Topología Elemental

Álvaro García Tenorio   Manuel Navarro García   Iván Prada Cazalla
Álvaro Rodríguez García   Clara Rodríguez Núñez

4 de marzo de 2017

Índice general

Prefacio

Estas notas son una transcripción de las clases de la asignatura "*Topología Elemental*", impartidas por Jesús María Ruiz Sancho en el curso 2016–2017 a los cursos de tercero de los Dobles Grados de Matemáticas e Informática y Matemáticas y Física en la facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (UCM).

Agradecimientos

En primer lugar hay que agradecer a todos aquellos que han estado pendientes de la evolución del texto durante su proceso de construcción, corrigiendo numerosas faltas de estilo y erratas de toda la clase y condición. Entre ellos queremos destacar a María José Belda Beneyto y Clara Isabel López González.

Por otra parte, en términos de dominio de LaTeX y otras diversas herramientas que han mejorado mucho este texto destacamos especialmente a uno de los autores, Álvaro Rodríguez García.

Capítulo 1

Espacios Topológicos

La necesidad del estudio de la proximidad y continuidad, de la forma más abstracta posible, (absteniéndose del uso de la noción de distancia) dio origen a la Topología.

La idea de espacio topológico se comenzó a desarrollar durante los siglos XIX y XX por matemáticos como Fréchet, Kuratowski, Alexandroff y Hausdorff entre otros.

La definición inicial de estos espacios se puede encontrar en el libro ***"Grundzüge der Mengenlehre"***[1] publicado por este último autor.

Al comienzo de este capítulo introducimos la noción moderna de espacio topológico, añadiendo unos cuantos ejemplos, y posteriormente, presentaremos los conjuntos abiertos y cerrados y sus relaciones.

1.1. Espacios Topológicos. Definición y Ejemplos.

Comenzamos, como no podía ser de otra manera, definiendo la estructura sobre la que trabajaremos a lo largo de todas estas notas, los llamados espacios topológicos.

Definición 1.1.1 (Espacio Topológico)**.** Un ***espacio topológico*** es un conjunto arbitrario no vacío $\mathcal{X}$ equipado con una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ que cumplen las siguientes propiedades:

T1 El vacío y el total están en la colección $\mathcal{T}$, es decir, $\{\emptyset, \mathcal{X}\} \subset \mathcal{T}$

T2 La unión arbitraria de conjuntos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$. Escrito de forma más rigurosa, pero desde luego, menos elegante, $\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i \in \mathcal{T}$ donde cada $\mathcal{U}_i \in \mathcal{T}$.

T3 La intersección finita de conjuntos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$. O, dicho de otra forma, $\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i \in \mathcal{T}$ donde cada $\mathcal{U}_i \in \mathcal{T}$.

A menudo hablaremos tan solo de ***espacio***.

Hagamos un par de pequeñas observaciones antes de continuar con nuestro recién empezado viaje cósmico–topológico.

Observación 1.1.1 (Sutilezas)**.** Se desprende de la definición 1.1.1 que un espacio topológico no es más que un par $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$. Como es natural, salvo que sea necesario, nos referiremos a un espacio topológico por el conjunto que lo conforma, al igual que hacemos en casi todas las ramas de las matemáticas (Espacios Vectoriales, Grupos, Anillos,...). $\diamondsuit$

Introducimos ahora un poco de terminología con la que el lector no tiene más remedio que hacerse familiar.

Observación 1.1.2 (Terminología)**.** A la familia de conjuntos $\mathcal{T}$ que conforman un espacio topológico $\mathcal{X}$ se le denomina ***topología*** de $\mathcal{X}$.

Asimismo, los conjuntos que conforman $\mathcal{T}$ reciben el nombre de ***abiertos*** de $\mathcal{X}$. Normalmente los denotaremos con las letras $\mathcal{U}$ o $\mathcal{W}$.

Como es evidente, nos referiremos a los elementos de $\mathcal{X}$ como ***puntos***. $\diamondsuit$

[1] "Teoría abstracta de conjuntos", publicado en 1914 por ***Félix Hausdorff*** (1868-1942).

Introducimos ahora unos pocos ejemplos para irnos familiarizando con el concepto de espacio topológico viendo lo general que puede llegar a ser.

Ejemplo 1.1.1 (Topologías)**.** Las demostraciones de que, efectivamente, se cumplen las restricciones impuestas por la definición 1.1.1, o bien ya se han hecho en cursos anteriores, o bien se dejan al lector como ejercicio inmediato.

1. El espacio ordinario $\mathbb{R}^n$ es un espacio topológico con la topología definida por los conjuntos abiertos en el sentido usual cuando hablamos de espacios métricos, es decir

$$\mathcal{T} = \{\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \shortparallel \forall x \in \mathcal{U} \; \exists \; B_d(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}\} \tag{1.1}$$

   A esta topología la llamamos ***topología usual***.

2. Una topología interesante por su simpleza, y por que dota a cualquier conjunto no vacío $\mathcal{X}$ con estructura de espacio topológico, es la llamada ***topología trivial***, que viene definida por

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathcal{X}\} \tag{1.2}$$

3. Siguiendo la idea del ejemplo anterior, pero a la inversa, encontramos una topología que también dota de estructura topológica a cualquier conjunto no vacío $\mathcal{X}$. Esta topología viene dada por

$$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathcal{X}) \tag{1.3}$$

   A esta topología la llamaremos ***topología discreta***.

4. Como último ejemplo curioso nos queda la llamada ***topología del punto***. Consiste en considerar como abiertos a todos los subconjuntos de un conjunto $\mathcal{X}$ que contengan a un determinado punto a. Es decir

$$\mathcal{T}_a = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{X} \shortparallel a \in \mathcal{U}\} \cup \{\emptyset\} \tag{1.4}$$

Con lo que ya tenemos una gama lo suficientemente amplia de ejemplos como para ir tirando. $\diamondsuit$

Definición 1.1.2. Diremos que $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías de un conjunto $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$. Diremos que $\mathcal{T}$ es más ***fina*** que $\mathcal{T}'$ y que $\mathcal{T}'$ es más ***gruesa*** que $\mathcal{T}$.

En lo que resta de capítulo iremos introduciendo algunos conceptos generales de los que haremos uso de forma constante a lo largo del curso.

1.2. Conjuntos Abiertos e Interior

En esta sección introducimos el concepto de entorno, cuya utilidad inmediata es caracterizar a los conjuntos abiertos de un espacio topológico $\mathcal{X}$.

Definición 1.2.1 (Entorno de un Punto)**.** Un ***entorno*** de un punto $a \in \mathcal{X}$ es un conjunto que contiene a un abierto que contiene al punto a.

Normalmente denotaremos con la letra $\mathcal{V}$ a los entornos, esta costumbre se debe a un galicismo. Escribamos la definición de entorno 1.2.1 de forma conjuntista para que no quede ninguna duda

$$\mathcal{V} \supset \mathcal{U} \ni a \tag{1.5}$$

Como ya adelantamos, se puede usar la noción de entorno para caracterizar a los abiertos, tal y como muestra el siguiente lema.

Lema 1.2.1 (Caracterización de Abiertos)**.** *$\mathcal{U}$ es abierto si y solo si es entorno de todos sus puntos.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U}$ es abierto, entonces, dado un punto $a \in \mathcal{U}$ es evidente que $\mathcal{U}$ contiene a un abierto (él mismo) que contiene al punto a. Luego $\mathcal{U}$ es, trivialmente, entorno de todos sus puntos.

Recíprocamente, si $\mathcal{U}$ es entorno de todos sus puntos, entonces, para cada punto $a \in \mathcal{U}$ se cumple que

$$\mathcal{U} \supset \mathcal{U}_a \ni a$$

de donde se desprende que

$$\mathcal{U} \supset \bigcup_{a \in \mathcal{U}} \mathcal{U}_a =: A$$

Más aún, se da la otra contención, y además, de forma trivial, ya que todo punto de $\mathcal{U}$ pertenece a algún $\mathcal{U}_a$, luego también a la unión de todos. Luego

$$\mathcal{U} = A$$

Como la unión arbitraria de abiertos es abierto, A es abierto, con lo que se sigue el resultado. ∎

En general, un conjunto será entorno de algunos de sus puntos, en principio no de todos. De esta idea surge la siguiente definición.

Definición 1.2.2 (Punto Interior)**.** Dado un conjunto $A \subset \mathcal{X}$, diremos que un punto $a \in \mathcal{X}$ es un ***punto interior*** de A si A es entorno de a.

Será algo habitual de ahora en adelante tratar de determinar el conjunto de puntos interiores de un determinado conjunto $A \subset \mathcal{X}$, a este conjunto se le denomina ***interior*** de $\mathcal{X}$.

Antes de continuar, fijemos unas cuantas notaciones que utilizaremos según el contexto para referirnos al interior de un conjunto.

$$\mathrm{Int}_{\mathcal{X}}(A) = \mathring{A} = \mathrm{Int}(A) \tag{1.6}$$

Merece la pena notar que el interior de un conjunto puede ser el conjunto vacío, así como que trivialmente se da la desigualdad conjuntista

$$\mathring{A} \subset A \tag{1.7}$$

Veamos ahora unos resultados elementales, pero a la vez cruciales, del interior de un conjunto.

Lema 1.2.2 (Apertura)**.** *El interior de un conjunto A es un abierto.*

Demostración. Para probar esto haremos uso del lema 1.2.1, es decir, trataremos de ver que es entorno de todos sus puntos.

En efecto, dado un punto $a \in \mathring{A}$, existe un abierto $\mathcal{U}_a \subset A$ de manera que $a \in \mathcal{U}_a$. Luego para ver que $\mathring{A}$ es un entorno de a basta demostrar la inclusión $\mathcal{U}_a \subset \mathring{A}$, hagámoslo.

Sea $x \in \mathcal{U}_a \subset A$, es claro que A es entorno de x, luego $x \in \mathring{A}$.

Con lo cual hemos demostrado que $\mathring{A}$ es entorno de todos sus puntos. ∎

El otro resultado elemental que caracteriza al interior de un conjunto A, es que es el mayor abierto contenido en A.

Presentamos aquí los primeros pasos de la demostración por ser especialmente útiles y omnipresentes en las matemáticas en general.

Como la unión de abiertos es abierto, es claro que una forma de construir el mayor abierto contenido en cierto conjunto es, coleccionar los abiertos contenidos en dicho conjunto y unirlos. Escrito formalmente, tomamos el conjunto

$$B := \bigcup_{\mathcal{W} \subset A} \mathcal{W} \tag{1.8}$$

Es claro que $B \subset A$, ya que es una unión de conjuntos contenidos en A, además, si hubiera un abierto más grande contenido en A que B, este pertenecería a la familia de conjuntos que estamos uniendo, lo cual es absurdo.

