Planos
Resumen y notas de clases

Ultima modificación:12 de noviembre de 2003

Plano R^3

Tres puntos definen un plano.

Ecuaciones del plano

Ecuación **vectorial** del plano (3 maneras de expresarlo):
Preciso un punto P_0 perteneciente al plano, y dos vectores (a y b)

$$\vec{OP}=\vec{OP_0}+\vec{P_0P}$$

$$\vec{OP}=\vec{OP_0}+\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$$

$$(x,y,z)=(x_{0,}y_{0,}z_0)+(\lambda a_{1,}\lambda a_{2,}\lambda a_3)+(\mu b_{1,}\mu b_{2,}\mu b_3)$$

Ecuación **parametrica** del plano: (surge de la anterior ecuación)

$$x=x_0+\lambda a_1+\mu b_1$$

$$y=y_0+\lambda a_2+\mu b_2$$

$$z=z_0+\lambda a_3+\mu b_3$$

Ecuación **general o cartesiana** del plano:
(preciso un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ incluido en el plano, y la normal n (n_1,n_2,n_3) del plano.

Luego se hace:

$$(n_{1,}n_{2,}n_3)\cdot(x-x_{0,}y-y_{0,}z-z_0)=0$$

$$n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)+n_3(z-z_0)=0$$

Y resolviendo y agrupando los términos independientes en n_4 resulta:

$n_1\cdot x+n_2\cdot y+n_3\cdot z+n_4=0$ (los coeficientes n1,2,3 son la normal del plano.)

NOTA: La normal del plano es perpendicular a cualquier vector incluido en su plano.

Ecuación **segmentaria** del plano:

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$$

donde: $-\frac{n_4}{n_1}=p \quad -\frac{n_4}{n_2}=q \quad -\frac{n_4}{n_3}=r$;de la ec. general

Básicamente, se pasa n_4 de la ecuación general al otro miembro (donde esta el 0; n_4 cambia de signo) y se divide todo por ese n_4 con signo cambiado, para de esa manera, igualar todo a 1.

En esta ecuación, p es la intersección del plano con eje x, q con eje y, r con eje z.

Posiciones relativas de un plano

Plano paralelo a un eje coordenado:

$n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_4 = 0$ Es paralelo al eje que falta en la ecuación general. (En este ejemplo, es paralelo al eje z.

Plano paralelo a un plano coordenado:

$\Pi \| xy \rightarrow z = r$

$\Pi \| yz \rightarrow x = p$ (r,p,q de la ecuación segmentaria.)

$\Pi \| xz \rightarrow y = q$

Plano que pasa por el origen de coordenadas

$n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = 0$

(no hay ecuación segmentaria, porque n4 = 0)

Angulo entre dos planos

Para obtenerlo, se saca el ángulo entre las normales de ambos planos (que son dos vectores).

Plano paralelo a otro

$\alpha \| \beta \Leftrightarrow \vec{a} \| \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b}$

α y β planos, $\vec{a}, \vec{b}$ normales

Planos Perpendiculares

$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

α y β planos, $\vec{a}, \vec{b}$ normales

Distancia de un punto a un plano

$\alpha =$ plano $= a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 = 0$, $\vec{a} =$ normal, $P_1(x_1, y_1, z_1) =$ punto

$$\text{distancia} = \left| \frac{a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 z_1 + a_4}{|(\vec{a})|} \right|$$

Si un punto pertenece al plano, la distancia sera cero.

$\alpha = x + y - z + 2 = 0$, $\vec{a} = (1, 1, -1)$, $P_1(2,3,4)$

Ejemplo: $\left| \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 + 2}{\sqrt{3}} \right| = \frac{3}{\sqrt{3}}$

Haz del plano (ver el ejercicio en el cuaderno)

Recta $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Ecuaciones

Partiendo de $P(x,y)\in r;\ \vec{P_0P}\subset r;\ \vec{a}\|r\Rightarrow \vec{P_0P}\|\vec{a}$

