Topología Elemental

Álvaro García Tenorio   Manuel Navarro García   Iván Prada Cazalla
Álvaro Rodríguez García   Clara Rodríguez Núñez

21 de abril de 2017

Índice general

Prefacio

Estas notas son una transcripción de las clases de la asignatura "*Topología Elemental*", impartidas por Jesús María Ruiz Sancho en el curso 2016–2017 a los cursos de tercero de los Dobles Grados de Matemáticas e Informática y Matemáticas y Física en la facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (UCM).

Agradecimientos

En primer lugar hay que agradecer a todos aquellos que han estado pendientes de la evolución del texto durante su proceso de construcción, corrigiendo numerosas faltas de estilo y erratas de toda la clase y condición. Entre ellos queremos destacar a María José Belda Beneyto, Clara Isabel López González y Miguel Pascual Domínguez.

Por otra parte, en términos de dominio de LaTeX y otras diversas herramientas que han mejorado mucho este texto destacamos especialmente a uno de los autores, Álvaro Rodríguez García.

Parte I

Topología general

Capítulo 1

Espacios Topológicos

La necesidad del estudio de la proximidad y continuidad, de la forma más abstracta posible, (absteniéndose del uso de la noción de distancia) dio origen a la Topología.

La idea de espacio topológico se comenzó a desarrollar durante los siglos XIX y XX por matemáticos como Fréchet, Kuratowski, Alexandroff y Hausdorff entre otros.

La definición inicial de estos espacios se puede encontrar en el libro ***"Grundzüge der Mengenlehre"***[1] publicado por este último autor.

Al comienzo de este capítulo introducimos la noción moderna de espacio topológico, añadiendo unos cuantos ejemplos, y posteriormente, presentaremos los conjuntos abiertos y cerrados y sus relaciones.

1.1. Espacios Topológicos. Definición y Ejemplos.

Comenzamos, como no podía ser de otra manera, definiendo la estructura sobre la que trabajaremos a lo largo de todas estas notas, los llamados espacios topológicos.

Definición 1.1.1 (Espacio Topológico). Un ***espacio topológico*** es un conjunto arbitrario no vacío $\mathcal{X}$ equipado con una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ que cumplen las siguientes propiedades:

T1 El vacío y el total están en la colección $\mathcal{T}$, es decir, $\{\emptyset, \mathcal{X}\} \subset \mathcal{T}$

T2 La unión arbitraria de conjuntos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$. Escrito de forma más rigurosa, pero desde luego, menos elegante, $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \in \mathcal{T}$ donde cada $\mathcal{U}_i \in \mathcal{T}$.

T3 La intersección finita de conjuntos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$. O, dicho de otra forma, $\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i \in \mathcal{T}$ donde cada $\mathcal{U}_i \in \mathcal{T}$.

A menudo hablaremos tan solo de ***espacio***.

Hagamos un par de pequeñas observaciones antes de continuar con nuestro recién empezado viaje cósmico–topológico.

Observación 1.1.1 (Sutilezas). Se desprende de la definición 1.1.1 que un espacio topológico no es más que un par $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$. Como es natural, salvo que sea necesario, nos referiremos a un espacio topológico por el conjunto que lo conforma, al igual que hacemos en casi todas las ramas de las matemáticas (Espacios Vectoriales, Grupos, Anillos,...). $\diamondsuit$

Introducimos ahora un poco de terminología con la que el lector no tiene más remedio que hacerse familiar.

Observación 1.1.2 (Terminología). A la familia de conjuntos $\mathcal{T}$ que conforman un espacio topológico $\mathcal{X}$ se le denomina ***topología*** de $\mathcal{X}$.

Asimismo, los conjuntos que constituyen los elementos de $\mathcal{T}$ reciben el nombre de ***abiertos*** de $\mathcal{X}$. Normalmente los denotaremos con las letras $\mathcal{U}$ o $\mathcal{W}$.

Como es evidente, nos referiremos a los elementos de $\mathcal{X}$ como ***puntos***. $\diamondsuit$

[1] "Teoría abstracta de conjuntos", publicado en 1914 por ***Félix Hausdorff*** (1868-1942).

Introducimos ahora unos pocos ejemplos para irnos familiarizando con el concepto de espacio topológico viendo lo general que puede llegar a ser.

Ejemplo 1.1.1 (Topologías)**.** Las demostraciones de que, efectivamente, se cumplen las restricciones impuestas por la definición 1.1.1, o bien ya se han hecho en cursos anteriores, o bien se dejan al lector como ejercicio inmediato.

1. Un espacio métrico (M, d) es un espacio topológico con la topología definida por los conjuntos abiertos en el sentido de los espacios métricos, es decir
$$\mathcal{T} = \{\mathcal{U} \subset M \shortparallel \forall x \in \mathcal{U} \ \exists \ \mathrm{B}_d(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}\} \tag{1.1}$$
A esta topología la llamamos ***topología usual***.

2. Una topología interesante por su simpleza, y por que dota a cualquier conjunto no vacío $\mathcal{X}$ con estructura de espacio topológico, es la llamada ***topología trivial***, que viene definida por
$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathcal{X}\} \tag{1.2}$$

3. Siguiendo la idea del ejemplo anterior, pero a la inversa, encontramos una topología que también dota de estructura topológica a cualquier conjunto no vacío $\mathcal{X}$. Esta topología viene dada por
$$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathcal{X}) \tag{1.3}$$
A esta topología la llamaremos ***topología discreta***.

4. Como último ejemplo curioso nos queda la llamada ***topología del punto***. Consiste en considerar como abiertos a todos los subconjuntos de un conjunto $\mathcal{X}$ que contengan a un determinado punto a. Es decir
$$\mathcal{T}_a = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{X} \shortparallel a \in \mathcal{U}\} \cup \{\emptyset\} \tag{1.4}$$

Con lo que ya tenemos una gama lo suficientemente amplia de ejemplos como para ir tirando. $\diamondsuit$

Para finalizar la sección observamos que en un mismo conjunto $\mathcal{X}$ podemos definir diversas topologías. Dichas topologías pueden "compararse" en determinado contexto.

Definición 1.1.2 (Relación de Orden entre Topologías)**.** Consideremos $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías definidas sobre un conjunto $\mathcal{X}$.

Si se verifica que $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$ diremos que $\mathcal{T}$ es más ***fina*** que $\mathcal{T}'$ y que $\mathcal{T}'$ es más ***gruesa*** que $\mathcal{T}$.

En lo que resta de capítulo iremos introduciendo algunos conceptos generales de los que haremos uso de forma constante a lo largo del curso.

1.2. Conjuntos Abiertos e Interior

En esta sección introducimos el concepto de entorno, cuya utilidad inmediata es caracterizar a los conjuntos abiertos de un espacio topológico $\mathcal{X}$.

Definición 1.2.1 (Entorno de un Punto)**.** Un ***entorno*** de un punto $a \in \mathcal{X}$ es un conjunto que contiene a un abierto que contiene al punto a.

Normalmente denotaremos con la letra $\mathcal{V}$ a los entornos, esta costumbre se debe a un galicismo.

Escribamos la definición de entorno 1.2.1 de forma conjuntista para que no quede ninguna duda
$$\mathcal{V} \supset \mathcal{U} \ni a \tag{1.5}$$

Como ya adelantamos, se puede usar la noción de entorno para caracterizar a los abiertos, tal y como muestra el siguiente lema.

Lema 1.2.1 (Caracterización de Abiertos)**.** *$\mathcal{U}$ es abierto si y solo si es entorno de todos sus puntos.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U}$ es abierto, entonces, dado un punto $a \in \mathcal{U}$ es evidente que $\mathcal{U}$ contiene a un abierto (él mismo) que contiene al punto a. Luego $\mathcal{U}$ es, trivialmente, entorno de todos sus puntos.

Recíprocamente, si $\mathcal{U}$ es entorno de todos sus puntos, entonces, para cada punto $a \in \mathcal{U}$ se cumple que

$$\mathcal{U} \supset \mathcal{U}_a \ni a$$

de donde se desprende que

$$\mathcal{U} \supset \bigcup_{a \in \mathcal{U}} \mathcal{U}_a =: A$$

Más aún, se da la otra contención, y además, de forma trivial, ya que todo punto de $\mathcal{U}$ pertenece a algún $\mathcal{U}_a$, luego también a la unión de todos. Luego

$$\mathcal{U} = A$$

Como la unión arbitraria de abiertos es abierto, A es abierto, con lo que se sigue el resultado. ■

En general, un conjunto será entorno de algunos de sus puntos, en principio no de todos. De esta idea surge la siguiente definición.

Definición 1.2.2 (Punto Interior)**.** Dado un conjunto $A \subset \mathcal{X}$, diremos que un punto $a \in \mathcal{X}$ es un ***punto interior*** de A si A es entorno de a.

Será algo habitual de ahora en adelante tratar de determinar el conjunto de puntos interiores de un determinado conjunto $A \subset \mathcal{X}$, a este conjunto se le denomina ***interior*** de $\mathcal{X}$.

Antes de continuar, fijemos unas cuantas notaciones que utilizaremos según el contexto para referirnos al interior de un conjunto.

$$\mathrm{Int}_{\mathcal{X}}(A) = \mathring{A} = \mathrm{Int}(A) \tag{1.6}$$

Merece la pena notar que el interior de un conjunto puede ser el conjunto vacío, así como que trivialmente se da la desigualdad conjuntista

$$\mathring{A} \subset A \tag{1.7}$$

Veamos ahora unos resultados elementales, pero a la vez cruciales, del interior de un conjunto.

Lema 1.2.2 (Apertura)**.** *El interior de un conjunto A es un abierto.*

Demostración. Para probar esto haremos uso del lema 1.2.1, es decir, trataremos de ver que es entorno de todos sus puntos.

En efecto, dado un punto $a \in \mathring{A}$, existe un abierto $\mathcal{U}_a \subset A$ de manera que $a \in \mathcal{U}_a$. Luego para ver que $\mathring{A}$ es un entorno de a basta demostrar la inclusión $\mathcal{U}_a \subset \mathring{A}$, hagámoslo.

Sea $x \in \mathcal{U}_a \subset A$, es claro que A es entorno de x, luego $x \in \mathring{A}$.

Con lo cual hemos demostrado que $\mathring{A}$ es entorno de todos sus puntos. ■

El otro resultado elemental que caracteriza al interior de un conjunto A, es que es el mayor abierto contenido en A.

Presentamos aquí los primeros pasos de la demostración por ser especialmente útiles y omnipresentes en las matemáticas en general.

Como la unión de abiertos es abierto, es claro que una forma de construir el mayor abierto contenido en cierto conjunto es, coleccionar los abiertos contenidos en dicho conjunto y unirlos. Escrito formalmente, tomamos el conjunto

$$B := \bigcup_{\mathcal{W} \subset A} \mathcal{W} \tag{1.8}$$

Es claro que $B \subset A$, ya que es una unión de conjuntos contenidos en A, además, si hubiera un abierto más grande contenido en A que B, este pertenecería a la familia de conjuntos que estamos uniendo, lo cual es absurdo.

Presentamos el final de la demostración en forma de lema.

Lema 1.2.3 (Caracterización del Interior)**.** *El interior de un conjunto A es el mayor abierto contenido en A.*

Demostración. Por el lema 1.2.2 sabemos que $\mathring{A}$ es abierto, luego, por la ecuación (1.8) solo queda probar la igualdad

$$\mathring{A} = \bigcup_{\mathcal{W} \subset A} \mathcal{W} \subset A$$

Y esto es prácticamente trivial. Veámoslo.

Por una parte, $\mathring{A}$ es un abierto contenido en A, luego está contenido en la unión de los abiertos contenidos en A.

Por otra parte, dado $x \in \bigcup_{\mathcal{W} \subset A} \mathcal{W}$, es claro que, como $\bigcup_{\mathcal{W} \subset A} \mathcal{W} \subset A$ es un abierto, A es entorno de x, luego $x \in \mathring{A}$, lo que concluye la demostración. ■

El lema 1.2.3 es bastante fuerte y produce algunos corolarios interesantes que presentamos a modo de observaciones.

Observación 1.2.1 (Propiedades del Interior)**.** Enumeramos algunas propiedades del interior.

1. El interior del interior de un conjunto es el interior de dicho conjunto. Si lo escribimos sin que suene como un trabalenguas tenemos

$$\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A} \tag{1.9}$$

Esto es trivial ya que al ser $\mathring{A}$ un abierto, el mayor abierto contenido en él es él mismo.

2. Un abierto coincide con su interior, es decir

$$A = \mathring{A} \tag{1.10}$$

Esto es cierto por la misma razón que lo es la ecuación (1.9).

3. Los interiores preservan las contenciones. O lo que es lo mismo

$$A \subset B \implies \mathring{A} \subset \mathring{B} \tag{1.11}$$

Esto es claro ya que, como B contiene a A, el mayor abierto contenido en B será en general más grande que el mayor abierto contenido en cualquier subconjunto suyo.

Esto ya nos da cierta artillería para defendernos con estos conjuntos. ♢

Con esto podemos decir que ya hemos liquidado todo lo referente a conjuntos abiertos.

1.3. Conjuntos Cerrados y Adherencia

En esta sección estudiaremos los conjuntos cerrados.

Cabe destacar que la noción de ser cerrado no es exactamente la contraria a la de ser abierto, ya que, como veremos más adelante, hay conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados así como conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez.

Definición 1.3.1 (Conjunto Cerrado)**.** Un conjuto $\mathcal{F}$ de un espacio topológico $\mathcal{X}$ se dice ***cerrado*** si su complementario, $\mathcal{X} \setminus \mathcal{F}$, es abierto.

Usualmente denotaremos a los conjuntos cerrados con las letras $\mathcal{F}$ o $\mathcal{H}$.

Usando propiedades básicas de teoría de conjuntos se obtienen algunas propiedades elementales de los conjuntos cerrados.

Lema 1.3.1 (Propiedades de los Cerrados)**.** *Dado un espacio topológico $\mathcal{X}$ se verifica*

1. *El vacío y el total son cerrados.*

2. *La intersección arbitraria de cerrados es cerrada.*

3. *La unión finita de cerrados es cerrada.*

Demostración. Vayamos caso por caso.

1. $\mathcal{X}$ es cerrado pues $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X} = \emptyset$ es abierto.

   Asimismo, $\emptyset$ es cerrado pues $\mathcal{X} \setminus \emptyset = \mathcal{X}$ es abierto.

2. $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ es cerrado ya que
$$\mathcal{X} \setminus \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i \right) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{X} \setminus \mathcal{F}_i$$
   es abierto por ser la unión arbitraria de abiertos un abierto.

3. $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$ es cerrado, basta tomar el complementario y ver que es abierto por ser intersección finita de abiertos.
$$\mathcal{X} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{X} \setminus \mathcal{F}_i$$

Con lo que concluye la demostración. ■

Observación 1.3.1 (Abiertos y Cerrados a la Vez)**.** Basta con mirar con atención este lema 1.3.1 para darse cuenta de que hemos encontrado dos conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez, el vacío y el total. ♢

Introducimos ahora un concepto elemental pero interesante, el concepto de puntos adherentes y adherencia.

Definición 1.3.2 (Punto Adherente)**.** Un punto $a \in \mathcal{X}$ se dice ***adherente*** a un conjunto $A \subset \mathcal{X}$ si todo entorno de a corta al conjunto A.

Como ya es habitual, coleccionaremos los puntos adherentes a un conjunto dado y estudiaremos las propiedades del conjunto de puntos adherentes. Introduzcamos una definición para verlo formalmente.

Definición 1.3.3 (Adherencia)**.** Se define la ***adherencia*** o ***clausura*** de un conjunto $A \subset \mathcal{X}$ como el conjunto de los puntos adherentes de A.

Usualmente denotaremos a la adherencia de alguna de las siguientes formas
$$\mathrm{Adh}_{\mathcal{X}}(A) = \mathrm{Adh}(A) = \overline{A} \tag{1.12}$$

Vamos a desgranar ahora una serie de resultados que nos van a hacer ver que adherencia e interior de un conjunto son, de alguna manera, conceptos duales.

Comenzamos en primer lugar con algo casi trivial.

Observación 1.3.2 (Adherencia y Conjunto)**.** Es claro que se verifica que
$$A \subset \overline{A} \tag{1.13}$$

Esto es debido a que, evidentemente, cualquier entorno de a contiene al punto a, luego, por definición, corta al conjunto A. ♢

Lema 1.3.2 (Clausura de la Adherencia)**.** *La adherencia de un conjunto A es un cerrado.*

Demostración. Usaremos lo único que tenemos, es decir, la definición de conjunto cerrado. Por ende, probaremos que $\mathcal{X} \setminus \overline{A}$ es abierto, para lo cual veremos que es entorno de todos sus puntos, haciendo buen uso del lema 1.2.1.

Dado $x \in \mathcal{X} \setminus \overline{A}$, como x no es un punto adherente, entonces existirá un entorno $\mathcal{V}(\ni x)$, el cual podemos escoger abierto sin pérdida de generalidad tal que se verifica
$$\mathcal{V} \cap A = \emptyset$$

Si consiguiéramos demostrar que se de la igualdad

$$\mathcal{V} \cap \overline{A} = \emptyset$$

habríamos acabado ya que tendríamos que $x \in \mathcal{V} \subset \mathcal{X} \setminus \overline{A}$, que es, por definición que $\mathcal{X} \setminus \overline{A}$ sea entorno de x.

En efecto, la comprobación de esta igualdad es muy fácil, ya que, si tomamos un $y \in \mathcal{V}$, al ser $\mathcal{V}$ abierto, es entorno de y.

Por tanto, tendríamos que el punto y no es adherente, ya que existe un entorno, el propio $\mathcal{V}$ que no corta con el conjunto A, incumpliendo así la definición 1.3.2. ■

Continuamos esta dualización de conceptos dándonos cuenta de que la adherencia es el menor cerrado que contiene a A. Como antes, parte de la demostración se basa en un procedimiento estándar que pasamos a explicar.

Es fácil darse cuenta de que, como la intersección arbitraria de cerrados es un cerrado, el menor conjunto cerrado que contiene a uno dado puede ser construido de la siguiente manera

$$B := \bigcap_{\mathcal{H} \supset A} \mathcal{H} \tag{1.14}$$

En efecto es un conjunto que contiene a A ya que todos los conjuntos de la familia a intersecar contienen a A, además, es el menor de ellos, ya que, de haber uno más pequeño, pertenecería a la familia que se está intersecando, lo cual es absurdo (¡compruébese!).

Presentamos, otra vez, en forma de lema, el resto de la demostración.

Lema 1.3.3 (Caracterización de la Adherencia)**.** *La adherencia de un conjunto A es el menor cerrado que contiene a A.*

Demostración. Por la ecuación (1.14) la demostración se reduce a comprobar que

$$\overline{A} = \bigcap_{\mathcal{H} \supset A} \mathcal{H}$$

Y esto es una comprobación inmediata.

Por un lado, como $\overline{A}$ es un cerrado que contiene a A, es claro que $\overline{A}$ se encuentra en la familia a intersecar, luego contiene a la intersección de la familia.

Recíprocamente, dado un punto adherente x, si hubiera un conjunto $\mathcal{H}$ de la familia tal que $x \notin \mathcal{H}$, entonces tendríamos que $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{H} \subset \mathcal{X} \setminus A$.

Como $\mathcal{H}$ es cerrado, $\mathcal{X} \setminus \mathcal{H}$ es abierto, y, por tanto existirá un entorno $\mathcal{V}$ de x de manera que

$$x \in \mathcal{V} \subset \mathcal{X} \setminus \mathcal{H} \subset \mathcal{X} \setminus A$$

Y, por ende, $\mathcal{V} \cap A = \emptyset$, contra la definición de punto adherente. ■

Presentamos a continuación unas cuantas igualdades conjuntistas que pueden resultar bastante útiles al lector.

Proposición 1.3.4 (Complementario de la Adherencia)**.**

$$\mathcal{X} \setminus \overline{A} = \operatorname{Int}(\mathcal{X} \setminus A)$$

Demostración. Procedemos por doble contención.

$\boxed{\subset}$ Sea $z \in \mathcal{X} \setminus \overline{A}$. Como z no es adherente a A, por definición (1.3.3) habrá un entorno $\mathcal{V}_z$ de z de manera que $\mathcal{V}_z \cap A = \emptyset$. En particular, podremos extraer un entorno abierto $\mathcal{U}_z$ tal que verifique

$$\mathcal{U}_z \cap A = \emptyset$$

Tratamos de demostrar que z es punto interior de $\mathcal{X} \setminus A$, esto es, por definición (1.2.2), que $\mathcal{X} \setminus A$ sea entorno de z, esto a su vez significa que hay un abierto $\mathcal{U}'_z$ contenido en $\mathcal{X} \setminus A$ de forma que $z \in \mathcal{U}'_z$. Así pues el problema se reduce a encontrar dicho entorno, sin embargo, es trivial comprobar el entorno $\mathcal{U}_z$ anteriormente definido cumple los requisitos.

$\boxed{\supset}$ Sea $z \in \text{Int}(\mathcal{X} \setminus A)$, demostremos que z no es adherente a A, para lo cual debemos encontrar un entorno de z, al que llamaremos $\mathcal{V}_z$, de manera que no corte al conjunto A. Esto es trivial, ya que z es punto interior de $\mathcal{X} \setminus A$, luego el propio $\mathcal{X} \setminus A$ es entorno de z, y, evidentemente, no corta a A.

Con lo que concluye la prueba. ∎

Insistiendo es esta dualidad vía complementación entre abiertos y cerrados, presentamos un corolario inmediato.

Corolario 1.3.5 (Complementario del Interior)**.**

$$\mathcal{X} \setminus \mathring{B} = \text{Adh}(\mathcal{X} \setminus B)$$

Demostración. Nos limitaremos a comprobar que ambos conjuntos tienen el mismo complementario. En efecto, por una parte

$$\mathcal{X} \setminus (\mathcal{X} \setminus \mathring{B}) = \mathring{B}$$

Por otro lado, denotando $A := \mathcal{X} \setminus B$ tenemos

$$\mathcal{X} \setminus \text{Adh}(\mathcal{X} \setminus B) = \mathcal{X} \setminus \overline{A} \overset{\text{Prp.1.3.4}}{=} \text{Int}(\mathcal{X} \setminus A) = \text{Int}(\mathcal{X} \setminus (\mathcal{X} \setminus B)) = \text{Int}(B) = \mathring{B}$$

Con lo que se tiene el resultado. ∎

Una última identidad notable, un poco más profunda que las anteriores es la que relaciona la unión de las adherencias con la adherencia de las uniones.

Proposición 1.3.6 (Unión de Adherencias)**.** *La unión de las adherencias es la adherencia de las uniones.*

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Demostración. Procedemos por doble contención.

$\boxed{\subset}$ Dado $z \in \overline{A \cup B}$, todo entorno $\mathcal{V}_z$ de z corta a $A \cup B$. Veamos que z es, o bien adherente a A, o bien adherente a B (quizá a ambos). Para ello supondremos que no es adherente a ninguno de ellos, es decir, que existe un entorno $\mathcal{W}_z$ de z que no corta ni a A ni a B. Si este entorno existiera tampoco cortaría a la unión (compruébese), lo cual es absurdo.

$\boxed{\supset}$ Dado un punto $z \in \overline{A} \cup \overline{B}$, veamos que todo entorno de $\mathcal{V}_z$ de z corta a $A \cup B$. Si no lo hiciera, para cada punto $x \in \mathcal{V}_z$, x no estaría en A, luego $A \cap \mathcal{V}_z = \emptyset$. Análogamente ocurriría con B, lo cual contradice nuestra hipótesis.

Con lo que finaliza la demostración. ∎

Por supuesto, este resultado presenta un dual inmediato.

Corolario 1.3.7 (Intersección de Interiores)**.** *El interior de la intersección es la intersección de los anteriores.*

$$\text{Int}(A \cap B) = \mathring{A} \cap \mathring{B}$$

Demostración. Comprobaremos, como ya hicimos anteriormente, que ambos conjuntos tienen el mismo complementario.