Presentamos el final de la demostración en forma de lema.

Lema 1.2.3 (Caracterización del Interior)**.** *El interior de un conjunto A es el mayor abierto contenido en A.*

Demostración. Por el lema 1.2.2 sabemos que $\mathring{A}$ es abierto, luego, por la ecuación (1.8) solo queda probar la igualdad

$$\mathring{A} = \bigcup_{\mathcal{W} \subset A} \mathcal{W} \subset A$$

Y esto es prácticamente trivial. Veámoslo.

Por una parte, $\mathring{A}$ es un abierto contenido en A, luego está contenido en la unión de los abiertos contenidos en A.

Por otra parte, dado $x \in \bigcup_{\mathcal{W} \subset A} \mathcal{W}$, es claro que, como $\bigcup_{\mathcal{W} \subset A} \mathcal{W} \subset A$ es un abierto, A es entorno de x, luego $x \in \mathring{A}$, lo que concluye la demostración. ■

El lema 1.2.3 es bastante fuerte y produce algunos corolarios interesantes que presentamos a modo de observaciones.

Observación 1.2.1 (Propiedades del Interior)**.** Enumeramos algunas propiedades del interior.

1. El interior del interior de un conjunto es el interior de dicho conjunto. Si lo escribimos sin que suene como un trabalenguas tenemos

$$\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A} \tag{1.9}$$

   Esto es trivial ya que al ser $\mathring{A}$ un abierto, el mayor abierto contenido en él es él mismo.

2. Un abierto coincide con su interior, es decir

$$A = \mathring{A} \tag{1.10}$$

   Esto es cierto por la misma razón que lo es la ecuación (1.9).

3. Los interiores preservan las contenciones. O lo que es lo mismo

$$A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B} \tag{1.11}$$

   Esto es claro ya que, como B contiene a A, el mayor abierto contenido en B será en general más grande que el mayor abierto contenido en cualquier subconjunto suyo.

Esto ya nos da cierta artillería para defendernos con estos conjuntos. ♢

Con esto podemos decir que ya hemos liquidado todo lo referente a conjuntos abiertos.

1.3. Conjuntos Cerrados y Adherencia

En esta sección estudiaremos los conjuntos cerrados.

Cabe destacar que la noción de ser cerrado no es exactamente la contraria a la de ser abierto, ya que, como veremos más adelante, hay conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados así como conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez.

Definición 1.3.1 (Conjunto Cerrado)**.** Un conjuto $\mathcal{F}$ de un espacio topológico $\mathcal{X}$ se dice ***cerrado*** si su complementario, $\mathcal{X} \setminus \mathcal{F}$, es abierto.

Usualmente denotaremos a los conjuntos cerrados con las letras $\mathcal{F}$ o $\mathcal{H}$.

Usando propiedades básicas de teoría de conjuntos se obtienen algunas propiedades elementales de los conjuntos cerrados.

Lema 1.3.1 (Propiedades de los Cerrados)**.** *Dado un espacio topológico $\mathcal{X}$ se verifica*

1. *El vacío y el total son cerrados.*

2. *La intersección arbitraria de cerrados es cerrada.*

3. La unión finita de cerrados es cerrada.

Demostración. Vayamos caso por caso.

1. $\mathcal{X}$ es cerrado pues $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X} = \emptyset$ es abierto.
   Asimismo, $\emptyset$ es cerrado pues $\mathcal{X} \setminus \emptyset = \mathcal{X}$ es abierto.
2. $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ es cerrado ya que
$$\mathcal{X} \setminus \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i \right) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{X} \setminus \mathcal{F}_i$$
   es abierto por ser la unión arbitraria de abiertos un abierto.
3. $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$ es cerrado, basta tomar el complementario y ver que es abierto por ser intersección finita de abiertos.
$$\mathcal{X} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{X} \setminus \mathcal{F}_i$$

Con lo que concluye la demostración. ■

Observación 1.3.1 (Abiertos y Cerrados a la Vez)**.** Basta con mirar con atención este lema 1.3.1 para darse cuenta de que hemos encontrado dos conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez, el vacío y el total. ♢

Introducimos ahora un concepto elemental pero interesante, el concepto de puntos adherentes y adherencia.

Definición 1.3.2 (Punto Adherente)**.** Un punto $a \in \mathcal{X}$ se dice ***adherente*** a un conjunto $A \subset \mathcal{X}$ si todo entorno de a corta al conjunto A.

Como ya es habitual, coleccionaremos los puntos adherentes a un conjunto dado y estudiaremos las propiedades del conjunto de puntos adherentes. Introduzcamos una definición para verlo formalmente.

Definición 1.3.3 (Adherencia)**.** Se define la ***adherencia*** o ***clausura*** de un conjunto $A \subset \mathcal{X}$ como el conjunto de los puntos adherentes de A.

Usualmente denotaremos a la adherencia de alguna de las siguientes formas

$$\mathrm{Adh}_{\mathcal{X}}(A) = \mathrm{Adh}(A) = \overline{A} \tag{1.12}$$

Vamos a desgranar ahora una serie de resultados que nos van a hacer ver que adherencia e interior de un conjunto son, de alguna manera, conceptos duales.

Comenzamos en primer lugar con algo casi trivial.

Observación 1.3.2 (Adherencia y Conjunto)**.** Es claro que se verifica que

$$A \subset \overline{A} \tag{1.13}$$

Esto es debido a que, evidentemente, cualquier entorno de a contiene al punto a, luego, por definición, corta al conjunto A. ♢

Lema 1.3.2 (Clausura de la Adherencia)**.** *La adherencia de un conjunto A es un cerrado.*

Demostración. Usaremos lo único que tenemos, es decir, la definición de conjunto cerrado. Por ende, probaremos que $\mathcal{X} \setminus \overline{A}$ es abierto, para lo cual veremos que es entorno de todos sus puntos, haciendo buen uso del lema 1.2.1.

Dado $x \in \mathcal{X} \setminus \overline{A}$, como x no es un punto adherente, entonces existirá un entorno $\mathcal{V}(\ni x)$, el cual podemos escoger abierto sin pérdida de generalidad tal que se verifica

$$\mathcal{V} \cap A = \emptyset$$

Si consiguiéramos demostrar que se de la igualdad

$$\mathcal{V} \cap \overline{A} = \emptyset$$

habríamos acabado ya que tendríamos que $x \in \mathcal{V} \subset \mathcal{X} \setminus \overline{A}$, que es, por definición que $\mathcal{X} \setminus \overline{A}$ sea entorno de x.

En efecto, la comprobación de esta igualdad es muy fácil, ya que, si tomamos un $y \in \mathcal{V}$, al ser $\mathcal{V}$ abierto, es entorno de y.

Por tanto, tendríamos que el punto y no es adherente, ya que existe un entorno, el propio $\mathcal{V}$ que no corta con el conjunto A, incumpliendo así la definición 1.3.2. ■

Continuamos esta dualización de conceptos dándonos cuenta de que la adherencia es el menor cerrado que contiene a A. Como antes, parte de la demostración se basa en un procedimiento estándar que pasamos a explicar.

Es fácil darse cuenta de que, como la intersección arbitraria de cerrados es un cerrado, el menor conjunto cerrado que contiene a uno dado puede ser construido de la siguiente manera

$$B := \bigcap_{\mathcal{H} \supset A} \mathcal{H} \tag{1.14}$$

En efecto es un conjunto que contiene a A ya que todos los conjuntos de la familia a intersecar contienen a A, además, es el menor de ellos, ya que, de haber uno más pequeño, pertenecería a la familia que se está intersecando, lo cual es absurdo (¡compruébese!).

Presentamos, otra vez, en forma de lema, el resto de la demostración.

Lema 1.3.3 (Caracterización de la Adherencia)**.** *La adherencia de un conjunto A es el menor cerrado que contiene a A.*

Demostración. Por la ecuación (1.14) la demostración se reduce a comprobar que

$$\overline{A} = \bigcap_{\mathcal{H} \supset A} \mathcal{H}$$

Y esto es una comprobación inmediata.

Por un lado, como $\overline{A}$ es un cerrado que contiene a A, es claro que $\overline{A}$ se encuentra en la familia a intersecar, luego contiene a la intersección de la familia.

Recíprocamente, dado un punto adherente x, si hubiera un conjunto $\mathcal{H}$ de la familia tal que $x \notin \mathcal{H}$, entonces tendríamos que $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{H} \subset \mathcal{X} \setminus A$.

Como $\mathcal{H}$ es cerrado, $\mathcal{X} \setminus \mathcal{H}$ es abierto, y, por tanto existirá un entorno $\mathcal{V}$ de x de manera que

$$x \in \mathcal{V} \subset \mathcal{X} \setminus \mathcal{H} \subset \mathcal{X} \setminus A$$

Y, por ende, $\mathcal{V} \cap A = \emptyset$, contra la definición de punto adherente. ■

Presentamos a continuación unas cuantas igualdades conjuntistas que pueden resultar bastante útiles al lector.

Proposición 1.3.4 (Complementario de la Adherencia)**.**

$$\mathcal{X} \setminus \overline{A} = \operatorname{Int}(\mathcal{X} \setminus A)$$

Demostración. Procedemos por doble contención.

$\boxed{\subset}$ Sea $z \in \mathcal{X} \setminus \overline{A}$. Como z no es adherente a A, por definición (1.3.3) habrá un entorno $\mathcal{V}_z$ de z de manera que $\mathcal{V}_z \cap A = \emptyset$. En particular, podremos extraer un entorno abierto $\mathcal{U}_z$ tal que verifique

$$\mathcal{U}_z \cap A = \emptyset$$

Tratamos de demostrar que z es punto interior de $\mathcal{X} \setminus A$, esto es, por definición (1.2.2), que $\mathcal{X} \setminus A$ sea entorno de z, esto a su vez significa que hay un abierto $\mathcal{U}'_z$ contenido en $\mathcal{X} \setminus A$ de forma que $z \in \mathcal{U}'_z$. Así pues el problema se reduce a encontrar dicho entorno, sin embargo, es trivial comprobar el entorno $\mathcal{U}_z$ anteriormente definido cumple los requisitos.

