ÍNDICE

Idea de límite de una función en un punto : Sea la función $y = x^2$. Si x tiende a 2 a qué valor se aproxima y :

$x \to 2^-$	1'8	1'9	1'99	1'999
$y \to$	3'24	3'61	3'9601	3'996001

$x \to 2^+$	2'2	2'1	2'01	2'001
$y \to$	4'84	4'41	4'0401	4'004001

Luego cuando x se aproxima a 2 , tanto por la derecha como por la izquierda los valores de y se acercan cada vez más a 4 . Esta idea se suele expresar así :

$\lim_{x\to 2^-} x^2 = 4$ (límite lateral por la izquierda)

$\lim_{x\to 2^+} x^2 = 4$ (límite lateral por la derecha)

Cuando el límite por la derecha y por la izquierda existen y son iguales se dice que existe límite en ese punto y es :

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$$

Si los límites laterales en $x = x_0$ son distintos entonces f no tiene límite en ese punto .

Definición intuitiva de límite : dada una función f , el límite de f cuando x tiende a x_0 es el valor al que se aproximan las imágenes mediante f de los puntos x cuando éstos se aproximan al valor de x_0 .

Definición matemática de límite : una función f tiene límite l cuando x tiende a x_0 si es posible conseguir que f(x) esté tan próximo a l como se quiera al tomar x suficientemente próximo a x_0 (tanto como sea necesario) pero siendo $x \neq x_0$.
Decir que "f(x) se aproxima a l tanto como se quiera" equivale a decir que la distancia de f(x) a l es menor que cualquier valor ε por pequeño que este sea , es decir $/f(x)- l/ <\varepsilon$.
Decir que "la variable x toma valores suficientemente próximos a x_0 " equivale a decir que dependiendo de la proximidad de f(x) a l , así deberá estar más o menos próximo x a x_0 para que se cumpla la hipótesis $/f(x)- l/<\varepsilon$, es decir , debe de existir un δ tal que $/x-x_0/<\delta$.
Por lo tanto se dice que una función f(x) tiene límite l cuando x tiende a x_0 , si para

cualquiera que sea el número ε se puede encontrar otro número δ tal que $/f(x)-l/<\varepsilon$

para todo x que verifique $/x-x_0/<\delta$

Utilizando la notación matemática :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l \iff \forall\varepsilon \quad \exists\delta \quad / \quad \text{si} \ /x-x_0/<\delta \quad \Rightarrow \quad /f(x)-l/<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l \iff \forall\varepsilon(l)=(l-\varepsilon,l+\varepsilon) \quad \exists\varepsilon^*(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta) \ / \ \forall x\in\varepsilon^*(x_0) \quad f(x)$$

Observemos que la función no tiene por qué estar definida en x_0 para tener límite en ese punto , incluso aunque esté definida no es necesario que sea igual al límite .
No obstante si f(x) está definida en x_0 y $f(x_0)$ = l entonces se dice que la función es continua en x_0 .

Ejemplo : Veamos que $\lim_{x\to 3} 2x=6$

Tomamos ε=0'1 , es decir , la distancia entre f(x) y el límite 6 es menor que 0'1 , /f(x) - 6/<0'1 por lo tanto /2x-6/<0'1 , -0'1<2x-6<0'1 , 5'9<2x<6'1 , 2'95<x<3'05 , 3-0'05<x<3+0'05 , /x-3/<0'05 luego debemos tomar δ = 0'05

Podríamos tomar un ε todo lo pequeño que nosotros queramos , y siempre encontraríamos un δ .

En general : /f(x) - 6/<ε por lo tanto /2x-6/<ε , -ε<2x-6<ε , 6-ε<2x<6+ε , 3-ε/2<x<3+ε/2 , /x-3/<ε/2 luego debemos tomar δ = ε/2 , en general δ depende del valor de ε que tomemos .

Límites infinitos en un punto (asíntota vertical): Se dice que $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ si para cualquier k positivo se puede encontrar un δ tal que f(x)>k cuando $/x-x_0/<\delta$.