Por un lado

$$\mathcal{X} \setminus \text{Int}(A \cap B) = \text{Adh}(X \setminus (A \cap B))$$

Recíprocamente

$$\begin{aligned}\mathcal{X} \setminus (\mathring{A} \cap \mathring{B}) = (\mathcal{X} \setminus \mathring{A}) \cup (\mathcal{X} \setminus \mathring{B}) = \text{Adh}(\mathcal{X} \setminus A) \cup \text{Adh}(\mathcal{X} \setminus B)) = \\ = \text{Adh}((\mathcal{X} \setminus A) \cup (\mathcal{X} \setminus B)) = \text{Adh}(X \setminus (A \cap B))\end{aligned}$$

Así, el resultado se sigue. ∎

El resultado análogo a la proposición 1.3.6 con la intersección no se da, tal y como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.1 (Cuadrados Abiertos). Si consideramos los conjuntos

$$A := (0,1) \times (0,1) \qquad\qquad B := (1,2) \times (0,1)$$

En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, es fácil demostrar (se deja al lector) que $\overline{A \cap B} = \emptyset$ mientras que $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\} \times [0,1]$. ♢

Vistas todas estas igualdades, al igual que hicimos en la observación 1.2.1, caractericemos los conjuntos cerrados a partir del concepto de adherencia.

Proposición 1.3.8 (Cerrados y Adherencia). *Un conjunto es A cerrado si y solo si coincide con su adherencia. Es decir*

$$A = \overline{A}$$

Demostración. Si A es cerrado, como $\overline{A}$ es el mayor cerrado contenido en A, es claro que se tiene que dar la igualdad $A = \overline{A}$.

Recíprocamente, si se da la igualdad $A = \overline{A}$, como $\overline{A}$ es cerrado, también lo será A. ■

Añadimos una observación final trivial, simplemente por curiosidad.

Observación 1.3.3 (Doble Adherencia). Dado un conjunto A, se tiene que

$$\overline{A} = \overline{\overline{A}}$$

Esto es inmediato ya que, como $\overline{A}$ es un cerrado, coincide con su adherencia. ♢

1.4. Puntos de Acumulación y Conjuntos Densos

En esta sección presentamos el concepto de punto de acumulación, que es muy útil para trabajar con sucesiones, como veremos más adelante. Además, definiremos la idea de que un conjunto sea denso de varias maneras que nos serán muy útiles a la hora de resolver problemas.

Definición 1.4.1 (Punto de Acumulación). Dado un conjunto A en un espacio topológico $\mathcal{X}$, se dice que un punto $x \in \mathcal{X}$ es un ***punto de acumulación*** de A si todo entorno de $\mathcal{V}_x$ de x verifica que

$$(\mathcal{V}_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

Presentemos un poco de terminología para el conjunto de los puntos de acumulación.

Definición 1.4.2 (Conjunto Derivado). Al conjunto de los puntos de acumulación de un conjunto A se le denomina ***conjunto derivado***. Usualmente denotaremos al conjunto derivado por A'.

Observación 1.4.1 (Entornos Perforados). Cuando consideramos un entorno $\mathcal{V}_x$ de un punto $x \in \mathcal{X}$, a veces (sobre todo cuando hablamos de puntos de acumulación) es útil no considerar el entorno entero, sino el entorno salvo un punto.

Cabe destacar que al conjunto $\mathcal{V}_x \setminus \{x\}$ se le suele denominar ***entorno perforado*** o ***entorno pinchado*** de x. ♢

Una propiedad interesante de los conjuntos derivados se presenta en el siguiente lema.

Lema 1.4.1 (Descomposición de la Adherencia).

$$\overline{A} = A \cup A'$$

Demostración. La demostración es inmediata, procedemos por doble contención.

$\boxed{\subset}$ Veamos que todos los puntos de $\overline{A} \setminus A$ están en A'. En efecto, dado un $x \notin A$ adherente a A se tiene que para todo entorno $\mathcal{V}_x$ de x

$$\mathcal{V}_x \cap A \neq \emptyset$$

Como $x \notin A$ se tiene que $(\mathcal{V}_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, cumpliendo la definición de punto de acumulación.

$\boxed{\supset}$ Es evidente que $A \subset \overline{A}$, luego solo queda comprobar que $A' \subset \overline{A}$. Esto es trivial y se deja al lector la comprobación.

Como queríamos demostrar. ■

Parémonos un segundo a reflexionar sobre las implicaciones de este resultado.

Observación 1.4.2 (Acumulación y Cerrados)**.** Es claro que un conjunto es cerrado si y solo si contiene a todos sus puntos de acumulación.

Esto es consecuencia directa de la proposición 1.3.8 y el lema 1.4.1. ♢

Cabe señalar que, claramente, esta descomposición, en general, no es un partición, tal y como muestra el siguiente sencillo ejemplo.

Ejemplo 1.4.1 (Disco)**.** Si consideramos el disco unidad D en $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, es fácil demostrar que sus puntos de acumulación coinciden con su adherencia, con lo que obtenemos que

$$\overline{D} \setminus D \subsetneq D' \tag{1.15}$$

En general (compruébese) se verifica que $\overline{A} \setminus A \subset A'$. ♢

Según uno echa un ojo a la definición 1.4.1 le dan ganas de ver qué pasa con aquellos puntos que no cumplen esta definición por los pelos. Para esto introducimos la siguiente definición.

Definición 1.4.3 (Puntos Aislados)**.** Se llaman ***puntos aislados*** de un conjunto A, a aquellos puntos de A que no son puntos de acumulación. Es decir, a los puntos $x \in A$ que poseen un entorno que cumple

$$\mathcal{V}_x \cap A = \{x\}$$

Por el momento no usaremos mucho esta definición, aunque la dejamos aquí aparcada por si las moscas.

Pasamos hora a definir el concepto de densidad de un conjunto.

Definición 1.4.4 (Conjunto Denso)**.** Decimos que un conjunto A es ***denso*** en un espacio topológico $\mathcal{X}$ si la adherencia de A es el propio espacio $\mathcal{X}$. Es decir

$$\overline{A} = \mathcal{X}$$

Esta definición es poco manejable en algunas circunstancias. Lo bueno que tiene es que, con relativamente poco esfuerzo podemos dar una definición equivalente en unos términos un poco más sencillos, tal y como muestra la siguiente proposición.

Proposición 1.4.2 (Caracterización de la Densidad)**.** *Son equivalentes:*

1. *A es denso.*
2. *Todo abierto no vacío $\mathcal{U}$ contiene algún punto de A.*

Demostración. Veamos ambas implicaciones

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sea $\mathcal{U}$ un abierto de $\mathcal{X}$. Por ser $\mathcal{U}$ abierto, es entorno de todos sus puntos. En particular, si $x \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ es entorno de x, luego, por ser A denso, $\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $x \in X$ un punto cualquiera, tomemos un entorno arbitrario suyo $\mathcal{V}_x$, por definición de entorno, habrá un abierto $\mathcal{U}_x$ que verifique

$$x \in \mathcal{U}_x \subset \mathcal{V}_x$$

Como $\mathcal{U}_x$ es abierto, contiene, por hipótesis, algún punto de A, luego $\mathcal{V}_x \cap A \neq \emptyset$, cumpliendo así x la definición de punto adherente.

Con lo que ya hemos terminado. ■

De forma natural surge preguntarse si, como en el caso conocido de $\mathbb{R}^n$, los espacios topológicos en general poseen algún subconjunto numerable denso. La respuesta a esta pregunta es no (como veremos más adelante) razón por la cual surge la siguiente definición.

Definición 1.4.5 (Espacio Topológico Separable)**.** Se dice que un espacio topológico $\mathcal{X}$ es ***separable*** si posee un subconjunto numerable denso.

Para afianzar la idea de que en la topología la intuición no parará de tendernos trampas, presentamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4.2 (Espacios Separables)**.** Recordamos en primer lugar por qué $\mathbb{R}^n$ es separable y después presentamos un ejemplo contraintuitivo.

1. $\mathbb{Q}^n$ es un conjunto denso y numerable en $\mathbb{R}^n$ con la topología usual. La numerabilidad de $\mathbb{Q}^n$ es consecuencia de la numerabilidad de $\mathbb{Q}$ (inducción). Asimismo, la densidad puede probarse fácilmente por inducción sobre n.

2. Dado un conjunto cualquiera $\mathcal{X}$ equipado con la topología de un punto $a \in X$, el espacio topológico $(\mathcal{X}, \mathcal{T}_a)$ es separable (nótese que a es denso y finito).

Así se ve que, en espacios topológicos puestos con un poco de mala baba, pasan cosas que nos descarajan la intuición. ♢

Para finiquitar esta sección presentamos el concepto de frontera de un conjunto, que, de momento, al igual que el concepto de punto aislado, quedará en el baúl de los recuerdos.

Definición 1.4.6 (Frontera de un Conjunto)**.** Definimos la frontera de un conjunto como los puntos adherentes al conjunto que no son interiores. Dicho de otra forma (e introduciendo notación de paso)

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} \tag{1.16}$$

Es interesante comprobar que, como parece intuitivo, un conjunto y su complementario comparten frontera.

Lema 1.4.3 (Frontera y Complementación)**.**

$$\mathrm{Fr}(\mathcal{X} \setminus A) = \mathrm{Fr}(A)$$

Demostración. Basta hacer uso de algunas de las igualdades conjuntistas probadas anteriormente para darse cuenta de que

$$\mathrm{Fr}(\mathcal{X} \setminus A) = \overline{\mathcal{X} \setminus A} \setminus \mathrm{Int}(\mathcal{X} \setminus A) = \overline{\mathcal{X} \setminus A} \setminus (\mathcal{X} \setminus \overline{A}) = (\mathcal{X} \setminus \mathring{A}) \setminus (\mathcal{X} \setminus \overline{A})$$

Sabiendo esto, solo queda comprobar la igualdad conjuntista

$$\overline{A} \setminus \mathring{A} = (\mathcal{X} \setminus \mathring{A}) \setminus (\mathcal{X} \setminus \overline{A})$$

La cual es trivial. Si tenemos un punto adherente y no interior, es evidente que este no pertenece al complementario de la adherencia, además, por ser un punto no interior, pertenecerá al complementario del interior.

La igualdad se da por que podemos repetir esta demostración a la inversa (compruébese). ■

Una última cosa que merece la pena observar es que la frontera de un conjunto puede ser vista como la intersección de las adherencias del conjunto y su complementario.

Lema 1.4.4 (Frontera y Adherencia)**.**

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{\mathcal{X} \setminus A}$$

Demostración. Sabemos que se cumple

$$\overline{A} \cap \overline{\mathcal{X} \setminus A} = \overline{A} \cap (\mathcal{X} \setminus \mathring{A})$$

Así pues basta comprobar que $\overline{A} \cap (\mathcal{X} \setminus \mathring{A}) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$, lo cual es evidente. ■

1.5. Base de entornos

Al igual que en los espacios vectoriales, para estudiar las aplicaciones lineales nos bastaba con fijarnos en qué les ocurría a os vectores de una base, en los espacios topológicos desarrollamos un concepto similar.

Definición 1.5.1 (Base de Entornos de un Punto)**.** Una ***base de entornos*** de un punto $a \in \mathcal{X}$ es una colección $\mathcal{V}_a$ de entornos de a tales que todo entorno de a contiene a alguno de $\mathcal{V}_a$.

Como veremos a continuación, el concepto de base de entornos de un punto nos permitirá estudiar la topología alrededor de ese punto.

Veamos unos cuantos ejemplos para aclarar el concepto.

Ejemplo 1.5.1 (Topología Usual)**.** Consideremos el espacio topológico $\mathbb{R}^n$ con la topología usual. Asimismo consideremos un punto $a \in \mathbb{R}^n$.

Algunos ejemplos naturales de bases de entornos de a son

1. $\mathcal{V}_a := \{\mathrm{B}(a, \varepsilon) \shortparallel \varepsilon > 0\}$, la base usual de entornos abiertos.

2. $\overline{\mathcal{V}_a} := \{\overline{\mathrm{B}}(a, \varepsilon) \shortparallel \varepsilon > 0\}$, la base usual de entornos cerrados.

La comprobación de que efectivamente son bases de entornos es evidente y se deja al lector (simplemente hay que usar la definición de abierto en el espacio topológico $\mathbb{R}^n$ usual).

Una base de entornos un poco más interesante es la siguiente

$$\mathcal{W}_a := \left\{\mathrm{B}\left(a, \frac{1}{k}\right) \shortparallel k \geq 1\right\} \tag{1.17}$$

Lo interesante de esta base es que es numerable. Más adelante estudiaremos cuándo es posible extraer bases de entornos numerables de un punto.

De nuevo, la comprobación de que efectivamente es un base es evidente, basta usar la propiedad arquimediana de los números reales. ♢

Presentemos otro ejemplo para que el elector aprenda a digerir este concepto en ambientes un poco más abstrusos y hostiles.

Ejemplo 1.5.2 (Topología del Punto)**.** Consideramos un conjunto no vacío $\mathcal{X}$ y un punto $a \in \mathcal{X}$, a partir de aquí construimos el espacio topológico $\mathcal{X}$ con la topología del punto a.

Es curioso observar que una base de entornos de a es el propio conjunto $\{a\}$.

Esto es debido a que en la topología del punto $\{a\}$ es un abierto, y todos los abiertos del espacio topológico contienen a $\{a\}$, luego todo entorno de a contiene a $\{a\}$ (que es entorno de a).

Este último párrafo puede parecer un trabalenguas de mal gusto, pero animamos al lector a que lo compruebe por su cuenta. ♢

Para concluir esta pequeña sección presentamos una definición sobre la cual trabajaremos con detalle en el capítulo 5.

Definición 1.5.2 (I Axioma de Numerabilidad)**.** Decimos que un espacio topológico $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ es ***primer axioma de numerabilidad*** (o simplemente I Axioma) si todo punto posee una base de entornos numerable.

Visto lo visto salta a la vista que algunos de los espacios topológicos que hemos visitado desde nuestra nave del misterio cumplen el primer axioma.

Ejemplo 1.5.3 (Espacios I Axioma)**.** A la luz del ejemplo 1.5.1 sabemos que $\mathbb{R}^n$ con la topología usual verifica el primer axioma.

Asimismo el ejemplo 1.5.2 nos dice (aunque no directamente, hacen falta algunas comprobaciones que se dejan al lector) que cualquier espacio topológico con la topología de un punto $a \in \mathcal{X}$ verifica el primer axioma de numerabilidad (de hecho podemos encontrar bases finitas de un único entorno). ♢

En general, los espacios primer axioma son importantes dado que en ellos podremos fabricar sucesiones (y todos los potentes argumentos que se derivan de este hecho).

Por suerte o por desgracia, hay espacios que no verifican el primer axioma. Como veremos más adelante, el espacio topológico de las funciones continuas (con cierta topología) no es primer axioma.

Finalizamos la sección observando que, dada una base de entornos numerable de un punto, podemos obtener una ***base encajada***. Y además, ¡agárrense criaturas! por que la demostración de este hecho es constructiva.

Observación 1.5.1 (Extracción de una Base Encajada)**.** Dada una base numerable de un punto $a \in \mathcal{X}$, a la que denotamos

$$\mathcal{V}_a := \{\mathcal{V}_i \shortparallel i \in \mathbb{N}\}$$

Es claro que la base $\mathcal{V}_a^* := \{\mathcal{W}_i := \bigcap_{j=1}^{i} \mathcal{V}_j \shortparallel i \in \mathbb{N}\}$ es encajada.

Esto es, $\mathcal{W}_k \subset \mathcal{W}_l$ para todo $k \geq l$ ♢

Usaremos esta construcción de forma asidua cuando estudiemos las sucesiones con detalle.

1.6. Base de abiertos

Definición 1.6.1 (Base de abiertos)**.** Una ***base*** de $\mathcal{T}$ es una colección $\mathcal{B}$ de abiertos, tal que todo abierto de $\mathcal{T}$ es unión de abiertos de $\mathcal{B}$

Veamos que esta definición nos permite reformular las bases de entornos vistas en (1.5.1), y que caracterizaremos de la siguiente manera:

Proposición 1.6.1 (Reformulación de Bases de Entornos)**.** *Sea x un punto de $\mathcal{X}$ y sea $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$, entonces $\mathcal{B}_x$ es una base de entornos.*

Demostración. Veamos que esto ocurre. Para ello todo entorno de x tiene que contener a alguno de $\mathcal{B}^x$. Sea $\mathcal{V}^x$ un entorno de $x \implies \exists\, \mathcal{U}$ abierto tal que $x \in \mathcal{U} \subset \mathcal{V}^x$. Ahora, como $\mathcal{B}$ es base de abiertos $\implies \mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} B_i \implies \exists B_i \subset \mathcal{B}^x$ tal que $x \in B_i \subset \mathcal{V}^x$, luego cumple lo buscado.

Ahora veamos... ■

Veremos otra condición que podremos usar en lugar de la definición de bases de abiertos 1.6.1.

Observación 1.6.1 (Reformulación de Bases de Abiertos)**.** Para todo abierto $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}$ y todo punto $x \in \mathcal{U}$, existe un $\mathcal{V} \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. ♢

Demostración. Si se cumple esto, y tomamos $\mathcal{U}$ abierto de de $\mathcal{X}$, entonces para todo $x \in \mathcal{U}$ tomamos $\mathcal{V}^x \in \mathcal{B}$ de tal forma que $x \in \mathcal{V}^x \subset \mathcal{U}$. Al hacer esto, $\mathcal{U}$ coincide con $\bigcup_{x \in \mathcal{U}} V^x$, por lo que cualquier abierto que tomemos de $\mathcal{X}$ es unión de elementos de la base. La otra implicación es directa. ■

Tras haber visto bases de abiertos 1.6.1, y bases de entornos 1.5.1, vamos a plantear el II axioma de numerabilidad, que, aunque será tratado con profundidad en el capítulo 5, expone muy bien las ideas recién tratadas.

Definición 1.6.2 (II axioma de numerabilidad)**.** Diremos que $\mathcal{X}$ es ***segundo axioma*** de numerabilidad (o simplemente II axioma) si tiene una base numerable.

Ejemplo 1.6.1 (Bases de abiertos)**.** Veamos varios ejemplos de base de abiertos en el espacio topológico $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_n)$, con $\mathcal{T}_n$ la topología usual:

1. $\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) \ : \ x \in \mathbb{R}^n \ y \ \varepsilon > 0\}$
2. $\mathcal{B} = \{B(x, \frac{1}{k}) \ : \ x \in \mathbb{R}^n \ y \ k \geq 1\}$
3. $\mathcal{B} = \{B(q, r) \ : \ q \in \mathbb{Q}^n \ y \ r \in \mathbb{Q}\}$

♢

Observación 1.6.2. Ser II axioma implica ser I axioma. ♢

Demostración. Si $\mathcal{B}$ es una base numerable para la topología de $\mathcal{X}$, entonces si tomamos el subconjuto de $\mathcal{B}$ formado por los elementos de la base que contienen al punto x entonces es una base numerable en x. Luego todo punto tiene una bsae numerable, por lo que es I axioma. ■

Hemos de comentar que el II axioma es mucho más fuerte que el I axioma. De hecho no todos los espacios métricos lo cumplen. Será útil ya que muchos espacios que no son familiares lo cumplen, y nos ayudará para probar algunos teoremas.

Proposición 1.6.2. *Una colección de $\mathcal{B}$ de subconjuntos de un conjunto $\mathcal{X}$ es base de una (única) topología en $\mathcal{X}$ si y sólo si:*

1. $\mathcal{X} = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$
2. *Para todo B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$ y para todo $x \in B_1 \cap B_2$, $\exists B \in \mathcal{B}$ y $B \subset B_1 \cap B2$ tal que $x \in B$.*

Demostración.

1. Como $\mathcal{X}$ es abierto, es unión de elementos de la base. Por lo tanto X es la unión de todos los elementos de $\mathcal{B}$.
2. Supongamos que B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$ y que $x \in B_1 \cap B_2$. Como B_1 y B_2 son abiertos, su intersección es abierta. Por 1.6.1, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

■

Ejemplo 1.6.2 (Topología de Sorgenfrey en $\mathbb{R}$)**.** Sea el espacio topológico $(\Re, \mathcal{T}_s)$ espacio topológico, con $\mathcal{T}_s$ la llamada topología de Sorgenfrey. Veamos en que consiste esta topología.

Si tomamos en $\mathbb{R}$ la colección de intervalos $[a, b)$, este conjunto es base de la llamada ***topología de Sorgenfrei***.

Demostración. Para ver que ocurre esto verificaremos que esta base verifica 1.6.2

Denotemos $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Que $\mathcal{B}$ cumple que la unión de todos sus elementos genera el total es obvio($\mathbb{R}$ es la unión de estos intervalos).

Veamos que cumple la segunda propiedad. Sea $\mathcal{B}_1 = [a, b)$ y $\mathcal{B}_2 = [a', b')$ y sea $x \in B_1 \cap \mathcal{B}_2$ vemos claramente que la intersección de estos dos intervalos sigue siendo de la misma forma, y tendrá como extremo inferior $a" = max\{a, a'\}$ y superior $b" = min\{b, b'\}$ luego es el intervalo $B_1 \cap \mathcal{B}_2 = [a", b")$, por lo que pertenece a la base y se cumple que $x \in B \subset B_1 \cap \mathcal{B}_2$. Luego llegamos a lo buscado. ♢

Veremos una serie de propiedades extra de esta topología, que son muy ilustrativas.

1. Los abiertos de la topología usual están contenidos en la topología de Sorgenfrei.

   Demostración. Sea el intervalo (a, b). Describamoslo en función de intervalos cerrado-abierto. $(a, b) = \cup_{k\geq 1}[a + \frac{1}{k}, b)$. Sabemos que esta unión está en la topología de Sorgenfrei luego ya está. ♢

   Con esto observamos que la topología de Sorgenfrei es más fina que la usual ($\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_s$) Con esto sabemos que si un conjunto no es compacto con la topología de Sorgenfrei tampoco lo es con la usual, ya que si con una que tiene los mismo y más abiertos no podemos extraer un subrecubrimiento finito,difícilmente podremos hacerlo con una más pequeña.

2. Es una base de conjuntos abiertos y cerrados (lo que se llama una topología "*clopen*")

   Demostración. Ver esto es muy sencillo. Si tenemos el abierto (en esta topología) $[a, b)$, tenemos que su complementario es $(-\infty, a)$ que es un abierto de la usual, luego de la de Sorgenfrei, y $[b, \infty)$ que es $[b, \infty) = \cup_{k\geq 1}[b, b + k)$ que es un abierto Sorgenfrei. Luego el intervalo $[a, b)$ es un abierto-cerrado. ♢

3. No hay conexos(salvo los puntos).
4. No es II axioma, ya que en todo conjunto de la base hay racional. SI es separable.
5. Es I axioma (tomamos $[a, a + \frac{1}{k})$). Es Lindelöf.

♢

1.7. Topología relativa

Definición 1.7.1 (Topología relativa)**.** Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y un subconjunto $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$. Definimos la ***topología relativa*** en $\mathcal{Y}$ como $\mathcal{T}\restriction_{\mathcal{Y}} = \{U \cap \mathcal{Y} \colon U \in \mathcal{T}\}$. Se verifica que esta es una topología en $\mathcal{Y}$, y entonces decimos que $(\mathcal{Y}, \mathcal{T}\restriction_{\mathcal{Y}})$ es un ***subespacio topológico***.

Gracias a esta definición, siempre que hablemos en adelante de un subconjunto de $\mathcal{X}$ y necesitemos una topología definida en él, se usará por defecto la relativa para dotarlo de estructura de espacio topológico.

Vamos a ver ahora que la topología relativa también preserva esa "dualidad" de la que hablábamos antes entre abiertos y cerrados. En particular, también los cerrados relativos son las intersecciones de los cerrados de $\mathcal{X}$.

