

Topología Elemental

Álvaro García Tenorio Manuel Navarro García Iván Prada Cazalla

Álvaro Rodríguez García Clara Rodríguez Núñez

13 de mayo de 2017

Índice general

I	Topología general	4
1.	Espacios topológicos	5
1.1.	Espacios topológicos. Definición y ejemplos.	5
1.2.	Conjuntos abiertos e interior	6
1.3.	Conjuntos cerrados y adherencia	8
1.4.	Puntos de acumulación y conjuntos densos	12
1.5.	Bases de entornos	15
1.6.	Bases de abiertos	16
1.7.	Topología relativa	19
2.	Continuidad	22
2.1.	Definición y propiedades elementales	22
2.2.	Caracterizaciones de la continuidad	24
2.3.	Homeomorfismos y homeomorfismos locales	26
3.	Construcciones de topologías	29
3.1.	Imágenes inversas (inmersiones)	29
3.1.1.	Construcción de continuidad menos fina	29
3.1.2.	Caracterización de la continuidad entrante	30
3.1.3.	Propiedad universal de las inmersiones	30
3.1.4.	Inmersiones	31
3.2.	Imágenes directas (cocientes e indentificaciones)	32
3.2.1.	Construcción de continuidad más fina	32
3.2.2.	Caracterización de la continuidad saliente	32
3.2.3.	Propiedad universal de las identificaciones	33
3.2.4.	Construcción de cocientes	33
3.2.5.	Saturación	35
3.2.6.	Aplicaciones	36
3.3.	Producto de espacios topológicos	39
3.4.	Suma	42
4.	Separación	44
4.1.	Separación de puntos	44
4.2.	Caracterizaciones	44
4.3.	Comportamiento topológico	45
5.	Numerabilidad	47
5.1.	Sucesiones	47
5.2.	Primer axioma de numerabilidad	48
5.3.	Otros axiomas de numerabilidad	48
5.4.	Comportamiento topológico	49

6. Compacidad	50
6.1. Definición y propiedades	50
6.2. Comportamiento topológico	54
6.3. Compacidad local	55
6.3.1. Comportamiento topológico de la compacidad local	56
7. Conexión	57
7.1. Definición y propiedades	57
7.2. Comportamiento topológico	60
 II Topología algebraica	 61
8. Grupo fundamental	62
8.1. Homotopía	62
8.2. Esferas	62
8.3. <i>General nonsense</i> . Funtorialidad	64
8.4. Espacios recubridores. El problema de elevación	66
8.4.1. Espacios recubridores	66
8.4.2. El problema de elevación	67
8.5. El grupo fundamental del espacio proyectivo	67
8.6. El grupo fundamental del círculo	69
 III Apéndices	 71
A. Espacios Métricos	72
A.1. Normas	72
A.1.1. Conceptos Previos	72
A.1.2. Topologización de un Espacio Vectorial Normado	72
A.1.3. Teorema General de Equivalencia	73
B. Funtores y teoría de categorías	76
B.1. Clases	76
B.2. Categorías y funtores	76
B.3. <i>General nonsense</i>	77
C. Cosas Pendientes	78
C.1. Examen Septiembre 2007	79
C.2. Examen Septiembre 2007	83
C.3. Compacitación de Alexandroff	87
Índice general	90
Índice de topologías	92

Prefacio

Estas notas son una transcripción libre de las clases de la asignatura “*Topología Elemental*”, impartidas por Jesús María Ruiz Sancho en el curso 2016–2017 a los cursos de tercero de los Dobles Grados de Matemáticas e Informática y Matemáticas y Física en la facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (UCM).

Agradecimientos

En primer lugar hay que agradecer a todos aquellos que han estado pendientes de la evolución del texto durante su proceso de construcción, corrigiendo numerosas faltas de estilo, erratas de toda la clase, e incluso, colaborando en mayor o menor medida con la redacción del mismo.

Entre ellos queremos destacar a María José Belda Beneyto, Clara Isabel López González, Belén Serrano Antón y Miguel Pascual Domínguez.

Por otra parte, en términos de dominio de L^AT_EX y otras diversas herramientas que han mejorado mucho este texto destacamos especialmente a uno de los autores, Álvaro Rodríguez García.

Parte I

Topología general

Capítulo 1

Espacios topológicos

La necesidad del estudio de la proximidad y continuidad, de la forma más abstracta posible, (absteniéndose del uso de la noción de distancia) dio origen a la Topología.

La idea de espacio topológico se comenzó a desarrollar durante los siglos XIX y XX por matemáticos como Fréchet, Kuratowski, Alexandroff y Hausdorff entre otros.

La definición inicial de estos espacios se puede encontrar en el libro “*Grundzüge der Mengenlehre*”¹ publicado por este último autor.

Al comienzo de este capítulo introducimos la noción moderna de espacio topológico, añadiendo unos cuantos ejemplos, y posteriormente, presentaremos los conjuntos abiertos y cerrados y sus relaciones.

1.1. Espacios topológicos. Definición y ejemplos.

Comenzamos, como no podía ser de otra manera, definiendo la estructura sobre la que trabajaremos a lo largo de todas estas notas, los llamados espacios topológicos.

Definición 1.1.1 (Espacio topológico). Un **espacio topológico** es un conjunto arbitrario no vacío \mathcal{X} equipado con una colección \mathcal{T} de subconjuntos $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ que cumplen las siguientes propiedades:

1. El vacío y el total están en la colección \mathcal{T} , es decir, $\{\emptyset, \mathcal{X}\} \subset \mathcal{T}$
2. La unión arbitraria de conjuntos de \mathcal{T} está en \mathcal{T} . Escrito de forma más rigurosa, pero desde luego, menos elegante, $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \in \mathcal{T}$ donde cada $\mathcal{U}_i \in \mathcal{T}$.
3. La intersección finita de conjuntos de \mathcal{T} está en \mathcal{T} . O, dicho de otra forma, $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_i \in \mathcal{T}$ donde cada $\mathcal{U}_i \in \mathcal{T}$.

A menudo hablaremos tan solo de **espacio** para referirnos a los espacios topológicos.

Hagamos un par de pequeñas observaciones antes de continuar con nuestro recién empezado viaje cósmico-topológico.

Observación 1.1.1 (Sutilezas). Se desprende de la definición 1.1.1 que un espacio topológico no es más que un par $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$. Como es natural, salvo que sea necesario, nos referiremos a un espacio topológico por el conjunto que lo conforma, al igual que hacemos en casi todas las ramas de las matemáticas (Espacios Vectoriales, Grupos, Anillos,...). \diamond

Introducimos ahora un poco de terminología con la que el lector no tiene más remedio que hacerse familiar.

Observación 1.1.2 (Terminología). A la familia de conjuntos \mathcal{T} que conforman un espacio topológico \mathcal{X} se le denomina **topología** de \mathcal{X} .

Asimismo, los conjuntos que constituyen los elementos de \mathcal{T} reciben el nombre de **abierto**s de \mathcal{X} . Normalmente los denotaremos con las letras \mathcal{U} o \mathcal{W} .

Como es evidente, nos referiremos a los elementos de \mathcal{X} como **puntos**. \diamond

¹ “Teoría abstracta de conjuntos”, publicado en 1914 por **Félix Hausdorff** (1868-1942).

Introducimos ahora unos pocos ejemplos para irnos familiarizando con el concepto de espacio topológico viendo lo general que puede llegar a ser.

Ejemplo 1.1.1 (Topologías). Las demostraciones de que, efectivamente, se cumplen las restricciones impuestas por la definición 1.1.1, o bien ya se han hecho en cursos anteriores, o bien se dejan al lector como ejercicio inmediato.

1. Un espacio métrico (M, d) es un espacio topológico con la topología definida por los conjuntos abiertos en el sentido de los espacios métricos, es decir

$$\mathcal{T} = \{\mathcal{U} \subset M : \forall x \in \mathcal{U} \exists B_d(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}\} \quad (1.1)$$

A esta topología la llamamos **topología usual**.

2. Una topología interesante por su simpleza, y por que dota a cualquier conjunto no vacío \mathcal{X} con estructura de espacio topológico, es la llamada **topología trivial**, que viene definida por

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathcal{X}\} \quad (1.2)$$

3. Siguiendo la idea del ejemplo anterior, pero a la inversa, encontramos una topología que también dota de estructura topológica a cualquier conjunto no vacío \mathcal{X} . Esta topología viene dada por

$$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathcal{X}) \quad (1.3)$$

A esta topología la llamaremos **topología discreta**.

4. Como último ejemplo curioso nos queda la llamada **topología del punto**. Consiste en considerar como abiertos a todos los subconjuntos de un conjunto \mathcal{X} que contengan a un determinado punto a . Es decir

$$\mathcal{T}_a = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{X} : a \in \mathcal{U}\} \cup \{\emptyset\} \quad (1.4)$$

Con lo que ya tenemos una gama lo suficientemente amplia de ejemplos como para ir tirando. \diamond

Para finalizar la sección observamos que en un mismo conjunto \mathcal{X} podemos definir diversas topologías. Dichas topologías pueden “compararse” en determinado contexto.

Definición 1.1.2 (Relación de orden entre topologías). Consideremos \mathcal{T} y \mathcal{T}' dos topologías definidas sobre un conjunto \mathcal{X} .

Si se verifica que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ diremos que \mathcal{T} es más **gruesa** que \mathcal{T}' y que \mathcal{T}' es más **fina** que \mathcal{T} .

En lo que resta de capítulo iremos introduciendo algunos conceptos generales de los que haremos uso de forma constante a lo largo del curso.

1.2. Conjuntos abiertos e interior

En esta sección introducimos el concepto de entorno, cuya utilidad inmediata es caracterizar a los conjuntos abiertos de un espacio topológico \mathcal{X} .

Definición 1.2.1 (Entorno de un punto). Un **entorno** de un punto $a \in \mathcal{X}$ es un conjunto que contiene a un abierto que contiene al punto a .

Normalmente denotaremos con la letra \mathcal{V} a los entornos, esta costumbre se debe a un galicismo. Escribamos la definición de entorno 1.2.1 de forma conjuntista para que no quede ninguna duda. Dado \mathcal{V} es un entorno de $a \in \mathcal{X}$ si existe un abierto \mathcal{U} de forma que

$$a \in \mathcal{U} \subset \mathcal{V} \quad (1.5)$$

Como ya adelantamos, se puede usar la noción de entorno para caracterizar a los abiertos, tal y como muestra el siguiente lema.

Lema 1.2.1 (Caracterización de abiertos). \mathcal{U} es abierto si y solo si es entorno de todos sus puntos.

Demostración. Supongamos que \mathcal{U} es abierto, entonces, dado un punto $a \in \mathcal{U}$ es evidente que \mathcal{U} contiene a un abierto (él mismo) que contiene al punto a . Luego \mathcal{U} es, trivialmente, entorno de todos sus puntos.

Recíprocamente, si \mathcal{U} es entorno de todos sus puntos, entonces, para cada punto $a \in \mathcal{U}$ se cumple que

$$a \in \mathcal{U}_a \subset \mathcal{U}$$

de donde se desprende que

$$A := \bigcup_{a \in \mathcal{U}} \mathcal{U}_a \subset \mathcal{U}$$

Más aún, se da la otra contención, y además, de forma trivial, ya que todo punto de \mathcal{U} pertenece a algún \mathcal{U}_a , luego también a la unión de todos. Luego

$$\mathcal{U} = A$$

Como la unión arbitraria de abiertos es abierto, A es abierto, con lo que se sigue el resultado. ■

En general, un conjunto será entorno de algunos de sus puntos, en principio no de todos. De esta idea surge la siguiente definición.

Definición 1.2.2 (Punto interior). Dado un conjunto $A \subset \mathcal{X}$, diremos que un punto $a \in \mathcal{X}$ es un **punto interior** de A si A es entorno de a .

Esto pretende modelizar matemáticamente la idea de “estar muy metido dentro de algo”.

Será algo habitual de ahora en adelante tratar de determinar el conjunto de puntos interiores de un determinado conjunto $A \subset \mathcal{X}$, a este conjunto se le denomina **interior** de \mathcal{X} .

Antes de continuar, fijemos unas cuantas notaciones que utilizaremos según el contexto para referirnos al interior de un conjunto.

$$\text{Int}_{\mathcal{X}}(A) = \mathring{A} = \text{Int}(A) \quad (1.6)$$

Merece la pena notar que el interior de un conjunto puede ser el conjunto vacío, así como que trivialmente se da la desigualdad conjuntista

$$\mathring{A} \subset A \quad (1.7)$$

Veamos ahora unos resultados elementales, pero a la vez cruciales, del interior de un conjunto.

Lema 1.2.2 (Apertura del interior). *El interior de un conjunto A es un abierto.*

Demostración. Para probar esto haremos uso del lema 1.2.1, es decir, trataremos de ver que es entorno de todos sus puntos.

En efecto, dado un punto $a \in \mathring{A}$, existe un abierto $\mathcal{U}_a \subset A$ de manera que $a \in \mathcal{U}_a$. Luego para ver que \mathring{A} es un entorno de a basta demostrar la inclusión $\mathcal{U}_a \subset \mathring{A}$, hagámoslo.

Sea $x \in \mathcal{U}_a \subset A$, es claro que A es entorno de x , luego $x \in \mathring{A}$.

Con lo cual hemos demostrado que \mathring{A} es entorno de todos sus puntos. ■

El otro resultado elemental que caracteriza al interior de un conjunto A , es que es el mayor abierto contenido en A .

Presentamos aquí los primeros pasos de la demostración por ser especialmente útiles y omnipresentes en las matemáticas en general.

Como la unión de abiertos es abierto, es claro que una forma de construir el mayor abierto contenido en cierto conjunto es, coleccionar los abiertos contenidos en dicho conjunto y unirlos. Escrito formalmente, tomamos el conjunto

$$B := \bigcup_{\mathcal{W} \subset A} \mathcal{W} \text{ con } \mathcal{W} \text{ abierto.} \quad (1.8)$$

Es claro que $B \subset A$, ya que es una unión de conjuntos contenidos en A , además, si hubiera un abierto más grande contenido en A que B , este pertenecería a la familia de conjuntos que estamos uniendo, lo cual es absurdo.

Presentamos el final de la demostración en forma de lema.

Lema 1.2.3 (Caracterización del interior). *El interior de un conjunto A es el mayor abierto contenido en A .*

Demostración. Por el lema 1.2.2 sabemos que \mathring{A} es abierto, luego, por la ecuación (1.8) solo queda probar la igualdad

$$\mathring{A} = \bigcup_{\mathcal{W} \subset A} \mathcal{W} \subset A$$

Y esto es prácticamente trivial. Veámoslo.

Por una parte, \mathring{A} es un abierto contenido en A , luego está contenido en la unión de los abiertos contenidos en A .

Por otra parte, dado $x \in \bigcup_{\mathcal{W} \subset A} \mathcal{W}$, es claro que, como $\bigcup_{\mathcal{W} \subset A} \mathcal{W} \subset A$ es un abierto, A es entorno de x , luego $x \in \mathring{A}$, lo que concluye la demostración. ■

El lema 1.2.3 es bastante fuerte y produce algunos corolarios interesantes que presentamos a modo de observaciones.

Observación 1.2.1 (Propiedades del interior). Enumeramos algunas propiedades del interior.

1. El interior del interior de un conjunto es el interior de dicho conjunto. Si lo escribimos sin que suene como un trabalenguas tenemos

$$\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A} \tag{1.9}$$

Esto es trivial ya que al ser \mathring{A} un abierto, el mayor abierto contenido en él es él mismo.

2. Un conjunto es abierto si y solo si coincide con su interior, es decir

$$A = \mathring{A} \tag{1.10}$$

Esto es cierto por la misma razón que lo es la ecuación (1.9).

3. Los interiores preservan las contenciones. O lo que es lo mismo

$$A \subset B \implies \mathring{A} \subset \mathring{B} \tag{1.11}$$

Por la desigualdad (1.7) es claro que $\mathring{A} \subset B$, y como \mathring{B} es el mayor abierto contenido en B , ya que \mathring{A} es un abierto contenido en B , es claro que $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

Esto ya nos da cierta artillería para defendernos con estos conjuntos. ◇

Con esto podemos decir que ya hemos liquidado todo lo referente a conjuntos abiertos.

1.3. Conjuntos cerrados y adherencia

En esta sección estudiaremos los conjuntos cerrados.

Cabe destacar que la noción de ser cerrado no es exactamente la contraria a la de ser abierto, ya que, como veremos más adelante, hay conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados así como conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez.

Definición 1.3.1 (Conjunto cerrado). Un conjunto \mathcal{F} de un espacio topológico \mathcal{X} se dice **cerrado** si su complementario, $\mathcal{X} \setminus \mathcal{F}$, es abierto.

Usualmente denotaremos a los conjuntos cerrados con las letras \mathcal{F} o \mathcal{H} .

Usando propiedades básicas de teoría de conjuntos se obtienen algunas propiedades elementales de los conjuntos cerrados.

Lema 1.3.1 (Propiedades de los cerrados). *Dado un espacio topológico \mathcal{X} se verifica*

1. *El vacío y el total son cerrados.*
2. *La intersección arbitraria de cerrados es cerrada.*

3. La unión finita de cerrados es cerrada.

Demostración. Vayamos caso por caso.

1. \mathcal{X} es cerrado pues $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X} = \emptyset$ es abierto.

Asimismo, \emptyset es cerrado pues $\mathcal{X} \setminus \emptyset = \mathcal{X}$ es abierto.

2. $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ es cerrado ya que

$$\mathcal{X} \setminus \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i \right) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{X} \setminus \mathcal{F}_i$$

es abierto por ser la unión arbitraria de abiertos un abierto.

3. $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_i$ es cerrado, basta tomar el complementario y ver que es abierto por ser intersección finita de abiertos.

$$\mathcal{X} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_i \right) = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{X} \setminus \mathcal{F}_i$$

Con lo que concluye la demostración. ■

Observación 1.3.1 (Abiertos y cerrados a la vez). Basta con mirar con atención este lema 1.3.1 para darse cuenta de que hemos encontrado dos conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez, el vacío y el total.

Estos conjuntos abiertos y cerrados a la vez (o “*clopens*”, del inglés close-open) son de vital importancia a la hora de estudiar la conexión, como veremos más adelante. ◇

Introducimos ahora un concepto elemental pero interesante, el concepto de puntos adherentes y adherencia.

Definición 1.3.2 (Punto adherente). Un punto $a \in \mathcal{X}$ se dice *adherente* a un conjunto $A \subset \mathcal{X}$ si todo entorno de a corta al conjunto A .

Esta definición pretende modelizar la idea de estar “muy pegado” a algo.

Observación 1.3.2 (Definición equivalente). Podríamos haber sustituido la definición 1.3.2 por una igual pero cambiando la palabra entorno por la palabra abierto.

La comprobación de que esto se puede hacer es inmediata y se deja al lector. ◇

Como ya es habitual, coleccionaremos los puntos adherentes a un conjunto dado y estudiaremos las propiedades del conjunto de puntos adherentes. Introduzcamos una definición para verlo formalmente.

Definición 1.3.3 (Adherencia). Se define la *adherencia* o *clausura* de un conjunto $A \subset \mathcal{X}$ como el conjunto de los puntos adherentes de A .

Usualmente denotaremos a la adherencia de alguna de las siguientes formas

$$\text{Adh}_{\mathcal{X}}(A) = \text{Adh}(A) = \overline{A} \quad (1.12)$$

Vamos a desgranar ahora una serie de resultados que nos van a hacer ver que adherencia e interior de un conjunto son, de alguna manera, conceptos duales.

Comenzamos en primer lugar con algo casi trivial.

Observación 1.3.3 (Adherencia y conjunto). Es claro que se verifica que

$$A \subset \overline{A} \quad (1.13)$$

Esto es debido a que, evidentemente, cualquier entorno de a contiene al punto a , luego, por definición, corta al conjunto A .

Visto en perspectiva, esta desigualdad es de alguna manera la dual a la (1.7).

Además, combinando ambas desigualdades obtenemos que un conjunto siempre queda “ensandwichado” entre su interior y su adherencia.

$$\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$$

Lo cual puede resultar de utilidad. ◇

Lema 1.3.2 (Clausura de la adherencia). *La adherencia de un conjunto A es un cerrado.*

Demostración. Usaremos lo único que tenemos, es decir, la definición de conjunto cerrado. Por ende, probaremos que $\mathcal{X} \setminus \overline{A}$ es abierto, para lo cual veremos que es entorno de todos sus puntos, haciendo buen uso del lema 1.2.1.

Dado $x \in \mathcal{X} \setminus \overline{A}$, como x no es un punto adherente, entonces existirá un entorno $\mathcal{V}(\ni x)$, el cual podemos escoger abierto sin pérdida de generalidad tal que se verifica

$$\mathcal{V} \cap A = \emptyset$$

Si consiguiéramos demostrar que se de la igualdad

$$\mathcal{V} \cap \overline{A} = \emptyset$$

habríamos acabado ya que tendríamos que $x \in \mathcal{V} \subset \mathcal{X} \setminus \overline{A}$, que es, por definición que $\mathcal{X} \setminus \overline{A}$ sea entorno de x .

En efecto, la comprobación de esta igualdad es muy fácil, ya que, si tomamos un $y \in \mathcal{V}$, al ser \mathcal{V} abierto, es entorno de y .

Por tanto, tendríamos que el punto y no es adherente, ya que existe un entorno, el propio \mathcal{V} que no corta con el conjunto A , incumpliendo así la definición 1.3.2. ■

Continuamos esta dualización de conceptos dándonos cuenta de que la adherencia es el menor cerrado que contiene a A . Como antes, parte de la demostración se basa en un procedimiento estándar que pasamos a explicar.

Es fácil darse cuenta de que, como la intersección arbitraria de cerrados es un cerrado, el menor conjunto cerrado que contiene a uno dado puede ser construido de la siguiente manera

$$B := \bigcap_{\mathcal{H} \supset A} \mathcal{H} \quad (1.14)$$

En efecto es un conjunto que contiene a A ya que todos los conjuntos de la familia \mathcal{H} a intersecar contienen a A , además, es el menor de ellos, ya que, de haber uno más pequeño, pertenecería a la familia que se está intersecando, lo cual es absurdo (¡compruébese!).

Presentamos, otra vez, en forma de lema, el resto de la demostración.

Lema 1.3.3 (Caracterización de la adherencia). *La adherencia de un conjunto A es el menor cerrado que contiene a A .*

Demostración. Por la ecuación (1.14) la demostración se reduce a comprobar que

$$\overline{A} = \bigcap_{\mathcal{H} \supset A} \mathcal{H}$$

Y esto es una comprobación inmediata.

Por un lado, como \overline{A} es un cerrado que contiene a A , es claro que \overline{A} se encuentra en la familia \mathcal{H} a intersecar, luego contiene a la intersección de la familia.

Recíprocamente, dado un punto adherente x , si hubiera un conjunto \mathcal{H} de la familia tal que $x \notin \mathcal{H}$, entonces tendríamos que $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{H} \subset \mathcal{X} \setminus A$.

Como \mathcal{H} es cerrado, $\mathcal{X} \setminus \mathcal{H}$ es abierto, y, por tanto existirá un entorno \mathcal{V} de x de manera que

$$x \in \mathcal{V} \subset \mathcal{X} \setminus \mathcal{H} \subset \mathcal{X} \setminus A$$

Y, por ende, $\mathcal{V} \cap A = \emptyset$, contra la definición de punto adherente. ■

Presentamos a continuación unas cuantas igualdades conjuntistas que pueden resultar bastante útiles al lector.

Proposición 1.3.4 (Complementario de la adherencia).

$$\mathcal{X} \setminus \overline{A} = \text{Int}(\mathcal{X} \setminus A)$$

Demostración. Procedemos por doble contención.

□ Sea $z \in \mathcal{X} \setminus \bar{A}$. Como z no es adherente a A , por definición (1.3.3) habrá un entorno \mathcal{V}_z de z de manera que $\mathcal{V}_z \cap A = \emptyset$. En particular, podremos extraer un entorno abierto \mathcal{U}_z tal que verifique

$$\mathcal{U}_z \cap A = \emptyset$$

Tratamos de demostrar que z es punto interior de $\mathcal{X} \setminus A$, esto es, por definición (1.2.2), que $\mathcal{X} \setminus A$ sea entorno de z , esto a su vez significa que hay un abierto \mathcal{U}'_z contenido en $\mathcal{X} \setminus A$ de forma que $z \in \mathcal{U}'_z$. Así pues el problema se reduce a encontrar dicho entorno, sin embargo, es trivial comprobar el entorno \mathcal{U}_z anteriormente definido cumple los requisitos.

□ Sea $z \in \text{Int}(\mathcal{X} \setminus A)$, demostremos que z no es adherente a A , para lo cual debemos encontrar un entorno de z , al que llamaremos \mathcal{V}_z , de manera que no corte al conjunto A . Esto es trivial, ya que z es punto interior de $\mathcal{X} \setminus A$, luego el propio $\mathcal{X} \setminus A$ es entorno de z , y, evidentemente, no corta a A .

Con lo que concluye la prueba. ■

Insistiendo es esta dualidad vía complementación entre abiertos y cerrados, presentamos un corolario inmediato.

Corolario 1.3.5 (Complementario del interior).

$$\mathcal{X} \setminus \overset{\circ}{B} = \text{Adh}(\mathcal{X} \setminus B)$$

Demostración. Nos limitaremos a comprobar que ambos conjuntos tienen el mismo complementario. En efecto, por una parte

$$\mathcal{X} \setminus (\mathcal{X} \setminus \overset{\circ}{B}) = \overset{\circ}{B}$$

Por otro lado, denotando $A := \mathcal{X} \setminus B$ tenemos

$$\mathcal{X} \setminus \text{Adh}(\mathcal{X} \setminus B) = \mathcal{X} \setminus \bar{A} \stackrel{\text{Prp. 1.3.4}}{=} \text{Int}(\mathcal{X} \setminus A) = \text{Int}(\mathcal{X} \setminus (\mathcal{X} \setminus B)) = \text{Int}(B) = \overset{\circ}{B}$$

Con lo que se tiene el resultado. ■

Una última identidad notable, un poco más profunda que las anteriores es la que relaciona la unión de las adherencias con la adherencia de las uniones.

Proposición 1.3.6 (Unión de adherencias). *La unión de las adherencias es la adherencia de las uniones.*

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Demostración. Procedemos por doble contención.

□ Dado $z \in \overline{A \cup B}$, todo entorno \mathcal{V}_z de z corta a $A \cup B$. Veamos que z es, o bien adherente a A , o bien adherente a B (quizá a ambos). Para ello supondremos que no es adherente a ninguno de ellos, es decir, que existe un entorno \mathcal{W}_z de z que no corta ni a A ni a B . Si este entorno existiera tampoco cortaría a la unión (compruébese), lo cual es absurdo.

□ Dado un punto $z \in \bar{A} \cup \bar{B}$, veamos que todo entorno de \mathcal{V}_z de z corta a $A \cup B$. Si no lo hiciera, para cada punto $x \in \mathcal{V}_z$, x no estaría en A , luego $A \cap \mathcal{V}_z = \emptyset$. Análogamente ocurriría con B , lo cual contradice nuestra hipótesis.

Con lo que finaliza la demostración. ■

Observación 1.3.4 (Demostración alternativa). Una demostración alternativa y quizá más contundente de la proposición 1.3.6 consistiría en usar las propiedades de distributividad de las operaciones conjuntistas. ◇

Por supuesto, este resultado presenta un dual inmediato.

Corolario 1.3.7 (Intersección de interiores). *El interior de la intersección es la intersección de los interiores.*

$$\text{Int}(A \cap B) = \mathring{A} \cap \mathring{B}$$

Demostración. Comprobaremos, como ya hicimos anteriormente, que ambos conjuntos tienen el mismo complementario.

Por un lado

$$\mathcal{X} \setminus \text{Int}(A \cap B) = \text{Adh}(\mathcal{X} \setminus (A \cap B))$$

Recíprocamente

$$\begin{aligned} \mathcal{X} \setminus (\mathring{A} \cap \mathring{B}) &= (\mathcal{X} \setminus \mathring{A}) \cup (\mathcal{X} \setminus \mathring{B}) = \text{Adh}(\mathcal{X} \setminus A) \cup \text{Adh}(\mathcal{X} \setminus B) = \\ &= \text{Adh}((\mathcal{X} \setminus A) \cup (\mathcal{X} \setminus B)) = \text{Adh}(\mathcal{X} \setminus (A \cap B)) \end{aligned}$$

Así, el resultado se sigue. ■

El resultado análogo a la proposición 1.3.6 con la intersección no se da, tal y como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.1 (Cuadrados abiertos). Si consideramos los conjuntos

$$A := (0, 1) \times (0, 1) \quad B := (1, 2) \times (0, 1)$$

En \mathbb{R}^2 con la topología usual, es fácil demostrar (se deja al lector) que $\overline{A \cap B} = \emptyset$ mientras que $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\} \times [0, 1]$. ◇

Vistas todas estas igualdades, al igual que hicimos en la observación 1.2.1, caractericemos los conjuntos cerrados a partir del concepto de adherencia.

Proposición 1.3.8 (Cerrados y adherencia). *Un conjunto es A cerrado si y solo si coincide con su adherencia. Es decir*

$$A = \overline{A}$$

Demostración. Si A es cerrado, como \overline{A} es el mayor cerrado contenido en A , es claro que se tiene que dar la igualdad $A = \overline{A}$.

Recíprocamente, si se da la igualdad $A = \overline{A}$, como \overline{A} es cerrado, también lo será A . ■

Añadimos una observación final trivial, simplemente por curiosidad.

Observación 1.3.5 (Doble adherencia). Dado un conjunto A , se tiene que

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$$

Esto es inmediato ya que, como $\overline{\overline{A}}$ es un cerrado, coincide con su adherencia. ◇

1.4. Puntos de acumulación y conjuntos densos

En esta sección presentamos el concepto de punto de acumulación, que es muy útil para trabajar con sucesiones, como veremos más adelante. Además, definiremos la idea de que un conjunto sea denso de varias maneras que nos serán muy útiles a la hora de resolver problemas.

Definición 1.4.1 (Punto de acumulación). Dado un conjunto A en un espacio topológico \mathcal{X} , se dice que un punto $x \in \mathcal{X}$ es un **punto de acumulación** de A si todo entorno de \mathcal{V}_x de x verifica que

$$(\mathcal{V}_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

Observación 1.4.1 (Definición equivalente). Una observación análoga a 1.3.2 tienen vigencia aquí también. ◇

Presentemos un poco de terminología para el conjunto de los puntos de acumulación.

Definición 1.4.2 (Conjunto derivado). Al conjunto de los puntos de acumulación de un conjunto A se le denomina **conjunto derivado**. Usualmente denotaremos al conjunto derivado por A' .

Observación 1.4.2 (Entornos perforados). Cuando consideramos un entorno \mathcal{V}_x de un punto $x \in \mathcal{X}$, a veces (sobre todo cuando hablamos de puntos de acumulación) es útil no considerar el entorno entero, sino el entorno salvo un punto.

Cabe destacar que al conjunto $\mathcal{V}_x \setminus \{x\}$ se le suele denominar **entorno perforado** o **entorno pinchado** de x . \diamond

Una propiedad interesante de los conjuntos derivados se presenta en el siguiente lema.

Lema 1.4.1 (Descomposición de la adherencia).

$$\overline{A} = A \cup A'$$

Demostración. La demostración es inmediata, procedemos por doble contención.

\square Veamos que todos los puntos de $\overline{A} \setminus A$ están en A' . En efecto, dado un $x \notin A$ adherente a A se tiene que para todo entorno \mathcal{V}_x de x

$$\mathcal{V}_x \cap A \neq \emptyset$$

Como $x \notin A$ se tiene que $(\mathcal{V}_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, cumpliendo la definición de punto de acumulación.

\square Es evidente que $A \subset \overline{A}$, luego solo queda comprobar que $A' \subset \overline{A}$. Esto es trivial y se deja al lector la comprobación.

Como queríamos demostrar. \blacksquare

Parémonos un segundo a reflexionar sobre las implicaciones de este resultado.

Observación 1.4.3 (Acumulación y cerrados). Es claro que un conjunto es cerrado si y solo si contiene a todos sus puntos de acumulación.

Esto es consecuencia directa de la proposición 1.3.8 y el lema 1.4.1. \diamond

Cabe señalar que, claramente, esta descomposición, en general, no es una partición, tal y como muestra el siguiente sencillo ejemplo.

Ejemplo 1.4.1 (Disco). Si consideramos el disco unidad D en \mathbb{R}^2 con la topología usual, es fácil demostrar que sus puntos de acumulación coinciden con su adherencia, con lo que obtenemos que

$$\overline{D} \setminus D \subsetneq D' \tag{1.15}$$

En general (compruébese) se verifica que $\overline{A} \setminus A \subset A'$. \diamond

Según uno echa un ojo a la definición 1.4.1 le dan ganas de ver qué pasa con aquellos puntos que no cumplen esta definición por los pelos. Para esto introducimos la siguiente definición.

Definición 1.4.3 (Puntos aislados). Se llaman **puntos aislados** de un conjunto A , a aquellos puntos de A que no son puntos de acumulación. Es decir, a los puntos $x \in A$ que poseen un entorno que cumple

$$\mathcal{V}_x \cap A = \{x\}$$

Por el momento no usaremos mucho esta definición, aunque la dejamos aquí aparcada por si las moscas.

Pasamos ahora a definir el concepto de densidad de un conjunto.

Definición 1.4.4 (Conjunto denso). Decimos que un conjunto A es **denso** en un espacio topológico \mathcal{X} si la adherencia de A es el propio espacio \mathcal{X} . Es decir

$$\overline{A} = \mathcal{X}$$

Esta definición es poco manejable en algunas circunstancias. Lo bueno que tiene es que, con relativamente poco esfuerzo podemos dar una definición equivalente en unos términos un poco más sencillos, tal y como muestra la siguiente proposición.

Proposición 1.4.2 (Caracterización de la densidad). *Son equivalentes:*

1. A es denso.
2. Todo abierto no vacío \mathcal{U} contiene algún punto de A .

Demostración. Veamos ambas implicaciones

\Rightarrow Sea \mathcal{U} un abierto de \mathcal{X} . Por ser \mathcal{U} abierto, es entorno de todos sus puntos. En particular, si $x \in \mathcal{U}$, \mathcal{U} es entorno de x , luego, por ser A denso, $\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$.

\Leftarrow Sea $x \in X$ un punto cualquiera, tomemos un entorno arbitrario suyo \mathcal{V}_x , por definición de entorno, habrá un abierto \mathcal{U}_x que verifique

$$x \in \mathcal{U}_x \subset \mathcal{V}_x$$

Como \mathcal{U}_x es abierto, contiene, por hipótesis, algún punto de A , luego $\mathcal{V}_x \cap A \neq \emptyset$, cumpliendo así x la definición de punto adherente.