$\boxed{\supset}$ Sea $z \in \operatorname{Int}(\mathcal{X} \setminus A)$, demostremos que z no es adherente a A, para lo cual debemos encontrar un entorno de z, al que llamaremos $\mathcal{V}_z$, de manera que no corte al conjunto A. Esto es trivial, ya que z es punto interior de $\mathcal{X} \setminus A$, luego el propio $\mathcal{X} \setminus A$ es entorno de z, y, evidentemente, no corta a A.

Con lo que concluye la prueba. ■

Insistiendo es esta dualidad vía complementación entre abiertos y cerrados, presentamos un corolario inmediato.

Corolario 1.3.5 (Complementario del Interior)**.**

$$\mathcal{X} \setminus \mathring{B} = \operatorname{Adh}(\mathcal{X} \setminus B)$$

Demostración. Nos limitaremos a comprobar que ambos conjuntos tienen el mismo complementario. En efecto, por una parte

$$\mathcal{X} \setminus (\mathcal{X} \setminus \mathring{B}) = \mathring{B}$$

Por otro lado, denotando $A := \mathcal{X} \setminus B$ tenemos

$$\mathcal{X} \setminus \operatorname{Adh}(\mathcal{X} \setminus B) = \mathcal{X} \setminus \overline{A} \overset{\text{Prp.1.3.4}}{=} \operatorname{Int}(\mathcal{X} \setminus A) = \operatorname{Int}(\mathcal{X} \setminus (\mathcal{X} \setminus B)) = \operatorname{Int}(B) = \mathring{B}$$

Con lo que se tiene el resultado. ■

Una última identidad notable, un poco más profunda que las anteriores es la que relaciona la unión de las adherencias con la adherencia de las uniones.

Proposición 1.3.6 (Unión de Adherencias)**.** *La unión de las adherencias es la adherencia de las uniones.*

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Demostración. Procedemos por doble contención.

$\boxed{\subset}$ Dado $z \in \overline{A \cup B}$, todo entorno $\mathcal{V}_z$ de z corta a $A \cup B$. Veamos que z es, o bien adherente a A, o bien adherente a B (quizá a ambos). Para ello supondremos que no es adherente a ninguno de ellos, es decir, que existe un entorno $\mathcal{W}_z$ de z que no corta ni a A ni a B. Si este entorno existiera tampoco cortaría a la unión (compruébese), lo cual es absurdo.

$\boxed{\supset}$ Dado un punto $z \in \overline{A} \cup \overline{B}$, veamos que todo entorno de $\mathcal{V}_z$ de z corta a $A \cup B$, si no lo hiciera, para cada punto $x \in \mathcal{V}_z$, x no estaría en A, luego $A \cap \mathcal{V}_z = \emptyset$, análogamente ocurriría con B, lo cual contradice nuestra hipótesis.

Con lo que finaliza la demostración. ■

Por supuesto, este resultado presenta un dual inmediato.

Corolario 1.3.7 (Intersección de Interiores)**.** *El interior de la intersección es la intersección de los anteriores.*

$$\operatorname{Int}(A \cap B) = \mathring{A} \cap \mathring{B}$$

Demostración. Comprobaremos, como ya hicimos anteriormente, que ambos conjuntos tienen el mismo complementario.

Por un lado

$$\mathcal{X} \setminus \operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Adh}(X \setminus (A \cap B))$$

Recíprocamente

$$\begin{aligned}\mathcal{X} \setminus (\mathring{A} \cap \mathring{B}) = (\mathcal{X} \setminus \mathring{A}) \cup (\mathcal{X} \setminus \mathring{B}) = \operatorname{Adh}(\mathcal{X} \setminus A) \cup \operatorname{Adh}(\mathcal{X} \setminus B)) = \\ = \operatorname{Adh}((\mathcal{X} \setminus A) \cup (\mathcal{X} \setminus B)) = \operatorname{Adh}(X \setminus (A \cap B))\end{aligned}$$

Así, el resultado se sigue. ■

El resultado análogo a la proposición 1.3.6 con la intersección no se da, tal y como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.1 (Cuadrados Abiertos). Si consideramos los conjuntos

$$A := (0,1) \times (0,1) \qquad\qquad B := (1,2) \times (0,1)$$

En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, es fácil demostrar (se deja al lector) que $\overline{A \cap B} = \emptyset$ mientras que $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\} \times [0,1]$. ♢

Vistas todas estas igualdades, al igual que hicimos en la observación 1.2.1, caractericemos los conjuntos cerrados a partir del concepto de adherencia.

Proposición 1.3.8 (Cerrados y Adherencia). *Un conjunto es A cerrado si y solo si coincide con su adherencia. Es decir*

$$A = \overline{A}$$

Demostración. Si A es cerrado, como $\overline{A}$ es el mayor cerrado contenido en A, es claro que se tiene que dar la igualdad $A = \overline{A}$.

Recíprocamente, si se da la igualdad $A = \overline{A}$, como $\overline{A}$ es cerrado, también lo será A. ■

Añadimos una observación final trivial, simplemente por curiosidad.

Observación 1.3.3 (Doble Adherencia). Dado un conjunto A, se tiene que

$$\overline{A} = \overline{\overline{A}}$$

Esto es inmediato ya que, como $\overline{A}$ es un cerrado, coincide con su adherencia. ♢

1.4. Puntos de Acumulación y Conjuntos Densos

En esta sección presentamos el concepto de punto de acumulación, que es muy útil para trabajar con sucesiones, como veremos más adelante. Además, definiremos la idea de que un conjunto sea denso de varias maneras que nos serán muy útiles a la hora de resolver problemas.

Definición 1.4.1 (Punto de Acumulación). Dado un conjunto A en un espacio topológico $\mathcal{X}$, se dice que un punto $x \in \mathcal{X}$ es un ***punto de acumulación*** de A si todo entorno de $\mathcal{V}_x$ de x verifica que

$$(\mathcal{V}_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

Presentemos un poco de terminología para el conjunto de los puntos de acumulación.

Definición 1.4.2 (Conjunto Derivado). Al conjunto de los puntos de acumulación de un conjunto A se le denomina ***conjunto derivado***. Usualmente denotaremos al conjunto derivado por A'.

Observación 1.4.1 (Entornos Perforados). Cuando consideramos un entorno $\mathcal{V}_x$ de un punto $x \in \mathcal{X}$, a veces (sobre todo cuando hablamos de puntos de acumulación) es útil no considerar el entorno entero, sino el entorno salvo un punto.

Por ejemplo $\mathcal{V}_x \setminus \{x\}$. A este último conjunto se le suele denominar ***entorno perforado*** o ***entorno pinchado*** de x. ♢

Una propiedad interesante de los conjuntos derivados se presenta en el siguiente lema.

Lema 1.4.1 (Descomposición de la Adherencia).

$$\overline{A} = A \cup A'$$

Demostración. La demostración es inmediata, procedemos por doble contención.

$\boxed{\subset}$ Veamos que todos los puntos de $\overline{A} \setminus A$ están en A'. En efecto, dado un $x \notin A$ adherente a A se tiene que para todo entorno $\mathcal{V}_x$ de x

$$\mathcal{V}_x \cap A \neq \emptyset$$

Como $x \notin A$ se tiene que $(\mathcal{V}_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, cumpliendo la definición de punto de acumulación.

$\boxed{\supset}$ Es evidente que $A \subset \overline{A}$, luego solo queda comprobar que $A' \subset \overline{A}$. Esto es trivial y se deja al lector la comprobación.

Como queríamos demostrar. ■

Cabe señalar que, claramente, esta descomposición, en general, no es un partición, tal y como muestra es siguiente sencillo ejemplo.

Ejemplo 1.4.1 (Disco). Si consideramos el disco unidad D en $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, es fácil demostrar que sus puntos de acumulación coinciden con su adherencia, con lo que obtenemos que

$$\overline{D} \setminus D \subsetneq A' \tag{1.15}$$

En general (compruébese) se verifica que $\overline{A} \setminus A \subset A'$. ♢

Según uno echa un ojo a la definición 1.4.1 le dan ganas de ver qué pasa con aquellos puntos que no cumplen esta definición por los pelos. Para esto introducimos la siguiente definición.

Definición 1.4.3 (Puntos Aislados). Se llaman ***puntos aislados*** de un conjunto A, a aquellos puntos de A que no son puntos de acumulación. Es decir, a los puntos $x \in A$ que poseen un entorno que cumple

$$\mathcal{V}_x \cap A = \{x\}$$

Por el momento no usaremos mucho esta definición, aunque la dejamos aquí aparcada por si las moscas.

Pasamos hora a definir el concepto de densidad de un conjunto.

Definición 1.4.4 (Conjunto Denso). Decimos que un conjunto A es ***denso*** en un espacio topológico $\mathcal{X}$ si la adherencia de A es el propio espacio $\mathcal{X}$. Es decir

$$\overline{A} = \mathcal{X}$$

Esta definición es poco manejable en algunas circunstancias, lo bueno que tiene es que, con relativamente poco esfuerzo podemos dar una definición equivalente en unos términos un poco más sencillos, tal y como muestra la siguiente proposición.

Proposición 1.4.2 (Caracterización de la Densidad). *Son equivalentes:*

1. *A es denso.*
2. *Todo abierto no vacío $\mathcal{U}$ contiene algún punto de A.*

Demostración. Veamos ambas implicaciones

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $\mathcal{U}$ un abierto de $\mathcal{X}$. Por ser $\mathcal{U}$ abierto, es entorno de todos sus puntos. En particular, si $x \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ es entorno de x, luego, por ser A denso, $\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $x \in X$ un punto cualquiera, tomemos un entorno arbitrario suyo $\mathcal{V}_x$, por definición de entorno, habrá un abierto $\mathcal{U}_x$ que verifique

$$x \in \mathcal{U}_x \subset \mathcal{V}_x$$

Como $\mathcal{U}_x$ es abierto, contiene, por hipótesis, algún punto de A, luego $\mathcal{V}_x \cap A \neq \emptyset$, cumpliendo así x la definición de punto adherente.

Con lo que ya hemos terminado. ■

De forma natural surge preguntarse si, como en el caso conocido de $\mathbb{R}^n$, los espacios topológicos en general, poseen algún subconjunto numerable denso. La respuesta a esta pregunta es no, como veremos más adelante, precisamente por eso surge la siguiente definición.

Definición 1.4.5 (Espacio Topológico Separable)**.** Se dice que un espacio topológico $\mathcal{X}$ es ***separable*** si posee un subconjunto numerable denso.

Para afianzar la idea de que en la topología la intuición no parará de tendernos trampas, presentamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4.2 (Espacios Separables)**.** Recordamos en primer lugar por qué $\mathbb{R}^n$ es separable y después presentamos un ejemplo contraintuitivo.