Proposición 1.7.1. *Los cerrados de $\mathcal{Y}$ son las intersecciones de los cerrados de $\mathcal{X}$ con $\mathcal{Y}$. Es decir, $C \subset \mathcal{Y}$ es cerrado si existe $F \subset \mathcal{X}$ cerrado tal que $C = F \cap \mathcal{Y}$.*

Demostración. Sea $W \subset \mathcal{X}$ un abierto de X. Entonces, $\mathcal{X} \setminus W$ es cerrado, y queremos ver si $C = \mathcal{Y} \cap (\mathcal{X} \setminus W)$ es cerrado. Pero esto es lo mismo que ver si $\mathcal{Y} \setminus F$ es abierto, y:

$$\mathcal{Y} \setminus C = \mathcal{Y} \setminus (\mathcal{Y} \cap (\mathcal{X} \setminus W)) = \mathcal{Y} \setminus ((\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}) \setminus W) = \mathcal{Y} \setminus (\mathcal{Y} \setminus W) = \mathcal{Y} \cap W$$

donde para las igualdades anteriores se han utilizado relaciones conocidas de teoría de conjuntos. Entonces, como $\mathcal{Y} \cap W$ es abierto por definición de topología relativa, $\mathcal{Y} \setminus C$ también lo es, y por tanto C es cerrado. ■

Observación 1.7.1. En particular, se verifican las siguientes propiedades:

1. Sea $A \subset \mathcal{X}$ abierto. Si $A \cap U$ es un abierto en la topología $\mathcal{T}\restriction_A$ (es decir, U es abierto en $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$), entonces $A \cap U$ es también abierto en $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$.
2. Sea $F \subset \mathcal{X}$ cerrado. Si $F \cap C$ es un cerrado en la topología $\mathcal{T}\restriction_F$ (es decir, C es cerrado en $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$), entonces $F \cap C$ es también cerrado en $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$. ♢

Capítulo 2

Continuidad

La continuidad es la propiedad por excelencia que queremos que nuestras funciones verifiquen. En este breve capítulo vamos a generalizar la noción de continuidad que ya conocemos y dominamos para espacios como $\mathbb{R}^n$, de forma que la podamos aplicar a cualquier espacio métrico conocido. La continuidad, además, será clave para definir más adelante la noción de homeomorfismo: las aplicaciones que preservan las propiedades topológicas de un espacio dado.

2.1. Continuidad en un punto

En el espacio euclídeo usual, cuando teníamos una función $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, con un punto $a \in A$, decíamos que f es continua en a si y solo si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que si $x \in A, \|x - a\| < \delta$, entonces $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. Podemos reescribir esta condición como que si $x \in A \cap \mathrm{B}(a, \delta)$, entonces $f(x) \in \mathrm{B}(f(a), \varepsilon)$. Pero de nuevo, esto es equivalente a que para cualquier B^a (bola centrada en a), $A \cap \mathrm{B}^a \subset f^{-1}(\mathrm{B}^{f(a)})$ para cierta $\mathrm{B}^{f(a)}$.

De esta forma, vamos a proceder ahora a generalizar esta definición para espacios topológicos arbitrarios.

Definición 2.1.1. Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ espacios topológicos, $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. f es ***continua*** en $x_0 \in \mathcal{X}$ si para todo entorno $V^{f(x_0)}$ la imagen inversa $f^{-1}(V^{f(x_0)})$ es entorno de x_0.

Observación 2.1.1. Si la topología de $\mathcal{X}$ es grosera, o la topología de $\mathcal{Y}$ es muy fina, la continuidad suele ser más fácil de comprobar. Podemos pensar en $\mathcal{X}$ con la topología discreta como ejemplo de lo primero y en $\mathcal{Y}$ con la topología trivial como ejemplo de lo segundo:

1. En la topología discreta, cualquier conjunto es abierto, con lo cual $\{x_0\}$ es abierto y por tanto cualquier conjunto que contenga a x_0 es entorno suyo. Entonces, para cualquier entorno de $f(x_0)$ su imagen inversa contendrá a x_0 y por lo anterior será entorno suyo. Es decir, cualquier función que nazca en $\mathcal{X}$ con la topología discreta es continua.

2. En la topología trivial, los únicos abiertos son el vacío y el total, con lo cual dado un punto su único entorno es el total. Entonces, si $\mathcal{Y}$ con la topología trivial es el espacio de llegada de una función f, f es continua, pues la imagen inversa del total es el total, y este es abierto (y por tanto entorno) en cualquier topología. ♢

De la misma forma que podemos estudiar la continuidad para unas ciertas topologías concretas, podemos estudiarla para algunas funciones concretas sin limitarnos a una topología particular. En particular, nos van a interesar la función constante y la función identidad.

Observación 2.1.2.

1. Si $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es la aplicación constante $f = b$, entonces f es continua con cualquier topología. En efecto, la imagen inversa de cualquier subconjunto (y en particular de cualquier entorno) de $\mathcal{Y}$ que contenga a b es el total, que es entorno de todos los puntos.

2. La continuidad de la aplicación identidad depende de los espacios topológicos sobre los que está definida, al contrario de lo que pueda parecer. En efecto, sea

$$f : (\mathcal{X}, \mathcal{T}_{\text{discreta}}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{T}_{\text{trivial}})$$

que sí es continua, por la observación 2.1.1. Sin embargo, su inversa, que también es la aplicación identidad, no es continua. Esto se sigue directamente de que, por ser la topología del espacio de llegada la discreta, $\{f(x_0)\}$ es abierto y por tanto entorno de $f(x_0)$, pero su imagen inversa es $\{x_0\}$ que con la topología trivial del espacio de salida no es entorno. $\diamondsuit$

Ahora, veremos un par de propiedades interesantes de la continuidad en un punto.

Proposición 2.1.1. *Dada $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, continua en $x_0 \in \mathcal{X}$, si $A \subset \mathcal{X}$ tal que $x_0 \in A$, entonces $f\restriction_A : A \to \mathcal{Y}$ es continua en x_0.*

Demostración. Sea $V^{f(x_0)}$ un entorno de $f(x_0)$. Como en A estamos considerando la topología relativa, se verifica que $(f\restriction_A^{-1})(V^{f(x_0)}) = A \cap f^{-1}(V^{f(x_0)})$. Pero como por la continuidad de f en x_0 tenemos que $f^{-1}(V^{f(x_0)})$ es entorno de x_0 en $\mathcal{X}$, entonces $A \cap f^{-1}(V^{f(x_0)})$ es entorno de x_0 en A. ■

Proposición 2.1.2. *La continuidad es una propiedad local, es decir, $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es continua en $x_0 \in \mathcal{X}$ si $\exists V^{x_0} \subset \mathcal{X}$ entorno de x_0 tal que $f\restriction_{x_0}$ es continua en x_0.*

Demostración. Sea $V^{f(x_0)}$ un entorno de $f(x_0)$. Si $\exists V^{x_0} \subset \mathcal{X}$ entorno de x_0 tal que $f\restriction_{x_0}$ es continua en x_0, entonces $(f\restriction_{V^{x_0}})(V^{f(x_0)}) = f^{-1}(V^{f(x_0)}) \cap V^{x_0}$, luego es entorno de x_0 en V^{x_0}. Entonces es entorno de x_0 en $\mathcal{X}$ y por tanto f es continua. ■

2.2. Continuidad

Tras definir la continuidad en un punto, el paso instintivo es por supuesto definir la continuidad en todo el espacio. Vamos a hacerlo y a dar una serie de definiciones equivalentes de continuidad, que abren muchas posibilidades a la hora de verificar esta propiedad.

Definición 2.2.1 (Continuidad)**.** Se dice que $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es ***continua*** si lo es en todo punto.

Intuitivamente, una aplicación continua es la que no "rompe" el espacio. Nos permite deformar, aplastar, girar... pero no cortar o pegar.

Ejemplo 2.2.1. Vamos a ampliar la observación 2.1.2 comprobando qué tienen que verificar las topologías $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ para que se cumpla que la función identidad definida de $(\mathcal{X}, \mathcal{T}_1) \to (\mathcal{X}, \mathcal{T}_2)$ es continua.

El hecho de que f sea continua significa que para cualquier entorno $V_2^{f(x_0)} = V^{x_0}$, la imagen inversa:

$$f^{-1}(V_2^{x_0}) = V_2^{x_0} = V_1^{x_0}$$

cumple que es entorno de x_0 en el espacio $(\mathcal{X}, \mathcal{T}_1)$. Entonces, la condición necesaria y suficiente para que la función identidad entre estos dos espacios sea constante es que $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$. $\diamondsuit$

Vamos a ver ahora una serie de definiciones equivalentes de la noción de continuidad.

Proposición 2.2.1. *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

0. *f es continua*

1. *La imagen inversa de cualquier abierto es abierta.*

2. *La imagen inversa de cualquier cerrado es cerrada.*

3. *$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ para cualquier subconjunto A de $\mathcal{X}$.*

4. *Existe un recubrimiento abierto arbitrario de $\mathcal{X}$ de la forma:*

$$\mathcal{X} = \bigcup_{i \in I} U_i$$

que verifica que todas las restricciones $f\restriction_{U_i}$ son continuas.

5. *Existe un recubrimiento cerrado finito de $\mathcal{X}$ de la forma:*

$$\mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$$

que verifica que todas las restricciones $f\restriction_{F_i}$ son continuas.

Demostración. Vamos a probar las implicaciones más sencillas e ilustrativas, aunque realmente se podría hacer en cualquier orden.

$\boxed{(0) \implies (1)}$ Sea un abierto $U \subset \mathcal{Y}$. Por ser abierto, es entorno de todos sus puntos. Pero para cada punto $f(x_0) \in U$, por ser f continua, la imagen inversa de U es también entorno de x_0. De esta forma, para cualquier $x_0 \in f^{-1}(U)$, se cumple que $f^{-1}(U)$ es entorno de x_0, y por tanto $f^{-1}(U)$ es abierto.

$\boxed{(1) \implies (0)}$ Sea $V^{f(x_0)}$ un entorno en $\mathcal{Y}$. Por definición, contiene un abierto U tal que $f(x_0) \in U$. Ahora, por hipótesis, $f^{-1}(U)$ es abierto, y como $x_0 \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V^{f(x_0)})$, se verifica que $f^{-1}(V^{f(x_0)})$ contiene un abierto que contiene a x_0 y por tanto es entorno.

$\boxed{(1) \iff (2)}$ $F \subset \mathcal{Y}$ es cerrado $\iff$ $\mathcal{Y} \setminus F$ es abierto. Pero entonces por hipótesis $f^{-1}(\mathcal{Y} \setminus F)$ es abierto, y $f^{-1}(\mathcal{Y} \setminus F) = \mathcal{X} \setminus f^{-1}(F)$, luego $f^{-1}(F)$ es cerrado. La otra implicación es análoga.

$\boxed{(2) \implies (3)}$ Basta con ver que cualquier A verifica que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ o, lo que es equivalente, $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. Sin embargo, la imagen inversa del cerrado $\overline{f(A)}$ es cerrada, con lo que basta con demostrar que $A \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, ya que $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A. Por tanto, simplemente:

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$$

porque $f(A) \subset \overline{f(A)}$.

$\boxed{(3) \implies (2)}$ Sea $F \subset \mathcal{Y}$ cerrado. Queremos probar que $G = f^{-1}(F)$ también lo es, y tenemos, por hipótesis y por las propiedades de la imagen inversa:

$$f(\overline{G}) \subset \overline{f(G)} = \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F$$

pero entonces $\overline{G} \subset f^{-1}(F) = G$, luego $\overline{G} = G$ y entonces G es cerrado por la proposición 1.3.8.

$\boxed{(0) \implies (4)}$ Trivial, con el recubrimiento cuyo único abierto es $\mathcal{X}$.

$\boxed{(4) \implies (1)}$ Vamos a aprovechar que ya hemos demostrado $(0) \implies (1)$. Entonces, sea $U \subset \mathcal{Y}$ un abierto. Lo podemos escribir como unión de abiertos de forma que cada uno de ellos esté en un U_i, de la siguiente forma:

$$U = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap U)$$

Ahora, la imagen inversa de U es:

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} (U_i \cap U)\right) = \bigcup_{i \in I} (f^{-1}(U_i \cap U))$$

pero como $U_i \cap U \subset U_i$ y $f\restriction_{U_i}$ es continua, entonces cada una de estas imágenes inversas es continua, y la imagen inversa de U también lo es.

$\boxed{(0) \implies (5)}$ Trivial, con el recubrimiento cuyo único cerrado es $\mathcal{X}$.

$\boxed{(5) \implies (2)}$ Es análogo a (4) $\implies$ (1). ■

Terminamos con una propiedad fundamental de las funciones continuas: la composición respeta la continuidad.

Proposición 2.2.2. *Sean $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$, con f, g continuas. Entonces, $h = g \circ f$ es continua.*

Demostración. Esta es una consecuencia casi directa de la definición. En efecto, si consideramos $x_0 \in \mathcal{X}$ y sus imágenes:

$$x_0 \mapsto f(x_0) =: y_0 \mapsto g(f(x_0)) =: z_0$$

entonces basta con estudiar los entornos. En efecto, si V^{z_0} es entorno de z_0, por la continuidad de g su imagen inversa es un entorno V^{y_0} en $\mathcal{Y}$ y, ahora, por la continuidad de f, la imagen inversa de este último es un entorno de z_0. ■

2.3. Homeomorfismo. Homeomorfismo local

En esta sección trataremos la idea de homeomorfismo en espacios topológicos. Esta idea va a adquirir una gran importancia para nosotros ya que es la que nos va a permitir caracterizar espacios distintos como "similares" desde un punto de vista topológico (que preservan sus propiedades topológicas, vemos que continúa la idea de isomorfismo que hemos visto en otras asignaturas).

Además, más adelante nos proporcionará una serie de características comunes entre espacios homeomorfos(apertura, conexión, compacidad…).

Definición 2.3.1 (Homeomorfismo)**.** Un ***homeomorfismo*** entre espacios topológicos $f : X \to Y$ es una biyección continua con inversa continua.

Si existe un homeomorfismo entre dos espacios X e Y se dice que estos son ***homeomorfos***.

Hagamos ahora unas pequeñas observaciones antes de pasar a una serie de ejemplos que nos permitan asentar estos conceptos.

Observación 2.3.1. Como vemos en la definición 2.3, no nos basta únicamente con que nuestra aplicación f sea biyectiva (y de este modo tenga inversa), sino que además exigimos esta inversa sea continua.

Esta continuidad en ambos sentidos del homeomorfismo nos va a resultar muy útil como veremos más adelante, dado que las muchas propiedades (abiertos, cerrados…) se van a transladar entre los dos espacios homeomorfos que nos proporciona f. ♢

Ahora pasamos a observar una serie de funciones homeomorfas y no homeomorfas, para comprender las diferencias entre ambas y así afianzar la definición.

Ejemplo 2.3.1 (Homeomorfismos)**.**

1. La función $Id : (X, \tau_{dis}) \to (X, \tau_{triv})$ verifica ser continua y biyectiva, pero como vimos en el ejemplo 2.1.1 su inversa no es continua, por lo que no se tratará de un homeomorfismo.

2. Vemos como cualquier función f que mande X a Y no es homeomorfismo, a pesar de que f pueda ser biyectiva y continua.

   Esto no podemos afirmarlo con nuestros conocimientos actuales, pero adelantándonos en el temario (buscamos al introducir este ejemplo tan solo aumentar el interés del lector por los homeomorfismos, no buscamos que se comprenda completamente) lo sabremos ya dado el punto o (aquel que se manda al origen en Y) tenemos que:

   $\forall V^o$ pinchado (es decir, quitamos o) V^o tiene al menos 4 componentes conexas.

   $\exists W^o$ pinchado con 2 componentes conexas.

   Por lo tanto, al no mantenerse la cantidad de componentes conexas entre X e Y se verifica que f no es homeomorfismo.

3. Veamos como los conjuntos anteriores son homeomorfos entre si.

   Tomando un recubrimiento por cerrados del primero (el que tiene por cerrados los tres segmentos) y haciendole corresponder mediante $f$con los tres segmentos de nuestro segundo conjunto, vemos como cada una de sus restricciones es continua, y f de este modo continua (hacemos este camino a la inversa para ver que la inversa también lo es y así probar que es homeomorfismo).

   Este ejemplo nos puede resultar ilustrativo de que nos basta con encontrar una f que homeomorfa entre nuestros espacios, pero no en todo el plano (lo cual es mucho más ambicioso). $\diamondsuit$

Una vez definido el concepto de homeomorfismo y vista a través de los ejemplos su gran fuerza, vamos a pasar al concepto de homeomorfismo local, el cual, a pesar de ser una relación más débil que la que proporciona el homeomorfismo, también será muy utilizado a lo largo de la asignatura.

Definición 2.3.2 (Homeomorfismo Local)**.** Sea $f : X \to Y$ aplicación entre espacios topológicos y $x_0 \in X$. Se dice que f es ***homeomorfismo local*** en x_0 si x_0 tiene un entorno abierto U^{x_0} tal que $f(U^{x_0})$ es entorno abierto de $f(x_0)$ en Y y se tiene que $f|_{x_0} : U^{x_0} \to f(U^{x_0})$ es homeomorfismo.

De esta definición se desprende que todo un homeomorfismo entre dos espacios es en un homeomorfismo local en todos sus puntos. Este resultado resulta evidente, pero su contrarreciproco (no homeomorfo local implica no homeomorfo) nos puede resultar enormemente útil ya que es mucho más sencillo estudiar el homeomorfismo local al global. Vemos ahora algunos ejemplos de homeomorfismos locales.

Ejemplo 2.3.2. Vemos como podemos construir entre la esfera y el plano un homeomorfimo local en cada uno de sus puntos, por lo que podemos decir de estos que resultan localmente homeomorfos. Resulta de interés destacar que no es necesario que la aplicación sea la misma en todo el espacio, sino que podemos tomar una distinta para cada punto del espacio.

Tal y como se ve en el ejemplo, $f(x0, y0, z0) = (x0, y0)$ siendo homeomorfismo en su restricción a U^{x_0} $f(x1, y1.z1) = (y1, z1)$ siendo del mismo modo homeomorfismo en su restricción $\diamondsuit$

Una vez vistas ambas definiciones pasamos a ver una serie de propiedades y observaciones propias de los homeomorfismos (globales), pero que también nos valdrán para la restricción homeomorfa de los locales (dado que en ella por definición la aplicación es homeomorfa)

Observación 2.3.2.

1. Sea $f : X \to Y$ aplicación biyectiva. Que f sea continua es equivalente a que si $U \in Y$ es abierto, $f^{-1}(U)$ también lo será. Del mismo modo, es equivalente a que si $U \in Y$ es cerrado, $f^{-1}(U)$ también lo será.

   Igualmente, que f^{-1} sea continua es equivalente a que si $U \in X$ es cerrado, $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ también lo será. Así también, es equivalente a que si $U \in X$ es cerrado, $f(U)$ también lo será.

   Vemos como la si se verifican ambas (continuidad de f y de su inversa) será homeomorfismo, de modo que hemos encontrado una caracterización de estos en función de las imágenes directa e inversa de los abiertos (o cerrados).

2. Definimos las siguientes propiedades de aplicaciones: Una aplicación f no necesariamente biyectiva se llama ***abierta*** cuando la imagen de abiertos es un abierto (es decir, cuando $f(U)$ es abierta si U es abierto). Una aplicación f no necesariamente biyectiva se llama ***cerrada*** cuando la imagen de abiertos es un abierto (es decir, cuando $f(U)$ es abierta si U es abierto).

   Vemos como al no ser f biyectiva, no tienen porque ser equivalentes. (Dejamos para el lector el comprobar que en caso de ser biyectiva si lo es, utilizando las distintas caracterizaciones de continuidad de aplicaciones).

3. Sean los espacios X compacto, $Z \subset X$ cerrado e Y tomando en Y la topología $\mathcal{T}_2$.

   Tomamos $f : X \to Y$ aplicación continua, entonces tendremos que:

Como probaremos más adelante, cerrado en compacto implica compacto, por lo que Z será cerrado en X. Como f es continua, $f(Z)$ será compacto en Y y como estamos trabajando con la topología $\mathcal{T}_2$ será cerrado.

Así, tenemos por lo tanto que si f es biyección, su inversa (al ser f cerrada) será continua. Por lo tanto, afirmamos que toda aplicación continua en compactos es homeomorfismo. Como se habrá percatado el lector, aun no disponemos siquiera de una definición de compacidad, por lo que esta demostración queda aun fuera de su alcance, pero hemos decidido incluirla para así ver resultados interesantes sobre homeomorfismos. Recomendamos que una vez que se hayan dado los contenidos relacionados con compacidad se regrese a esta sección para así comprobar la comprensión de estos argumentos.

$\diamondsuit$

Capítulo 3

Construcciones de espacios

3.1. Imágenes inversas

Esta sección se centrará en dar solución al siguiente problema. Dado un espacio topológico $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$, un conjunto $\mathcal{Y}$ y una aplicación f que nace en $\mathcal{Y}$ y muere en $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$, queremos dotar a $\mathcal{Y}$ de una topología que haga que f sea continua. Evidentemente, una elección fácil para que esto ocurra es escoger la topología discreta, puesto que es la que cuenta con más abiertos y, por lo tanto, para todo abierto $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{X}$ entonces $f^{-1}(\mathcal{U}')$ es abierto en $\mathcal{Y}$, lo que implica que f sea continua. Sin embargo, este caso no es realmente interesante y lo difícil del problema será encontrar la topología menos fina para que f sea continua.

La solución a este problema es la topología $f^{-1}(\mathcal{T})$, definida como

$$f^{-1}(\mathcal{T}) = \{f^{-1}(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathcal{T}\}$$

y que llamamos ***topología imagen inversa***.

La comprobación de que verdaderamente es una topología se desprende de las propiedades de la función inversa aplicada a conjuntos. Por otro lado, es la menos fina que implica que f sea continua por construcción, luego cualquier otra topología con estas características contiene a esta. Finalmente, se tiene que es única. En efecto, si tenemos que $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}$ cumplen que son las menos finas por construcción, entonces se tiene que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ y $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, luego son iguales.

Una vez resuelta esta cuestión, es hora de profundizar un poco más. Tomemos otro espacio topológico $(\mathcal{Z}, \mathcal{T}')$ y consideremos una función g que nace en este y muere en Y. El problema que se nos plantea ahora es determinar qué aplicaciones g son continuas. Nótese que con esta distribución también podemos definir la composición $f \circ g$, quedando el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y} \arrow[r, "f"] & (\mathcal{X}, \mathcal{T}) \\
(\mathcal{Z}, \mathcal{T}') \arrow[u, "g"] \arrow[ur, dashed, "f \circ g"'] &
\end{tikzcd}$$

En primer lugar, observemos que como f es continua por definición del problema anterior, que g sea continua implica que la composición $f \circ g$ también lo sea. Además, la otra implicación (si $f \circ g$ es continua entonces g es continua) también es cierta como veremos a continuación. Esto es realmente interesante, puesto que la topología que haya en $\mathcal{Y}$ no es relevante si nuestro estudio se centra en la relación de $(\mathcal{X}, \mathcal{T}')$ y $(X, \mathcal{T})$.

Veamos que efectivamente se cumple esta implicación. En efecto, consideremos un abierto $\mathcal{W} \subset f^{-1}(\mathcal{U})$ y verifiquemos que $g^{-1}(\mathcal{W}) \subset \mathcal{T}'$. Por su definición, $\mathcal{W}$ es un abierto de $f^{-1}(\mathcal{U})$ con $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ y, como $f \circ g$ es continua, entonces $(f \circ g)^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{T}'$. Pero se tiene que $(f \circ g)^{-1}(\mathcal{U}) = g^{-1}[f^{-1}(\mathcal{U})] \equiv g^{-1}(\mathcal{W})$, luego $g^{-1}(\mathcal{W}) \subset \mathcal{T}'$.

Una consecuencia directa que se desprende de esto es que la topología imagen inversa $f^{-1}(\mathcal{T})$ es la topología en $\mathcal{Y}$ que cumple la equivalencia anterior. En efecto, supongamos que una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$ lo cumple y veamos que coincide con la topología imagen inversa. Para ello, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}}) \arrow[r, "f"] & (\mathcal{X}, \mathcal{T}) \\
(\mathcal{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}}) \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, dashed, "f"']
\end{tikzcd}$$

Sabemos que la identidad de un espacio en sí mismo es una aplicación continua. De este modo, al ser esta continua, tenemos por lo anterior que f es continua. En consecuencia, $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$ hace que f sea continua y, por tanto, $f^{-1}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$. Ya tenemos demostrada una inclusión.