Con lo que ya hemos terminado. ■

De forma natural surge preguntarse si, como en el caso conocido de \mathbb{R}^n , los espacios topológicos en general poseen algún subconjunto numerable denso. La respuesta a esta pregunta es no (como veremos más adelante) razón por la cual surge la siguiente definición.

Definición 1.4.5 (Espacio topológico separable). Se dice que un espacio topológico \mathcal{X} es *separable* si posee un subconjunto numerable denso.

Para afianzar la idea de que en la topología la intuición no parará de tendernos trampas, presentamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4.2 (Espacios separables). Recordamos en primer lugar por qué \mathbb{R}^n es separable y después presentamos un ejemplo contraintuitivo.

1. \mathbb{Q}^n es un conjunto denso y numerable en \mathbb{R}^n con la topología usual. La numerabilidad de \mathbb{Q}^n es consecuencia de la numerabilidad de \mathbb{Q} (inducción). Asimismo, la densidad puede probarse fácilmente por inducción sobre n .
2. Dado un conjunto cualquiera \mathcal{X} equipado con la topología de un punto $a \in X$, el espacio topológico $(\mathcal{X}, \mathcal{T}_a)$ es separable (nótese que $\{a\}$ es denso y finito).

Así se ve que, en espacios topológicos puestos con un poco de mala baba, pasan cosas que nos descarajan la intuición. ◇

Para finiquitar esta sección presentamos el concepto de frontera de un conjunto, que, de momento, al igual que el concepto de punto aislado, quedará en el baúl de los recuerdos.

Definición 1.4.6 (Frontera de un conjunto). Definimos la frontera de un conjunto como los puntos adherentes al conjunto que no son interiores. Dicho de otra forma (e introduciendo notación de paso)

$$\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} \quad (1.16)$$

Es interesante comprobar que, como parece intuitivo, un conjunto y su complementario comparten frontera.

Lema 1.4.3 (Frontera y complementación).

$$\text{Fr}(\mathcal{X} \setminus A) = \text{Fr}(A)$$

Demostración. Basta hacer uso de algunas de las igualdades conjuntistas probadas anteriormente para darse cuenta de que

$$\text{Fr}(\mathcal{X} \setminus A) = \overline{\mathcal{X} \setminus A} \setminus \text{Int}(\mathcal{X} \setminus A) = \overline{\mathcal{X} \setminus A} \setminus (\mathcal{X} \setminus \overline{A}) = (\mathcal{X} \setminus \overset{\circ}{A}) \setminus (\mathcal{X} \setminus \overline{A})$$

Sabiendo esto, solo queda comprobar la igualdad conjuntista

$$\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = (\mathcal{X} \setminus \overset{\circ}{A}) \setminus (\mathcal{X} \setminus \overline{A})$$

La cual es trivial. Si tenemos un punto adherente y no interior, es evidente que este no pertenece al complementario de la adherencia, además, por ser un punto no interior, pertenecerá al complementario del interior.

La igualdad se da por que podemos repetir esta demostración a la inversa (compruébese). ■

Una última cosa que merece la pena observar es que la frontera de un conjunto puede ser vista como la intersección de las adherencias del conjunto y su complementario.

Lema 1.4.4 (Frontera y adherencia).

$$\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{\mathcal{X} \setminus A}$$

Demostración. Sabemos que se cumple

$$\overline{A} \cap \overline{\mathcal{X} \setminus A} = \overline{A} \cap (\mathcal{X} \setminus \overset{\circ}{A})$$

Así pues basta comprobar que $\overline{A} \cap (\mathcal{X} \setminus \overset{\circ}{A}) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$, lo cual es evidente. ■

1.5. Bases de entornos

Al igual que en los espacios vectoriales, para estudiar las aplicaciones lineales nos bastaba con fijarnos en qué les ocurría a los vectores de una base, en los espacios topológicos desarrollaremos un concepto similar a lo largo de esta sección y la siguiente.

Definición 1.5.1 (Base de entornos de un punto). Una **base de entornos** de un punto $a \in \mathcal{X}$ es una colección \mathcal{V}_a de entornos de a tales que todo entorno de a contiene a alguno de \mathcal{V}_a .

Digamos que lo que estamos haciendo es quedarnos con una familia “significativa” de entornos del punto, descartando algunos entornos “redundantes” en cierto sentido.

Veamos unos cuantos ejemplos para aclarar el concepto.

Ejemplo 1.5.1 (Topología usual). Consideremos el espacio topológico \mathbb{R}^n con la topología usual. Asimismo consideremos un punto $a \in \mathbb{R}^n$.

Algunos ejemplos naturales de bases de entornos de a son

1. $\mathcal{V}_a := \{B(a, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$, la base usual de entornos abiertos.
2. $\overline{\mathcal{V}_a} := \{\overline{B}(a, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$, la base usual de entornos cerrados.

La comprobación de que efectivamente son bases de entornos es evidente y se deja al lector (simplemente hay que usar la definición de abierto en el espacio topológico \mathbb{R}^n usual).

Una base de entornos un poco más interesante es la siguiente

$$\mathcal{W}_a := \left\{ B\left(a, \frac{1}{k}\right) : k \geq 1 \right\} \quad (1.17)$$

Lo interesante de esta base es que es numerable. Más adelante estudiaremos cuándo es posible extraer bases de entornos numerables de un punto.

De nuevo, la comprobación de que efectivamente es una base es evidente, basta usar la propiedad arquimediana de los números reales. ◇

Presentemos otro ejemplo para que el lector aprenda a digerir este concepto en ambientes un poco más abstrusos y hostiles.

Ejemplo 1.5.2 (Topología del punto). Consideramos un conjunto no vacío \mathcal{X} y un punto $a \in \mathcal{X}$, a partir de aquí construimos el espacio topológico \mathcal{X} con la topología del punto a .

Es curioso observar que una base de entornos de a es el propio conjunto $\{a\}$.

Esto es debido a que en la topología del punto $\{a\}$ es un abierto, y todos los abiertos del espacio topológico contienen a $\{a\}$, luego todo entorno de a contiene a $\{a\}$ (que es entorno de a).

Este último párrafo puede parecer un trabalenguas de mal gusto, pero animamos al lector a que lo compruebe por su cuenta.

Yendo un poco más allá, vamos a construir una base de entornos de un punto cualquiera $x \in \mathcal{X}$. Es evidente que todos los entornos de x contienen a x y a a , luego $\mathcal{V}_x := \{\{x, a\}\}$ es una base de entornos de x . \diamond

Para concluir esta pequeña sección presentamos una definición sobre la cual trabajaremos con detalle en el capítulo 5.

Definición 1.5.2 (I Axioma de numerabilidad). Decimos que un espacio topológico $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ es **primer axioma de numerabilidad** (o simplemente I axioma) si todo punto posee una base de entornos numerable.

Visto lo visto salta a la vista que algunos de los espacios topológicos que hemos visitado desde nuestra nave del misterio cumplen el primer axioma.

Ejemplo 1.5.3 (Espacios I axioma). A la luz del ejemplo 1.5.1 sabemos que \mathbb{R}^n con la topología usual verifica el primer axioma.

Asimismo el ejemplo 1.5.2 nos dice que cualquier espacio topológico con la topología de un punto $a \in \mathcal{X}$ verifica el primer axioma de numerabilidad (de hecho podemos encontrar bases finitas de un único entorno). \diamond

En general, los espacios primer axioma son importantes dado que en ellos podremos fabricar sucesiones (y todos los potentes argumentos que se derivan de este hecho).

Por suerte o por desgracia, hay espacios que no verifican el primer axioma. Como veremos más adelante, el espacio topológico de las funciones continuas (con cierta topología) no es primer axioma.

Finalizamos la sección observando que, dada una base de entornos numerable de un punto, podemos obtener una **base encajada**. Y además, ¡agárrense criaturas! La demostración de este hecho es constructiva.

Observación 1.5.1 (Extracción de una base encajada). Dada una base numerable de un punto $a \in \mathcal{X}$, a la que denotamos

$$\mathcal{V}_a := \{\mathcal{V}_i : i \in \mathbb{N}\}$$

Es claro que la base $\mathcal{V}_a^* := \{\mathcal{W}_i := \bigcap_{j=1}^i \mathcal{V}_j : i \in \mathbb{N}\}$ es encajada.

Esto es, $\mathcal{W}_k \subset \mathcal{W}_l$ para todo $k \geq l$. \diamond

Usaremos esta construcción de forma asidua cuando estudiemos las sucesiones con detalle.

1.6. Bases de abiertos

Definición 1.6.1 (Base de abiertos). Una **base** de \mathcal{T} es una colección \mathcal{B} de abiertos, tal que todo abierto de \mathcal{T} es unión (posiblemente arbitraria) de abiertos de \mathcal{B} .

Esto viene a ser una filosofía parecida a la del álgebra lineal, pero cambiando unión por combinación lineal y abiertos por vectores. Ahora vamos a ver una reformulación de este concepto bastante potente, pues relaciona los dos conceptos de base que tenemos hasta el momento.

Observación 1.6.1 (Unicidad de la topología asociada). Dado un conjunto arbitrario \mathcal{X} y una colección \mathcal{B} de subconjuntos de \mathcal{X} . Si \mathcal{B} es base de cierta topología \mathcal{T} , entonces dicha topología es única. Además $\mathcal{T} := \{\mathcal{U} \subset \mathcal{X} : \mathcal{U} := \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B\}$.

En efecto, si hubiera otra topología $\mathcal{T}' \neq \mathcal{T}$ de la que \mathcal{B} fuera base, podrían presentarse dos situaciones:

1. Habría un conjunto $\mathcal{U}' \notin \mathcal{T}$ tal que $\mathcal{U}' \in \mathcal{T}'$, pero $\mathcal{U}' = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \notin \mathcal{T}$, lo cual es imposible por definición de \mathcal{T} , por ende, $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.
2. Si se diera el contenido estricto habría un $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ que no fuera abierto en \mathcal{T}' , no obstante $\mathcal{U} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$, y, como por definición de base todos los elementos de \mathcal{B} son abiertos en \mathcal{T}' y por definición de topología la unión arbitraria de abiertos es abierta, $\mathcal{U} \in \mathcal{T}'$. Lo cual contradice nuestra hipótesis.

Finalmente, hemos deducido que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. ◇

Proposición 1.6.1 (Caracterización de las bases de una topología). *\mathcal{B} es base de \mathcal{T} si y solo si para cada $x \in \mathcal{X}$ el conjunto $\mathcal{V}_x := \{V \in \mathcal{B} : x \in V\}$ es una base de entornos de x .*

Demostración. Procedemos por doble implicación.

\Rightarrow Supongamos que \mathcal{B} es base de \mathcal{T} . Veamos que \mathcal{V}_x es base de entornos de x . Para ello, tomaremos V entorno de x y veremos que hay un elemento de \mathcal{V}_x contenido en V .

Como V es entorno, hay un \mathcal{U} abierto de manera que $x \in \mathcal{U} \subset V$. Como \mathcal{B} es base de abiertos de \mathcal{T} , tenemos que $x \in \mathcal{U} = \bigcup_{V_i \in \mathcal{B}} V_i \subset V$.

Por tanto, habrá un $V_i \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V_i \subset \mathcal{U} \subset V$. Como por definición, $V_i \in \mathcal{V}_x$ se tiene el resultado.

\Leftarrow Recíprocamente supongamos que \mathcal{V}_x es base de entornos de x . Veamos que \mathcal{B} es base de abiertos. Sea \mathcal{U} un abierto no vacío y $x \in \mathcal{U}$.

Por ser \mathcal{V}_x base de entornos de x y \mathcal{U} entorno de x , pues es un abierto que contiene a x , habrá un $V \in \mathcal{V}_x$ tal que $x \in V \subset \mathcal{U}$.

Como podemos hacer esto para cada $x \in \mathcal{U}$, es fácil deducir que $\mathcal{U} = \bigcup_{x \in \mathcal{U}} V_x$ con lo que ya hemos ganado.

Con lo que concluye la demostración. ■

Hechas estas consideraciones, pasemos a ver ejemplos de bases de abiertos.

Ejemplo 1.6.1 (Bases de abiertos). En $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, es decir \mathbb{R}^n con la topología usual, las siguientes colecciones son bases de abiertos de \mathcal{T}_u .

$$\mathcal{B}_1 = \{B(x, \varepsilon) : x \in \mathbb{R}^n \text{ y } \varepsilon > 0\} \quad (1.18)$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ B\left(x, \frac{1}{k}\right) : x \in \mathbb{R}^n \text{ y } k \geq 1 \right\} \quad (1.19)$$

Usando la caracterización vista anteriormente, es trivial comprobar que \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 efectivamente son bases.

$$\mathcal{B}_3 = \{B(q, r) : q \in \mathbb{Q}^n \text{ y } r \in \mathbb{Q}\} \quad (1.20)$$

Esta última es especialmente importante, pues es una base numerable, e intuitivamente, cuantos menos elementos tenga una base, mucho mejor.

La comprobación de que \mathcal{B}_3 es base exige usar la densidad de \mathbb{Q} y es un poco más laboriosa, pero el lector debería poderla llevar a cabo sin mayores complicaciones. ◇

Observación 1.6.2 (Bases pequeñas). Una vez hallamos demostrado que cierta \mathcal{B} es base de abiertos, para demostrar que \mathcal{B}' es base, basta con expresar los abiertos de \mathcal{B} como unión de los de \mathcal{B}' . Por eso es importante encontrar bases lo más pequeñas posibles. ◇

Tras haber visto bases de abiertos 1.6.1 y bases de entornos 1.5.1, vamos a plantear el concepto análogo al I axioma de numerabilidad, el muy originalmente denominado “II axioma de numerabilidad”, que, aunque será tratado con profundidad en el capítulo 5, expone muy bien las ideas recién tratadas.

Definición 1.6.2 (II axioma de numerabilidad). Diremos que \mathcal{X} es *segundo axioma* de numerabilidad (o simplemente II axioma) si tiene una base de abiertos numerable.

Observación 1.6.3 (II axioma \implies I axioma). Ya que, por la proposición 1.6.1, dado $x \in X$, la colección $\mathcal{V}_x := \{V \in \mathcal{B} : x \in V\} \subset \mathcal{B}$ es una base de entornos, y como \mathcal{B} es numerable, \mathcal{V}_x también lo será. \diamond

Observación 1.6.4 (II axioma \implies separable). Elegiremos un punto x_i de cada abierto \mathcal{U}_i de la base \mathcal{B} . Dado un abierto \mathcal{U} arbitrario, como es unión de abiertos de la base, contendrá a algún punto x_i . Luego el conjunto $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto numerable denso.

El recíproco no se da. Un contraejemplo es la recta de Sorgenfrey, que veremos más adelante en el ejemplo 1.6.2. \diamond

Hemos de comentar que ser II axioma es mucho más fuerte que ser I axioma. De hecho, hay espacios métricos que no son II axioma.

La siguiente proposición es una caracterización muy útil de las bases de abiertos.

Proposición 1.6.2 (Caracterización de las bases de abiertos). *Una colección de subconjuntos \mathcal{B} de X es base de una topología si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:*

1. La base \mathcal{B} cubre todo el espacio, es decir, $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$
2. Para cada par de abiertos de la base $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y para cada punto de su intersección $x \in B_1 \cap B_2$, hay un abierto de la base $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Demostración. Procedemos por doble implicación

\implies Supongamos que \mathcal{B} es base, entonces se cumple trivialmente la primera condición. Además, $B_1 \cap B_2$ es abierto, luego entorno de x , por tanto, por la proposición 1.6.1 hay un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

\impliedby Por definición \mathcal{B} es base si y solo si $\Gamma := \{\mathcal{U} \subset X : \mathcal{U} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B\}$ es una topología.

Si $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ es claro que Γ cumple la primera propiedad de las topologías.

Por definición de Γ la unión arbitraria de elementos de Γ está en Γ , cumpliéndose así la segunda propiedad de las topologías.

Además, si se cumple la segunda condición veamos que se cumplen la propiedad restante.

Sean $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \Gamma$, supongamos que $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \neq \emptyset$, entonces hay un $x \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$. Esto implica que \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 son entornos de x . Por la proposición 1.6.1, existen sendos $B_1^x, B_2^x \in \mathcal{B}$ tales que

$$x \in B_1^x \cap B_2^x \subset \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$$

Además, como se cumple la segunda condición, hay un $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $B_x \subset B_1^x \cap B_2^x$.

Por ende, es inmediato comprobar que $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \bigcup_{x \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2} B_x$, verificándose pues (por inducción) que la intersección finita de elementos de Γ está en Γ .

Con lo que concluye la demostración. \blacksquare

La gran utilidad de la proposición 1.6.2 combinada con la unicidad de la topología inducida por una base es que podemos definir topologías sin necesidad de conocer todos los abiertos de las mismas, tal y como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.6.2 (Topología de Sorgenfrey en \mathbb{R}). Consideramos la familia de conjuntos

$$\mathcal{B} := \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} \tag{1.21}$$

\mathcal{B} es base de una topología, a la que llamaremos *topología de Sorgenfrey* o *topología del límite inferior*. Para ver esto usaremos la proposición 1.6.2.

Que se cumple la primera condición es evidente.

Veamos que cumple la segunda. Sea $B_1 = [a, b)$ y $B_2 = [a', b')$ y sea $x \in B_1 \cap B_2$ vemos claramente que la intersección de estos dos intervalos (que suponemos no vacía) sigue siendo de la misma forma, y tendrá como extremo inferior $a'' = \max\{a, a'\}$ y superior $b'' = \min\{b, b'\}$ luego es el intervalo $B := B_1 \cap B_2 = [a'', b'')$ pertenece a la base. Luego llegamos a lo buscado (de hecho a algo más fuerte). \diamond

Veamos una serie de propiedades extra de esta topología, que son muy ilustrativas.

Ejemplo 1.6.3 (Propiedades de la topología de Sorgenfrey). A la topología de Sorgenfrey la denotamos por $\mathcal{T}_{[,)}$ y al espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[,)})$ lo denominamos **recta de Sorgenfrey**. Algunas propiedades interesantes de la recta de Sorgenfrey son:

1. La topología Sorgenfrey es **estrictamente más fina que la topología usual**. En general, para demostrar esto dadas ciertas bases de sendas topologías, basta con demostrar que los abiertos de una base son unión de abiertos de la otra (de ahí la ventaja de trabajar con bases lo más pequeñas posibles). Hagámoslo.

En efecto, sea el intervalo (a, b) (abierto de la base usual de \mathbb{R}). Describámoslo como unión de abiertos de la base de Sorgenfrey (¡compruébesel!).

$$(a, b) = \bigcup_{k \geq 1} \left[a + \frac{1}{k}, b \right) \quad (1.22)$$

Sabemos que esta unión está en la topología de Sorgenfrey luego ya está. Para ver que efectivamente son distintas, basta tomar un abierto de Sorgenfrey $[a, b)$ y darse cuenta de que no es abierto en la usual (¡compruébesel!).

2. La base de Sorgenfrey es una **base de clopens**.

Ver esto es muy sencillo. Sea el abierto de la base $[a, b)$, demostremos que su complementario $(-\infty, a) \cup [b, \infty)$ es también abierto.

Esto es debido a que el intervalo $(-\infty, a)$ es un abierto usual, luego Sorgenfrey, y $[b, \infty)$ lo podemos escribir como $[b, \infty) = \bigcup_{k \geq 1} [b, b+k)$ luego es un abierto Sorgenfrey. Como la unión de abiertos es abierto se tiene el resultado.

3. La recta de Sorgenfrey es separable.

En efecto, \mathbb{Q} es denso, ya que todo elemento de la base $[a, b) \supset (a, b)$ contiene algún racional.

4. La recta de Sorgenfrey es I axioma.

Sea $a \in \mathbb{R}$, tomamos como base numerable la familia $[a, a + \frac{1}{k})$ con $k \in \mathbb{N}$. La comprobación de que efectivamente es base de entornos es muy sencilla y se deja al lector como ejercicio, como pista diremos que hay que usar la propiedad arquimediana.

Con esto ya conocemos bastante de este espacio tan exótico (aunque adelantamos que todavía queda bastante por conocer). \diamond

1.7. Topología relativa

Introducimos ahora el concepto de “subespacio” topológico, para lo cual, fijado un espacio topológico “induiremos” una topología a cada uno de sus subconjuntos a la que llamaremos “relativa”.

Definición 1.7.1 (Topología relativa). Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ un espacio topológico, asimismo sea un subconjunto $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X} \neq \emptyset$.

Definimos la **topología relativa** en \mathcal{Y} como

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{Y}} = \{U \cap \mathcal{Y} : U \in \mathcal{T}\} \quad (1.23)$$

En general, decimos que $(\mathcal{Y}, \mathcal{T}|_{\mathcal{Y}})$ es un **subespacio topológico**. Y a los abiertos de \mathcal{Y} se les denomina **abiertos relativos**.

Observación 1.7.1 (Buena definición). Comprobemos que efectivamente la topología relativa es merecedora de su nombre (y por tanto no hemos hecho un pan como unas hostias).

1. La topología relativa contiene el vacío y el total (que en este caso es \mathcal{Y}). En efecto, $\emptyset \in \mathcal{T}|_{\mathcal{Y}}$ pues $\emptyset \cap \mathcal{Y} = \emptyset$ y $\mathcal{Y} \in \mathcal{T}|_{\mathcal{Y}}$ pues $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathcal{Y}$.

2. Es cerrado respecto de uniones arbitrarias. En efecto, $\bigcup_{i \in I} (\mathcal{U} \cap \mathcal{Y}) = (\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}) \cap \mathcal{Y}$.
3. Es cerrado respecto de intersecciones finitas. Basta ver, $\bigcap_{i=1}^n (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{Y}) = (\bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_i) \cap \mathcal{Y}$.

Y por tanto ya podemos dormir tranquilos. \diamond

Gracias a esta definición, siempre que hablemos de un subconjunto de \mathcal{X} y necesitemos una topología definida en él, se usará por defecto la relativa.

Veamos ahora cómo se comportan los cerrados, los entornos, las adherencias y las bases de los subespacios respecto de sus análogos originales.

Lema 1.7.1 (Cerrados relativos). *Los cerrados de \mathcal{Y} son los cerrados de \mathcal{X} cortados con \mathcal{Y} .*

Demostración. Procedemos por doble implicación.

\Rightarrow Sea \mathcal{F} cerrado relativo, luego $\mathcal{Y} \setminus \mathcal{F}$ es abierto relativo. Por ende, para cierto \mathcal{U} abierto de \mathcal{X} se verifica $\mathcal{Y} \setminus \mathcal{F} = \mathcal{Y} \cap \mathcal{U}$. Complementando de nuevo respecto de \mathcal{Y} obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathcal{Y} \setminus (\mathcal{Y} \cap \mathcal{U}) = \mathcal{Y} \cap (\mathcal{X} \setminus (\mathcal{Y} \cap \mathcal{U})) = \mathcal{Y} \cap ((\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}) \cup (\mathcal{X} \setminus \mathcal{U})) = \\ &= \mathcal{Y} \cap (\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}) \cup \mathcal{Y} \cap (\mathcal{X} \setminus \mathcal{U}) = \emptyset \cup \mathcal{Y} \cap (\mathcal{X} \setminus \mathcal{U}) = \mathcal{Y} \cap (\mathcal{X} \setminus \mathcal{U}) \end{aligned}$$

Como $\mathcal{X} \cap \mathcal{U}$ es cerrado hemos terminado.

\Leftarrow Sea \mathcal{U} abierto de \mathcal{X} , veamos que $\mathcal{Y} \cap (\mathcal{X} \setminus \mathcal{U})$ es cerrado relativo. Para ello complementamos respecto de \mathcal{Y} .

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} \setminus (\mathcal{Y} \cap (\mathcal{X} \setminus \mathcal{U})) &= \mathcal{Y} \cap (\mathcal{X} \setminus (\mathcal{Y} \cap (\mathcal{X} \setminus \mathcal{U}))) = \\ &= \mathcal{Y} \cap ((\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}) \cup \mathcal{U}) = (\mathcal{Y} \cap (\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y})) \cup (\mathcal{Y} \cap \mathcal{U}) = \emptyset \cup (\mathcal{Y} \cap \mathcal{U}) = (\mathcal{Y} \cap \mathcal{U}) \end{aligned}$$

Con lo que concluye la demostración. \blacksquare

Lema 1.7.2 (Entornos relativos). *Los entornos de un punto $a \in \mathcal{Y}$ en \mathcal{Y} son los entornos de a en \mathcal{X} cortados con \mathcal{Y} .*

Demostración. Sea \mathcal{V} un entorno de a en \mathcal{X} , entonces hay un abierto \mathcal{U} tal que $x \in \mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. Veamos que $\mathcal{V} \cap \mathcal{Y}$ es entorno de a en \mathcal{Y} . En efecto, $a \in \mathcal{U} \cap \mathcal{Y} \subset (\mathcal{V} \cap \mathcal{Y})$ (¡compruébese!). Como $\mathcal{U} \cap \mathcal{Y}$ es abierto relativo el resultado se sigue.

Recíprocamente, sea \mathcal{V}' un entorno de a en \mathcal{Y} , entonces hay un abierto relativo \mathcal{U}' tal que $x \in \mathcal{U}' \subset \mathcal{V}'$. Por tanto, $a \in \mathcal{U} \cap \mathcal{Y} \subset \mathcal{V}'$ para cierto $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$. Veamos que $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \cap \mathcal{Y}$ siendo \mathcal{V} un entorno de a en \mathcal{X} . Es claro que \mathcal{U} es entorno de a en \mathcal{X} , por ende, basta tomar $\mathcal{V} = \mathcal{V}' \cup \mathcal{U}$. En efecto

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{Y} = (\mathcal{V}' \cup \mathcal{U}) \cap \mathcal{Y} = (\mathcal{V}' \cap \mathcal{Y}) \cup (\mathcal{U} \cap \mathcal{Y}) = \mathcal{V}' \cup \mathcal{U}' = \mathcal{V}'$$

Con lo que hemos ganado. \blacksquare

Proposición 1.7.3 (Adherencia relativa). *Sea $M \subset \mathcal{Y}$, entonces*

$$\text{Adh}_{\mathcal{Y}}(M) = \text{Adh}_{\mathcal{X}}(M) \cap \mathcal{Y}$$

Demostración. Si $a \in \text{Adh}_{\mathcal{Y}}(M)$ se verifica que dado \mathcal{V}' entorno relativo de a

$$\emptyset \neq \mathcal{V}' \cap M = (\mathcal{V} \cap \mathcal{Y}) \cap M = \mathcal{V} \cap M \subset \mathcal{Y}$$

Recíprocamente seguimos los mismos pasos pero leyendo como los árabes. \blacksquare

Lema 1.7.4 (Bases relativas). *Sea \mathcal{Y} un subespacio topológico, se verifica.*

1. Si \mathcal{V}_y es base de y en \mathcal{X} , entonces $\mathcal{V}_y \cap \mathcal{Y}$ es base de y en \mathcal{Y} .
2. Si \mathcal{B} es base en \mathcal{X} , $\mathcal{B} \cap \mathcal{Y}$ es base en \mathcal{Y} .

Demostración. 1. Hay que ver que dado un entorno de y en \mathcal{Y} , que son de la forma $V \cap \mathcal{Y}$, hay uno de la forma $W \cap \mathcal{Y}$ tal que $(W \cap \mathcal{Y}) \subset (V \cap \mathcal{Y})$ con $W \in \mathcal{V}_y$. Es claro que tomando el $W \in \mathcal{V}_y$ correspondiente a V , $W \cap \mathcal{Y}$ lo cumple.

2. Dado un abierto \mathcal{U} en \mathcal{Y} , tenemos que $\mathcal{Y} \cap \mathcal{U} = \mathcal{Y} \cap (\bigcup B) = \bigcup (B \cap \mathcal{Y})$.

Fin de la cita. ■

Observación 1.7.2 (Axiomas hereditarios). Si un espacio es I axioma (respectivamente II axioma), en virtud del lema 1.7.4 todo subespacio suyo será I axioma (respectivamente II axioma). ◇

Lema 1.7.5 (Otras propiedades). *Unas últimas propiedades interesantes son*

1. \mathcal{Y} es abierto de \mathcal{X} si y solo si todo abierto de \mathcal{Y} es abierto de \mathcal{X} .
2. \mathcal{Y} es cerrado de \mathcal{X} si y solo si todo cerrado de \mathcal{Y} es cerrado de \mathcal{X} .
3. \mathcal{Y} es entorno de x en \mathcal{X} si y solo si todo entorno de x en Y es entorno de x en X .

Demostración. Únicamente demostraremos 1. y 3.

1. Como \mathcal{U}' es abierto relativo si y solo si $\mathcal{U}' = \mathcal{Y} \cap \mathcal{U}$ si \mathcal{Y} es abierto en \mathcal{X} todos los demás abiertos de la topología relativa también serán abiertos en \mathcal{X} (intersección finita de abiertos).

Recíprocamente, como \mathcal{Y} es abierto relativo, \mathcal{Y} será abierto usual.

3. Como todo entorno relativo es de la forma $\mathcal{V} \cap \mathcal{Y}$, y tanto \mathcal{V} como \mathcal{Y} son entornos del total por hipótesis, es claro que $\mathcal{V} \cap \mathcal{Y}$ es entorno en el total.

Recíprocamente, como \mathcal{Y} es entorno relativo, por hipótesis \mathcal{Y} es entorno del total.

Con lo que nos podemos dar por satisfechos. ■

Capítulo 2

Continuidad

La continuidad es la propiedad por excelencia que queremos que nuestras funciones verifiquen. En este breve capítulo vamos a generalizar la noción de continuidad que ya conocemos y dominamos para espacios como \mathbb{R}^n , de forma que la podamos aplicar a cualquier espacio topológico conocido (sin necesidad de que sea métrico). La continuidad, además, será clave para definir más adelante la noción de homeomorfismo, es decir, una transformación que preserva las propiedades topológicas de un espacio dado.

2.1. Definición y propiedades elementales

Para empezar, tratamos de dar una justificación intuitiva del cómo se llegó a la definición que presentaremos a continuación.

Hasta ahora conocíamos una definición de continuidad válida en el ámbito de los espacios métricos, que nos decía que si (M, d) y (N, d') eran espacios métricos arbitrarios y $f : M \rightarrow N$ una aplicación entre ellos, era continua en un punto $x_0 \in M$ si y solo si dado un $\varepsilon > 0$ podíamos encontrar un $\delta > 0$ de forma que $f(B_d(x_0, \delta)) \subset B_{d'}(f(x_0), \varepsilon)$.

Dicho de otra forma, si cierto punto dista de x_0 menos que δ , entonces su imagen deberá distar menos que ε de la imagen de x_0 . Informalmente, una aplicación continua es la que manda puntos próximos a puntos próximos.

En los espacios topológicos no tenemos la noción de distancia, pero si cierta noción de “proximidad”, o al menos de “ligadura” entre puntos, esta es la noción de entorno, que usaremos para extender esta definición.

Definición 2.1.1 (Continuidad en un punto). Sean \mathcal{X} e \mathcal{Y} espacios topológicos. Consideremos asimismo una aplicación $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$.

Diremos que f es **continua** en un punto $x_0 \in \mathcal{X}$ si para todo entorno $V_{f(x_0)}$ de $f(x_0)$, la imagen inversa de dicho entorno, $f^{-1}(V_{f(x_0)})$, es entorno de x_0 .

Dicho con palabras llanas, f es continua en un punto si transforma entornos en entornos por imágenes inversas.

Una forma totalmente equivalente de entender este concepto es pensar que dado un entorno $V_{f(x_0)}$ de $f(x_0)$ siempre podremos encontrar un entorno V_{x_0} de forma que $f(V_{x_0}) \subset V_{f(x_0)}$.

Observación 2.1.1 (Importancia de las topologías). Si la topología de \mathcal{X} es fina (con muchos abiertos), o la topología de \mathcal{Y} es muy grosera (con muy pocos abiertos), la continuidad suele ser más fácil de comprobar, ya que hay pocos entornos que chequear en el espacio de llegada y muchos candidatos en el espacio de partida. \diamond

Al hilo de la observación 2.1.1 veamos algunos casos extremos que pueden resultar chocantes para una mente poco experimentada en los exóticos placeres topológicos.

Observación 2.1.2 (Casos extremos). Veamos cual es el comportamiento de la continuidad con las topologías más drásticas que conocemos.

1. En la topología discreta, cualquier conjunto es abierto, con lo cual $\{x_0\}$ es abierto y, por tanto, cualquier conjunto que contenga a x_0 es entorno suyo. Entonces, para cualquier entorno de $f(x_0)$ su imagen inversa contendrá a x_0 y por lo anterior será entorno suyo. Es decir, cualquier función que nazca en \mathcal{X} con la topología discreta es continua.
2. En la topología trivial, los únicos abiertos son el vacío y el total, con lo cual dado un punto, su único entorno es el total. Entonces, si \mathcal{Y} con la topología trivial es el espacio de llegada de una función f , f es continua, pues la imagen inversa del total es el total, y este es abierto (y por tanto entorno) en cualquier topología. \diamond

De la misma forma que podemos estudiar la continuidad para unas ciertas topologías concretas, podemos estudiarla para algunas funciones concretas sin limitarnos a una topología particular. En particular, nos van a interesar la función constante y la función identidad.

Observación 2.1.3 (Aplicaciones constante e identidad).

1. Si $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ es la aplicación constante $f \equiv b$, entonces f es continua con cualquier topología. En efecto, la imagen inversa de cualquier subconjunto (y en particular de cualquier entorno) de \mathcal{Y} que contenga a b es el total, que es entorno de todos los puntos (por ser abierto).
2. La continuidad de la aplicación identidad depende de los espacios topológicos sobre los que está definida, al contrario de lo que pueda parecer. Caso curioso es el siguiente:

$$\text{id} : (\mathcal{X}, \mathcal{T}_{\text{discreta}}) \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{T}_{\text{trivial}})$$

Esta aplicación es continua (y biyectiva), por la observación 2.1.2. Sin embargo, su inversa, que también es la aplicación identidad, no es continua. Esto se sigue directamente de que, por ser la topología del espacio de llegada la discreta, $\{f(x_0)\}$ es abierto y por tanto entorno de $f(x_0)$, pero su imagen inversa es $\{x_0\}$ que con la topología trivial del espacio de salida no es entorno. \diamond

Ahora, veremos un par de propiedades interesantes de la continuidad en un punto.

Proposición 2.1.1 (Continuidad y restricciones). *Dada $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, continua en $x_0 \in \mathcal{X}$, si $A \subset \mathcal{X}$ tal que $x_0 \in A$, entonces $f|_A : A \rightarrow \mathcal{Y}$ es continua en x_0 .*

Demostración. Sea $V_{f(x_0)}$ un entorno de $f(x_0)$. Se verifica que $(f|_A)^{-1}(V_{f(x_0)}) = A \cap f^{-1}(V_{f(x_0)})$. Pero como por la continuidad de f en x_0 tenemos que $f^{-1}(V_{f(x_0)})$ es entorno de x_0 en \mathcal{X} , entonces $A \cap f^{-1}(V_{f(x_0)})$ es entorno de x_0 en A (nótese que consideramos la topología relativa en A). ■

Este lema viene a decirnos que la continuidad no depende del conjunto donde nos encontremos, no obstante, si depende (y mucho) de la topología.

