradas)**.** *Si tenemos una función continua $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, donde $\mathcal{X}$ es compacto e $\mathcal{Y}$ es T_2, entonces la aplicación es cerrada.*

Demostración. En efecto, sea $F \subset \mathcal{X}$ un subespacio cerrado, que será compacto por ser $\mathcal{X}$ compacto. Por otro lado, $f(F)$ es compacto al tratarse de la imagen continua de un compacto y, finalmente, sabemos que ser compacto en un espacio Hausdorff implica ser cerrado. ■

Observación 6.1.4 (Identificaciones)**.** De aquí se deduce que si además f es sobreyectiva, entonces se trata de una identificación (véase la proposición 3.2.5) y que si es biyectiva, entonces estamos ante un homeomorfismo.

Esto es muy útil para saber cuando una aplicación entre $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ es una identificación, ya que por lo general trabajaremos con $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n$, por lo que $\mathcal{Y}$ será T_2.

En caso de ser f continua y $\mathcal{X}$ compacto (de ahí que a veces se pidan condiciones de compacidad al dominio fundamental) se tiene que $\mathcal{Y}$ es un "modelo geométrico" del cociente $\mathcal{X}/\!\sim$. ♢

Definición 6.1.3 (Variantes de la compacidad)**.** Existen varias nociones estrechamente relacionadas con la compacidad:

1. ***Secuencialmente compacto***: un espacio topológico $\mathcal{X}$ es secuencialmente compacto si toda sucesión en $\mathcal{X}$ tiene una subsucesión convergente en $\mathcal{X}$.

2. ***σ-compacto***: un espacio topológico $\mathcal{X}$ es σ-compacto si es la unión numerable de subespacios compactos.

3. ***Numerablemente compacto***: Un espacio $\mathcal{X}$ es numerablemente compacto si cada recubrimiento numerable tiene un subrecubrimiento finito.

4. ***Lindelöf***: véase en 5.3.3

Observación 6.1.5 (Relaciones entre las variantes)**.** La relación que hay entre ser compacto, secuencialmente compacto, σ-compacto, numerablemente compacto y Lindelöf es la siguiente (las comprobaciones son sencillas).

1. Compacto $\Longrightarrow$ σ-compacto

2. σ-compacto $\Longrightarrow$ Lindelöf

3. σ-compacto $\Longrightarrow$ Numerablemente compacto

En general, secuencialmente compacto no implica compacto ni compacto implica secuencialmente compacto. Sin embargo en un espacio métrico, las nociones de compacidad y secuencial–compacidad son equivalentes. En la literatura a este hecho se le conoce como teorema de Bolzano–Weierstrass (es una de sus implicaciones). ♢

Ahora, presentamos un resultado sobre espacios secuencialmente compactos que va a usarse con asiduidad en la sección de topología algebraica.

Lema 6.1.8 (Lebesgue)**.** *Sea $\mathcal{X}$ un espacio métrico compacto.*

Entonces, dado un recubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que cada subconjunto de $\mathcal{X}$ de diámetro menor que ε está contenido en algún abierto de $\mathcal{A}$.

En particular, cada bola $\mathrm{B}(x, \frac{\varepsilon}{2})$ está contenida en algún abierto de $\mathcal{A}$.

Demostración. Como acabamos de ver en la observación 6.1.5, $\mathcal{X}$ es secuencialmente compacto. Es esto lo que vamos a usar para la demostración.

Supongamos que existe un recubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$ que no cumple la condición del lema, esto es,que para todo $\varepsilon > 0$ hay algún subconjunto de diámetro menor que ϵ que no está contenido en ningún abierto de $\mathcal{A}$.

Entonces, vamos a construir una sucesión de "puntos malos". Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea A_n un subconjunto de diámetro menor que $\frac{1}{n}$ que no esté contenido en ningún abierto de $\mathcal{A}$, y cojemos un $x_n \in A_n$ como n–ésimo término de nuestra sucesión.

Por ser $\mathcal{X}$ secuencialmente compacto, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ convergente a un punto $x \in \mathcal{X}$.

Tomamos entonces un abierto $U \in \mathcal{A}$ que contenga a x, y un $r > 0$ de forma que $\mathrm{B}(x, r) \subset U$.

Consideramos la bola $\mathrm{B}(x, \frac{r}{2})$. Por ser $\{x_{n_k}\}$ convergente, podemos escoger un i tal que $x_{n_i} \in \mathrm{B}(x, \frac{r}{2})$, y además $\frac{1}{n_i} < \frac{r}{2}$.

Entonces, $x_{n_i} \in A_{n_i} \cap \mathrm{B}(x, \frac{r}{2})$. como el diámetro de A_{n_i} es menor que $\frac{r}{2}$, es claro que $A_{n_i} \subset \mathrm{B}(x_{n_i}, r) \subset U$, lo que contradice a la hipótesis. ■

6.2. Comportamiento topológico

En esta sección se estudiarán las distintas relaciones de la compacidad con las construcciones habituales (subespacios, cocientes, productos y sumas)

La ventaja que tenemos en este caso es que gran parte del trabajo ya está hecho. Veámoslo rápidamente.

- La compacidad es hereditaria para subespacios cerrados como se vio en la proposición 6.1.2. Esto no ocurre en general para subespacios abiertos. Para ello basta considerar $(0, 1)$ como subespacio de $[0, 1]$.
- Los cocientes de compactos son compactos, de hecho, como vimos en la proposición 6.1.3, la imagen continua de un espacio compacto es compacta. Nótese que los cocientes no son más que imágenes continuas "drásticas".
- Las sumas finitas de espacios compactos son compactos, la demostración de esto es totalmente análoga a la del lema 5.4.9.
- Los productos finitos de espacios compactos son compactos. Este resultado se conoce como el teorema de Tychonoff, que también es valido para el productos infinitos, aunque con una demostración distinta a la que veremos aquí.

Señoras y señores, presentamos sin más dilación, al único, al inigualable, al que probablemente sea uno de los teoremas más importantes que veremos en estas notas. El teorema de Tychonoff.

Teorema 6.2.1 (Teorema de Tychonoff)**.** *Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dos espacios topológicos y sea $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ su espacio producto. Entonces $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ son compactos si y solamente si $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ lo es.*

Demostración. Demostremos ambas implicaciones a palo seco.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ es compacto, consideremos la proyección $p_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$. Al ser continua y como la imagen continua de un compacto es compacto, hemos terminado. El caso para $\mathcal{Y}$ es análogo.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Dado el producto $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, podemos tomar un recubrimiento por abiertos suyo de modo que

$$\mathcal{X} \times \mathcal{Y} = \bigcup_{i \in J} \mathcal{W}_i.$$

Nuestro objetivo es conseguir extraer una cantidad finita de esta familia de abiertos. Antes de comenzar, nótese que estos abiertos no tienen por qué ser básicos, y esto dificulta nuestra labor.

En primer lugar, para todo $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ existe $i \in J$ de modo que $(x, y) \in \mathcal{W}_i$. Así, se pueden encontrar entornos abiertos $\mathcal{U}_x^y$ de x (donde el superíndice denota que depende del y tomado) y $\mathcal{V}_y^x$ de y (que de nuevo depende del x tomado) tales que

$$(x, y) \in \mathcal{U}_x^y \times \mathcal{V}_y^x \subset \mathcal{W}_i$$

puesto que son base de la topología. Nótese que para otro punto del producto con el mismo x y distinto y los dos abiertos cambian.

Fijemos $x \in \mathcal{X}$. De esta forma ocurrirá que $\mathcal{Y} = \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{V}_y^x$. Por ser $\mathcal{Y}$ compacto, existe un subrecubrimiento finito tal que

$$\mathcal{Y} = \mathcal{V}_{y_1}^x \cup \cdots \cup \mathcal{V}_{y_r}^x$$

Pese a que los puntos y_l (y la cantidad de ellos, r) dependen de la elección de x, no se ha incluido en la notación con objeto de no sobrecargarla.

A continuación, para cada $x \in \mathcal{X}$ se puede considerar el abierto

$$\mathcal{U}_x := \mathcal{U}_x^{y_1} \cap \cdots \cap \mathcal{U}_x^{y_r}$$

Consideramos el recubrimiento abierto de $\mathcal{X}$ formado por los $\mathcal{U}_x$, del cual, por ser $\mathcal{X}$ compacto, extraeremos un subrecubrimiento finito.

$$\mathcal{X} = \bigcup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{U}_x \implies \mathcal{X} = \mathcal{U}_{x_1} \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{x_s}$$

A estas alturas, podemos afirmar que, dado un punto (x, y), para cierto k entre 1 y s y cierto l entre 1 y r, se verifica que

$$(x, y) \in \mathcal{U}_{x_k} \times \mathcal{V}_{y_l}^{x_k} \subset \mathcal{U}_{x_k}^{y_l} \times \mathcal{V}_{y_l}^{x_k} \subset W_{kl}$$

Esto se debe a que claramente, existe un $k \in \{1, \cdots, s\}$ tal que $x \in \mathcal{U}_{x_k}$. Además, tomando $x = x_k$, existe un $l \in \{1, \cdots, r\}$ tal que $y \in \mathcal{V}_{y_l}^{x_k}$, luego $(x, y) \in W_{kl}$. Esto demuestra que los W_{kl} son un subrecubrimiento de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Como son una cantidad finita hemos terminado.

Aunque hayamos enunciado y demostrado el teorema para dos factores, todo producto finito de compactos es compacto, esto es inmediato de ver por inducción. ■

El teorema de Tychonoff tiene consecuencias sorprendentes en el ámbito de los espacios euclídeos usuales.

Observación 6.2.1 (Teorema de Heine–Borel)**.** El grandioso y todopodedoroso teorema de Heine–Borel es consecuencia directa del teorema de Tychonoff.

1. Los ***adoquines*** $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_r, b_r]$ son compactos, puesto que $[a_i, b_i]$ es compacto para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$

2. Un conjunto K es compacto si y solo si es cerrado y acotado.

   Una implicación es evidente por ser $\mathbb{R}^n$ un espacio métrico.

   Recíprocamente, si está acotado existe una bola $\mathrm{B}(0, \rho)$ para algún $\rho > 0$ tal que $K \subset (0, \rho)$.

   Asimismo, esta bola está contenida en $[-\rho, \rho]^n$, que es compacto por ser un adoquín.

   Además, K es cerrado, luego se trataría de un cerrado contenido en un compacto, luego de un compacto. ♢

	Subespacios	Cociente	Producto	Suma
Compacidad	Sí, en el caso de cerrados	Sí*	Sí	Sí

Tabla 6.1: Tabla resumen de compacidad.

Presentamos pues, como colofón nuestra típica tabla–resumen (ver tabla 6.1).

Sin dar tiempo a que el lector se recupere de una demostración de un teorema gordo, vamos a ser crueles y a meter capón una observación en forma de teorema que da que pensar, aunque no nos debemos dejar engañar.

Proposición 6.2.2 (Suficiencia de la base)**.** *K es compacto si y solo si para todo recubrimiento $\mathcal{A}$ de abiertos de una base $\mathcal{B}$ hay un subrecubrimiento finito.*

Demostración. La implicación a la derecha es evidente, probamos pues la otra.

Sea $\mathcal{A}$ un recubrimiento arbitrario, consideremos el recubrimiento

$$\mathcal{A}_{\mathcal{B}} := \{B_i \subset A \ : \ A \in \mathcal{A}, \ B_i \in \mathcal{B}\}$$

$\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ es un recubrimiento básico de K. Por hipótesis podremos extraer un subrecubrimiento finito $B_1, \ldots, B_n$.

De esta forma tenemos que, como cada B_i está contenido en un $A \in \mathcal{A}$

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

De manera que K es compacto. ■

Observación 6.2.2 (Tychonoff)**.** Parece que la proposición 6.2.2 nos hubiera venido al pelo para demostrar el teorema de Tychonoff de una patada, sin embargo, solo lo parece. Veamos esto en detalle.

Si tomamos un recubrimiento básico de un espacio producto $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, digamos $\{U_i \times V_i\}_{i \in J}$ y tomamos un recubrimiento finito $\{U_k\}_{k=1}^{s}$ y $\{V_l\}_{l=1}^{r}$, es claro que $\{U_k \times V_l\}$ es un recubrimiento de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, no obstante, no es un subrecubrimiento, ya que nadie nos asegura que todas las combinaciones $U_k \times V_l$ que necesitemos vayan a estar en el recubrimiento original. ♢

Observación 6.2.3 (Simplificaciones)**.** A pesar del chasco inicial de la observación anterior, es bastante claro que la proposición 6.2.2 es de enorme utilidad, además de ser extrapolable a otros contextos como Lindelöf (¡compruébese!). Algunos ejemplos de posible aplicación de esta proposición son una simplificación de la intricada demostración del teorema 5.3.1 a una demostración trivial, entre otras. ♢

6.3. Compacidad local

Hasta ahora no hemos hecho más que revisar lo que ya sabíamos de compacidad y traducirlo al nuevo lenguaje, exceptuando algún resultado como el Teorema de Tychonoff. Todo esto era de alguna manera "global", pues se refería a espacios topológicos. Ahora pasaremos a lo local, relacionado con entornos de puntos. Introduciremos esta noción de local con la compacidad y la extenderemos a conexión y conexión por caminos más adelante. Esto es algo novedoso y de gran importancia, por lo que se ruega al lector que lo estudie con detenimiento.

Definición 6.3.1 (Compacidad local)**.** Un espacio es ***localmente compacto*** cuando cada punto $x \in \mathcal{X}$ tiene una base de entornos compactos

$$\mathcal{V}_x = \{K \subset \mathcal{X} : K \text{ es entorno y es compacto}\}.$$

Veamos algunos ejemplos para aclarar este concepto.

Ejemplo 6.3.1 (Miscelánea de ejemplos)**.**

1. $\mathbb{R}^n$ con la topología usual es localmente compacto, ya que para cada punto existe una base de entornos de la forma
$$\mathcal{V}_x = \{\overline{\mathrm{B}}(x, 1/k) : k \geq 1\}$$
Dado que $\mathbb{R}^n$ no es compacto, de este ejemplo se desprende que, como era de esperar, la local–compacidad es más débil que la compacidad.
$$\text{Localmente compacto} \quad \not\Longrightarrow \quad \text{Compacto}$$

2. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topología usual no es localmente compacto. En efecto, tomemos un entorno compacto 0 contenido en $\mathbb{Q}$, digamos K_0. Este entorno, por definición, contiene un abierto (sin pérdida de generalidad de la base) $\mathcal{U}$ de la topología relativa de modo que $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \subset K_0$ para cierto $\varepsilon > 0$.

   A continuación, elijamos un irracional $\theta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y una sucesión $\{q_k\}_{k=1}^{\infty} \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$ que converge a θ, lo cual siempre podemos hacer al ser $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$ y ser $\mathbb{R}$ I axioma (véase la observación 5.2.2).

   Claramente, $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto infinito (ya que si fuese finito convergería a alguno de ellos, por lo que el límite sería racional) contenido en K_0 compacto. Por el teorema de Bolzano–Weierstrass, este conjunto tiene un punto de acumulación en K_0 o, equivalentemente, existe una subsucesión $\{q_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ que converge a un punto de K_0 al que denotaremos p.

   No obstante, toda subsucesión de una sucesión converge al mismo punto que esta última (¡compruébese!), luego hemos probado que $p = \theta$. Esto es una contradicción, pues $K_0 \subset \mathbb{Q}$, y hemos terminado. $\diamondsuit$

Sin embargo, parece muy engorroso tener que demostrar que existe una base de entornos con todos ellos compactos para ver que un espacio topológico es localmente compacto. Sorprendentemente, si el espacio es T_2, la tarea es mucho más sencilla, no obstante, usaremos toda nuestra artillería pesada.

Proposición 6.3.1 (Local–Compacidad y T_2). *Sea $\mathcal{X}$ un espacio T_2. Si $x \in \mathcal{X}$ tiene un entorno compacto, entonces tiene una base de entornos compactos.*

Demostración. Vamos a construir la base de compactos a partir del entorno compacto. Denotemos por K a dicho entorno compacto.

Se verifica que existe un abierto U tal que $x \in U \subset K$. Veamos que para cada entorno abierto W arbitrario existe un $L \subset W$ que sea entorno compacto de x.

Como $K \setminus W = K \setminus (W \cap K) \subset K$ y $K \setminus (W \cap K)$ es cerrado en K, entonces $K \setminus W$ es compacto.

Sin embargo $x \notin K \setminus W$. Vamos a aprovechar este compacto para construir uno que sí sea entorno de X.

Como X es T_2, dados un compacto y un punto podemos encontrar dos entornos disjuntos (como se recalcó en la observación 6.1.2). Entonces, podemos encontrar dos abiertos V_x y G tales que $V_x \cap G = \emptyset$, con $x \in V_x$ y $K \setminus W \subset G$.

Podemos tomar V_x además de forma que $V_x \subset U$. Si V_x no cumpliera esto, tomamos en su lugar $V_x \cap U$ que también contiene a x. Entonces, $x \in V_x \subset \overline{V}_x \subset \overline{K} = K$, donde la última igualdad se cumple por ser X Hausdorff. Entonces $\overline{V}_x$ es un compacto (por ser cerrado en compacto) entorno de x.

Ahora, solo queda comprobar que $\overline{V}_x \subset W$. Veamos para ello que se verifica el sifuiente aserto
$$V_x \cap G = \emptyset \implies \overline{V}_x \cap G = \emptyset$$
En efecto, si hubiera un $y \in \overline{V}_x \cap G$. Entonces $y \in \overline{V}_x$ e $y \in G$, como G es abierto, será entorno de y, y por definición de adherencia $V_x \cap G \neq \emptyset$, llegando así a un absurdo.