Se obtiene la **ecuación vectorial** de la recta (R^2 y R^3) $\vec{OP}=\vec{OP_0}+\vec{P_0P}\ \Rightarrow\ \vec{OP}=\vec{OP_0}+\lambda\vec{a}$

Partiendo de la ecuacion vectorial: $\vec{OP}=\vec{OP_0}+\lambda\vec{a}$

$(x,y)=(x_0,y_0)+\lambda(a_1,a_2)$

Ecuación parametrica:

$$\begin{Bmatrix} x=x_0+\lambda a_1 \\ y=y_0+\lambda a_2 \end{Bmatrix} \text{en } \mathbb{R}^2 \quad \begin{Bmatrix} x=x_0+\lambda a_1 \\ y=y_0+\lambda a_2 \\ z=z_0+\lambda a_3 \end{Bmatrix} \text{en } \mathbb{R}^3$$

Ecuación simétrica: (en R^2 quitar la componente Z)

$\frac{x-x1}{a_1}=\frac{y-y1}{a_2}=\frac{z-z1}{a_3}$ siendo a1,a2,a3 las componentes del **vector director (a)** de la recta.

Importante: en R^3 no hay ecuación general de la recta, tampoco segmentaría (no existen!)

Ecuación general de la recta en R^2: (para llegar, se parte de la simétrica, y se resuelve la igualdad, hasta igualar a 0; luego, simplemente se cambian los nombres de las vars a n1, n2,n3 por convención.

$n_1x+n_2y+n_3=0$; normal $\vec{n}(n_1;n_2)$; $\vec{n}\perp r\Rightarrow\vec{n}\perp\vec{a}\Rightarrow\vec{n}\cdot\vec{a}=0$

Ecuación segmentaría : se iguala la general a 1, y queda asi (previo cambio de nombres por convención) $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$

Angulo entre dos rectas ($\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$)

$\vec{a}$ y $\vec{b}$ = vectores directores de las rectas r_1 y r_2

$$\widehat{\vec{a}\vec{b}}=\arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|(\vec{a})||(\vec{b})|}\right)$$

Angulo entre recta y plano ($\mathbb{R}^3$)

siendo $\vec{n}$ la normal del plano y $\vec{a}$ el vector director de la recta

$$\hat{w}=\operatorname{arcsen}\left(\frac{\vec{n}\cdot\vec{a}}{|(\vec{n})|\cdot|(\vec{a})|}\right)$$

si uso arccos, debere hacer $90-\hat{w}$ para obtener el angulo (obtengo el complementario con cos

Una recta es paralela a otra si: $r_1\|r_2\ \Leftrightarrow\ \vec{a}\|\vec{b}\ \Leftrightarrow\ \vec{a}=\lambda\vec{b}$

Una recta es perpendicular a otra si: $r_1\perp r_2\ \Leftrightarrow\ \vec{a}\perp\vec{b}\ \Leftrightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

Recta paralela a plano si: $\alpha\|r\ \Leftrightarrow\ \vec{a}\perp\vec{n}\ \Leftrightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{n}=0$ (n = normal plano)

Recta perpendicular a plano si: $\alpha\perp r\ \Leftrightarrow\ \vec{a}\|\vec{n}\ \Leftrightarrow\ \vec{a}=\lambda\vec{n}$ (n = normal plano)

Distancia de un punto a una recta

En $\mathbb{R}^2$:

siendo $P_1(x_{1,} y_1)$; $r = \dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2}$

$P_1 \notin r$; $P_0 \in r$; $\vec{a} \parallel r$; $\vec{n} \perp r$

$$\mathrm{dist} = \left| \frac{n_1 x_1 + n_2 y_2 + n_3}{\|\vec{n}\|} \right|$$

En $\mathbb{R}^3$:

siendo $P_1(x_{1,} y_{1,} z_1)$; $r = \dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}$

$P_1 \notin r$; $P_0 \in r$; $\vec{a} \parallel r$

$\mathrm{dist} = \dfrac{\|\vec{a} \wedge \overrightarrow{P_0 P_1}\|}{\|\vec{a}\|}$ nota: es el modulo del vector, arriba y abajo en este caso