1. $\mathbb{Q}^n$ es un conjunto denso y numerable en $\mathbb{R}^n$ con la topología usual. La numerabilidad de $\mathbb{Q}^n$ es consecuencia de la numerabilidad de $\mathbb{Q}$ (inducción). Asimismo, la densidad puede probarse fácilmente por inducción sobre n.

2. Dado un conjunto cualquiera $\mathcal{X}$ equipado con la topología de un punto $a \in X$, el espacio topológico $(\mathcal{X}, \mathcal{T}_a)$ es separable (nótese que a es denso y finito).

Así se ve que en espacios topológicos puestos con un poco de mala baba pasan cosas que nos descarajan la intuición. $\diamondsuit$

Para finiquitar esta sección presentamos el concepto de frontera de un conjunto, que, de momento, al igual que el concepto de punto aislado, quedará en el baúl de los recuerdos.

Definición 1.4.6 (Frontera de un Conjunto)**.** Definimos la frontera de un conjunto los puntos adherentes al conjunto que no son interiores. Dicho de otra forma (e introduciendo notación de paso)

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} \tag{1.16}$$

1.5. Base de entornos

Definición 1.5.1 (Base de entornos)**.**

1.6. Base de abiertos

Definición 1.6.1 (Base de abiertos)**.** Una ***base*** de $\mathcal{T}$ es una colección $\mathcal{B}$ de abiertos, tal que todo abierto de $\mathcal{T}$ es unión de abiertos de $\mathcal{B}$

Veamos que esta definición nos permite reformular las bases de entornos vistas en (1.5.1), y que caracterizaremos de la siguiente manera:

Proposición 1.6.1 (Reformulación de bases de entornos)**.** *Sea x un punto de $\mathcal{X}$ y sea $\mathcal{B}^x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$, $\mathcal{B}^x$ es una base de entornos.*

Demostración. Veamos que esto ocurre. Para ello todo entorno de x tiene que contener a alguno de $\mathcal{B}^x$. Sea $\mathcal{V}^x$ un entorno de $x \Rightarrow\ \exists\, \mathcal{U}$ abierto tal que $x \in \mathcal{U} \subset \mathcal{V}^x$. Ahora, como $\mathcal{B}$ es base de abiertos $\Rightarrow\ \mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} B_i \ \Rightarrow\ \exists B_i \subset \mathcal{B}^x$ tal que $x \in B_i \subset \mathcal{V}^x$, luego cumple lo buscado.
Ahora veamos... ∎

Veremos otra condición que podremos usar en lugar de la definición de bases de abiertos 1.6.1.

Observación 1.6.1 (Reformulación de bases de abiertos)**.** Para todo abierto $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}$ y todo punto $x \in \mathcal{U}$, existe un $\mathcal{V} \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. $\diamondsuit$

Demostración. Si se cumple esto, y tomamos $\mathcal{U}$ abierto de de $\mathcal{X}$, entonces para todo $x \in \mathcal{U}$ tomamos $\mathcal{V}^x \in \mathcal{B}$ de tal forma que $x \in \mathcal{V}^x \subset \mathcal{U}$. Al hacer esto, $\mathcal{U}$ coincide con $\bigcup_{x \in \mathcal{U}} V^x$, por lo que cualquier abierto que tomemos de $\mathcal{X}$ es unión de elementos de la base. La otra implicación es directa. ∎

Tras haber visto bases de abiertos 1.6.1, y bases de entornos 1.5.1, vamos a plantear el II axioma de numerabilidad, que, aunque será tratado con profundidad en un tema posterior, expone muy bien las ideas recién tratadas.

Definición 1.6.2 (II axioma de numerabilidad)**.** Diremos que $\mathcal{X}$ es ***II axioma*** (de numerabilidad) si tiene una base numerable.

Ejemplo 1.6.1 (Bases de abiertos)**.** Veamos varios ejemplos de base de abiertos en el espacio topológico $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_n)$, con $\mathcal{T}_n$ la topología usual:

1. $\mathcal{B} = \{B(x,\varepsilon) \ : \ x \in \mathbb{R}^n \ y \ \varepsilon > 0\}$
2. $\mathcal{B} = \{B(x, \frac{1}{k}) \ : \ x \in \mathbb{R}^n \ y \ k \geq 1\}$
3. $\mathcal{B} = \{B(q,r) \ : \ q \in \mathbb{Q}^n \ y \ r \in \mathbb{Q}\}$

$\diamondsuit$

Observación 1.6.2. Ser II axioma implica ser I axioma. $\diamondsuit$

Demostración. Si $\mathcal{B}$ es una base numerable para la topología de $\mathcal{X}$, entonces si tomamos el subconjuto de $\mathcal{B}$ formado por los elementos de la base que contienen al punto x entonces es una base numerable en x. Luego todo punto tiene una bsae numerable, por lo que es I axioma. ∎

Hemos de comentar que el II axioma es mucho más fuerte que el I axioma. De hecho no todos los espacios métricos lo cumplen. Será útil ya que muchos espacios que no son familiares lo cumplen, y nos ayudará para probar algunos teoremas.

Proposición 1.6.2. *Una colección de $\mathcal{B}$ de subconjuntos de un conjunto $\mathcal{X}$ es base de una (única) topología en $\mathcal{X}$ si y sólo si:*

1. $\mathcal{X} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$
2. *Para todo B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$ y para todo $x \in B_1 \cap B_2$, $\exists B \in \mathcal{B}$ y $B \subset B_1 \cap B2$ tal que $x \in B$.*

Demostración.

1. Como $\mathcal{X}$ es abierto, es unión de elementos de la base. Por lo tanto X es la unión de todos los elementos de $\mathcal{B}$.
2. Supongamos que B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$ y que $x \in B_1 \cap B_2$. Como B_1 y B_2 son abiertos, su intersección es abierta. Por 1.6.1, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

∎

Ejemplo 1.6.2 (Topología de Sorgenfray en $\mathbb{R}$)**.** contenidos... $\diamondsuit$

1.7. Topología relativa

Definición 1.7.1 (Topología relativa)**.** Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y un subconjunto $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$. Definimos la ***topología relativa*** en $\mathcal{Y}$ como $\mathcal{T}\restriction_{\mathcal{Y}} = \{U \cap \mathcal{Y} \colon U \in \mathcal{T}\}$. Se verifica que esta es una topología en $\mathcal{Y}$, y entonces decimos que $(\mathcal{Y}, \mathcal{T}\restriction_{\mathcal{Y}})$ es un ***subespacio topológico***.

Gracias a esta definición, siempre que hablemos en adelante de un subconjunto de $\mathcal{X}$ y necesitemos una topología definida en él, se usará por defecto la relativa para dotarlo de estructura de espacio topológico.

Vamos a ver ahora que la topología relativa también preserva esa "dualidad" de la que hablábamos antes entre abiertos y cerrados. En particular, también los cerrados relativos son las intersecciones de los cerrados de $\mathcal{X}$.

Proposición 1.7.1. *Los cerrados de $\mathcal{Y}$ son las intersecciones de los cerrados de $\mathcal{X}$ con $\mathcal{Y}$. Es decir, $C \subset \mathcal{Y}$ es cerrado si existe $F \subset \mathcal{X}$ cerrado tal que $C = F \cap \mathcal{Y}$.*

Demostración. Sea $W \subset \mathcal{X}$ un abierto de X. Entonces, $\mathcal{X} \setminus W$ es cerrado, y queremos ver si $C = \mathcal{Y} \cap (\mathcal{X} \setminus W)$ es cerrado. Pero esto es lo mismo que ver si $\mathcal{Y} \setminus F$ es abierto, y:

$$\mathcal{Y} \setminus C = \mathcal{Y} \setminus (\mathcal{Y} \cap (\mathcal{X} \setminus W)) = \mathcal{Y} \setminus ((\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}) \setminus W) = \mathcal{Y} \setminus (\mathcal{Y} \setminus W) = \mathcal{Y} \cap W$$

donde para las igualdades anteriores se han utilizado relaciones conocidas de teoría de conjuntos. Entonces, como $\mathcal{Y} \cap W$ es abierto por definición de topología relativa, $\mathcal{Y} \setminus C$ también lo es, y por tanto C es cerrado. ■

Observación 1.7.1. En particular, se verifican las siguientes propiedades:

1. Sea $A \subset \mathcal{X}$ abierto. Si $A \cap U$ es un abierto en la topología $\mathcal{T}\restriction_A$ (es decir, U es abierto en $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$), entonces $A \cap U$ es también abierto en $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$.

2. Sea $F \subset \mathcal{X}$ cerrado. Si $F \cap C$ es un cerrado en la topología $\mathcal{T}\restriction_F$ (es decir, C es cerrado en $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$), entonces $F \cap C$ es también cerrado en $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$. ♢

Capítulo 2

Continuidad

La continuidad es la propiedad por excelencia que queremos que nuestras funciones verifiquen. En este breve capítulo vamos a generalizar la noción de continuidad que ya conocemos y dominamos para espacios como $\mathbb{R}^n$, de forma que la podamos aplicar a cualquier espacio métrico conocido. La continuidad, además, será clave para definir más adelante la noción de homeomorfismo: las aplicaciones que preservan las propiedades topológicas de un espacio dado.

2.1. Continuidad en un punto

En el espacio euclídeo usual, cuando teníamos una función $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, con un punto $a \in A$, decíamos que f es continua en a si y solo si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que si $x \in A$, $\|x - a\| < \delta$, entonces $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. Podemos reescribir esta condición como que si $x \in A \cap \mathrm{B}(a, \delta)$, entonces $f(x) \in \mathrm{B}(f(a), \varepsilon)$. Pero de nuevo, esto es equivalente a que para cualquier B^a (bola centrada en a), $A \cap \mathrm{B}^a \subset f^{-1}(\mathrm{B}^{f(a)})$ para cierta $\mathrm{B}^{f(a)}$.

De esta forma, vamos a proceder ahora a generalizar esta definición para espacios topológicos arbitrarios.

Definición 2.1.1. Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ espacios topológicos, $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. f es ***continua*** en $x_0 \in \mathcal{X}$ si para todo entorno $V^{f(x_0)}$ la imagen inversa $f^{-1}(V^{f(x_0)})$ es entorno de x_0.