Ahora, como $K \setminus W \subset G$, por lo anterior $\overline{V}_x \cap (K \setminus W) = \emptyset$, y como $\overline{V}_x \subset K$, entonces es claro que $\overline{V}_x \subset W$. ∎

6.4. Comportamiento topológico de la compacidad local

Como hemos hecho en temas anteriores, estudiaremos como se comporta la compacidad local en subespacios, sumas, productos y cocientes de espacios localmente compactos.

- La suma finita de espacios localmente compactos, es localmente compacta.

  En efecto, dado $x \in \sum_{i=1}^{r} \mathcal{X}_i$ entonces existe un $i \in \{1, \cdots, r\}$ tal que $x \in \{i\} \times \mathcal{X}_i$. Como $\mathcal{X}_i$ es localmente compacto, existe una base $\mathcal{V}_x^i$ de entornos compactos de x. Entonces, pasándolo por la inclusión que corresponda (continua) $\{i\} \times \mathcal{V}_x^i = \{\{i\} \times V : V \in \mathcal{V}_x^i\}$ es base de entornos compactos de x en $\sum_{i=1}^{r} \mathcal{X}_i$.

- El producto finito de espacios localmente compactos es localmente compacto.

  Dado $x = (x_1, \ldots, x_r) \in \prod_{i=1}^{r} \mathcal{X}_i$, como cada $\mathcal{X}_i$ es localmente compacto, exite $\mathcal{V}_x^i$ base de entornos compactos en cada uno de ellos. Entonces,

  $$\mathcal{V}_x = \{V_1 \times \cdots \times V_r : V_i \in \mathcal{V}_x^i\}$$

  es base de entornos compactos, por el teorema de Tychonoff.

- Si la identificación es abierta entonces el cociente de un espacio localmente compacto también lo es.

  Por ser abierta la identificación manda entornos a entornos. Por ser además continua, la imagen de compactos es compacto. Luego el cociente es localmente compacto. En el ejemplo 6.4.1 se muestra que es imprescindible que sea abierta. Si esto no ocurre, el cociente no es necesariamente localmente compacto.

- Los subespacios "localmente cerrados" son localmente compactos. Haremos esto con detenimiento en la sección 6.4.1.

Ejemplo 6.4.1 (Identificación cerrada)**.** Veamos un ejemplo en el cual el cociente de un espacio topológico localmente compacto no lo es. Esto se debe a que la identificación no es abierta.

Sabemos que $\mathbb{R}$ es localmente compacto. Sin embargo, la ya célebre rosa de infinitos pétalos $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (ver ejemplo 5.4.3) no lo es.

Veamos que el punto $\mathbb{Z}$ del cociente no tiene ningún entorno compacto.

Supongamos que sí. Entonces existe K compacto de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tal que $\mathbb{Z} \in \mathcal{U} \subset K$, siendo $\mathcal{U}$ un abierto del cociente, es decir, es imagen por la proyección canónica p de un abierto saturado $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}$ y, por tanto, $\mathbb{Z} \subset \mathcal{W}$.

Entonces, para cada $k \in \mathbb{Z}$ podemos tomar $t_k \notin \mathbb{Z}$ tal que $t_k \in \mathcal{W}$ (pues $\mathcal{W}$ es abierto de $\mathbb{R}$ y, por tanto, es unión de intervalos abiertos). Así, $p(t_k) = t_k \in \mathcal{U} = p(\mathcal{W})$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Consideramos entonces el conjunto de puntos aislados

$$\{t_k : k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{U} \subset K,$$

que es un subespacio infinito en un compacto, por lo que tiene algún punto de acumulación $a \in K$ (que no es ninguno de ellos por ser todos aislados). Entonces hay dos posibilidades: $a = \mathbb{Z}$ o $a \neq \mathbb{Z}$.

- Si $a = \mathbb{Z}$, se llega a una contradicción ya que $p(\mathbb{R} \setminus \{t_k : k \in \mathbb{Z}\})$ es un entorno de $\mathbb{Z}$ que no corta a $\{t_k : k \in \mathbb{Z}\}$, por lo que $\mathbb{Z}$ no puede ser el punto de acumulación.

- Si $a \neq \mathbb{Z}$, y además $a \notin \{t_k : k \in \mathbb{Z}\}$ se llega a un absurdo por el mismo procedimiento que en el apartado anterior. Si $a = t_{k_0}$ para cierto k_0 basta tomar el entorno $p(\mathbb{R} \setminus \{t_k : k \in \mathbb{Z},\ k \neq k_0\})$.

Se concluye pues que el subespacio infinito $\{t_k : k \in \mathbb{Z}\}$ de K compacto no tiene puntos de acumulación. Legamos así a un absurdo, por lo que no existen entornos compactos de $\mathbb{Z}$.

Nótese que la identificación es cerrada. En efecto, sea $\mathcal{F}$ cerrado de $\mathbb{R}$, recordemos que los cerrados del cociente son las imágenes de cerrados saturados de $\mathbb{R}$. Así, si es saturado entonces $p(\mathcal{F})$ es cerrado de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Si no es saturado es porque $\emptyset \neq \mathcal{F} \cap \mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$. Entonces, $\mathcal{F} \cup \mathbb{Z}$ es cerrado saturado de $\mathbb{R}$ y $p(\mathcal{F}) = p(\mathcal{F} \cup \mathbb{Z})$ es cerrado del cociente.

Esto nos muestra que no vale con que tenga alguna propiedad igual de fuerte que ser abierta, sino que tiene que ser esta misma, no vale ninguna otra. ♢

	Subespacios	Cociente	Producto	Suma
Compacidad local	Sí, en el caso de localmente cerrados	Sí, en el caso de identificaciones abiertas	Sí	Sí

Tabla 6.2: Tabla resumen de compacidad local.

6.4.1. Subespacios localmente cerrados

Antes de comenzar a elaborar el último apartado del estudio del comportamiento de la local compacidad conviene definir subespacio localmente cerrado.

Definición 6.4.1 (Local–clausura)**.** Un subespacio $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ es ***localmente cerrado*** si es abierto en su adherencia,

$$\mathcal{Y} = \overline{\mathcal{Y}} \cap G,$$

donde G es abierto de $\mathcal{X}$.

Vayamos estudiando qué subespacios de un espacio topológico $\mathcal{X}$ localmente compacto lo son también. Finalmente concluiremos que la compacidad local se hereda a los subespacios localmente cerrados (y a ninguno más).

Comenzamos viendo el comportamiento de los subespacios cerrados.

Lema 6.4.1 (Cerrados y local–compacidad)**.** *La local–compacidad se hereda a subespacios cerrados.*

Demostración. Tomemos $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}$ subespacio cerrado. Por ser $\mathcal{X}$ localmente compacto para todo $x \in \mathcal{F}$ hay una base de entornos compactos, a los cuales denotaremos por K. Entonces, $\mathcal{F} \cap K$ es entorno de x en $\mathcal{F}$. Además es compacto, ya que es un cerrado relativo de K compacto. Por tanto, $\mathcal{F}$ es localmente compacto. ■

Estudiemos ahora los subespacios abiertos.

Lema 6.4.2 (Abiertos y local–compacidad)**.** *La local–compacidad se hereda a subespacios abiertos.*

Demostración. Consideremos ahora $G \subset \mathcal{X}$ subespacio abierto. Para todo $x \in G$ existe una base de entornos compactos $\mathcal{V}_x$.

Entonces el conjunto $\mathcal{W}_x := \{K \in \mathcal{V}_x \ : \ K \subset G\}$ es base de entornos compactos de x en G (la comprobación es inmediata, basta usar el lema 1.7.5), siendo entonces G localmente compacto. ■

Así pues,los subespacios abiertos y cerrados de $\mathcal{X}$ son localmente compactos. Imaginemos ahora que tenemos la siguiente cadena de inclusiones, donde $\mathcal{F}$ es cerrado de $\mathcal{X}$ y G es abierto de $\mathcal{F}$ (no necesariamente de $\mathcal{X}$)

$$G \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{X}.$$

Por lo que acabamos de ver, si $\mathcal{X}$ es localmente compacto, $\mathcal{F}$ también lo es. Entonces G es subespacio abierto de $\mathcal{F}$ localmento compacto, luego G lo es también. En este caso además podemos escribir (por topología relativa) $G = \mathcal{F} \cap W$, donde W es abierto de $\mathcal{X}$. Lo mismo ocurre con la cadena

$$\mathcal{F} \subset G \subset \mathcal{X},$$

donde podemos escribir $\mathcal{F} = G \cap H$, con H cerrado de $\mathcal{X}$.

Observación 6.4.1 (Intersecciones mixtas)**.** Si el lector ha tenido la simpatía de leer la divagación anterior se habrá dado cuenta de que si un subespacio $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}$ (siendo $\mathcal{X}$ localmente compacto) es intersección de un abierto y un cerrado, entonces es localmente compacto. Comprobémoslo.

En efecto, si $\mathcal{Y} = G \cap H$ con G abierto y H cerrado, es claro que $\mathcal{Y}$ es un cerrado del subespacio abierto G. Como G es abierto y $\mathcal{X}$ es localmente compacto, entonces G es localmente compacto y como $\mathcal{Y}$ es cerrado en G, $\mathcal{Y}$ es localmente compacto. ♢

Veamos finalmente qué relación guarda ser intersección de un abierto y un cerrado y ser localmente cerrado.

Proposición 6.4.3 (Caracterización de la local–clausura)**.** *$\mathcal{Y}$ es localmente cerrado si y solo si $\mathcal{Y}$ puede escribirse como intersección de un abierto y un cerrado de $\mathcal{X}$.*

Demostración. Dado $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ localmente cerrado. Por definición, $\mathcal{Y} = \overline{\mathcal{Y}} \cap G$ con G abierto de $\mathcal{X}$ e $\overline{\mathcal{Y}}$ cerrado de $\mathcal{X}$.

Recíprocamente, sea $\mathcal{Y} = \mathcal{F} \cap G$ con G abierto y $\mathcal{F}$ cerrado de $\mathcal{X}$. Entonces, como $\mathcal{Y} \subset \mathcal{F}$, se tiene que $\overline{\mathcal{Y}} \subset \mathcal{F}$. Además, como $\mathcal{Y} \subset \overline{\mathcal{Y}}$ e $\mathcal{Y} \subset G$, entonces $\mathcal{Y} \subset \overline{\mathcal{Y}} \cap G$. Así,

$$\mathcal{Y} \subset \overline{\mathcal{Y}} \cap G \subset \mathcal{F} \cap G = \mathcal{Y}$$

concluyéndose que $\mathcal{Y} = \overline{\mathcal{Y}} \cap G$, luego $\mathcal{Y}$ es localmente cerrado. ■

Queda demostrado así que los subespacios localmente cerrados son localmente compactos. Pero ¿se dará el recíproco? La respuesta corta es no. La respuesta larga es no pero. . . y la vemos en forma de proposición.

Proposición 6.4.4 (Caracterización de la herencia)**.** *Si $\mathcal{X}$ es un espacio topológico* T_2 *e $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ es localmente compacto. Entonces $\mathcal{Y}$ es localmente cerrado.*

Demostración. Tenemos que probar que $\mathcal{Y}$ es abierto en su adherencia, es decir, que para todo $y \in \mathcal{Y}$ exite un abierto de la adherencia $G = U \cap \overline{\mathcal{Y}}$ (con U abierto de $\mathcal{X}$ que contiene a y) tal que $y \in G \subset \mathcal{Y}$. Dicho de otra forma, que es entorno de todos sus puntos en la adherencia.

Sea $y \in \mathcal{Y}$. Como $\mathcal{Y}$ es localmente compacto existe un entorno compacto $K \subset \mathcal{Y}$ de y. Por ser entorno, existe un abierto $W \cap \mathcal{Y}$ de $\mathcal{Y}$ tal que $y \in W \cap \mathcal{Y} \subset K$. Veamos que basta con tomar $U = W$.

En efecto, dado que W es abierto de $\mathcal{X}$, se tiene que $W \cap \overline{\mathcal{Y}}$ es abierto de la adherencia que contiene a y. Si probásemos que $W \cap \overline{\mathcal{Y}} \subset \overline{W \cap \mathcal{Y}}$ entonces, como $\mathcal{X}$ es T_2, K es cerrado, y esto implicaría que

$$W \cap \mathcal{Y} \subset K = \overline{K} \implies \overline{W \cap \mathcal{Y}} \subset K \subset \mathcal{Y} \implies W \cap \overline{\mathcal{Y}} \subset \mathcal{Y}$$

siendo así $W \cap \overline{\mathcal{Y}}$ abierto de la adherencia tal que $Y \in W \cap \overline{\mathcal{Y}} \subset \mathcal{Y}$, quedando demostrada la proposición.

Probemos pues que $W \cap \overline{\mathcal{Y}} \subset \overline{W \cap \mathcal{Y}}$. Dado $z \in W \cap \overline{\mathcal{Y}}$, entonces $z \in \overline{\mathcal{Y}}$, por lo que para todo entorno abierto V_z se tiene que $V_z \cap \mathcal{Y} \neq \emptyset$. Además, $z \in W$, así que $V_z \cap W$ es entorno de z. En particular para este entorno se tiene que

$$(V_z \cap W) \cap \mathcal{Y} \neq \emptyset \implies V_z \cap (W \cap \mathcal{Y}) \neq \emptyset$$

Esto implica que $z \in \overline{W \cap \mathcal{Y}}$, como queríamos. ■

6.5. Compacificación de Alexandroff

Como hemos podido ver a lo largo de este capítulo, los espacios compactos son espacios muy manejables, con buenas propiedades. ¿No sería una gran noticia que todos los espacios con los que vamos a trabajar lo fueran? Lamentablemente esto no va a ser así, pero si que vamos a lograr en muchas ocasiones hacer de nuestro espacio un subespacio de un espacio compacto.

La idea de las compactificaciones es lograr esto (convertir espacios no compactos en subespacios de compactos) añadiendo puntos al espacio original. Veamos en primer lugar una definición de compactificación antes de pasar a ver la que da nombre a esta sección.

Definición 6.5.1 (Compactificación)**.** Llamaremos ***compactificación*** de un espacio X a un espacio Y si X es homeomorfo a un subespacio denso de Y, e Y es compacto.

La condición de que el espacio sea denso en su compactificación solo tiene como objetivo, que ésta no sea innecesariamente grande.

Vemos un breve ejemplo para terminar de aclarar la definición.

Ejemplo 6.5.1 (Compactificaciones ajustadas)**.** Si $X \subset K$ con K compacto, entonces $\mathrm{Adh}_K(X)$ es compacta, ya que se trata de un cerrado en un compacto. Por ende, bastará con tomar $\mathrm{Adh}_K(X)$ como espacio compacto que contiene una copia homeomorfa de X (no hace falta coger todo K). ♢

Ahora pasamos a ver el caso particular de la compactificación de Alexandroff (hay muchísimas más). En primer lugar la definiremos para luego pasar a ver una serie de observaciones que nos llevaran a demostrar que realmente verifica ser compactificación.

Definición 6.5.2 (Compactificación de Alexandroff)**.** Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico localmente compacto, no compacto y Hausdorff.

Tomamos un punto al que pasamos a denotar como ∞ tal que $\infty \notin X$.

Construimos el conjunto $X^* := X \cup \{\infty\}$ y lo dotaremos con la topología $\mathcal{T}^*$ formada por

1. Los abiertos de X con su topología inicial.
2. Los conjuntos U que contengan a ∞ tales que su complementario en X^* (contenido en X) sea compacto.

Antes de continuar introducimos la siguiente observación inmediata.

Observación 6.5.1 (Condición necesaria de abertura)**.** Dado un abierto U que contenga a ∞ tenemos que $X^* \setminus U$ es compacto en X. Como X es T_2, $X^* \setminus U$ es cerrado, luego $X \setminus (X^* \setminus U)$ es abierto de X, por la definición de resta conjuntista $X \setminus (X^* \setminus U) = U \cap X$.

En conclusión, si $U \in \mathcal{T}^* \setminus \mathcal{T}$ entonces $U \cap X$ es abierto en X. ♢

Hemos definido de este modo la ***compactificación de Alexandroff*** aunque no hemos probado aún que X^* sea un espacio compacto ni que su topología este bien definida siquiera, pasamos a hacerlo ahora.

Lema 6.5.1 (Buena definición)**.** *$\mathcal{T}^*$ es una topología.*

Demostración. Veamos que se verifican las tres propiedades de las topologías.

1. Evidentemente el vacío está en $\mathcal{T}^*$ por ser abierto de $\mathcal{T}$. Además X^* está en la topología ya que $X^* \setminus X^*$ es el vacío, que es trivialmente compacto.
2. Veamos que la unión arbitraria de abiertos de $\mathcal{T}^*$ es un abierto.

   Descomponemos los abiertos de esta unión en dos grupos, los abiertos que contienen a ∞ y los que no. De este modo tenemos $\bigcup_{U_i \in \mathcal{T}} U_i \cup \bigcup_{\mathcal{W}_j \in \mathcal{T}^* \setminus \mathcal{T}} W_j$. Denotaremos al miembro de la izquierda por U y al de la derecha por W.

   Evidentemente U es abierto por ser unión de abiertos de $\mathcal{T}$.