La siguiente proposición es el recíproco de la anterior.

Proposición 2.1.2 (Continuidad como propiedad local). *Si hay un entorno V_{x_0} de x_0 tal que $f|_{V_{x_0}}$ es continua en x_0 entonces f es continua.*

Demostración. Sea $V_{f(x_0)}$ un entorno de $f(x_0)$, por continuidad de $f|_{V_{x_0}}$ en x_0 se cumple que $(f|_{V_{x_0}})^{-1}(V_{f(x_0)}) = f^{-1}(V_{f(x_0)}) \cap V_{x_0}$ es entorno de x_0 en V_{x_0} , luego, por topología relativa, $f^{-1}(V_{f(x_0)})$ es entorno de x_0 en \mathcal{X} y, por tanto, f es continua. ■

La idea que define a las llamadas “propiedades locales”, es que para ver si se cumplen en un punto no es necesario mirar como se comporta todo el espacio en su conjunto, sino tan solo debemos comprobar como se comporta en un entorno del punto.

La idea intuitiva de esto es que nos da igual lo que pase “lejos” del punto.

2.2. Caracterizaciones de la continuidad

Tras definir la continuidad en un punto, el paso instintivo es por supuesto definir la continuidad en todo el espacio (o en cualquiera de sus subconjuntos). Vamos a hacerlo y a dar una serie de definiciones equivalentes de continuidad, que abren muchas posibilidades a la hora de verificar esta propiedad.

Definición 2.2.1 (Continuidad en un conjunto). Se dice que $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ es **continua** en un conjunto $A \subset \mathcal{X}$ si lo es en todo punto de A .

Vamos a ver ahora una serie de definiciones equivalentes de la noción de continuidad.

Proposición 2.2.1 (Caracterizaciones de la continuidad). Sea $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

0. f es continua
1. La imagen inversa de cualquier abierto es abierta.
2. La imagen inversa de cualquier cerrado es cerrado.
3. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ para cualquier subconjunto A de \mathcal{X} .
4. Existe un recubrimiento abierto arbitrario de \mathcal{X} de la forma:

$$\mathcal{X} = \bigcup_{i \in I} U_i$$

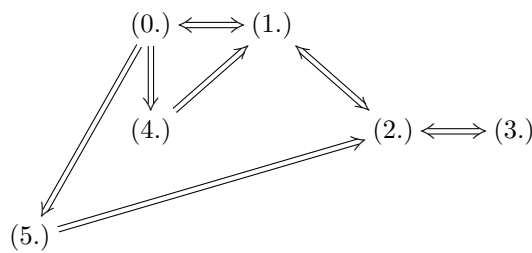
que verifica que todas las restricciones $f|_{U_i}$ son continuas.

5. Existe un recubrimiento cerrado finito de \mathcal{X} de la forma:

$$\mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^k F_i$$

que verifica que todas las restricciones $f|_{F_i}$ son continuas.

Demostración. Procederemos según el siguiente diagrama, no obstante, se reta al lector a tratar de efectuar cualquiera de las implicaciones no demostradas explícitamente.



(0) \implies (1) Sea un abierto $U \subset \mathcal{Y}$. Por ser abierto, es entorno de todos sus puntos. Pero para cada punto $f(x_0) \in U$, por ser f continua, la imagen inversa de U es también entorno de x_0 . De esta forma, para cualquier $x_0 \in f^{-1}(U)$, se cumple que $f^{-1}(U)$ es entorno de x_0 , y por tanto $f^{-1}(U)$ es abierto.

(1) \implies (0) Sea $V_{f(x_0)}$ un entorno en \mathcal{Y} . Por definición, contiene un abierto U tal que $f(x_0) \in U$. Ahora, por hipótesis, $f^{-1}(U)$ es abierto, y como $x_0 \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V_{f(x_0)})$, se verifica que $f^{-1}(V_{f(x_0)})$ contiene un abierto que contiene a x_0 y por tanto es entorno.

(1) \iff (2) $F \subset \mathcal{Y}$ es cerrado si y solo si $\mathcal{Y} \setminus F$ es abierto. Pero entonces por hipótesis $f^{-1}(\mathcal{Y} \setminus F)$ es abierto, y $f^{-1}(\mathcal{Y} \setminus F) = \mathcal{X} \setminus f^{-1}(F)$, luego $f^{-1}(F)$ es cerrado. La otra implicación es análoga.

(2) \implies (3) Basta con ver que cualquier A verifica que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ o, lo que es equivalente, $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. Sin embargo, la imagen inversa del cerrado $\overline{f(A)}$ es cerrada, con lo que basta con demostrar que $A \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, ya que \overline{A} es el menor cerrado que contiene a A . Por tanto, simplemente:

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$$

porque $f(A) \subset \overline{f(A)}$.

(3) \implies (2) Sea $F \subset \mathcal{Y}$ cerrado. Queremos probar que $G = f^{-1}(F)$ también lo es, y tenemos, por hipótesis y por las propiedades de la imagen inversa:

$$f(\overline{G}) \subset \overline{f(G)} = \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F$$

pero entonces $\overline{G} \subset f^{-1}(F) = G$, luego $\overline{G} = G$ y entonces G es cerrado por la proposición 1.3.8.

(0) \implies (4) Trivial, con el recubrimiento cuyo único abierto es \mathcal{X} .

(4) \implies (1) Vamos a aprovechar que ya hemos demostrado (0) \iff (1). Entonces, sea $U \subset \mathcal{Y}$ un abierto. Lo podemos escribir como unión de abiertos de forma que cada uno de ellos esté en un U_i , de la siguiente forma:

$$U = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap U)$$

Ahora, la imagen inversa de U es:

$$f^{-1}(U) = f^{-1} \left(\bigcup_{i \in I} (U_i \cap U) \right) = \bigcup_{i \in I} (f^{-1}(U_i \cap U))$$

pero como $U_i \cap U \subset U_i$ y $f|_{U_i}$ es continua, entonces cada una de estas imágenes inversas es abierta, luego la imagen inversa de U también lo es por ser unión arbitraria de abiertos.

(0) \implies (5) Trivial, con el recubrimiento cuyo único cerrado es \mathcal{X} .

(5) \implies (2) Es análogo a (4) \implies (1). ■

Terminamos con una propiedad fundamental de las funciones continuas, y es que la composición respeta la continuidad.

Proposición 2.2.2 (Composición). Sean $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, $g : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$, con f, g continuas. Entonces, $h = g \circ f$ es continua.

Demostración. Esta es una consecuencia casi directa de la definición. En efecto, si consideramos $x_0 \in \mathcal{X}$ y sus imágenes:

$$x_0 \mapsto f(x_0) =: y_0 \mapsto g(f(x_0)) = g(y_0) =: z_0$$

entonces basta con estudiar los entornos. En efecto, si V_{z_0} es entorno de z_0 , por la continuidad de g su imagen inversa es un entorno V_{y_0} en \mathcal{Y} y, ahora, por la continuidad de f , la imagen inversa de este último es un entorno de x_0 . ■

Ahora que ya sabemos un poco más, a modo de satisfacción personal, para que veamos que las matemáticas funcionan, vamos a deducir condiciones necesarias y suficientes para que la aplicación identidad entre dos espacios topológicos sea continua.

Observación 2.2.1 (Aplicación identidad). Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{T}_1)$ y $(\mathcal{X}, \mathcal{T}_2)$ espacios topológicos y la aplicación identidad entre ellos. Sabemos que id es continua si y solo si transforma abiertos en abiertos por imágenes inversas. Luego si \mathcal{U} es abierto en \mathcal{T}_2 , $\text{id}^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ debe ser abierto en \mathcal{T}_1 . Dicho de otra forma, id es continua si y solo si $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. ◇

2.3. Homeomorfismos y homeomorfismos locales

Intuitivamente, una aplicación continua es la que no “rompe” el espacio. Nos permite deformar, aplastar, girar... pero no cortar o pegar. No obstante en esta sección estudiaremos las aplicaciones que no solo “no rompen” el espacio, sino que también son en cierto sentido “reversibles”, estas serán los llamados “homeomorfismos”.

A bote pronto los homeomorfismos son las aplicaciones que preservan la estructura topológica, es decir los abiertos (véase la proposición 2.2.1) del mismo modo que los isomorfismos de grupos preservaban las operaciones.

Definición 2.3.1 (Homeomorfismo). Un *homeomorfismo* entre espacios topológicos $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ es una biyección continua con inversa continua.

Si existe un homeomorfismo entre dos espacios \mathcal{X} e \mathcal{Y} se dice que estos son *homeomorfos*.

Hagamos ahora una pequeña observación antes de pasar a una serie de ejemplos que nos permitan asentar estos conceptos.

Observación 2.3.1 (Continuidad de la inversa). Como vemos en la definición 2.3.1, no nos basta únicamente con que nuestra aplicación f sea biyectiva (y de este modo tenga inversa) y continua, sino que además exigimos esta inversa sea continua.

Nótese que, por ejemplo, en los isomorfismos de grupos, siempre que teníamos un homomorfismo biyectivo automáticamente era un isomorfismo. Esto no ocurre en este contexto como veremos a continuación.

Esta continuidad en ambos sentidos del homeomorfismo nos va a resultar muy útil como veremos más adelante, dado que las muchas propiedades (abiertos, cerrados...) se van a trasladar entre los dos espacios homeomorfos que nos proporciona f . \diamond

Ahora pasamos a observar una serie de funciones homeomorfas y no homeomorfas, para comprender las diferencias entre ambas y así afianzar la definición.

Ejemplo 2.3.1 (Homeomorfismos). Comencemos volviendo al ejemplo recurrente de la aplicación identidad.

1. La función $\text{id}: (X, \mathcal{T}_{\text{dis}}) \rightarrow (X, \mathcal{T}_{\text{triv}})$ verifica ser continua y biyectiva, pero como vimos en la observación 2.2.1 su inversa no es continua, por lo que no es un homeomorfismo.
2. Cualquier función f que mande \mathbb{R} a la *lemniscata* $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^2$ (con la topología relativa) no es homeomorfismo, a pesar de que f pudiera llegar a ser biyectiva y continua.

La lemniscata viene descrita por la imagen de la siguiente función.

$$\varphi(t) := \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4} \right)$$

Esto no podemos afirmarlo con nuestros conocimientos actuales, no obstante daremos una demostración intuitiva (ver ilustración 2.1) que no pretende ser formal sino tan solo aumentar el interés del lector.

La justificación sería la siguiente. Dado el punto $O := (0,0)$ tenemos que:

- Todo entorno pinchado de O tiene cuatro “componentes conexas” (sean lo que sean).
- Todo entorno pinchado de $f^{-1}(O)$ tiene dos componentes conexas.

Por lo tanto, al no mantenerse la cantidad de componentes conexas entre X e Y se verifica que f no es homeomorfismo (ya veremos por qué).

3. Sea \mathcal{X} un conjunto 3 segmentos cualesquiera de \mathbb{R}^2 que comparten un punto extremo e \mathcal{Y} otro conjunto de 3 segmentos arbitrarios que comparten un punto extremo (véase la ilustración 2.2). Si equipamos a ambos conjuntos con la topología relativa inducida por la topología usual de \mathbb{R}^2 , ambos espacios son homeomorfos.

En efecto, tomando el recubrimiento por cerrados de \mathcal{X} compuesto por cada uno de los segmentos y definiendo un homeomorfismo f que a cada segmento (cerrado del recubrimiento

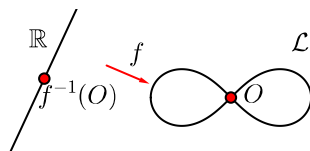


Figura 2.1: Ilustración del argumento intuitivo.

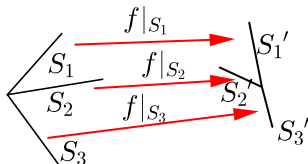


Figura 2.2: Ilustración del homeomorfismo.

de \mathcal{X}) le haga corresponder otro segmento de \mathcal{Y} (sin repetir). Tenemos, por la proposición 2.2.1 que \mathcal{X} e \mathcal{Y} son homeomorfos (así de paso vemos que las proposiciones sirven para algo).

Dicho homeomorfismo f será la **interpolación lineal** que definimos como

$$f_{ab} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto ta + (1 - t)b \quad (2.1)$$

Que es un homeomorfismo (¡compruébese!) que transforma el intervalo $[0, 1]$ en el segmento de \mathbb{R}^2 determinado por los puntos $a, b \in \mathbb{R}^2$, al que denotamos por $[a, b]$ con cierto abuso de notación.

Para conseguir un homeomorfismo entre dos segmentos $[a, b]$ y $[c, d]$ cualesquiera basta seguir el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{f_{ab}} & [a, b] \\ f_{cd} \downarrow & \nearrow f_{ab} \circ f_{cd}^{-1} & \\ [c, d] & & \end{array}$$

Con esto ya tenemos suficiente artillería para resolver gran cantidad de problemas. \diamond

Una vez definido el concepto de homeomorfismo y vista a través de los ejemplos su gran fuerza, vamos a pasar al concepto de homeomorfismo local, el cual, a pesar de ser una relación más débil que la que proporciona el homeomorfismo, también será muy utilizado.

Definición 2.3.2 (Homeomorfismo local). Sea $f : X \rightarrow Y$ aplicación entre espacios topológicos y $x_0 \in X$. Se dice que f es **homeomorfismo local** en x_0 si x_0 tiene un entorno abierto U_{x_0} tal que $f(U_{x_0})$ es entorno abierto de $f(x_0)$ en Y y se tiene que $f|_{U_{x_0}} : U_{x_0} \rightarrow f(U_{x_0})$ es homeomorfismo.

De esta definición se desprende que todo un homeomorfismo entre dos espacios es en un homeomorfismo local en todos sus puntos. Este resultado resulta evidente, pero su contrarrecíproco (no homeomorfo local implica no homeomorfo) nos puede resultar enormemente útil ya que es mucho más sencillo estudiar el homeomorfismo local al global.

Vemos ahora, a modo de ejemplo que la esfera $\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ es localmente homeomorfa al plano \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 2.3.2 (Esfera y plano). Vamos a contruir un homeomorfismo local entre la esfera y el plano.

Resulta de interés destacar que no es necesario que la aplicación sea la misma en todo el espacio, sino que podemos tomar una distinta para cada punto del espacio.

En efecto, sea $p := (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{S}^2$ con $z_0 \neq 0$, entonces, dado un entorno abierto de p que no corta al ecuador de la esfera y queda contenido en el hemisferio de p , definimos la aplicación

$$f(x, y, z) := (x, y) \quad f^{-1}(x, y) := (x, y, \frac{z_0}{|z_0|} \sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

que es homeomorfismo local (¡compruébesel!).

Análogamente, si tomamos un $p' := (x_1, y_1, 0) \in \mathbb{S}^2$ con $x_1 > 0$, dado un entorno abierto de p' con todos los puntos con primera coordenada positiva definimos el siguiente homeomorfismo local (¡compruébesel!)

$$f(x, y, z) := (y, z) \quad f^{-1}(y, z) := (\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z)$$

Nótese que aún quedan puntos de la esfera por tratar (se dejan como ejercicio). \diamond

Una vez vistas ambas definiciones pasamos a ver una serie de propiedades y observaciones propias de los homeomorfismos (globales), pero que también nos valdrán para la restricción homeomorfa de los locales (dado que en ella por definición la aplicación es homeomorfa).

Observación 2.3.2 (Propiedades de los homeomorfismos).

1. Sea $f : X \rightarrow Y$ aplicación biyectiva.

Que f sea continua es equivalente a que si $U \in Y$ es abierto, $f^{-1}(U)$ también lo será. Del mismo modo, es equivalente a que si $F \in Y$ es cerrado, $f^{-1}(F)$ también lo será.

Igualmente, que f^{-1} sea continua es equivalente a que si $F \in X$ es cerrado, entonces $f(F)$ es cerrado, asimismo si $U \in X$ es abierto, $f(U)$ también lo será.

Vemos como si se verifican ambas (la continuidad de f y de su inversa) será homeomorfismo, de modo que f es homeomorfismo si y solo si es continua, biyectiva y transforma abiertos en abiertos por imágenes directas.

2. Una aplicación f no necesariamente biyectiva se dice **abierto** cuando la imagen de abiertos es un abierto (es decir, cuando $f(U)$ es abierto si U es abierto).

Análogamente, una aplicación f no necesariamente biyectiva se llama **cerrada** cuando la imagen de cerrados es un cerrado (es decir, cuando $f(F)$ es cerrado si F es cerrado).

Dejamos como ejercicio al lector ver que si una aplicación es abierta no tiene por qué ser cerrada (y viceversa) y que si una aplicación es abierta y cerrada no tiene por qué ser biyectiva. \diamond

Capítulo 3

Construcciones de topologías

A lo largo de este capítulo vamos a seguir una rutina de trabajo que resultará enormemente fructífera. Tratamos de explicarla brevemente aquí, no obstante recomendamos que una vez finalizado este capítulo el lector vuelva aquí a modo de retrospectiva.

Nuestro “modus operandi” será, en primer lugar, dotar a un conjunto de la topología “más drástica” (en cierto sentido) que haga continua a una (o varias) aplicaciones entrantes (o salientes) a dicho conjunto.

Tras esto, trataremos de dar condiciones necesarias y suficientes para que una aplicación entrante (o saliente) al espacio topológico anteriormente construido sea continua. De esta idea nacen las llamadas “propiedades universales”, que a la postre veremos que caracterizan a la topología.

Por último iremos jugando con nuestras pequeñas y diabólicas creaciones, buscándoles aplicaciones y desgranando sus propiedades.

Repetiremos este proceso un total de 4 veces.

3.1. Imágenes inversas (inmersiones)

En esta sección formalizaremos la idea de “meter” un espacio topológico dentro de otro.

3.1.1. Construcción de continuidad menos fina

Esta sección se centrará en dar solución al siguiente problema. Dado un espacio topológico $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$, un conjunto \mathcal{Y} , y una aplicación f que nace en \mathcal{Y} y muere en $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$, queremos dotar a \mathcal{Y} de una topología que haga que f sea continua.

Visto en forma de diagrama

$$(\mathcal{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}}) \xrightarrow{f} (\mathcal{X}, \mathcal{T})$$

Observación 3.1.1 (Solución trivial). Evidentemente, una elección fácil para que esto ocurra es escoger la topología discreta, puesto que es la que cuenta con más abiertos y, por lo tanto, para todo abierto \mathcal{U}' de \mathcal{X} entonces $f^{-1}(\mathcal{U}')$ es abierto en \mathcal{Y} , lo que implica que f es continua. \diamond

Sin embargo, este caso no es realmente interesante, por lo cual refinaremos el enunciado de nuestro problema, ahora no buscaremos una topología cualquiera sino la topología menos fina posible que haga continua a f .

Observación 3.1.2 (Aproximación a la solución). Un truco que se nos podría ocurrir para atacar este problema es usar la caracterización de la continuidad que afirma que una aplicación f es continua si y solo si transforma abiertos en abiertos por imágenes inversas.

Usando esto, es claro que la topología que busquemos deberá tener como abiertos al menos a las imágenes inversas de los abiertos de \mathcal{X} . De hecho, como vemos ahora mismo, esta es la solución de nuestro problema. \diamond

La solución a este problema es la topología $f^{-1}(\mathcal{T})$, definida como

$$f^{-1}(\mathcal{T}) := \{f^{-1}(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathcal{T}\}$$

y que llamamos **topología imagen inversa**.

La comprobación de que verdaderamente es una topología se desprende de las propiedades de la función inversa aplicada a conjuntos. Por otro lado, es la menos fina que hace a f continua por construcción, luego cualquier otra topología con estas características contiene a esta. Finalmente, se tiene que es única. En efecto, si tenemos que \mathcal{T} y \mathcal{T}' cumplen que son las menos finas por construcción, entonces se tiene que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ y $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, luego son iguales.

3.1.2. Caracterización de la continuidad entrante

Es hora de profundizar un poco más. Tomemos otro espacio topológico arbitrario (Z, \mathcal{T}') y consideremos una función g que nace en este y muere en \mathcal{Y} .

El problema que se nos plantea ahora es determinar qué aplicaciones $g : Z \rightarrow \mathcal{Y}$ son continuas. Damos sin rodeos la solución a este problema.

Proposición 3.1.1 (Propiedad universal de las inmersiones). *Una aplicación $g : Z \rightarrow \mathcal{Y}$ es continua si y solo si se verifica que $f \circ g$ es continua.*

Demostración. Para ponernos en situación nos dibujamos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{Y}, f^{-1}(\mathcal{T})) & \xrightarrow{f} & (\mathcal{X}, \mathcal{T}) \\ \uparrow g & \nearrow f \circ g & \\ (Z, \mathcal{T}') & & \end{array}$$

En primer lugar, observemos que como f es continua por definición, si g es continua, entonces trivialmente la composición $f \circ g$ también lo será. Con lo que la primera de las implicaciones es evidente.

Recíprocamente, queremos ver que g transforma abiertos en abiertos por imágenes inversas. En efecto, dado $W \in f^{-1}(\mathcal{T})$, comprobemos que $g^{-1}(W) \in \mathcal{T}'$. Por definición $W = f^{-1}(\mathcal{U})$, con $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$. Por ende,

$$g^{-1}(W) = g^{-1}(f^{-1}(\mathcal{U})) = (f \circ g)^{-1}(\mathcal{U})$$

Como $f \circ g$ es continua, el resultado se sigue. ■

Observación 3.1.3 (Irrelevancia de la topología de \mathcal{Y}). La proposición 3.1.1 es realmente interesante, puesto que nos dice que la topología que haya en \mathcal{Y} no es relevante a la hora de estudiar las aplicaciones continuas que mueren en \mathcal{Y} . ◇

3.1.3. Propiedad universal de las inmersiones

Definición 3.1.1 (Propiedad universal). Si para cierta topología $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$ de \mathcal{Y} se verifica el enunciado de la proposición 3.1.1 se dice que la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$ verifica la **propiedad universal de las inmersiones**.

Ahora tratamos de determinar para qué topologías de \mathcal{Y} se verifica la propiedad universal para las inmersiones.

Desde luego, la proposición 3.1.1 nos dice que para la topología $f^{-1}(\mathcal{T})$ se verifica la propiedad universal (y que es la menos fina que lo hace, pues es la menos fina que hace a f continua).

Ahora vamos a ver que no solo ocurre esto sino que es la única topología que verifica esta propiedad universal.

Proposición 3.1.2 (Unicidad de la propiedad universal). *Sea $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$ una topología que verifica la propiedad universal, entonces $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}} = f^{-1}(\mathcal{T})$.*

Demostración. Razonaremos por doble contención y haciendo algunos cambalaches útiles para retorcir la propiedad universal a nuestro gusto.

Consideramos el siguiente diagrama, análogo al de la demostración de la proposición 3.1.1 pero tomando $(Z, \mathcal{T}') = (\mathcal{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}})$ y $g = \text{id}$.

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}}) & \xrightarrow{f} & (\mathcal{X}, \mathcal{T}) \\ \text{id} \uparrow & \nearrow f \circ \text{id} = f & \\ (\mathcal{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}}) & & \end{array}$$

Sabemos que la identidad de un espacio en sí mismo es una aplicación continua. De este modo, por la propiedad universal, tenemos por lo anterior que $f \circ \text{id} = f$ es continua. En consecuencia, $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$ hace que f sea continua y, por tanto, por construcción de $f^{-1}(\mathcal{T})$, $f^{-1}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$. Ya tenemos demostrada una inclusión.

Para la otra inclusión consideramos un diagrama análogo, pero tomando $(Z, \mathcal{T}') = (\mathcal{Y}, f^{-1}(\mathcal{T}))$ y $g = \text{id}$.

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}}) & \xrightarrow{f} & (\mathcal{X}, \mathcal{T}) \\ \text{id} \uparrow & \nearrow f \circ \text{id} = f & \\ (\mathcal{Y}, f^{-1}(\mathcal{T})) & & \end{array}$$

Ahora, por definición de $f^{-1}(\mathcal{T})$, sabemos que $f \circ \text{id} = f$ es continua. Ahora, aplicando la propiedad universal tenemos que id debe ser continua, y esto solo es posible si $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}} \subset f^{-1}(\mathcal{T})$. ■

Observación 3.1.4 (Inyectividad). Vamos a ver ahora un caso particular muy importante (el que realmente es de interés) de esta construcción.

Supongamos que dos puntos y_1 e y_2 terminan en el mismo punto tras ser evaluados en una aplicación (lo que quiere decir que esta no es inyectiva). Los abiertos \mathcal{U} que contienen a la imagen de los dos puntos mencionados x (que es la misma) cumplen que $f^{-1}(\mathcal{U})$ contiene a y_1 e y_2 , luego estos dos puntos resultan ser topológicamente indistinguibles (no puedo separarlos en dos abiertos distintos). Por ello, este tipo de aplicaciones no presentan mucho interés puesto que no es posible conocer con certeza ciertas propiedades. ◇

3.1.4. Inmersiones

El caso verdaderamente interesante ocurre cuando f es inyectiva. En este caso, si se considera el subespacio $(f(\mathcal{Y}), \mathcal{T}|_{f(\mathcal{Y})}) \subset (\mathcal{X}, \mathcal{T})$, entonces f es biyectiva:

$$(\mathcal{Y}, f^{-1}(\mathcal{T})) \xrightarrow{f} (f(\mathcal{Y}), \mathcal{T}|_{f(\mathcal{Y})}) \subset (\mathcal{X}, \mathcal{T}).$$

Además, la aplicación es **continua** puesto que, dado \mathcal{W} un abierto de $f(\mathcal{Y})$, entonces, por topología relativa $\mathcal{W} = f(\mathcal{Y}) \cap \mathcal{U}$ para cierto abierto $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$. Esto implica que

$$f^{-1}(\mathcal{W}) = f^{-1}(\mathcal{U} \cap f(\mathcal{Y})) = f^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{Y} = f^{-1}(\mathcal{U}),$$

que es abierto de \mathcal{Y} por la definición de topología que hemos tomado.

Sin embargo, esto no termina aquí, ya que f es **abierto**. En efecto, como \mathcal{U} está contenido en \mathcal{Y} e \mathcal{Y} está equipado con la topología inversa de la topología de \mathcal{X} , tenemos que existe un abierto $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ tal que $f^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{W}$. Aplicando f a esta igualdad obtenemos que $f(\mathcal{W}) = f(f^{-1}(\mathcal{U})) = \mathcal{U} \cap f(\mathcal{Y})$ que es un abierto de $f(\mathcal{Y})$.

Por tanto, al ser f continua y abierta, es **homeomorfismo**. Esto es sorprendente, ya que una aplicación inyectiva de \mathcal{Y} en \mathcal{X} es homeomorfismo de \mathcal{Y} en $f(\mathcal{Y})$.

Definición 3.1.2 (Inmersión o embebimiento). A una función $f : (\mathcal{Y}, f^{-1}(\mathcal{T})) \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{T})$ inyectiva se la denomina **inmersión** o **embebimiento**.

3.2. Imágenes directas (cocientes e indentificaciones)

En esta sección formalizaremos la idea de “pegar” unos puntos con otros. Al final tendremos el superpoder de trabajar con espacios topológicos como si fueran recortables infantiles, lo cual es sorprendentemente útil.

3.2.1. Construcción de continuidad más fina

Después de haber realizado todo el desarrollo anterior, una posibilidad que se nos plantea es dualizar las cuestiones que nos han ido apareciendo. Coloquialmente, podríamos decir que vamos a cambiarle el sentido a todo.

Así pues, consideremos un espacio topológico $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$, un conjunto \mathcal{Y} , y una aplicación f que nace en $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ y muere en \mathcal{Y} .

El problema ahora consiste en dotar a \mathcal{Y} de una topología que haga que f sea continua.

Observación 3.2.1 (Solución trivial). Como antes, la solución más sencilla sería elegir la topología trivial, puesto que sus únicos abiertos son el vacío y el total y siempre se cumpliría que para cada \mathcal{U}' abierto de \mathcal{Y} entonces la imagen inversa de este es un abierto del espacio de partida. \diamond

No obstante, es interesante encontrar la topología más fina que cumpla esto.

Como queremos hacer a f continua, es claro que las imágenes inversas de los abiertos de \mathcal{Y} tendrán que ser abiertos de \mathcal{X} . Si somos radicales en nuestras pretensiones obtenemos la solución al problema.

$$\mathcal{T}_{\mathcal{Y}} := f(\mathcal{T}) := \{\mathcal{U} \subset \mathcal{Y} : f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{T}\}$$

La comprobación de que $f(\mathcal{T})$ es una topología es muy fácil y se deja el lector. La razón por la que $f(\mathcal{T})$ es la topología más fina que hace a f continua es que si se añade algún abierto \mathcal{U} , por construcción $f^{-1}(\mathcal{U}) \notin \mathcal{T}$ luego f dejaría de ser continua.

Por último, realizando un razonamiento por doble inclusión al análogo al de la sección anterior, se puede ver que es única.

Llamamos a esta topología *topología imagen* o *topología imagen directa*.

3.2.2. Caracterización de la continuidad saliente

Continuando con nuestra filosofía particular, tomemos un espacio topológico arbitrario (Z, \mathcal{T}') . Asimismo consideremos una función g que nace en $(\mathcal{Y}, f(\mathcal{T}))$ y muere en Z .

El problema que nos planteamos es caracterizar a las aplicaciones continuas $g : \mathcal{Y} \rightarrow Z$.

La solución a este problema no merece un premio a la originalidad.

Proposición 3.2.1 (Propiedad universal de las identificaciones). *Una aplicación $g : \mathcal{Y} \rightarrow Z$ es continua si y solo si se verifica que f es continua.*

Demostración. Orientémonos en la oscuridad que nos envuelve con un bonito diagrama.

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{X}, \mathcal{T}) & \xrightarrow{f} & (\mathcal{Y}, f(\mathcal{T})) \\ & \searrow g \circ f & \downarrow g \\ & & (Z, \mathcal{T}') \end{array}$$

Como antes, es evidente que si g es continua $g \circ f$ es continua.

Recíprocamente, queremos ver que g transforma abiertos en abiertos por imágenes inversas. Que dado $\mathcal{U} \in \mathcal{T}'$ entonces $g^{-1}(\mathcal{U}) \in f(\mathcal{T})$ es equivalente (por definición de $f(\mathcal{T})$) a que

$$f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{U})) = (g \circ f)^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{T}$$

Como $\mathcal{U} \in \mathcal{T}'$ y por hipótesis $g \circ f$ es continua podemos irnos a casa, hemos ganado. \blacksquare

3.2.3. Propiedad universal de las identificaciones

Si hacemos un poco de “copy-paste” de la sección anterior obtenemos lo siguiente.

Definición 3.2.1 (Propiedad universal). Si para cierta topología $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$ de \mathcal{Y} se verifica el enunciado de la proposición 3.2.1 se dice que la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$ verifica la **propiedad universal de las identificaciones**.

Ahora vemos rápidamente que la propiedad universal (como en el caso de la sección anterior) caracteriza a la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$.

Proposición 3.2.2 (Unicidad de la propiedad universal). Sea $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$ una topología que verifica la propiedad universal, entonces $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}} = f(\mathcal{T})$.

Demostración. Razonaremos por doble contención con exactamente los mismos trucos que en la sección anterior.

Consideramos el siguiente diagrama, análogo al de la demostración de la proposición 3.2.1 pero tomando $(Z, \mathcal{T}') = (\mathcal{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}})$ y $g = \text{id}$.

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{X}, \mathcal{T}) & \xrightarrow{f} & (\mathcal{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}}) \\ & \searrow \text{id} \circ f = f & \downarrow \text{id} \\ & & (\mathcal{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}}) \end{array}$$

En las condiciones del diagrama la identidad es continua, luego por la propiedad universal $\text{id} \circ f = f$ es continua. Por ende, al ser $f(\mathcal{T})$ la más fina que hace a f continua $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}} \subset f(\mathcal{T})$.

Recíprocamente, consideramos un diagrama análogo, pero tomando $(Z, \mathcal{T}') = (\mathcal{Y}, f(\mathcal{T}))$.

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{X}, \mathcal{T}) & \xrightarrow{f} & (\mathcal{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}}) \\ & \searrow \text{id} \circ f = f & \downarrow \text{id} \\ & & (\mathcal{Y}, f(\mathcal{T})) \end{array}$$

Por definición de $f(\mathcal{T})$ $\text{id} \circ f = f$ es continua, luego por la propiedad universal lo es la identidad, por ende $f(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$. ■

Observación 3.2.2 (Sobreyectividad). Veamos qué patología nos encontramos en el caso de que f no sea sobreyectiva.

Si f no fuera sobreyectiva habría un $y \in \mathcal{Y}$ de manera que $f^{-1}(y) = \emptyset \in \mathcal{T}$, siendo, por continuidad de f un punto abierto.

Por tanto, $f(\mathcal{T})|_{\mathcal{Y} \setminus f(\mathcal{X})}$ sería la topología discreta. No obstante la cosa no acaba aquí.

Además de eso, vamos a poder particionar el espacio \mathcal{Y} en dos clopens no triviales, lo cual, como veremos más adelante, nos dice que \mathcal{Y} es “disconexo”.

En efecto, $f^{-1}(\mathcal{Y} \setminus f(\mathcal{X})) = \emptyset$ que es abierto, por ende, $\mathcal{Y} \setminus f(\mathcal{X})$ es abierto y $f(\mathcal{X})$ es cerrado. Pero además $f^{-1}(f(\mathcal{X})) = \mathcal{X}$, luego $f(\mathcal{X})$ es abierto y cerrado, siendo por tanto $\mathcal{Y} \setminus f(\mathcal{X})$ también un clopen. ◇

Así pues a partir de ahora nos centraremos en el caso sobreyectivo.

Finalizamos la sección dando una última definición.

Definición 3.2.2 (Identificación). Una aplicación $f : (\mathcal{X}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathcal{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}})$ se dice **identificación** si es sobreyectiva y $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}} = f(\mathcal{T})$.

3.2.4. Construcción de cocientes

En este apartado vamos a ver exactamente cuáles son las virtudes de trabajar con el caso sobreyectivo.

Si f es sobreyectiva podemos definir una relación de equivalencia \sim sobre \mathcal{X} de forma que la aplicación $\bar{f} : \frac{\mathcal{X}}{\sim} \rightarrow \mathcal{Y}$ esté bien definida y sea una biyección. Donde $\bar{f}([x]) = f(x)$.