Consideremos ahora el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}}) \arrow[r, "f"] & (\mathcal{X}, \mathcal{T}) \\
(\mathcal{Y}, f^{-1}(\mathcal{T})) \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, dashed, "f"']
\end{tikzcd}$$

Ahora, sabemos que f es continua por lo visto en el primer problema. Además, como la diagonal es continua, entonces la vertical es continua, luego $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}} \subset f^{-1}(\mathcal{T})$.

Observación 3.1.1 (Inyectividad)**.** (1) Supongamos que dos puntos y_1 e y_2 terminan en el mismo punto tras ser evaluados en una aplicación (lo que quiere decir que esta no es inyectiva). Los abiertos $\mathcal{U}$ que contienen a la imagen de los dos puntos mencionados x (que es la misma) cumplen que $f^{-1}(\mathcal{U})$ contiene a y_1 e y_2, luego estos dos puntos resultan ser topológicamente indistinguibles. Por ello, este tipo de aplicaciones no presentan mucho interés puesto que no es posible conocer con certeza ciertas propiedades.

(2) El caso verdaderamente interesante ocurre cuando f es inyectiva. En este caso, si se considera el subespacio $(f(\mathcal{Y}), \mathcal{T}|_{f(\mathcal{Y})}) \subset (\mathcal{X}, \mathcal{T})$, entonces f es biyectiva:

$$(\mathcal{Y}, f^{-1}(\mathcal{U})) \xrightarrow{f} (f(\mathcal{Y}), \mathcal{T}|_{f(\mathcal{Y})}) \subset (\mathcal{X}, \mathcal{T}).$$

Además, la aplicación es continua puesto que, dado $\mathcal{W}$ un abierto de $f(\mathcal{Y})$, entonces $\mathcal{W} = \mathcal{Y} \cap f(\mathcal{U})$ para cierto abierto $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$. Esto implica que

$$f^{-1}(\mathcal{W}) = f^{-1}(\mathcal{U} \cap f(\mathcal{Y})) = f^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{Y} = f^{-1}(\mathcal{U}),$$

que es abierto de $\mathcal{Y}$ por la definición de topología que hemos tomado. Sin embargo, esto no termina aquí, ya que f es abierta. En efecto, dado un abierto $\mathcal{W} \subset \mathcal{Y}$, entonces existe un abierto $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ de modo que $\mathcal{W} = f^{-1}(\mathcal{U})$. De este modo,

$$f(\mathcal{W}) = f(f^{-1}(\mathcal{U})) \cap f(\mathcal{Y}) = (\mathcal{U}) \cap f(\mathcal{Y}) = f^{-1}(\mathcal{U}),$$

que es un abierto de $f(\mathcal{Y})$ (la segunda igualdad se deduce de que f es inyectiva). Por tanto, al ser f continua y abierta, es homeomorfismo. Esto es sorprendente, ya que una aplicación inyectiva de $\mathcal{Y}$ en $\mathcal{X}$ es homeomorfismo de $\mathcal{Y}$ en $f(\mathcal{Y})$. De aquí se puede definir el concepto de inmersión o embebimiento si f es inyectiva y se tiene que

$$f : (\mathcal{Y}, f^{-1}(\mathcal{T})) \to (\mathcal{X}, \mathcal{T})$$ ♢

3.2. Imágenes directas

Después de haber realizado todo el desarrollo anterior, una posibilidad que se nos plantea es dualizar las cuestiones que nos han ido apareciendo. Coloquialmente, podríamos decir que vamos a cambiarle el sentido a todo.

Así pues, consideremos un espacio topológico $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$, un conjunto $\mathcal{Y}$ y una aplicación f que nace en $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ y muere en $\mathcal{Y}$. El problema ahora consiste en dotar a $\mathcal{Y}$ de una topología que haga que f sea continua. La solución más sencilla sería elegir la topología trivial, puesto que sus únicos abiertos son el vacío y el total y siempre se cumpliría que para cada $\mathcal{U}'$ abierto de $\mathcal{Y}$ entonces la imagen inversa de este es un abierto del espacio de partida. No obstante, es interesante encontrar la topología más fina que cumpla esto, y esta es

$$f(\mathcal{T}) = \{\mathcal{U} : f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{T}\}$$

Evidentemente, se trata de una topología y es la más fina que permite que f sea continua ya que si se añade algún abierto más deja de serlo. Por último, realizando un razonamiento por doble inclusión al análogo en imágenes inversas, se puede ver que es única. Llamamos a esta topología ***topología imagen*** o ***topología imagen directa***.

Continuando con la misma argumentación, veamos cuando una función g que parta de $\mathcal{Y}$ es continua

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g\circ f"'] & \mathcal{Y} \arrow[d, "g"] \\
& (\mathbb{Z}, \mathcal{T}')
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Trabajando igual que en el caso anterior, se llega a que g es continua si y solo si $g \circ f$ es continua (para ello, basta ver que si $\mathcal{W} \subset \mathcal{T}'$ entonces $g^{-1}(\mathcal{W}) \subset f(\mathcal{T})$) y que $f(\mathcal{T})$ es la topología en $\mathcal{Y}$ que cumple esta doble implicación. Decimos que esta es la ***propiedad universal de la imagen***.

Observación 3.2.1 (Sobreyectividad)**.** Supongamos que f no es sobreyectiva y tomemos un punto $y \notin f(\mathcal{X})$. Entonces $f^{-1}(\mathcal{Y})$ es el vacío, pero como el vacío es abierto llegamos a que el punto es abierto, luego $f(\mathcal{T}|_{\mathcal{Y}\setminus f(\mathcal{X})})$ coincide con la topología discreta. Sin embargo, la imagen inversa de $\mathcal{Y}\setminus f(\mathcal{X})$ es vacía y es abierta en la imagen. Además, como $f(\mathcal{X})$ es el complementario de $\mathcal{Y}\setminus f(\mathcal{X})$, entonces $f(\mathcal{X})$ es cerrado. No obstante, $f(\mathcal{X})$ coincide con el total, luego también es un abierto. $\diamondsuit$

Ahora que hemos visto que el caso interesante es que f sea sobreyectiva, consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & (\mathcal{Y}, f\mathcal{T}) \\
\mathcal{X}/\sim \arrow[ur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde la relación de equivalencia verifica $x \sim y \iff f(x) = f(y)$. Aquí, p es simplemente la aplicación que manda $x \in \mathcal{X}$ a su clase de equivalencia, y consideramos $\bar{f}$ de forma que verifique que $f = \bar{f} \circ p$.

Decimos que una aplicación f que verifica que si $x \sim y$ entonces $f(x) = f(y)$ respeta la relación de equivalencia $\sim$. Nótese que no se exige la equivalencia, solo la implicación.

Como hemos definido la relación de equivalencia como la que verifica $x \sim y \iff f(x) = f(y)$, tenemos que $\bar{f}$ es una biyección. Además, se puede comprobar que si existe $\bar{f}$ tal que $f = \bar{f} \circ p$, entonces f respeta la relación de equivalencia $\sim$.

Ahora, vamos a definir la topología cociente para $\mathcal{X}/\sim$. Buscamos una topología que verifique que la aplicación p es continua y que existe una aplicación continua $\bar{f}$ que respete la relación de equivalencia $\sim$ y que verifique que $f = \bar{f} \circ p$.

Definición 3.2.1 (Topología cociente)**.** Definimos la ***topología cociente*** en las condiciones anteriores como:

$$\mathcal{T}/\sim = \{V \ : \ p^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}$$

es decir, la topología cociente es la topología imagen por p.

Está claro que se verifican nuestros requisitos. Por un lado, p es trivialmente continua (pues la topología imagen por p es precisamente la que verifica esto). Por otro lado, por ser una topología imagen se verifica directamente la continuidad de $\bar{f}$.

Proposición 3.2.1. *En las condiciones de la construcción (cuando la relación $\sim$ está definida como $x \sim y \iff f(x) = f(y)$), $\bar{f}$ es homeomorfismo.*

Demostración. Ya hemos visto que $\bar{f}$ es biyectiva cuando la relación de equivalencia verifica $x \sim y \iff f(x) = f(y)$; y que es continuo en el sentido en el que lo hemos definido. Para ver la continuidad en el otro sentido, basta con ver que $\bar{f}$ es abierta.

En efecto, $U \in \mathcal{X}/\!\sim$ abierto $\iff$ $p^{-1}(U)$ es abierto en $\mathcal{X}$. Pero tenemos que $p^{-1}(U) = f^{-1}(f(S))$, porque:

$$x \in p^{-1}(U) \iff p(x) \in S \overset{\bar{f}\text{ biy.}}{\iff} \bar{f}(p(x)) \in \bar{f}(U) \iff f(x) \in \bar{f}(U) \iff x \in f^{-1}(\bar{f}(U))$$

Entonces, como $f(\mathcal{T})$ es la topología en $\mathcal{Y}$, $f^{-1}(f(U))$ es abierto en $\mathcal{X} \iff \bar{f}(U)$ es abierto en $\mathcal{Y}$, pero ya hemos visto que $f^{-1}(f(U))$ es abierto, porque es $p^{-1}(U)$. ■

Por otro lado, está claro que todos los abiertos de $\mathcal{T}/\!\sim$ son imágenes por p de abiertos de $\mathcal{T}$ (pero no todas las imágenes de abiertos tienen que estar necesariamente en $\mathcal{T}$). Entonces, definimos:

Definición 3.2.2 (Conjunto saturado)**.** En las condiciones anteriores, decimos que $W \in \mathcal{T}$ es ***saturado*** si $W = p^{-1}(p(W))$. Es equivalente decir que $[x] \cap W \neq \emptyset \implies [x] \subset W$, o que $x \in W, y \sim x \implies y \in W$.

Gracias a esta definición, podemos reescribir la topología cociente como:

$$\mathcal{T}/\!\sim\, = \{p(W) \ : \ W \in \mathcal{T},\, W \text{ saturado}\}$$

Además, vamos a dar un nombre a las funciones que envían X en un espacio homeomorfo a un cociente:

Definición 3.2.3 (Identificación)**.** Una ***identificación*** es una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{T}')$ sobreyectiva que verifica que $\mathcal{T}'$ es la topología imagen por f: $f(\mathcal{T})$.

La aplicación f con la que hemos estado trabajando es, entonces, una identificación. El hecho de que la topología de $\mathcal{Y}$ sea la imagen significa que una identificación es continua.

Las identificaciones se llaman a veces en la literatura aplicaciones cociente. Esto está ligado con su utilidad: las identificaciones son aquellas que inducen una relación de equivalencia $\sim$ de forma que podemos desarrollar toda la construcción anterior. De esta forma, nos "regalan" un espacio homeomorfo a $\mathcal{Y}$ que a menudo es más simple y más fácil de entender que él. Este propósito quedará más claro en los ejemplos posteriores.

Para comprobar si una aplicación es una identificación, podemos usar la siguiente proposición:

Proposición 3.2.2 (Condiciones suficientes de identificación)**.** *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ una aplicación. Si se verifica alguna de las siguientes condiciones, f es una identificación:*

1. *f es una aplicación continua abierta.*
2. *f es una aplicación continua cerrada.*

Nótese que puede haber identificaciones que no verifiquen ninguna de las condiciones anteriores. Además, como no se exige que las identificaciones sean biyectivas, las dos condiciones anteriores no son equivalentes.

Toda esta construcción abstracta debe servirnos para formalizar todo el concepto de cociente de un espacio. Esta es quizá la idea más importante que se va a ver en toda la asignatura, y es excepcionalmente útil para construir una gigantesca variedad de homeomorfismos y encontrar objetos simples homeomorfos a otros mucho más complejos.

Ejemplo 3.2.1 (Circunferencia unidad)**.** Definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{S}^1 \\ t &\mapsto e^{2\pi i t} = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t) \end{aligned}$$

y consideramos la relación de equivalencia $s \sim t \iff e^{2\pi i s} = e^{2\pi i t} \iff s - t \in \mathbb{Z}$. Vamos a ver que la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1$ es homeomorfa a $\mathbb{R}/\!\sim$.

Nos queda, pues, el siguiente esquema:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{S}^1 \arrow[dl, leftrightarrow] \\
\mathbb{R}/\sim &
\end{tikzcd}$$

y está claro que la aplicación que manda f a $\mathbb{S}^1$ es una identificación, pues es sobreyectiva, continua y homeomorfismo local, luego es abierta.

Ahora, nótese que considerando $[0,1] \subset \mathbb{R}$ podemos tomar las restricciones correspondientes con el siguiente esquema:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{S}^1 \arrow[dl, leftrightarrow] \\
{[0,1]} \arrow[ur, hook] \arrow[r] & \mathbb{R}/\sim &
\end{tikzcd}$$

y llegar a otra identificación. Ahora la relación de equivalencia asociada es simplemente aquella en la que $1 \sim 0$ y todos los demás puntos son solamente equivalentes a sí mismos. $\diamondsuit$

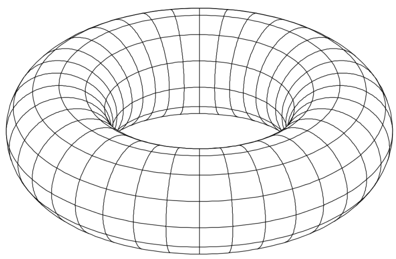
Esta posibilidad de encontrar, a veces, un cociente más simple que tiene la misma topología nos motiva a definir:

Definición 3.2.4 (Dominio fundamental)**.** En una construcción como la anterior, llamamos ***dominio fundamental*** a la región cerrada más pequeña posible con un representante de cada clase de equivalencia. Según la situación, a veces se exigen también otras propiedades como compacidad.

Ejemplo 3.2.2. Ahora, vamos a considerar el toro de revolución que vive en $\mathbb{R}^3$, cuya parametrización es conocida:

$$\begin{aligned}
x &= (a\cos(\theta) + b)\cos(\phi), \\
y &= (a\cos(\theta) + b)\sin(\phi), \\
z &= a\sin(\theta).
\end{aligned}$$

Como vemos en la imagen, se trata de una figura generada por revolución de una circunferencia en torno a un eje.



Vamos a hacer pues una construcción similar a la ya vista para la circunferencia unidad. Nos queda un esquema del siguiente tipo:

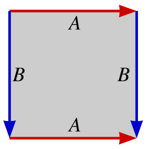
$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3 \arrow[dl, leftrightarrow] \\
{[0,2\pi]^2} \arrow[ur, hook] \arrow[r] & \mathbb{R}^2/\sim &
\end{tikzcd}$$

En este caso, la relación de equivalencia está definida como:

$$(x,y) \sim (x',y') \iff x - x' \in \mathbb{Z},\ y - y' \in \mathbb{Z}$$

y como dominio fundamental encontramos el cuadrado $[0, 2\pi]^2$.

A menudo, los dominios fundamentales se representan con esquemas llamados ***polígonos fundamentales***. La forma de entenderlos es que la relación de equivalencia "pega" los puntos de A y de B en el sentido que indican las flechas, como vemos en el ejemplo siguiente, que representa el toro que acabamos de describir:

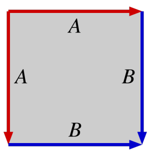


$\diamondsuit$

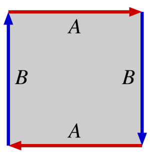
En el siguiente ejemplo, vamos a ver varios homeomorfismos cociente importantes pero sin entrar en tantos detalles como en los ejemplos previos. Para familiarizarnos íntimamente con el espacio cociente, es un buen ejercicio mental tratar de visualizar cómo podemos deformar un objeto del ejemplo siguiente para transformarlo en otro homeomorfo. Al fin y al cabo, la homeomorfia, intuitivamente, es poder deformar sin romper, y los cocientes formalizan la noción de "pegar" puntos.

Ejemplo 3.2.3.

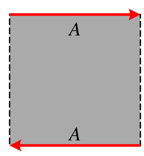
1. La esfera $\mathbb{S}^2$ se puede identificar con el disco unidad si la relación de equivalencia es la que hace que todos los puntos del borde estén relacionados entre sí y los demás, solo con sí mismos. De la misma forma, la podemos identificar con dos discos donde la relación de equivalencia "pega" los bordes. Por último, una esfera tiene como polígono fundamental:



2. Podemos identificar el plano proyectivo real $\mathbb{P}^2$ con un disco y una esfera donde la relación de equivalencia "pega" los bordes. También podemos identificarlo con una semiesfera en la que cada punto del borde es equivalente a su antípoda, o con una esfera completa en la que dos puntos están relacionados si y solo si son antipodales. Además, el polígono fundamental del plano proyectivo real sería:

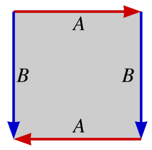


3. Vamos a ver otros dos polígonos fundamentales más. El de la banda de Möbius sería:



Nótese que en este caso hay un lado que no se pegaría, que corresponde al borde de la banda de Möbius.

Por otro lado, el de la botella de Klein sería:



$\diamondsuit$

3.3. Producto de espacios topológicos

Una vez visto el caso del espacio cociente, pasamos ahora a realizar un desarrollo similar para otras construcciones como son los productos y sumas de espacios topológicos. Se va a realizar un procedimiento análogo en el desarrollo de las mismas al de la anterior sección.

Sean $(X_i, \mathcal{T}_i)^{1 \leq i \leq r}$ espacios topológicos y sea $Y = \prod_i X_i$. Tomamos entonces

$$Y = \prod_i X_i \xrightarrow{p_i^r} (X_i, \mathcal{T}_i) \tag{3.2}$$

Lo que buscamos en la construcción del espacio producto es de dotar a Y de la topología $\mathcal{T}$ más fina haga continuas todas las aplicaciones p_i^r para $1 \leq i \leq r$. A dichas p_i^r las conoceremos a partir de ahora como ***proyecciones***.

De este modo, como queremos que $(p_i^r)^{-1}$ sea continua tenemos que para todo abierto $U_i \in \mathcal{T}_i$ deberá verificarse que $(p_i^r)^{-1}(U_i) = X_1 \times \cdots \times U_i \times \cdots X_r$ (todos son los totales excepto en el caso de X_i) sea abierto. Es decir, que se cumpla $X_1 \times \cdots \times U_i \times \cdots X_r \in \mathcal{T}$

Por lo tanto, vemos que por ser topología ha de verificarse que $(p_i^r)^{-1}(U_i) \cap (p_j^r)^{-1}(U_j) = \cdots \times U_i \times \cdots \times U_j \times \cdots$ sea parte de ella (intersección de abiertos).

Si tomamos ahora $\{U_1 \times \cdots \times U_r : U_i \in \mathcal{T}_i\}$ veamos que es una base de la topología que pretendemos construir. Esto va a resultar evidente, ya que tan solo debemos comprobar para demostrarlo que al intersecar dos elementos cualesquiera de la base nos queda otro elemento de la base.

Como dados $U_1 \times \cdots \times U_r$ y $V - 1 \times \cdots \times V_r$ elementos de la base su intersección es $(U_1 \cap V_1) \times \cdots \times (U_r \cap V_r)$ y como $(U_i \cap V_i) \in \mathcal{T}_i$, afirmamos que forma parte de la base por la definición de la misma.

Así, una vez que tenemos la base que va a caracterizar nuestra topología producto podemos afirmar que esta viene dada por $\mathcal{T} = \prod_i \mathcal{T}_i$.

Definición 3.3.1 (Topología producto)**.** Sean $(X_i, \mathcal{T}_i)^{1 \leq i \leq r}$ espacios topológicos y sea $Y = \prod_i X_i$. Entonces se conoce como ***topología producto*** a la topología $\mathcal{T}$ de Y que viene dada por la base $\{U_1 \times \cdots \times U_r : U_i \in \mathcal{T}_i\}$ (es decir, el producto de las topologías).

Lema 3.3.1 (Propiedad Universal)**.** *En la siguiente situación,*

Tenemos la siguiente ***propiedad universal del producto*** *que caracteriza la continuidad de f diciendo que esta será continua si y solo si $f_i = p_i^r \circ f$ son continuas para todo i.*

Demostración. Vemos que si f es continua, como p_i^r son continuas, tenemos que f_i también lo será al ser composición de estas.

Por otro lado, tenemos que dado $W = \prod_i U_i$ abierto en X, tenemos que $f^{-1}(W) = \bigcap_i f_i^{-1}(U_i)$ será abierto dado que los $f_i^{-1}(U_i)$ son abiertos por ser f continua. Así, como hemos probado que la imagen inversa de abiertos es abierta, tenemos que f es continua. ∎

Veamos ahora una serie de proposiciones relacionadas con la topología producto, las cuales a pesar de resultar sencillas de comprobar nos proporcionan resultados interesantes.

Proposición 3.3.2. *Las proyecciones son abiertas*

Demostración. Sea W abierto en el espacio producto, veamos que $p_i^r(W)$ es abierto.

Nos basta con comprobarlo con los abiertos de la base, es decir, para los elementos de la forma $U_1 \times \cdots \times U_r : U_i \in \mathcal{T}_i$. Como $p_i^r(U_1 \times \cdots \times U_r) = U_i$ es abierto podemos concluir la demostración. ∎

Proposición 3.3.3. *La aplicación* $X :\longrightarrow \{a1\} \times \cdots \times X_i \times \cdots \times \{ar\} \in X_1 \times \cdots \times X_r$ *tal que* $x \longrightarrow (a_1, \ldots, a_r)$ *es una inmersión.*

Demostración. Veamos primero como transforma la base de abiertos del inicial en la base del final.
$U_i \longrightarrow \{a1\} \times \cdots \times U_i \times \cdots \times \{ar\} = \{a1\} \times \cdots \times X_i \times \cdots \times \{ar\} \cap (U_1 \times \cdots \times U_r)$

Como observamos esto se verifica y además la aplicación al serlo en los abiertos de las bases verifica ser biyectiva, continua y abierta por lo que se tratará de una inmersión. ∎

Ahora pasamos a ver si somos capaces de construir bases más sencillas para nuestra topología producto, es decir, conformadas por menos abiertos. Igualmente, veremos el modo de construcción de bases de entornos en el espacio producto. No vamos a probar que sean bases realmente en ninguno de los dos casos ya que en ambos casos va a resultar muy sencillo aplicando la caracterización de base, dejándose como ejercicio para el lector de cara al repaso de la misma.

1. Dado el espacio producto $(\prod_i X_i, \prod_i \mathcal{T}_i)$ tenemos que $\mathcal{B} = \{W_i \times \cdots \times W_r : W_i \in \mathcal{B}_i$ base de $\mathcal{T}_i\}$ es base de entornos del mismo.

2. Dado el espacio producto $(\prod_i X_i, \prod_i \mathcal{T}_i)$ y $(a_1, \ldots, a_r) \in \prod_i X_i$ tenemos que $\mathcal{V}^{(a_1,\ldots,a_r)} = \{V^{a_1} \times \cdots \times V^{a_r} : W_i \in \mathcal{V}^{a_i}$ base de entornos en $\mathcal{T}_i\}$ es base de entornos del mismo.

3.4. Suma

Vamos a ver como última la construcción la suma, la cual gracias al desarrollo previo de los casos anteriores va a resultar de fácil comprensión para el lector. La idea de esta construcción va a ser la de realizar copias de objetos a distintas .ªlturas"(como si los colocaramos en estantes).

Como antes, vamos a comenzar viendo las propiedades que debe cumplir la topología que caracterice nuestro espacio para luego pasar a construirla.

Dados los espacios $(X_i, \mathcal{T}_i)^{1 \leq i \leq r}$ con sus correspondientes topologías, construimos el espacio suma como

$$(X_i, \mathcal{T}_i) \xrightarrow{j_i} Y = \sum_{i=1}^{r} X_i = \bigcup_{i=1}^{r} \{i\} \times X_i \tag{3.3}$$

Conviene resaltar que, como podemos observar, como las copias de los distintos espacios X_i en la suma será distinta, dado que a cada una le corresponderá un elemento i distinto.

Ahora bien, nuestro objetivo en esta construcción será el de crear la topología $\mathcal{T}$ más fina en Y de modo que haga las j_i continuas. Las funciones j_i las llamaremos ***inclusiones***.