   Por otra parte tenemos que $X^* \setminus W = \bigcap_{j \in J} X^* \setminus W_j$ será cerrado en X (por ser intersección de compactos, y por tanto cerrados) y estará contenido en $X^* \setminus W_{j_0}$, que es compacto, luego W es abierto.

   Por último tomamos $G := W \cup U$. Entonces tenemos

   $$X^* \setminus (W \cup U) = (X^* \setminus W) \cap (X^* \setminus U) \subset X^* \setminus W$$

   Como hemos visto, $(X^* \setminus U)$ es cerrado y $(X^* \setminus W)$ compacto, que es cerrado por ser X Hausdorff, por lo que la intersección de ambos será un cerrado en un compacto, y por lo tanto compacta. Así, $X \setminus G$ será compacto y por lo tanto G abierto.
3. Veamos que la intersección finita de abiertos es abierta, probemos esto para dos abiertos U y V, siguiéndose el resultado por inducción.

   Para probarlo nos basta con observar las tres situaciones distintas que pueden darse. Si ambos abiertos son usuales trivialmente su intersección será abierto. Si por el contrario ambos abiertos son no usuales, entonces $X^* \setminus (U \cap V) = (X^* \setminus U) \cup (X^* \setminus V)$ y la unión de dos compactos es compacta. Por último, en caso de haber uno de cada (digamos $\infty \in V$), $U \cap V \subset X$, luego $U \cap V = U \cap (V \cap X)$, como por la observación 6.5.1 $(V \cap X)$ es abierto, se sigue el resultado.

Con estos 3 puntos hemos demostrado que $\mathcal{T}^*$ es topología. ■

Sigamos con nuestra ardua tarea de demostrar que, efectivamente, la compactificación de Alexandroff es una compactificación.

Proposición 6.5.2 (Consistencia)**.** *La compactificación de Alexandroff es una compactificación.*

Demostración. Veamos que se cumple todo lo que debe cumplirse.

1. Es fácil comprobar que la topología relativa de X como subespacio de X^* es $\mathcal{T}$, luego X^* contiene una copia homeomorfa a X.

2. X^* es compacto, ya que, dado un recubrimiento por abiertos $\{U_i\}_{i\in J}$ de X^* es claro que habrá un U_{i_0} que contenga a ∞, siendo entonces $X^* \setminus U_{i_0} =: K$ compacto en X.

   Por lo tanto, al ser $\{U_i\}_{i\in J}$ recubrimiento por abiertos de K y éste compacto, tenemos que $K \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_r}$ (extraemos subrecubrimiento finito del mismo).

   Ahora bien, como $K \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_r}$ y $X^* \setminus K \subset U_{i_0}$ entonces tenemos que $X^* \subset U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_r}$, con lo que habríamos obtenido un subrecubrimiento finito de X^*.

3. Veamos que $X \subset X^*$ es abierto denso en X^*. Que es abierto es trivial. Ahora, para ver que es denso, tomamos un U abierto no vacio tal que $\infty \in \mathcal{U}$ (el otro caso es evidente).

   Ahora bien, por hipótesis $X^* \setminus U = K$, luego complementando $U = (X^* \setminus K)$ con K compacto de X, por lo que tiene que cortar a X. En caso contrario $X = K$, pero X no es compacto. ■

A modo de resumen podemos decir que la compactificación de Alexandroff es, efectivamente, una compactificación. Además, la compactificación de Alexandroff preserva de X la propiedad de ser T_2.

Lema 6.5.3 (Alexandroff y Hausdorff)**.** *X^* es un espacio Hausdorff.*

Demostración. X^* es T_2. En efecto, como $\mathcal{T}$ es T_2, tan solo podríamos encontrar problemas a la hora de separar $x \in X$ y ∞. Ahora bien, como X es localmente compacto, x tiene un entorno K compacto. Además, $X^* \setminus K$ es abierto en $\mathcal{T}^*$ que contiene a ∞.

Con lo que hemos encontrado dos entornos K (de x) y $X^* \setminus K$ (de ∞) disjuntos. ■

Alertamos en la siguiente observación de lo poco conveniente que resulta forzar la máquina cuando se trabaja con la compactificación de Alexandroff.

Observación 6.5.2 (Compactificaciones degeneradas)**.** La compactificación de Alexandroff está pensada para espacios X no compactos. La razón de esto, aparte de porque no tiene sentido hacer compactificaciones de espacios ya compactos es que el resultado que obtenemos al "forzar la máquina" es feo, pues obtendríamos que ∞ es un punto abierto. Por ende, X ya no sería denso en X^*, lo cual, si nos ponemos exigentes podría implicar que X^* no es ni siquiera compactificación.

Además, el hecho de forzar la máquina rompe una propiedad importantísima de la compactificación de Alexandroff, la unicidad (que demostramos a continuación). ♢

Antes de ver que la compactificación de Alexandroff es, en cierto sentido, única, introduzcamos una definición.

Definición 6.5.3 (Compactificación unipuntual)**.** Diremos que Y es una ***compactificación unipuntual*** de un espacio X no compacto, localmente compacto y T_2 si se verifica que Y es T_2, compacto, existe una inmersión (homeomorfismo) $f : X \to f(X) \subset Y$ con $f(X)$ denso en Y y además, $Y = f(X) \cup \{\omega\}$ con $\omega \notin f(X)$.

Veamos ahora una pequeña caracterización de las compactificaciones unipuntuales, que viene a decir que el exigir que $f(X)$ sea denso en Y es redundante.

Lema 6.5.4 (Caracterización)**.** *Sea X un espacio T_2, no compacto pero localmente compacto.*

Y es una compactificación unipuntual de X si y solo si Y es un espacio T_2 compacto tal que $Y = f(X) \cup \{\omega\}$ con $\omega \notin f(X)$ donde f es un homeomorfismo.

Demostración. Para ello habrá que probar que $f(X)$ es denso en Y. Si no fuera así, habría un abierto U de Y tal que $U \cap f(X) = \emptyset$, lo cual solo puede ocurrir se $\{\omega\}$ es abierto y, por tanto, su complementario, $f(X)$ es cerrado. Como Y es compacto y T_2, entonces $f(X)$ sería compacto, luego también X, lo cual es absurdo. ■

Tras esto ya podemos enunciar nuestro teorema de unicidad.

Teorema 6.5.5 (Unicidad)**.** *Sea X un espacio* T_2*, localmente compacto y no compacto.*
Si Y es una compactificación puntual de X, entonces Y es homeomorfo a la compactificación de Alexandroff de X.

Demostración. A lo largo de la demostración denotaremos por f al homeomorfismo asociado a la compactificación Y. Comenzamos definiendo la aplicación

$$\begin{aligned} h: \quad & Y \to X^* \\ & \omega \mapsto \infty \\ & f(x) \mapsto x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} h^{-1}: \quad & X^* \to Y \\ & \infty \mapsto \omega \\ & x \mapsto f(x) \end{aligned}$$

Veamos que h es homeomorfismo.

Evidentemente h es biyectiva. Además, si fuera continua, al ser Y compacto y X^* ser T_2, h sería una aplicación cerrada, y por lo tanto homeomorfismo. Comprobemos pues la continuidad.

Tomemos $U \subset X^*$, y vayamos destripando el asunto cual gorrino en una matanza.

- Si $U \subset X$, entonces $h^{-1}(U) = f(U)$, como f es abierta por ser homeomorfismo, entonces $f(U)$ es abierto de Y.
- Si $\infty \in U$, entonces, por definición $U = X^* \setminus K = X \setminus K \cup \{\infty\}$ siendo K compacto.

  Luego $h^{-1}(U) = f(X \setminus K) \cup \{\omega\} = Y \setminus f(K)$, se tiene que $h^{-1}(U) = Y \setminus f(K)$, que es abierto, ya que $f(K)$ es compacto en Y, que es T_2, luego $f(K)$ es cerrado. ■

Luego solamente hay una compacificación puntual, que es precisamente la compactificación de Alexandroff. Este hecho es un argumento potentísimo que puede librarnos de algún que otro apuro.

Corolario 6.5.6 (Caracterización)**.** *Un espacio X es* T_2 *y localmente compacto si y solo si es un subespacio abierto de un espacio* T_2 *compacto.*

Demostración. La implicación a la izquierda se da por el comportamiento topológico de T_2 y la local–compacidad.

Recíprocamente, si X es compacto el resultado es evidente, luego supongamos que no lo es, en tal caso tomamos la compactificación de Alexandroff, que verifica lo que se nos pide. ■

Para terminar esta sección vamos a ver unos pocos ejemplos de compactificaciones.

Ejemplo 6.5.2 (Miscelánea)**.** Veremos ahora ejemplos de compactificaciones. Los primeros tendrán como objetivo entender el mecanismo de la misma. Después, pondremos ejemplos para aclarar que, como hemos visto, dado un conjunto, sus compactificaciones puntuales son homeomorfas, pero no sucede al contrario (dada una compactificación los conjuntos de los que puede provenir no tienen porque ser homeomorfos). Por último, veremos un ejemplo de compactificación no unipuntual.

1. Se puede comprobar haciendo uso de la llamada ***proyección estereográfica*** que $\mathbb{R}^* = \mathbb{S}^1$, y más en general, $\mathbb{R}^{n*} = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
2. Nótese que, intuitivamente, $[0,1] \neq (0,1)^*$ ya que, $[0,1]$ tiene dos puntos más que $(0,1)$. No obstante, formalmente habría que demostrar que no hay ningún homeomorfismo entre $[0,1]$ menos un punto y $(0,1)$.
3. Se puede demostrar que $(0,1]^* = [0,1]$ y $[0,1)^* = [0,1]$, probado esto es interesante hacer notar que estos dos subespacios no son homeomorfos entre sí (a pesar de tener la misma compactificación).
4. Siendo $X = [0,1/2) \cup (1,2]$ e $Y = [0,1)$ tenemos que sus compactificaciones son la misma, $X^* = Y^* = [0,1]$, no obstante, como en el caso anterior, no son homeomorfos.
5. Puede demostrarse que los espacios proyectivos de dimensión n son compactificaciones (en general no unipuntuales) de los espacios afines. ♢

Capítulo 7

Conexión

La noción de conexión es otra más de las nociones que ya conocíamos en $\mathbb{R}^n$ y espacios métricos en general y que pueden generalizarse a un espacio topológico arbitrario. En este capítulo formalizaremos la noción intuitiva de estar hecho "de una sola pieza". Asimismo también trabajaremos sobre el concepto de "pieza indivisible" de algo, o, dicho más finamente, "componente conexa".

7.1. Definición y propiedades

Comencemos nuestra nueva andadura definiendo formalmente la idea de conexión y presentando algunos resultados bastante potentes.

Definición 7.1.1 (Conexión)**.** Un espacio topológico $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ es ***conexo*** si no lo podemos particionar con dos abiertos. Dicho de otra manera, un espacio es conexo si no unión de dos abiertos disjuntos no vacíos.

Escrito de forma conjuntista, no existen $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ abiertos tales que $U \cap V = \emptyset$ y $\mathcal{X} = U \cup V$.

Observación 7.1.1 (Conexión en subespacios)**.** De nuevo, como ocurría con la compacidad, la conexión en un subconjunto no necesita una definición alternativa. En efecto, dado un subespacio $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$, diremos que $\mathcal{Y}$ es conexo si lo es entendido como un espacio topológico equipado con la topología relativa. ♢

La siguiente proposición bien podría ser una observación inmediata, no obstante es extremadamente útil y nos acerca a la idea que de vez en cuando hemos dejado caer acerca a la relación de los clopens con la conexión.

Proposición 7.1.1 (Definiciones equivalentes)**.** *Sea un espacio topológico $\mathcal{X}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{X}$ no es conexo.*
2. *$\mathcal{X}$ es unión de dos cerrados disjuntos no vacíos.*
3. *$\mathcal{X}$ posee dos clopens no triviales.*

Demostración. Si $\mathcal{X}$ es disconexo es claro que podemos escribir $\mathcal{X}$ como unión disjunta de dos abiertos no triviales $\mathcal{X} = U \cup V$. Como U es abierto, su complementario, V, será cerrado, luego V será un clopen. Análogamente, como V es abierto, su complementario, U, será cerrado, luego U es también un clopen. ■

Para ir calentando daremos una caracterización de los conexos de la recta real $\mathbb{R}$. La demostración de la siguiente proposición simplifica brutalmente a la que habitualmente se ve en la literatura y es debida a Diego Chicharro.

Definición 7.1.2 (Intervalo)**.** Un subconjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ se dice ***intervalo*** si dados dos puntos $a, b \in A$ y un tercero $c \in \mathbb{R}$ que cumple que $a \leq c \leq b$, entonces $c \in A$.

Proposición 7.1.2 (Conexos de la recta)**.** *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es conexo si y solo si es un intervalo.*

Demostración. Demostremos ambas implicaciones.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sea A conexo de $\mathbb{R}$ que no sea un intervalo, entonces habrá dos puntos $a, b \in A$ para cuales podemos elegir un c entre a y b tal que $c \notin A$. Dicho esto, considerando los conjuntos $U := (-\infty, c) \cap A$ y $V := (c, \infty) \cap A$ es claro que son abiertos disjuntos de A que cubren a A, luego A no es conexo.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea A un intervalo. Si no fuera conexo, podría particionarlo en dos cerrados F y H. Tomemos pues dos puntos, uno en cada abierto de la partición $a \in F$ y $b \in H$, supongamos sin pérdida de generalidad que $a < b$. Como A es un intervalo, dados dos puntos de A, contiene a todos los que haya en medio, en particular $[a, b] \subset A$.

Consideremos pues $H \cap [a, b] \neq \emptyset$, que, al ser intersección de cerrados es cerrado, y, por tanto, contiene a todos sus puntos de acumulación, en particular, al ser acotado contiene a su ínfimo, al que llamaremos η.

Llegados a este punto, si $\eta = a$ entonces a estará en los dos cerrados de la partición a la vez, lo cual es absurdo, precisamente por ser una partición. Esto obliga a que $\eta > a$, luego $[a, \eta) \cap H = \emptyset$ así que $[a, \eta) \subset F$. Al ser F cerrado es claro que $[a, \eta] \subset F$. Pero esto es absurdo porque entonces η estaría tanto en F como H, que son conjuntos disjuntos. ∎

Un corolario inmediato a esta proposición es que $\mathbb{R}$ es conexo, ya que $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Ahora, vamos a repasar brevemente las propiedades que ya conocíamos de conjuntos conexos en espacios métricos que siguen siendo válidas en estos mundos abstrusos.

Proposición 7.1.3 (Imagen continua)**.** *La imagen continua de un conexo es un conexo.*

Demostración. Sea $\mathcal{X}$ conexo y $f : \mathcal{X} \to f(\mathcal{X}) =: \mathcal{Y}$ continua. Veamos que $\mathcal{Y}$ es conexo. Razonemos pues por contradicción.

Si $\mathcal{Y}$ no fuera conexo, tendría un clopen no trivial (ni el vacío ni el total), llamémoslo A. Entonces por ser f continua, $f^{-1}(A)$ también es un clopen.

Al ser f sobreyectiva, $f(f^{-1}(A)) = A \subsetneq f(\mathcal{X})$, luego $f^{-1}(A)$ no puede ser ni el vacío ni el total, siendo así un clopen no trivial, entrando en contradicción con la conexión de $\mathcal{X}$. ∎

A continuación presentamos un teorema conocido en algunos lugares remotos como el teorema del pivote, aunque bien podría llamarse el teorema MacGyver.

Teorema 7.1.4 (Teorema de pivote)**.** *Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conexos de $\mathcal{X}$ con intersección no vacía, es decir, hay un punto a contenido en $\bigcap_{i \in I} A_i$.*

Entonces, la unión de la familia, $C := \bigcup_{i \in I} A_i$ es conexo.

Demostración. Veamos que C no tiene clopens no triviales, para ello, supongamos que S es un clopen de C. Al ser S un clopen de C, por topología relativa, $S \cap A_i$ es un clopen de A_i. Ahora, como A_i es conexo, $S \cap A_i$ tiene que ser necesariamente el vacío o el total, para cada $i \in I$.

Si hubiera un $i_0 \in I$ tal que $S \cap A_{i_0} = A_{i_0}$, como hay un a en la intersección de la familia, $a \in A_{i_0}$, luego $a \in S$. Por tanto S corta a todos los conjuntos de la familia, y, como dijimos antes, es un clopen en todos ellos, luego no queda más remedio que $S \cap A_i = A_i$ para todo $i \in I$. Siendo pues $S = C$.

Por otra parte, si S no corta a ninguno de los conjuntos de la familia es claro que es el vacío. ∎

Este teorema es extremadamente útil para garantizar la conexión de un sinnúmero de conjuntos, y genera un gran abanico de corolarios y consecuencias (de ahí que le hayamos bautizado como el teorema MacGyver). Detallemos algunas variantes y consecuencias de este fantástico teorema.

Corolario 7.1.5 (Intersecciones dos a dos)**.** *Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conexos que cumple que uno de ellos, digamos A_{i_0}, corta a todos los demás. Es decir, $A_{i_0} \cap A_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$.*

Entonces, la unión de la familia, $\bigcup_{i \in I} A_i$ es conexo.