En este caso $\frac{\mathcal{X}}{\sim}$ denota el conjunto cociente inducido por la relación de equivalencia \sim y $[x]$ la clase de equivalencia de x .

Evidentemente, la relación de equivalencia \sim será la inherente a la inyectividad.

Definición 3.2.3 (Relación de inyectividad). Definimos la relación de equivalencia \sim sobre \mathcal{X} (¡compruébes!) como la que relaciona aquellos elementos de \mathcal{X} que comparten imagen por f . Es decir $x \sim y$ si y solo si $f(x) = f(y)$. Normalmente diremos que esta es la relación de equivalencia inducida o asociada a f .

Nótese el gran parecido de este cambalache con el primer teorema de isomorfía para grupos o anillos. Por supuesto, se deja como ejercicio al lector comprobar que \bar{f} está bien definida y es biyectiva.

Antes de continuar presentamos una pequeña definición.

Definición 3.2.4 (Proyección canónica). Dados un conjunto \mathcal{X} y una relación de equivalencia \sim sobre \mathcal{X} , definimos la **proyección canónica** como la aplicación

$$p : \mathcal{X} \rightarrow \frac{\mathcal{X}}{\sim} \\ x \mapsto [x]$$

Donde $[x]$ denota la clase de equivalencia de x .

Ya con todos estos preliminares en la cabeza, vamos a dotar a $\frac{\mathcal{X}}{\sim}$ de estructura de espacio topológico, y lo haremos (por comodidad) dotándole de la topología de las imágenes directas respecto de la proyección canónica p .

Como esto ya empieza a ser un poco tenebroso, hagamos un diagrama.

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{X}, \mathcal{T}) & \xrightarrow{f} & (\mathcal{Y}, f(\mathcal{T})) \\ \downarrow p & \nearrow \bar{f} = f \circ p^{-1} & \\ (\frac{\mathcal{X}}{\sim}, p(\mathcal{T})) & & \end{array}$$

Introduzcamos una definición por comodidad.

Definición 3.2.5 (Topología cociente). Definimos la **topología cociente** como

$$\mathcal{T}/\sim := \left\{ \mathcal{U} \subset \frac{\mathcal{X}}{\sim} : p^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{T} \right\}$$

es decir, la topología cociente es la topología imagen por p .

Nuestro objetivo ahora es ver qué relación hay entre los espacios $\frac{\mathcal{X}}{\sim}$ e \mathcal{Y} . Sin rodeos adelantamos que son homeomorfos.

Proposición 3.2.3 (Teorema de homeomorfía). $(\frac{\mathcal{X}}{\sim}, \mathcal{T}/\sim)$ es homeomorfo a $(\mathcal{Y}, f(\mathcal{T}))$. Además, \bar{f} es un homeomorfismo.

Demostración. Probemos el “además” con lo cual tendremos el resultado.

Sabemos que \bar{f} es una biyección entre $\frac{\mathcal{X}}{\sim}$ e \mathcal{Y} , luego únicamente queda demostrar la continuidad en ambos sentidos.

La propiedad universal de $\frac{\mathcal{X}}{\sim}$ nos dice que \bar{f} es continua si y solo si $\bar{f} \circ p$ es continua.

Teniendo en cuenta que $\bar{f} = f \circ p^{-1}$ tenemos que $\bar{f} \circ p = f \circ p^{-1} \circ p = f$, como f es continua hemos terminado.

Para la continuidad de \bar{f}^{-1} seguimos un argumento similar.

Por la propiedad universal de $f(\mathcal{T})$, \bar{f}^{-1} es continua si y solo si $\bar{f}^{-1} \circ f$ es continua.

Pero $\bar{f}^{-1} \circ f = p \circ f^{-1} \circ f = p$, y p es continua por definición. ■

3.2.5. Saturación

En este apartado estudiaremos en detalle la topología de \mathcal{X}/\sim . Al ser este espacio homeomorfo al espacio \mathcal{Y} , si comprendemos la topología del cociente comprenderemos de regalo la topología de \mathcal{Y} (lo cual es una estrategia tremendamente fecunda).

Antes de comenzar introduzcamos una definición.

Definición 3.2.6 (Conjunto saturado). Decimos que $A \subset \mathcal{X}$ es **saturado** si para todo punto $x \in A$ se verifica que también están todos los de su clase de equivalencia.

Dicho de otra manera, si $x \in A$ entonces $p^{-1}([x]) \subset A$.

Por ende, un conjunto saturado será unión (obviamente disjunta) de clases de equivalencia por ende se verifica la ecuación

$$p^{-1}(p(A)) = A \quad (3.1)$$

Esta definición de conjunto saturado es útil pues caracteriza a la topología cociente como vemos a continuación.

Proposición 3.2.4 (Caracterización de la topología cociente). *La topología cociente está conformada por la proyección canónica de los abiertos saturados. Es decir*

$$\mathcal{T}/\sim = \{p(\mathcal{W}) : \mathcal{W} \in \mathcal{T} \text{ y } \mathcal{W} \text{ saturado}\}$$

Demostración. Sea \mathcal{U} abierto del cociente veamos que podemos expresarlo como la proyección canónica de un abierto saturado.

Por construcción $p^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto saturado de \mathcal{X} . Si se diera la igualdad $p(p^{-1}(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$ habríamos demostrado un contenido (y efectivamente así es por sobreyectividad de p).

Recíprocamente, sea \mathcal{W} abierto saturado es claro que $p(\mathcal{W})$ es abierto ya que, por ser \mathcal{W} saturado $p^{-1}(p(\mathcal{W})) = \mathcal{W} \in \mathcal{T}$. ■

Observación 3.2.3 (Cerrados saturados). Con un argumento análogo al de la proposición 3.2.4 puede demostrarse que los cerrados del cociente son las proyecciones canónicas de los cerrados saturados. ◇

Con lo que ya sabemos podemos dar algunas condiciones suficientes para que una aplicación sea una identificación entre espacios topológicos.

Proposición 3.2.5 (Condiciones suficientes de identificación). *Sea $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ una aplicación sobreyectiva.*

Si se verifica alguna de las siguientes condiciones, f es una identificación:

1. f es una aplicación continua abierta.
2. f es una aplicación continua cerrada.

Demostración. Demostraremos únicamente (1.), (2.) es análogo y se deja como ejercicio.

Como f es sobreyectiva únicamente queda comprobar que la topología de \mathcal{Y} sea la topología imagen. Al ser f continua automáticamente se tiene que $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}} \subset f(\mathcal{T})$.

Recíprocamente, dado $\mathcal{U} \in f(\mathcal{T})$, por construcción $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{T}$, como f es sobreyectiva y abierta se verifica que $f(f^{-1}(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$ es abierto de \mathcal{Y} , por ende se da la igualdad de las topologías. ■

Nótese que puede haber identificaciones que no verifiquen ninguna de las condiciones anteriores. Además, como no se exige que las identificaciones sean biyectivas, las dos condiciones anteriores no son equivalentes.

Toda esta construcción abstracta debe servirnos para formalizar todo el concepto de cociente de un espacio. Esta es quizá la idea más importante que se va a ver en toda la asignatura, y es excepcionalmente útil para construir una gigantesca variedad de homeomorfismos y encontrar objetos simples homeomorfos a otros mucho más complejos.

En el siguiente apartado veremos un fragmento de la potencia de estas ideas, que insistimos en que son esencialmente las que las vistas en álgebra abstracta cuando estudiábamos los anillos inducidos por un homomorfismo evaluación usando el cociente del anillo por un polinomio.

3.2.6. Aplicaciones

En este apartado presentamos un montón de ejemplos para familiarizarnos con todas estas ideas. En primer lugar, vamos a estudiar la circunferencia unidad \mathbb{S}^1 como un cociente de la recta real.

Ejemplo 3.2.1 (Circunferencia unidad). Definimos la aplicación φ como

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ t &\mapsto e^{2\pi it} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)\end{aligned}$$

Compruébese que la relación de equivalencia inducida por la no inyectividad es:

$$s \sim t \iff e^{2\pi is} = e^{2\pi it} \iff s - t \in \mathbb{Z}$$

Vamos a ver que la circunferencia unidad \mathbb{S}^1 es homeomorfa a \mathbb{R}/\sim .

Nos queda, pues, el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{S}^1 \\ \downarrow & \swarrow & \\ \mathbb{R}/\sim & & \end{array}$$

Está claro que la aplicación que manda \mathbb{R} a \mathbb{S}^1 es una identificación, pues es sobreyectiva, continua y homeomorfismo local, luego es abierta (¡compruébese!).

Ahora, nótese que considerando $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ podemos tomar las restricciones correspondientes con el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{S}^1 \\ \downarrow & \swarrow & \\ [0, 1] & \searrow & \mathbb{R}/\sim \end{array}$$

y llegar a otra identificación $\varphi|_{[0,1]}$ (compruébese). Ahora la relación de equivalencia asociada es simplemente aquella en la que $1 \sim 0$ y todos los demás puntos son solamente equivalentes a sí mismos.

Por ende hemos concluido que la circunferencia unidad es homeomorfa al intervalo $[0, 1]$ si “pegamos” los extremos, es decir, la circunferencia unidad es homeomorfa a $[0, 1]/\sim$. \diamond

Esta posibilidad de encontrar, a veces, un cociente más simple que tiene la misma topología nos motiva a definir:

Definición 3.2.7 (Dominio fundamental). Dada una identificación f entre espacios topológicos llamamos **dominio fundamental** al menor subconjunto D de \mathcal{X} tal que $f|_D$ continúa siendo identificación.

A veces se exigen también algunas condiciones de regularidad extra, por ejemplo, que D sea cerrado o “compacto”. Normalmente nosotros pediremos que sea cerrado.

Observación 3.2.4 (Definición equivalente). Es claro que si la restricción de una identificación $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ a un conjunto D continúa siendo identificación, el conjunto D posee al menos un representante de cada clase de equivalencia de $\frac{\mathcal{X}}{\sim}$ (si no se rompe la sobreyectividad).

Recíprocamente, si restringimos una identificación a un subconjunto que contenga al menos un representante de cada clase de equivalencia continúa siendo una identificación, ya que \mathcal{U} es abierto de \mathcal{Y} si y solo si $f^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto de \mathcal{X} lo cual es equivalente a que $f^{-1}(\mathcal{U}) \cap D$ sea abierto de D , pero resulta que $f|_D(\mathcal{U}) = f^{-1}(\mathcal{U}) \cap D$ (luego hemos ganado).

Como conclusión obtenemos que podríamos haber definido dominio fundamental como el menor subconjunto de \mathcal{X} que contiene al menos un representante de cada clase de equivalencia (con las condiciones de regularidad adicionales que queramos). \diamond

Ejemplo 3.2.2 (Toro). Ahora, vamos a considerar el **toro plano** \mathbb{T}^2 . El toro \mathbb{T}^2 se define como el producto cartesiano $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^4$ con la topología relativa correspondiente.

El toro plano admite una representación en \mathbb{R}^3 como vemos en la figura 3.1. Informalmente se trata de una figura generada por revolución de una circunferencia en torno a un eje (o simplemente de un rosco).

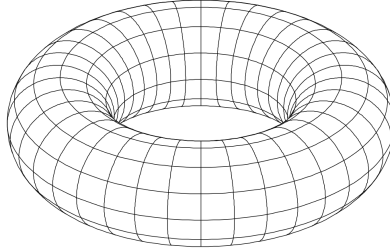


Figura 3.1: Ilustración de un toro

Si consideramos la aplicación $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por:

$$\begin{aligned} x &= \cos(2\pi x), \\ y &= \sin(2\pi x), \\ z &= \cos(2\pi y), \\ t &= \sin(2\pi y). \end{aligned}$$

Vamos a hacer pues una construcción similar a la ya vista para la circunferencia unidad. Nos queda un esquema del siguiente tipo:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^4 \\ \begin{array}{c} \subset \\ [0, 1]^2 \end{array} \swarrow & \downarrow & \nearrow \\ & \mathbb{R}^2 / \sim & \end{array}$$

En este caso, la relación de equivalencia inducida es (¡háganse las cuentas!):

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x - x' \in \mathbb{Z}, y - y' \in \mathbb{Z}$$

y como dominio fundamental encontramos el cuadrado $[0, 1]^2$.

La demostración de que φ es identificación sigue la misma filosofía que la del ejemplo anterior, es decir, se basa en demostrar que es homeomorfismo local (no lo haremos aquí).

Así pues queda demostrado que si cogemos un cuadrado y “pegamos” sus bordes tal y como indica la figura 3.2 obtenemos un espacio homeomorfo al toro, es decir a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Dicho formalmente $[0, 1]^2 / \sim$ es homeomorfo al toro plano. \diamond

A menudo, los dominios fundamentales son representables mediante esquemas llamados **polígonos fundamentales** (recortables infantiles exóticos).

La forma de entenderlos es que la relación de equivalencia “pega” los puntos de A y de B en el sentido que indican las flechas, como vemos en el ejemplo siguiente, que representa el toro que acabamos de describir:

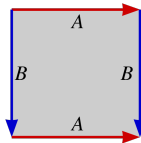


Figura 3.2: Polígono fundamental de un toro plano

En el siguiente ejemplo, vamos a ver varios homeomorfismos cociente importantes pero sin entrar en tantos detalles como en los ejemplos previos. Para familiarizarnos íntimamente con el espacio cociente, es un buen ejercicio mental tratar de visualizar cómo podemos deformar un objeto del ejemplo siguiente para transformarlo en otro homeomorfo. Al fin y al cabo, la homeomorfía, intuitivamente, es poder deformar sin romper, y los cocientes formalizan la noción de “pegar” puntos.

Ejemplo 3.2.3 (Otros espacios cociente interesantes).

1. La esfera \mathbb{S}^2 se puede identificar con el disco unidad si la relación de equivalencia es la que hace que todos los puntos del borde (la circunferencia) estén relacionados entre sí y los demás, solo consigo mismos. De la misma forma, la podemos identificar con dos discos donde la relación de equivalencia “pega” los bordes.

Por último, una esfera puede identificarse con un polígono fundamental de la siguiente manera

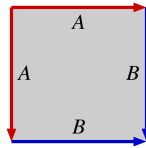


Figura 3.3: Polígono fundamental de la esfera.

2. Podemos identificar el plano proyectivo real \mathbb{P}^2 con un disco y una banda de Möbius donde la relación de equivalencia “pega” los bordes (tiene su miga y no lo haremos aquí).

También podemos identificarlo con una semiesfera en la que cada punto del borde es equivalente a su antípoda, o con una esfera completa en la que dos puntos están relacionados si y solo si son antipodales.

Además, también admite una identificación como polígono fundamental

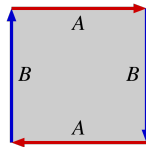


Figura 3.4: Polígono fundamental del plano proyectivo real.

3. Ya como colofón podemos definir como espacios con topología cociente dos objetos más.

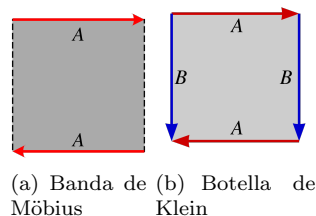


Figura 3.5: Banda de Möbius y Botella de Klein

Esto es objetivamente bonito. ◇

Observación 3.2.5 (Otro tipo de problema). Puede ocurrir que no tengamos ni idea de cual puede ser una posible identificación entre un espacio y otro pero si sepamos a qué cociente podría ser homeomorfo el espacio a estudiar, lo cual, a la postre puede ayudarnos a encontrar una identificación cuyo cociente inducido sea el candidato (y demostrar así la homeomorfía). ◇

Ejemplo 3.2.4 (Cilindro). Para ilustrar el problema descrito en la observación 3.2.5 vamos a imaginar que estamos en el jardín de infancia jugando con cartulinas, nosotros, que somos chavales avispados, sabemos que el cilindro se define como $\mathbb{S}^1 \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$, pero nosotros sólo tenemos una cartulina, eso es $[0, 1]^2$. De pronto se nos enciende la bombilla y decimos, “¡anda coño!” (Arquímedes hubiera dicho “¡jeureka!”) y comprobamos que si pegamos los bordes del cuadrado nos sale algo, así a ojo, muy parecido a un cilindro.

Esta idea de pegar los bordes la podemos modelizar con la relación de equivalencia

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x - x' \in \mathbb{Z}, y = y'$$

Visto con polígono fundamental

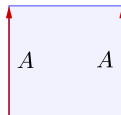


Figura 3.6: Polígono fundamental del cilindro.

Dicho formalmente, estamos considerando el espacio cociente $[0, 1]^2 / \sim$ como candidato a ser homeomorfo al cilindro. Para demostrar que así es debemos encontrar una aplicación $\varphi : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ tal que su relación de equivalencia asociada sea \sim y además sea identificación.

Es claro que se debe cumplir $\varphi(0, y) = \varphi(1, y) = (x', y', z')$ y que $x'^2 + y'^2 = 1$ para todo $y \in [0, 1]$.

Llegados a este punto más vale que se te ilumine la cabeza y te des cuenta de que una función trigonométrica te haría muy buen apaño. Por ejemplo

$$\begin{aligned}\varphi : x' &= \cos(2\pi x) \\ y' &= \sin(2\pi x) \\ z' &= y\end{aligned}$$

Esta función cumple trivialmente todas las propiedades requeridas. Es evidente que es sobreyectiva en $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ además también es continua, y, no solo eso sino que es homeomorfismo local, con lo cual es abierta.

En ningún momento hemos demostrado que ningunas de las aplicaciones vistas en ejemplos sean homeomorfismos locales (que parece ser la clave para demostrar que son abiertas y por tanto identificaciones), sin embargo lo hacemos porque más adelante veremos resultados potentes que nos permitirán demostrar este tipo de cosas de un plumazo.

Bien, si damos por hecho eso, ya habríamos demostrado formalmente que $[0, 1]^2 / \sim$ es homeomorfo al cilindro, y, por tanto, podríamos ir a pedir una pegatina en forma de estrella, que nos la hemos ganado. \diamond

3.3. Producto de espacios topológicos

Una vez visto el caso del espacio cociente, pasamos ahora a realizar un desarrollo similar para otras construcciones como son los productos y sumas de espacios topológicos. Se va a realizar un procedimiento análogo en el desarrollo de las mismas al de la anterior sección.

Sean $(X_i, \mathcal{T}_i)^{1 \leq i \leq r}$ espacios topológicos y sea $Y = \prod_i X_i$. Tomamos entonces

$$Y = \prod_i X_i \xrightarrow{p_i^r} (X_i, \mathcal{T}_i) \quad (3.2)$$

Lo que buscamos en la construcción del espacio producto es dotar a Y de la topología \mathcal{T} más fina que haga continuas todas las aplicaciones p_i^r para $1 \leq i \leq r$. A dichas p_i^r las conoceremos a partir de ahora como **proyecciones**.

De este modo, como queremos que p_i^r sea continua tenemos que para todo abierto $U_i \in \mathcal{T}_i$ deberá verificarse que $(p_i^r)^{-1}(U_i) = X_1 \times \cdots \times U_i \times \cdots \times X_r$ (todos son los totales excepto en el caso de X_i) sea abierto. Es decir, que se cumpla $X_1 \times \cdots \times U_i \times \cdots \times X_r \in \mathcal{T}$.

Por lo tanto, vemos que por ser topología ha de verificarse que $(p_i^r)^{-1}(U_i) \cap (p_j^r)^{-1}(U_j) = X_1 \times \cdots \times U_i \times \cdots \times U_j \times \cdots \times X_r$ sea parte de ella (intersección de abiertos).

Si tomamos ahora $\{U_1 \times \cdots \times U_r : U_i \in \mathcal{T}_i\}$ veamos que es una base de la topología que pretendemos construir. Esto va a resultar evidente, ya que tan solo debemos comprobar para demostrarlo que al intersecar dos elementos cualesquiera de la base nos queda otro elemento de la base.

Como dados $U_1 \times \cdots \times U_r$ y $V_1 \times \cdots \times V_r$ elementos de la base su intersección es $(U_1 \cap V_1) \times \cdots \times (U_r \cap V_r)$ y como $(U_i \cap V_i) \in \mathcal{T}_i$, afirmamos que forma parte de la base por la definición de la misma.

Así, una vez que tenemos la base que va a caracterizar nuestra topología producto podemos afirmar que esta viene dada por $\mathcal{T} = \prod_i \mathcal{T}_i$.

Definición 3.3.1 (Topología producto). Sean $(X_i, \mathcal{T}_i)^{1 \leq i \leq r}$ espacios topológicos y sea $Y = \prod_i X_i$. Entonces se conoce como **topología producto** a la topología \mathcal{T} de Y que viene dada por la base $\{U_1 \times \cdots \times U_r : U_i \in \mathcal{T}_i\}$ (es decir, el producto de las topologías).

Podemos formular, además, una propiedad universal del producto que caracteriza a esta topología:

Lema 3.3.1 (Propiedad universal del producto). *En la siguiente situación,*

$$\begin{array}{ccc} Y = \prod_i X_i & \xrightarrow{p_i} & (X_i, \mathcal{T}_i) \\ \uparrow (f_1, \dots, f_n) = f & \nearrow p_i \circ f = f_i & \\ (Z, \mathcal{T}') & & \end{array}$$

tenemos la **propiedad universal del producto** que caracteriza la continuidad de f , diciendo que esta será continua si y solo si $f_i = p_i^r \circ f$ son continuas para todo i .

Demostración. Vemos que si f es continua, como p_i^r son continuas, tenemos que f_i también lo será al ser composición de estas.

Por otro lado, tenemos que dado $W = \prod_i U_i$ abierto en X , tenemos que $f^{-1}(W) = \bigcap_i f_i^{-1}(U_i)$ será abierto dado que los $f_i^{-1}(U_i)$ son abiertos por ser f continua. Así, como hemos probado que la imagen inversa de abiertos es abierta, tenemos que f es continua. ■

Veamos ahora que la propiedad universal caracteriza la topología.

Proposición 3.3.2. *Si (Y, \mathcal{T}_Y) cumple la propiedad universal del producto, entonces $\mathcal{T}_Y = \prod \mathcal{T}_i$*

Demostración. Vamos a demostrarlo por doble contención y haciendo algún cambalache con la identidad. Empecemos con un diagrama para aclarar las ideas.

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{T}_Y) & \xrightarrow[p_{r_i}]{} & (X_i, \mathcal{T}_i) \\ \uparrow \text{id} & \nearrow p_{r_i} = p_{r_i} \circ \text{id} & \\ (Y, \mathcal{T}_Y) & & \end{array}$$

Como la topología \mathcal{T}_Y cumple la propiedad universal y la aplicación identidad es continua, tenemos que p_{r_i} es continua. Luego por finura $\prod \mathcal{T}_i \subset \mathcal{T}_Y$.

Ahora razonamos con este diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{T}_Y) & \xrightarrow[p_{r_i}]{} & (X_i, \mathcal{T}_i) \\ \uparrow \text{id} & \nearrow p_{r_i} = p_{r_i} \circ \text{id} & \\ (Y, \prod \mathcal{T}_i) & & \end{array}$$

Como por construcción p_{r_i} es continua, entonces id es continua. Esto solo ocurre si $\mathcal{T}_Y \subset \prod \mathcal{T}_i$. ■

Vamos a ver ahora una serie de proposiciones relacionadas con la topología producto, las cuales a pesar de resultar sencillas de comprobar nos proporcionan resultados interesantes.

Proposición 3.3.3. *Las proyecciones son abiertas.*

Demostración. Sea W abierto en el espacio producto, veamos que $p_i^r(W)$ es abierto.

Nos basta con comprobarlo con los abiertos de la base, es decir, para los elementos de la forma $U_1 \times \cdots \times U_r : U_i \in \mathcal{T}_i$. Como $p_i^r(U_1 \times \cdots \times U_r) = U_i$ es abierto podemos concluir la demostración. ■

Proposición 3.3.4. *La aplicación $f : X_i \rightarrow \{a_1\} \times \cdots \times X_i \times \cdots \times \{a_r\} \subset X_1 \times \cdots \times X_r$ tal que $x \mapsto (a_1, \dots, x, \dots, a_r)$ es una inmersión.*

Demostración. Evidentemente, f es biyectiva. Por otra parte, f es la aplicación $(k_1, \dots, id, \dots, k_r)$ continua, por serlo la identidad. Además, $f^{-1} = p_{r_i} \upharpoonright_{\{a_1\} \times \cdots \times X_i \times \cdots \times \{a_r\}}$ es continua por serlo las proyecciones. Luego f es homeomorfismo. ■

Observación 3.3.1 (Consecuencias). La topología de $\{a_1\} \times \cdots \times X_i \times \cdots \times \{a_r\}$ es exactamente la de X_i . Esto constituye un truco para comprobar si una topología es una topología producto. ◇

Ahora pasamos a ver si somos capaces de construir bases más sencillas para nuestra topología producto, es decir, conformadas por menos abiertos. Igualmente, veremos el modo de construcción de bases de entornos en el espacio producto. No vamos a probar que sean bases realmente en ninguno de los dos casos ya que en ambos casos va a resultar muy sencillo aplicando la caracterización de base, dejándose como ejercicio para el lector de cara al repaso de la misma.

1. Dado el espacio producto $(\prod_i X_i, \prod_i \mathcal{T}_i)$ tenemos que:

$$\mathcal{B} = \{W_i \times \cdots \times W_r : W_i \in \mathcal{B}_i \text{ base de } \mathcal{T}_i\}$$

es base de entornos del mismo.

Demostración. Sea $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$. Podemos descomponerlo como sigue $\mathcal{U} = U_1 \times \cdots \times U_r$ con $U_i \in \mathcal{T}_i$ y $U_i = \bigcup_j W_{ij}$ con $W_{ij} \in \mathcal{B}_i$. Sea $x \in \mathcal{U}$. Entonces $x \in W_{1j} \times \cdots \times W_{rj} \subset \bigcup_j W_{1j} \times \cdots \times \bigcup_j W_{rj} = U_1 \times \cdots \times U_r$. Haciendo este procedimiento para cada punto se sigue el resultado. ■

2. Dado el espacio producto $(\prod_i X_i, \prod_i \mathcal{T}_i)$ y $(a_1, \dots, a_r) \in \prod_i X_i$ tenemos que:

$$\mathcal{V}_{(a_1, \dots, a_r)} = \{V_{a_1} \times \cdots \times V_{a_r} : V_{a_i} \in \mathcal{V}_{a_i} \text{ base de entornos en } \mathcal{T}_i\}$$

es base de entornos del mismo.

Por último, algunas observaciones útiles sobre la topología de los productos son

Proposición 3.3.5 (Adherencia). *Sean X_i espacios topológicos y A_i subconjuntos de X_i . Tenemos que*

$$Adh(A_1 \times \cdots \times A_r) = Adh(A_1) \times \cdots \times Adh(A_r)$$

Demostración. Por una parte tenemos que $x \in Adh(A_1 \times \cdots \times A_r) \iff$ dado un entorno $U_1 \times \cdots \times U_r$ de x , dicho entorno corta a $A_1 \times \cdots \times A_r$. Por otra parte, $x \in Adh(A_1) \times \cdots \times Adh(A_r) \iff \forall U_1 \times \cdots \times U_r$ se cumple que $U_i \cap A_i \neq \emptyset \forall i$. Finalmente, gracias a la siguiente propiedad $(U_1 \times \cdots \times U_r) \cap (A_1 \times \cdots \times A_r) = (U_1 \cap A_1) \times \cdots \times (U_r \cap A_r)$ se llega al resultado. ■

Proposición 3.3.6 (Cerrados). *Sean X_i espacios topológicos y A_i subconjuntos de X_i . Tenemos que $A_1 \times \cdots \times A_r$ es cerrado $\iff A_i$ es cerrado $\forall i$.*

Demostración. Veamos que si A_i es cerrado $\forall i$ entonces $A_1 \times \cdots \times A_r$ es cerrado. Basta ver que $A_1 \times \cdots \times A_r$ coincide con su adherencia, que por la proposición anterior coincide con $Adh(A_1) \times \cdots \times Adh(A_r)$, que a su vez es $A_1 \times \cdots \times A_r$, pues cada A_i coincide con su adherencia por ser cerrado. La otra implicación se deja al lector. ■

3.4. Suma

Vamos a ver como última la construcción la suma, la cual gracias al desarrollo previo de los casos anteriores va a resultar de fácil comprensión para el lector. La idea de esta construcción va a ser la de realizar copias de objetos a distintas “alturas” (como si los colocáramos en estantes).

Como antes, vamos a comenzar viendo las propiedades que debe cumplir la topología que caracterice nuestro espacio para luego pasar a construirla.

Dados los espacios $(X_i, \mathcal{T}_i)^{1 \leq i \leq r}$ con sus correspondientes topologías, construimos el espacio suma como

$$(X_i, \mathcal{T}_i) \xrightarrow{j_i} Y = \sum_{i=1}^r X_i = \bigcup_{i=1}^r \{i\} \times X_i \quad (3.3)$$

Conviene resaltar que, como podemos observar, las copias de los distintos espacios X_i en la suma será distinta, dado que a cada una le corresponderá un elemento i distinto.

Ahora bien, nuestro objetivo en esta construcción será el de crear la topología \mathcal{T} más fina en Y de modo que haga las j_i continuas. Las funciones j_i las llamaremos **inclusiones**.

Por definición de continuidad, podemos (y debemos, ya que buscamos que sea la más fina) incluir en \mathcal{T} todos los conjuntos de Y cuya inversa sea abierta. De este modo, también incluiremos $\{i\} \times X_i$ dado que $j_i^{-1}(\{i\} \times X_i) = X_i$ que es abierto en \mathcal{T}_i .

Ahora construimos la topología que tiene como base $\mathcal{B} = \{\{i\} \times U_i : U_i \in \mathcal{T}_i\}$ comprobemos que está bien definida y que es realmente base.

$$(\{i\} \times U_i) \cap (\{j\} \times U_j) = \begin{cases} \{i\} \times (U_i \cap U_j) \in \mathcal{T} & \text{si } i = j \\ \emptyset \in \mathcal{T} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.4)$$

Como podemos ver, ambos casos verifican que la intersección está contenida en \mathcal{T} como debíamos demostrar para ver que es base del mismo. Así, podemos definir:

Definición 3.4.1 (Topología suma). Dados los espacios con sus correspondientes topologías $(X_i, \mathcal{T}_i)^{1 \leq i \leq r}$ y el espacio suma $Y = \sum_{i=1}^r X_i$, construimos la **topología suma** como aquella topología que tiene como base $\mathcal{B} = \{\{i\} \times U_i : U_i \in \mathcal{T}_i\}$.

Una vez vista su definición, veamos ahora un resultado fundamental acerca de la topología suma que no va a ser otra que la siguiente propiedad universal:

Lema 3.4.1 (Propiedad universal de la suma). *En la siguiente situación:*

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ j_i \uparrow & \searrow f & \\ X_i & \xrightarrow{f_i} & Y \end{array}$$

tomando en X_i las topologías \mathcal{T}_i y siendo (Y, \mathcal{T}) , tenemos la siguiente **propiedad universal de la suma** que caracteriza la continuidad de f , diciendo que esta será continua si y solo si $f_i = j_i \circ f$ son continuas para todo i .

Demostración. Vemos que si f es continua, como j_i son continuas, tenemos que f_i también lo será al ser composición de estas.

Por otro lado, tenemos que dado que (Y, \mathcal{T}) como hemos visto en la construcción de la topología suma T es un recubrimiento abierto y continuo en cada uno de los X_i , tenemos que al ser continuo cada f_i en X_i también lo será f . ■

Resulta importante indicar que como se desprende de la demostración (segunda implicación) la propiedad universal no solo nos va a caracterizar la función g , sino que nos permite caracterizar también la topología suma (si no se cumple la propiedad podemos asegurar que no estamos trabajando en esta).

Observación 3.4.1. Veamos por último un par de observaciones sobre esta topología que pueden resultar interesantes de cara a conocer el mecanismo de la misma.

1. Como hemos visto, $\{i\} \times X_i \subset \sum_j X_j$ siendo $\{i\} \times X_i$ abierto. Veamos que también es cerrado. Dado que $\sum_j X_j \setminus \{i\} \times X_i = \bigcup_{j \neq i} X_j$ es abierto, lo tenemos.
2. Las inclusiones $X_l \xrightarrow{j_l} \sum_i X_i$ son inmersiones abiertas y cerradas. Esto lo dejamos como ejercicio al lector, es un ejercicio sencillo pero puede resultar útil como repaso del modo de construcción de la topología suma realizado previamente en el apartado. \diamond

Capítulo 4

Separación

4.1. Separación de puntos

La separación de puntos consiste en, dados dos puntos distintos, saber distinguirlos topológicamente. A pesar de que hay más de un modo de hacerlo, nos centraremos solo en una. Para ello, consideremos dos puntos x e y distintos y vamos a definir ciertos axiomas que nos ayuden en nuestro estudio.

- El axioma T_0 o Kolmogorov dice que existe un entorno de uno de los dos puntos (sin especificar cuál) que no contiene al otro.
- El axioma T_1 o Fréchet dice que existe un entorno \mathcal{V}^x de x que no contiene a y y también existe un entorno \mathcal{V}^y de y que no contiene a x .
- El axioma T_2 o Hausdorff dice que existen un entorno \mathcal{V}^x de x y un entorno \mathcal{V}^y de y que son disjuntos.

Evidentemente, cada axioma es más restrictivo que el anterior.

Observación 4.1.1. Todo espacio métrico es T_2 . En efecto, si consideramos dos puntos distintos x e y , podemos tomar bolas centradas en cada uno de los puntos de radio menor que la mitad de la distancia que los separa. De este modo, obtenemos dos entornos abiertos que son disjuntos. \diamond

4.2. Caracterizaciones

En esta subsección vamos a estudiar varios resultados útiles que se desprenden directamente de los axiomas que hemos definido anteriormente.

Proposición 4.2.1. Un conjunto \mathcal{X} es T_1 si y solo si todos sus puntos son cerrados.

Demostración. \Leftarrow) Consideremos un punto cualquiera $x \in \mathcal{X}$ y supongamos que $\{x\}$ es cerrado. De este modo, $\mathcal{U} = \mathcal{X} \setminus \{x\}$ es abierto, y si $x \neq y \in \mathcal{X}$, entonces \mathcal{U} es un conjunto abierto tal que $x \notin \mathcal{U}$ e $y \in \mathcal{U}$.

\Rightarrow) Supongamos ahora que \mathcal{X} es un espacio T_1 y sea $x \in \mathcal{X}$. Entonces para cada $y \in \mathcal{X}$ existe un abierto $\mathcal{U}_y \subseteq \mathcal{X}$ tal que $y \in \mathcal{U}_y$ y $x \notin \mathcal{U}_y$. Tomemos $\mathcal{U} = \bigcup_{y \in \mathcal{X} \setminus \{x\}} \mathcal{U}_y = \mathcal{X} \setminus \{x\}$, que es abierto por ser unión arbitraria de abiertos, luego $\{x\}$ es cerrado. ■

Teorema 4.2.2. Si $f, g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ son funciones continuas e \mathcal{Y} es T_2 , entonces $\{f = g\}$ es cerrado.