Por definición de continuidad, podemos (y debemos, ya que buscamos que sea la más fina) incluir en $\mathcal{T}$ todos los conjuntas de Y cuya inversa sea abierta. De este modo, también incluiremos $\{i\} \times X_i$ dado que $j^{-1}(\{i\} \times X_i) = X_i$ que es abierto en $\mathcal{T}_i$.

De este modo, construimos la topología que tiene como base $\mathcal{B} = \{\{i\} \times U_i : U_i \in \mathcal{T}_i\}$ comprobemos que está bien definida y que es realmente base.

$$(\{i\} \times U_i) \cap (\{j\} \times U_j) = \begin{cases} \{i\} \times (U_i \cap U_j) \in \mathcal{T} & si \quad i = j \\ \\ \emptyset \in \mathcal{T} & si \quad i \neq j \end{cases} \tag{3.4}$$

Como podemos ver, ambos casos verifican que la intersección está contenida en $\mathcal{T}$ como debiamos demostrar para ver que es base del mismo. Así, podemos definir:

Definición 3.4.1 (Topología suma)**.** Dados los espacios con sus correspondientes topologías $(X_i, \mathcal{T}_i)^{1 \leq i \leq r}$ y el espacio suma $Y = \sum_{i=1}^{r} X_i$, construimos la ***topología suma*** como aquella topología que tiene como base $\mathcal{B} = \{\{i\} \times U_i : U_i \in \mathcal{T}_i\}$.

Una vez vista su definición, veamos ahora un resultado fundamental acerca de la topología producto que no va a ser otra que la siguiente propiedad universal:

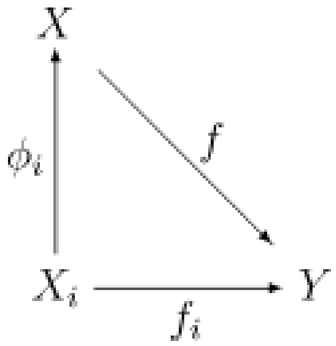


Figura 3.1: Espacio Suma

Lema 3.4.1 (Propiedad universal de la suma)**.** *En la situación reflejada en la figura 3.1, tomando en X_i las topologías $\mathcal{T}_i$ y siendo $(Y, \mathcal{T})$.*

Tenemos la siguiente ***propiedad universal de la suma*** *que caracteriza la continuidad de f diciendo que esta será continua si y solo si $f_i = j_i \circ f$ son continuas para todo i.*

Demostración. Vemos que si f es continua, como j_i son continuas, tenemos que f_i también lo será al ser composición de estas.

Por otro lado, tenemos que dado que $(Y, \mathcal{T})$ como hemos visto en la construcción de la topología suma T es un recubrimiento abierto y continuo en cada uno de los X_i, tenemos que al ser continuo cada g_i en X_i también lo será g. ■

Resulta importante indicar que como se desprende de la demostración (segunda implicación) la propiedad universal no solo nos va a caracterizar la función g, sino que nos permite caracterizar también la topología suma (si no se cumple la propiedad podemos asegurar que no estamos trabajando en esta).

Observación 3.4.1. Veamos por último un par de observaciones sobre esta topología que pueden resultar interesantes de cara a conocer el mecanismo de la misma.

1. Como hemos visto, $\{i\} \times X_i \subset \sum_j X_j$ siendo $\{i\} \times X_i$ abierto. Veamos que también es cerrado. Dado que $\sum_j X_j \setminus \{i\} \times X_i = \bigcup_{j \neq i} X_j$ es abierto, lo tenemos.

2. Las inclusiones que $X_l \xrightarrow{j_l} \sum_i X_i$ son inmersiones abiertas y cerradas. Esto lo dejamos como ejercicio al lector, es un ejercicio sencillo pero puede resultar útil como repaso del modo de construcción de la topología suma realizado previamente en el apartado.

♢

Capítulo 4

Separación

4.1. Separación de puntos

La separación de puntos consiste en, dados dos puntos distintos, saber distinguirlos topológicamente. A pesar de que hay más de un modo de hacerlo, nos centraremos solo en una. Para ello, consideremos dos puntos x e y distintos y vamos a definir ciertos axiomas que nos ayuden en nuestro estudio.

- El axioma T_0 o Kolmogorov dice que existe un entorno de uno de los dos puntos (sin especificar cuál) que no contiene al otro.
- El axioma T_1 o Fréchet dice que existe un entorno $\mathcal{V}^x$ de x que no contiene a y y también existe un entorno $\mathcal{V}^y$ de y que no contiene a x.
- El axioma T_2 o Hausdorff dice que existen un entorno $\mathcal{V}^x$ de x y un entorno $\mathcal{V}^y$ de y que son disjuntos.

Evidentemente, cada axioma es más restrictivo que el anterior.

Observación 4.1.1. Todo espacio métrico es T_2. En efecto, si consideramos dos puntos distintos x e y, podemos tomar bolas centradas en cada uno de los puntos de radio menor que la mitad de la distancia que los separa. De este modo, obtenemos dos entornos abiertos que son disjuntos. $\diamondsuit$

4.2. Caracterizaciones

En esta subsección vamos a estudiar varios resultados útiles que se desprenden directamente de los axiomas que hemos definido anteriormente.

Proposición 4.2.1. *Un conjunto $\mathcal{X}$ es T_1 si y solo si todos sus puntos son cerrados.*

Demostración. $\Leftarrow$) Consideremos un punto cualquiera $x \in \mathcal{X}$ y supongamos que $\{x\}$ es cerrado. De este modo, $\mathcal{U} = \mathcal{X} \backslash \{x\}$ es abierto, y si $x \neq y \in \mathcal{X}$, entonces $\mathcal{U}$ es un conjunto abierto tal que $x \notin \mathcal{U}$ e $y \in \mathcal{U}$.

$\Rightarrow$) Supongamos ahora que $\mathcal{X}$ es un espacio T_1 y sea $x \in \mathcal{X}$. Entonces para cada $y \in \mathcal{X}$ existe un abierto $\mathcal{U}^y \subseteq \mathcal{X}$ tal que $y \in \mathcal{U}^y$ y $x \notin \mathcal{U}^y$. Tomemos $\mathcal{U} = \bigcup_{y \in \mathcal{X} \backslash \{x\}} \mathcal{U}^y = \mathcal{X} \backslash \{x\}$, que es abierto por ser unión arbitraria de abiertos, luego $\{x\}$ es cerrado. $\blacksquare$

Teorema 4.2.2. *Si $f, g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ son funciones continuas e $\mathcal{Y}$ es T_2, entonces $\{f = g\}$ es cerrado.*

Demostración. Hemos de demostrar que el conjunto $\{f \neq g\}$ es abierto. Dado $x \in \mathcal{X}$, si se tiene que $f(x) \neq g(x)$ y al ser $\mathcal{Y}$ un espacio T_2, existen entornos $\mathcal{V}^{f(x)}$ y $\mathcal{V}^{g(x)}$ disjuntos. Como f y g son continuas, se tiene además que $f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x)})$ y $f^{-1}(\mathcal{V}^{g(x)})$ son entornos de x. La intersección de entornos, como ya sabemos, también es entorno, luego $\mathcal{V}^x = f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x)}) \cap f^{-1}(\mathcal{V}^{g(x)})$ es un entorno de x contenido en $\{f \neq g\}$. En efecto, que $z \in \mathcal{V}^x$ quiere decir que $f(z) \in \mathcal{V}^{f(x)}$ y $g(z) \in \mathcal{V}^{g(x)}$, pero al ser estos entornos disjuntos, $f(z) \neq g(z)$. Con esto concluye la demostración, ya que si $\mathcal{V}^x$ es entorno (abierto) contenido en $\{f \neq g\}$, este conjunto es abierto. $\blacksquare$

Veamos ahora un caso particular del teorema anterior. Consideremos el espacio producto $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ y las proyecciones p_1 y p_2 desde este a $\mathcal{X}$. El resultado anterior nos da que $\Delta := \{p_1 = p_2\}$ es un conjunto cerrado. Nótese que $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathcal{X}\}$, esto es, la diagonal. De este modo, un conjunto es T_2 si y solo si su diagonal es cerrada.

Para terminar, veamos un colorario del teorema realizado con los conjuntos densos.

Corolario 4.2.3. *Si $f, g : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ son funciones continuas que coinciden en un conjunto denso y $\mathcal{X}$ es T_2 entonces $\{f = g\}$ son iguales en X.*

Demostración. Sea $A \subset \mathcal{X}$ un conjunto denso, es decir, $\bar{A} = \mathcal{X}$. Como ya hemos visto, $A \subset \{f = g\}$ es un conjunto cerrado, pero al ser la clausura de A el menor cerrado que lo contiene y coincidir con el total, entonces $\{f = g\} = \mathcal{X}$. ■

4.3. Comportamiento topológico

En esta sección, comprobaremos cómo se comportan topológicamente los conjuntos T_2 si se ven sometidos a cocientes, sumas finitas...

- Si $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ es un espacio topológico T_2 entonces $(A, \mathcal{T}_A)$, donde $\emptyset \subset A \subseteq \mathcal{X}$ es un subespacio de $\mathcal{X}$ y $\mathcal{T}_A = \{\mathcal{U} \cap A : \mathcal{U} \in \mathcal{T}\}$ es la topología relativa, es T_2. Se dice entonces que propiedad de ser T_2 es hereditaria. En efecto, sean $x, y \in A$ tales que $x \neq y$. Al pertenecer estos puntos también a $\mathcal{X}$, existe $\mathcal{V}^x$ y $\mathcal{V}^y$ entornos disjuntos de x e y respectivamente. Pero al pertenecer también a A, entonces $x \in \mathcal{V}^x \cap A$ y $y \in \mathcal{V}^y \cap A$, lo que conduce a que $(\mathcal{V}^x \cap A) \cap (\mathcal{V}^y \cap A) = \emptyset$. De este modo, se cumple el axioma T_2 en A.

- Si $\backsim$ es una relación de equivalencia en un espacio $\mathcal{X}$ que es T_2, el espacio $\mathcal{X}/\backsim$ con la topología propia de la identificación no es en general T_2. Para verlo, basta definir como relación de equivalencia en $\mathbb{R}$ con la topología usual $x \backsim y$ si y solo si $x - y \in \mathbb{Q}$. Así, la identificación $\pi : R \to R/\backsim$ (el espacio de partida equipado con la topología usual y el de llegada con la trivial), muestran lo que buscamos.

- Si $\mathcal{X}_1$ y $\mathcal{X}_2$ son dos espacios T_2, entonces su producto $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ también lo es. En efecto, consideremos dos puntos distintos del producto $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$ y supongamos que $x_1 \neq y_1$. Así, existen entornos $\mathcal{V}^{x_1}$ y $\mathcal{V}^{y_1}$ disjuntos que cumplen que $\mathcal{V}^{x_1} \times \mathcal{X}_2$ y $\mathcal{V}^{y_1} \times \mathcal{X}_2$ son entornos disjuntos de x e y en $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$. De forma análoga se procede con la segunda coordenada para obtener así que el espacio producto es T_2. Mediante este argumento se demuestra fácilmente que el producto finito de espacios T_2 lo es también. Además, se puede probar que este hecho no se ciñe únicamente a productos finitos, sino que también es válido para el producto infinito de espacios. No obstante, la demostración de este comentario no es relevante para nuestro estudio puesto que el estudio de la topología que engendra este producto puede suponer ciertos problemas a estas alturas.

- Si $\mathcal{X}_1$ y $\mathcal{X}_2$ son dos espacios T_2, entonces su suma también lo es. La demostración de esto es muy similar a la del producto.

Capítulo 5

Numerabilidad

En matemáticas, un ***axioma de numerabilidad*** es una propiedad de un cierto objeto (en nuestro caso, un espacio topológico) que afirma la existencia de un conjunto numerable con ciertas propiedades. Estas restricciones sobre el espacio pueden ser más o menos fuertes y a menudo garantizan en el espacio ciertas propiedades que hacen que se parezca a los espacios que conocemos y amamos, como $\mathbb{R}$. En resumen, que se verifiquen ciertos axiomas de numerabilidad hacen mucho más cómodo el trabajar con ciertos espacios.

5.1. Sucesiones

Las sucesiones eran, en $\mathbb{R}^n$, una herramienta fundamental para el trabajo. En un espacio topológico en general son mucho menos potentes de lo que estamos acostumbrados por falta de estructura, pero aun así son dignas de mención. Una teoría más general de la convergencia para suplir esta carencia es la teoría de la convergencia de redes, pero no vamos a detallarla aquí.

Definición 5.1.1 (Sucesión)**.** Una ***sucesión*** en un espacio $\mathcal{X}$ es una aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$. Habitualmente escribimos una sucesión como $\{x_n\}_n$, donde x_n es su n-ésimo elemento.

El concepto más importante de las sucesiones es la convergencia. Nótese que esta definición es equivalente a la que se ve en $\mathbb{R}^n$ con bolas.

Definición 5.1.2 (Convergencia)**.** Decimos que una sucesión $\{x_n\}_n$ de $\mathcal{X}$ ***converge*** a $x_0 \in \mathcal{X}$ si para cada entorno V^{x_0} de x_0 existe $k_0 \geq 1$ tal que $x_k \in V^{x_0}$ para $k \geq k_0$. A menudo lo expresamos como:

$$x_0 = \lim x_k = \lim_k x_k$$

Observación 5.1.1. Para que una sucesión sea convergente, es suficiente que la definición 5.1.2 se verifique para una base de entornos. No es necesario comprobar que se cumple para un entorno cualquiera. $\diamondsuit$

Observación 5.1.2 (Consecuencias de la definición de continuidad)**.**

1. Si $x_0 = \lim x_k$, con $x_k \in A$, entonces $x_0 \in \overline{A}$. En efecto, en todo entorno de x_0 hay por definición de convergencia algún punto de A, y entonces es punto adherente por definición.

2. El límite de una sucesión no es necesariamente único, es decir, una sucesión puede converger a varios puntos. En efecto, consideramos un conjunto $\mathcal{X}$ con la topología del punto $\mathcal{T}_a$, para un punto $a \in \mathcal{X}$. Aquí, la sucesión constante $x_k = a \to x \;\; \forall x \in \mathcal{X}$. Esto es claro puesto que cualquier entorno de cualquier punto contiene a a.

$\diamondsuit$

5.2. Primer axioma de numerabilidad

Definición 5.2.1 (Primer axioma). Decimos que un espacio $\mathcal{X}$ es ***primer axioma de numerabilidad*** o simplemente ***I axioma*** si todo punto de $\mathcal{X}$ tiene una base de entornos numerable.

Observación 5.2.1. Esta base numerable, si existe, siempre se podrá tomar encajada, como ya mencionamos en la observación 1.5.1. $\diamondsuit$

Observación 5.2.2. Si $\mathcal{X}$ es I axioma, entonces la adherencia está totalmente determinada por límites de sucesiones. Esto es:

$$x \in \overline{A} \iff \exists \{x_k\}_k \subset A \text{ t.q. } x = \lim_k x_k$$

Vamos a ver solo la implicación hacia la derecha, la otra ya la vimos en la observación 5.1.2. Sea una base de entornos encajada $\mathcal{V}^x = \{V^x : k \geq 1\}$, numerable por ser $\mathcal{X}$ I axioma. $x \in \overline{A}$ implica que $V_k \cap A \neq \emptyset \ \forall k$ y en consecuencia $\exists a_k \in V_k \cap A$ y $x = \lim_k a_k$. En efecto, dado un entorno V^x existe k_0 tal que $V_{k_0} \subset V^x$ y entonces, por haber tomado la base encajada, para cualquier $k \geq k_0$ $a_k \in V_k \subset V_{k_0} \subset V^x$, que es precisamente la definición de continuidad. $\diamondsuit$

Ejemplo 5.2.1 (Adherencias curiosas). Volviendo de nuevo al ejemplo de $\mathcal{X}$ con la topología $\mathcal{T}_a$ del punto, resulta que se verifica que $\overline{\{a\}} = \mathcal{X}$. Esto es consecuencia directa de la observación 5.2.2. $\diamondsuit$

Proposición 5.2.1. *Si X es T_2, entonces el límite es único.*

Demostración. Si no lo fuera, podríamos tomar dos entornos disjuntos alrededor de los dos límites, y la sucesión tendría que estar en ambos al mismo tiempo a partir de un cierto punto. ■

Observación 5.2.3. Un espacio métrico es siempre I axioma y T_2, de forma que en él las sucesiones se comportan como esperamos. $\diamondsuit$

5.3. Otros axiomas de numerabilidad

Definición 5.3.1 (Segundo axioma). Decimos que un espacio $\mathcal{X}$ es ***segundo axioma de numerabilidad*** o simplemente ***II axioma*** si tiene una base de abiertos numerable.

Definición 5.3.2 (Separable). Decimos que un espacio $\mathcal{X}$ es ***separable*** si en él existe un conjunto denso numerable.

Ejemplo 5.3.1. Veamos algunos ejemplos de espacios separables:

1. $\mathbb{R}$ con la topología usual es separable, pues $\mathbb{Q}$ es denso y numerable. De la misma forma, $\mathbb{R}^n$ también lo es, por $\mathbb{Q}^n$.
2. Un espacio $(\mathcal{X}, \mathcal{T}_a)$, donde $\mathcal{T}_a$ es la topología del punto, es automáticamente separable. En efecto, ya vimos en el ejemplo 5.2.1 que la adherencia del conjunto $\{a\}$ es el total, luego es denso; y desde luego es numerable. $\diamondsuit$

Definición 5.3.3 (Lindelöf). Decimos que un espacio $\mathcal{X}$ es ***Lindelöf*** si para todo recubrimiento por abiertos de $\mathcal{X}$ podemos extraer un subrecubrimiento numerable.

Observación 5.3.1. Nótese que la noción de Lindelöf implica la compacidad. De hecho, aunque la hemos mencionado aquí, esta propiedad está a caballo entre los axiomas de numerabilidad y los de compacidad y volveremos a verla en el capítulo 6, que trata sobre compacidad. $\diamondsuit$

Proposición 5.3.1 (Relación entre los axiomas de numerabilidad). *Dado un espacio topológico $\mathcal{X}$, que sea II axioma, se verifica:*

1. *$\mathcal{X}$ es I axioma.*
2. *$\mathcal{X}$ es Lindelöf.*

3. $\mathcal{X}$ es separable.

y no se verifica ninguna de las demás implicaciones posibles entre los cuatro axiomas de numerabilidad que hemos visto.

Observación 5.3.2. Si $\mathcal{X}$ es un espacio métrico, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\mathcal{X}$ es II axioma.
2. $\mathcal{X}$ es separable.
3. $\mathcal{X}$ es Lindelöf. $\diamondsuit$

Capítulo 6

Compacidad

La compacidad en espacios topológicos es una noción bastante elaborada, y su generalización llevo a los matemáticos bastante tiempo. Desde principios del siglo XX la idea que buscaban era generalizar para espacios topológicos arbitrarios las propiedades de los intervalos cerrados y acotados $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ que permitía demostrar teoremas como el del valor medio o la continuidad uniforme. Surgieron así distintos tipos de compacidad, tales como la compacidad por punto límite, la compacidad numerable,..., pero no siendo estas las más adecuada, se acabo por formalizar en términos de abiertos(en concreto, como recubrimientos de abiertos). Eso dio lugar a la definición actual.

6.1. Definición y propiedades

Definición 6.1.1 (Recubrimiento y recubrimiento de abiertos)**.** Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos del espacio $\mathcal{X}$ se dice que es un ***recubrimiento*** si la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ coincide con $\mathcal{X}$. $\mathcal{A}$ es un ***recubrimiento abierto*** de $\mathcal{X}$ si es un recubrimiento de $\mathcal{X}$ formado por conjuntos abiertos.

Definición 6.1.2 (Compacto)**.** Diremos que un espacio $\mathcal{X}$ es ***compacto*** si de cada **recubrimiento abierto** $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$ podemos extraer un subrecubrimiento finito que también recubre $\mathcal{X}$.

Ejemplo 6.1.1. 1. El intervalo $[a,b]$ es compacto.

2. El intervalo (a,b) no es compacto.

3. La recta real $\mathbb{R}$ no es compacta. Vemos que si tomamos un recubrimiento de abiertos : $\mathcal{A} = \{(n, n+2) \shortparallel n \in \mathbb{Z}\}$ no contiene ningún subrecubrimiento finito que cubra $\mathbb{R}$.

4. El subespacio $\mathcal{X} = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \shortparallel n \in \mathbb{Z}_+ \text{ de } \mathbb{R}\}$ es compacto. Dado un conjunto abierto de $\mathcal{A}$, existe un abierto $\mathcal{U}$ de $\mathcal{A}$ que contiene al 0. $\mathcal{U}$ contiene todos los puntos de la forma $\frac{1}{n}$ salvo un número finito de ellos. Para cada uno de estos puntos cogemos un abierto del recubrimiento. Por lo tanto tenemos un subrecubrimiento finito, luego es compacto.

$\diamondsuit$

Observación 6.1.1.

1. Sea $\mathcal{Y}$ un subespacio de $\mathcal{X}$. Entonces $\mathcal{Y}$ es compacto si, y sólo si cada recubrimiento de $\mathcal{Y}$ por abiertos de $\mathcal{X}$ contiene una subcolección finita que cubre $\mathcal{Y}$.

   Demostración.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos que $\mathcal{Y}$ es compacto y que

$$\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in J} \tag{6.1}$$

es un recubrimiento de $\mathcal{Y}$ por abiertos de $\mathcal{X}$. Entonces la colección formada por

$$A_i \cap \mathcal{Y} \shortparallel i \in J \tag{6.2}$$

es un cubrimiento de $\mathcal{Y}$ por conjuntos abiertos de $\mathcal{Y}$, y como $\mathcal{Y}$ es compacto, existe un subrecubrimiento finito de $\mathcal{Y}$ que cubre a $\mathcal{Y}$ de la forma

$$\{\mathcal{A}_{i_1} \cap \mathcal{Y}, ..., \mathcal{A}_{i_n} \cap \mathcal{Y}\} \tag{6.3}$$

, luego $\{\mathcal{A}_{i_1}, ..., \mathcal{A}_{i_n}\}$ es un subrecubrimiento finito que cubre a $\mathcal{Y}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $\mathcal{A}' = \{A'_i\}$ un cubrimiento de $\mathcal{Y}$ por abiertos de $\mathcal{Y}$. Para cada i podemos elegir un conjunto A_i abierto en $\mathcal{X}$ tal que

$$\mathcal{A}'_i = A_i \cap \mathcal{Y} \tag{6.4}$$

La colección formada por estos A_i a la que llamaremos $\mathcal{A}$ es un recubrimiento de $\mathcal{Y}$ por abiertos de $\mathcal{A}$. Por hipótesis, algun subrecubrimiento finito $\{A_{i_1}, ..., A_{i_n}\}$ que cubre $\mathcal{Y}$. Entonces $\{A'_{i_1}, ..., A'_{i_n}\}$ es una subrecubrimiento finito de $\mathcal{Y}$, luego $\mathcal{Y}$ es compacto.

$\diamondsuit$

2. Podemos expresar la compacidad mediante cerrados también, usando teoria de conjuntos. Tomamos un recubrimiento de $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{X} = \bigcup_i U_i$. Como $\mathcal{X}$ es compacto, entonces existe un subrecubrimiento finito tal que $\mathcal{X} = U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_n}$.

$$\mathcal{X} = \bigcup_i U_i \Rightarrow \exists U_{i_1}, ..., U_{i_n} \shortparallel \; \mathcal{X} = U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_n} \tag{6.5}$$

Complementando esto,

$$\emptyset = \bigcap_i U_i \Rightarrow \exists F_{i_1}, ..., F_{i_n} \shortparallel \; \emptyset = F_{i_1} \cap ... \cap F_{i_n} \tag{6.6}$$

o lo que es lo mismo,

$$\emptyset \neq \bigcap_i U_i \Leftarrow \forall F_{i_1}, ..., F_{i_n} \shortparallel \; \emptyset \neq F_{i_1} \cap ... \cap F_{i_n} \tag{6.7}$$

$\diamondsuit$

Proposición 6.1.1 (Cerrado en compacto es compacto)**.** *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico compacto, e $\mathcal{Y}$ un subespacio suyo. Si $\mathcal{Y}$ es cerrado entonces es compacto.*

Demostración. Tomamos u recubrimiento de $\mathcal{Y}$ tal que $\mathcal{Y} \subset \bigcup_i U_i$. Esto implica que $\mathcal{X} = (\mathcal{X} - \mathcal{Y}) \cup \bigcup_i U_i$. Como esto es un subrecubrimiento por abiertos de $\mathcal{X}$ y este es compacto,

$$\mathcal{X} = (\mathcal{X} - \mathcal{Y}) \cup U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_n} \Rightarrow \mathcal{Y} \subset U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_n} \tag{6.8}$$

Luego $\mathcal{Y}$ es compacto. ■

Veamos una buena propiedad de los compactos al usarlos con aplicaciones.