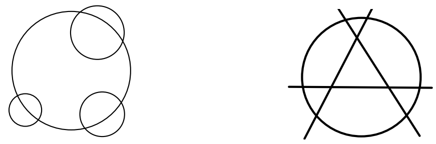
Demostración. Como $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ por hipótesis, podemos aplicar el teorema del pivote a la familia $\{A_i, A_{i_0}\}$ para cada $i \in I$, y por tanto cada $A_{i_0} \cup A_i$ es conexo. Ahora, escribiendo

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(A_i \cup A_{i_0})$$

tenemos que como la familia $\{A_i \cup A_{i_0} \ : \ i \in I\}$ tiene a A_{i_0} por intersección, su unión (que coincide con la que queremos), por el teorema del pivote es conexa. ■

Observación 7.1.2 (Intersecciones dos a dos)**.** En particular, la misma prueba del corolario 7.1.5 tomando un $i_0 \in I$ arbitrario sirve para una familia de conexos tal que su intersección dos a dos sea no vacía, es decir, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ para cualquier par de conjuntos de la familia. ♢

Como a veces la visión espacial brilla por su ausencia brindamos dos dibujos con ejemplos de familias de conexos que verifican las condiciones del corolario 7.1.5.



(a) El corro de la patata

(b) El símbolo anarquista

Figura 7.1: Ilustración de conjuntos en las hipótesis de 7.1.5.

Corolario 7.1.6 (Cadenas)**.** *Sea una cadena finita $\{A_i\}_{i=1}^n$ de conexos, es decir, que verifica que $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$. Entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es conexo.*

Demostración. Por inducción, es claro que aplicando el teorema del pivote la cadena de dos eslabones $A_1 \cup A_2$ es conexa, si suponemos que la cadena de n eslabones es conexa, por el teorema del pivote, la de $n+1$ eslabones $A_{k+1} \cup \bigcup_{i=1}^k A_i$ lo será también. ■

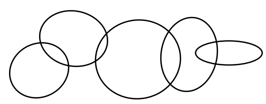


Figura 7.2: Ilustración de una cadena de conexos

Observación 7.1.3. El corolario anterior también se verifica si la sucesión de conjuntos es numerable, pero no lo vamos a probar aquí. ♢

El siguiente resultado, aunque también es consecuencia del teorema del pivote 7.1.4, es más que un mero corolario y merece la categoría de teorema por sí mismo.

Teorema 7.1.7 (Sandwich)**.** *Sea A conexo y B un conjunto emparedado entre A y su adherencia, es decir, $A \subset B \subset \overline{A}$. Entonces B es conexo. En particular, $\overline{A}$ es conexo.*

Demostración. Podemos poner nuestro conjunto B de forma amigable para usar el teorema del pivote.

$$B = \bigcup_{b\in B\setminus A} (A \cup \{b\})$$

como la intersección de la familia es no vacía, entonces basta probar que cada $A \cup \{b\} \subset \overline{A}$ es conexo, pues en ese caso el teorema del pivote 7.1.4 nos garantiza la conexión de B.

Si hubiera un clopen no trivial $C \subset A \cup \{b\}$, entonces, $C \cap A$ sería un clopen en A. Como A es conexo, $C \cap A$ debe ser el vacío o el total.

- Si es el vacío, entonces $C = \{b\}$ y por tanto $\{b\}$ es abierto, luego, como el entorno $\{b\}$ de sí mismo no corta con A, $b \notin \overline{A}$, lo cual es una contradicción.
- Si es el total, $C = A$ y por tanto A es cerrado, pero $b \notin A = \overline{A}$, que de nuevo es una contradicción. ■

Recojamos los frutos de nuestra cosecha con un ejemplo, pero antes presentemos unas definiciones que harán más ágil nuestro discurrir.

Definición 7.1.3 (Segmento)**.** En $\mathbb{R}^n$ un segmento que une dos puntos a y b es el conjunto $\{ta + (1-t)b \ : \ t \in [0,1]\}$, que puede interpretarse como la imagen de la interpolación lineal entre a y b, que definimos en la ecuación (2.1).

Definición 7.1.4 (Convexo)**.** En $\mathbb{R}^n$, se dice que un conjunto es ***convexo*** si para cada par de puntos $a, b \in E$, el segmento que los une también está en el conjunto.

Definición 7.1.5 (Estrellado)**.** En $\mathbb{R}^n$ definimos conjunto ***estrellado*** como un conjunto en el que existe un punto tal que el segmento de él a cualquier otro está en el conjunto.

Ejemplo 7.1.1 (Miscelánea)**.** Veamos algunos ejemplos de conjuntos conexos:

1. Los segmentos son conexos por ser la imagén continua de $[0,1]$, que es conexo, por la interpolación lineal, que es continua.
2. Si un conjunto es convexo entonces es estrellado, y si es estrellado entonces es conexo. Además, las implicaciones recíprocas no se verifican. En resumen

$$\text{Convexo} \implies \text{Estrellado} \implies \text{Conexo}$$

   En efecto, si A es convexo tomando cualquier punto como "centro de la estrella" se deduce que A es estrellado.

   Asimismo, si A es estrellado se puede escribir como

$$A = \bigcup_{a \in A} [a_0, a]$$

   para cierto $a_0 \in A$. Cada segmento $[a_0, a]$ es conexo, y, por tanto, por el teorema del pivote, como todos comparten el punto a_0, su unión es conexa.

   Nótese que ni la convexidad ni ser estrellado son propiedades topológicas; ambas son propiedades vectoriales: su definición solo tiene sentido en un espacio que, al menos, tenga estructura de espacio vectorial.

3. Una circunferencia en $\mathbb{R}^2$ es conexa, pero no es estrellada. En efecto, es conexa por ser la imagen de $[0, 2\pi]$ por la aplicación $t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t)$.
4. El grafo de la función $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ para $x > 0$, que escribimos:

$$C = \left\{ \left(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) \ : \ x > 0 \right\}$$

   es conexo por ser la imagen continua de $(0, \infty)$ por la aplicación:

$$x \mapsto \left(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right)$$

   Lo que es más interesante, para cualquier $a \in [-1, 1]$ se verifica que $\{(0, a)\}$ es adherente a C (es relativamente fácil de comprobar) y por tanto que $C \cup \{(0, a)\}$ es conexo.

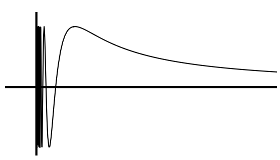


Figura 7.3: Ilustración de la gráfica de $\operatorname{sen}(1/x)$

5. Consideramos el conjunto:

$$C = \big(\{0\} \times (0,1]\big) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0,1] \times \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right) \tag{7.1}$$

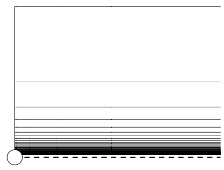


Figura 7.4: Ilustración del conjunto de la ecuación (7.1)

que es unión de segmentos horizontales cada vez más juntos y de un segmento vertical. Este es trivialmente conexo por el corolario 7.1.5. Lo particular es que si unimos a C el segmento horizontal:

$$(0,1) \times \{0\}$$

sigue siendo conexo por ser adherencia de C (¡compruébese!). $\diamondsuit$

Completamos esta sección con una propiedad interesante garantizada por la conexión.

Lema 7.1.8 (Cadena)**.** *Sea $\mathcal{X}$ conexo y $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos de $\mathcal{X}$. Dos puntos cualesquiera $x, y \in \mathcal{X}$ se pueden conectar mediante una cadena finita de abiertos del recubrimiento.*

Demostración. Sea $A = \{z \in \mathcal{X} \ : \ \text{existe una cadena de } x \text{ a } z\}$. A es claramente no vacío, puesto que $x \in A$. Por ende, nuestro objetivo será ver que $\mathcal{X} = A$. Una forma de hacerlo será ver que A es un clopen, ya que si lo fuera, por conexión de $\mathcal{X}$ y por ser A no vacío A tendría que ser el total.

- Veamos que A es abierto. En efecto, dado $z \in A$, queremos ver que existe un abierto U tal que $z \in U \subset A$. Si tomamos el último abierto U de la cadena que une x y z hemos ganado, ya que $U \subset A$, ya que todo punto de U queda unido con x con la misma cadena que z.
- Ahora la clausura. En efecto, si $z \in \overline{A}$, entonces habrá un abierto U_{i_0} tal que $U_{i_0} \cap A \neq \emptyset$. Considerando un punto y de la intersección, como y está en A, hay una cadena de x a y. Uniendo U_{i_0} a la cadena obtenemos una cadena de x a z, y por tanto $z \in A$, luego $A = \overline{A}$. ■

Este último resultado tiene una aplicación muy importante en los espacios euclídeos usuales.

Definición 7.1.6 (Poligonal)**.** Una ***poligonal*** en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto Γ de la forma

$$\Gamma = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-2}, x_{n-1}] \cup [x_{n-1}, x_n]$$

Donde $[x_i, x_j]$ representa el segmento que une a los puntos x_i y x_j. Nótese que por la variante de las cadenas del teorema del pivote una poligonal es conexa.

Definición 7.1.7 (Conexión por poligonales)**.** Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice ***conexo por poligonales*** si dados dos puntos cualesquiera $x, y \in A$, hay una poligonal Γ contenida en A que une a x y a y.

Observación 7.1.4 (Conexión y conexión por poligonales)**.** Todo conjunto conexo por poligonales es conexo. En efecto, si tomamos un punto a de A y consideramos la familia de poligonales (conexos) que conectan a a con el resto de puntos de A, tenemos que dicha familia tiene a $\{a\}$ por intersección, luego podemos aplicar el teorema del pivote, obteniendo que la unión de la familia, que es A, es conexa. $\diamondsuit$

Observación 7.1.5 (Abiertos y conexión por poligonales)**.** Podemos recubrir cualquier abierto conexo de $\mathbb{R}^n$ con bolas (véase el lema 1.7.5), y, por tanto existe una cadena de bolas que une cualquier par de puntos.

Si tomamos un punto en cada intersección entre bolas consecutivas de la cadena y consideramos los segmentos que los unen, tengo una poligonal que conecta los dos puntos.

De esta forma, para abiertos de $\mathbb{R}^n$ la conexión y la conexión por poligonales son nociones equivalentes. $\diamondsuit$

7.2. Componentes conexas

Al igual que ocurría con la compacidad, sería deseable que todos los espacios fuesen conexos. Dado que esto no se da, nos conformaremos con quedarnos con los subconjuntos conexos del espacio. Surge así la idea de componente conexa que definimos a continuación.

Aunque parezca que esto no es una ventaja, es tremendamente útil a la hora de estudiar, por ejemplo, si dos espacios son homeomorfos, ya que el número de componentes conexas se conserva por homeomorfismos (ver ejemplo 2.3.1).

Definición 7.2.1 (Componente conexa de un punto)**.** Se dice que un conjunto $\mathcal{C}(x) \subset \mathcal{X}$ es una ***componente conexa*** de $x \in \mathcal{C}(x)$ si es un conjunto conexo "maximal". Esto es, es el mayor conjunto conexo que contiene a x. En general, diremos que un conjunto $\mathcal{C}$ es una componente conexa si lo es de alguno de sus puntos (y por tanto de todos, véase la observación 7.2.3).

Análogamente a lo que hicimos con el interior y la adherencia en el capítulo 1, veamos que la componente conexa de un punto tiene una caracterización conjuntista muy sencilla.

Lema 7.2.1 (Caracterización conjuntista)**.** *Dado $x \in \mathcal{X}$, el conjunto $\mathcal{C}(x) = \bigcup_{A\subset\mathcal{X}} A$ con $x \in A$ y A conexo, es una componente conexa de x.*

Demostración. En efecto, $\mathcal{C}(x)$ es vacío, ya que $\{x\}$ es conexo. Además, la familia de conexos que conforma $\mathcal{C}(x)$ tiene al menos a $\{x\}$ en la intersección, luego, por el teorema de pivote, $\mathcal{C}(x)$ es conexo.

Por construcción es, además, maximal, ya que, si hubiera un conexo que lo contuviera, este contendría a x, y, por tanto, estaría $\mathcal{C}(x)$. ■

Observación 7.2.1 (Unicidad)**.** Cabe destacar que $\mathcal{C}(x)$ no es solo una componente conexa de x, sino **la** componente conexa de x.

En efecto, si hubiera otra, digamos E, tanto $\mathcal{C}(x)$ como E deben contener a x, luego su intersección será no vacía $E \cap \mathcal{C}(x) \neq \emptyset$. En tal caso, $A := E \cup \mathcal{C}(x)$ sería conexo por el teorema del pivote, y, como además $x \in A$, A estará en la familia que conforma $\mathcal{C}(x)$, luego $E \subset \mathcal{C}(x)$. Como E es una componente conexa se debe dar la igualdad. ♢

Observación 7.2.2 (Intersección y contención)**.** La observación 7.2.1, a parte de darnos la unicidad de la componente conexa de un punto, nos viene a decir, que si un conexo corta a la componente conexa, este debe estar contenido en ella. Este hecho puede sacarnos de algún que otro apuro. ♢

Observación 7.2.3 (Componente conexa compartida)**.** Nótese que pudiera haber varios puntos con la misma componente conexa, de hecho, todos los puntos de $\mathcal{C}(x)$ tienen a $\mathcal{C}(x)$ por componente conexa. En efecto, sea $y \in \mathcal{C}(x)$, llamemos $\mathcal{C}(y)$ a su componente conexa. Es claro que, por la caracterización conjuntista $\mathcal{C}(x) \subset \mathcal{C}(y)$, luego, $x \in \mathcal{C}(y)$, $\mathcal{C}(y)$ es un conexo que contiene a x, por tanto, debe estar contenido en su componente conexa, es decir $\mathcal{C}(y) \subset \mathcal{C}(x)$.

En definitiva podemos concluir que una componente conexa lo es de todos sus puntos y de ninguno más (obviamente). En particular, si un espacio es conexo, es la componente conexa de todos sus puntos. ♢

A continuación enunciamos y demostramos algunas propiedades de las componentes conexas.

Lema 7.2.2 (Propiedades varias)**.** *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico, entonces:*

1. *Las componentes conexas son cerradas.*

2. *Las componentes conexas son una partición del espacio. Es decir, son disjuntas dos a dos y su unión es el total.*

3. *Si $\mathcal{X}$ tiene un número finito de componentes conexas, estas son abiertas.*

4. *Si en $\mathcal{X}$ todo punto tiene un entorno conexo, entonces las componentes conexas de $\mathcal{X}$ son abiertas.*

Demostración. Demostremos esto como si fuéramos a emparedar a alguien, ladrillo a ladrillo, en este caso, apartado a apartado.

1. Sea $\mathcal{C}(x)$ componente conexa. Como es conexo, su adherencia es conexa (véase el teorema del sandwich 7.1.7), y por ser maximal $\mathcal{C}(x) = \overline{\mathcal{C}(x)}$.

2. Es claro que
$$\mathcal{X} = \bigcup_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{C}(x)$$
Además, dadas dos componentes conexas, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, si $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \neq \emptyset$ entonces $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$ y por ser maximales se daría la igualdad.

3. Por hipótesis $\mathcal{X} = \mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_r$ siendo la unión disjunta. Entonces, para cada $i \in \{1, \cdots r\}$ se tiene que
$$\mathcal{C}_i = \mathcal{X} \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_{i-1} \cup \mathcal{C}_{i+1} \cup \cdots \cup \mathcal{C}_r) =: \mathcal{X} \setminus \mathcal{C}$$
Como cada componente conexa es cerrada, y además, la unión finita de cerrados es cerrada, $\mathcal{C}$ es cerrado, luego como $\mathcal{C}_i = \mathcal{X}\setminus\mathcal{C}$, es claro que $\mathcal{C}_i$ es abierto para todo i.

4. Sea $\mathcal{C}$ componente conexa de $\mathcal{X}$, veamos que es entorno de todos sus puntos. Sea $x \in \mathcal{C}$. Por hipótesis existe $\mathcal{V}$ entorno conexo de x, con lo cual $\mathcal{V} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Esto implica que $x \in \mathcal{V} \subset \mathcal{C}$, con lo que $\mathcal{C}$ es entorno de x. ■

Veamos ahora una serie de ejemplos para familiarizarnos con estos conceptos.

Ejemplo 7.2.1 (Sucesión armónica)**.** Estudiemos las componentes conexas del espacio topológico compuesto por el rango de la sucesión armónica y su límite $\mathcal{X} := \{0\} \cup \{1/n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

Evidentemente, los puntos son conexos, el reto será pues, ver si puede haber una componente conexa $\mathcal{C}$ con dos puntos distintos, digamos x e y, sin pérdida de generalidad $x < y$.

Si $\mathcal{C}$ fuera conexo, por la caracterización de los conexos de la recta, debería contener a todos sus puntos intermedios, no obstante es claro que $y = 1/n_0$ para cierto $n_0 \in \mathbb{N}$, luego tomando el punto medio c entre $\frac{1}{n_0+1}$ e y tenemos que c es un punto entre x e y que no está en $\mathcal{X}$ y por tanto no está en $\mathcal{C}$. Luego los únicos conexos de $\mathcal{X}$ son los puntos.

Además, se comprueba fácilmente que las componentes conexas de $\{1/n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ son abiertas, no obstante la componente conexa $\{0\}$ no es abierta (¡compruébese!). ♢

Razonando de manera similar podemos estudiar las componentes conexas de $\mathbb{Q}$.

Ejemplo 7.2.2 (Racionales)**.** Por densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ entre dos irracionales siempre hay un racional, luego las únicas componentes conexas de $\mathbb{Q}$ son los puntos. Además, ninguna de estas componentes es abierta. Esto último también se deduce de la densidad de $\mathbb{Q}$. ♢

Los dos ejemplos anteriores estudiaban las componentes conexas de espacios numerables, viendo que las únicas componentes conexas eran los propios puntos. Nos preguntaremos si pudiera ocurrir esto también con espacios no numerables.