Observación 2.1.1. Si la topología de $\mathcal{X}$ es grosera, o la topología de $\mathcal{Y}$ es muy fina, la continuidad suele ser más fácil de comprobar. Podemos pensar en $\mathcal{X}$ con la topología discreta como ejemplo de lo primero y en $\mathcal{Y}$ con la topología trivial como ejemplo de lo segundo:

1. En la topología discreta, cualquier conjunto es abierto, con lo cual $\{x_0\}$ es abierto y por tanto cualquier conjunto que contenga a x_0 es entorno suyo. Entonces, para cualquier entorno de $f(x_0)$ su imagen inversa contendrá a x_0 y por lo anterior será entorno suyo. Es decir, cualquier función que nazca en $\mathcal{X}$ con la topología discreta es continua.

2. En la topología trivial, los únicos abiertos son el vacío y el total, con lo cual dado un punto su único entorno es el total. Entonces, si $\mathcal{Y}$ con la topología trivial es el espacio de llegada de una función f, f es continua, pues la imagen inversa del total es el total, y este es abierto (y por tanto entorno) en cualquier topología. $\diamondsuit$

De la misma forma que podemos estudiar la continuidad para unas ciertas topologías concretas, podemos estudiarla para algunas funciones concretas sin limitarnos a una topología particular. En particular, nos van a interesar la función constante y la función identidad.

Observación 2.1.2.

1. Si $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es la aplicación constante $f = b$, entonces f es continua con cualquier topología. En efecto, la imagen inversa de cualquier subconjunto (y en particular de cualquier entorno) de $\mathcal{Y}$ que contenga a b es el total, que es entorno de todos los puntos.

2. La continuidad de la aplicación identidad depende de los espacios topológicos sobre los que está definida, al contrario de lo que pueda parecer. En efecto, sea $f : (\mathcal{X}, \mathcal{T}_{\text{discreta}}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{T}_{\text{trivial}})$. Esta sí es continua, por la observación 2.1.1. Sin embargo, su inversa, que también es la aplicación identidad, no es continua. Esto se sigue directamente de que, por ser la topología del espacio de llegada la discreta, $\{f(x_0)\}$ es abierto y por tanto entorno de $f(x_0)$, pero su imagen inversa es $\{x_0\}$ que con la topología trivial del espacio de salida no es entorno. $\diamondsuit$

Ahora, veremos un par de propiedades interesantes de la continuidad en un punto.

Proposición 2.1.1. *Dada $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, continua en $x_0 \in \mathcal{X}$, si $A \subset \mathcal{X}$ tal que $x_0 \in A$, entonces $f\restriction_A : A \to \mathcal{Y}$ es continua en x_0.*

Demostración. Sea $V^{f(x_0)}$ un entorno de x_0. Como en A estamos considerando la topología relativa, se verifica que $(f\restriction_A^{-1})(V^{f(x_0)}) = A \cap f^{-1}(V^{f(x_0)})$. Pero como por la continuidad de f en x_0 tenemos que $f^{-1}(V^{f(x_0)})$ es entorno de x_0 en $\mathcal{X}$, entonces $A \cap f^{-1}(V^{f(x_0)})$ es entorno de x_0 en A. ■

Proposición 2.1.2. *La continuidad es una propiedad local, es decir, $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es continua en $x_0 \in \mathcal{X}$ si $\exists V^{x_0} \subset \mathcal{X}$ entorno de x_0 tal que $f\restriction_{x_0}$ es continua en x_0.*

Demostración. Sea $V^{f(x_0)}$ un entorno de $f(x_0)$. Si $\exists V^{x_0} \subset \mathcal{X}$ entorno de x_0 tal que $f\restriction_{x_0}$ es continua en x_0, entonces $(f\restriction_{V^{x_0}})(V^{f(x_0)}) = f^{-1}(V^{f(x_0)}) \cap V^{x_0}$, luego es entorno de x_0 en V^{x_0}. Entonces es entorno de x_0 en $\mathcal{X}$ y por tanto f es continua. ■

2.2. Continuidad

Tras definir la continuidad en un punto, el paso instintivo es por supuesto definir la continuidad en todo el espacio. Vamos a hacerlo y a dar una serie de definiciones equivalentes de continuidad, que abren muchas posibilidades a la hora de verificar esta propiedad.

Definición 2.2.1 (Continuidad)**.** Se dice que $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es ***continua*** si lo es en todo punto.

Intuitivamente, una aplicación continua es la que no "rompe" el espacio. Nos permite deformar, aplastar, girar... pero no cortar o pegar.

Ejemplo 2.2.1. Vamos a ampliar la observación 2.1.2 comprobando qué tienen que verificar las topologías $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ para que se cumpla que la función identidad definida de $(\mathcal{X}, \mathcal{T}_1) \to (\mathcal{X}, \mathcal{T}_2)$ es continua.

El hecho de que f sea continua significa que para cualquier entorno $V_2^{f(x_0)} = V^{x_0}$, la imagen inversa:

$$f^{-1}(V_2^{x_0}) = V_2^{x_0} = V_1^{x_0}$$

cumple que es entorno de x_0 en el espacio $(\mathcal{X}, \mathcal{T}_1)$. Entonces, la condición necesaria y suficiente para que la función identidad entre estos dos espacios sea constante es que $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$. $\diamondsuit$

Vamos a ver ahora una serie de definiciones equivalentes de la noción de continuidad.

Proposición 2.2.1. *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

0. *f es continua*

1. *La imagen inversa de cualquier abierto es abierta.*

2. *La imagen inversa de cualquier cerrado es cerrada.*

3. *$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ para cualquier subconjunto A de $\mathcal{X}$.*

4. *Existe un recubrimiento abierto arbitrario de $\mathcal{X}$ de la forma:*

$$\mathcal{X} = \bigcup_{i \in I} U_i$$

que verifica que todas las restricciones $f\restriction_{U_i}$ son continuas.

5. *Existe un recubrimiento cerrado finito de $\mathcal{X}$ de la forma:*

$$\mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$$

que verifica que todas las restricciones $f\restriction_{F_i}$ son continuas.

Demostración. Vamos a probar las implicaciones más sencillas e ilustrativas, aunque realmente se podría hacer en cualquier orden.

$\boxed{(0) \implies (1)}$ Sea un abierto $U \subset \mathcal{Y}$. Por ser abierto, es entorno de todos sus puntos. Pero para cada punto $f(x_0) \in U$, por ser f continua, la imagen inversa de U es también entorno de x_0. De esta forma, para cualquier $x_0 \in f^{-1}(U)$, se cumple que $f^{-1}(U)$ es entorno de x_0, y por tanto $f^{-1}(U)$ es abierto.

$\boxed{(1) \implies (0)}$ Sea $V^{f(x_0)}$ un entorno en $\mathcal{Y}$. Por definición, contiene un abierto U tal que $f(x_0) \in U$. Ahora, por hipótesis, $f^(-1)(U)$ es abierto, y como $x_0 \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V^{f(x_0)})$, se verifica que $f^{-1}(V^{f(x_0)})$ contiene un abierto que contiene a x_0 y por tanto es entorno.

$\boxed{(1) \iff (2)}$ $F \subset \mathcal{Y}$ es cerrado $\iff$ $\mathcal{Y} \setminus F$ es abierto. Pero entonces por hipótesis $f^{-1}(\mathcal{Y} \setminus F)$ es abierto, y $f^{-1}(\mathcal{Y} \setminus F) = \mathcal{X} \setminus f^{-1}(F)$, luego $f^{-1}(F)$ es cerrado. La otra implicación es análoga.

$\boxed{(2) \implies (3)}$ Basta con ver que cualquier A verifica que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ o, lo que es equivalente, $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. Sin embargo, la imagen inversa del cerrado $\overline{f(A)}$ es cerrada, con lo que basta con demostrar que $A \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, ya que $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A. Por tanto, simplemente:

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$$

porque $f(A) \subset \overline{f(A)}$.

$\boxed{(3) \implies (2)}$ Sea $F \subset \mathcal{Y}$ cerrado. Queremos probar que $G = f^{-1}(F)$ también lo es, y tenemos, por hipótesis y por las propiedades de la imagen inversa:

$$f(\overline{G}) \subset \overline{f(G)} = \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F$$

pero entonces $\overline{G} \subset f^{-1}(F) = G$, luego $\overline{G} = G$ y entonces G es cerrado por la proposición 1.3.8.

$\boxed{(0) \implies (4)}$ Trivial, con el recubrimiento cuyo único abierto es $\mathcal{X}$.

$\boxed{(4) \implies (1)}$ Vamos a aprovechar que ya hemos demostrado (0) $\implies$ (1). Entonces, sea $U \subset \mathcal{Y}$ un abierto. Lo podemos escribir como unión de abiertos de forma que cada uno de ellos esté en un U_i, de la siguiente forma:

$$U = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap U)$$

Ahora, la imagen inversa de U es:

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} (U_i \cap U)\right) = \bigcup_{i \in I} (f^{-1}(U_i \cap U))$$

pero como $U_i \cap U \subset U_i$ y $f\restriction_{U_i}$ es continua, entonces cada una de estas imágenes inversas es continua, y la imagen inversa de U también lo es.

$\boxed{(0) \implies (5)}$ Trivial, con el recubrimiento cuyo único cerrado es $\mathcal{X}$.

$\boxed{(5) \implies (2)}$ Es análogo a (4) $\implies$ (1). ■

Terminamos con una propiedad fundamental de las funciones continuas: la composición respeta la continuidad.

Proposición 2.2.2. *Sean $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$, con f, g continuas. Entonces, $h = g \circ f$ es continua.*

Demostración. Esta es una consecuencia casi directa de la definición. En efecto, si consideramos $x_0 \in \mathcal{X}$ y sus imágenes:

$$x_0 \mapsto f(x_0) =: y_0 \mapsto g(f(x_0)) =: z_0$$

entonces basta con estudiar los entornos. En efecto, si V^{z_0} es entorno de z_0, por la continuidad de g su imagen inversa es un entorno V^{y_0} en $\mathcal{Y}$ y, ahora, por la continuidad de f, la imagen inversa de este último es un entorno de z_0. ■

Número 1.1. Sea X un conjunto, y $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ la familia de todos los subconjuntos de X cuyo complementario es finito, más el conjunto vacío. Probar que $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ es una topología en X. Esta topología se llama, por razones evidentes, *topología de los complementarios finitos.* ¿Qué topología obtenemos si X es un conjunto finito?

A partir del enunciado se deduce que los abiertos de esta topología son los elementos de la colección

$$\mathcal{T}_{\mathrm{CF}} = \{U \subset X : U = \emptyset \text{ o } X \backslash U \equiv U^c \text{ es finito}\}.$$

Veamos que efectivamente $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ es una topología al verificar las condiciones necesarias.