Proposición 6.1.2. *Sea $\mathcal{X}$ compacto y $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ una aplicación continua. $\mathcal{Y} = f(\mathcal{X})$ es compacto.*

Demostración. Veamos que si tomamos un recubrimiento de $\mathcal{Y}$, podemos llegar a un subrecubrimiento finito moviendonos por la aplicación.Si tomamos un recubrimiento de $\mathcal{Y}$ tal que

$$\mathcal{Y} = \bigcup_i \mathcal{W}_i \tag{6.9}$$

Como sabemos que la imagen inversa de abierto es abierto,

$$\mathcal{X} = \bigcup_i f^{-1}(\mathcal{W}_i) \tag{6.10}$$

y como $\mathcal{X}$ es compacto, tenemos que:

$$\mathcal{X} = f^{-1}(\mathcal{W}_{i_1}) \cup ... \cup f^{-1}(\mathcal{W}_{i_n}) \tag{6.11}$$

y usando de nuevo la aplicación llegamos a que $\mathcal{W}_{i_1} \cup ... \cup \mathcal{W}_{i_n}$ cubren $\mathcal{Y}$. ■

Proposición 6.1.3. *Cada subespacio $\mathcal{Y}$ compacto de un espacio $\mathcal{X}$ (que es T_2) es cerrado.*

Demostración. Basandonos en las dos hipótesis, demostraremos que $\mathcal{X} - \mathcal{Y}$ es abierto, luego $\mathcal{Y}$ será cerrado.

Sea $a \in \mathcal{X} - \mathcal{Y}$ vamos a ver que existe un entorno de a que no interseca con $\mathcal{Y}$.

Para todo punto $y \in \mathcal{Y}$ tomamos entornos disjuntos $\mathcal{U}^y$ y $\mathcal{V}^y$ de los puntos a e y_0 respectivamente, utilizando la condición de ser T_2. Si ahora tomamos la colección $V = \{V^y \shortparallel y \in \mathcal{Y}\}$, es un recubrimiento por abiertos de $\mathcal{Y}$, y por ser este compacto existirá un subrecubrimiento finito $V_{y_1}, ..., V_{y_n}$ que recubrirá $\mathcal{Y}$.

Luego $\mathcal{V} = V_{y_1} \cup ... \cup V_{y_n}$ contiene a $\mathcal{Y}$ y es abierto. Además es disjunto de $\mathcal{U} = U_{y_1} \cap ... \cap U_{y_n}$, formado al tomar la intersección de los entornos de a. Por lo tanto $\mathcal{U}$ es entorno de a que no interseca a $\mathcal{Y}$, quedando así demostrado. ■

Proposición 6.1.4. *Sea $\mathcal{X}$ compacto y $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ una aplicación continua entonces existen* $\min f$ *y* $\max f$*.*

Demostración. Como $f(\mathcal{X})$ es compacto por 6.1.2, tenemos que $f(\mathcal{X}) \subset \mathbb{R}$ y sabemos que por ser $\mathbb{R}$ completo, existen x_1 y x_2 tal que

$$\min f = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \leq \max f \tag{6.12}$$

y estos puntos son alcanzados. ■

Proposición 6.1.5. *Sea $\mathcal{X}$ compacto e $\mathcal{Y}$ un subespacio infinito. Entonces $\mathcal{Y}$ tiene algún punto de acumulación.*

Demostración. Si $\mathcal{Y}$ no tuviese ningún punto de acumulación, entonces todos los puntos serían aislados, luego tendríamos la topología discreta. Ahora, como $\mathcal{Y}$ es cerrado dentro de un compacto, por 6.1.1 $\mathcal{Y}$ es compacto, y para ser compacto un conjunto con la topología discreta tiene que ser finito, lo que produce una contradicción. ■

Definición 6.1.3 (Definiciones)**.** Existen varias nociones estrechamente relacionadas con la compacidad:

1. ***Secuencialmente compacto***: un espacio topológico $\mathcal{X}$ es secuencialmente compacto si toda sucesión en $\mathcal{X}$ tiene una subsucesión convergente en $\mathcal{X}$.

2. ***σ-compacto***: un espacio topológico $\mathcal{X}$ es σ-compacto si es la unión numerable de subespacios compactos.

3. ***Numerablemente compacto***: Un espacio $\mathcal{X}$ es numerablemente compacto si cada subconjunto infinito de $\mathcal{X}$ tiene un punto límite.

4. ***Lindelöf***: véase en 5.3.3

Observación 6.1.2. La relación que hay entre ser compacto, secuencialmente compacto, σ-compacto, numerablemente compacto y Lindelöf es la siguiente:

1. Compacto $\Longrightarrow$ σ-compacto

2. σ-compacto $\Longrightarrow$ Lindelöf

3. σ-compacto $\implies$ Numerablemente compacto

4. En general, secuencialmente compacto no implica compacto ni compacto implica secuencialmente compacto. Sin embargo, un espacio métrico es secuencialmente compacto $\iff$ es compacto. $\diamondsuit$

Ahora, presentamos un resultado sobre espacios secuencialmente compactos que va a usarse con asiduidad en la sección de topología algebraica.

Lema 6.1.6 (Lebesgue)**.** *Sea $\mathcal{X}$ un espacio métrico secuencialmente compacto. Entonces, dado un recubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$, existe $\epsilon > 0$ tal que cada subconjunto de $\mathcal{X}$ de diámetro menor que ϵ está contenido en algún abierto de $\mathcal{A}$. En particular, cada bola $\mathrm{B}(x, \epsilon)$ está contenida en algún abierto de $\mathcal{A}$.*

Demostración. Supongamos que existe un recubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$ que no cumple la condición del lema, esto es, $\forall \epsilon > 0$ existe algún subconjunto de diámetro menor que ϵ que no está contenido en ningún abierto de $\mathcal{A}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea A_n un subconjunto de diámetro menor que $\frac{1}{n}$ que no esté contenido en ningún abierto de $\mathcal{A}$, y sea $x_n \in A_n$. Por ser $\mathcal{X}$ secuencialmente compacto, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ convergente a un punto $x \in \mathcal{X}$. Tomamos entonces $U \in \mathcal{A}$ que contenga a x, y $r > 0$ de forma que $\mathrm{B}(x, r) \subset U$.

Consideramos la bola $\mathrm{B}(x, \frac{r}{2})$. Por ser $\{x_{n_k}\}$ convergente, existe un i tal que $x_{n_i} \in \mathrm{B}(x, \frac{r}{2})$, y entonces $\frac{1}{n_i} < \frac{r}{2}$. Entonces, $x_{n_i} \in A_{n_i} \cap \mathrm{B}(x, \frac{r}{2})$, y el diámetro de A_{n_i} es menor que $\frac{r}{2}$, luego $A_{n_i} \subset \mathrm{B}(x_{n_i}, r) \subset U$, lo que contradice a la hipótesis. ■

Capítulo 7

Conexión

La noción de conexión es otra más de las nociones que ya conocíamos en $\mathbb{R}^n$ que pueden generalizarse a un espacio topológico arbitrario. Un conjunto es, intuitivamente, conexo, si está hecho "de una sola pieza".

7.1. Definición y propiedades

Empezaremos viendo, por supuesto, la definición, y una serie de caracterizaciones equivalentes.

Definición 7.1.1 (Conexión)**.** $\mathcal{X}$ es ***conexo*** si no es unión de dos abiertos disjuntos no vacíos, esto es, no existen $U, V \neq \emptyset$, abiertos, tales que $U \cap V = \emptyset$ y $X = U \cup V$.

Observación 7.1.1 (Conexión en subespacios)**.** De nuevo, como con compacidad, la conexión en un subconjunto no necesita una definición alternativa. Dado $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$, simplemente decimos que $\mathcal{Y}$ es conexo si lo es entendido como espacio equipado con la topología relativa. Nótese que esta definición es equivalente a la mucho más rebuscada que dábamos en $\mathbb{R}^n$, que involucraba abiertos relativos. $\diamondsuit$

Proposición 7.1.1 (Definiciones equivalentes de conexión)**.** *Sea un espacio topológico $\mathcal{X}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{X}$ es conexo.*

2. *$\mathcal{X}$ no es unión de dos cerrados disjuntos no vacíos, esto es, no existen $F, G \neq \emptyset$, cerrados, tales que $F \cap G = \emptyset$ y $X = F \cup G$.*

3. *No hay ningún conjunto abierto y cerrado no trivial, esto es, $\nexists U$ abierto y cerrado tal que $U \neq \emptyset$ y $U \neq \mathcal{X}$.*

Ejemplo 7.1.1. En $\mathbb{R}$, los conexos son los intervalos. En efecto, si $A \subset \mathbb{R}$ no es un intervalo, entonces por definición $\exists a \notin A$ tal que $\inf A < a < \sup A$. Entonces, $(-\infty, a) \cap A)$ y $(a, \infty) \cap A$ son dos abiertos disjuntos no vacíos cuya unión contiene a A. $\diamondsuit$

Ahora, vamos a repasar brevemente las propiedades que ya conocíamos de conjuntos conexos.

Proposición 7.1.2 (Imagen continua)**.** *La imagen continua de un conexo es un conexo.*

Demostración. Sea $\mathcal{X}$ conexo, $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y} = f(\mathcal{X})$ continua. Entonces queremos ver que $\mathcal{Y}$ es conexo. Para ello vamos a ver el contrarrecíproco: si $\mathcal{Y}$ no es conexo $\mathcal{X}$ tampoco.

Si existiera $A \subset \mathcal{Y}$ abierto y cerrado no trivial (esto es, que no es ni el vacío ni el total), entonces por ser f continua $f^{-1}(A)$ es también abierta y cerrada, y por ser f sobreyectiva $f^{-1}(A)$ no es el vacío ni el total. Por tanto $\mathcal{X}$ no es conexo. ■

Teorema 7.1.3. *Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conexos de $\mathcal{X}$ y existe $a \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ es conexo. Ahora*

Demostración. Supongamos que existe $S \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ abierto y cerrado. Vamos a ver que necesariamente es el vacío o el total. Entonces, para cada $i \in I$ $S \cap A_i \subset A_i$ y es abierto y cerrado en A_i. Ahora, como A_i es conexo, $S \cap A_i$ tiene que ser necesariamente el vacío o el total, para cada $i \in I$. Distinguimos pues dos casos:

1. Si $S \cap A_i = \emptyset$ $\forall i \in I$, entonces $S = \emptyset$ y ya está.

2. Si $\exists i \in I$ tal que $S \cap A_i = A_i$, entonces $\exists a \in S \cap A_i$ que por hipótesis verifica que $a \in S \cap A_j$ para todo $j \in I$. Entonces ninguno de los $S \cap A_j$ es vacío, y por tanto $S \cap A_j = A_j$ $\forall j \in I$, es decir, $S = \bigcup_{i \in I} A_i$. ■

Este teorema es extremadamente útil para garantizar la conexión de un sinnúmero de conjuntos, y genera un gran abanico de corolarios y consecuencias. Aquí vamos a detallar algunos que se usan con frecuencia.

Corolario 7.1.4. *Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conexos que cumple que $\exists i_0 \in I$ tal que $A_{i_0} \cap A_i \neq \emptyset$ $\forall i \in I$. Entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ es conexo. En particular, el resultado se verifica si la familia cumple que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ $\forall i \neq j$.*

Demostración. Como $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ por hipótesis, podemos aplicar el teorema 7.1.3 para cada $i \in I$, y por tanto cada $A_{i_0} \cup A_i$ es conexo. Ahora, escribimos:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (A_i \cup A_{i_0})$$

y como todos comparten los elementos de A_{i_0}, podemos aplicar el teorema de nuevo. ■

Corolario 7.1.5. *Sea una cadena $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ de conexos que verifica que $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$. Entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es conexo.*

Demostración. Por inducción, se aplica el teorema 7.1.3 a $A_1 \cup A_2$, $(A_1 \cup A_2) \cup A_3$, ..., $\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup A_{k+1}$. ■

Observación 7.1.2. El corolario anterior también se verifica si la sucesión de conjuntos es numerable, pero no lo vamos a probar aquí. ♢

El siguiente resultado, aunque también es consecuencia del teorema 7.1.3, es más que un mero corolario y merece la categoría de teorema por sí mismo.

Teorema 7.1.6. *Sea A conexo, B tal que $A \subset B \subset \overline{A}$. Entonces B es conexo. En particular $\overline{A}$ es conexo.*

Demostración. Como podemos escribir:

$$B = \bigcup_{b \in B \setminus A} (A \cup \{b\})$$

y todos comparten un punto, entonces basta probar que cada $A \cup \{b\} \subset \overline{A}$ es conexo, pues en ese caso el teorema 7.1.3 nos garantiza la conexión de B.

Supongamos que $\exists C \subset A \cup \{b\}$ abierto y cerrado y no trivial. Entonces, $C \cap A \subset A$ y es abierto y cerrado en A. Por tanto, A es conexo, y distinguimos dos casos:

- Si $C \cap A = \emptyset$, entonces $C = \{b\}$ y por tanto $\{b\}$ es abierto, luego, como el entorno $\{b\}$ de sí mismo no corta con A, $b \notin \overline{A}$, lo cual es una contradicción.

- Si $C \cap A = A$, $C = A$ y por tanto A es cerrado, pero $b \notin A = \overline{A}$, que de nuevo es una contradicción. ■

Aprovechando los resultados anteriores podemos garantizar la conexión de un buen número de espacios.

Ejemplo 7.1.2. Veamos algunos ejemplos de conjuntos conexos:

1. En $\mathbb{R}^n$, se dice que un conjunto es ***convexo*** si para cada par de puntos el segmento que los une también está en el conjunto; y se dice que es ***estrellado*** si existe un punto tal que el segmento de él a cualquier otro está en el conjunto. Si un conjunto es convexo entonces es estrellado, y si es estrellado entonces es conexo. Además, las implicaciones recíprocas no se verifican.

   En efecto, un conjunto A estrellado se puede escribir como:

   $$A = \bigcup_{a \in A} [a_0, a]$$

   para cierto $a_0 \in A$. Cada segmento $[a_0, a]$ es conexo por la proposición 7.1.2, al ser la imagen del intervalo conexo $[0, 1]$ por la aplicación:

   $$t \mapsto (1 - t)a_0 + ta$$

   y por tanto, por el teorema 7.1.3, como todos comparten el punto a_0 su unión es conexa.

   Nótese que ni la convexidad ni ser estrellado son propiedades topológicas; ambas son propiedades métricas: su definición solo tiene sentido en un espacio que, al menos, tenga definida una distancia.

2. Una circunferencia en $\mathbb{R}^2$ es conexa, pero no es estrellada. En efecto, es conexa por ser la imagen de $[0, 2\pi]$ por la aplicación $t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

3. El grafo de la función $\sin \frac{1}{x}$ para $x > 0$, que escribimos:

   $$C = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \ : \ x > 0 \right\}$$

   es conexo por ser la imagen continua de $(0, \infty)$ por la aplicación:

   $$x \mapsto \left(x, \sin \frac{1}{x} \right)$$

   Lo que es más interesante, para cualquier $a \in [-1, 1]$ se verifica que $\{(0, a)\}$ es adherente a C y por tanto que $C \cup \{(0, a)\}$ es conexo.

4. Consideramos el conjunto:

   $$C = \big(\{0\} \times (0, 1]\big) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1] \times \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right)$$

   que es unión de segmentos horizontales cada vez más juntos y de un segmento vertical. Este es trivialmente conexo por el corolario 7.1.4. Lo particular es que si unimos a C el segmento horizontal:

   $$(0, 1) \times \{0\}$$

   sigue siendo conexo por ser adherencia de C. ♢

Completamos esta sección con una propiedad interesante garantizada por la conexión.

Lema 7.1.7. *Sea $\mathcal{X}$ conexo y $\{U_i\}_{i \in I}$ una familia de abiertos, de forma que $\mathcal{X} = \bigcup_{i \in I} U_i$. Dos puntos cualesquiera $x, y \in \mathcal{X}$ se pueden conectar mediante una cadena finita $\{U_{i_k}\}_{k=1}^n$ de abiertos de la familia que verifique que $U_{i_k} \cap U_{i_{k+1}} \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $A = \{z \in \mathcal{X} \ : \ \text{existe una cadena de } x \text{ a } z\}$. A es claramente no vacío, puesto que $x \in A$. Entonces, una forma de ver que $\mathcal{X} = A$, que es lo que queremos encontrar, es comprobar que A es abierto y cerrado, puesto que entonces solo puede ser el total (pues hemos visto que es no vacío).

- Veamos que A es abierto. En efecto, dado $z \in A$, queremos ver que existe un abierto U tal que $z \in U \subset A$. Pero basta con tomar el último de la cadena, que ya cumple estas condiciones.
- Ahora veamos que es cerrado. En efecto, si $z \in \overline{A}$, existe un abierto U_{i_0} tal que$U_{i_0} \cap A \neq \emptyset$. Entonces, tomamos un punto y de la intersección, y como está en A hay una cadena de x a y. Uniendo U_{i_0} a la cadena tenemos una cadena de x a z, y por tanto $z \in A$, luego $A = \overline{A}$. ■

Observación 7.1.3. En particular, puedo recubrir cualquier abierto conexo de $\mathbb{R}^n$ por bolas, y por tanto existe una cadena de bolas que une cualquier par de puntos. Si tomo un punto en cada intersección entre bolas consecutivas de la cadena y los uno, tengo una poligonal que conecta los dos puntos. Entonces, si $C \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, C es conexo si y solo si es conexo por poligonales (la definición de conexión por poligonales y la implicación inversa corresponden a cálculo diferencial).

♢

Parte II

Topología algebraica

Capítulo 8

Grupo fundamental

La topología algebraica comprende métodos que son significativamente distintos a los empleados hasta ahora en topología general. Intenta asignar a un espacio topológico algún invariante algebraico (por ejemplo, un grupo) y utilizar las propiedades de este invariante para obtener información sobre la topología. Este capítulo se centrará, pues, en el estudio del grupo fundamental, que es uno de estos invariantes.

8.1. Homotopía

En particular, introducimos la homotopía con el propósito de definir más adelante la noción de grupo fundamental. Dos caminos son, intuitivamente, homótopos si podemos deformar uno en el otro de forma continua.

Ejemplo 8.1.1. La interpolación lineal produce homotopías relativas. En efecto, consideramos la homotopía:

$$H_s = (1-s)f + sg$$

Si $f(a) = g(a)$ para algún $a \in \mathcal{Y}$, entonces resulta que:

$$H_s(a) = (1-s)f(a) + sg(a) = f(a) = g(a)$$

En particular, en $\mathbb{R}^n$, cualquier par de caminos cuyos extremos coincidan son homótopos con extremos fijos. De esta forma, en cualquier espacio $\mathcal{X}$ homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ por un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \to \mathcal{X}$, cualesquiera dos caminos cuyos extremos coincidan son homótopos con extremos fijos. En efecto, podemos fabricar la homotopía fácilmente: sean σ, τ los caminos en $\mathcal{X}$. Consideramos α, β caminos en $\mathbb{R}^n$, de forma que verifiquen que $\sigma = h \circ \alpha$, $\tau = h \circ \beta$. Como α y β comparten extremos y están en $\mathbb{R}^n$, son homótopos con extremos fijos, y dada la homotopía H_s, resulta que $h \circ H_s$ es homotopía entre σ y τ. ♢

8.2. Esferas

El estudio de las homotopías en las esferas es interesante como ejemplo, y permite, basándose tan solo en lo visto en la anterior sección, demostrar un resultado no trivial.

Empezamos definiendo formalmente la esfera, para aclarar la notación.

Definición 8.2.1 (Esfera)**.** Llamamos ***esfera*** de dimensión n y denotamos $\mathbb{S}^n$ al subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídea. Cuando se considera como espacio topológico es con la restricción de la topología usual, si no se especifica otra.

Observación 8.2.1. Si bien la esfera de la definición anterior es la esfera unidad, nótese que todas las esferas de cualquier radio y centradas en cualquier punto de $\mathbb{R}^{n+1}$ son homeomorfas a la esfera que hemos definido. ♢

El resultado no trivial que mencionábamos en la introducción de esta sección es el siguiente:

Proposición 8.2.1. *Dos caminos en una esfera $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$, que tengan los mismos extremos son homótopos con extremos fijos.*

Demostración. Consideramos los caminos $\sigma, \tau : [0,1] \to \mathbb{S}^n$, tales que $\sigma(0) = \tau(0)$ y $\sigma(1) = \tau(1)$. Para probar que son homótopos con extremos fijos, basta con probar que existe un punto $a \in \mathbb{S}^n$ tal que $a \notin \sigma, \tau$. Ya hemos comprobado antes que esto es suficiente (FALTA CITA).

Entonces, vamos a separar la esfera en dos abiertos U y V, de forma que $\mathbb{S}^n = U \cup V$. Para un cierto $a \in \mathbb{S}^n$, tal que ni a ni $-a$ es uno de los extremos del camino, elegimos U y V tales que:

$$\begin{cases} U = \mathbb{S}^n \setminus \{a\} \\ V = \mathbb{S}^n \setminus \{-a\} \end{cases}$$

es decir, U es la esfera quitando un punto y V es la esfera quitando el punto antipodal al anterior. De esta forma, ya hemos visto el hecho de que tanto U como V son homeomorfos a $\mathbb{R}^n$, por ser la esfera sin un punto (FALTA CITA, sé que lo hemos visto en clase pero no lo he encontrado). De esta forma, $U \cap V \approx \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, puesto que una esfera sin un punto es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, y por tanto una esfera sin dos puntos es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ sin un punto. Además, como $n \geq 2$, sabemos que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es conexo por caminos, y entonces también lo es $U \cap V$.

Podemos encontrar una partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = 1$ del intervalo $[0,1]$ que verifique que $\sigma([t_{i-1}, t_i]) \subset U$ o V para cada i. En efecto, sabemos que $\{\sigma^{-1}(U), \sigma^{-1}(V)$ es recubrimiento abierto de $[0,1]$. Por el lema de Lebesgue (lema 6.1.6), que podemos aplicar por ser $[0,1]$ un espacio métrico compacto (y por tanto, por la observación 6.1.2, secuencialmente compacto), para cada $x \in [0,1]$ $\exists \epsilon > 0$ que cumple que $\mathrm{B}(x, \epsilon) \subset \sigma^{-1}(U)$ o $\sigma^{-1}(V)$. Con lo cual, tomamos la partición anterior de forma que $t_i - t_{i-1} < \epsilon$ $\forall i$, y entonces tenemos que, para x en el intervalo:

$$x \in [t_{i-1}, t_i] \subset B(x, \epsilon) \subset \sigma^{-1}(U) \text{ o } \sigma^{-1}(V)$$

Por tanto, cada intervalo de la partición está en $\sigma^{-1}(U)$ o $\sigma^{-1}(V)$. Además, eliminando las divisiones innecesarias tenemos una partición que alterna estar en $\sigma^{-1}(U)$ y en $\sigma^{-1}(V)$.