Demostración. Hemos de demostrar que el conjunto $\{f \neq g\}$ es abierto. Dado $x \in \mathcal{X}$, si se tiene que $f(x) \neq g(x)$ y al ser \mathcal{Y} un espacio T_2 , existen entornos $\mathcal{V}_{f(x)}$ y $\mathcal{V}_{g(x)}$ disjuntos. Como f y g son continuas, se tiene además que $f^{-1}(\mathcal{V}_{f(x)})$ y $f^{-1}(\mathcal{V}_{g(x)})$ son entornos de x . La intersección de entornos, como ya sabemos, también es entorno, luego $\mathcal{V}_x = f^{-1}(\mathcal{V}_{f(x)}) \cap f^{-1}(\mathcal{V}_{g(x)})$ es un entorno de x contenido en $\{f \neq g\}$. En efecto, que $z \in \mathcal{V}_x$ quiere decir que $f(z) \in \mathcal{V}_{f(x)}$ y $g(z) \in \mathcal{V}_{g(x)}$, pero al ser estos entornos disjuntos, $f(z) \neq g(z)$. Con esto concluye la demostración, ya que si \mathcal{V}_x es entorno (abierto) contenido en $\{f \neq g\}$, este conjunto es abierto. ■

Veamos ahora un caso particular del teorema anterior. Consideremos el espacio producto $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ y las proyecciones p_1 y p_2 desde este a \mathcal{X} . El resultado anterior nos da que $\Delta := \{p_1 = p_2\}$ es un conjunto cerrado. Nótese que $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathcal{X}\}$, esto es, la diagonal. De este modo, un conjunto es T_2 si y solo si su diagonal es cerrada.

Para terminar, veamos un colorario del teorema realizado con los conjuntos densos.

Corolario 4.2.3. *Si $f, g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ son funciones continuas que coinciden en un conjunto denso y \mathcal{X} es T_2 entonces f y g son iguales en \mathcal{X} .*

Demostración. Sea $A \subset \mathcal{X}$ un conjunto denso, es decir, $\bar{A} = \mathcal{X}$. Como ya hemos visto, $A \subset \{f = g\}$ es un conjunto cerrado, pero al ser la clausura de A el menor cerrado que lo contiene y coincidir con el total, entonces $\{f = g\} = \mathcal{X}$. ■

4.3. Comportamiento topológico

En esta sección, comprobaremos cómo se comportan topológicamente los conjuntos T_2 si se ven sometidos a cocientes, sumas finitas...

- Si $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ es un espacio topológico T_2 entonces (A, \mathcal{T}_A) , donde $\emptyset \subset A \subseteq \mathcal{X}$ es un subespacio de \mathcal{X} y $\mathcal{T}_A = \{\mathcal{U} \cap A : \mathcal{U} \in \mathcal{T}\}$ es la topología relativa, es T_2 . Se dice entonces que propiedad de ser T_2 es hereditaria. En efecto, sean $x, y \in A$ tales que $x \neq y$. Al pertenecer estos puntos también a \mathcal{X} , existe \mathcal{V}^x y \mathcal{V}^y entornos disjuntos de x e y respectivamente. Pero al pertenecer también a A , entonces $x \in \mathcal{V}^x \cap A$ y $y \in \mathcal{V}^y \cap A$, lo que conduce a que $(\mathcal{V}^x \cap A) \cap (\mathcal{V}^y \cap A) = \emptyset$. De este modo, se cumple el axioma T_2 en A .
- Si \sim es una relación de equivalencia en un espacio \mathcal{X} que es T_2 , el espacio \mathcal{X}/\sim con la topología propia de la identificación no es en general T_2 . Para verlo, basta definir como relación de equivalencia en \mathbb{R} con la topología usual $x \sim y$ si y solo si $x - y \in \mathbb{Q}$. Así, la identificación $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim$ (el espacio de partida equipado con la topología usual y el de llegada con la trivial), muestran lo que buscamos.
- Si \mathcal{X}_1 y \mathcal{X}_2 son dos espacios T_2 , entonces su producto $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ también lo es. En efecto, consideremos dos puntos distintos del producto $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$ y supongamos que $x_1 \neq y_1$. Así, existen entornos \mathcal{V}^{x_1} y \mathcal{V}^{y_1} disjuntos que cumplen que $\mathcal{V}^{x_1} \times \mathcal{X}_2$ y $\mathcal{V}^{y_1} \times \mathcal{X}_2$ son entornos disjuntos de x e y en $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$. De forma análoga se procede con la segunda coordenada para obtener así que el espacio producto es T_2 . Mediante este argumento se demuestra fácilmente que el producto finito de espacios T_2 lo es también. Además, se puede probar que este hecho no se ciñe únicamente a productos finitos, sino que también es válido para el producto infinito de espacios. No obstante, la demostración de este comentario no es relevante para nuestro estudio puesto que el estudio de la topología que engendra este producto puede suponer ciertos problemas a estas alturas.
- Si \mathcal{X}_1 y \mathcal{X}_2 son dos espacios T_2 , entonces su suma también lo es. La demostración de esto es muy similar a la del producto.

De manera totalmente similar puede demostrarse que la propiedad de ser un espacio T_0 y T_1 se preserva para subespacios, productos finitos y sumas finitas; y no lo hace para el cociente.

A continuación, y como haremos de aquí en adelante cada vez que hablemos de comportamiento topológico, se muestra una tabla que resume todo lo demostrado. No se especificará, pero es claro que los productos y las sumas son finitos.

	Subespacios	Cociente	Producto	Suma
T_0	Sí	No	Sí	Sí
T_1	Sí	No	Sí	Sí
T_2	Sí	No	Sí	Sí

Tabla 4.1: Tabla resumen de separación.

La tabla anterior se leería de la siguiente forma: Si un espacio X es T_0 , cualquier subespacio suyo es T_0 . El producto de espacios T_0 es T_0 , etc.

Capítulo 5

Numerabilidad

En matemáticas, un **axioma de numerabilidad** es una propiedad de un cierto objeto (en nuestro caso, un espacio topológico) que afirma la existencia de un conjunto numerable con ciertas propiedades. Estas restricciones sobre el espacio pueden ser más o menos fuertes y a menudo garantizan en el espacio ciertas propiedades que hacen que se parezca a los espacios que conocemos y amamos, como \mathbb{R} . En resumen, que se verifiquen ciertos axiomas de numerabilidad hacen mucho más cómodo el trabajar con ciertos espacios.

5.1. Sucesiones

Las sucesiones eran, en \mathbb{R}^n , una herramienta fundamental para el trabajo. En un espacio topológico en general son mucho menos potentes de lo que estamos acostumbrados por falta de estructura, pero aun así son dignas de mención. Una teoría más general de la convergencia para suplir esta carencia es la teoría de la convergencia de redes, pero no vamos a detallarla aquí.

Definición 5.1.1 (Sucesión). Una **sucesión** en un espacio \mathcal{X} es una aplicación $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{X}$. Habitualmente escribimos una sucesión como $\{x_n\}_n$, donde x_n es su n -ésimo elemento.

El concepto más importante de las sucesiones es la convergencia. Nótese que esta definición es equivalente a la que se ve en \mathbb{R}^n con bolas.

Definición 5.1.2 (Convergencia). Decimos que una sucesión $\{x_n\}_n$ de \mathcal{X} **converge** a $x_0 \in \mathcal{X}$ si para cada entorno V_{x_0} de x_0 existe $k_0 \geq 1$ tal que $x_k \in V_{x_0}$ para $k \geq k_0$. A menudo lo expresamos como:

$$x_0 = \lim x_k = \lim_k x_k$$

Observación 5.1.1. Para que una sucesión sea convergente, es suficiente que la definición 5.1.2 se verifique para una base de entornos. No es necesario comprobar que se cumple para un entorno cualquiera. \diamond

Observación 5.1.2 (Consecuencias de la definición de convergencia).

1. Si $x_0 = \lim x_k$, con $x_k \in A$, entonces $x_0 \in \overline{A}$. En efecto, en todo entorno de x_0 hay por definición de convergencia algún punto de A , y entonces es punto adherente por definición.
2. El límite de una sucesión no es necesariamente único, es decir, una sucesión puede converger a varios puntos. En efecto, consideramos un conjunto \mathcal{X} con la topología del punto \mathcal{T}_a , para un punto $a \in \mathcal{X}$. Aquí, la sucesión constante $x_k = a \rightarrow x \quad \forall x \in \mathcal{X}$. Esto es claro puesto que cualquier entorno de cualquier punto contiene a a .

\diamond

5.2. Primer axioma de numerabilidad

Definición 5.2.1 (Primer axioma). Decimos que un espacio \mathcal{X} es **primer axioma de numerabilidad** o simplemente **I axioma** si todo punto de \mathcal{X} tiene una base de entornos numerable.

Observación 5.2.1. Esta base numerable, si existe, siempre se podrá tomar encajada, como ya mencionamos en la observación 1.5.1. \diamond

Observación 5.2.2. Si \mathcal{X} es I axioma, entonces la adherencia está totalmente determinada por límites de sucesiones. Esto es:

$$x \in \overline{A} \iff \exists \{x_k\}_k \subset A \text{ t.q. } x = \lim_k x_k$$

Vamos a ver solo la implicación hacia la derecha, la otra ya la vimos en la observación 5.1.2. Sea una base de entornos encajada $\mathcal{V}^x = \{V^x : k \geq 1\}$, numerable por ser \mathcal{X} I axioma. $x \in \overline{A}$ implica que $V_k \cap A \neq \emptyset \forall k$ y en consecuencia $\exists a_k \in V_k \cap A$ y $x = \lim_k a_k$. En efecto, dado un entorno V^x existe k_0 tal que $V_{k_0} \subset V^x$ y entonces, por haber tomado la base encajada, para cualquier $k \geq k_0$ $a_k \in V_k \subset V_{k_0} \subset V^x$, que es precisamente la definición de continuidad. \diamond

Ejemplo 5.2.1 (Adherencias curiosas). Volviendo de nuevo al ejemplo de \mathcal{X} con la topología \mathcal{T}_a del punto, resulta que se verifica que $\overline{\{a\}} = \mathcal{X}$. Esto es consecuencia directa de la observación 5.2.2. \diamond

Proposición 5.2.1. Si X es T_2 , entonces el límite es único.

Demostración. Si no lo fuera, podríamos tomar dos entornos disjuntos alrededor de los dos límites, y la sucesión tendría que estar en ambos al mismo tiempo a partir de un cierto punto. \blacksquare

Observación 5.2.3. Un espacio métrico es siempre I axioma y T_2 , de forma que en él las sucesiones se comportan como esperamos. \diamond

5.3. Otros axiomas de numerabilidad

Definición 5.3.1 (Segundo axioma). Decimos que un espacio \mathcal{X} es **segundo axioma de numerabilidad** o simplemente **II axioma** si tiene una base de abiertos numerable.

Definición 5.3.2 (Separable). Decimos que un espacio \mathcal{X} es **separable** si en él existe un conjunto denso numerable.

Ejemplo 5.3.1. Veamos algunos ejemplos de espacios separables:

1. \mathbb{R} con la topología usual es separable, pues \mathbb{Q} es denso y numerable. De la misma forma, \mathbb{R}^n también lo es, por \mathbb{Q}^n .
2. Un espacio $(\mathcal{X}, \mathcal{T}_a)$, donde \mathcal{T}_a es la topología del punto, es automáticamente separable. En efecto, ya vimos en el ejemplo 5.2.1 que la adherencia del conjunto $\{a\}$ es el total, luego es denso; y desde luego es numerable. \diamond

Definición 5.3.3 (Lindelöf). Decimos que un espacio \mathcal{X} es **Lindelöf** si para todo recubrimiento por abiertos de \mathcal{X} podemos extraer un subrecubrimiento numerable.

Observación 5.3.1. Nótese que la noción de Lindelöf implica la compacidad. De hecho, aunque la hemos mencionado aquí, esta propiedad está a caballo entre los axiomas de numerabilidad y los de compacidad y volveremos a verla en el capítulo 6, que trata sobre compacidad. \diamond

Proposición 5.3.1 (Relación entre los axiomas de numerabilidad). *Dado un espacio topológico \mathcal{X} , que sea II axioma, se verifica:*

1. \mathcal{X} es I axioma.
2. \mathcal{X} es Lindelöf.

3. \mathcal{X} es separable.

y no se verifica ninguna de las demás implicaciones posibles entre los cuatro axiomas de numerabilidad que hemos visto.

Observación 5.3.2. Si \mathcal{X} es un espacio métrico, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. \mathcal{X} es II axioma.
2. \mathcal{X} es separable.
3. \mathcal{X} es Lindelöf.

◇

5.4. Comportamiento topológico

	Subespacios	Cociente	Producto	Suma
I axioma	Sí	No	Sí	Sí
II axioma	Sí	No	Sí	Sí
Separable	Sí, en el caso de abiertos	Sí*	Sí	Sí
Lindelöf	Sí, en el caso de cerrados	Sí*	No	Sí

Tabla 5.1: Tabla resumen de numerabilidad.

En la tabla anterior, el símbolo * indica que, en esos casos, la propiedad de ser separable o Lindelöf se preserva porque la imagen continua de un espacio separable (Lindelöf) es separable (Lindelöf). En tablas posteriores se usará el mismo símbolo para indicar esto mismo.

Capítulo 6

Compacidad

La compacidad en espacios topológicos es una noción bastante elaborada, y su generalización llevo a los matemáticos bastante tiempo. Desde principios del siglo XX la idea que buscaban era generalizar para espacios topológicos arbitrarios las propiedades de los intervalos cerrados y acotados $[a, b]$ de \mathbb{R} que permitía demostrar teoremas como el del valor medio o la continuidad uniforme. Surgieron así distintos tipos de compacidad, tales como la compacidad por punto límite, la compacidad numerable,..., pero no siendo estas las más adecuadas, se acabo por formalizar en términos de abiertos(en concreto, como recubrimientos de abiertos). Eso dio lugar a la definición actual.

6.1. Definición y propiedades

Definición 6.1.1 (Recubrimiento y recubrimiento de abiertos). Una colección \mathcal{A} de subconjuntos del espacio \mathcal{X} se dice que es un **recubrimiento** si la unión de los elementos de \mathcal{A} cubre \mathcal{X} , es decir,

$$\mathcal{X} \subset \bigcup_{A_i \in \mathcal{A}} A_i$$

\mathcal{A} es un **recubrimiento abierto** de \mathcal{X} si es un recubrimiento de \mathcal{X} formado por conjuntos abiertos.

Definición 6.1.2 (Compacto). Diremos que un espacio \mathcal{X} es **compacto** si de cada **recubrimiento abierto** \mathcal{A} de \mathcal{X} podemos extraer un subrecubrimiento finito que también recubre \mathcal{X} .

Veamos algunos ejemplos ya conocidos.

Ejemplo 6.1.1. 1. El intervalo $[a, b]$ es compacto.

2. El intervalo (a, b) no es compacto.

3. La recta real \mathbb{R} no es compacta. Vemos que si tomamos un recubrimiento de abiertos : $\mathcal{A} = \{(n, n+2) : n \in \mathbb{Z}\}$ no contiene ningún subrecubrimiento finito que cubra \mathbb{R} .

4. El subespacio $\mathcal{X} = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}_+\}$ es compacto. Dado un conjunto abierto de \mathcal{A} , existe un abierto \mathcal{U} de \mathcal{A} que contiene al 0. \mathcal{U} contiene todos los puntos de la forma $\frac{1}{n}$ salvo un número finito de ellos. Para cada uno de estos puntos cogemos un abierto del recubrimiento. Por lo tanto tenemos un subrecubrimiento finito, luego es compacto.

◇

A continuación, recordemos la noción de compacidad en subespacios topológicos.

Observación 6.1.1.

1. Sea \mathcal{Y} un subespacio de \mathcal{X} . Entonces \mathcal{Y} es compacto si, y sólo si cada recubrimiento de \mathcal{Y} por abiertos de \mathcal{X} contiene una subcolección finita que cubre \mathcal{Y} .

Demostración.

\Rightarrow Supongamos que \mathcal{Y} es compacto y que:

$$\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in J}$$

es un recubrimiento de \mathcal{Y} por abiertos de \mathcal{X} . Entonces la colección formada por

$$\{A_i \cap \mathcal{Y} : i \in J\}$$

es un cubrimiento de \mathcal{Y} por conjuntos abiertos de \mathcal{Y} , y como \mathcal{Y} es compacto, existe un subrecubrimiento finito de \mathcal{Y} de la forma

$$\{A_{i_1} \cap \mathcal{Y}, \dots, A_{i_n} \cap \mathcal{Y}\}$$

luego $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_n}\}$ es un subrecubrimiento finito que cubre a \mathcal{Y} .

\Leftarrow Sea $\mathcal{A}' = \{A'_i\}$ un cubrimiento de \mathcal{Y} por abiertos de \mathcal{Y} . Para cada i podemos elegir un conjunto A_i abierto en \mathcal{X} tal que

$$A'_i = A_i \cap \mathcal{Y}$$

La colección formada por estos A_i a la que llamaremos \mathcal{A} es un recubrimiento de \mathcal{Y} por abiertos de \mathcal{A} . Por hipótesis, existe algun subrecubrimiento finito $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_n}\}$ que cubre \mathcal{Y} . Entonces $\{A'_{i_1}, \dots, A'_{i_n}\}$ es una subrecubrimiento finito de \mathcal{Y} , luego \mathcal{Y} es compacto. \diamond

2. Podemos expresar la compacidad mediante cerrados también, usando teoría de conjuntos. Tomamos un recubrimiento de \mathcal{X} tal que $\mathcal{X} = \bigcup_i U_i$. Como \mathcal{X} es compacto, entonces existe un subrecubrimiento finito tal que $\mathcal{X} = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

$$\mathcal{X} = \bigcup_i U_i \Rightarrow \exists U_{i_1}, \dots, U_{i_n} \text{ t.q. } \mathcal{X} = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$$

Complementando esto,

$$\emptyset = \bigcap_i U_i \Rightarrow \exists F_{i_1}, \dots, F_{i_n} \text{ t.q. } \emptyset = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$$

o lo que es lo mismo,

$$\text{Si } \forall F_{i_1}, \dots, F_{i_n} \text{ se cumple que } F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_i U_i \neq \emptyset \quad \diamond$$

De aquí en adelante revisaremos algunas consecuencias ya conocidas de la compacidad. Sin embargo, adoptaremos el nuevo alfabeto topológico para ello, viendo como algunas demostraciones se simplifican.

Proposición 6.1.1 (Cerrado en compacto es compacto). *Sea \mathcal{X} un espacio topológico compacto, e \mathcal{Y} un subespacio suyo. Si \mathcal{Y} es cerrado entonces es compacto.*

Demostración. Tomamos un recubrimiento de \mathcal{Y} tal que $\mathcal{Y} \subset \bigcup_i U_i$. Esto implica que $\mathcal{X} = (\mathcal{X} - \mathcal{Y}) \cup \bigcup_i U_i$. Como esto es un subrecubrimiento por abiertos de \mathcal{X} y este es compacto,

$$\mathcal{X} = (\mathcal{X} - \mathcal{Y}) \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} \Rightarrow \mathcal{Y} \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$$

Luego \mathcal{Y} es compacto. \blacksquare

Veamos una buena propiedad de los compactos al usarlos con aplicaciones.

Proposición 6.1.2. *Sea \mathcal{X} compacto y $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ una aplicación continua. Entonces, $\mathcal{Y} = f(\mathcal{X})$ es compacto.*

Demostración. Veamos que si tomamos un recubrimiento de \mathcal{Y} , podemos llegar a un subrecubrimiento finito moviendonos por la aplicación. Si tomamos un recubrimiento de \mathcal{Y} tal que

$$\mathcal{Y} = \bigcup_i \mathcal{W}_i$$

Como sabemos que la imagen inversa de abierto es abierto,

$$\mathcal{X} = \bigcup_i f^{-1}(\mathcal{W}_i)$$

y como \mathcal{X} es compacto, tenemos que:

$$\mathcal{X} = f^{-1}(\mathcal{W}_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(\mathcal{W}_{i_n})$$

y usando de nuevo la aplicación llegamos a que $\mathcal{W}_{i_1} \cup \dots \cup \mathcal{W}_{i_n}$ cubren \mathcal{Y} . ■

Proposición 6.1.3. *Cada subespacio \mathcal{Y} compacto de un espacio \mathcal{X} (que es T_2) es cerrado.*

Demostración. Basandonos en las dos hipótesis, demostraremos que $\mathcal{X} - \mathcal{Y}$ es abierto, luego \mathcal{Y} será cerrado.

Sea $a \in \mathcal{X} - \mathcal{Y}$ vamos a ver que existe un entorno de a que no interseca con \mathcal{Y} .

Para todo punto $y \in \mathcal{Y}$ tomamos entornos disjuntos U_a^y y V_y de los puntos a e y respectivamente, utilizando la condición de ser T_2 . El superíndice indica que el entorno U_a^y depende del punto y . Si ahora tomamos la colección $V = \{V_y : y \in \mathcal{Y}\}$, es un recubrimiento por abiertos de \mathcal{Y} , y por ser este compacto existirá un subrecubrimiento finito V_{y_1}, \dots, V_{y_n} que recubrirá \mathcal{Y} .

Luego $\mathcal{V} = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$ contiene a \mathcal{Y} y es abierto. Además es disjunto de $\mathcal{U} = U_a^{y_1} \cap \dots \cap U_a^{y_n}$, formado al tomar la intersección de los entornos de a correspondientes a cada $y \in \mathcal{Y}$. Por lo tanto \mathcal{U} es entorno de a que no interseca a \mathcal{Y} , quedando así demostrado. ■

Observación 6.1.2. Notemos que hemos demostrado más de lo que nos pedían. En la demostración anterior se prueba que un compacto \mathcal{Y} y un punto $a \in \mathcal{X} - \mathcal{Y}$, en un espacio topológico \mathcal{X} que es T_2 , tienen entornos disjuntos. Basta tomar \mathcal{U} , entorno de a , y \mathcal{V} , entorno de \mathcal{Y} .

Además, es importante que \mathcal{X} sea T_2 . Obsérvese que en $\mathcal{X} = \{a, b\}$ con la topología del punto \mathcal{T}_a todo es compacto y, sin embargo, $\{a\}$ no es cerrado. ◇

Proposición 6.1.4. *Sea \mathcal{X} compacto y $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua entonces se alcanzan mín f y máx f en \mathcal{X} .*

Demostración. Como $f(\mathcal{X})$ es compacto por 6.1.2, tenemos que $f(\mathcal{X}) \subset \mathbb{R}$ y sabemos que por ser \mathbb{R} completo, existen x_1 y x_2 tal que

$$\text{mín } f = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \leq \text{máx } f$$

y estos puntos son alcanzados. ■

Observación 6.1.3. Sea $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ con \mathcal{X} compacto. Entonces, por la proposición anterior, se alcanza el mínimo. Es decir, existe $x_0 \in \mathcal{X}$ tal que $f(x_0) = \min f(x)$. Como $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathcal{X}$, en concreto, $f(x_0) > 0$. Esto implica que

$$f(x) \geq f(x_0) > 0 \implies f(x) \geq \epsilon > 0 \forall x \in \mathcal{X}$$

◇

Proposición 6.1.5. *Sea \mathcal{X} compacto e \mathcal{Y} un subespacio infinito. Entonces \mathcal{Y} tiene algún punto de acumulación.*

Demostración. Si \mathcal{Y} no tuviese ningún punto de acumulación, entonces todos los puntos serían aislados, luego tendríamos la topología discreta. Ahora, como \mathcal{Y} es cerrado dentro de un compacto, por 6.1.1 \mathcal{Y} es compacto, y para ser compacto un conjunto con la topología discreta tiene que ser finito, lo que produce una contradicción. ■

Observación 6.1.4. Al contrario de lo que ocurría en \mathbb{R} , en general el recíproco de la proposición anterior no se cumple. \diamond

Por último, y antes de introducir una serie de definiciones dedicadas a alimentar la curiosidad del lector, hagamos una pequeña observación de gran importancia en forma de lema.

Lema 6.1.6. Si tenemos una función continua $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, donde \mathcal{X} es compacto y \mathcal{Y} es Hausdorff, entonces la aplicación es cerrada.

Demostración. En efecto, sea $F \subset \mathcal{X}$ un subespacio cerrado, que será compacto por ser \mathcal{X} compacto. Por otro lado, $f(F)$ es compacto al tratarse de la imagen continua de un compacto y, finalmente, sabemos que ser compacto en un espacio Hausdorff implica ser cerrado. ■

De aquí se deduce que si además f es suprayectiva, entonces se trata de una identificación y que si es biyectiva, entonces estamos ante un homeomorfismo.

Esto es muy útil para saber cuando una aplicación entre \mathcal{X} e \mathcal{Y} es una identificación, ya que en general $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n$, por lo que es T_2 . En caso de ser f continua y \mathcal{X} compacto se tiene que \mathcal{Y} es un modelo geométrico del cociente \mathcal{X}/\sim .

Definición 6.1.3 (Definiciones). Existen varias nociones estrechamente relacionadas con la compacidad:

1. **Secuencialmente compacto:** un espacio topológico \mathcal{X} es secuencialmente compacto si toda sucesión en \mathcal{X} tiene una subsucesión convergente en \mathcal{X} .
2. **σ -compacto:** un espacio topológico \mathcal{X} es σ -compacto si es la unión numerable de subespacios compactos.
3. **Numerablemente compacto:** Un espacio \mathcal{X} es numerablemente compacto si cada subconjunto infinito de \mathcal{X} tiene un punto límite.
4. **Lindelöf:** véase en 5.3.3

Observación 6.1.5. La relación que hay entre ser compacto, secuencialmente compacto, σ -compacto, numerablemente compacto y Lindelöf es la siguiente:

1. Compacto $\implies \sigma$ -compacto
2. σ -compacto \implies Lindelöf
3. σ -compacto \implies Numerablemente compacto
4. En general, secuencialmente compacto no implica compacto ni compacto implica secuencialmente compacto. Sin embargo, un espacio métrico es secuencialmente compacto \iff es compacto. \diamond

Ahora, presentamos un resultado sobre espacios secuencialmente compactos que va a usarse con asiduidad en la sección de topología algebraica.

Lema 6.1.7 (Lebesgue). Sea \mathcal{X} un espacio métrico compacto. Entonces, dado un recubrimiento abierto \mathcal{A} de \mathcal{X} , existe $\epsilon > 0$ tal que cada subconjunto de \mathcal{X} de diámetro menor que ϵ está contenido en algún abierto de \mathcal{A} . En particular, cada bola $B(x, \epsilon)$ está contenida en algún abierto de \mathcal{A} .

Demostración. Como acabamos de ver en la observación 6.1.5, \mathcal{X} es secuencialmente compacto. Es esto lo que vamos a usar para la demostración.

Supongamos que existe un recubrimiento abierto \mathcal{A} de \mathcal{X} que no cumple la condición del lema, esto es, $\forall \epsilon > 0$ existe algún subconjunto de diámetro menor que ϵ que no está contenido en ningún abierto de \mathcal{A} . Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea A_n un subconjunto de diámetro menor que $\frac{1}{n}$ que no esté contenido en ningún abierto de \mathcal{A} , y sea $x_n \in A_n$. Por ser \mathcal{X} secuencialmente compacto, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ convergente a un punto $x \in \mathcal{X}$. Tomamos entonces $U \in \mathcal{A}$ que contenga a x , y $r > 0$ de forma que $B(x, r) \subset U$.

Consideramos la bola $B(x, \frac{r}{2})$. Por ser $\{x_{n_k}\}_k$ convergente, existe un i tal que $x_{n_i} \in B(x, \frac{r}{2})$, y entonces $\frac{1}{n_i} < \frac{r}{2}$. Entonces, $x_{n_i} \in A_{n_i} \cap B(x, \frac{r}{2})$, y el diámetro de A_{n_i} es menor que $\frac{r}{2}$, luego $A_{n_i} \subset B(x_{n_i}, r) \subset U$, lo que contradice a la hipótesis. ■

6.2. Comportamiento topológico

En esta sección se estudiarán las distintas construcciones que ya se han detallado en casos anteriores (subespacios, cociente y productos y sumas finitas) en los que quedan espacios compactos.

- Los subespacios cerrados \mathcal{F} de un espacio compacto son compactos. Obsérvese que este apartado no es más que la proposición 6.1.1.
- Los espacios cocientes de compactos son compactos, puesto que un cociente es una aplicación continua suprayectiva y la imagen continua de un compacto es compacto.
- Las sumas finitas de espacios compactos son compactos, ya que si se tiene un recubrimiento por abiertos de la suma, podemos extraer un subrecubrimiento finito de cada sumando. Dado que la suma es finita, la unión de todos ellos será un subrecubrimiento finito para la suma. Nótese que si la suma es numerable esto ya no tiene por qué ser cierto.
- Los productos finitos de espacios compactos son compactos. Este resultado se conoce como el teorema de Tychonoff (que también vale para el producto infinito) y se demostrará a continuación.

Teorema 6.2.1 (Teorema de Tychonoff). *Sean \mathcal{X} e \mathcal{Y} dos espacios topológicos y sea $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ su espacio producto. Entonces \mathcal{X} e \mathcal{Y} son compactos si y solamente si $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ lo es.*

Demostración. \Leftarrow) Si $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ es compacto, consideremos la proyección $p_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$. Al ser continua y como la imagen continua de un compacto es compacto, hemos terminado. El caso para \mathcal{Y} es análogo.

\Rightarrow) Dado el producto $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, podemos tomar un recubrimiento por abiertos suyo de modo que

$$\mathcal{X} \times \mathcal{Y} = \bigcup_i \mathcal{W}_i.$$

Nuestro objetivo es conseguir extraer una cantidad finita de esta familia de abiertos. Antes de comenzar, nótese que estos abiertos no tienen por qué ser productos y esto dificulta nuestra labor. Por tanto, trataremos de quedarnos con abiertos producto, utilizando el hecho de que son base de la topología producto, para obtener una cantidad finita de \mathcal{W}_i . Una vez realizado este comentario, ya podemos comenzar.

En primer lugar, para todo $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ existe i de modo que $(x, y) \in \mathcal{W}_i$. Así, se pueden encontrar entornos abiertos \mathcal{U}_x^y de x (donde el superíndice denota que depende del y tomado) y \mathcal{V}_y^x de y (que de nuevo depende del x tomado) tales que

$$(x, y) \in \mathcal{U}_x^y \times \mathcal{V}_y^x \subset \mathcal{W}_i, \quad (6.1)$$

puesto que son base de la topología. Nótese que para otro punto del producto con el mismo x y distinto y los dos abiertos cambian.

Fijemos $x \in \mathcal{X}$ de forma que ocurrirá que $\mathcal{Y} = \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{V}_y^x$. Por ser \mathcal{Y} compacto, existe un subrecubrimiento finito tal que

$$\mathcal{Y} = \mathcal{V}_{y_1}^x \cap \dots \cap \mathcal{V}_{y_r}^x. \quad (6.2)$$

Pese a que los puntos y_l (tanto el valor de y como la cantidad r) dependen de la elección de x , no se ha incluido en la notación con tal de no sobrecargarla.

A continuación, para cada $x \in \mathcal{X}$ se puede considerar el abierto

$$\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_x^{y_1} \cap \dots \cap \mathcal{U}_x^{y_r}. \quad (6.3)$$

Sin embargo, al ser \mathcal{X} compacto, entonces se puede tomar un subrecubrimiento finito de él tal que

$$\mathcal{X} = \bigcup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{U}_x \Rightarrow \mathcal{X} = \mathcal{U}_{x_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{x_s}. \quad (6.4)$$

A estas alturas, podemos afirmar que, para cierto k entre 1 y s y cierto l entre 1 y r ,

$$(x, y) \in \mathcal{U}_{x_k} \times \mathcal{V}_{y_l}^{x_k} \stackrel{(6.3)}{\subset} \mathcal{U}_{x_k}^{y_l} \times \mathcal{V}_{y_l}^{x_k} \stackrel{(6.1)}{\subset} \mathcal{W}_{i_{kl}}.$$

Estos $W_{i_k l}$ son una cantidad finita y solo queda comprobar que recubren a $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Para ello, tomemos un punto $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Claramente, por la igualdad (6.4), existe un $k \in \{1, \dots, s\}$ tal que $x \in \mathcal{U}_{x_k}$. Tomando en la igualdad (6.2) $x = x_k$, existe un $l \in \{1, \dots, r\}$ tal que $y \in \mathcal{V}_{y_l}^{x_k}$, luego $(x, y) \in W_{i_k l}$, y hemos terminado. ■

Del teorema anterior se pueden deducir ciertas consecuencias relevantes cuando el espacio topológico es \mathbb{R}^n .

Observación 6.2.1. (1) Los adoquines

$$[a_1, b_1] \times \dots \times [a_r, b_r]$$

son compactos, puesto que $[a_i, b_i]$ es compacto para todo $i \in \{1, \dots, n\}$

(2) Un conjunto es compacto si y solo si es cerrado y acotado.

En efecto, ya sabemos que ser compacto implica ser cerrado, pues \mathbb{R}^n es T_2 . Además, por la proposición 6.1.4, las proyecciones continuas $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ alcanzan el máximo y el mínimo, luego es acotado.

Por otro lado, si está acotado existe una bola $B(0, \rho)$ para algún $\rho > 0$ y así mismo esta bola pertenece a $[-\rho, \rho]^n$. Si además es cerrado, se trataría de un cerrado contenido en un compacto, luego compacto. ◇

	Subespacios	Cociente	Producto	Suma
Compacidad	Sí, en el caso de cerrados	Sí*	Sí	Sí

Tabla 6.1: Tabla resumen de compacidad.

6.3. Compacidad local

Hasta ahora no hemos hecho más que revisar lo que ya sabíamos de compacidad y traducirlo al nuevo lenguaje, exceptuando algún resultado como el Teorema de Tychonoff. Todo esto era de alguna manera “global”, pues se refería a espacios topológicos. Ahora pasaremos a lo local, relacionado con entornos de puntos. Introduciremos esta noción de local con la compacidad y la extenderemos a conexión y conexión por caminos más adelante. Esto es algo novedoso y de gran importancia, por lo que se ruega al lector que lo estudie con detenimiento.

Definición 6.3.1 (Compacidad local). Un espacio es **localmente compacto** cuando cada punto $x \in \mathcal{X}$ tiene una base de entornos compactos

$$\mathcal{V}_x = \{K \subset \mathcal{X} : K \text{ es entorno y es compacto}\}.$$

Veamos algunos ejemplos para aclarar este concepto.