- En primer lugar, el vacío pertenece a esta por definición. Además, el complementario del total X (el vacío) es finito, luego X también pertenece a $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$.
- Por otro lado, sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ para un cierto conjunto de índices I una colección arbitraria de elementos de $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$, teniéndose que

$$X \backslash \bigcup_\alpha U_\alpha = \bigcap_\alpha (X \backslash U_\alpha).$$

  Pero $X - U_\alpha$ es finito para cada $\alpha \in I$, luego la intersección numerable de ellos también lo será. De este modo, la unión numerable de abiertos de $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ pertenece a ella.
- Por último, consideremos U_1 y U_2 dos abiertos de $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$. Análogamente al caso anterior,

$$X \backslash (U_1 \cap U_2) = \bigcup_{i=1}^{2} (X \backslash U_i).$$

  Sin embargo, $X \backslash U_i$ es finito para $i \in \{1, 2\}$, luego la unión finita de conjuntos finitos es finita.

Para finalizar, se nos pregunta qué topología se obtendría en caso de que X fuese un conjunto finito. Si damos por cierta esta suposición, es claro que $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ coincide con la topología discreta, ya que el complementario de todo conjunto es finito.

A pesar de haber terminado con lo requerido del ejercicio, podemos ir más allá estudiando más a fondo esta topología. Para comenzar, nótese que si X es numerable trivialmente el conjunto es separable y primer y segundo axioma de numerabilidad. El caso en el que X no es numerable ya no es tan sencillo. Vayamos por partes.

- X es separable. Es más, todo conjunto numerable es denso en X. En efecto, supongamos que existiese un conjunto $A \subset X$ numerable pero que no es denso en X. Esto implica que existe un abierto $B \in \mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ tal que $B \cap A = \emptyset$. De este modo,

$$(X \backslash B) \cup (X \backslash A) = X.$$

  Pero los conjuntos del primer miembro son finitos, y la unión de finitos es finita, lo que conllevaría a que X también lo sea. Esto nos conduce a la contradicción buscada.
- X no es primer axioma de numerabilidad, lo que implica que tampoco es segundo. Para corroborar esto, comprobemos que para cada punto $a \in X$ no existe una base de entornos abiertos numerable centrada en a. Razonaremos de nuevo por reducción al absurdo.

  Supongamos que sí que existe esa base y sea esta

$$\mathcal{U}^a = \{V_k \in \mathcal{T}_{\mathrm{CF}} : k \geq 1\}.$$

  La intersección

$$\left(\bigcap_{k\geq 1} V_k\right)\backslash\{a\}$$

es no vacía puesto que, al tomar los complementarios y aplicar las leyes de De Morgan se tiene que

$$X\backslash\left(\bigcap_{k\geq 1} V_k\right)=\left(\bigcup_{k\geq 1} X\backslash V_k\right),$$

y esta unión es numerable ya que $X\backslash V_k$ es finito (recordemos que $V_k\in\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$). Al ser X no numerable y

$$X=\left(\bigcap_{k\geq 1} V_k\right)\cup\left(\bigcup_{k\geq 1} X\backslash V_k\right),$$

la intersección anterior ha de ser no numerable.

Tomemos ahora un punto cualquiera b de esta intersección con la condición de que sea distinto de a y consideremos el entorno abierto de a dado por $W:=X\backslash\{b\}$. Claramente, $a\in W$ y es abierto puesto que su complementario es finito. De forma evidente la condición $V_k\subset W$ no se verifica para ningún k ya que $b\in V_k$ para todo k. Esto verifica que $\mathcal{U}^a$ no puede ser base, concluyendo así que cuando X no es numerable $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ no es primer axioma de numerabilidad.

- X es compacto. En efecto, supongamos que $\{V_k : k\geq 1\}$ es un recubrimiento por abiertos de X y tomemos un V_{k_0} arbitrario. Como este abierto pertenece a $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ su complementario es finito, luego

  $$X\backslash V_{k_0}:=\{x_1,\ldots,x_r\}$$

  con $x_j\in X$ y $j=\{1,\ldots,r\}$ tales que $x_j\in V_{k_j}$ para cierto k_j, pues la unión de V_k recubre X según lo hemos definido. De este modo, podemos tomar X como la unión de V_{k_0} con los V_{k_j} que contienen a los puntos x_j, esto es,

  $$X=\bigcup_{j=0}^{r} V_{k_j},$$

  lo que prueba que X es compacto.

- X es conexo. Un modo de probar esto es comprobar que no existen conjuntos abiertos y cerrados simultáneamente. En caso de que esto ocurriese, lo que quiere decir que $A\in\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ y $X\backslash A\in\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$, se tiene que $X\backslash A$ y $X\backslash(X\backslash A)=A$ son finitos, luego

  $$X=A\cup(X\backslash A)$$

  sería finito, y esto contradice que sea no numerable.

3. Construcciones de topología

Imágenes inversas

Esta sección se centrará en dar solución al siguiente problema. Dado un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$, un conjunto Y y una aplicación f que nace en Y y muere en $(X,\mathcal{T})$, queremos dotar a Y de una topología que haga que f sea continua. Evidentemente, una elección fácil para que esto ocurra es escoger la topología discreta, puesto que es la que cuenta con más abiertos y, por lo tanto, para todo abierto U' de X entonces $f^{-1}(U')$ es abierto en Y, lo que implica que f sea continua. Sin embargo, este caso no es realmente interesante y lo difícil del problema será encontrar la topología menos fina para que f sea continua.

La solución a este problema es la topología $f^{-1}(\mathcal{T})$, definida como

$$f^{-1}(\mathcal{T}) = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{T}\}$$

La comprobación de que verdaderamente es una topología se desprende de las propiedades de la función inversa aplicada a conjuntos. Por otro lado, es la menos fina que implica que f sea continua por construcción, luego cualquier otra topología con estas características contiene a esta. Finalmente, se tiene que es única. En efecto, si tenemos que $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}$ cumplen que son las menos finas por construcción, entonces se tiene que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ y $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, luego son iguales.

Una vez resuelta esta cuestión, es hora de profundizar un poco más. Tomemos otro espacio topológico $(Z, \mathcal{T}')$ y consideremos una función g que nace en este y muere en Y. El problema que se nos plantea ahora es determinar qué aplicaciones g son continuas. Nótese que con esta distribución también podemos definir la composición $f \circ g$, quedando el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] & (X, \mathcal{T}) \\
(Z, \mathcal{T}') \arrow[u, "g"] \arrow[ur, dashed, "f\circ g"'] &
\end{tikzcd}$$

En primer lugar, observemos que como f es continua por definición del problema anterior, que g sea continua implica que la composición $f \circ g$ también lo sea. Sin embargo, la otra implicación (si $f \circ g$ es continua entonces g es continua) también es cierta como veremos a continuación. Esto es realmente interesante, puesto que la topología que haya en Y no es relevante si nuestro estudio se centra en la relación de $(Z, \mathcal{T}')$ y $(X, \mathcal{T})$.

Veamos que efectivamente se cumple esta implicación. En efecto, consideremos un abierto $W \subset f^{-1}(U)$ y verifiquemos que $g^{-1}(W) \subset \mathcal{T}'$. Por su definición, W es un abierto de $f^{-1}(U)$ con $U \subset \mathcal{T}$ y, como $f \circ g$ es continua, entonces $(f \circ g)^{-1}(U) \subset \mathcal{T}'$. Pero se tiene que $f \circ g)^{-1}(U) = g^{-1}[f^{-1}(U)] \equiv g^{-1}(W)$, luego $g^{-1}(W) \subset \mathcal{T}'$.

Una consecuencia directa que se desprende de esto es que la topología imagen inversa $f^{-1}(\mathcal{T})$ es la topología en Y que cumple la equivalencia anterior. En efecto, supongamos que una topología $\mathcal{T}_Y$ lo cumple y veamos que coincide con la topología imagen inversa. Para ello, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(Y, \mathcal{T}_Y) \arrow[r, "f"] & (X, \mathcal{T}) \\
(Y, \mathcal{T}_Y) \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, dashed, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Sabemos que la identidad de un espacio en sí mismo es una aplicación continua. De este modo, al ser esta continua, tenemos por lo anterior que f es continua. En consecuencia, $\mathcal{T}_Y$ hace que f sea continua y, por tanto, $f^{-1}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}_Y$. Ya tenemos demostrada una inclusión.

Consideremos ahora el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(Y, \mathcal{T}_Y) \arrow[r, "f"] & (X, \mathcal{T}) \\
(Y, f^{-1}(\mathcal{T})) \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, dashed, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Ahora, sabemos que f es continua por lo visto en el primer problema. Además, como la diagonal es continua, entonces la vertical es continua, luego $\mathcal{T}_Y \subset f^{-1}(\mathcal{T})$.

Observación .0.1 (Inyectividad)**.** (1) Supongamos que dos puntos y_1 e y_2 terminan en el mismo punto tras ser evaluados en una aplicación (lo que quiere decir que esta no es inyectiva). Los abiertos U que contienen a la imagen de los dos puntos mencionados x (que es la misma) cumplen que $f^{-1}(U)$ contiene a y_1 e y_2, luego estos dos puntos resultan ser topológicamente indistinguibles. Por ello, este tipo de aplicaciones no presentan mucho interés puesto que no es posible conocer con certeza ciertas propiedades.

(2) El caso verdaderamente interesante ocurre cuando f es inyectiva. En este caso, si se considera el subespacio $(f(Y), \mathcal{T}|_{f(Y)}) \subset (X, \mathcal{T})$, entonces f es biyectiva:

$$(Y, f^{-1}(U)) \xrightarrow{f} (f(Y), \mathcal{T}|_{f(Y)}) \subset (X, \mathcal{T}).$$

Además, la aplicación es continua puesto que, dado W un abierto de $f(Y)$, entonces $W = Y \cap f(U)$ para cierto abierto $U \in \mathcal{T}$. Esto implica que

$$f^{-1}(W) = f^{-1}(U \cap f(Y)) = f^{-1}(U) \cap Y = f^{-1}(U),$$

que es abierto de Y por la definición de topología que hemos tomado. Sin embargo, esto no termina aquí, ya que f es abierta. En efecto, dado un abierto $W \subset Y$, entonces existe un abierto $U \subset \mathcal{T}$ de modo que $W = f^{-1}(U)$. De este modo,

$$f(W) = f(f^{-1}(U)) \cap f(Y) = (U) \cap f(Y) = f^{-1}(U),$$

que es un abierto de $f(Y)$ (la segunda igualdad se deduce de que f es inyectiva). Por tanto, al ser f continua y abierta, es homeomorfismo. Esto es sorprendente, ya que una aplicación inyectiva de Y en X es homeomorfismo de Y en $f(Y)$. De aquí se puede definir el concepto de inmersión o embebimiento si f es inyectiva y se tiene que

$$f : (Y, f^{-1}(\mathcal{T})) \to (X, \mathcal{T}).$$

$\diamondsuit$

Imágenes directas

Después de haber realizado todo el desarrollo anterior, una posibilidad que se nos plantea es dualizar las cuestiones que nos han ido apareciendo. Coloquialmente, podríamos decir que vamos a cambiarle el sentido a todo.