Sea $x_0 \in U \cap V$. Vamos a homotopar los segmentos en V a segmentos en U. Para cada i tal que $\sigma\restriction_{[t_{i-1}, t_i]} \subset V$, definimos $x_{i-1} = \sigma(t_{i-1})$, $x_i = \sigma(t_i)$. Resulta que $x_{i-1}, x_i \subset U \cap V \approx \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Como ya hemos visto que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es conexo por caminos, entonces necesariamente existe $\sigma_i : [t_{i-1}, t_i] \to U \cap V$ camino entre x_{i-1} y x_i. De esta forma, los caminos $\sigma\restriction_{[t_{i-1}, t_i]}$ y σ_i son homótopos en $V \approx \mathbb{R}^n$, con lo cual son homótopos con extremos fijos en $V \subset \mathbb{S}^n$. Repitiendo el argumento para cada segmento de V, reemplazándolo por el correspondiente σ_i, obtenemos un nuevo camino $\tilde{\sigma} \subset U$ y claramente $\sigma \simeq \tilde{\sigma}$ con extremos fijos.

Por último, repetimos todo el argumento anterior con τ, y por tanto $\exists \tilde{\tau}$ tal que $\tau \simeq \tilde{\tau}$ con extremos fijos y $\tilde{\tau} \subset U \approx \mathbb{R}^n$. Entonces, $\tilde{\sigma} \approx \tilde{\tau}$ con extremos fijos en $U \subset \mathbb{S}^n$ y, por ser $\simeq$ con extremos fijos de equivalencia, $\sigma \simeq \tau$ con extremos fijos. ∎

Un resultado muy relacionado ha sido un problema abierto hasta hace muy poco tiempo:

Conjetura 8.2.2 (Poincaré)**.** *La propiedad de la proposición 8.2.1 caracteriza a la esfera $\mathbb{S}^3$. Esto es, si una variedad de dimensión 3 de $\mathbb{R}^4$ verifica que cualquier par de caminos en ella que tengan los mismos extremos son homótopos con extremos fijos, entonces es homeomorfa a la esfera unidad.*

La versión generalizada de esta conjetura, para la esfera $\mathbb{S}^n$, también es cierta y tiene interés. Históricamente:

- Para $n = 2$, el resultado se conoce desde el siglo XIX.
- Para $n = 5$, Zeeman lo demostró en 1961.
- Para $n \geq 6$, Smale lo demostró en 1961.
- Para $n = 4$, Donaldson lo demostró en 1985.
- Para $n = 3$, la versión original de la conjetura, Perelman lo demostró en 2006. La conjetura era uno de los 7 problemas del milenio, dotados con 1.000.000$. Perelman rechazó tanto este premio como la medalla Fields que se le intentó conceder por demostrar la conjetura.

Parte III

Apéndices

Apéndice A

Espacios Métricos

En este apéndice veremos con detalle las relaciones entre los archiestudiados espacios métricos con los espacios topológicos.

A.1. Normas

En esta comentamos (entre otras cosas) algunos resultados interesantes (y bonitos) sobre normas que usualmente se usan como mantras satánicos (pues jamás se demuestran).

A.1.1. Conceptos Previos

A continuación introducimos la definición de norma y los conceptos que a ella subyacen.

Definición A.1.1 (Norma)**.** Es harto conocido, casi desde que Eduardo Aguirre[1] llevaba pantalones cortos, que una ***norma*** es una aplicación $\|\cdot\| : E \to \mathbb{K}$ que verifica

1. Es nula si y solo si el vector es nulo. Es decir, dado $u \in \mathbb{R}^n$

$$\|u\| = 0 \iff u = 0$$

2. Tiene un comportamiento lineal respecto a escalares. Esto es

$$\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$$

3. Verifica la desigualdad triangular o de Minkowski, es decir, dados dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Una definición que surge de forma automática es la de espacio vectorial normado.

Definición A.1.2 (Espacio Vectorial Normado)**.** Llamamos ***espacio vectorial normado*** a un espacio vectorial E equipado con una norma $\|\cdot\|$, es decir, al par $(E, \|\cdot\|)$.

A.1.2. Topologización de un Espacio Vectorial Normado

Todo espacio vectorial normado puede ser "metrizado" de forma canónica, tal y como muestra la siguiente definición.

Definición A.1.3 (Métrica Procedente de la Norma)**.** Decimos que una métrica d definida sobre un espacio vectorial E ***procede de una norma*** si existe una norma $\|\cdot\|$ tal que cumple

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

[1] En la mitología de los Dobles Grados, profesor de Álgebra Lineal conocido por sus refranes y frases célebres.

Así, como todo espacio métrico es, a su vez, un espacio topológico (ver ejemplo 1.1.1), podemos preguntarnos qué relaciones hay entre las topologías engendradas por dos normas. En particular, cabe preguntarse cuándo dos normas generan la misma topología.

Definición A.1.4 (Equivalencia de Normas)**.** Decimos que dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son ***equivalentes*** si engendran la misma topología.

A.1.3. Teorema General de Equivalencia

Esta sección está dedicada a demostrar el siguiente teorema.

Teorema A.1.1 (Teorema General de Equivalencia)**.** *Sea E un espacio vectorial del dimensión finita n. Entonces, todas las normas definidas sobre E son equivalentes.*

Como la demostración del teorema es un poco larga (tampoco demasiado), la dotaremos de una sección propia.

Demostración del Teorema General de Equivalencia

Nuestro objetivo es, dadas dos normas arbitrarias, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ de E, demostrar que las topologías engendradas por ellas son iguales. Es decir

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} = \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$$

Para ello, estudiemos y repasemos algunas propiedades generales de las normas.

Otra propiedad a tener en cuenta es la continuidad. Dado que esta será crucial en la demostración, nos detendremos un poco más en ella.

Veamos que una norma $\|\cdot\|$ es continua en la topología usual. Con esto último queremos decir que en $\mathbb{R}^n$ consideramos la topología definida por la distancia euclídea (que a su vez se define a partir de la norma euclídea $\|\cdot\|_e$) y en $\mathbb{R}$ la topología definida por el valor absoluto.

Por tanto, para demostrar que una norma es continua en la topología usual debemos probar que, dado $a \in \mathbb{R}^n$ y dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si

$$x \in \mathrm{B}_{\|\cdot\|_e}(a, \delta)$$

entonces

$$f(x) = \|x\| \in \mathrm{B}_{|\cdot|}(f(a), \varepsilon) = \mathrm{B}_{|\cdot|}(\|a\|, \varepsilon)$$

En otras palabras, dado $a \in \mathbb{R}^n$ y dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si

$$\|x - a\|_e < \delta$$

entonces

$$|\|x\| - \|a\|| < \varepsilon$$

En efecto, aplicando las propiedades antes vistas, tenemos que

$$|\|x\| - \|a\|| \leq |\|x - a\|| = \|x - a\| = \|\sum_i (x_i - a_i)e_i\| \overset{2,3.}{\leq} \sum_i |x_i - a_i| \|e_i\|$$

Teniendo en cuenta que $|x_i - a_i| \leq \|x - a\|_e$, queda

$$|\|x\| - \|a\|| \leq \sum_i \|x - a\|_e \|e_i\| = \|x - a\|_e \sum_i \|e_i\|$$

donde $\sum_i \|e_i\|$ es una constante que denotaremos por C.

Así, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon / C > 0$ tal que si $\|x - a\|_e < \delta$, entonces

$$|\|x\| - \|a\|| < \varepsilon$$

con lo que queda probada la continuidad de la norma $\|\cdot\|$.

Ya tenemos todo lo necesario para realizar la demostración. Una vez que probemos las dos contenciones de las topologías, es decir

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2} \text{ y } \mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} \supset \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$$

habremos terminado.
Comencemos notando que la función

$$\frac{\|\cdot\|_1}{\|\cdot\|_2} : \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

es continua con la topología usual en $\mathbb{S}^{n-1}$, ya que el denominador no se anula y las normas son continuas. Dado que $\mathbb{S}^{n-1}$ es compacto, la función es acotada y alcanza el mínimo. Como el numerador tampoco se anula en el compacto, esto equivale a decir que existen $a, b > 0$ tal que

$$0 < a \leq \frac{\|\cdot\|_1}{\|\cdot\|_2} \leq b$$

en $\mathbb{S}^{n-1}$. Es decir, para todo $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ se tiene que

$$0 < a\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq b\|v\|_2$$

Lo deseable sería tener esta desigualdad para un vector cualquiera de $\mathbb{R}^n$ y así tener relacionadas las distancias de ambas topologías. Veamos que así es.

Sea $u \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, existe un vector $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ y un número positivo λ tal que $u = \lambda v$. Entonces, multiplicando por λ en la desigualdad anterior, dado que es positivo, y utilizando la propiedad 2, obtenemos

$$a\lambda\|v\|_2 \leq \lambda\|v\|_1 \leq b\lambda\|v\|_2 \iff a\|\lambda v\|_2 \leq \|\lambda v\|_1 \leq b\|\lambda v\|_2 \iff a\|u\|_2 \leq \|u\|_1 \leq b\|u\|_2$$

Por otro lado, si u es el vector nulo, la desigualdad se cumple trivialmente. Por tanto, para todo vector u de $\mathbb{R}^n$ se tiene que

$$a\|u\|_2 \leq \|u\|_1 \leq b\|u\|_2 \tag{A.1}$$

donde $a, b > 0$.

Por último, relacionemos los abiertos de ambas topologías para obtener las dos inclusiones. Una vez que tenemos la relación entre las normas, es fácil encontrar una relación entre las bolas de ambas topologías, dado que estas se definen a partir de las distancias que definen las normas.

Sea $x \in \mathrm{B}_{d_1}(\rho, \varepsilon)$. Esto implica que $\|x - \rho\|_1 < \varepsilon$. Por la desigualdad (A.1) se tiene entonces que $\|x - \rho\|_2 \leq \varepsilon/a$, lo cual a su vez implica que $x \in \mathrm{B}_{d_2}(\rho, \varepsilon/a)$. Es decir,

$$\mathrm{B}_{d_1}(\rho, \varepsilon) \subset \mathrm{B}_{d_2}(\rho, \varepsilon/a)$$

Por tanto, dado $\mathcal{U}$ un abierto de la topología $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$ siempre podemos encontrar un abierto de la topología $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1}$ contenido en él. Esto es evidente ya que al ser $\mathcal{U}$ un abierto, contendrá una bola B_{d_2} que a su vez, por lo que acabamos de ver, contiene una bola B_{d_1}, que es un abierto de $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1}$. Esto implica que la topología definida por la norma $\|\cdot\|_1$ tiene más abiertos, ya que al menos tiene uno por cada abierto de $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$. Es decir, acabamos de demostrar que

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} \supset \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$$

De la misma forma, dado $x \in \mathrm{B}_{d_2}(\rho, \varepsilon)$, es decir, $\|x - \rho\|_2 < \varepsilon$, por la desigualdad (A.1) se tiene que $\|x - \rho\|_1 < b\varepsilon$, lo cual implica que $x \in \mathrm{B}_{d_1}(\rho, b\varepsilon)$. Es decir,

$$\mathrm{B}_{d_2}(\rho, \varepsilon) \subset \mathrm{B}_{d_1}(\rho, b\varepsilon)$$

Razonando como acabamos de hacer, esto implica que

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$$

Así, finalmente, se concluye que

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} = \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2} \tag{A.2}$$

Dado que las normas eran arbitrarias, queda demostrado que todas las normas de $\mathbb{R}^n$ son equivalentes.

Apéndice B

Funtores y teoría de categorías

Este anexo, si bien no es necesario para entender el apartado correspondiente, quiere ser una brevísima introducción a los conceptos más básicos de teoría de categorías, de forma que el lector comprenda qué es realmente un funtor y pueda aplicar este conocimiento a la topología algebraica, donde los utilizamos.

Empezamos definiendo pues qué es una categoría, pero para ello hay que conocer antes el concepto de clase.

B.1. Clases

Definición B.1.1 (Clase)**.** Una ***clase*** es una colección de objetos (a menudo conjuntos, con una estructura adicional) que pueden ser definidos inequívocamente por una propiedad común. Por ejemplo, podemos considerar la clase de los grupos o la clase de los espacios vectoriales.

Observación B.1.1 (Clase propia)**.** Decimos que una clase es ***propia*** si no es un conjunto. Desde luego, cualquier conjunto es una clase, lo cual se sigue directamente de la definición (la propiedad es que un elemento pertenece a la clase cuando pertenece al conjunto).

Así, de forma muy intuitiva, podemos considerar una clase propia como un "conjunto muy grande". Si se pudieran definir conjuntos como definimos clases propias, citando una propiedad común, introduciríamos paradojas en la teoría de conjuntos, como la archiconocida paradoja de Russell. De esta forma, se crea el concepto de clase, que trata de solventar este obstáculo. Por ejemplo, la paradoja de Russell no se da con clases porque no existe la noción de que una clase esté contenida en otra.

Nótese que en algunas teorías de conjuntos formales, y en particular con los axiomas ZFC, las clases no se definen. De esta forma, se aceptan en cuanto que todo lo que se formule con clases se pueda formular sin ellas, usando, en particular, la propiedad asociada, expresable con una fórmula. En este sentido, se pueden entender las clases como "clases de equivalencia de fórmulas". $\diamondsuit$

B.2. Categorías y funtores

Ahora sí, podemos definir una categoría. La definición puede variar según el autor, pero el concepto por detrás es siempre el mismo.

Definición B.2.1 (Categoría)**.** Una ***categoría*** consiste en:

- Una clase de ***objetos*** (a menudo conjuntos, con o sin estructura adicional).
- Una clase de ***morfismos***, que van de un objeto de los anteriores a otro. Un morfismo es una aplicación entre dos objetos que preserva su estructura. Por ejemplo, si los objetos son conjuntos los morfismos son funciones, si son grupos los morfismos son homomorfismos, y si los objetos son espacios topológicos los morfismos son funciones continuas.

- Una operación de ***composición***, que dados dos morfismos $f : a \to b$, $g : b \to c$ devuelva $g \circ f : a \to c$.

Y los siguientes axiomas:

I **Asociatividad de la composición:** la composición de morfismos es asociativa. Es decir, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

II **Morfismo identidad:** para cada objeto x, existe un morfismo $1_x : x \to x$ de forma que para cualquier $f : a \to x$ y $g : x \to b$, $1_x \circ f = f$ y $g \circ 1_x = g$.

Ahora ya podemos definir el concepto de funtor.

Definición B.2.2 (Funtor)**.** Un ***funtor*** o ***functor*** es una aplicación $F : C \to D$ entre dos categorías C y D que asigna a cada objeto otro objeto y a cada morfismo otro morfismo de forma que preserva los morfismos identidad y la composición. Es decir, para cada $X \in C$, $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$; y para cada $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Observación B.2.1. Intuitivamente, un funtor es un homomorfismo para categorías: una aplicación que conserva la estructura de las categorías. En particular, la colección de categorías cuyos objetos son conjuntos (no son clases propias) es una categoría, y en este caso un funtor es él mismo un morfismo de esta categoría de categorías pequeñas. $\diamondsuit$

B.3. *General nonsense*

La teoría de categorías tiene utilidad para abstraer otros conceptos matemáticos en muchas áreas. Su propósito es usar esta abstracción para poder probar resultados muy complicados de forma simple. En nuestro caso, la usaremos para traducir propiedades de los espacios topológicos a propiedades de su grupo fundamental asociado, como veremos en la sección correspondiente.

De esta forma, se suelen agrupar este tipo de demostraciones de teoría de categorías bajo la denominación ***general nonsense*** o ***abstract nonsense***. En efecto, a menudo este tipo de demostraciones pueden parecer desconectadas de lo que se está demostrando, al recurrir a los conceptos abstractos de teoría de categorías. Este nombre no es, en principio, derogatorio; su intención es más bien avisar en tono ligero de este nivel de abstracción.

Apéndice C

Cosas Pendientes

C.1. Examen Septiembre 2007

Problema 1

Se considera en el plano $\mathbb{R}^2$ los *triángulos semiabiertos* de vértice $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ y anchura $\varepsilon > 0$ definidos por:

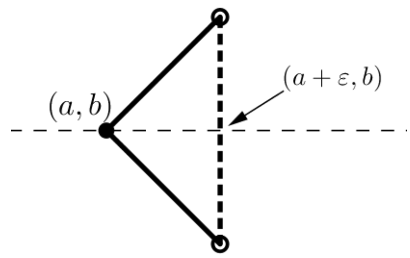
$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \shortparallel x - y \geq a - b, x + y \geq a + b, a \leq x \leq a + \varepsilon\} \tag{C.1}$$

y equipamos $\mathbb{R}^2$ con la topología $\mathcal{T}$ que tiene todos esos triángulos por bases de abiertos.

1. Calcular la adherencia (en $\mathcal{T}$) de un triángulo semiabierto $\mathcal{U}$.
2. Estudiar si $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ es Lindelöf. ¿Y es localmente compacto?
3. Demostrar que los únicos conjuntos conexos para esta topología son los puntos.
4. Existe alguna topología $\mathcal{T}_1$ en $\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{T}$ sea la topología del producto $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_1$? ¿Y tal que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ sea homeomorfo a $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_1)$? a

Demostración. Lo primero de todo, vamos a hacernos una idea de como son estos abiertos:

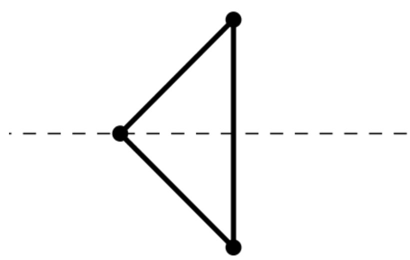
Por la descripción de estos abiertos, vemos que los abiertos son de la siguiente manera: Estos



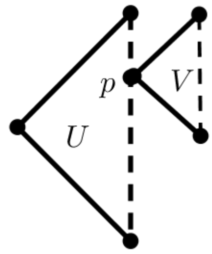
serán los abiertos de nuestra base de abiertos de la topología $\mathcal{T}$. Algo muy importante y que se resaltará siempre es que solo hemos de responder a lo que se nos pide. En este caso ya se nos dice que es una base de la topología, por lo tanto no tenemos que comprobarlo ni nada por el estilo. Podemos jugar con este hecho desde el principio, ya que nos lo da el enunciado.

1. Vamos a hacer una serie de apreciaciones antes de proceder a la resolución de este apartado. Hemos de observar que $\mathcal{T}_u \subsetneq \mathcal{T}$. Esto implica que la topología $\mathcal{T}$ es más fina que la usual. Esto se desprende de que cualquier abierto de de la usual contiene un abierto de $\mathcal{T}$, y que esta contención es estricta de que los triángulos no son abiertos en la usual.(La otra contención no se da ya que no podemos meter abiertos de la usual para ciertos puntos del triángulo, como por ejemplo el vértice).

   Vamos a calcular entonces la **adherencia de un triángulo semiabierto**. La primera idea intuitiva que nos surge es añadirle al abierto el segmento vertical con los extremos incluidos que une los dos vértices del triángulo.

   Estos son cerrados en la topología usual, $\implies \mathcal{U} \subset \overline{U}^{usual}$, luego $\mathcal{U} \subset \overline{U}^{usual} \subset \overline{U}$. Ahora vamos a ver si los puntos que hemos añadido son adherentes. A esto respondemos que no (si llamamos r al segmento citado), ya que $\forall p \in r, \exists V$ entorno de $p \shortparallel \mathcal{V} \cap \mathcal{U} = \emptyset$.



Por lo tanto la adherencia de $\mathcal{U}$ en esta topología es el propio $\mathcal{U}$, ya que como hemos visto, los puntos de ese segmento no son adherentes.

Si lo hubieramos visto comprobando "uno a uno" todos los puntos habría que decir además que los puntos de fuera del triángulo no son adherentes ya que existe un abierto en la usual que contiene un triángulo (que es entorno que no corta al conjunto).

Luego $\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$, lo que implica además que es una base de abiertos y cerrados simultáneamente.

2. Veamos si el espacio topológico es **Lindelöf** 5.3.3 con esta topología.

   Lo primero que tenemos que intentar hacer es ver si hay subespacios especiales (por ejemplo rectas verticales).

   Tomamos la recta vertical r, subespacio de nuestro espacio topológico con la topología relativa. Si lo cortamos con los abiertos relativos, observamos que $p = r \cap \mathcal{U}^{abierto\ rel.\ en\ r} \implies \mathcal{T}|_r$ es la topología discreta $\implies$ No es II axioma por ser recta con topología discreta $\implies r = \cup_{p \in r}\{p\}$.

   Por lo tanto $\mathcal{T}$ no puede ser II axioma, ya que esta es una propiedad hereditaria. Además, $\mathcal{T}$ tampoco es Lindelöf ya que esta es una propiedad hereditaria para cerrados. Como r es cerrado, $\mathcal{T}$ tampoco es Lindelöf.

   Para comprobar si es **localmente compacto** procederemos del siguiente modo. Nos hacemos la pregunta, ¿existirá algún entorno compacto?.Supongamos que existe algún entorno compacto $\mathbb{K}^p$. $\exists \mathbb{K}^p \supset \mathcal{U} = \overline{U} \implies \mathcal{U}$ compacto. Nos centraremos en ello. Si la respuesta fuera negativa, si encuentro un $\mathrm{L}^{cerrado} \subset \mathcal{U}$ que no es compacto habremos terminado. Si tomamos un segmento con los extremos contenidos, vertical, y contenido en un triángulo al que llamaremos $\mathcal{I}$. Si $\exists \mathbb{K}^p \supset \mathcal{U} \supset \mathcal{I}$, la topología de este segmento es la discreta por ser un subespacio de el r que tomamos antes. Además es cerrado en la topología usual. Por lo tanto, $\mathcal{T}|_{\mathcal{I}}$ es la topología discreta $\implies$ no es compacto (no hay un subrecubrimiento finito), luego hemos terminado ya que al $\mathcal{I}$ no ser compacto no puede existir el supuesto compacto que supusimos.

3. Veamos si es totalmente disconexo.

   Como se vió en resultados teóricos, si un espacio tiene una base *clopen* y es T_0 entonces es totalmente disconexo.

   SUpongamos que $p, q \in \mathcal{X}, p \neq q\ y\ p, q \in \mathcal{C}$. Veamos que $\mathcal{C}$ no es conexo. Ponemos $\mathcal{C} = (\mathcal{C} \cap \mathcal{U}) \cup (\mathcal{C} \setminus \mathcal{U})$, sabemos que $\mathcal{U}$ es abierto ambiente ($\mathcal{U}$ es abierto de uno de los puntos que no tiene al otro, que existe por ser T_0), y que estas intersecciones son no vacías ya que contienen a los puntos p y q. Por lo tanto tenemos dos cerrados que producen la desconexión, y como es para cualquiera dos puntos, el espacio es totalmente disconexo con esta topología. Además se necesita que haya dos puntos distintos.

4. Para ver si algo es topología producto hemos de mirar los productos que lo conforman. Si cogemos el producto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y miramos como son las topologías es tudiando cada $\mathbb{R}$ como subespacio vemos que la vértical tiene la topología discreta y la horizontal la Sorgenfray, luego los abiertos del producto cartesiano son puntos por intervalos semiabiertos. Por lo tanro comprobamos que no obtenemos la topología buscada. $\mathcal{T}_{[,)} \times \mathcal{T}_d \supsetneq \mathcal{T}$.

■

Número 1.1. Sea $\mathcal{X}$ un conjunto, y $\mathcal{T}_{\text{CF}}$ la familia de todos los subconjuntos de $\mathcal{X}$ cuyo complementario es finito, más el conjunto vacío. Probar que $\mathcal{T}_{\text{CF}}$ es una topología en X. Esta topología se llama, por razones evidentes, *topología de los complementarios finitos*. ¿Qué topología obtenemos si $\mathcal{X}$ es un conjunto finito?

A partir del enunciado se deduce que los abiertos de esta topología son los elementos de la colección

$$\mathcal{T}_{\text{CF}} = \{U \subset \mathcal{X} : U = \emptyset \text{ o } \mathcal{X}\backslash U \equiv U^c \text{ es finito}\}.$$

Veamos que efectivamente $\mathcal{T}_{\text{CF}}$ es una topología al verificar las condiciones necesarias.