Ejemplo 6.3.1. 1. \mathbb{R}^n con la topología usual lo es, ya que para cada punto existe una base de entornos de la forma

$$\mathcal{V}_x = \{\overline{B}(x, 1/k) : k \geq 1\}$$

Dado que \mathbb{R}^n no es compacto, de este ejemplo se desprende que

$$\text{Localmente compacto} \not\Rightarrow \text{Compacto}$$

2. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topología usual no lo es. En efecto, tomemos un entorno compacto de \mathbb{Q} del cero K_0 . Este entorno, por definición, contiene un abierto \mathcal{U} de la topología relativa de modo que $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \subset K_0$ para cierto $\varepsilon > 0$. A continuación, elijamos un irracional $\theta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y una sucesión $\{q_k\}_{k=1}^\infty \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$ que converge a θ . Claramente, $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto infinito (ya que si fuese finito convergería a alguno de ellos, por lo que el límite sería racional) contenido en K_0 compacto. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, este conjunto

tiene un punto de acumulación en K_0 o, equivalentemente, existe una subsucesión $\{q_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ que converge a un punto de K_0 al que denotaremos p . No obstante, toda subsucesión de una sucesión converge al mismo punto que esta última, luego hemos probado que $p = \theta$. Esto es una contradicción, pues $K_0 \subset \mathbb{Q}$, y hemos terminado. \diamond

Sin embargo, parece muy engorroso tener que demostrar que existe una base de entornos con todos ellos compactos para ver que un espacio topológico es localmente compacto. Sorprendentemente, si el espacio es T_2 , la tarea es mucho más sencilla.

Proposición 6.3.1. *Sea \mathcal{X} un espacio T_2 . Si $x \in \mathcal{X}$ tiene un entorno compacto, entonces tiene una base de entornos compactos.*

Demostración. Vamos a construir la base de compactos a partir del entorno compacto. Sea K ese entorno, y entonces verifica que existe un abierto U tal que $x \in U \subset K$. Entonces, tenemos que ver que para cada entorno W arbitrario existe un $L \subset W$ que sea entorno compacto de x .

Como $K \setminus W \subset K$ y es cerrado en él, entonces $K \setminus W$ es compacto. Sin embargo $x \notin K \setminus W$. Vamos a aprovechar este compacto para construir uno que sí sea entorno de X .

Como X es T_2 , dados un compacto y un punto podemos encontrar dos entornos disjuntos (como se recalcó en la observación 6.1.2). Entonces, podemos encontrar dos abiertos V_x y G tales que $V_x \cap G = \emptyset$, $x \in V_x$ y $K \setminus W \subset G$. Podemos tomar V_x además de forma que $V_x \subset U$. Si V_x no cumpliera esto, tomamos en su lugar $V_x \cap U$ que también contiene a x . Entonces, $x \in V_x \subset \bar{V}_x \subset \bar{K} = K$, donde la última igualdad se cumple por ser X T_2 . Entonces \bar{V}_x es un compacto (por ser cerrado en compacto) entorno de x .

Ahora, solo queda comprobar que $\bar{V}_x \subset W$. Veamos para ello que $V_x \cap G = \emptyset \implies \bar{V}_x \cap G = \emptyset$. En efecto, sea $y \in \bar{V}_x \cap G$. Entonces $y \in \bar{V}_x$ e $y \in G$, que es entorno de y , y por definición de adherencia $V_x \cap G \neq \emptyset$, llegando así a un absurdo.

Ahora, como $K \setminus W \subset G$, por lo anterior $\bar{V}_x \cap (K \setminus W) = \emptyset$, y como $\bar{V}_x \subset K$, entonces $\bar{V}_x \subset W$. \blacksquare

6.3.1. Comportamiento topológico de la compacidad local

	Subespacios	Cociente	Producto	Suma
Compacidad local	Sí	Sí	Sí	Sí

Tabla 6.2: Tabla resumen local compacidad.

Capítulo 7

Conexión

La noción de conexión es otra más de las nociones que ya conocíamos en \mathbb{R}^n que pueden generalizarse a un espacio topológico arbitrario. Un conjunto es, intuitivamente, conexo, si está hecho “de una sola pieza”.

7.1. Definición y propiedades

Empezaremos viendo, por supuesto, la definición, y una serie de caracterizaciones equivalentes.

Definición 7.1.1 (Conexión). \mathcal{X} es **conexo** si no es unión de dos abiertos disjuntos no vacíos, esto es, no existen $U, V \neq \emptyset$, abiertos, tales que $U \cap V = \emptyset$ y $X = U \cup V$.

Observación 7.1.1 (Conexión en subespacios). De nuevo, como con compacidad, la conexión en un subconjunto no necesita una definición alternativa. Dado $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$, simplemente decimos que \mathcal{Y} es conexo si lo es entendido como espacio equipado con la topología relativa. Nótese que esta definición es equivalente a la mucho más rebuscada que dábamos en \mathbb{R}^n , que involucraba abiertos relativos. \diamond

Proposición 7.1.1 (Definiciones equivalentes de conexión). Sea un espacio topológico \mathcal{X} . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. \mathcal{X} es conexo.
2. \mathcal{X} no es unión de dos cerrados disjuntos no vacíos, esto es, no existen $F, G \neq \emptyset$, cerrados, tales que $F \cap G = \emptyset$ y $X = F \cup G$.
3. No hay ningún conjunto abierto y cerrado no trivial, esto es, $\nexists U$ abierto y cerrado tal que $U \neq \emptyset$ y $U \neq \mathcal{X}$.

Ejemplo 7.1.1. En \mathbb{R} , los conexos son los intervalos. En efecto, si $A \subset \mathbb{R}$ no es un intervalo, entonces por definición $\exists a \notin A$ tal que $\inf A < a < \sup A$. Entonces, $(-\infty, a) \cap A$ y $(a, \infty) \cap A$ son dos abiertos disjuntos no vacíos cuya unión contiene a A . \diamond

Ahora, vamos a repasar brevemente las propiedades que ya conocíamos de conjuntos conexos.

Proposición 7.1.2 (Imagen continua). La imagen continua de un conexo es un conexo.

Demostración. Sea \mathcal{X} conexo, $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} = f(\mathcal{X})$ continua. Entonces queremos ver que \mathcal{Y} es conexo. Para ello vamos a ver el contrarrecíproco: si \mathcal{Y} no es conexo \mathcal{X} tampoco.

Si existiera $A \subset \mathcal{Y}$ abierto y cerrado no trivial (esto es, que no es ni el vacío ni el total), entonces por ser f continua $f^{-1}(A)$ es también abierta y cerrada, y por ser f sobreyectiva $f^{-1}(A)$ no es el vacío ni el total. Por tanto \mathcal{X} no es conexo. \blacksquare

Teorema 7.1.3. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conexos de \mathcal{X} y existe $a \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ es conexo.

Demostración. Supongamos que existe $S \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ abierto y cerrado. Vamos a ver que necesariamente es el vacío o el total. Entonces, para cada $i \in I$ tenemos que $S \cap A_i \subset A_i$ es abierto y cerrado en A_i . Ahora, como A_i es conexo, $S \cap A_i$ tiene que ser necesariamente el vacío o el total, para cada $i \in I$. Distinguimos pues dos casos:

1. Si $S \cap A_i = \emptyset \forall i \in I$, entonces $S = \emptyset$ y ya está.
2. Si $\exists i \in I$ tal que $S \cap A_i = A_i$, entonces $\exists a \in S \cap A_i$ que por hipótesis verifica que $a \in S \cap A_j$ para todo $j \in I$. Entonces ninguno de los $S \cap A_j$ es vacío, y por tanto $S \cap A_j = A_j \forall j \in I$, es decir, $S = \bigcup_{i \in I} A_i$. ■

Este teorema es extremadamente útil para garantizar la conexión de un sinnúmero de conjuntos, y genera un gran abanico de corolarios y consecuencias. Aquí vamos a detallar algunos que se usan con frecuencia.

Corolario 7.1.4. *Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conexos que cumple que $\exists i_0 \in I$ tal que $A_{i_0} \cap A_i \neq \emptyset \forall i \in I$. Entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ es conexo. En particular, el resultado se verifica si la familia cumple que $A_i \cap A_j \neq \emptyset \forall i \neq j$.*

Demostración. Como $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ por hipótesis, podemos aplicar el teorema 7.1.3 para cada $i \in I$, y por tanto cada $A_{i_0} \cup A_i$ es conexo. Ahora, escribimos:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (A_{i_0} \cup A_i)$$

y como todos comparten los elementos de A_{i_0} , podemos aplicar el teorema de nuevo. ■

Corolario 7.1.5. *Sea una cadena $\{A_i\}_{i=1}^n$ de conexos que verifica que $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$. Entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es conexo.*

Demostración. Por inducción, se aplica el teorema 7.1.3 a $A_1 \cup A_2$, $(A_1 \cup A_2) \cup A_3$, ..., $(\bigcup_{i=1}^k A_i) \cup A_{k+1}$. ■

Observación 7.1.2. El corolario anterior también se verifica si la sucesión de conjuntos es numerable, pero no lo vamos a probar aquí. ◇

El siguiente resultado, aunque también es consecuencia del teorema 7.1.3, es más que un mero corolario y merece la categoría de teorema por sí mismo.

Teorema 7.1.6. *Sea A conexo, B tal que $A \subset B \subset \overline{A}$. Entonces B es conexo. En particular \overline{A} es conexo.*

Demostración. Como podemos escribir:

$$B = \bigcup_{b \in B \setminus A} (A \cup \{b\})$$

y todos comparten un punto, entonces basta probar que cada $A \cup \{b\} \subset \overline{A}$ es conexo, pues en ese caso el teorema 7.1.3 nos garantiza la conexión de B .

Supongamos que $\exists C \subset A \cup \{b\}$ abierto y cerrado y no trivial. Entonces, $C \cap A \subset A$ y es abierto y cerrado en A . Como A es conexo distinguimos dos casos:

- Si $C \cap A = \emptyset$, entonces $C = \{b\}$ y por tanto $\{b\}$ es abierto, luego, como el entorno $\{b\}$ de sí mismo no corta con A , $b \notin \overline{A}$, lo cual es una contradicción.
- Si $C \cap A = A$, $C = A$ y por tanto A es cerrado, pero $b \notin A = \overline{A}$, que de nuevo es una contradicción. ■

Aprovechando los resultados anteriores podemos garantizar la conexión de un buen número de espacios.

Ejemplo 7.1.2. Veamos algunos ejemplos de conjuntos conexos:

1. En \mathbb{R}^n , se dice que un conjunto es **convexo** si para cada par de puntos el segmento que los une también está en el conjunto; y se dice que es **estrellado** si existe un punto tal que el segmento de él a cualquier otro está en el conjunto. Si un conjunto es convexo entonces es estrellado, y si es estrellado entonces es conexo. Además, las implicaciones recíprocas no se verifican.

En efecto, un conjunto A estrellado se puede escribir como:

$$A = \bigcup_{a \in A} [a_0, a]$$

para cierto $a_0 \in A$. Cada segmento $[a_0, a]$ es conexo por la proposición 7.1.2, al ser la imagen del intervalo conexo $[0, 1]$ por la aplicación:

$$t \mapsto (1-t)a_0 + ta$$

y por tanto, por el teorema 7.1.3, como todos comparten el punto a_0 su unión es conexas.

Nótese que ni la convexidad ni ser estrellado son propiedades topológicas; ambas son propiedades métricas: su definición solo tiene sentido en un espacio que, al menos, tenga definida una distancia.

2. Una circunferencia en \mathbb{R}^2 es conexas, pero no es estrellada. En efecto, es conexas por ser la imagen de $[0, 2\pi]$ por la aplicación $t \mapsto (\cos t, \sin t)$.
3. El grafo de la función $\sin \frac{1}{x}$ para $x > 0$, que escribimos:

$$C = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) : x > 0 \right\}$$

es conexo por ser la imagen continua de $(0, \infty)$ por la aplicación:

$$x \mapsto \left(x, \sin \frac{1}{x} \right)$$

Lo que es más interesante, para cualquier $a \in [-1, 1]$ se verifica que $\{(0, a)\}$ es adherente a C y por tanto que $C \cup \{(0, a)\}$ es conexo.

4. Consideramos el conjunto:

$$C = (\{0\} \times (0, 1]) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1] \times \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right)$$

que es unión de segmentos horizontales cada vez más juntos y de un segmento vertical. Este es trivialmente conexo por el corolario 7.1.4. Lo particular es que si unimos a C el segmento horizontal:

$$(0, 1) \times \{0\}$$

sigue siendo conexo por ser adherencia de C . ◇

Completamos esta sección con una propiedad interesante garantizada por la conexión.

Lema 7.1.7. Sea \mathcal{X} conexo y $\{U_i\}_{i \in I}$ una familia de abiertos, de forma que $\mathcal{X} = \bigcup_{i \in I} U_i$. Dos puntos cualesquiera $x, y \in \mathcal{X}$ se pueden conectar mediante una cadena finita $\{U_{i_k}\}_{k=1}^n$ de abiertos de la familia que verifique que $U_{i_k} \cap U_{i_{k+1}} \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $A = \{z \in \mathcal{X} : \text{existe una cadena de } x \text{ a } z\}$. A es claramente no vacío, puesto que $x \in A$. Entonces, una forma de ver que $\mathcal{X} = A$, que es lo que queremos encontrar, es comprobar que A es abierto y cerrado, puesto que entonces solo puede ser el total (pues hemos visto que es no vacío).

- Veamos que A es abierto. En efecto, dado $z \in A$, queremos ver que existe un abierto U tal que $z \in U \subset A$. Pero basta con tomar el último de la cadena, que ya cumple estas condiciones.
- Ahora veamos que es cerrado. En efecto, si $z \in \overline{A}$, existe un abierto U_{i_0} tal que $U_{i_0} \cap A \neq \emptyset$. Entonces, tomamos un punto y de la intersección, y como está en A hay una cadena de x a y . Uniendo U_{i_0} a la cadena tenemos una cadena de x a z , y por tanto $z \in A$, luego $A = \overline{A}$. ■

Observación 7.1.3. En particular, puedo recubrir cualquier abierto conexo de \mathbb{R}^n por bolas, y por tanto existe una cadena de bolas que une cualquier par de puntos. Si tomo un punto en cada intersección entre bolas consecutivas de la cadena y los uno, tengo una poligonal que conecta los dos puntos. Entonces, si $C \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, C es conexo si y solo si es conexo por poligonales (la definición de conexión por poligonales y la implicación inversa corresponden a cálculo diferencial). ◇

7.2. Comportamiento topológico

	Subespacios	Cociente	Producto	Suma
Conexión	No	Sí*	Sí	No

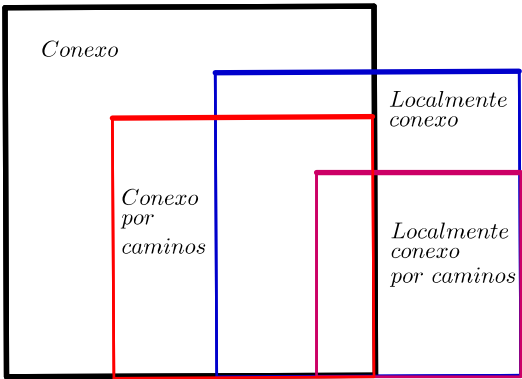
Tabla 7.1: Tabla resumen de conexión.

	Subespacios	Cociente	Producto	Suma
Local conexión	Sí, en el caso de abiertos	Sí	Sí	Sí

Tabla 7.2: Tabla resumen de local conexión

	Subespacios	Cociente	Producto	Suma
Conexo por caminos	No	Sí	Sí	No
Localmente conexo por caminos	Sí, en el caso de abiertos	Sí	Sí	Sí

Tabla 7.3: Tabla resumen de conexión por caminos



Parte II

Topología algebraica

Capítulo 8

Grupo fundamental

La topología algebraica comprende métodos que son significativamente distintos a los empleados hasta ahora en topología general. Intenta asignar a un espacio topológico algún invariante algebraico (por ejemplo, un grupo) y utilizar las propiedades de este invariante para obtener información sobre la topología. Este capítulo se centrará, pues, en el estudio del grupo fundamental, que es uno de estos invariantes.

8.1. Homotopía

En particular, introducimos la homotopía con el propósito de definir más adelante la noción de grupo fundamental. Dos caminos son, intuitivamente, homótopos si podemos deformar uno en el otro de forma continua.

Ejemplo 8.1.1. La interpolación lineal produce homotopías relativas. En efecto, consideramos la homotopía:

$$H_s = (1 - s)f + sg$$

Si $f(a) = g(a)$ para algún $a \in \mathcal{Y}$, entonces resulta que:

$$H_s(a) = (1 - s)f(a) + sg(a) = f(a) = g(a)$$

En particular, en \mathbb{R}^n , cualquier par de caminos cuyos extremos coincidan son homótopos con extremos fijos. De esta forma, en cualquier espacio \mathcal{X} homeomorfo a \mathbb{R}^n por un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{X}$, cualesquiera dos caminos cuyos extremos coincidan son homótopos con extremos fijos. En efecto, podemos fabricar la homotopía fácilmente: sean σ, τ los caminos en \mathcal{X} . Consideramos α, β caminos en \mathbb{R}^n , de forma que verifiquen que $\sigma = h \circ \alpha$, $\tau = h \circ \beta$. Como α y β comparten extremos y están en \mathbb{R}^n , son homótopos con extremos fijos, y dada la homotopía H_s , resulta que $h \circ H_s$ es homotopía entre σ y τ . \diamond

8.2. Esferas

El estudio de las homotopías en las esferas es interesante como ejemplo, y permite, basándose tan solo en lo visto en la anterior sección, demostrar un resultado no trivial.

Empezamos definiendo formalmente la esfera, para aclarar la notación.

Definición 8.2.1 (Esfera). Llamamos *esfera* de dimensión n y denotamos \mathbb{S}^n al subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} :

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídea. Cuando se considera como espacio topológico es con la restricción de la topología usual, si no se especifica otra.

Observación 8.2.1. Si bien la esfera de la definición anterior es la esfera unidad, nótese que todas las esferas de cualquier radio y centradas en cualquier punto de \mathbb{R}^{n+1} son homeomorfas a la esfera que hemos definido. \diamond

El resultado no trivial que mencionábamos en la introducción de esta sección es el siguiente:

Proposición 8.2.1. *Dos caminos en una esfera \mathbb{S}^n , $n \geq 2$, que tengan los mismos extremos son homótopos con extremos fijos.*

Demostración. Consideramos los caminos $\sigma, \tau : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^n$, tales que $\sigma(0) = \tau(0)$ y $\sigma(1) = \tau(1)$. Para probar que son homótopos con extremos fijos, basta con probar que existe un punto $a \in \mathbb{S}^n$ tal que $a \notin \sigma, \tau$. Ya hemos comprobado antes que esto es suficiente (FALTA CITA).

Entonces, vamos a separar la esfera en dos abiertos U y V , de forma que $\mathbb{S}^n = U \cup V$. Para un cierto $a \in \mathbb{S}^n$, tal que ni a ni $-a$ es uno de los extremos del camino, elegimos U y V tales que:

$$\begin{cases} U = \mathbb{S}^n \setminus \{a\} \\ V = \mathbb{S}^n \setminus \{-a\} \end{cases}$$

es decir, U es la esfera quitando un punto y V es la esfera quitando el punto antipodal al anterior. De esta forma, ya hemos visto el hecho de que tanto U como V son homeomorfos a \mathbb{R}^n , por ser la esfera sin un punto (FALTA CITA, sé que lo hemos visto en clase pero no lo he encontrado). De esta forma, $U \cap V \approx \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, puesto que una esfera sin un punto es homeomorfa a \mathbb{R}^n , y por tanto una esfera sin dos puntos es homeomorfa a \mathbb{R}^n sin un punto. Además, como $n \geq 2$, sabemos que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es conexo por caminos, y entonces también lo es $U \cap V$.

Podemos encontrar una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$ del intervalo $[0, 1]$ que verifique que $\sigma([t_{i-1}, t_i]) \subset U$ o V para cada i . En efecto, sabemos que $\{\sigma^{-1}(U), \sigma^{-1}(V)\}$ es recubrimiento abierto de $[0, 1]$. Por el lema de Lebesgue (lema 6.1.7), que podemos aplicar por ser $[0, 1]$ un espacio métrico compacto (y por tanto, por la observación 6.1.5, secuencialmente compacto), para cada $x \in [0, 1]$ $\exists \epsilon > 0$ que cumple que $B(x, \epsilon) \subset \sigma^{-1}(U)$ o $\sigma^{-1}(V)$. Con lo cual, tomamos la partición anterior de forma que $t_i - t_{i-1} < \epsilon \forall i$, y entonces tenemos que, para x en el intervalo:

$$x \in [t_{i-1}, t_i] \subset B(x, \epsilon) \subset \sigma^{-1}(U) \text{ o } \sigma^{-1}(V)$$

Por tanto, cada intervalo de la partición está en $\sigma^{-1}(U)$ o $\sigma^{-1}(V)$. Además, eliminando las divisiones innecesarias tenemos una partición que alterna estar en $\sigma^{-1}(U)$ y en $\sigma^{-1}(V)$.

Sea $x_0 \in U \cap V$. Vamos a homotopar los segmentos en V a segmentos en U . Para cada i tal que $\sigma|_{[t_{i-1}, t_i]} \subset V$, definimos $x_{i-1} = \sigma(t_{i-1})$, $x_i = \sigma(t_i)$. Resulta que $x_{i-1}, x_i \in U \cap V \approx \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Como ya hemos visto que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es conexo por caminos, entonces necesariamente existe $\sigma_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow U \cap V$ camino entre x_{i-1} y x_i . De esta forma, los caminos $\sigma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ y σ_i son homótopos en $V \approx \mathbb{R}^n$, con lo cual son homótopos con extremos fijos en $V \subset \mathbb{S}^n$. Repitiendo el argumento para cada segmento de V , reemplazándolo por el correspondiente σ_i , obtenemos un nuevo camino $\tilde{\sigma} \subset U$ y claramente $\sigma \simeq \tilde{\sigma}$ con extremos fijos.

Por último, repetimos todo el argumento anterior con τ , y por tanto $\exists \tilde{\tau}$ tal que $\tau \simeq \tilde{\tau}$ con extremos fijos y $\tilde{\tau} \subset U \approx \mathbb{R}^n$. Entonces, $\tilde{\sigma} \approx \tilde{\tau}$ con extremos fijos en $U \subset \mathbb{S}^n$ y, por ser \simeq con extremos fijos de equivalencia, $\sigma \simeq \tau$ con extremos fijos. ■

Un resultado muy relacionado ha sido un problema abierto hasta hace muy poco tiempo:

Conjetura 8.2.2 (Poincaré). *La propiedad de la proposición 8.2.1 caracteriza a la esfera \mathbb{S}^3 . Esto es, si una variedad de dimensión 3 de \mathbb{R}^4 verifica que cualquier par de caminos en ella que tengan los mismos extremos son homótopos con extremos fijos, entonces es homeomorfa a la esfera unidad.*

La versión generalizada de esta conjetura, para la esfera \mathbb{S}^n , también es cierta y tiene interés. Históricamente:

- Para $n = 2$, el resultado se conoce desde el siglo XIX.
- Para $n = 5$, Zeeman lo demostró en 1961.
- Para $n \geq 6$, Smale lo demostró en 1961.
- Para $n = 4$, Donaldson lo demostró en 1985.
- Para $n = 3$, la versión original de la conjetura, Perelman lo demostró en 2006. La conjetura era uno de los 7 problemas del milenio, dotados con 1.000.000\$. Perelman rechazó tanto este premio como la medalla Fields que se le intentó conceder por demostrar la conjetura.

8.3. General nonsense. Funtorialidad

El objetivo principal de esta sección es aplicar las ideas de teoría de categorías a los conceptos que hemos ido viendo a lo largo de este capítulo. Así, se recomienda leer antes el anexo B, que contiene una brevísima introducción a los conceptos más básicos de teoría de categorías. Esta no solo define los conceptos básicos como categoría o funtor sino que puede ayudar al lector a comprender el propósito detrás de este punto de vista, que a primera vista puede parecer terriblemente abstracto.

Construcción 8.3.1 (Interpretación funtorial del grupo fundamental). En esta sección, vamos a considerar dos categorías. La primera de ellas es la categoría de espacios topológicos punteados \mathbf{Top}_* , cuyos objetos son:

$$\{((\mathcal{X}, \mathcal{T}), x_0) : (\mathcal{X}, \mathcal{T}) \text{ espacio topológico}, x_0 \in \mathcal{X}\}$$

y en la cual los morfismos son las funciones continuas que preservan el punto base x_0 . La segunda de ellas la categoría de los grupos \mathbf{Grp} , que tiene por objetos:

$$\{(G, \cdot) : (G, \cdot) \text{ grupo}\}$$

y por morfismos los homomorfismos de grupos.

Entonces, consideramos tomar el grupo fundamental como un funtor. Es decir, consideramos el funtor π :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Top}_* & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{Grp} \\ \begin{array}{c} \nearrow \sigma \\ \searrow f \circ \sigma \end{array} & \begin{array}{c} (\mathcal{X}, x_0) \longmapsto \pi(\mathcal{X}, x_0) \ni [\sigma] \\ \downarrow f \text{ cont.} \quad \downarrow f^* \text{ homom.} \\ (\mathcal{Y}, y_0) \longmapsto \pi(\mathcal{Y}, y_0) \ni [f \circ \sigma] \end{array} \end{array}$$

Nótese que denotamos f^* al homomorfismo de grupos que es imagen de una aplicación continua f por el funtor π . Como se aprecia en el diagrama, este homomorfismo f^* se define, para una clase de equivalencia de caminos, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f^* : (\mathcal{X}, x_0) &\rightarrow (\mathcal{Y}, y_0) \\ [\sigma] &\mapsto [f \circ \sigma] \end{aligned}$$

Hay que comprobar, entonces, que está bien definido. En efecto, consideramos la aplicación f^* que acabamos de definir. Desde luego, si σ es un lazo con base x_0 , $f \circ \sigma$ es un lazo con base y_0 . Para ver si respeta la homotopía, consideramos $\tau : [0, 1] \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$ homótopo con extremos fijos con σ a través de la homotopía H . Entonces, $f \circ H$ es una homotopía entre $f \circ \sigma$ y $f \circ \tau$. Por último, comprobamos que es homomorfismo, lo cual es directo comprobando que $f \circ (\sigma * \tau) = (f \circ \sigma) * (f \circ \tau)$.

Además, hay que ver que es un funtor, esto es, que cumple:

- $(g \circ f)^* = g^* \circ f^*$. En efecto, consideramos el lazo σ con base en x_0 . Sabemos que:

$$(g \circ f) \circ \sigma = g \circ (f \circ \sigma)$$

y tomando la imagen de σ por $(g \circ f)^*$:

$$(g \circ f)^*([\sigma]) = [(g \circ f) \circ \sigma] = [g \circ (f \circ \sigma)] = g^*([f \circ \sigma]) = g^*(f^*([\sigma]))$$

como queríamos comprobar.

- $(\text{Id}_{\mathcal{X}})^* = \text{Id}_{\pi(\mathcal{X}, x_0)}$. Esto se verifica directamente por como hemos definido f^* .

◇

Visto todo lo necesario, podemos pasar a comprobar una serie de propiedades utilizando el punto de vista introducido en la construcción anterior. La teoría de categorías es capaz a menudo de simplificar demostraciones al considerar los objetos abstractos, lo cual es una de sus grandes fortalezas. Vamos a ver ahora una serie de proposiciones que al mismo tiempo son ejemplos, pues muestran como enfocaríamos una demostración desde este nuevo punto de vista. Sin embargo, no dejan de ser resultados interesantes por sí mismos.

Proposición 8.3.1. *El funtor grupo fundamental manda homeomorfismos en isomorfismos de grupos. En particular, si dos espacios tienen distinto grupo fundamental, entonces no son homeomorfos.*

Demostración. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} dos espacios topológicos punteados con x_0, y_0 , y f un homeomorfismo entre ellos de forma que:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow[\text{homeo.}]{f} & \mathcal{Y} \xrightarrow{g=f^{-1}} \mathcal{X} \\ x_0 \longmapsto & y_0 \longmapsto & x_0 \end{array}$$

Ahora, tenemos que:

$$\begin{aligned} g^* \circ f^* &= (g \circ f)^* = (\text{Id}_{\mathcal{X}})^* = \text{Id}_{\pi(\mathcal{X})} \\ f^* \circ g^* &= (f \circ g)^* = (\text{Id}_{\mathcal{Y}})^* = \text{Id}_{\pi(\mathcal{Y})} \end{aligned}$$

y con esto hemos comprobado que g^* es la inversa de f^* , luego f^* es isomorfismo. ■

Proposición 8.3.2. *Un retracto, como veremos con detalle más adelante, es un subespacio tal que existe una aplicación continua que deforma el espacio en él, como se aprecia en el siguiente esquema:*

$$\begin{array}{ccc} A \subset \mathcal{X} & & \\ \rho|_A = \text{Id} \searrow & \rho \text{ retracto} \downarrow & \\ & A & \end{array}$$

Entonces, la imagen ρ^* de ρ por π es un homomorfismo sobreyectivo. En particular, si el grupo fundamental del retracto A es no trivial, entonces el grupo fundamental del espacio \mathcal{X} tampoco es trivial.

Demostración. Para la demostración, consideramos la imagen por π del diagrama anterior, donde A y \mathcal{X} tienen el mismo punto base $x_0 \in A$:

$$\begin{array}{ccc} \pi(A, x_0) & \xrightarrow{j^*} & \pi(\mathcal{X}, x_0) \\ & \searrow (\rho|_A)^* = \text{Id}_{\pi(A)} & \downarrow \rho^* \\ & & \pi(A, x_0) \end{array}$$

donde j es la aplicación inclusión de A en \mathcal{X} . Como por las propiedades de los funtores $\rho^* \circ j^* = (\rho \circ j)^*$, el diagrama anterior conmuta, es decir:

$$\rho^* \circ j^* = \text{Id}_{\pi(A)}$$

Ahora, como $\text{Id}_{\pi(A)}$ es biyectivo, y en particular sobreyectivo, $\rho^* \circ j^*$ también debe ser sobreyectivo, y entonces necesariamente ρ^* lo es. ■

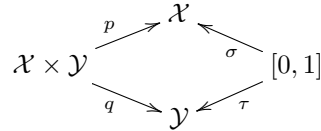
Un caso donde se puede aplicar la proposición anterior es el siguiente.

Ejemplo 8.3.1. Consideramos el disco cerrado $\overline{D}_2 \subset \mathbb{R}^2$. Queremos comprobar que el disco no se puede retraer a $A = \mathbb{S}^1 = \partial \overline{D}_2$. Como veremos más adelante, $\pi(A) = \pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$, y ya sabemos que $\pi(\overline{D}_2) = \{1\}$, pues es un estrellado en \mathbb{R}^n . Entonces, si fuera retracto, habría un homomorfismo sobreyectivo del grupo trivial a \mathbb{Z} , y esto es imposible. ◇

Proposición 8.3.3. *Dados dos espacios \mathcal{X}, \mathcal{Y} , el grupo fundamental del producto es isomorfo al producto de los grupos fundamentales. Esto es:*

$$\pi(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \approx \pi(\mathcal{X}) \times \pi(\mathcal{Y})$$

Demostración. Consideramos los puntos base x_0, y_0 respectivamente. El esquema de la topología producto sería el siguiente:



donde p y q son las proyecciones. Entonces, como ya hemos hecho antes, vamos a ver la imagen de este diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & \pi(\mathcal{X}) & \\ p^* \nearrow & & \searrow q^* \\ \pi(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) & \xrightarrow{(p^*, q^*)} & \pi(\mathcal{X}) \times \pi(\mathcal{Y}) : [(\sigma, \tau)] \\ & & \begin{array}{l} \nearrow [p \circ (\sigma, \tau)] = [\sigma] \\ \longrightarrow ([\sigma], [\tau]) \\ \searrow [q \circ (\sigma, \tau)] = [\tau] \end{array} \end{array}$$

Nótese que hemos añadido la aplicación que llega a $\pi(\mathcal{X}) \times \pi(\mathcal{Y})$. Si comprobamos que es un isomorfismo, entonces tenemos lo que estábamos buscando. En efecto:

- Es trivialmente sobreyectivo.
- Es inyectivo. Para verlo, usaremos un resultado conocido que afirma que un homomorfismo es inyectivo si y solo si su núcleo es trivial. Entonces, denotando e_X al elemento identidad de cada grupo $\pi(X)$, sean σ, τ de forma que $([\sigma], [\tau]) = (e_X, e_Y)$. Queremos ver que necesariamente $([\sigma], [\tau]) = e_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}$.

Consideramos las homotopías $K_s : \sigma \simeq x_0 = e_X$, $L_s : \tau \simeq y_0 = e_Y$. Entonces, $(K_s, L_s) : (\sigma, \tau) \simeq (x_0, y_0) = e_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}$ es homotopía y, por tanto, el núcleo del homomorfismo es $\{e_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}\}$.

Por tanto, es isomorfismo. ■

Un ejemplo de la utilidad de este resultado es el siguiente.

Ejemplo 8.3.2. Consideramos el toro \mathbb{T} , que sabemos que es homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Entonces, cuando veamos más adelante que $\pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$, podremos afirmar directamente que $\pi(\mathbb{T}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. ◇

8.4. Espacios recubridores. El problema de elevación

El estudio de los espacios recubridores de otro espacio es a menudo útil para calcular grupos fundamentales, y en general tiene una gran relación con el estudio de ellos. En esta sección planteamos el problema de elevación en su versión más general, para luego particularizarlo para poder demostrar propiedades útiles.

8.4.1. Espacios recubridores

Para empezar, vamos a formalizar el concepto de espacio recubridor.

Definición 8.4.1 (Espacio recubridor). Sea $p : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ una aplicación continua y sobreyectiva. Decimos que $\tilde{\mathcal{X}}$ es un **espacio recubridor** de X si para cada $x \in \mathcal{X}$ existe un entorno U_x que verifica que $p^{-1}(U_x)$ se puede escribir como unión disjunta de conjuntos U_λ donde cada uno de ellos es homeomorfo a U_x , de forma que, para cada λ , $p|_{U_\lambda} : U_\lambda \rightarrow U_x$ sea un homeomorfismo.

Ejemplo 8.4.1 (Recubrimientos). Veamos algunos ejemplos de espacios recubridores.

1. \mathbb{S}^n recubre al plano proyectivo real \mathbb{P}^n , con la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} p : \mathbb{S}^n &\rightarrow \mathbb{P}^n \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto (x_0 : \dots : x_n) \end{aligned}$$

En efecto, tomamos un punto $(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n$. Tomando un entorno abierto del punto, homeomorfo a un disco, su imagen inversa consiste en dos abiertos homeomorfos a discos alrededor de dos puntos antipodales de \mathbb{S}^n . Estos son disjuntos y se verifican las condiciones.