Así pues, consideremos un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, un conjunto Y y una aplicación f que nace en $(X, \mathcal{T})$ y muere en Y. El problema ahora consiste en dotar a Y de una topología que haga que f sea continua. La solución más sencilla sería elegir la topología trivial, puesto que sus únicos abiertos son el vacío y el total y siempre se cumpliría que para cada U' abierto de Y entonces la imagen inversa de este es un abierto del espacio de partida. No obstante, es interesante encontrar la topología más fina que cumpla esto, y esta es

$$f(\mathcal{T}) = \{U : f^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$$

Evidentemente, se trata de una topología y es la más fina que permite que f sea continua ya que si se añade algún abierto más deja de serlo. Por último, realizando un razonamiento por doble inclusión al análogo en imágenes inversas, se puede ver que es única.

Continuando con la misma argumentación, veamos cuando una función g que parta de Y es continua

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{T}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& (Z,\mathcal{T}')
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Trabajando igual que en el caso anterior, se llega a que g es continua si y solo si $g \circ f$ es continua (para ello, basta ver que si $W \subset \mathcal{T}'$ entonces $g^{-1}(W) \subset f(\mathcal{T})$) y que $f(\mathcal{T})$ es la topología en Y que cumple esta doble implicación.

Observación .0.2 (Sobreyectividad)**.** (1) Supongamos que f no es sobreyectiva y tomemos un punto $y \notin f(X)$. Entonces $f^{-1}(Y)$ es el vacío, pero como el vacío es abierto llegamos a que el punto es abierto, luego $f(\mathcal{T}|_{Y\setminus f(X)})$ coincide con la topología discreta. Sin embargo, la imagen inversa de $Y\setminus f(X)$ es vacía y es abierta en la imagen. Además, como $f(X)$ es el complementario de $Y\setminus f(X)$, entonces $f(X)$ es cerrado. No obstante, $f(X)$ coincide con el total, luego también es un abierto.

$\diamondsuit$

Ahora que hemos visto que el caso interesante es que f sea sobreyectiva, consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & (\mathcal{Y}, f\mathcal{T}) \\
\mathcal{X}/\!\sim \arrow[ur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde la relación de equivalencia verifica $x \sim y \iff f(x) = f(y)$. Aquí, p es simplemente la aplicación que manda $x \in \mathcal{X}$ a su clase de equivalencia, y consideramos $\bar{f}$ de forma que verifique que $f = \bar{f} \circ p$.

Decimos que una aplicación f que verifica que si $x \sim y$ entonces $f(x) = f(y)$ respeta la relación de equivalencia $\sim$. Nótese que no se exige la equivalencia, solo la implicación.

Como hemos definido la relación de equivalencia como la que verifica $x \sim y \iff f(x) = f(y)$, tenemos que $\bar{f}$ es una biyección. Además, se puede comprobar que si existe $\bar{f}$ tal que $f = \bar{f} \circ p$, entonces f respeta la relación de equivalencia $\sim$.

Ahora, vamos a definir la topología cociente para $\mathcal{X}/\!\sim$. Buscamos una topología que verifique que la aplicación p es continua y que existe una aplicación continua $\bar{f}$ que respete la relación de equivalencia $\sim$ y que verifique que $f = \bar{f} \circ p$.

Definición .0.2 (Topología cociente)**.** Definimos la ***topología cociente*** en las condiciones anteriores como:

$$\mathcal{T}/\!\sim = \{V \ : \ p^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}$$

es decir, la topología cociente es la topología imagen por p.

Está claro que se verifican nuestros requisitos. Por un lado, p es trivialmente continua (pues la topología imagen por p es precisamente la que verifica esto). Por otro lado, por ser una topología imagen se verifica directamente la continuidad de $\bar{f}$.

Proposición .0.3. *En las condiciones de la construcción (cuando la relación $\sim$ está definida como $x \sim y \iff f(x) = f(y)$), $\bar{f}$ es homeomorfismo.*

Demostración. Ya hemos visto que $\bar{f}$ es biyectivo cuando la relación de equivalencia verifica $x \sim y \iff f(x) = f(y)$; y que es continuo en el sentido en el que lo hemos definido. Para ver la continuidad en el otro sentido, basta con ver que $\bar{f}$ es abierta.

En efecto, $U \in \mathcal{X}/\!\sim$ abierto $\iff$ $p^{-1}(U)$ es abierto en $\mathcal{X}$. Pero tenemos que $p^{-1}(U) = f^{-1}(f(S))$, porque:

$$x \in p^{-1}(U) \iff p(x) \in S \overset{\bar{f}\text{ biy.}}{\iff} \bar{f}(p(x)) \in \bar{f}(U) \iff f(x) \in \bar{f}(U) \iff x \in f^{-1}(\bar{f}(U))$$

Entonces, como $f(\mathcal{T})$ es la topología en $\mathcal{Y}$, $f^{-1}(f(U))$ es abierto en $\mathcal{X} \iff \bar{f}(U)$ es abierto en $\mathcal{Y}$, pero ya hemos visto que $f^{-1}(f(U))$ es abierto, porque es $p^{-1}(U)$. ■

Por otro lado, está claro que todos los abiertos de $\mathcal{T}/\!\sim$ son imágenes por p de abiertos de $\mathcal{T}$ (pero no todas las imágenes de abiertos tienen que estar necesariamente en $\mathcal{T}$). Entonces, definimos:

Definición .0.3 (Conjunto saturado)**.** En las condiciones anteriores, decimos que $W \in \mathcal{T}$ es ***saturado*** si $W = p^{-1}(p(W))$. Es equivalente decir que $[x] \cap W \neq \emptyset \implies [x] \subset W$, o que $x \in W, y \sim x \implies y \in W$.

Gracias a esta definición, podemos reescribir la topología cociente como:

$$\mathcal{T}/\!\sim = \{p(W) \ : \ W \in \mathcal{T},\, W \text{ saturado}\}$$

Además, vamos a dar un nombre a las funciones que envían X en un espacio homeomorfo a un cociente:

Definición .0.4 (Identificación)**.** Una ***identificación*** es una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{T}')$ sobreyectiva que verifica que $\mathcal{T}'$ es la topología imagen por f $f(\mathcal{T})$.

La aplicación f con la que hemos estado trabajando es, entonces, una identificación. El hecho de que la topología de $\mathcal{Y}$ sea la imagen significa que una identificación es continua.

Las identificaciones se llaman a veces en la literatura aplicaciones cociente. Esto está ligado con su utilidad: las identificaciones son aquellas que inducen una relación de equivalencia $\sim$ de forma que podemos desarrollar toda la construcción anterior. De esta forma, nos "regalan" un espacio homeomorfo a $\mathcal{Y}$ que a menudo es más simple y más fácil de entender que él. Este propósito quedará más claro en los ejemplos posteriores.

Para comprobar si una aplicación es una identificación, podemos usar la siguiente proposición:

Proposición .0.4 (Condiciones suficientes de identificación)**.** *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ una aplicación. Si se verifica alguna de las siguientes condiciones, f es una identificación:*

1. *f es una aplicación continua abierta.*
2. *f es una aplicación continua cerrada.*

Nótese que puede haber identificaciones que no verifiquen ninguna de las condiciones anteriores. Además, como no se exige que las identificaciones sean biyectivas, las dos condiciones anteriores no son equivalentes.

Toda esta construcción abstracta debe servirnos para formalizar todo el concepto de cociente de un espacio. Esta es quizá la idea más importante que se va a ver en toda la asignatura, y es excepcionalmente útil para construir una gigantesca variedad de homeomorfismos y encontrar objetos simples homeomorfos a otros mucho más complejos.

Ejemplo .0.2 (Circunferencia unidad)**.** Definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{S}^1 \\ t &\mapsto e^{2\pi i t} = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t) \end{aligned}$$

y consideramos la relación de equivalencia $s \sim t \iff e^{2\pi i s} = e^{2\pi i t} \iff s - t \in \mathbb{Z}$. Vamos a ver que la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1$ es homeomorfa a $\mathbb{R}/{\sim}$.

Nos queda, pues, el siguiente esquema:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{S}^1 \arrow[dl, leftrightarrow] \\ \mathbb{R}/{\sim} & \end{tikzcd}$$

y está claro que la aplicación que manda f a $\mathbb{S}^1$ es una identificación, pues es sobreyectiva, continua y homeomorfismo local, luego es abierta.

Ahora, nótese que considerando $[0,1] \subset \mathbb{R}$ podemos tomar las restricciones correspondientes con el siguiente esquema:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{S}^1 \arrow[dl, leftrightarrow] \\ {[0,1]} \arrow[ur, hook] \arrow[r] & \mathbb{R}/{\sim} & \end{tikzcd}$$

y llegar a otra identificación. Ahora la relación de equivalencia asociada es simplemente aquella en la que $1 \sim 0$ y todos los demás puntos son solamente equivalentes a sí mismos. $\diamondsuit$

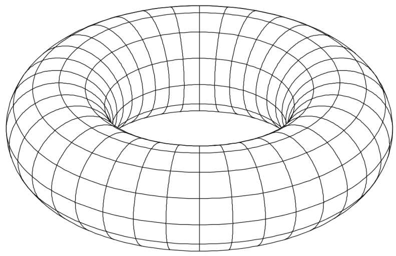
Esta posibilidad de encontrar, a veces, un cociente más simple que tiene la misma topología nos motiva a definir:

Definición .0.5 (Dominio fundamental)**.** En una construcción como la anterior, llamamos ***dominio fundamental*** a la región cerrada más pequeña posible con un representante de cada clase de equivalencia. Según la situación, a veces se exigen también otras propiedades como compacidad.

Ejemplo .0.3. Ahora, vamos a considerar el toro de revolución que vive en $\mathbb{R}^3$, cuya parametrización es conocida:

$$
\begin{aligned}
x &= (a\cos(\theta) + b)\cos(\phi),\\
y &= (a\cos(\theta) + b)\sin(\phi),\\
z &= a\sin(\theta).
\end{aligned}
$$

Como vemos en la imagen, se trata de una figura generada por revolución de una circunferencia en torno a un eje.