- En primer lugar, el vacío pertenece a esta por definición. Además, el complementario del total $\mathcal{X}$ (el vacío) es finito, luego $\mathcal{X}$ también pertenece a $\mathcal{T}_{\text{CF}}$.
- Por otro lado, sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ para un cierto conjunto de índices I una colección arbitraria de elementos de $\mathcal{T}_{\text{CF}}$, teniéndose que

$$\mathcal{X}\backslash \bigcup_\alpha U_\alpha = \bigcap_\alpha (\mathcal{X}\backslash U_\alpha).$$

  Pero $\mathcal{X} - U_\alpha$ es finito para cada $\alpha \in I$, luego la intersección numerable de ellos también lo será. De este modo, la unión numerable de abiertos de $\mathcal{T}_{\text{CF}}$ pertenece a ella.
- Por último, consideremos U_1 y U_2 dos abiertos de $\mathcal{T}_{\text{CF}}$. Analógamente al caso anterior,

$$\mathcal{X}\backslash(U_1 \cap U_2) = \bigcup_{i=1}^{2} (\mathcal{X}\backslash U_i).$$

  Sin embargo, $\mathcal{X}\backslash U_i$ es finito para $i \in \{1, 2\}$, luego la unión finita de conjuntos finitos es finita.

Para finalizar, se nos pregunta qué topología se obtendría en caso de que $\mathcal{X}$ fuese un conjunto finito. Si damos por cierta esta suposición, es claro que $\mathcal{T}_{\text{CF}}$ coincide con la topología discreta, ya que el complementario de todo conjunto es finito.

A pesar de haber terminado con lo requerido del ejercicio, podemos ir más allá estudiando más a fondo esta topología. Para comenzar, nótese que si $\mathcal{X}$ es numerable trivialmente el conjunto es separable y primer y segundo axioma de numerabilidad. El caso en el que $\mathcal{X}$ no es numerable ya no es tan sencillo. Vayamos por partes.

- $\mathcal{X}$ es separable. Es más, todo conjunto numerable es denso en $\mathcal{X}$. En efecto, supongamos que existiese un conjunto $A \subset \mathcal{X}$ numerable pero que no es denso en $\mathcal{X}$. Esto implica que existe un abierto $B \in \mathcal{T}_{\text{CF}}$ tal que $B \cap A = \emptyset$. De este modo,

$$(\mathcal{X}\backslash B) \cup (\mathcal{X}\backslash A) = \mathcal{X}.$$

  Pero los conjuntos del primer miembro son finitos, y la unión de finitos es finita, lo que conllevaría a que $\mathcal{X}$ también lo sea. Esto nos conduce a la contradicción buscada.
- $\mathcal{X}$ no es primer axioma de numerabilidad, lo que implica que tampoco es segundo. Para corroborar esto, comprobemos que para cada punto $a \in \mathcal{X}$ no existe una base de entornos abiertos numerable centrada en a. Razonaremos de nuevo por reducción al absurdo.

  Supongamos que sí que existe esa base y sea esta

$$\mathcal{U}^a = \{V_k \in \mathcal{T}_{\text{CF}} : k \geq 1\}.$$

  La intersección

$$\left(\bigcap_{k\geq 1} V_k\right)\backslash\{a\}$$

es no vacía puesto que, al tomar los complementarios y aplicar las leyes de De Morgan se tiene que

$$\mathcal{X}\backslash\left(\bigcap_{k\geq 1} V_k\right) = \left(\bigcup_{k\geq 1} \mathcal{X}\backslash V_k\right),$$

y esta unión es numerable ya que $X\backslash V_k$ es finito (recordemos que $V_k \in \mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$). Al ser $\mathcal{X}$ no numerable y

$$\mathcal{X} = \left(\bigcap_{k\geq 1} V_k\right) \cup \left(\bigcup_{k\geq 1} \mathcal{X}\backslash V_k\right),$$

la intersección anterior ha de ser no numerable.

Tomemos ahora un punto cualquiera b de esta intersección con la condición de que sea distinto de a y consideremos el entorno abierto de a dado por $W := \mathcal{X}\backslash\{b\}$. Claramente, $a \in W$ y es abierto puesto que su complementario es finito. De forma evidente la condición $V_k \subset W$ no se verifica para ningún k ya que $b \in V_k$ para todo k. Esto verifica que $\mathcal{U}^a$ no puede ser base, concluyendo así que cuando X no es numerable $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ no es primer axioma de numerabilidad.

- $\mathcal{X}$ es compacto. En efecto, supongamos que $\{V_k : k \geq 1\}$ es un recubrimiento por abiertos de $\mathcal{X}$ y tomemos un V_{k_0} arbitrario. Como este abierto pertenece a $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ su complementario es finito, luego

  $$\mathcal{X}\backslash V_{k_0} := \{x_1, \ldots, x_r\}$$

  con $x_j \in \mathcal{X}$ y $j = \{1, \ldots, r\}$ tales que $x_j \in V_{k_j}$ para cierto k_j, pues la unión de V_k recubre $\mathcal{X}$ según lo hemos definido. De este modo, podemos tomar $\mathcal{X}$ como la unión de V_{k_0} con los V_{k_j} que contienen a los puntos x_j, esto es,

  $$\mathcal{X} = \bigcup_{j=0}^{r} V_{k_j},$$

  lo que prueba que $\mathcal{X}$ es compacto.

- $\mathcal{X}$ es conexo. Un modo de probar esto es comprobar que no existen conjuntos abiertos y cerrados simultáneamente. En caso de que esto ocurriese, lo que quiere decir que $A \in \mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ y $\mathcal{X}\backslash A \in \mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$, se tiene que $\mathcal{X}\backslash A$ y $X\backslash(\mathcal{X}\backslash A) = A$ son finitos, luego

  $$\mathcal{X} = A \cup (\mathcal{X}\backslash A)$$

  sería finito, y esto contradice que sea no numerable.

13/03/2017

Construcciones

En esta sección se estudiaran las distintas construcciones que ya se han detallado en casos anteriores (subespacios, cociente y productos y sumas finitas) en los que quedan espacios compactos.

- Los subespacios cerrados F de un espacio compacto son compactos. En efecto, sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos del espacio topológico compacto $(K, \mathcal{T})$. Claramente, $\mathcal{A} \cup F^c$ es un recubrimiento por abiertos de K, del cual se puede extraer un subrecubrimiento finito. Si este no contiene a F^c, entonces está formando exclusivamente por elementos de $\mathcal{A}$, digamos $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}\}$, y como $F \subset K$ ya hemos terminado. Por otro lado, si F^c está en el subrecubrimiento finito, este será de la forma $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}, F^c\}$, y como $F \subset X = \{A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_n}\} \cup F^c$, tenemos que $F \subset A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_n}$.
- Los espacios cocientes de compactos son compactos, puesto que un cociente es una aplicación continua suprayectiva y la imagen continua de un compacto es compacto. De esta forma, si tenemos una función continua $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, donde $\mathcal{X}$ es compacto y $\mathcal{Y}$ es Hausdorff, entonces la aplicación es cerrada. En efecto, sea $F \subset \mathcal{X}$ un subespacio cerrado, que será compacto por lo anterior. Por otro lado, $f(F)$ es compacto al tratarse de la imagen continua de un compacto y, finalmente, sabemos que ser compacto en un espacio Hausdorff implica ser cerrado. De aquí se deduce que si además f es suprayectiva, entonces se trata de una identificación y que si es biyectiva, entonces estamos ante un homeomorfismo.
- Las sumas finitas de espacios compactos son compactos, ya que si se tiene un recubrimiento finito de toda la suma, se tendrá uno finito para cada uno de los sumandos. Nótese que si la suma es numerable esto ya no tiene por qué ser cierto.
- Los productos finitos de espacios compactos son compactos. Este resultado se conoce como el teorema de Tychonoff (que también vale para el producto infinito) y se demostrará a continuación.

Teorema C.1.1 (Teorema de Tychonoff)**.** *Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dos espacios topológicos y sea $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ su espacio producto. Entonces $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ son compactos si y solamente si $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ lo es.*

Demostración. $\Leftarrow$) Si $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ es compacto, consideremos la proyección $p_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$. Al ser continua y como la imagen continua de un compacto es compacto. Hemos terminado. El caso para $\mathcal{Y}$ es análogo.

$\Rightarrow$) Dado el producto $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, podemos tomar un recubrimiento por abiertos suyo de modo que

$$\mathcal{X} \times \mathcal{Y} = \bigcup_i \mathcal{W}_i.$$

Nuestro objetivo es conseguir extraer una cantidad finita de esta familia de abiertos. Antes de comenzar, nótese que estos abiertos no tienen por qué ser productos y esto dificulta nuestra labor. Por tanto, supondremos que el recubrimiento por abiertos que tomemos sí que es un producto de dos abiertos, donde cada uno pertenece a un factor. Una vez realizado este comentario, ya podemos comenzar.

En primer lugar, para todo $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ existe i de modo que $(x, y) \in \mathcal{W}_i$. Así, se pueden encontrar entornos abiertos $\mathcal{U}^x$ y $\mathcal{V}^y$ tales que $U^x \times \mathcal{V}^y \subset \mathcal{W}_i$ (puesto que así son las bases que hemos elegido). Nótese que los entornos no dependen exclusivamente de x e y por lo que lo correcto sería escribir $U^x_y \times \mathcal{V}^y_x \subset \mathcal{W}_i$.

Fijemos $x \in \mathcal{X}$ de forma que ocurrirá que $\mathcal{Y} = \bigcup_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{V}^y_x$. Por ser Y compacto, existe un subrecubrimiento finito tal que

$$\mathcal{Y} = \mathcal{V}^{y_1}_x \cap \ldots \cap \mathcal{V}^{y_r}_x.$$

Pese a que los puntos y_l dependen de la elección de x, no se ha incluido en la notación con tal de no sobrecargarla.

A continuación, para cada $x \in \mathcal{X}$ se puede considerar el abierto

$$\mathcal{U}^x = \mathcal{V}^x_{y_1} \cap \ldots \cap \mathcal{V}^x_{y_r}.$$

Sin embargo, al ser X compacto, entonces se puede tomar un subrecubrimiento finito de él tal que

$$\mathcal{X} = \bigcup_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{U}^x = \mathcal{U}^{x_1} \cap \ldots \cap \mathcal{U}^{x_s}.$$

A estas alturas, podemos afirmar que

$$U^{x_k} \times V_{x_k}^{y_l} \subset \mathcal{U}_{y_l}^{x_k} \times \mathcal{V}_{x_k}^{y_l} \subset W_{i_{kl}}.$$

Estos $W_{i_{kl}}$ son una cantidad finita y solo queda comprobar que recubren a $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Para ello, tomemos un punto $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Claramente, $x \in U^{x_k}$ y $y \in \mathcal{V}_{x_k}^{y_l}$, luego $(x, y) \in W_{i_{kl}}$, y hemos terminado. ■

Del teorema anterior se pueden deducir ciertas consecuencias relevantes cuando el espacio topológico es $\mathbb{R}^n$.

Observación C.1.1. (1) Los adoquines

$$[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_r, b_r]$$

son compactos, puesto que $[a_i, b_i]$ es compacto para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$

(2) Ser cerrado y acotado implica ser compacto. En efecto, si está acotado existe una bola $\mathrm{B}(0, \rho)$ para algún $\rho > 0$ y así mismo esta bola pertenece a $[-\rho, \rho]^n$. Si además es cerrado, se trataría de un cerrado contenido en un compacto, luego compacto. ♢

Compacidad local

Definición C.1.1 (Compacidad local)**.** Un espacio es localmente compacto cuando cada punto tiene una base de entornos compactos para cada $x \in \mathcal{X}$ de la forma

$$\mathcal{V}^x = \{K \subset \mathcal{X} : K \text{ es entorno y es compacto}\}.$$

Veamos algunos ejemplos para aclarar este concepto.

Ejemplos

(1) $\mathbb{R}^n$ con la topología usual lo es, ya que para cada punto existe una base de entornos de la forma

$$\mathcal{V}^x = \{\mathrm{B}(x, 1/k) : k \geq 1\}$$

(2) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topología usual no lo es. En efecto, tomemos un entorno compacto de $\mathbb{Q}$ del cero K^0. Este entorno, por definición, contiene un abierto $\mathcal{U}$ de la topología relativa de modo que $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$ para cierto $\varepsilon > 0$. A continuación, elijamos un irracional $\theta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y una sucesión $\{q_k\}_{k=1}^{\infty} \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$ que converge a θ. Claramente, $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto infinito (ya que si fuese finito convergería a un valor de $\mathbb{Q}$) contenido en K^0. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, este conjunto tiene un punto de acumulación en K^0 y existe una subsucesión $\{q_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ que converge a un punto de K^0 al que denotaremos p. No obstante, toda subsucesión de una sucesión converge al mismo punto que esta última, luego hemos probado que $p = \theta$. Esto es una contradicción y hemos terminado.

Proposición C.1.2. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio T_2. Si $x \in \mathcal{X}$ tiene un entorno compacto, entonces tiene una base de entornos compactos.*

Demostración. Vamos a construir la base de compactos a partir del entorno compacto. Sea K ese entorno, y entonces verifica que existe un abierto U tal que $x \in U \subset K$. Entonces, tenemos que ver que para cada entorno W arbitrario existe un $L \subset W$ que sea entorno compacto de x.

Como $X \setminus W \subset K$ y es cerrado en él, entonces $K \setminus W$ es compacto. Sin embargo $x \notin K \setminus W$. Vamos a aprovechar este compacto para construir uno que sí sea entorno de X.

Como X es T_2, dados un compacto y un punto podemos encontrar dos entornos disjuntos (esto es consecuencia directa de poder hacerlo para cada par de puntos). Entonces, podemos encontrar dos abiertos V y G tales que $V^x \cap G = \emptyset$, $x \in V^x$ y $K \setminus W \subset G$. Podemos tomar V^x además de forma que $V^x \subset U$: si V^x no cumpliera esto, tomamos en su lugar $V^x \cap U$ que también contiene a x. Entonces, $x \in V^x \subset \overline{V} \subset \overline{K} = K$, donde la última igualdad se cumple por ser X T_2. Entonces $\overline{V}$ es un compacto (por ser cerrado en compacto) entorno de x.

Ahora, solo queda comprobar que $\overline{V} \subset W$. Veamos para ello que $V \cap G = \emptyset \implies \overline{V} \cap G = \emptyset$ para un entorno G de y. En efecto, sea $y \in \overline{V} \cap G$. Entonces $y \in \overline{V}$ e $y \in G$, que es entorno de y, y por definición de adherencia $V \cap G \neq \emptyset$. Ahora, como $K \setminus W$ es entorno de y, por lo anterior $\overline{V} \cap (K \setminus W) = \emptyset$, y como $\overline{V} \subset K$, entonces $\overline{V} \subset W$. ■

C.2. Compacificación de Alexandroff

Como hemos podido ver a lo largo de este capítulo, los espacios compactos son espacios muy manejables, con buenas propiedades. ¿No sería una gran noticia que todos los espacios con lo que vamos a trabajar lo fueran? Lamentablemente esto no va a ser así, pero si que vamos a lograr en muchas ocasiones hacer de nuestro espacio un subespacio de un espacio compacto.

La idea de las compactificaciones es lograr esto (convertir espacios no compactos en subespacios de compactos) añadiendo puntos al espacio original. Veamos en primer lugar una definición de compactificación antes de pasar a ver la que da nombre a esta sección.

Definición C.2.1 (Compactificación)**.** . Llamaremos ***compactificación*** de un espacio X a un espacio Y si X es homeomorfo a un subespacio denso de Y, y Y es compacto.

La condición de que el espacio sea denso en su compactificación solo tiene como objetivo que ésta no sea innecesariamente grande.

Vemos antes de pasar a la de Alexandroff un breve ejemplo para terminar de aclarar la definición.

Ejemplo C.2.1. Si $X \subset K$ con K compacto, $\overline{X} \subset K$ es también compacta ya que se trata de un cerrado en un compacto y por lo tanto sería una compactificación de X. $\diamondsuit$

Ahora pasamos a ver el caso particular de la compactificación de Alexandroff. En primer lugar la definiremos para luego pasar a ver una serie de observaciones que nos llevaran a demostrar que realmente verifica ser compactificación.

Definición C.2.2 (Compactificación de Alexandroff)**.** Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico localmente compacto, no compacto que verifica ser T_2.

Tomamos un punto al que pasamos a denotar como ∞ tal que $\{\infty\} \notin X$ y consideramos $X^* = X \cup \{\infty\}$.

Tomaremos como topología la qe viene dada por la siguiente definición:

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{A \subset X^* \colon X^* \setminus A \text{ es compacto en } X\} \tag{C.2}$$

Vemos ahora una propiedad que verificará la topología que acabamos de definir,tenemos que $\infty \in \mathcal{U} \in \mathcal{T}^* \iff X^* \setminus \mathcal{U}$ es compacto en X $[\implies \mathcal{U} \cap X \in \mathcal{T}]$.

Hemos definido de este modo la ***compactificación de Alexandroff*** aunque no hemos probado aún que $X*$ sea un espacio compacto ni que su topología este bien definida siquiera, pasamos a hacerlo ahora. Para ello vamos a comprobarlo como una serie observaciones que probaremos inmediatamente.

Observación C.2.1. En primer lugar enunciaremos en cada apartado una propiedad, probandola a continuación dentro del mismo apartado. Los primeros buscan probar que realmente es topología, luego estudiamos propiedades de la misma.

1. $\emptyset, X^* \in \mathcal{T}^*$, la comprobación en ambos casos es trivial.

2. La unión de abiertos de $\mathcal{T}^*$ es abierta. Veamos su demostración.

   Podemos descomponer los abiertos de esta unión en dos grupos, los abiertos que contienen a ∞ y los que no. De este modo, expresamos la unión como

   $$\bigcup_{U \in \mathcal{T}} U_i \cup \bigcup_{\infty \in \mathcal{W}_j} W_j \tag{C.3}$$

   Denotaremos $\bigcup_{U\in\mathcal{T}} U_i$ como U y $\bigcup_{\infty\in\mathcal{W}_j} W_j$ como W. Vayamos ahora por casos.

   Si solo tenemos U $(W = \emptyset)$ ya lo tenemos, dado que se trataría de unión de abiertos de $\mathcal{T}$ y al ser ésta topología será un abierto de $\mathcal{T}$ y por lo tanto también de $\mathcal{T}^*$.

   Si solo tenemos W tenemos que $X^* \setminus W = \bigcap_j X^* \setminus W_j$ que será cerrado en X y estará contenido en $X^* \setminus W_{j_0}$ que es compacto por el modo en que hemos definido los W_{j_0}.Por lo tanto, tenemos que $X^* \setminus W = \bigcap_j X^* \setminus W_j$ es un cerrado dentro de un compacto y esto, al ser X Segundo Axioma, implica que es compacto. Con esto, por la definición, tenemos que W es abierto.

Por último, si tenemos tanto U como W no vacíos, la demostración será similar al caso anterior.

Tomamos G la unión de W y U entonces tenemos $X \setminus G = (X^* \setminus W) \cap (X \setminus U) \subset X^* \setminus W$. Como hemos visto, $(X \setminus U)$ es cerrado y $(X^* \setminus W)$ compacto, por lo que la intersección de ambos será un cerrado en un compacto, y por lo tanto compacta. Así, $X \setminus G$ será compacto y por lo tanto G abierto.

3. Veamos que la intersección finita de abiertos es abierta, dados dos abiertos U y V tenemos que, su intersección será abierta. Para probarlo nos basta con observar las tres situaciones distintas que pueden darse:

$$U \cap W = \begin{cases} \infty \notin U, V & \Longrightarrow \quad \text{resulta trivial (nos encontramos en } \mathcal{T}) \\ \infty \in U, \infty \notin V & \Longrightarrow \quad \text{como } U \cap X \in \mathcal{T}\text{, asi que ambos son abiertos de } \mathcal{T} \\ \infty \in U, V & \Longrightarrow \quad \text{ya que la intersección finita de compactos es compacta} \end{cases} \tag{C.4}$$

Con estos 3 puntos hemos demostrado que $\mathcal{T}^*$ es topología.

4. Como se desprende de su definición (dejamos al lector el comprobarlo por su cuenta, no hay que recurrir a más que la propia definición) tenemos que $\mathcal{T}^*|_X = \mathcal{T}$.

5. Es T_2. Dado que como se nos ha dicho $\mathcal{T}$ es T_2, tan solo podríamos encontrar problemas a la hora de separar $x \in X$ y ∞.

   Ahora bien, como X es localmente compacto, $\exists K$ compacto tal que $x \in U \subset K$ siendo U abierto. Además, $X^* \setminus K = W$ es abierto en $\mathcal{T}*$ por la definición de la misma.

   Como $U \cap W \subset K \cap (X \setminus K) = \emptyset$ hemos encontrado los entornos de los puntos que buscabamos.

6. X^* es compacto. Gracias a las observaciones desarrolladas anteriormente nos va a ser sencillo probarlo.

   Tenemos que dado un recubrimiento por abiertos de X $U_{i \in I}$ tenemos que $\exists U_{i_0} \ni \infty \implies X^* \setminus U_{i_0} = K$ será compacto en X. por lo tanto, al ser $U_{i \in I}$ recubrimiento por abiertos de K y éste compacto, tenemos que $K \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_r}$ (extraemos subrecubrimiento finito del mismo).

   Ahora bien, como $K \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_r}$ y $X^* \setminus K \subset U_{i_0}$ entonces tenemos que $X^* \subset U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_r}$, con lo que habríamos obtenido un subrecubrimiento finito y probado de este modo su compacidad.

7. Completemos ahora la definición de compactificación viendo que $X \subset X^*$ es abierto denso en X.

   Ver que es abierto es trivial mediante la definición de $\mathcal{T}^*$ (dado que X es abierto en $\mathcal{T}$). Ahora, para ver que es denso, sea U abierto no vacio y supongamos que $\emptyset \in \mathcal{U}$ (el caso de que no esté no es necesario analizarlo ya que sería trivialmente abierto de X por la definición). Ahora bien, $U = (X^* \setminus K)$ tiene que cortar a X ya que en caso contrario, $U \cap X = \emptyset \implies K = X$ que no es compacto.

8. X^* es única, es decir, es homeomorfa a toda otra compactificación por un punto.

   Sea ahora $(Y, \mathcal{T}')$ una compactificación por un punto de X, siendo $Y = f(X) \cup \{w\}$ siendo Y compacto T_2 y h inmersión, abierta, densa.

   Definimos $h : Y \longrightarrow X^*$ mediante $h(w) = \infty$ y $h(f(x)) = x \forall x \in X$. Evidentemente h es biyectiva. Nos queda por ver que es continua, dado que al estar en un compacto en T_2 esto implica que es cerrada, y por lo tanto homeomorfismo.

Tomamos $U \subset X^*$, vayamos ahora por casos:

Si $U \subset X$, entonces $g(U) = h^{-1}(U) \subset Y$ que será abierto por la definición de la f.

Si $\infty \in U \implies X \cap U = X \setminus K$ siendo K compacto. Entonces como $Y \setminus f(K) = f(X \setminus K) \cup \{w\} = h^{-1}(U)$. De este modo, como $h^{-1}(U) = Y \setminus f(K)$ que es abierto dado que $f(K)$ es compacto cerrado.

. $\diamondsuit$

Con estas observaciones, podemos resumir lo demostrado diciendo que la topología que hemos tomado es realmente topología y compactificación de X y además hemos probado que añadir un único punto caracteriza la topología de Alexandroff. Para terminar esta sección vamos a ver unos pocos ejemplos de compactificaciones.

Ejemplo C.2.2. Veremos ahora ejemplos de compactificaciones. Los primeros tendrán como objetivo entender el mecanismo de la misma. Después, pondremos ejemplos para aclarar que como hemos visto, dado un conjunto sus compactificaciones por un punto son homeomorfas, pero no sucede al contrario (dada una compactificación los conjuntos de los que puede provenir no tienen porque ser homeomorfos).

1. Tenemos que $\mathbb{R}^* = \mathcal{S}^1$, $\mathbb{R}^{n*} = \mathcal{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
2. $[0,1] \neq (0,1)^*$
3. $(0,1]^* = [0,1] y [0,1)^* = [0,1]$ pero estos dos subespacios no son homeomorfos entre si.
4. Siendo $X = [0,1/2) \cup (1,2]$ e $Y = [0,1)$ tenemos que sus compactificaciones son la misma $X^* = Y^* = [0,1]$ pero no son homeomorfos.

$\diamondsuit$

Índice general

Índice de topologías