2. \mathbb{R} recubre al círculo \mathbb{S}^1 , con la aplicación:

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ t &\mapsto e^{2\pi t} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{aligned}$$

En efecto, para un punto x del círculo, tomamos un entorno abierto: un arco que lo contenga sin extremos. Esto es homeomorfo a un intervalo abierto, y su imagen inversa consiste en una cantidad numerable de intervalos a lo largo de la recta real, cada uno conteniendo un punto de $p^{-1}(x) = \mathbb{Z} + a$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Como, tomando el entorno inicial lo suficientemente pequeño, todos estos intervalos son disjuntos, ya está. \diamond

8.4.2. El problema de elevación

Con esto, estamos ya en condiciones de formular el problema de elevación.

Construcción 8.4.1 (Formulación del problema de elevación). Consideramos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{\mathcal{X}} \\ & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ \mathcal{Z} & \xrightarrow{H} & \mathcal{X} \end{array}$$

Aquí, $\tilde{\mathcal{X}}$ es un espacio recubridor mediante la aplicación p . El problema de elevación pregunta por la existencia de la aplicación del diagrama $\tilde{H} : \mathcal{Z} \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}$, continua y que verifique que $p \circ \tilde{H} = H$, es decir, que haga que el diagrama sea conmutativo. Una aplicación que verifique esto se llama **elevación**. \diamond

8.5. El grupo fundamental del espacio proyectivo

El objetivo de esta sección es calcular el grupo fundamental de \mathbb{P}^n , el espacio proyectivo real de dimensión n , para $n \geq 2$. Como pronto veremos, esta demostración explota el concepto de elevación.

Teorema 8.5.1 (Grupo fundamental de \mathbb{P}^n). *Para $n \geq 2$, el grupo fundamental de \mathbb{P}^n es $\pi(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}_2$, el grupo abeliano de orden 2.*

Demostración. Vamos a empezar demostrando que la esfera \mathbb{S}^n es un espacio recubridor del espacio proyectivo \mathbb{P}^n . Vamos a repetir con un poco más de detalle el argumento que ya utilizamos en el ejemplo 8.4.1. Consideramos pues la aplicación:

$$\begin{aligned} p : \mathbb{S}^n &\rightarrow \mathbb{P}^n \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto (x_0 : \dots : x_n) \end{aligned}$$

Entonces, sea un punto $y \in \mathbb{P}^n$. Tenemos que comprobar que para cada $x \in p^{-1}(y)$ existe un entorno U_x tal que $p^{-1}(U_x)$ es union disjunta de conjuntos U_λ , donde cada $U_\lambda \approx U_x$.

De esta forma, para $y \in \mathbb{P}^n$, consideramos un hiperplano π que no lo contenga. Como el plano π es cerrado, $U = \mathbb{P}^n \setminus \pi$ es abierto, y además contiene a x , luego es entorno. La imagen inversa del plano π es, para la misma aplicación definida en todo \mathbb{R}^{n+1} , un hiperplano; y de esta manera

la imagen inversa de $\mathbb{P}^n \setminus \pi$ por $p : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ son dos casquetes de la esfera. Llamamos pues a estos U_+ , U_- y desde luego son abiertos. Como la imagen inversa de x son dos puntos antipodales, que llamamos p y $-p$, y no están en $p^{-1}(\pi)$, entonces está cada uno en un casquete. De esta forma, como los casquetes son entornos disjuntos, basta con comprobar que $U_+, U_- \approx U_x$. Pero resulta que $U_x = \mathbb{P}^n \setminus \pi \approx \mathbb{R}^n$, y $U_+, U_- \approx \mathbb{R}^n$ porque son homeomorfos a discos abiertos.

Visto esto, podemos considerar la elevación de caminos que vamos a utilizar. Sea $a = (1 : 0 : \dots : 0)$ el punto base del grupo fundamental. Entonces, tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{S}^n \ni (x_0, \dots, x_n) & \\ \tilde{\sigma} \nearrow & \downarrow p & \downarrow \\ [0, 1] & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P}^n \ni (x_0, \dots, x_n) \end{array}$$

de forma que σ es un lazo en \mathbb{P}^n con base en a , y por tanto verifica $\sigma(0) = \sigma(1) = a$. Si llamamos $p^{-1}(a) = \{\tilde{a}, -\tilde{a}\}$, por el lema de elevación de caminos [FALTA CITA], podemos elegir $\tilde{\sigma}$ de forma que se verifique que $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{a}$. Pero como tan solo sabemos que $p \circ \tilde{\sigma} = \sigma$, entonces $\tilde{\sigma}(1)$ no tiene por qué ser \tilde{a} , puede ser también $-\tilde{a}$.

Planteamos entonces dos casos:

- I $\tilde{\sigma}$ es un lazo en \mathbb{S}^n de base \tilde{a} . Como ya vimos en la proposición 8.2.1 que $\pi(\mathbb{S}^n) = \{1\}$, podemos escribir:

$$\tilde{H}_s : \tilde{\sigma} \simeq \tilde{e} = \tilde{a}$$

y tomando imágenes por p tenemos:

$$H_s = p \circ \tilde{H}_s : p \circ \tilde{\sigma} \simeq p \circ \tilde{e}$$

y por ser $p \circ \tilde{\sigma} = \sigma$, tenemos que $H_s : \sigma \simeq e = a$. Por tanto, $[\sigma] = 1 \in \pi(\mathbb{P}^n, a)$.

- II $\tilde{\sigma}$ es un camino en \mathbb{S}^n de \tilde{a} a $-\tilde{a}$. Consideramos el camino:

$$\tilde{\alpha}(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t, 0, \dots, 0)$$

que verifica que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{a}$ y $\tilde{\alpha}(1) = -\tilde{a}$. De nuevo, por estar en \mathbb{S}^n existe una homotopía con extremos fijos:

$$\tilde{H}_s : \tilde{\sigma} \underset{\tilde{a}, -\tilde{a}}{\simeq} \tilde{\alpha}$$

y, de nuevo tomando imágenes, obtenemos la homotopía:

$$p \circ \tilde{H}_s : \sigma \simeq \alpha$$

donde los extremos fijos son $p(\tilde{a}), p(-\tilde{a})$, y ambos son a . Por tanto es homotopía de lazos. Entonces, tenemos que $[\sigma] = [\alpha] \in \pi(\mathbb{P}^n, a)$.

De esta forma, hemos comprobado que cualquier lazo de \mathbb{P}^n está en alguna de las dos clases de homotopía. De esta forma, podemos asegurar que $|\pi(\mathbb{P}^n, a)| \leq 2$. Veamos pues que las clases 1 y $[\alpha]$ son distintas.

En efecto, si fueran iguales consideramos la homotopía $H_s : \alpha \underset{a}{\simeq} e$. Esta verifica $H_s(0) = H_s(1) \equiv a$, $H_0 = \alpha$ y $H_1 \equiv a$. Al elevarla, nos queda un diagrama como el siguiente:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{S}^n & \\ \tilde{H} \nearrow & \downarrow p & \\ [0, 1] \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & \mathbb{P}^n \end{array}$$

donde la existencia de \tilde{H} está garantizada por el lema de elevación [FALTA CITA]. Además, podemos elegir que $\tilde{H}_0 = \tilde{\alpha}$. Como además la homotopía es de extremos fijos, su elevación lo es, y están definidos también $\tilde{H}_s(0) = \tilde{a}$ y $\tilde{H}_s(1) = -\tilde{a}$. Pero necesariamente, por continuidad y por ser $H_1 \equiv a$, \tilde{H}_1 tiene que ser una constante, y tenemos $\tilde{H}_1(0) = \tilde{a}$ y $\tilde{H}_1(1) = -\tilde{a}$, lo cual es una contradicción.

Entonces, el grupo fundamental de \mathbb{P}^n tiene dos elementos, y por tanto tiene que ser \mathbb{Z}_2 . ■

8.6. El grupo fundamental del círculo

El objetivo de esta sección es calcular el grupo fundamental de \mathbb{S}^1 , el círculo de \mathbb{R}^2 . Además, este es homeomorfo a \mathbb{P}^1 , la recta proyectiva real, con lo que, considerando también la sección anterior, ya tendremos el grupo fundamental del espacio proyectivo de cualquier dimensión.

Teorema 8.6.1 (Grupo fundamental de \mathbb{S}^1). *El grupo fundamental de \mathbb{S}^1 es $\pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$.*

Demostración. Consideramos el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R} & t \\ & \downarrow p & \downarrow \\ [0, 1] & \xrightarrow{\sigma} \mathbb{S}^1 & e^{2\pi ti} \end{array}$$

donde ya hemos visto que \mathbb{R} es un espacio recubridor con la aplicación p .

Definimos entonces la siguiente aplicación entre grupos:

$$\begin{aligned} \# : \pi(\mathbb{S}^1, a) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [\sigma] &\mapsto \#\sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) \end{aligned}$$

para cualquier elevación $\tilde{\sigma}$ de σ en \mathbb{R} . La denominamos **índice, número de vueltas o grado**.

El objetivo de la demostración es comprobar que la aplicación $\#$ anterior es un isomorfismo de grupos, pues entonces hemos terminado. Desde luego, es necesario comprobar también que está bien definida.

En primer lugar, comprobamos que $\#$ no depende de la elevación $\tilde{\sigma}$. Para ello, sea $\hat{\sigma}$ otra elevación. Tenemos que verificar que $\tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) = \hat{\sigma}(1) - \hat{\sigma}(0)$. Consideramos entonces la aplicación:

$$[0, 1] \ni t \mapsto \tilde{\sigma}(t) - \hat{\sigma}(t)$$

Como $p \circ \tilde{\sigma} = p \circ \hat{\sigma} = \sigma$, necesariamente $\tilde{\sigma}(t) - \hat{\sigma}(t) \in \mathbb{Z}$. Dado que la aplicación anterior es continua y $[0, 1]$ es conexo, su imagen es conexa, y un conexo en \mathbb{Z} es un punto, es decir, $\tilde{\sigma}(t) - \hat{\sigma}(t)$ es constante, y la llamamos k . Entonces:

$$\tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) = (\hat{\sigma}(1) + k) - (\hat{\sigma}(0) + k) = \hat{\sigma}(1) - \hat{\sigma}(0)$$

Para asegurar que está bien definida, también hace falta ver que $\#$ no depende del representante. Es decir, que dados σ, τ de forma que $\sigma \simeq_a \tau$, $\#\sigma = \#\tau$. Para ello, vamos a recurrir a la elevación: consideramos la homotopía $H : \sigma \simeq_a \tau$. Entonces, tenemos:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R} & \\ & \downarrow p & \\ [0, 1]^2 & \xrightarrow{H} \mathbb{S}^1 & \end{array}$$

donde la existencia de la elevación \tilde{H} está garantizada por el lema de elevación de homotopías [FALTA CITA]. Está claro que $\tilde{H}_0 = \tilde{\sigma}$ y $\tilde{H}_1 = \tilde{\tau}$. Además, por ser H homotopía con el extremo a fijo, para todo s H_s es un lazo con base a .

Ahora, como queremos ver que $\#\sigma = \#\tau$, consideramos la aplicación $s \mapsto \tilde{H}_s(1) - \tilde{H}_s(0) = \#(H_s)$, que está bien definida por ser cada H_s un lazo. Entonces, está claro que $\#(H_s) \in \mathbb{Z}$, y por ser una aplicación de $[0, 1]$ en \mathbb{Z} continua, es constante. Entonces:

$$\#\sigma = \#(H_0) = \#(H_1) = \#\tau$$

Así, ya hemos visto que está bien definida. Falta comprobar pues que es biyectiva y homomorfismo de grupos.

Desde luego, es sobreyectiva. En efecto, consideramos los caminos $[0, 1] \ni t \mapsto e^{2k\pi it}$, con $k \in \mathbb{Z}$. Entonces, cada uno de ellos tiene una elevación $\tilde{\sigma}(t) = kt$, de forma que su índice es k .

Para ver la inyectividad, hay que comprobar que $\# \sigma = \# \tau \implies \sigma \simeq \tau$. Podemos escoger un par de elevaciones $\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}$ que verifiquen que $\tilde{\tau}(0) = \tilde{\sigma}(0)$. Así, como $\# \sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0)$, $\# \tau = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0)$, y son iguales, resulta que $\tilde{\sigma}(1) = \tilde{\tau}(1)$.

Ahora, está claro que la interpolación lineal $(1-s)\tilde{\sigma}(t) + s\tilde{\tau}(t)$ es una homotopía en \mathbb{R} . Entonces, $H_s := p((1-s)\tilde{\sigma}(t) + s\tilde{\tau}(t))$ es una homotopía en \mathbb{S}^1 entre $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\tau}$. Pero aún falta probar que es homotopía de lazos. En efecto:

$$H_s(0) = p((1-s)\tilde{\sigma}(0) + s\tilde{\tau}(0)) = p(\tilde{\sigma}(0)) = \sigma(0) = a$$

$$H_s(1) = p((1-s)\tilde{\sigma}(1) + s\tilde{\tau}(1)) = p(\tilde{\sigma}(1)) = \sigma(1) = a$$

Por fin, ya solo falta ver que $\#$ es homomorfismo de grupos. Como el grupo fundamental se definía con la operación $*$, de forma que $[\sigma] * [\tau] = [\sigma * \tau]$, tenemos que verificar que $\# \sigma + \# \tau = \#(\sigma * \tau)$.

Entonces, volviendo a la definición de índice, tenemos que:

$$\# \sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0)$$

$$\# \tau = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0)$$

$$\#(\sigma * \tau) = \widetilde{\sigma * \tau}(1) - \widetilde{\sigma * \tau}(0)$$

donde podemos escoger $\tilde{\tau}(0) = \tilde{\sigma}(1)$, de forma que $\tilde{\sigma} * \tilde{\tau}$ esté bien definido. Entonces, este es un camino de $\tilde{\sigma}(0)$ a $\tilde{\tau}(1)$, es decir, de a a a .

Como $p \circ (\tilde{\sigma} * \tilde{\tau}) = \sigma * \tau$, sabemos que $\tilde{\sigma} * \tilde{\tau} = \widetilde{\sigma * \tau}$, por unicidad de la elevación [PORFA QUE ALGUIEN COMPRUEBE SI LO TIENE APUNTADO IGUAL]. Entonces:

$$\#(\sigma * \tau) = \widetilde{\sigma * \tau}(1) - \widetilde{\sigma * \tau}(0) = \tau(1) - \tau(0) = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0) + \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\sigma}(0)$$

como queríamos. ■

Corolario 8.6.2 (Grupo fundamental de \mathbb{P}^1). *El grupo fundamental de \mathbb{P}^1 es $\pi(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}$.*

Demostración. Trivial por ser $\mathbb{P}^1 \approx \mathbb{S}^1$. ■

Corolario 8.6.3 (Grupo fundamental del toro). *El grupo fundamental del toro de revolución \mathbb{T} es $\pi(\mathbb{T}) = \mathbb{Z}^2$.*

Demostración. Como el toro es homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, la proposición 8.3.3 nos asegura que:

$$\pi(\mathbb{T}) = \pi(\mathbb{S}^1) \times \pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}^2$$

Corolario 8.6.4. *El grupo de rotaciones $SO(3)$ no es homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$.*

Demostración. En efecto, se puede comprobar (aunque no lo haremos aquí) que $SO(3) \approx \mathbb{P}^3$. Por tanto, como ya vimos en el teorema 8.5.1, tiene grupo fundamental \mathbb{Z}_2 . Sin embargo, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ tiene por grupo fundamental \mathbb{Z} , por el resultado anterior. ■

Parte III

Apéndices

Apéndice A

Espacios Métricos

En este apéndice veremos con detalle las relaciones entre los archiestudiados espacios métricos con los espacios topológicos.

A.1. Normas

En esta comentamos (entre otras cosas) algunos resultados interesantes (y bonitos) sobre normas que usualmente se usan como mantras satánicos (pues jamás se demuestran).

A.1.1. Conceptos Previos

A continuación introducimos la definición de norma y los conceptos que a ella subyacen.

Definición A.1.1 (Norma). Es harto conocido, casi desde que Eduardo Aguirre¹ llevaba pantalones cortos, que una **norma** es una aplicación $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{K}$ que verifica

1. Es nula si y solo si el vector es nulo. Es decir, dado $u \in \mathbb{R}^n$

$$\|u\| = 0 \iff u = 0$$

2. Tiene un comportamiento lineal respecto a escalares. Esto es

$$\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$$

3. Verifica la desigualdad triangular o de Minkowski, es decir, dados dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Una definición que surge de forma automática es la de espacio vectorial normado.

Definición A.1.2 (Espacio Vectorial Normado). Llamamos **espacio vectorial normado** a un espacio vectorial E equipado con una norma $\|\cdot\|$, es decir, al par $(E, \|\cdot\|)$.

A.1.2. Topologización de un Espacio Vectorial Normado

Todo espacio vectorial normado puede ser “metrizado” de forma canónica, tal y como muestra la siguiente definición.

Definición A.1.3 (Métrica Procedente de la Norma). Decimos que una métrica d definida sobre un espacio vectorial E **procede de una norma** si existe una norma $\|\cdot\|$ tal que cumple

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

¹En la mitología de los Dobles Grados, profesor de Álgebra Lineal conocido por sus refranes y frases célebres.

Así, como todo espacio métrico es, a su vez, un espacio topológico (ver ejemplo 1.1.1), podemos preguntarnos qué relaciones hay entre las topologías engendradas por dos normas. En particular, cabe preguntarse cuándo dos normas generan la misma topología.

Definición A.1.4 (Equivalencia de Normas). Decimos que dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son **equivalentes** si engendran la misma topología.

A.1.3. Teorema General de Equivalencia

Esta sección está dedicada a demostrar el siguiente teorema.

Teorema A.1.1 (Teorema General de Equivalencia). *Sea E un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un cuerpo completo. Entonces, todas las normas definidas sobre E son equivalentes.*

Como la demostración del teorema es un poco larga (tampoco demasiado), la dotaremos de una sección propia. No vamos a demostrar el caso general para cualquier espacio vectorial sobre un cuerpo completo, nos limitaremos a probarlo para \mathbb{R}^n (y es fácilmente generalizable a \mathbb{C}^n).

Demostración del Teorema General de Equivalencia

Nuestro objetivo es, dadas dos normas arbitrarias, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ de E , demostrar que las topologías engendradas por ellas son iguales. Es decir

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} = \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$$

Para ello, estudiemos y repasemos algunas propiedades generales de las normas.

Otra propiedad a tener en cuenta es la continuidad. Dado que esta será crucial en la demostración, nos detendremos un poco más en ella.

Veamos que una norma $\|\cdot\|$ es continua en la topología usual. Con esto último queremos decir que en \mathbb{R}^n consideramos la topología definida por la distancia euclídea (que a su vez se define a partir de la norma euclídea $\|\cdot\|_e$) y en \mathbb{R} la topología definida por el valor absoluto.

Por tanto, para demostrar que una norma es continua en la topología usual debemos probar que, dado $a \in \mathbb{R}^n$ y dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si

$$x \in B_{\|\cdot\|_e}(a, \delta)$$

entonces

$$f(x) = \|x\| \in B_{|\cdot|}(f(a), \varepsilon) = B_{|\cdot|}(\|a\|, \varepsilon)$$

En otras palabras, dado $a \in \mathbb{R}^n$ y dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si

$$\|x - a\|_e < \delta$$

entonces

$$|\|x\| - \|a\|| < \varepsilon$$

En efecto, aplicando las propiedades antes vistas, tenemos que

$$|\|x\| - \|a\|| \leq \|x - a\| = \|x - a\| = \left\| \sum_i (x_i - a_i) e_i \right\| \stackrel{2,3.}{\leq} \sum_i |x_i - a_i| \|e_i\|$$

Teniendo en cuenta que $|x_i - a_i| \leq \|x - a\|_e$, queda

$$|\|x\| - \|a\|| \leq \sum_i \|x - a\|_e \|e_i\| = \|x - a\|_e \sum_i \|e_i\|$$

donde $\sum_i \|e_i\|$ es una constante que denotaremos por C .

Así, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon/C > 0$ tal que si $\|x - a\|_e < \delta$, entonces

$$|\|x\| - \|a\|| < \varepsilon$$

con lo que queda probada la continuidad de la norma $\|\cdot\|$.

Ya tenemos todo lo necesario para realizar la demostración. Una vez que probemos las dos contenciones de las topologías, es decir

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2} \quad \text{y} \quad \mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} \supset \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$$

habremos terminado.

Comencemos notando que la función

$$\frac{\|\cdot\|_1}{\|\cdot\|_2} : \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

es continua con la topología usual en \mathbb{S}^{n-1} , ya que el denominador no se anula y las normas son continuas. Dado que \mathbb{S}^{n-1} es compacto, la función es acotada y alcanza el mínimo. Como el numerador tampoco se anula en el compacto, esto equivale a decir que existen $a, b > 0$ tal que

$$0 < a \leq \frac{\|\cdot\|_1}{\|\cdot\|_2} \leq b$$

en \mathbb{S}^{n-1} . Es decir, para todo $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ se tiene que

$$0 < a\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq b\|v\|_2$$

Lo deseable sería tener esta desigualdad para un vector cualquiera de \mathbb{R}^n y así tener relacionadas las distancias de ambas topologías. Veamos que así es.

Sea $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, existe un vector $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ y un número positivo λ tal que $u = \lambda v$. Entonces, multiplicando por λ en la desigualdad anterior, dado que es positivo, y utilizando la propiedad 2, obtenemos

$$a\lambda\|v\|_2 \leq \lambda\|v\|_1 \leq b\lambda\|v\|_2 \iff a\|\lambda v\|_2 \leq \|\lambda v\|_1 \leq b\|\lambda v\|_2 \iff a\|u\|_2 \leq \|u\|_1 \leq b\|u\|_2$$

Por otro lado, si u es el vector nulo, la desigualdad se cumple trivialmente. Por tanto, para todo vector u de \mathbb{R}^n se tiene que

$$a\|u\|_2 \leq \|u\|_1 \leq b\|u\|_2 \tag{A.1}$$

donde $a, b > 0$.

Por último, relacionemos los abiertos de ambas topologías para obtener las dos inclusiones. Una vez que tenemos la relación entre las normas, es fácil encontrar una relación entre las bolas de ambas topologías, dado que estas se definen a partir de las distancias que definen las normas.

Sea $x \in B_{d_1}(\rho, \varepsilon)$. Esto implica que $\|x - \rho\|_1 < \varepsilon$. Por la desigualdad (A.1) se tiene entonces que $\|x - \rho\|_2 \leq \varepsilon/a$, lo cual a su vez implica que $x \in B_{d_2}(\rho, \varepsilon/a)$. Es decir,

$$B_{d_1}(\rho, \varepsilon) \subset B_{d_2}(\rho, \varepsilon/a)$$

Por tanto, dado \mathcal{U} un abierto de la topología $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$ siempre podemos encontrar un abierto de la topología $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1}$ contenido en él. Esto es evidente ya que al ser \mathcal{U} un abierto, contendrá una bola B_{d_2} que a su vez, por lo que acabamos de ver, contiene una bola B_{d_1} , que es un abierto de $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1}$. Esto implica que la topología definida por la norma $\|\cdot\|_1$ tiene más abiertos, ya que al menos tiene uno por cada abierto de $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$. Es decir, acabamos de demostrar que

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} \supset \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$$

De la misma forma, dado $x \in B_{d_2}(\rho, \varepsilon)$, es decir, $\|x - \rho\|_2 < \varepsilon$, por la desigualdad (A.1) se tiene que $\|x - \rho\|_1 < b\varepsilon$, lo cual implica que $x \in B_{d_1}(\rho, b\varepsilon)$. Es decir,

$$B_{d_2}(\rho, \varepsilon) \subset B_{d_1}(\rho, b\varepsilon)$$

Razonando como acabamos de hacer, esto implica que

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$$

Así, finalmente, se concluye que

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} = \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2} \quad (\text{A.2})$$

Dado que las normas eran arbitrarias, queda demostrado que todas las normas de \mathbb{R}^n son equivalentes.

Contraejemplo para cuerpos no completos

A menudo se obvia la condición de que los cuerpos sean completos, pero es necesaria para que se verifique el teorema. En particular, vamos a ver un contraejemplo: dos normas en \mathbb{Q}^2 que no son equivalentes.

Consideramos las normas $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas como:

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y| \quad \& \quad \|(x, y)\|_2 = |x + \sqrt{2}y|$$

Desde luego, se verifica que son normas. Que no son equivalentes se puede ver tanto por acotaciones como considerando las bolas en esta topología.

En efecto, $\|\cdot\|_1$ tiene por bolas los rombos abiertos: es la norma 1 tradicional. Por tanto la topología que genera en \mathbb{Q}^2 es restricción de la usual en \mathbb{R}^2 . Sin embargo, $\|\cdot\|_2$ está generada por unas bolas más extrañas. La bola $B(x, \epsilon)$ es el área limitada por dos rectas de la forma $x + \sqrt{2}y = \pm\epsilon$. Así, como \mathbb{Q}^2 es denso en \mathbb{R}^2 , estas bolas siempre tienen puntos todo lo separados del origen que haga falta (considerando la distancia usual) y, por tanto, ninguna bola es acotada en la topología usual. Por eso, las bolas usuales no son abiertas en la topología generada por $\|\cdot\|_2$, y las topologías son distintas.

Una aproximación inocente puede llevar a pensar que el mismo argumento se podría aplicar palabra por palabra para encontrar dos normas no equivalentes en \mathbb{R}^2 , lo que contradiría al teorema de equivalencia. El problema no está en el argumento, sino en que $\|\cdot\|_2$ no es una norma en \mathbb{R}^2 : en efecto, si exigimos que se anule lo hace en $(0, 0)$ y en puntos que siempre tienen una coordenada irracional. De esta forma, la condición solo se cumple en \mathbb{Q}^2 .

Apéndice B

Funtores y teoría de categorías

Este anexo, si bien no es necesario para entender el apartado correspondiente, quiere ser una brevísima introducción a los conceptos más básicos de teoría de categorías, de forma que el lector comprenda qué es realmente un funtor y pueda aplicar este conocimiento a la topología algebraica, donde los utilizamos.

Empezamos definiendo pues qué es una categoría, pero para ello hay que conocer antes el concepto de clase.

B.1. Clases

Definición B.1.1 (Clase). Una *clase* es una colección de objetos (a menudo conjuntos, con una estructura adicional) que pueden ser definidos inequívocamente por una propiedad común. Por ejemplo, podemos considerar la clase de los grupos o la clase de los espacios vectoriales.

Observación B.1.1 (Clase propia). Decimos que una clase es *propia* si no es un conjunto. Desde luego, cualquier conjunto es una clase, lo cual se sigue directamente de la definición (la propiedad es que un elemento pertenece a la clase cuando pertenece al conjunto).

Así, de forma muy intuitiva, podemos considerar una clase propia como un “conjunto muy grande”. Si se pudieran definir conjuntos como definiómos clases propias, citando una propiedad común, introduciríamos paradojas en la teoría de conjuntos, como la archiconocida paradoja de Russell. De esta forma, se crea el concepto de clase, que trata de solventar este obstáculo. Por ejemplo, la paradoja de Russell no se da con clases porque no existe la noción de que una clase esté contenida en otra.

Nótese que en algunas teorías de conjuntos formales, y en particular con los axiomas ZFC, las clases no se definen. De esta forma, se aceptan en cuanto que todo lo que se formule con clases se pueda formular sin ellas, usando, en particular, la propiedad asociada, expresable con una fórmula. En este sentido, se pueden entender las clases como “clases de equivalencia de fórmulas”. \diamond

B.2. Categorías y funtores

Ahora sí, podemos definir una categoría. La definición puede variar según el autor, pero el concepto por detrás es siempre el mismo.

Definición B.2.1 (Categoría). Una *categoría* consiste en:

- Una clase de *objetos* (a menudo conjuntos, con o sin estructura adicional).
- Una clase de *morfismos*, que van de un objeto de los anteriores a otro. Un morfismo es una aplicación entre dos objetos que preserve su estructura. Por ejemplo, si los objetos son conjuntos los morfismos son funciones, si son grupos los morfismos son homomorfismos, y si los objetos son espacios topológicos los morfismos son funciones continuas.

- Una operación de **composición**, que dados dos morfismos $f : a \rightarrow b$, $g : b \rightarrow c$ devuelva $g \circ f : a \rightarrow c$.

Y los siguientes axiomas:

I **Asociatividad de la composición**: la composición de morfismos es asociativa. Es decir, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

II **Morfismo identidad**: para cada objeto x , existe un morfismo $1_x : x \rightarrow x$ de forma que para cualquier $f : a \rightarrow x$ y $g : x \rightarrow b$, $1_x \circ f = f$ y $g \circ 1_x = g$.

Observación B.2.1. Es habitual referirse a las categorías con una abreviatura del nombre de la palabra en negrita. Así, la categoría de todos los grupos, donde los morfismos son los homomorfismos de grupos se denota **Grp**. Se puede comprobar con facilidad que esta es, en efecto, una categoría. \diamond

Ahora ya podemos definir el concepto de funtor.

Definición B.2.2 (Funtor). Un **funtor** o **functor** es una aplicación $F : C \rightarrow D$ entre dos categorías C y D que asigna a cada objeto otro objeto y a cada morfismo otro morfismo de forma que preserve los morfismos identidad y la composición. Es decir, para cada $X \in C$, $F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)}$; y para cada $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Observación B.2.2. Intuitivamente, un funtor es un homomorfismo para categorías: una aplicación que conserva la estructura de las categorías. En particular, la colección de categorías cuyos objetos son conjuntos (no son clases propias) es una categoría, y en este caso un funtor es él mismo un morfismo de esta categoría de categorías pequeñas. \diamond

B.3. *General nonsense*

La teoría de categorías tiene utilidad para abstraer otros conceptos matemáticos en muchas áreas. Su propósito es usar esta abstracción para poder probar resultados muy complicados de forma simple. En nuestro caso, la usaremos para traducir propiedades de los espacios topológicos a propiedades de su grupo fundamental asociado, como veremos en la sección correspondiente.

De esta forma, se suelen agrupar este tipo de demostraciones de teoría de categorías bajo la denominación **general nonsense** o **abstract nonsense**. En efecto, a menudo este tipo de demostraciones pueden parecer desconectadas de lo que se está demostrando, al recurrir a los conceptos abstractos de teoría de categorías. Este nombre no es, en principio, derogatorio; su intención es más bien avisar en tono ligero de este nivel de abstracción.

Apéndice C

Cosas Pendientes

C.1. Examen Septiembre 2007

Problema 1

Se considera en el plano \mathbb{R}^2 los *triángulos semiabiertos* de vértice $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ y anchura $\varepsilon > 0$ definidos por:

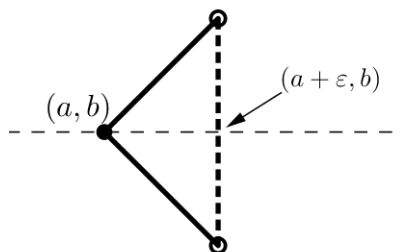
$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \geq a - b, x + y \geq a + b, a \leq x \leq a + \varepsilon\} \quad (\text{C.1})$$

y equipamos \mathbb{R}^2 con la topología \mathcal{T} que tiene todos esos triángulos por bases de abiertos.

1. Calcular la adherencia (en \mathcal{T}) de un triángulo semiabierto \mathcal{U} .
2. Estudiar si $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ es Lindelöf. ¿Y es localmente compacto?
3. Demostrar que los únicos conjuntos conexos para esta topología son los puntos.
4. Existe alguna topología \mathcal{T}_1 en \mathbb{R} tal que \mathcal{T} sea la topología del producto $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_1$? ¿Y tal que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ sea homeomorfo a $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_1)$? a

Demostración. Lo primero de todo, vamos a hacernos una idea de como son estos abiertos:

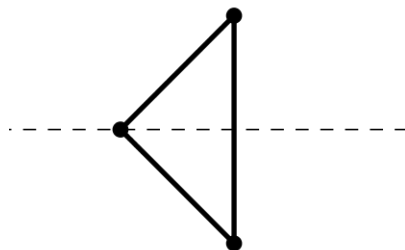
Por la descripción de estos abiertos, vemos que los abiertos son de la siguiente manera: Estos



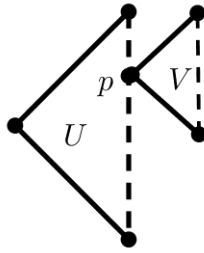
serán los abiertos de nuestra base de abiertos de la topología \mathcal{T} . Algo muy importante y que se resaltarán siempre es que solo hemos de responder a lo que se nos pide. En este caso ya se nos dice que es una base de la topología, por lo tanto no tenemos que comprobarlo ni nada por el estilo. Podemos jugar con este hecho desde el principio, ya que nos lo da el enunciado.

1. Vamos a hacer una serie de apreciaciones antes de proceder a la resolución de este apartado. Hemos de observar que $\mathcal{T}_u \subsetneq \mathcal{T}$. Esto implica que la topología \mathcal{T} es más fina que la usual. Esto se desprende de que cualquier abierto de la usual contiene un abierto de \mathcal{T} , y que esta contención es estricta de que los triángulos no son abiertos en la usual. (La otra contención no se da ya que no podemos meter abiertos de la usual para ciertos puntos del triángulo, como por ejemplo el vértice).

Vamos a calcular entonces la **adherencia de un triángulo semiabierto**. La primera idea intuitiva que nos surge es añadirle al abierto el segmento vertical con los extremos incluidos que une los dos vértices del triángulo.



Estos son cerrados en la topología usual, $\implies \mathcal{U} \subset \overline{\mathcal{U}}^{usual}$, luego $\mathcal{U} \subset \overline{\mathcal{U}}^{usual} \subset \overline{\mathcal{U}}$. Ahora vamos a ver si los puntos que hemos añadido son adherentes. A esto respondemos que no (si llamamos r al segmento citado), ya que $\forall p \in r, \exists V$ entorno de $p \mid V \cap \mathcal{U} = \emptyset$.



Por lo tanto la adherencia de \mathcal{U} en esta topología es el propio \mathcal{U} , ya que como hemos visto, los puntos de ese segmento no son adherentes.

Si lo hubieramos visto comprobando “uno a uno” todos los puntos habría que decir además que los puntos de fuera del triángulo no son adherentes ya que existe un abierto en la usual que contiene un triángulo (que es entorno que no corta al conjunto).

Luego $\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$, lo que implica además que es una base de abiertos y cerrados simultáneamente.

2. Veamos si el espacio topológico es **Lindelöf** 5.3.3 con esta topología.

Lo primero que tenemos que intentar hacer es ver si hay subespacios especiales (por ejemplo rectas verticales).

Tomamos la recta vertical r , subespacio de nuestro espacio topológico con la topología relativa. Si lo cortamos con los abiertos relativos, observamos que $p = r \cap \mathcal{U}^{\text{abierto rel. en } r} \implies \mathcal{T}|_r$ es la topología discreta \implies No es II axioma por ser recta con topología discreta $\implies r = \cup_{p \in r} \{p\}$.