Ejemplo 7.2.3 (Discontinuo de Cantor)**.** Aunque no lo demostraremos aquí, el conjunto de Cantor K, que tantas propiedades nos esconde, es no numerable y sus componentes conexas son los puntos. ♢

Veamos otro ejemplo (esta vez más sencillo) de este fenómeno.

Ejemplo 7.2.4 (Sorgenfrey)**.** La recta de Sorgenfrey tiene por componentes conexas a los puntos, esto se debe, como veremos en el lema 7.2.3, a que la recta de Sorgenfrey es T_0 (de hecho T_2) y tiene una base de clopens (ver ejemplo 1.6.3). ♢

A la luz de este último ejemplo, brota cual tubérculo el siguiente lema.

Lema 7.2.3 (Bases de clopens)**.** *Si $\mathcal{X}$ es T_0 y tiene una base $\mathcal{B}$ de clopens, entonces sus componentes conexas son los puntos, es decir, es **totalmente disconexo**.*

Demostración. Si hubiera un conexo A con dos puntos distintos, digamos a y b, al ser $\mathcal{X}$ T_0, habrá un entorno B en A, sin pérdida de generalidad de a, que podremos tomar básico (luego clopen), tal que no contiene a b. Luego $b \in A \setminus B$. Como B es clopen, $A \setminus B$ también lo será. Luego acabamos de particionar A con dos clopens no triviales, en contra de su conexión. ■

7.3. Comportamiento de la conexión

Llegados a este punto, para estudiar el comportamiento topológico no tenemos que hacer prácticamente nada. En efecto, veámoslo punto por punto.

- Es claro que la conexión no se traslada a subespacios (no todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ son intervalos).
- Por su parte, como la imagen continua de conexos es conexa, los cocientes, que no son más que imágenes continuas drásticas, serán también conexos.
- En cuanto a la suma, ya demostramos en la observación 3.4.1 que cada sumando era un clopen, luego ya en el caso de espacios suma de dos sumandos obtenemos una partición del conjunto en dos clopens. Luego la suma nunca es conexa.

Demostremos ahora con más calma que el producto de espacios conexos es conexo, para lo cual usaremos a nuestro querido teorema del pivote.

Proposición 7.3.1 (Conexión y productos)**.** *Si $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ son conexos, entonces $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ es conexo.*

Demostración. Para cualquier $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$ es claro que $A_y := \mathcal{X} \times \{y\}$ y $B_x := \{x\} \times \mathcal{Y}$ son conjuntos conexos por ser copias homeomorfas de $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ respectivamente. Además, se tiene $A_y \cap B_x = (x, y)$, luego no vacía. Aplicando el teorema del pivote tenemos que $C_{(x,y)} = A_y \cup B_x$ es conexo. Tomando la familia de estos conjuntos, que es claro que se intersecan dos a dos y cubren el espacio, podemos aplicar el corolario 7.1.5 para deducir que $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ es conexo. ■

Recapitulemos todo lo visto con una tabla.

	Subespacios	**Cociente**	**Producto**	**Suma**
Conexión	No	Sí*	Sí	No

Tabla 7.1: Tabla resumen de conexión.

7.4. Local–conexión

Vamos a definir la conexión local basándonos en la filosofía de la compacidad local.

Definición 7.4.1 (Conexión local)**.** Un espacio $\mathcal{X}$ se dice localmente conexo si cada uno de sus puntos tiene una base de entornos conexos.

Presentemos un criterio general que caracteriza a los espacios localmente conexos.

Proposición 7.4.1 (Caracterización)**.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *$\mathcal{X}$ es localmente conexo.*
2. *Las componentes conexas de todo abierto de $\mathcal{X}$ son abiertas.*
3. *Todo punto de $\mathcal{X}$ tiene una base de entornos conexos y abiertos.*

Demostración. Realicemos el habitual círculo económico de implicaciones.

$\boxed{(1) \implies (2)}$ Sea G un abierto de $\mathcal{X}$ y $\mathcal{C}$ una componente conexa de G. Sea $x \in \mathcal{C}$, al ser G abierto, es entorno de todos sus puntos, y, por ser $\mathcal{X}$ localmente conexo, habrá un $\mathcal{V}$ entorno conexo de x tal que $x \in \mathcal{V} \subset G$. Como $V \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ ya que x está en ambos conjuntos, y al ser $\mathcal{C}$ la componente conexa de x se tiene que $V \subset \mathcal{C}$, con lo que se tiene el resultado.

$\boxed{(2) \implies (3)}$ Dado $x \in \mathcal{X}$, consideremos el conjunto de sus entornos abiertos conexos $\mathcal{V}_x$, veamos que es una base de entornos. En efecto, dado un entorno abierto de x, digamos U, x estará en alguna de las componentes conexas $\mathcal{C}$ de U, que por hipótesis son abiertas, luego $\mathcal{C} \in \mathcal{V}_x$.

$\boxed{(3) \implies (1)}$ Es evidente. ■

7.5. Comportamiento de la local–conexión

Lamentablemente, el estudio del comportamiento topológico de la conexión local no será tan sencillo como el de la conexión. Sin embargo a estas alturas ya no debería importarnos mucho, el lector ya debería estar curado de espanto.

En primer lugar cabe destacar que la imagen continua de un conjunto localmente conexo no necesariamente es localmente conexo. Sin embargo, la local–conexión se hereda a los cocientes.

Proposición 7.5.1 (Local–conexión y cocientes). *Sea $\mathcal{X}$ localmente conexo y $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ una identificación. Entonces, $\mathcal{Y}$ es localmente conexo.*

Demostración. Para comprobar esto echaremos mano de la caracterización de la local–conexión y comprobaremos que las componentes conexas de los abiertos de $\mathcal{Y}$ son abiertas.

Sea G un abierto de $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{C}$ una componente conexa de G. Como f es una identificación $\mathcal{C}$ será abierta si y solo si $f^{-1}(\mathcal{C})$ es abierto. Sea pues $x \in f^{-1}(\mathcal{C})$.

Al ser f continua $f^{-1}(G)$ es abierto. Como $\mathcal{X}$ es localmente conexo, habrá un entorno conexo V que verifique que $x \in V \subset f^{-1}(G)$. Si aplicamos f a la última desigualdad, al ser f sobreyectiva se tiene que $f(V) \subset G$, siendo $f(V)$ un conexo contenido en G por ser f continua.

Como tanto $f(V)$ como $\mathcal{C}$ contienen a $f(x)$ es claro que se cortan, luego por la observación 7.2.2 se verifica que $f(x) \in f(V) \subset \mathcal{C}$, con lo que $\mathcal{C}$ es entorno de todos sus puntos. ■

Aunque la conexión local se comporta peor que la conexión con los cocientes, se comporta un poco mejor con los subespacios, no llegándose a heredar la local–conexión a todos ellos.

Lema 7.5.2 (Subespacios y local–conexión). *Si A es un subespacio abierto de $\mathcal{X}$, siendo $\mathcal{X}$ localmente conexo, entonces A es localmente conexo.*

Demostración. Como x tiene una base de entornos $\mathcal{V}_x$ conexos abiertos, tomando la base relativa $\mathcal{V}_x \cap A$, veamos que es de entornos conexos.

Como U es abierto en A si y solo si lo es en $\mathcal{X}$ (véase el lema 1.7.5), si no hay dos abiertos en $\mathcal{X}$ que particionen a los entornos de $\mathcal{V}_x$, tampoco los habrá que partan a los entornos $\mathcal{V}_x \cap A$, ya que es la subfamilia de los entornos de $\mathcal{V}_x$ contenidos en A. ■

Observación 7.5.1 (Contraejemplo). Para ver que la conexión local no se hereda en general, basta ver que $\mathbb{R}$ es localmente conexo ya que cada punto posee una base de intervalos, pero su subespacio $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ no es localmente conexo al no tener 0 una base de entornos conexos y abiertos. Esto es claro ya que el único conexo que es entorno de 0 es el propio $\{0\}$, que no es abierto (¡compruébese!). ♢

Ahora le toca el turno a los productos y las sumas, que estudiaremos brevemente.

- El producto de espacios localmente conexos es localmente conexo, esto se debe a que las bases de entorno del producto son productos de bases de entornos de los factores. Tomando la base de conexos correspondiente de cada factor, como el producto de conexos es conexo, se tiene el resultado.

- La suma de espacios localmente conexos es localmente conexa.

  En efecto, tomando un punto cualquiera x del espacio suma, este estará en alguno de los estantes, que son homeomorfos a los sumandos vía las inclusiones. Como los sumandos son localmente conexos, $p_i^{-1}(x)$ tiene una base de entornos conexos, que se transforma por p_i en una base de entornos conexos de x por ser p_i continua.

Condensando todo lo visto, presentamos el resumen en forma de tabla.

	Subespacios	**Cociente**	**Producto**	**Suma**
Local conexión	Sí, en el caso de abiertos	Sí	Sí	Sí

Tabla 7.2: Tabla resumen de local conexión

Presentamos para terminar un ejemplo con objeto de aumentar la curiosidad del lector.

Ejemplo 7.5.1 (Conexión local y por poligonales)**.** El espacio $\mathcal{X} := C \cup \{(0,0)\}$ donde C es el conjunto definido en la ecuación (7.1) no es localmente conexo pero si es conexo por poligonales.

La conexión por poligonales es evidente, dados dos puntos de X, si están en la misma recta horizontal basta con coger el segmento que los une.

En caso contrario, bastaría con tomar el segmento horizontal que une al primer punto con $\{0\} \times [0,1]$, enlazándolo con el segmento vertical que llega hasta la altura del segundo punto, y, finalmente, enganchar este último al segmento horizontal que une $\{0\} \times [0,1]$ con el segundo punto.

La demostración de que no es localmente conexo es una adaptación de la demostración de que $\{1/n \,:\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ no es localmente conexo. Los detalles se dejan al lector. $\diamondsuit$

Capítulo 8

Conexión por caminos

	Subespacios	**Cociente**	**Producto**	**Suma**
Conexo por caminos	No	Sí	Sí	No
Localmente conexo por caminos	Sí, en el caso de abiertos	Sí	Sí	Sí

Tabla 8.1: Tabla resumen de conexión por caminos

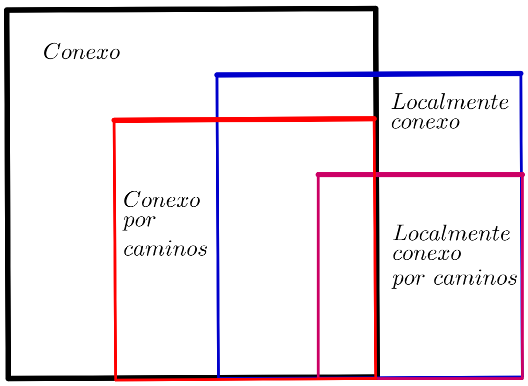


Figura 8.1: Ilustración de las relaciones entre las diferentes nociones de conexión.

Parte II

Topología algebraica

Capítulo 9

Grupo fundamental

La topología algebraica comprende métodos que son significativamente distintos a los empleados hasta ahora en topología general. Intenta asignar a un espacio topológico algún invariante algebraico (por ejemplo, un grupo) y utilizar las propiedades de este invariante para obtener información sobre la topología. Este capítulo se centrará, pues, en el estudio del grupo fundamental, que es uno de estos invariantes.

9.1. Homotopía

En particular, introducimos la homotopía con el propósito de definir más adelante la noción de grupo fundamental. Dos caminos son, intuitivamente, homótopos si podemos deformar uno en el otro de forma continua.

Definición 9.1.1 (Homotopía)**.** Una ***homotopía*** es una aplicación continua $H : \mathcal{Y} \times [0,1] \to \mathcal{X}$. Escribimos $H_s(y) \coloneqq H(y,s)$.

Definición 9.1.2 (Funciones homótopas)**.** Sean $f, g : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ aplicaciones. Escribimos $H : f \simeq g$ para denotar, si existe, una homotopía que verifica $H(y,0) = H_0(y) = f(y)$, $H(y,1) = H_1(y) = g(y)$. Si efectivamente existe, decimos que f y g son ***homótopas***.

Observación 9.1.1 (Caminos homótopos)**.** Un caso particular importantísimo de homotopía es la homotopía de caminos. Como se sigue directamente de la definición de homotopía, dos caminos $\sigma, \tau : [0,1] \to \mathcal{X}$ son homótopos si existe una homotopía $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathcal{X}$, de forma que $H_0 \equiv \sigma$ y $H_1 \equiv \tau$. ♢

Proposición 9.1.1. *La homotopía $\simeq$ es una relación de equivalencia.*

Demostración. Basta ver que es reflexiva, simétrica y transitiva:

1. Es reflexiva, pues, dada una función f, la homotopía $H_s(y) = f(y)$ es, en efecto, homotopía entre f y f.

2. Es simétrica, ya que dadas funciones $f \simeq g$ relacionadas por una homotopía H, consideramos $H'_s(y) = H_{1-s}(y)$, que es una homotopía $g \simeq f$.

3. Es transitiva, ya que, dadas funciones $f \simeq g$, $g \simeq h$, con homotopías H^1, H^2, definimos:

$$H_s(y) = \begin{cases} H^1_{2s}(y) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ H^2_{2s-1}(y) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

que está bien definida y es homotopía, de forma que $f \simeq h$. ■

Definición 9.1.3 (Nulhomótopa)**.** Decimos que una aplicación $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ es ***nulhomótopa*** si f es homótopa a alguna aplicación constante.

Ejemplo 9.1.1 (Nulhomotopías en convexos)**.** Consideramos $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ convexo. En este caso, cualquier aplicación $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ continua es nulhomótopa.

En efecto, sea $a \in X$. Consideramos la homotopía:

$$H_s = (1-s)f + sa$$

que está definida en $\mathcal{X}$, pues, al ser este convexo, $[f(y), a] \subset \mathcal{X}$ para cualquier $\mathcal{Y}$. Entonces, se verifica:

$$H_0(y) = f(y)$$
$$H_1(y) = a$$

que es precisamente lo que buscábamos. Nótese que si $\mathcal{X}$ es estrellado en lugar de convexo, se verifica la misma propiedad y la demostración es totalmente análoga, tomando a el "centro" del estrellado.

La homotopía definida de esta forma se llama ***interpolación lineal***, y es asombrosamente útil teniendo en cuenta su sencillez. Merece la pena notar que, cuando está bien definida, es siempre homotopía. Sin embargo, habrá muchos contextos en los que no esté bien definida. ♢

Definición 9.1.4 (Contráctil)**.** Decimos que un espacio topológico $\mathcal{X}$ es ***contráctil*** si $\mathrm{Id}_{\mathcal{X}}$ es nulhomótopa.

Observación 9.1.2. Como, por el ejemplo 9.1.1, sabemos que todas las aplicaciones que llegan a un espacio convexo o estrellado son nulhomótopas, entonces está claro que cualquier convexo o estrellado es contráctil. ♢

La siguiente proposición sirve al mismo tiempo como ejemplo y como enunciado de un resultado que nos será útil un poco más adelante.

Proposición 9.1.2. *Si $f, g : \mathcal{Y} \to \mathbb{S}^n$ continuas verifican que $f(y) \neq -g(y)\ \forall y \in \mathcal{Y}$ (es decir, f y g no tienen puntos antipodales), entonces $f \simeq g$. En particular, si $f : \mathcal{Y} \to \mathbb{S}^n$ no es sobreyectiva, entonces es nulhomótopa.*

Demostración. Definimos la homotopía H como:

$$H_s(y) = \frac{(1-s)f(y) + sg(y)}{\|(1-s)f(y) + sg(y)\|}$$

Desde luego,está siempre en $\mathbb{S}^n$ como debe ocurrir. Entonces, solo falta para ver que está bien definida probar que existe en todo punto, y para ello necesitaremos la hipótesis.

En efecto, las imágenes de f y g son puntos de la esfera unidad, y por tanto son vectores de norma 1. Si $f(y)$ y $g(y)$ no son puntos antipodales, entonces hay dos opciones:

- $f(y) = g(y)$, pero como $s > 0$, $1 - s > 0$ es imposible que $(1-s)f(y) + sg(y) = 0$.
- $f(y)$ y $g(y)$ son linealmente independientes, luego ninguna combinación lineal suya con coeficientes no nulos puede sumar 0.

Y ya hemos terminado, porque está bien definida y desde luego es continua (al ser f, g continuas, y la norma una función continua, es continua por ser suma, producto y cociente de aplicaciones continuas en $\mathbb{R}^n$). Entonces es homotopía.

Para el caso particular, consideramos a tal que $-a \notin f(\mathcal{Y})$, lo cual podemos conseguir por no ser sobreyectiva. Solo queda definir la homotopía anterior con $g \equiv a$. ■

Observación 9.1.3. El hecho de que si $f : \mathcal{Y} \to \mathbb{S}^n$ no es sobreyectiva entonces es nulhomótopa se puede plantear desde el punto de vista de la naturaleza topológica de la esfera. En efecto, $f(\mathcal{Y}) \subset \mathbb{S}^n \setminus \{b\}$ para algún punto b, y resulta que hemos demostrado que esto es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, que es convexo y por tanto contráctil. ♢

A veces, nos interesará que la homotopía entre dos funciones mantenga invariante alguna propiedad extra. En particular, solemos necesitar que algunos puntos no se muevan de su posición al homotopar.