Vamos a hacer pues una construcción similar a la ya vista para la circunferencia unidad. Nos queda un esquema del siguiente tipo:

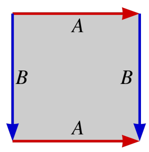
$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3 \\
{[0,2\pi]^2} \arrow[ur, phantom, "\subset" sloped] \arrow[r] & \mathbb{R}^2/\sim \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

En este caso, la relación de equivalencia está definida como:

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x - x' \in \mathbb{Z},\ y - y' \in \mathbb{Z}$$

y como dominio fundamental encontramos el cuadrado $[0, 2\pi]^2$.

A menudo, los dominios fundamentales se representan con esquemas como el siguiente, que representa el toro que acabamos de describir:

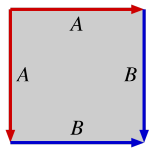


Estos esquemas se llaman ***polígonos fundamentales***. La forma de entenderlos es que la relación de equivalencia "pega" los puntos de A y de B en el sentido que indican las flechas. $\diamondsuit$

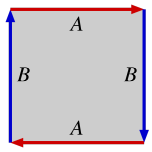
En el siguiente ejemplo, vamos a ver varios homeomorfismos cociente importantes pero sin entrar en tantos detalles como en los ejemplos previos. Para familiarizarnos íntimamente con el espacio cociente, es un buen ejercicio mental tratar de visualizar cómo podemos deformar un objeto del ejemplo siguiente para transformarlo en otro homeomorfo. Al fin y al cabo, la homeomorfia, intuitivamente, es poder deformar sin romper, y los cocientes formalizan la noción de "pegar" puntos.

Ejemplo .0.4.

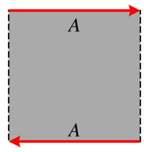
1. La esfera $\mathbb{S}^2$ se puede identificar con el disco unidad si la relación de equivalencia es la que hace que todos los puntos del borde estén relacionados entre sí y los demás, solo con sí mismos. De la misma forma, la podemos identificar con dos discos donde la relación de equivalencia "pega" los bordes. Por último, una esfera tiene como polígono fundamental:



2. Podemos identificar el plano proyectivo real $\mathbb{P}^2$ con un disco y una esfera donde la relación de equivalencia "pega" los bordes. También podemos identificarlo con una semiesfera en la que cada punto del borde es equivalente a su antípoda, o con una esfera completa en la que dos puntos están relacionados si y solo si son antipodales. Además, el polígono fundamental del plano proyectivo real sería:

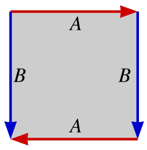


3. Vamos a ver otros dos polígonos fundamentales más. El de la banda de Möbius sería:



Nótese que en este caso hay un lado que no se pegaría, que corresponde al borde de la banda de Möbius.

Por otro lado, el de la botella de Klein sería:



$\diamondsuit$

.1. Homeomorfismo. Homeomorfismo local

En esta sección trataremos la idea de homeomorfismo en espacios topológicos. Esta idea va a adquirir una gran importancia para nosotros ya que es la que nos va a permitir caracterizar espacios distintos como "similares" desde un punto de vista topológico (vemos que continúa la idea de isomorfismo que hemos visto en otras asignaturas).

Además, más adelante nos proporcionará una serie de características comunes entre espacios homeomorfos(apertura, conexión, compacidad. . .).

Definición .1.1 (Homeomorfismo)**.** Un ***homeomorfismo*** entre espacios topológicos $f\colon X \to Y$ es una biyección continua con inversa continua.

Si existe un homeomorfismo entre dos espacios X e Y se dice que estos son ***homeomorfos***.

Hagamos ahora unas pequeñas observaciones antes de pasar a una serie de ejemplos que nos permitan asentar estos conceptos.

Observación .1.1. Como vemos en la definición .1, no nos basta únicamente con que nuestra aplicación f sea biyectiva (y de este modo tenga inversa), sino que además exigimos esta inversa sea continua.

Esta continuidad en ambos sentidos del homeomorfismo nos va a resultar muy útil como veremos más adelante, dado que las muchas propiedades (abiertos, cerrados. . .) se van a transladar entre los dos espacios homeomorfos que nos proporciona f. ♢

Ahora pasamos a observar una serie de funciones homeomorfas y no homeomorfas, para comprender las diferencias entre ambas y así afianzar la definición.

Ejemplo .1.1 (Homeomorfismos)**.**

1. La función $Id\colon (X, \tau_{dis}) \to (X, \tau_{triv})$ verifica ser continua y biyectiva, pero como vimos en el ejemplo su inversa no es continua, por lo que no se tratará de un homeomorfismo.

2. Vemos como cualquier función f que mande X a Y no es homeomorfismo, a pesar de que f pueda ser biyectiva y continua.

   Esto no podemos afirmarlo con nuestros conocimientos actuales, pero adelantándonos en el temario (buscamos al introducir este ejemplo tan solo aumentar el interés del lector por los homeomorfismos, no buscamos que se comprenda completamente) lo sabremos ya dado el punto o (aquel que se manda al origen en Y) tenemos que:

   $\forall V^o$ pinchado (es decir, quitamos o) V^o tiene al menos 4 componentes conexas.

   $\exists W^o$ pinchado con 2 componentes conexas.

   Por lo tanto, al no mantenerse la cantidad de componentes conexas entre X e Y se verifica que f no es homeomorfismo.

3. Veamos como los conjuntos anteriores son homeomorfos entre si.

   Tomando un recubrimiento por cerrados del primero (el que tiene por cerrados los tres segmentos) y haciendole corresponder mediante $f$con los tres segmentos de nuestro segundo conjunto, vemos como cada una de sus restricciones es continua, y f de este modo continua (hacemos este camino a la inversa para ver que la inversa también lo es y así probar que es homeomorfismo).

   Este ejemplo nos puede resultar ilustrativo de que nos basta con encontrar una f que homeomorfa entre nuestros espacios, pero no en todo el plano (lo cual es mucho más ambicioso).

♢

Una vez definido el concepto de homeomorfismo y vista a través de los ejemplos su gran fuerza, vamos a pasar al concepto de homeomorfismo local, el cual, a pesar de ser una relación más débil que la que proporciona el homeomorfismo, también será muy utilizado a lo largo de la asignatura.

Definición .1.2 (Homeomorfismo Local)**.** Sea $f : X \to Y$ aplicación entre espacios topológicos y $x_0 \in X$. Se dice que f es ***homeomorfismo local*** en x_0 si x_0 tiene un entorno abierto U^{x_0} tal que $f(U^{x_0})$ es entorno abierto de $f(x_0)$ en Y y se tiene que $f|_{x_0} : U^{x_0} \to f(U^{x_0})$ es homeomorfismo.

De esta definición se desprende que todo un homeomorfismo entre dos espacios es en un homeomorfismo local en todos sus puntos. Este resultado resulta evidente, pero su contrarreciproco (no homeomorfo local implica no homeomorfo) nos puede resultar enormemente útil ya que es mucho más sencillo estudiar el homeomorfismo local al global. Vemos ahora algunos ejemplos de homeomorfismos locales.

Ejemplo .1.2. Vemos como podemos construir entre la esfera y el plano un homeomorfimo local en cada uno de sus puntos, por lo que podemos decir de estos que resultan localmente homeomorfos. Resulta de interés destacar que no es necesario que la aplicación sea la misma en todo el espacio, sino que podemos tomar una distinta para cada punto del espacio.

Tal y como se ve en el ejemplo, $f(x0, y0, z0) = (x0, y0)$ siendo homeomorfismo en su restricción a U^{x_0} $f(x1, y1.z1) = (y1, z1)$ siendo del mismo modo homeomorfismo en su restricción ♢

Una vez vistas ambas definiciones pasamos a ver una serie de propiedades y observaciones propias de los homeomorfismos (globales), pero que también nos valdrán para la restricción homeomorfa de los locales (dado que en ella por definición la aplicación es homeomorfa)

Observación .1.2.

1. Sea $f : X \to Y$ aplicación biyectiva. Que f sea continua es equivalente a que si $U \in Y$ es abierto, $f^{-}1(U)$ también lo será. Del mismo modo, es equivalente a que si $U \in Y$ es cerrado, $f^{-}1(U)$ también lo será.

   Igualmente, que $f^{-}1$ sea continua es equivalente a que si $U \in X$ es cerrado, $(f^{-}1)^{-}1(U) = f(U)$ también lo será. Así también, es equivalente a que si $U \in X$ es cerrado, $f(U)$ también lo será.

   Vemos como la si se verifican ambas (continuidad de f y de su inversa) será homeomorfismo, de modo que hemos encontrado una caracterización de estos en función de las imágenes directa e inversa de los abiertos (o cerrados).

2. Definimos las siguientes propiedades de aplicaciones: Una aplicación f no necesariamente biyectiva se llama ***abierta*** cuando la imagen de abiertos es un abierto (es decir, cuando $f(U)$ es abierta si U es abierto). Una aplicación f no necesariamente biyectiva se llama ***cerrada*** cuando la imagen de abiertos es un abierto (es decir, cuando $f(U)$ es abierta si U es abierto).

   Vemos como al no ser f biyectiva, no tienen porque ser equivalentes. (Dejamos para el lector el comprobar que en caso de ser biyectiva si lo es, utilizando las distintas caracterizaciones de continuidad de aplicaciones).

3. Sean los espacios X compacto, $Z \subset X$ cerrado e Y tomando en Y la topología T_2.

   Tomamos $f : X \to Y$ aplicación continua, entonces tendremos que:

   Como probaremos más adelante, cerrado en compacto implica compacto, por lo que Z será cerrado en X. Como f es continua, $f(Z)$ será compacto en Y y como estamos trabajando con la topología T_2 será cerrado.

   Así, tenemos por lo tanto que si f es biyección, su inversa (al ser f cerrada) será continua. Por lo tanto, afirmamos que toda aplicación continua en compactos es homeomorfismo. Como se habrá percatado el lector, aun no disponemos siquiera de una definición de compacidad, por lo que esta demostración queda aun fuera de su alcance, pero hemos decidido incluirla para así ver resultados interesantes sobre homeomorfismos. Recomendamos que una vez que se hayan dado los contenidos relacionados con compacidad se regrese a esta sección para así comprobar la comprensión de estos argumentos.

♢

Índice general

Topologías