Por lo tanto \mathcal{T} no puede ser II axioma, ya que esta es una propiedad hereditaria. Además, \mathcal{T} tampoco es Lindelöf ya que esta es una propiedad hereditaria para cerrados. Como r es cerrado, \mathcal{T} tampoco es Lindelöf.

Para comprobar si es **localmente compacto** procederemos del siguiente modo. Nos hacemos la pregunta, ¿existirá algún entorno compacto? Supongamos que existe algún entorno compacto \mathbb{K}^p . $\exists \mathbb{K}^p \supset \mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}} \implies \mathcal{U}$ compacto. Nos centraremos en ello. Si la respuesta fuera negativa, si encuentro un $\mathcal{L}^{\text{cerrado}} \subset \mathcal{U}$ que no es compacto habremos terminado. Si tomamos un segmento con los extremos contenidos, vertical, y contenido en un triángulo al que llamaremos \mathcal{I} . Si $\exists \mathbb{K}^p \supset \mathcal{U} \supset \mathcal{I}$, la topología de este segmento es la discreta por ser un subespacio de r que tomamos antes. Además es cerrado en la topología usual. Por lo tanto, $\mathcal{T}|_{\mathcal{I}}$ es la topología discreta \implies no es compacto (no hay un subrecubrimiento finito), luego hemos terminado ya que al \mathcal{I} no ser compacto no puede existir el supuesto compacto que supusimos.

3. Veamos si es totalmente desconexo.

Como se vió en resultados teóricos, si un espacio tiene una base *clopen* y es T_0 entonces es totalmente desconexo.

Supongamos que $p, q \in \mathcal{X}, p \neq q$ y $p, q \in \mathcal{C}$. Veamos que \mathcal{C} no es conexo. Ponemos $\mathcal{C} = (\mathcal{C} \cap \mathcal{U}) \cup (\mathcal{C} \setminus \mathcal{U})$, sabemos que \mathcal{U} es abierto ambiente (\mathcal{U} es abierto de uno de los puntos que no tiene al otro, que existe por ser T_0), y que estas intersecciones son no vacías ya que contienen a los puntos p y q . Por lo tanto tenemos dos cerrados que producen la desconexión, y como es para cualquiera dos puntos, el espacio es totalmente desconexo con esta topología. Además se necesita que haya dos puntos distintos.

4. Para ver si algo es topología producto hemos de mirar los productos que lo conforman. Si cogemos el producto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y miramos como son las topologías estudiando cada \mathbb{R} como subespacio vemos que la vertical tiene la topología discreta y la horizontal la Sorgenfrey, luego los abiertos del producto cartesiano son puntos por intervalos semiabiertos. Por lo tanto comprobamos que no obtenemos la topología buscada. $\mathcal{T}_{[\cdot)} \times \mathcal{T}_d \not\supseteq \mathcal{T}$.

■

Número 1.1. Sea \mathcal{X} un conjunto, y \mathcal{T}_{CF} la familia de todos los subconjuntos de \mathcal{X} cuyo complementario es finito, más el conjunto vacío. Probar que \mathcal{T}_{CF} es una topología en \mathcal{X} . Esta topología se llama, por razones evidentes, *topología de los complementarios finitos*. ¿Qué topología obtenemos si \mathcal{X} es un conjunto finito?

A partir del enunciado se deduce que los abiertos de esta topología son los elementos de la colección

$$\mathcal{T}_{\text{CF}} = \{U \subset \mathcal{X} : U = \emptyset \text{ o } \mathcal{X} \setminus U \equiv U^c \text{ es finito}\}.$$

Veamos que efectivamente \mathcal{T}_{CF} es una topología al verificar las condiciones necesarias.

- En primer lugar, el vacío pertenece a esta por definición. Además, el complementario del total \mathcal{X} (el vacío) es finito, luego \mathcal{X} también pertenece a \mathcal{T}_{CF} .
- Por otro lado, sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ para un cierto conjunto de índices I una colección arbitraria de elementos de \mathcal{T}_{CF} , teniéndose que

$$\mathcal{X} \setminus \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} (\mathcal{X} \setminus U_{\alpha}).$$

Pero $\mathcal{X} \setminus U_{\alpha}$ es finito para cada $\alpha \in I$, luego la intersección numerable de ellos también lo será. De este modo, la unión numerable de abiertos de \mathcal{T}_{CF} pertenece a ella.

- Por último, consideremos U_1 y U_2 dos abiertos de \mathcal{T}_{CF} . Análogamente al caso anterior,

$$\mathcal{X} \setminus (U_1 \cap U_2) = \bigcup_{i=1}^2 (\mathcal{X} \setminus U_i).$$

Sin embargo, $\mathcal{X} \setminus U_i$ es finito para $i \in \{1, 2\}$, luego la unión finita de conjuntos finitos es finita.

Para finalizar, se nos pregunta qué topología se obtendría en caso de que \mathcal{X} fuese un conjunto finito. Si damos por cierta esta suposición, es claro que \mathcal{T}_{CF} coincide con la topología discreta, ya que el complementario de todo conjunto es finito.

A pesar de haber terminado con lo requerido del ejercicio, podemos ir más allá estudiando más a fondo esta topología. Para comenzar, nótese que si \mathcal{X} es numerable trivialmente el conjunto es separable y primer y segundo axioma de numerabilidad. El caso en el que \mathcal{X} no es numerable ya no es tan sencillo. Vayamos por partes.

- \mathcal{X} es separable. Es más, todo conjunto numerable es denso en \mathcal{X} . En efecto, supongamos que existiese un conjunto $A \subset \mathcal{X}$ numerable pero que no es denso en \mathcal{X} . Esto implica que existe un abierto $B \in \mathcal{T}_{\text{CF}}$ tal que $B \cap A = \emptyset$. De este modo,

$$(\mathcal{X} \setminus B) \cup (\mathcal{X} \setminus A) = \mathcal{X}.$$

Pero los conjuntos del primer miembro son finitos, y la unión de finitos es finita, lo que conllevaría a que \mathcal{X} también lo sea. Esto nos conduce a la contradicción buscada.

- \mathcal{X} no es primer axioma de numerabilidad, lo que implica que tampoco es segundo. Para corroborar esto, comprobemos que para cada punto $a \in \mathcal{X}$ no existe una base de entornos abiertos numerable centrada en a . Razonaremos de nuevo por reducción al absurdo.

Supongamos que sí que existe esa base y sea esta

$$\mathcal{U}^a = \{V_k \in \mathcal{T}_{\text{CF}} : k \geq 1\}.$$

La intersección

$$\left(\bigcap_{k \geq 1} V_k \right) \setminus \{a\}$$

es no vacía puesto que, al tomar los complementarios y aplicar las leyes de De Morgan se tiene que

$$\mathcal{X} \setminus \left(\bigcap_{k \geq 1} V_k \right) = \left(\bigcup_{k \geq 1} \mathcal{X} \setminus V_k \right),$$

y esta unión es numerable ya que $\mathcal{X} \setminus V_k$ es finito (recordemos que $V_k \in \mathcal{T}_{\text{CF}}$). Al ser \mathcal{X} no numerable y

$$\mathcal{X} = \left(\bigcap_{k \geq 1} V_k \right) \cup \left(\bigcup_{k \geq 1} \mathcal{X} \setminus V_k \right),$$

la intersección anterior ha de ser no numerable.

Tomemos ahora un punto cualquiera b de esta intersección con la condición de que sea distinto de a y consideremos el entorno abierto de a dado por $W := \mathcal{X} \setminus \{b\}$. Claramente, $a \in W$ y es abierto puesto que su complementario es finito. De forma evidente la condición $V_k \subset W$ no se verifica para ningún k ya que $b \in V_k$ para todo k . Esto verifica que \mathcal{U}^a no puede ser base, concluyendo así que cuando X no es numerable \mathcal{T}_{CF} no es primer axioma de numerabilidad.

- \mathcal{X} es compacto. En efecto, supongamos que $\{V_k : k \geq 1\}$ es un recubrimiento por abiertos de \mathcal{X} y tomemos un V_{k_0} arbitrario. Como este abierto pertenece a \mathcal{T}_{CF} su complementario es finito, luego

$$\mathcal{X} \setminus V_{k_0} := \{x_1, \dots, x_r\}$$

con $x_j \in \mathcal{X}$ y $j = \{1, \dots, r\}$ tales que $x_j \in V_{k_j}$ para cierto k_j , pues la unión de V_k recubre \mathcal{X} según lo hemos definido. De este modo, podemos tomar \mathcal{X} como la unión de V_{k_0} con los V_{k_j} que contienen a los puntos x_j , esto es,

$$\mathcal{X} = \bigcup_{j=0}^r V_{k_j},$$

lo que prueba que \mathcal{X} es compacto.

- \mathcal{X} es conexo. Un modo de probar esto es comprobar que no existen conjuntos abiertos y cerrados simultáneamente. En caso de que esto ocurriese, lo que quiere decir que $A \in \mathcal{T}_{\text{CF}}$ y $\mathcal{X} \setminus A \in \mathcal{T}_{\text{CF}}$, se tiene que $\mathcal{X} \setminus A$ y $X \setminus (\mathcal{X} \setminus A) = A$ son finitos, luego

$$\mathcal{X} = A \cup (\mathcal{X} \setminus A)$$

sería finito, y esto contradice que sea no numerable.

13/03/2017

EJERCICIO EXAMEN 2007

C.2. Examen Septiembre 2007

Problema 2

Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto

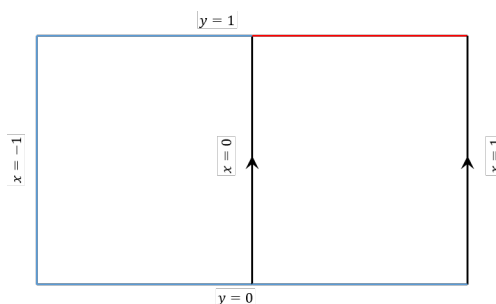
$$\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}. \quad (\text{C.2})$$

En S se considera la relación de equivalencia definida por las relaciones

$$(x, y) \sim (x, y); \quad (1, y) \sim (0, y); \quad (x, 1) \sim (x', 1) \text{ para } 0 \leq x, x' \leq 1.$$

1. Encontrar un subespacio de \mathbb{R}^3 homeomorfo al espacio cociente $X = S/\sim$.
2. Mostrar que X es simplemente conexo.
3. ¿Es X homeomorfo a la esfera?

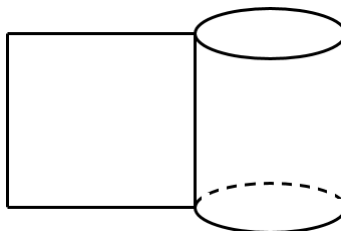
Demostración. En primer lugar, hagamos un análisis del conjunto con el que vamos a tratar y las relaciones de equivalencia involucradas. La primera de estas relaciones impone que cada punto está relacionado consigo mismo. La segunda relaciona los puntos que tienen la misma altura cuando en las rectas $x = 0$ y $x = 1$ (que señalamos en negro). Por último, la tercera nos dice que todos los puntos $x \in [0, 1]$ de la recta $y = 1$ están relacionados entre sí (que señalamos en rojo).



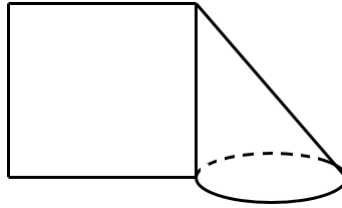
1. Para encontrar un subespacio como el que se requieren, basta hallar algún objeto de \mathbb{R}^3 en el que se realice una identificación dada por las relaciones de equivalencia anteriormente dadas. El diagrama a seguir es el siguiente

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & X \subset \mathbb{R}^3 \\ \downarrow & \nearrow \text{homeo} & \\ S/\sim & & \end{array}$$

Para obtener el conjunto cociente dada por la segunda relación de equivalencia se deberán identificar los puntos $(0, y)$ y $(1, y)$ de cada clase de equivalencia $\{0, 1\} \times \{y\}$ a un mismo punto. Como resultado, se obtiene que el conjunto cociente es el cilindro $S^1 \times [0, 1]$ de \mathbb{R}^3 al que se le añade el cuadrado $[-1, 0]^2$:

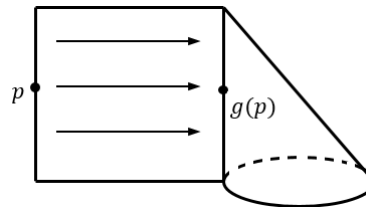


A continuación, la tercera relación de equivalencia viene a decir que todos los puntos que componen la circunferencia superior colapsan en uno, el $(1, 0)$:



Este esquema es el subconjunto X que buscábamos. Para verlo, basta comprobar que la aplicación $h : S/\sim \rightarrow X$ es un homeomorfismo. En resumidas cuentas, al cuadrado $[-1, 0]^2$ se le aplicó la identidad y a $[0, 1]^2$ una serie de transformaciones continuas. Así, h es una biyección y, por lo que sabemos, continua. No obstante, S/\sim es un conjunto compacto y $X \subset \mathbb{R}^3$ es T_2 , luego la aplicación h es un homeomorfismo. Para concluir, cabe destacar que la topología cociente es la topología inducida por \mathbb{R}^3 .

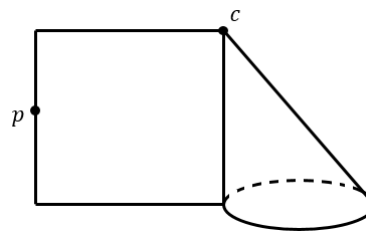
- Mostremos que X es simplemente conexo en dos pasos. En primer lugar, hagamos que cualquier punto p del cuadrado $[-1, 0]^2$ vaya a $g(p)$ mediante una aplicación g que es continua y tal que $(t, p) \rightarrow (1-t)p + tg(p)$ con $t \in [0, 1]$. De su definición se deduce que para $t = 0$ es la identidad y que para $t = 1$ tenemos el punto $g(p)$. De este modo, para un cierto t se ha contraído un poco hacia el cono



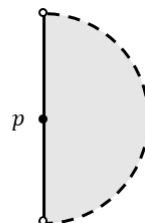
Una vez que únicamente quedan los puntos que el cuadrado compartía con el semicono, se puede hacer algo similar con este último. Si denotamos c al vértice del semicono, la aplicación dada por $(t, p) \rightarrow (1-t)p + tc$ con $t \in [0, 1]$.

Con esto, hemos mostrado que es homeomorfo al punto c , luego es simplemente conexo.

- Claramente, X no es homeomorfo a una esfera. Para verlo, tomemos el punto p de la figura



Los entornos del punto p son de la forma



que no son homeomorfos a los entornos en cada punto de la esfera (discos abiertos).

■

24/04/2017

(1) *Elevación semilocal*. Se trata de una elevación semilocal puesto que solamente se hará localmente en el primer factor del espacio producto $\mathcal{Y} \times [0, 1]$. Comprobemos que si fijamos $y \in \mathcal{Y}$ existe una elevación $\tilde{H}^y : V^y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$, donde V^y es un entorno abierto de y . Notemos que este entorno puede ser arbitrariamente pequeño.

En primer lugar, tenemos que $\{y\} \times [0, 1] \rightarrow X = \cup_x U^x$, donde U^x son los entornos regularmente cubiertos restringidos a H . Por ser $\{y\} \times [0, 1]$ compacto ($\{y\}$ lo es en \mathcal{Y} y $[0, 1]$ en \mathcal{X} respectivamente), existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r$ de modo que $H(\{y\} \times [t_{i-1}, t_i]) \subset U^{x_i}$, o lo que es lo mismo, $\{y\} \times [t_{i-1}, t_i] \subset H^{-1}(U^{x_i})$. No obstante, $H^{-1}(U^{x_i})$ es un abierto de $\mathcal{Y} \times [0, 1]$ por ser H continua.

El lema de Wallace nos dice que existe un entorno V_i^y de forma que $V_i^y \times [t_{i-1}, t_i] \subset H^{-1}(U^{x_i})$. Por consiguiente, podemos considerar

$$V^y = \bigcap_{1 \leq j \leq r} V_j^y,$$

entorno abierto (por ser intersección finita de abiertos) de y , luego

$$V^y \times [t_{i-1}, t_i] \subset H^{-1}(U^{x_i})$$

y es posible definir correctamente $H : V^y \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow U^{x_i}$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$.

Por inducción, elevamos esta restricción de H (recordemos que queremos elevar todo el intervalo $[0, 1]$). Sabemos que $\tilde{H}^y|_{V^y \times \{0\}} = \tilde{H}_0^y = \tilde{f}$. Supongamos que la elevación $\tilde{H}^y|_{V^y \times [0, t_i]}$ está definida. Para poder definir correctamente la elevación en $[t_i, t_{i+1}]$, ambas han de coincidir en t_i . Tal y como hemos tomado V^y en el razonamiento anterior, podemos tomar $H : V^y \times [t_i, t_{i+1}] \rightarrow U^{x_{i+1}}$ y, por consiguiente, $H(y, t_i) \in U^{x_{i+1}}$.

Por un lado, se tiene que la elevación $\tilde{H}^y|_{V^y \times [0, t_i]}$ está definida en el punto (y, t_i) , luego al ser

$$p(\tilde{H}^y|_{V^y \times [0, t_i]}(y, t_i)) = H(y, t_i) \in U^{x_{i+1}},$$

entonces

$$\tilde{H}^y|_{V^y \times [0, t_i]}(y, t_i) \in p^{-1}(U^{x_{i+1}}) = \bigcup_{\lambda} U_{\lambda}^{x_{i+1}}.$$

Pero al ser $U_{\lambda}^{x_{i+1}}$ disjuntos, existe un único λ tal que $\tilde{H}^y|_{V^y \times [0, t_i]}(y, t_i) \in U_{\lambda}^{x_{i+1}}$, o equivalentemente, $(y, t_i) \in (\tilde{H}^y|_{V^y \times [0, t_i]})^{-1}(U_{\lambda}^{x_{i+1}})$. Ahora, al ser la elevación continua y $U_{\lambda}^{x_{i+1}}$ un abierto, la imagen inversa es un abierto del producto $V^y \times [0, t_i]$, de modo que existe un entorno abierto $W^y \subset V^y \subset \mathcal{Y}$ tal que $W^y \times \{t_i\} \subset (\tilde{H}^y|_{V^y \times [0, t_i]})^{-1}(U_{\lambda}^{x_{i+1}})$. Como ya adelantamos al principio, se puede reducir V^y de modo que su intersección con W^y sea él mismo, por lo que también se cumple que $V^y \times \{t_i\} \subset (\tilde{H}^y|_{V^y \times [0, t_i]})^{-1}(U_{\lambda}^{x_{i+1}})$.

A continuación, al ser $p|_{U_{\lambda}^{x_{i+1}}}$ un homeomorfismo, podemos hacer la siguiente construcción

$$\begin{array}{ccc} V^y \times [t_{i-1}, t_i] & \xrightarrow{H} & U^{x_i} \\ & \searrow & \downarrow p|_{U_{\lambda}^{x_{i+1}}} \\ & & U_{\lambda}^{x_i} \end{array}$$

Con ella, vemos que $\tilde{H}^y|_{V^y \times [t_i, t_{i+1}]} = (p|_{U_{\lambda}^{x_{i+1}}})^{-1} \circ H$. Para ver que está bien definida es necesario que ambas aplicaciones coinciden en $V^y \times \{t_i\}$. Por un lado, al ser

$$(\tilde{H}^y|_{V^y \times [0, t_i]})(V^y \times \{t_i\}) \subset U_{\lambda}^{x_{i+1}},$$

se tiene que $V^y \times [0, t_i]$ es una elevación de $V^y \times \{t_i\}$ a $U_{\lambda}^{x_{i+1}}$, y lo mismo ocurre con $\tilde{H}^y|_{V^y \times [t_i, t_{i+1}]}$. De este modo, dado $(y, t_i) \in V^y \times \{t_i\}$ se tiene que

$$p|_{U_{\lambda}^x}(\tilde{H}^y|_{[0, t_i]}(y, t_i)) = H(y, t_i) = p|_{U_{\lambda}^x}(\tilde{H}^y|_{[t_i, t_{i+1}]}(y, t_i)).$$

Como $p|_{U_\lambda^{x_{i+1}}}$ es un homeomorfismo, para todo $(y, t_i) \in V^y \times \{t_i\}$ se tiene que

$$\tilde{H}^y|_{[0, t_i]}(y, t_i) = \tilde{H}^y|_{[t_i, t_{i+1}]}(y, t_i).$$

Con esto, se concluye que

$$\tilde{H}^y|_{V^y \times [0, t_i]} = \begin{cases} \tilde{H}^y|_{V^y \times [0, t_i]} & \text{si } 0 \leq t \leq t_i \\ \tilde{H}^y|_{V^y \times [t_i, t_{i+1}]} & \text{si } t_i \leq t \leq t_{i+1} \end{cases}$$

es continua y está bien definida.

Pegado. Por último, hemos de comprobar que las elevaciones $\tilde{H}^y : V^y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}$ son compatibles. Para ello, dadas dos elevaciones $\tilde{H}^y : V^y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}$ y $\tilde{H}^{y'} : V^{y'} \times [0, 1] \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}$, hemos de comprobar que coinciden en $(V^y \cap V^{y'}) \times [0, 1]$. Así, la aplicación global estará bien definida desde el punto de vista conjuntista.

En efecto, consideremos $y'' \in V^y \cap V^{y'}$ y veamos que

$$\tilde{H}^y(y'', \bullet) = \tilde{H}^{y'}(y'', \bullet).$$

No obstante, al ser dos elevaciones de H en $\{y''\} \times [0, 1]$, se tiene que

$$\tilde{H}^y(y'', 0) = \tilde{H}^{y'}(y'', 0) = \tilde{f}(y'').$$

Al tenerse dos elevaciones en un conexo $(\{y''\} \times [0, 1])$ que coinciden en un punto, entonces por unicidad son iguales.

C.3. Compacificación de Alexandroff

Como hemos podido ver a lo largo de este capítulo, los espacios compactos son espacios muy manejables, con buenas propiedades. ¿No sería una gran noticia que todos los espacios con lo que vamos a trabajar lo fueran? Lamentablemente esto no va a ser así, pero sí que vamos a lograr en muchas ocasiones hacer de nuestro espacio un subespacio de un espacio compacto.

La idea de las compactificaciones es lograr esto (convertir espacios no compactos en subespacios de compactos) añadiendo puntos al espacio original. Veamos en primer lugar una definición de compactificación antes de pasar a ver la que da nombre a esta sección.

Definición C.3.1 (Compactificación). Llamaremos *compactificación* de un espacio X a un espacio Y si X es homeomorfo a un subespacio denso de Y , y Y es compacto.

La condición de que el espacio sea denso en su compactificación solo tiene como objetivo que ésta no sea innecesariamente grande.

Vemos antes de pasar a la de Alexandroff un breve ejemplo para terminar de aclarar la definición.

Ejemplo C.3.1. Si $X \subset K$ con K compacto, $\overline{X} \subset K$ es también compacta ya que se trata de un cerrado en un compacto y por lo tanto sería una compactificación de X . \diamond

Ahora pasamos a ver el caso particular de la compactificación de Alexandroff. En primer lugar la definiremos para luego pasar a ver una serie de observaciones que nos llevarán a demostrar que realmente verifica ser compactificación.

Definición C.3.2 (Compactificación de Alexandroff). Sea (X, \mathcal{T}) espacio topológico localmente compacto, no compacto que verifica ser T_2 .

Tomamos un punto al que pasamos a denotar como ∞ tal que $\{\infty\} \notin \mathcal{T}$ y consideramos $X^* = X \cup \{\infty\}$.

Tomaremos como topología la que viene dada por la siguiente definición:

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{A \subset X^* : X^* \setminus A \text{ es compacto en } X\} \quad (\text{C.3})$$

Vemos ahora una propiedad que verificará la topología que acabamos de definir, tenemos que $\infty \in \mathcal{U} \in \mathcal{T}^* \iff X^* \setminus \mathcal{U} \text{ es compacto en } X \implies \mathcal{U} \cap X \in \mathcal{T}$.

Hemos definido de este modo la *compactificación de Alexandroff* aunque no hemos probado aún que X^* sea un espacio compacto ni que su topología este bien definida siquiera, pasamos a hacerlo ahora. Para ello vamos a comprobarlo como una serie de observaciones que probaremos inmediatamente.

Observación C.3.1. En primer lugar enunciaremos en cada apartado una propiedad, probándola a continuación dentro del mismo apartado. Los primeros buscan probar que realmente es topología, luego estudiamos propiedades de la misma.

1. $\emptyset, X^* \in \mathcal{T}^*$, la comprobación en ambos casos es trivial.
2. La unión de abiertos de \mathcal{T}^* es abierta. Veamos su demostración.

Podemos descomponer los abiertos de esta unión en dos grupos, los abiertos que contienen a ∞ y los que no. De este modo, expresamos la unión como

$$\bigcup_{U \in \mathcal{T}} U_i \cup \bigcup_{\infty \in W_j} W_j \quad (\text{C.4})$$

Denotaremos $\bigcup_{U \in \mathcal{T}} U_i$ como U y $\bigcup_{\infty \in W_j} W_j$ como W . Vayamos ahora por casos.

Si solo tenemos U ($W = \emptyset$) ya lo tenemos, dado que se trataría de unión de abiertos de \mathcal{T} y al ser ésta topología será un abierto de \mathcal{T} y por lo tanto también de \mathcal{T}^* .

Si solo tenemos W tenemos que $X^* \setminus W = \bigcap_j X^* \setminus W_j$ que será cerrado en X y estará contenido en $X^* \setminus W_{j_0}$ que es compacto por el modo en que hemos definido los W_{j_0} . Por lo

tanto, tenemos que $X^* \setminus W = \bigcap_j X^* \setminus W_j$ es un cerrado dentro de un compacto y esto, al ser X Segundo Axioma, implica que es compacto. Con esto, por la definición, tenemos que W es abierto.

Por último, si tenemos tanto U como W no vacíos, la demostración será similar al caso anterior.

Tomamos G la unión de W y U entonces tenemos $X \setminus G = (X^* \setminus W) \cap (X \setminus U) \subset X^* \setminus W$. Como hemos visto, $(X \setminus U)$ es cerrado y $(X^* \setminus W)$ compacto, por lo que la intersección de ambos será un cerrado en un compacto, y por lo tanto compacta. Así, $X \setminus G$ será compacto y por lo tanto G abierto.

3. Veamos que la intersección finita de abiertos es abierta, dados dos abiertos U y V tenemos que, su intersección será abierta. Para probarlo nos basta con observar las tres situaciones distintas que pueden darse:

$$U \cap W = \begin{cases} \infty \notin U, V & \implies \text{resulta trivial (nos encontramos en } \mathcal{T}) \\ \infty \in U, \infty \notin V & \implies \text{como } U \cap X \in \mathcal{T}, \text{ así que ambos son abiertos de } \mathcal{T} \\ \infty \in U, V & \implies \text{ya que la intersección finita de compactos es compacta} \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

Con estos 3 puntos hemos demostrado que \mathcal{T}^* es topología.

4. Como se desprende de su definición (dejamos al lector el comprobarlo por su cuenta, no hay que recurrir a más que la propia definición) tenemos que $\mathcal{T}^*|_X = \mathcal{T}$.
5. Es T_2 . Dado que como se nos ha dicho \mathcal{T} es T_2 , tan solo podríamos encontrar problemas a la hora de separar $x \in X$ y ∞ .

Ahora bien, como X es localmente compacto, $\exists K$ compacto tal que $x \in U \subset K$ siendo U abierto. Además, $X^* \setminus K = W$ es abierto en \mathcal{T}^* por la definición de la misma.

Como $U \cap W \subset K \cap (X \setminus K) = \emptyset$ hemos encontrado los entornos de los puntos que buscábamos.

6. X^* es compacto. Gracias a las observaciones desarrolladas anteriormente nos va a ser sencillo probarlo.

Tenemos que dado un recubrimiento por abiertos de X $U_{i \in I}$ tenemos que $\exists U_{i_0} \ni \infty \implies X^* \setminus U_{i_0} = K$ será compacto en X . por lo tanto, al ser $U_{i \in I}$ recubrimiento por abiertos de K y éste compacto, tenemos que $K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r}$ (extraemos subrecubrimiento finito del mismo).

Ahora bien, como $K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r}$ y $X^* \setminus K \subset U_{i_0}$ entonces tenemos que $X^* \subset U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r}$, con lo que habríamos obtenido un subrecubrimiento finito y probado de este modo su compacidad.

7. Completemos ahora la definición de compactificación viendo que $X \subset X^*$ es abierto denso en X .

Ver que es abierto es trivial mediante la definición de \mathcal{T}^* (dado que X es abierto en \mathcal{T}). Ahora, para ver que es denso, sea U abierto no vacío y supongamos que $\emptyset \in \mathcal{U}$ (el caso de que no esté no es necesario analizarlo ya que sería trivialmente abierto de X por la definición). Ahora bien, $U = (X^* \setminus K)$ tiene que cortar a X ya que en caso contrario, $U \cap X = \emptyset \implies K = X$ que no es compacto.

8. X^* es única, es decir, es homeomorfa a toda otra compactificación por un punto.

Sea ahora (Y, \mathcal{T}') una compactificación por un punto de X , siendo $Y = f(X) \cup \{w\}$ siendo Y compacto T_2 y h inmersión, abierta, densa.

Definimos $h : Y \longrightarrow X^*$ mediante $h(w) = \infty$ y $h(f(x)) = x \forall x \in X$. Evidentemente h es biyectiva. Nos queda por ver que es continua, dado que al estar en un compacto en T_2 esto implica que es cerrada, y por lo tanto homeomorfismo.

Tomamos $U \subset X^*$, vayamos ahora por casos:

Si $U \subset X$, entonces $g(U) = h^{-1}(U) \subset Y$ que será abierto por la definición de la f .

Si $\infty \in U \implies X \cap U = X \setminus K$ siendo K compacto. Entonces como $Y \setminus f(K) = f(X \setminus K) \cup \{w\} = h^{-1}(U)$. De este modo, como $h^{-1}(U) = Y \setminus f(K)$ que es abierto dado que $f(K)$ es compacto cerrado.

◇

Con estas observaciones, podemos resumir lo demostrado diciendo que la topología que hemos tomado es realmente topología y compactificación de X y además hemos probado que añadir un único punto caracteriza la topología de Alexandroff. Para terminar esta sección vamos a ver unos pocos ejemplos de compactificaciones.

Ejemplo C.3.2. Veremos ahora ejemplos de compactificaciones. Los primeros tendrán como objetivo entender el mecanismo de la misma. Después, pondremos ejemplos para aclarar que como hemos visto, dado un conjunto sus compactificaciones por un punto son homeomorfas, pero no sucede al contrario (dada una compactificación los conjuntos de los que puede provenir no tienen porque ser homeomorfos).

1. Tenemos que $\mathbb{R}^* = \mathcal{S}^1$, $\mathbb{R}^{n*} = \mathcal{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
2. $[0, 1] \neq (0, 1)^*$
3. $(0, 1]^* = [0, 1] \cup (0, 1)^* = [0, 1]$ pero estos dos subespacios no son homeomorfos entre si.
4. Siendo $X = [0, 1/2) \cup (1, 2]$ e $Y = [0, 1]$ tenemos que sus compactificaciones son la misma $X^* = Y^* = [0, 1]$ pero no son homeomorfos.

◇

Índice general

- abiertos relativos, 19
- adherencia, 9
- aplicación
 - abierta, 28
 - cerrada, 28
 - continua, 22, 24
- axiomas de numerabilidad, 47
 - primer axioma de numerabilidad, 16, 48
 - segundo axioma de numerabilidad, 17, 48
- base
 - de entornos, 15
 - encajada, 16
 - de abiertos, 16
- categoría, 64, 76
- clase, 76
- clausura, 9
- clopen, 9
- compactificación, 87
 - de Alexandroff, 87
- compacto, 50
- conexo, 57
- conjunto
 - abierto, 5
 - cerrado, 8
 - denso, 13
 - derivado, 13
 - saturado, 35
- convexo, 59
- dominio fundamental, 36
- elevación, 67
- embebimiento, 31
- entorno, 6
 - perforado, 13
 - pinchado, 13
- esfera, 62
- espacio, 5
 - compacto, *véase* compacto
 - conexo, *véase* conexo
 - métrico, 73
 - recubridor, 66
 - separable, 14
- espacio proyectivo, 67, 70
- espacio vectorial normado, 72
- estrellado, 59
- Fréchet, 44
- funtor, 64, 77
- grado, *véase* índice
- Hausdorff, 44
- homeomorfismo, 26
 - local, 27
- homeomorfos, 26
- inclusiones, 42
- indentificación, 33
- índice, 69
- inmersión, 31
- interior, 7
- interpolación lineal, 27
- Kolmogorov, 44
- lemniscata, 26
- Lindelöf, 48, 53
- localmente compacto, 55
- métrica
 - procedente de una norma, 72
- norma, 72
 - equivalente, 73
- numerablemente compacto, 53
- número de vueltas, *véase* índice
- polígono fundamental, 37
- problema de elevación, 67
- propiedad universal
 - de la suma, 42
 - de las identificaciones, 33
 - de las inmersiones, 30
 - del producto, 40
- proyección canónica, 34
- proyección, 39
- punto, 5
 - adherente, 9
 - aislado, 13

- de acumulación, 12
 - interior, 7
- recta de Sorgenfrey, 19
- recubrimiento, 50
 - abierto, 50
- retracto, 65
- secuencialmente compacto, 53
- separable, 48
- σ -compacto, 53
- $SO(3)$, 70
- subespacio topológico, 19
- sucesión, 47
 - convergente, 47
- T_0 , *véase* Kolmogorov
- T_1 , *véase* Fréchet
- T_2 , *véase* Hausdorff
- topología, 5
 - cociente, 34
 - de Sorgenfrey, 18
 - del límite inferior, *véase* topología de Sorgenfrey
 - del punto, 6, 47
 - discreta, 6
 - imagen, 32
 - imagen directa, 32
 - imagen inversa, 30
 - producto, 40
 - relativa, 19
 - suma, 42
 - trivial, 6
 - usual, 6
- topología más fina, 6
- topología más gruesa, 6
- toro de revolución, 70
- toro plano, 37

Índice de topologías

cociente, \mathcal{T}/\sim , 34	producto, $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$, 40
de Sorgenfrey, $\mathcal{T}_{[)}$, 18	relativa, 19
del límite inferior, <i>véase</i> de Sorgenfrey	suma, 42
del punto, 6, 47	trivial, \mathcal{T}_t , 6
discreta, \mathcal{T}_d , 6	usual, \mathcal{T}_u , 6
imagen, 32	
imagen directa, 32	
imagen inversa, 30	