Definición 9.1.5 (Homotopía relativa)**.** Una homotopía $H : \mathcal{Y} \times [0,1] \to \mathcal{X}$ se llama ***relativa*** a un subconjunto $A \subset \mathcal{Y}$ cuando $H_s(a) = H_0(a)$ $\forall a \in A$. En particular, $H_0 \equiv H_1$ en A. Se suele escribir $H_s : f \underset{A}{\simeq} g$.

La definición que sigue, caso particular de la anterior, es absolutamente imprescindible para el estudio del grupo fundamental que vamos a realizar a lo largo de esta sección.

Definición 9.1.6 (Homotopía de extremos fijos)**.** Decimos que dos caminos $\sigma, \tau : [0,1] \to \mathcal{X}$ son ***homótopos con extremos fijos*** si son homótopos relativos a $\{0,1\}$, es decir, si $\sigma \underset{\{0,1\}}{\simeq} \tau$.

Ejemplo 9.1.2. La interpolación lineal produce homotopías relativas. En efecto, consideramos la homotopía:

$$H_s = (1-s)f + sg$$

Si $f(a) = g(a)$ para algún $a \in \mathcal{Y}$, entonces resulta que:

$$H_s(a) = (1-s)f(a) + sg(a) = f(a) = g(a)$$

En particular, en $\mathbb{R}^n$, cualquier par de caminos cuyos extremos coincidan son homótopos con extremos fijos. De esta forma, en cualquier espacio $\mathcal{X}$ homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ por un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \to \mathcal{X}$, cualesquiera dos caminos cuyos extremos coincidan son homótopos con extremos fijos. En efecto, podemos fabricar la homotopía fácilmente: sean σ, τ los caminos en $\mathcal{X}$. Consideramos α, β caminos en $\mathbb{R}^n$, de forma que verifiquen que $\sigma = h \circ \alpha$, $\tau = h \circ \beta$. Como α y β comparten extremos y están en $\mathbb{R}^n$, son homótopos con extremos fijos, y dada la homotopía H_s, resulta que $h \circ H_s$ es homotopía entre σ y τ. ♢

9.2. Esferas

El estudio de las homotopías en las esferas es interesante como ejemplo, y permite, basándose tan solo en lo visto en la anterior sección, demostrar un resultado no trivial.

Empezamos definiendo formalmente la esfera, para aclarar la notación.

Definición 9.2.1 (Esfera)**.** Llamamos ***esfera*** de dimensión n y denotamos $\mathbb{S}^n$ al subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídea. Cuando se considera como espacio topológico es con la restricción de la topología usual, si no se especifica otra.

Observación 9.2.1. Si bien la esfera de la definición anterior es la esfera unidad, nótese que todas las esferas de cualquier radio y centradas en cualquier punto de $\mathbb{R}^{n+1}$ son homeomorfas a la esfera que hemos definido. ♢

El resultado no trivial que mencionábamos en la introducción de esta sección es el siguiente:

Proposición 9.2.1. *Dos caminos en una esfera $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$, que tengan los mismos extremos son homótopos con extremos fijos.*

Demostración. Consideramos los caminos $\sigma, \tau : [0,1] \to \mathbb{S}^n$, tales que $\sigma(0) = \tau(0)$ y $\sigma(1) = \tau(1)$. Para probar que son homótopos con extremos fijos, basta con probar que existe un punto $a \in \mathbb{S}^n$ tal que $a \notin \sigma, \tau$. Ya hemos comprobado antes que esto es suficiente (FALTA CITA).

Entonces, vamos a separar la esfera en dos abiertos U y V, de forma que $\mathbb{S}^n = U \cup V$. Para un cierto $a \in \mathbb{S}^n$, tal que ni a ni $-a$ es uno de los extremos del camino, elegimos U y V tales que:

$$\begin{cases} U = \mathbb{S}^n \setminus \{a\} \\ V = \mathbb{S}^n \setminus \{-a\} \end{cases}$$

es decir, U es la esfera quitando un punto y V es la esfera quitando el punto antipodal al anterior. De esta forma, ya hemos visto el hecho de que tanto U como V son homeomorfos a $\mathbb{R}^n$, por ser la esfera sin un punto (FALTA CITA, sé que lo hemos visto en clase pero no lo he encontrado). De esta forma, $U \cap V \approx \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, puesto que una esfera sin un punto es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, y por tanto una esfera sin dos puntos es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ sin un punto. Además, como $n \geq 2$, sabemos que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es conexo por caminos, y entonces también lo es $U \cap V$.

Podemos encontrar una partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = 1$ del intervalo $[0, 1]$ que verifique que $\sigma([t_{i-1}, t_i]) \subset U$ o V para cada i. En efecto, sabemos que $\{\sigma^{-1}(U), \sigma^{-1}(V)$ es recubrimiento abierto de $[0, 1]$. Por el lema de Lebesgue (lema **??**), que podemos aplicar por ser $[0, 1]$ un espacio métrico compacto (y por tanto, por la observación 6.1.5, secuencialmente compacto), para cada $x \in [0, 1]$ $\exists \epsilon > 0$ que cumple que $\mathrm{B}(x, \epsilon) \subset \sigma^{-1}(U)$ o $\sigma^{-1}(V)$. Con lo cual, tomamos la partición anterior de forma que $t_i - t_{i-1} < \epsilon\ \forall i$, y entonces tenemos que, para x en el intervalo:

$$x \in [t_{i-1}, t_i] \subset B(x, \epsilon) \subset \sigma^{-1}(U) \text{ o } \sigma^{-1}(V)$$

Por tanto, cada intervalo de la partición está en $\sigma^{-1}(U)$ o $\sigma^{-1}(V)$. Además, eliminando las divisiones innecesarias tenemos una partición que alterna estar en $\sigma^{-1}(U)$ y en $\sigma^{-1}(V)$.

Sea $x_0 \in U \cap V$. Vamos a homotopar los segmentos en V a segmentos en U. Para cada i tal que $\sigma\restriction_{[t_{i-1}, t_i]} \subset V$, definimos $x_{i-1} = \sigma(t_{i-1})$, $x_i = \sigma(t_i)$. Resulta que $x_{i-1}, x_i \subset U \cap V \approx \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Como ya hemos visto que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es conexo por caminos, entonces necesariamente existe $\sigma_i : [t_{i-1}, t_i] \to U \cap V$ camino entre x_{i-1} y x_i. De esta forma, los caminos $\sigma\restriction_{[t_{i-1}, t_i]}$ y σ_i son homótopos en $V \approx \mathbb{R}^n$, con lo cual son homótopos con extremos fijos en $V \subset \mathbb{S}^n$. Repitiendo el argumento para cada segmento de V, reemplazándolo por el correspondiente σ_i, obtenemos un nuevo camino $\widetilde{\sigma} \subset U$ y claramente $\sigma \simeq \widetilde{\sigma}$ con extremos fijos.

Por último, repetimos todo el argumento anterior con τ, y por tanto $\exists \widetilde{\tau}$ tal que $\tau \simeq \widetilde{\tau}$ con extremos fijos y $\widetilde{\tau} \subset U \approx \mathbb{R}^n$. Entonces, $\widetilde{\sigma} \approx \widetilde{\tau}$ con extremos fijos en $U \subset \mathbb{S}^n$ y, por ser $\simeq$ con extremos fijos de equivalencia, $\sigma \simeq \tau$ con extremos fijos. ■

Un resultado muy relacionado ha sido un problema abierto hasta hace muy poco tiempo:

Conjetura 9.2.2 (Poincaré)**.** *La propiedad de la proposición 9.2.1 caracteriza a la esfera $\mathbb{S}^3$. Esto es, si una variedad de dimensión 3 de $\mathbb{R}^4$ verifica que cualquier par de caminos en ella que tengan los mismos extremos son homótopos con extremos fijos, entonces es homeomorfa a la esfera unidad.*

La versión generalizada de esta conjetura, para la esfera $\mathbb{S}^n$, también es cierta y tiene interés. Históricamente:

- Para $n = 2$, el resultado se conoce desde el siglo XIX.
- Para $n = 5$, Zeeman lo demostró en 1961.
- Para $n \geq 6$, Smale lo demostró en 1961.
- Para $n = 4$, Donaldson lo demostró en 1985.
- Para $n = 3$, la versión original de la conjetura, Perelman lo demostró en 2006. La conjetura era uno de los 7 problemas del milenio, dotados con 1.000.000$. Perelman rechazó tanto este premio como la medalla Fields que se le intentó conceder por demostrar la conjetura.

9.3. *General nonsense.* Funtorialidad

El objetivo principal de esta sección es aplicar las ideas de teoría de categorías a los conceptos que hemos ido viendo a lo largo de este capítulo. Así, se recomienda leer antes el anexo B, que contiene una brevísima introducción a los conceptos más básicos de teoría de categorías. Esta no solo define los conceptos básicos como categoría o funtor sino que puede ayudar al lector a comprender el propósito detrás de este punto de vista, que a primera vista puede parecer terriblemente abstracto.

Construcción 9.3.1 (Interpretación funtorial del grupo fundamental)**.** En esta sección, vamos a considerar dos categorías. La primera de ellas es la categoría de espacios topológicos punteados $\mathbf{Top}_*$, cuyos objetos son:

$$\{((\mathcal{X}, \mathcal{T}), x_0) \ : \ (\mathcal{X}, \mathcal{T}) \text{ espacio topológico}, x_0 \in \mathcal{X}\}$$

y en la cual los morfismos son las funciones continuas que preservan el punto base x_0. La segunda de ellas la categoría de los grupos **Grp**, que tiene por objetos:

$$\{(G,\cdot)\ :\ (G,\cdot)\ \text{grupo}\}$$

y por morfismos los homomorfismos de grupos.

Entonces, consideramos tomar el grupo fundamental como un funtor. Es decir, consideramos el funtor π:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Top}_* \arrow[r, "\pi"] & \mathbf{Grp}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathcal{X},x_0) \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, "f\ \text{cont.}"'] \arrow[dd, mapsto] & \pi(\mathcal{X},x_0) \arrow[dd, "f^*"', "\text{homom.}"] & \ni & {[\sigma]} \arrow[dd, mapsto] \\
{[0,1]} \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[dr, "f\circ\sigma"'] & & & & \\
 & (\mathcal{Y},y_0) \arrow[r, mapsto] & \pi(\mathcal{Y},y_0) & \ni & {[f\circ\sigma]}
\end{tikzcd}$$

Nótese que denotamos f^* al homomorfismo de grupos que es imagen de una aplicación continua f por el funtor π. Como se aprecia en el diagrama, este homomorfismo f^* se define, para una clase de equivalencia de caminos, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f^* : (\mathcal{X},x_0) &\to (\mathcal{Y},y_0) \\ [\sigma] &\mapsto [f\circ\sigma] \end{aligned}$$

Hay que comprobar, entonces, que está bien definido. En efecto, consideramos la aplicación f^* que acabamos de definir. Desde luego, si σ es un lazo con base x_0, $f\circ\sigma$ es un lazo con base y_0. Para ver si respeta la homotopía, consideramos $\tau:[0,1]\to(\mathcal{X},x_0)$ homótopo con extremos fijos con σ a través de la homotopía H. Entonces, $f\circ H$ es una homotopía entre $f\circ\sigma$ y $f\circ\tau$. Por último, comprobamos que es homomorfismo, lo cual es directo comprobando que $f\circ(\sigma*\tau)=(f\circ\sigma)*(f\circ\tau)$.

Además, hay que ver que es un funtor, esto es, que cumple:

- $(g\circ f)^*=g^*\circ f^*$. En efecto, consideramos el lazo σ con base en x_0. Sabemos que:

  $$(g\circ f)\circ\sigma=g\circ(f\circ\sigma)$$

  y tomando la imagen de σ por $(g\circ f)^*$:

  $$(g\circ f)^*([\sigma])=[(g\circ f)\circ\sigma]=[g\circ(f\circ\sigma)]=g^*([f\circ\sigma])=g^*(f^*([\sigma]))$$

  como queríamos comprobar.

- $(\mathrm{Id}_{\mathcal{X}})^*=\mathrm{Id}_{\pi(\mathcal{X},x_0)}$. Esto se verifica directamente por como hemos definido f^*.

$\diamondsuit$

Visto todo lo necesario, podemos pasar a comprobar una serie de propiedades utilizando el punto de vista introducido en la construcción anterior. La teoría de categorías es capaz a menudo de simplificar demostraciones al considerar los objetos abstractos, lo cual es una de sus grandes fortalezas. Vamos a ver ahora una serie de proposiciones que al mismo tiempo son ejemplos, pues muestran como enfocaríamos una demostración desde este nuevo punto de vista. Sin embargo, no dejan de ser resultados interesantes por sí mismos.

Proposición 9.3.1. *El funtor grupo fundamental manda homeomorfismos en isomorfismos de grupos. En particular, si dos espacios tienen distinto grupo fundamental, entonces no son homeomorfos.*

Demostración. Sean $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ dos espacios topológicos punteados con x_0, y_0, y f un homeomorfismo entre ellos de forma que:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \arrow[r, "f", "\text{homeo.}"'] & \mathcal{Y} \arrow[r, "g=f^{-1}"] & \mathcal{X} \\
x_0 \arrow[r, mapsto] & y_0 \arrow[r, mapsto] & x_0
\end{tikzcd}$$

Ahora, tenemos que:

$$g^* \circ f^* = (g \circ f)^* = (\mathrm{Id}_{\mathcal{X}})^* = \mathrm{Id}_{\pi(X)}$$
$$f^* \circ g^* = (f \circ g)^* = (\mathrm{Id}_{\mathcal{Y}})^* = \mathrm{Id}_{\pi(Y)}$$

y con esto hemos comprobado que g^* es la inversa de f^*, luego f^* es isomorfismo. ■

Proposición 9.3.2. *Un retracto, como veremos con detalle más adelante, es un subespacio tal que existe una aplicación continua que deforma el espacio en él, como se aprecia en el siguiente esquema:*

$$\begin{tikzcd} A \subset \mathcal{X} \arrow[d, "\rho\ retracto"] \arrow[d, shift right=2, "\rho\restriction_A = \mathrm{Id}"'] \\ A \end{tikzcd}$$

Entonces, la imagen ρ^* de ρ por π es un homomorfismo sobreyectivo. En particular, si el grupo fundamental del retracto A es no trivial, entonces el grupo fundamental del espacio $\mathcal{X}$ tampoco es trivial.

Demostración. Para la demostración, consideramos la imagen por π del diagrama anterior, donde A y $\mathcal{X}$ tienen el mismo punto base $x_0 \in A$:

$$\begin{tikzcd} \pi(A, x_0) \arrow[r, "j^*"] \arrow[dr, "(\rho\restriction_A)^* = \mathrm{Id}_{\pi(A)}"'] & \pi(\mathcal{X}, x_0) \arrow[d, "\rho^*"] \\ & \pi(A, x_0) \end{tikzcd}$$

donde j es la aplicación inclusión de A en $\mathcal{X}$. Como por las propiedades de los funtores $\rho^* \circ j^* = (\rho \circ j)^*$, el diagrama anterior conmuta, es decir:

$$\rho^* \circ j^* = \mathrm{Id}_{\pi(A)}$$

Ahora, como $\mathrm{Id}_{\pi(A)}$ es biyectivo, y en particular sobreyectivo, $\rho^* \circ j^*$ también debe ser sobreyectivo, y entonces necesariamente ρ^* lo es. ■

Un caso donde se puede aplicar la proposición anterior es el siguiente.

Ejemplo 9.3.1. Consideramos el disco cerrado $\overline{D}_2 \subset \mathbb{R}^2$. Queremos comprobar que el disco no se puede retraer a $A = \mathbb{S}^1 = \partial \overline{D}_2$. Como veremos más adelante, $\pi(A) = \pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$, y ya sabemos que $\pi(\overline{D}_2) = \{1\}$, pues es un estrellado en $\mathbb{R}^n$. Entonces, si fuera retracto, habría un homomorfismo sobreyectivo del grupo trivial a $\mathbb{Z}$, y esto es imposible. ♢

Proposición 9.3.3. *Dados dos espacios $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, el grupo fundamental del producto es isomorfo al producto de los grupos fundamentales. Esto es:*

$$\pi(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \approx \pi(\mathcal{X}) \times \pi(\mathcal{Y})$$

Demostración. Consideramos los puntos base x_0, y_0 respectivamente. El esquema de la topología producto sería el siguiente:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{X} & \\ \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "q"'] & & {[0,1]} \arrow[ul, "\sigma"'] \arrow[dl, "\tau"] \\ & \mathcal{Y} & \end{tikzcd}$$

donde p y q son las proyecciones. Entonces, como ya hemos hecho antes, vamos a ver la imagen de este diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \pi(\mathcal{X}) & & & {[p \circ (\sigma,\tau)] = [\sigma]} \\ \pi(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \arrow[ur, "p^*"] \arrow[dr, "q^*"'] \arrow[r, "(p^*, q^*)"] & \pi(\mathcal{X}) \times \pi(\mathcal{Y}) & : & {[(\sigma,\tau)]} \arrow[ur, mapsto] \arrow[dr, mapsto] \arrow[r, mapsto] & ([\sigma], [\tau]) \\ & \pi(\mathcal{Y}) & & & {[q \circ (\sigma,\tau)] = [\tau]} \end{tikzcd}$$

Nótese que hemos añadido la aplicación que llega a $\pi(\mathcal{X}) \times \pi(\mathcal{Y})$. Si comprobamos que es un isomorfismo, entonces tenemos lo que estábamos buscando. En efecto:

- Es trivialmente sobreyectivo.
- Es inyectivo. Para verlo, usaremos un resultado conocido que afirma que un homomorfismo es inyectivo si y solo si su núcleo es trivial. Entonces, denotando e_X al elemento identidad de cada grupo $\pi(X)$, sean σ, τ de forma que $([\sigma], [\tau]) = (e_{\mathcal{X}}, e_{\mathcal{Y}})$. Queremos ver que necesariamente $[(\sigma, \tau)] = e_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$.

  Consideramos las homotopías $K_s : \sigma \simeq x_0 = e_{\mathcal{X}}$, $L_s : \tau \simeq y_0 = e_{\mathcal{Y}}$. Entonces, $(K_s, L_s) : (\sigma, \tau) \simeq (x_0, y_0) = e_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$ es homotopía y, por tanto, el núcleo del homomorfismo es $\{e_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}\}$.

Por tanto, es isomorfismo. ■

Un ejemplo de la utilidad de este resultado es el siguiente.

Ejemplo 9.3.2. Consideramos el toro $\mathbb{T}$, que sabemos que es homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Entonces, cuando veamos más adelante que $\pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$, podremos afirmar directamente que $\pi(\mathbb{T}) = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. ♢

9.4. Espacios recubridores. El problema de elevación

El estudio de los espacios recubridores de otro espacio es a menudo útil para calcular grupos fundamentales, y en general tiene una gran relación con el estudio de ellos. En esta sección planteamos el problema de elevación en su versión más general, para luego particularizarlo para poder demostrar propiedades útiles.

9.4.1. Espacios recubridores

Para empezar, vamos a formalizar el concepto de espacio recubridor.

Definición 9.4.1 (Espacio recubridor)**.** Sea $p : \widetilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ una aplicación continua y sobreyectiva. Decimos que $\widetilde{\mathcal{X}}$ es un ***espacio recubridor*** de X si para cada $x \in \mathcal{X}$ existe un entorno U_x que verifica que $p^{-1}(U_x)$ se puede escribir como unión disjunta de conjuntos U_λ donde cada uno de ellos es homeomorfo a U_x, de forma que, para cada λ, $p\restriction_{U_\lambda} : U_\lambda \to U_x$ sea un homeomorfismo.

Ejemplo 9.4.1 (Recubrimientos)**.** Veamos algunos ejemplos de espacios recubridores.

1. $\mathbb{S}^n$ recubre al plano proyectivo real $\mathbb{P}^n$, con la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} p : \mathbb{S}^n &\to \mathbb{P}^n \\ (x_0, \ldots, x_n) &\mapsto (x_0 : \ldots : x_n) \end{aligned}$$

   En efecto, tomamos un punto $(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n$. Tomando un entorno abierto del punto, homeomorfo a un disco, su imagen inversa consiste en dos abiertos homeomorfos a discos alrededor de dos puntos antipodales de $\mathbb{S}^n$. Estos son disjuntos y se verifican las condiciones.

2. $\mathbb{R}$ recubre al círculo $\mathbb{S}^1$, con la aplicación:

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\to \mathbb{S}^1 \\ t &\mapsto e^{2\pi t} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{aligned}$$

   En efecto, para un punto x del círculo, tomamos un entorno abierto: un arco que lo contenga sin extremos. Esto es homeomorfo a un intervalo abierto, y su imagen inversa consiste en una cantidad numerable de intervalos a lo largo de la recta real, cada uno conteniendo un punto de $p^{-1}(x) = \mathbb{Z} + a$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Como, tomando el entorno inicial lo suficientemente pequeño, todos estos intervalos son disjuntos, ya está. ♢

9.4.2. El problema de elevación

Con esto, estamos ya en condiciones de formular el problema de elevación.

Construcción 9.4.1 (Formulación del problema de elevación)**.** Consideramos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{\mathcal{X}} \arrow[d, "p"] \\ \mathcal{Z} \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

Aquí, $\widetilde{\mathcal{X}}$ es un espacio recubridor mediante la aplicación p. El problema de elevación pregunta por la existencia de la aplicación del diagrama $\widetilde{H} : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$, continua y que verifique que $p \circ \widetilde{H} = H$, es decir, que haga que el diagrama sea conmutativo. Una aplicación que verifique esto se llama ***elevación***. $\diamondsuit$

9.5. El grupo fundamental del espacio proyectivo

El objetivo de esta sección es calcular el grupo fundamental de $\mathbb{P}^n$, el espacio proyectivo real de dimensión n, para $n \geq 2$. Como pronto veremos, esta demostración explota el concepto de elevación.

Teorema 9.5.1 (Grupo fundamental de $\mathbb{P}^n$)**.** *Para $n \geq 2$, el grupo fundamental de $\mathbb{P}^n$ es $\pi(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}_2$, el grupo abeliano de orden 2.*

Demostración. Vamos a empezar demostrando que la esfera $\mathbb{S}^n$ es un espacio recubridor del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$. Vamos a repetir con un poco más de detalle el argumento que ya utilizamos en el ejemplo 9.4.1. Consideramos pues la aplicación:

$$\begin{aligned} p : \mathbb{S}^n &\to \mathbb{P}^n \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto (x_0, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Entonces, sea un punto $y \in \mathbb{P}^n$. Tenemos que comprobar que para cada $x \in p^{-1}(y)$ existe un entorno U_x tal que $p^{-1}(U_x)$ es union disjunta de conjuntos U_λ, donde cada $U_\lambda \approx U_x$.

De esta forma, para $y \in \mathbb{P}^n$, consideramos un hiperplano π que no lo contenga. Como el plano π es cerrado, $U = \mathbb{P}^n \setminus \pi$ es abierto, y además contiene a x, luego es entorno. La imagen inversa del plano π es, para la misma aplicación definida en todo $\mathbb{R}^{n+1}$, un hiperplano; y de esta manera la imagen inversa de $\mathbb{P}^n \setminus \pi$ por $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ son dos casquetes de la esfera. Llamamos pues a estos U_+, U_- y desde luego son abiertos. Como la imagen inversa de x son dos puntos antipodales, que llamamos p y $-p$, y no están en $p^{-1}(\pi)$, entonces está cada uno en un casquete. De esta forma, como los casquetes son entornos disjuntos, basta con comprobar que $U_+, U_- \approx U_x$. Pero resulta que $U_x = \mathbb{P}^n \setminus \pi \approx \mathbb{R}^n$, y $U_+, U_- \approx \mathbb{R}^n$ porque son homeomorfos a discos abiertos.

Visto esto, podemos considerar la elevación de caminos que vamos a utilizar. Sea $a = (1 : 0 : \dots : 0)$ el punto base del grupo fundamental. Entonces, tenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{S}^n \arrow[d, "p"] & \ni (x_0, \dots, x_n) \arrow[d, mapsto] \\ {[0,1]} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[ur, "\widetilde{\sigma}"] & \mathbb{P}^n & \ni (x_0, \dots, x_n) \end{tikzcd}$$

de forma que σ es un lazo en $\mathbb{P}^n$ con base en a, y por tanto verifica $\sigma(0) = \sigma(1) = a$. Si llamamos $p^{-1}(a) = \{\widetilde{a}, \widetilde{-a}\}$, por el lema de elevación de caminos [FALTA CITA], podemos elegir $\widetilde{\sigma}$ de forma que se verifique que $\widetilde{\sigma}(0) = \widetilde{a}$. Pero como tan solo sabemos que $p \circ \widetilde{\sigma} = \sigma$, entonces $\widetilde{\sigma}(1)$ no tiene por qué ser $\widetilde{a}$, puede ser también $-\widetilde{a}$.

Planteamos entonces dos casos:

I $\widetilde{\sigma}$ es un lazo en $\mathbb{S}^n$ de base $\widetilde{a}$. Como ya vimos en la proposición 9.2.1 que $\pi(\mathbb{S}^n) = \{1\}$, podemos escribir:

$$\widetilde{H}_s : \widetilde{\sigma} \simeq \widetilde{e} = \widetilde{a}$$

y tomando imágenes por p tenemos:

$$H_s = p \circ \widetilde{H}_s : p \circ \widetilde{\sigma} \simeq p \circ \widetilde{e}$$

y por ser $p \circ \widetilde{\sigma} = \sigma$, tenemos que $H_s : \sigma \simeq e = a$. Por tanto, $[\sigma] = 1 \in \pi(\mathbb{P}^n, a)$.

II $\widetilde{\sigma}$ es un camino en $\mathbb{S}^n$ de $\widetilde{a}$ a $-\widetilde{a}$. Consideramos el camino:

$$\widetilde{\alpha}(t) = (\cos \pi t, \operatorname{sen} \pi t, 0, \dots, 0)$$

que verifica que $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{a}$ y $\widetilde{\alpha}(1) = -\widetilde{a}$. De nuevo, por estar en $\mathbb{S}^n$ existe una homotopía con extremos fijos:

$$\widetilde{H}_s : \widetilde{\sigma} \underset{\widetilde{a},-\widetilde{a}}{\simeq} \widetilde{\alpha}$$

y, de nuevo tomando imágenes, obtenemos la homotopía:

$$p \circ H_s : \sigma \simeq \alpha$$

donde los extremos fijos son $p(\widetilde{a}), p(-\widetilde{a})$, y ambos son a. Por tanto es homotopía de lazos. Entonces, tenemos que $[\sigma] = [\alpha] \in \pi(\mathbb{P}^n, a)$.

De esta forma, hemos comprobado que cualquier lazo de $\mathbb{P}^n$ está en alguna de las dos clases de homotopía. De esta forma, podemos asegurar que $|\pi(\mathbb{P}^n, a)| \leq 2$. Veamos pues que las clases 1 y $[\alpha]$ son distintas.

En efecto, si fueran iguales consideramos la homotopía $H_s : \alpha \underset{a}{\simeq} e$. Esta verifica $H_s(0) = H_s(1) \equiv a$, $H_0 = \alpha$ y $H_1 \equiv a$. Al elevarla, nos queda un diagrama como el siguiente:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{S}^n \arrow[d, "p"] \\
{[0,1] \times [0,1]} \arrow[ur, "\widetilde{H}"] \arrow[r, "H"'] & \mathbb{P}^n
\end{tikzcd}$$

donde la existencia de $\widetilde{H}$ está garantizada por el lema de elevación [FALTA CITA]. Además, podemos elegir que $\widetilde{H}_0 = \widetilde{\alpha}$. Como ademas la homotopía es de extremos fijos, su elevación lo es, y están definidos también $\widetilde{H}_s(0) = \widetilde{a}$ y $\widetilde{H}_s(1) = -\widetilde{a}$. Pero necesariamente, por continuidad y por ser $H_1 \equiv a$, $\widetilde{H}_1$ tiene que ser una constante, y tenemos $\widetilde{H}_1(0) = \widetilde{a}$ y $\widetilde{H}_1(1) = -\widetilde{a}$, lo cual es una contradicción.

Entonces, el grupo fundamental de $\mathbb{P}^n$ tiene dos elementos, y por tanto tiene que ser $\mathbb{Z}_2$. ■

9.6. El grupo fundamental del círculo

El objetivo de esta sección es calcular el grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$, el círculo de $\mathbb{R}^2$. Además, este es homeomorfo a $\mathbb{P}^1$, la recta proyectiva real, con lo que, considerando también la sección anterior, ya tendremos el grupo fundamental del espacio proyectivo de cualquier dimensión.

Teorema 9.6.1 (Grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$). *El grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$ es $\pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$.*

Demostración. Consideramos el siguiente esquema:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] & t \arrow[d, mapsto] \\
{[0,1]} \arrow[ur, "\widetilde{\sigma}"] \arrow[r, "\sigma"'] & \mathbb{S}^1 & e^{2\pi t i}
\end{tikzcd}$$

donde ya hemos visto que $\mathbb{R}$ es un espacio recubridor con la aplicación p.

Definimos entonces la siguiente aplicación entre grupos:

$$\begin{aligned} \# : \pi(\mathbb{S}^1, a) &\to \mathbb{Z} \\ [\sigma] &\mapsto \#\sigma = \widetilde{\sigma}(1) - \widetilde{\sigma}(0) \end{aligned}$$

para cualquier elevación $\widetilde{\sigma}$ de σ en $\mathbb{R}$. La denominamos ***índice***, ***número de vueltas*** o ***grado***.

El objetivo de la demostración es comprobar que la aplicación $\#$ anterior es un isomorfismo de grupos, pues entonces hemos terminado. Desde luego, es necesario comprobar también que está bien definida.

En primer lugar, comprobamos que $\#$ no depende de la elevación $\widetilde{\sigma}$. Para ello, sea $\widehat{\sigma}$ otra elevación. Tenemos que verificar que $\widetilde{\sigma}(1)-\widetilde{\sigma}(0) = \widehat{\sigma}(1)-\widehat{\sigma}(0)$. Consideramos entonces la aplicación:

$$[0,1] \ni t \mapsto \widetilde{\sigma}(t) - \widehat{\sigma}(t)$$

Como $p \circ \widetilde{\sigma} = p \circ \widehat{\sigma} = \sigma$, necesariamente $\widetilde{\sigma}(t) - \widehat{\sigma}(t) \in \mathbb{Z}$. Dado que la aplicación anterior es continua y $[0,1]$ es conexo, su imagen es conexa, y un conexo en $\mathbb{Z}$ es un punto, es decir, $\widetilde{\sigma}(t)-\widehat{\sigma}(t)$ es constante, y la llamamos k. Entonces:

$$\widetilde{\sigma}(1) - \widetilde{\sigma}(0) = (\widehat{\sigma}(1) + k) - (\widehat{\sigma}(0) + k) = \widehat{\sigma}(1) - \widehat{\sigma}(0)$$

Para asegurar que está bien definida, también hace falta ver que $\#$ no depende del representante. Es decir, que dados σ, τ de forma que $\sigma \underset{a}{\simeq} \tau$, $\#\sigma = \#\tau$. Para ello, vamos a recurrir a la elevación: consideramos la homotopía $H : \sigma \underset{a}{\simeq} \tau$. Entonces, tenemos:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]^2} \arrow[ur, "\widetilde{H}"] \arrow[r, "H"] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

donde la existencia de la elevación $\widetilde{H}$ está garantizada por el lema de elevación de homotopías [FALTA CITA]. Está claro que $\widetilde{H}_0 = \widetilde{\sigma}$ y $\widetilde{H}_1 = \widetilde{\tau}$. Además, por ser H homotopía con el extremo a fijo, para todo s H_s es un lazo con base a.

Ahora, como queremos ver que $\#\sigma = \#\tau$, consideramos la aplicación $s \mapsto \widetilde{H}_s(1) - \widetilde{H}_s(0) = \#(H_s)$, que está bien definida por ser cada H_s un lazo. Entonces, está claro que $\#(H_s) \in \mathbb{Z}$, y por ser una aplicación de $[0,1]$ en $\mathbb{Z}$ continua, es constante. Entonces:

$$\#\sigma = \#(H_0) = \#(H_1) = \#\tau$$

Así, ya hemos visto que está bien definida. Falta comprobar pues que es biyectiva y homomorfismo de grupos.

Desde luego, es sobreyectiva. En efecto, consideramos los caminos $[0,1] \ni t \mapsto e^{2k\pi i t}$, con $k \in \mathbb{Z}$. Entonces, cada uno de ellos tiene una elevación $\widetilde{\sigma}(t) = kt$, de forma que su índice es k.

Para ver la inyectividad, hay que comprobar que $\#\sigma = \#\tau \implies \sigma \underset{a}{\simeq} \tau$. Podemos escoger un par de elevaciones $\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}$ que verifiquen que $\widetilde{\tau}(0) = \widetilde{\sigma}(0)$. Así, como $\#\sigma = \widetilde{\sigma}(1) - \widetilde{\sigma}(0)$, $\#\tau = \widetilde{\tau}(1) - \widetilde{\tau}(0)$, y son iguales, resulta que $\widetilde{\sigma}(1) = \widetilde{\tau}(1)$.

Ahora, está claro que la interpolación lineal $(1-s)\widetilde{\sigma}(t)+s\widetilde{\tau}(t)$ es una homotopía en $\mathbb{R}$. Entonces, $H_s \coloneqq p((1-s)\widetilde{\sigma}(t) + s\widetilde{\tau}(t))$ es una homotopía en $\mathbb{S}^1$ entre $\widetilde{\sigma}$ y $\widetilde{\tau}$. Pero aún falta probar que es homotopía de lazos. En efecto:

$$H_s(0) = p((1-s)\widetilde{\sigma}(0) + s\widetilde{\tau}(0)) = p(\widetilde{\sigma}(0)) = \sigma(0) = a$$

$$H_s(1) = p((1-s)\widetilde{\sigma}(1) + s\widetilde{\tau}(1)) = p(\widetilde{\sigma}(1)) = \sigma(1) = a$$

Por fin, ya solo falta ver que $\#$ es homomorfismo de grupos. Como el grupo fundamental se definía con la operación $*$, de forma que $[\sigma] * [\tau] = [\sigma * \tau]$, tenemos que verificar que $\#\sigma + \#\tau = \#(\sigma * \tau)$.

Entonces, volviendo a la definición de índice, tenemos que:

$$\#\sigma = \widetilde{\sigma}(1) - \widetilde{\sigma}(0)$$

$$\#\tau = \widetilde{\tau}(1) - \widetilde{\tau}(0)$$
$$\#(\sigma * \tau) = \widetilde{\sigma * \tau}(1) - \widetilde{\sigma * \tau}(0)$$

donde podemos escoger $\widetilde{\tau}(0) = \widetilde{\sigma}(1)$, de forma que $\widetilde{\sigma} * \widetilde{\tau}$ esté bien definido. Entonces, este es un camino de $\widetilde{\sigma}(0)$ a $\widetilde{\tau}(1)$, es decir, de a a a.

Como $p \circ (\widetilde{\sigma} * \widetilde{\tau}) = \sigma * \tau$, sabemos que $\widetilde{\sigma} * \widetilde{\tau} = \widetilde{\sigma * \tau}$, por unicidad de la elevación [PORFA QUE ALGUIEN COMPRUEBE SI LO TIENE APUNTADO IGUAL]. Entonces:

$$\#(\sigma * \tau) = \widetilde{\sigma * \tau}(1) - \widetilde{\sigma * \tau}(0) = \tau(1) - \tau(0) = \widetilde{\tau}(1) - \widetilde{\tau}(0) + \widetilde{\sigma}(1) - \widetilde{\sigma}(0) = \widetilde{\tau}(1) - \widetilde{\sigma}(0)$$

como queríamos. ■

Corolario 9.6.2 (Grupo fundamental de $\mathbb{P}^1$). *El grupo fundamental de $\mathbb{P}^1$ es $\pi(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}$.*

Demostración. Trivial por ser $\mathbb{P}^1 \approx \mathbb{S}^1$. ■

Corolario 9.6.3 (Grupo fundamental del toro). *El grupo fundamental del toro de revolución $\mathbb{T}$ es $\pi(\mathbb{T}) = \mathbb{Z}^2$.*

Demostración. Como el toro es homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, la proposición 9.3.3 nos asegura que:

$$\pi(\mathbb{T}) = \pi(\mathbb{S}^1) \times \pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}^2$$

■

Corolario 9.6.4. *El grupo de rotaciones $SO(3)$ no es homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$.*

Demostración. En efecto, se puede comprobar (aunque no lo haremos aquí) que $SO(3) \approx \mathbb{P}^3$. Por tanto, como ya vimos en el teorema 9.5.1, tiene grupo fundamental $\mathbb{Z}_2$. Sin embargo, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ tiene por grupo fundamental $\mathbb{Z}$, por el resultado anterior. ■

Parte III

Apéndices

Apéndice A

Equivalencia de normas

El objetivo de este apéndice es demostrar que todas las normas definidas en espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ completo son equivalentes, dando un contraejemplo para cuerpos no completos.

Creemos que la lectura de este apéndice, aunque lejos de ser necesaria, es bonita, ya que siempre nos llena de una especial satisfacción comprender el por qué de los mantras satánicos que rara vez hay tiempo de demostrar.

A.1. Conceptos previos

A continuación introducimos la definición de norma y los conceptos que a ella subyacen.

Sea E un $\mathbb{K}$–espacio vectorial con $\mathbb{K}$ un cuerpo completo.

Definición A.1.1 (Norma)**.** Una ***norma*** es una aplicación $\|\cdot\| : E \to \mathbb{K}$ que verifica

1. Es nula si y solo si el vector es nulo. Es decir, dado $u \in \mathbb{R}^n$

$$\|u\| = 0 \iff u = 0$$

2. Tiene un comportamiento lineal respecto a escalares. Esto es

$$\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$$

3. Verifica la desigualdad triangular o de Minkowski, es decir, dados dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Una definición que surge de forma automática es la de espacio vectorial normado.

Definición A.1.2 (Espacio vectorial normado)**.** Llamamos ***espacio vectorial normado*** a un espacio vectorial E equipado con una norma $\|\cdot\|$, es decir, al par $(E, \|\cdot\|)$.

A.1.1. Topologización de un espacio vectorial normado

Todo espacio vectorial normado puede ser "metrizado" de forma canónica, tal y como muestra la siguiente definición.

Definición A.1.3 (Métrica procedente de la norma)**.** Decimos que una métrica d definida sobre un espacio vectorial E ***procede de una norma*** si existe una norma $\|\cdot\|$ tal que cumple

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Así, como todo espacio métrico es, a su vez, un espacio topológico (ver ejemplo 1.1.1), podemos preguntarnos qué relaciones hay entre las topologías engendradas por dos normas. En particular, cabe preguntarse cuándo dos normas generan la misma topología.

Definición A.1.4 (Equivalencia de normas)**.** Decimos que dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son ***equivalentes*** si engendran la misma topología.

A.1.2. Teorema general de equivalencia

Esta sección está dedicada a demostrar el siguiente teorema.

Teorema A.1.1 (Teorema general de equivalencia)**.** *Sea E un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ completo. Entonces, todas las normas definidas sobre E son equivalentes.*

Como la demostración del teorema es un poco larga (tampoco demasiado), la dotaremos de una sección propia. No vamos a demostrar el caso general para cualquier espacio vectorial sobre un cuerpo completo, nos limitaremos a probarlo para $\mathbb{R}^n$ (y es fácilmente generalizable a $\mathbb{C}^n$).

Demostración del teorema general de equivalencia

Nuestro objetivo es, dadas dos normas arbitrarias, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ de E, demostrar que las topologías engendradas por ellas son iguales. Es decir

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} = \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$$

Una propiedad a tener en cuenta es la continuidad de las normas, de hecho, esta será crucial en la demostración.

Veamos que una norma $\|\cdot\|$ es continua en la topología usual. Con esto último queremos decir que en $\mathbb{R}^n$ consideramos la topología definida por la distancia euclídea (que a su vez se define a partir de la norma euclídea $\|\cdot\|_e$) y en $\mathbb{R}$ la topología definida por el valor absoluto.

Por tanto, para demostrar que una norma es continua en la topología usual debemos probar que, dado $a \in \mathbb{R}^n$ y dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si

$$x \in \mathrm{B}_{\|\cdot\|_e}(a, \delta)$$

entonces

$$f(x) = \|x\| \in \mathrm{B}_{|\cdot|}(f(a), \varepsilon) = \mathrm{B}_{|\cdot|}(\|a\|, \varepsilon)$$

En otras palabras, dado $a \in \mathbb{R}^n$ y dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si

$$\|x - a\|_e < \delta$$

entonces

$$|\|x\| - \|a\|| < \varepsilon$$

En efecto, aplicando las propiedades antes vistas, tenemos que

$$|\|x\| - \|a\|| \leq |\|x - a\|| = \|x - a\| = \|\sum_i (x_i - a_i)e_i\| \overset{2,3.}{\leq} \sum_i |x_i - a_i| \|e_i\|$$

Teniendo en cuenta que $|x_i - a_i| \leq \|x - a\|_e$, queda

$$|\|x\| - \|a\|| \leq \sum_i \|x - a\|_e \|e_i\| = \|x - a\|_e \sum_i \|e_i\|$$

donde $\sum_i \|e_i\|$ es una constante que denotaremos por C.

Así, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon / C > 0$ tal que si $\|x - a\|_e < \delta$, entonces

$$|\|x\| - \|a\|| < \varepsilon$$

con lo que queda probada la continuidad de la norma $\|\cdot\|$.

Ya tenemos todo lo necesario para realizar la demostración. Una vez que probemos las dos contenciones de las topologías, es decir

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2} \ \text{ y } \ \mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} \supset \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$$

habremos terminado.

Comencemos notando que la función

$$\frac{\|\cdot\|_1}{\|\cdot\|_2} : \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

es continua con la topología usual en $\mathbb{S}^{n-1}$, ya que el denominador no se anula y las normas son continuas. Dado que $\mathbb{S}^{n-1}$ es compacto, la función es acotada y alcanza el mínimo. Como el numerador tampoco se anula en el compacto, esto equivale a decir que existen $a, b > 0$ tal que

$$0 < a \leq \frac{\|\cdot\|_1}{\|\cdot\|_2} \leq b$$

en $\mathbb{S}^{n-1}$. Es decir, para todo $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ se tiene que

$$0 < a\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq b\|v\|_2$$

Lo deseable sería tener esta desigualdad para un vector cualquiera de $\mathbb{R}^n$ y así tener relacionadas las distancias de ambas topologías. Veamos que así es.

Sea $u \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, existe un vector $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ y un número positivo λ tal que $u = \lambda v$. Entonces, multiplicando por λ en la desigualdad anterior, dado que es positivo, y utilizando la propiedad 2, obtenemos

$$a\lambda\|v\|_2 \leq \lambda\|v\|_1 \leq b\lambda\|v\|_2 \iff a\|\lambda v\|_2 \leq \|\lambda v\|_1 \leq b\|\lambda v\|_2 \iff a\|u\|_2 \leq \|u\|_1 \leq b\|u\|_2$$

Por otro lado, si u es el vector nulo, la desigualdad se cumple trivialmente. Por tanto, para todo vector u de $\mathbb{R}^n$ se tiene que

$$a\|u\|_2 \leq \|u\|_1 \leq b\|u\|_2 \tag{A.1}$$

donde $a, b > 0$.

Por último, relacionemos los abiertos de ambas topologías para obtener las dos inclusiones. Una vez que tenemos la relación entre las normas, es fácil encontrar una relación entre las bolas de ambas topologías, dado que estas se definen a partir de las distancias que definen las normas.

Sea $x \in \mathrm{B}_{d_1}(\rho, \varepsilon)$. Esto implica que $\|x - \rho\|_1 < \varepsilon$. Por la desigualdad (A.1) se tiene entonces que $\|x - \rho\|_2 \leq \varepsilon/a$, lo cual a su vez implica que $x \in \mathrm{B}_{d_2}(\rho, \varepsilon/a)$. Es decir,

$$\mathrm{B}_{d_1}(\rho, \varepsilon) \subset \mathrm{B}_{d_2}(\rho, \varepsilon/a)$$

Por tanto, dado $\mathcal{U}$ un abierto de la topología $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$ siempre podemos encontrar un abierto de la topología $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1}$ contenido en él. Esto es evidente ya que al ser $\mathcal{U}$ un abierto, contendrá una bola B_{d_2} que a su vez, por lo que acabamos de ver, contiene una bola B_{d_1}, que es un abierto de $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1}$. Esto implica que la topología definida por la norma $\|\cdot\|_1$ tiene más abiertos, ya que al menos tiene uno por cada abierto de $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$. Es decir, acabamos de demostrar que

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} \supset \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$$

De la misma forma, dado $x \in \mathrm{B}_{d_2}(\rho, \varepsilon)$, es decir, $\|x - \rho\|_2 < \varepsilon$, por la desigualdad (A.1) se tiene que $\|x - \rho\|_1 < b\varepsilon$, lo cual implica que $x \in \mathrm{B}_{d_1}(\rho, b\varepsilon)$. Es decir,

$$\mathrm{B}_{d_2}(\rho, \varepsilon) \subset \mathrm{B}_{d_1}(\rho, b\varepsilon)$$

Razonando como acabamos de hacer, esto implica que

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$$

Así, finalmente, se concluye que

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} = \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2} \tag{A.2}$$

Dado que las normas eran arbitrarias, queda demostrado que todas las normas de $\mathbb{R}^n$ son equivalentes.

Contraejemplo para cuerpos no completos

A menudo se obvia la condición de que los cuerpos sean completos, pero es necesaria para que se verifique el teorema. En particular, vamos a ver un contraejemplo: dos normas en $\mathbb{Q}^2$ que no son equivalentes.

Consideramos las normas $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R}$ definidas como:

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y| \qquad \& \qquad \|(x, y)\|_2 = |x + \sqrt{2}y|$$

Desde luego, se verifica que son normas. Que no son equivalentes se puede ver tanto por acotaciones como considerando las bolas en esta topología.

En efecto, $\|\cdot\|_1$ tiene por bolas los rombos abiertos: es la norma 1 tradicional. Por tanto la topología que genera en $\mathbb{Q}^2$ es restricción de la usual en $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, $\|\cdot\|_2$ está generada por unas bolas más extrañas. La bola $\mathrm{B}(x, \epsilon)$ es el área limitada por dos rectas de la forma $x+\sqrt{2}y = \pm\epsilon$. Así, como $\mathbb{Q}^2$ es denso en $\mathbb{R}^2$, estas bolas siempre tienen puntos todo lo separados del origen que haga falta (considerando la distancia usual) y, por tanto, ninguna bola es acotada en la topología usual. Por eso, las bolas usuales no son abiertas en la topología generada por $\|\cdot\|_2$, y las topologías son distintas.

Una aproximación inocente puede llevar a pensar que el mismo argumento se podría aplicar palabar por palabra para encontrar dos normas no equivalentes en $\mathbb{R}^2$, lo que contradiría al teorema de equivalencia. El problema no está en el argumento, sino en que $\|\cdot\|_2$ no es una norma en $\mathbb{R}^2$: en efecto, si exigimos que se anule lo hace en $(0, 0)$ y en puntos que siempre tienen una coordenada irracional. De esta forma, la condición solo se cumple en $\mathbb{Q}^2$.

Apéndice B

Funtores y teoría de categorías

Este anexo, si bien no es necesario para entender el apartado correspondiente, quiere ser una brevísima introducción (informal en algunos aspectos) a los conceptos más básicos de teoría de categorías, de forma que el lector comprenda qué es realmente un funtor y pueda aplicar este conocimiento a la topología algebraica, donde los utilizamos.

Empezamos "definiendo" pues qué es una categoría, pero para ello hay que conocer antes el concepto de clase.

B.1. Clases

Definición B.1.1 (Clase)**.** Una ***clase*** es una colección de objetos (a menudo conjuntos, con una estructura adicional) que pueden ser definidos inequívocamente por una propiedad común. Por ejemplo, podemos considerar la clase de los grupos o la clase de los espacios vectoriales.

Observación B.1.1 (Clase propia)**.** Decimos que una clase es ***propia*** si no es un conjunto. Desde luego, cualquier conjunto es una clase, lo cual se sigue directamente de la definición (la propiedad es que un elemento pertenece a la clase cuando pertenece al conjunto).

Así, de forma muy intuitiva, podemos considerar una clase propia como un "conjunto muy grande". Si se pudieran definir conjuntos como definimos clases propias, citando una propiedad común, introduciríamos paradojas en la teoría de conjuntos, como la archiconocida paradoja de Russell. De esta forma, se crea el concepto de clase, que trata de solventar este obstáculo. Por ejemplo, la paradoja de Russell no se da con clases porque no existe la noción de que una clase esté contenida en otra.

Nótese que en algunas teorías de conjuntos formales, y en particular con los axiomas ZFC, las clases no se definen. De esta forma, se aceptan en cuanto que todo lo que se formule con clases se pueda formular sin ellas, usando, en particular, la propiedad asociada, expresable con una fórmula. En este sentido, se pueden entender las clases como "clases de equivalencia de fórmulas". $\diamondsuit$

B.2. Categorías y funtores

Ahora sí, podemos definir una categoría. La definición puede variar según el autor, pero el concepto por detrás es siempre el mismo.

Definición B.2.1 (Categoría)**.** Una ***categoría*** consiste en:

- Una clase de ***objetos*** (a menudo conjuntos, con o sin estructura adicional).
- Una clase de ***morfismos***, que van de un objeto de los anteriores a otro. Un morfismo es una aplicación entre dos objetos que preserva su estructura. Por ejemplo, si los objetos son conjuntos los morfismos son funciones, si son grupos los morfismos son homomorfismos, y si los objetos son espacios topológicos los morfismos son funciones continuas.

- Una operación de ***composición***, que dados dos morfismos $f : a \to b$, $g : b \to c$ devuelva $g \circ f : a \to c$.

Y los siguientes axiomas:

I **Asociatividad de la composición:** la composición de morfismos es asociativa. Es decir, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

II **Morfismo identidad:** para cada objeto x, existe un morfismo $1_x : x \to x$ de forma que para cualquier $f : a \to x$ y $g : x \to b$, $1_x \circ f = f$ y $g \circ 1_x = g$.

Observación B.2.1. Es habitual referirse a las categorías con una abreviatura del nombre de la palabra en negrita. Así, la categoría de todos los grupos, donde los morfismos son los homomorfismos de grupos se denota **Grp**. Se puede comprobar con facilidad que esta es, en efecto, una categoría. $\diamondsuit$

Ahora ya podemos definir el concepto de funtor.

Definición B.2.2 (Funtor)**.** Un ***funtor*** o ***functor*** es una aplicación $F : C \to D$ entre dos categorías C y D que asigna a cada objeto otro objeto y a cada morfismo otro morfismo de forma que preserva los morfismos identidad y la composición. Es decir, para cada $X \in C$, $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$; y para cada $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Observación B.2.2. Intuitivamente, un funtor es un homomorfismo para categorías: una aplicación que conserva la estructura de las categorías. En particular, la colección de categorías cuyos objetos son conjuntos (no son clases propias) es una categoría, y en este caso un funtor es él mismo un morfismo de esta categoría de categorías pequeñas. $\diamondsuit$

B.3. *General nonsense*

La teoría de categorías tiene utilidad para abstraer otros conceptos matemáticos en muchas áreas. Su propósito es usar esta abstracción para poder probar resultados muy complicados de forma simple. En nuestro caso, la usaremos para traducir propiedades de los espacios topológicos a propiedades de su grupo fundamental asociado, como veremos en la sección correspondiente.

De esta forma, se suelen agrupar este tipo de demostraciones de teoría de categorías bajo la denominación ***general nonsense*** o ***abstract nonsense***. En efecto, a menudo este tipo de demostraciones pueden parecer desconectadas de lo que se está demostrando, al recurrir a los conceptos abstractos de teoría de categorías. Este nombre no es, en principio, derogatorio; su intención es más bien avisar en tono ligero de este nivel de abstracción.

Índice general

Índice de topologías