Se dice que $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ si para cualquier k positivo se puede encontrar un δ tal que f(x)<-k cuando $/x-x_0/<\delta$.

Límites en el infinito (asíntota horizontal): Se dice que $\lim_{x\to +\infty} f(x)=l$ si para cualquier ε se puede encontrar un k positivo tal que /f(x)-l/<ε para todo x>k .

Se dice que $\lim_{x\to -\infty} f(x)=l$ si para cualquier ε se puede encontrar un k positivo tal que /f(x)-l/<ε para todo x<-k .

Límite infinito en el infinito : Se dice que $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ si para cualquier k positivo se puede encontrar un H positivo tal que f(x)>k para todo x>H .

Se dice que $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$ si para cualquier k positivo se puede encontrar un H positivo tal que f(x)<-k para todo x>H .

Se dice que $\lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$ si para cualquier k positivo se puede encontrar un H positivo tal que f(x)>k para todo x<-H .

Se dice que $\lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$ si para cualquier k positivo se puede encontrar un H positivo tal que f(x)<-k para todo x<-H .

Propiedades de los límites :

1. El límite de una función en un punto si existe , es único y es igual a los límites laterales .
2. Si una función tiene limite distinto de cero en un punto entonces existe un entorno del punto en el que los valores que toma f tienen el mismo signo que el límite .
3. lim f+g = lim f + lim g
4. lim f· g = lim f · lim g
5. lim k· f = k · lim f donde k es un nº real
6. limf/g = lim f / lim g siempre que lim g $\neq 0$
7. lim $f^n = (\lim f)^n$ donde n es un nº real
8. lim $f^g = (\lim f)^g$
9. lim g(f(x)) = g (lim f(x))

Cálculo de algunos límites : (Indeterminaciones)

Al aplicar las propiedades de los límites podemos encontrar una de las siguientes indeterminaciones : 0/0 , ∞/∞ , $\infty - \infty$, $0\cdot\infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞

1. $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$ es decir en los polinómios se sustituye el punto .
2. $\lim P(x)/Q(x) = P(x_0)/Q(x_0)$ si $Q(x_0) \neq 0$
   Cuando $Q(x_0) = 0$ se puede distinguir dos casos :
   - Que $P(x_0) \neq 0$. Tendremos que calcular los límites laterales , si existen y son iguales la función tendrá límite que será $+\infty$ ó $-\infty$. En caso contrario no existirá límite .
   - Que $P(x_0) = 0$ por lo que tendremos una <u>indeterminación del tipo 0/0</u> que se resuelve factorizando numerador y denominador y simplificando la función racional . En el caso de que haya raices debemos multiplicar numerador y denominador por el conjugado .
3. $\lim P(x)/Q(x) = \infty/\infty$ <u>(indeterminación del tipo</u> ∞/∞) entonces se divide por la máxima potencia , tanto si las expresiones son racionales como si son radicales .
   En el caso más simple que es el de las funciones racionales podemos obtener los siguientes casos :
   - grado P(x)>gradoQ(x) lim = +/- ∞
   - grado P(x)=gradoQ(x) lim = a_n/b_n
   - grado P(x)<gradoQ(x) lim = 0

   Puede ser de utilidad saber que se puede transformar la indeterminación 0/0 a ∞/∞ o al revés , sin más que tener presente que : $\frac{P}{Q} = \frac{1/Q}{1/P}$
4. Si al calcular el límite de la función aparece una <u>indeterminación del tipo</u> $\infty - \infty$ para eliminarla tendremos que distinguir dos casos :
   - Si f es la diferencia de dos funciones racionales se efectua dicha operación para conseguir estar en uno de los dos casos anteriores .
   - Si f es la diferencia de dos funciones con raices cuadradas multiplicaremos y dividiremos por el conjugado .

5. Si al calcular el límite de la función aparece una <u>indeterminación del tipo</u> 1^{∞} debemos tener en cuenta que : $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$ =2'71828...
6. La <u>indeterminación del tipo</u> $0\cdot\infty$ se reduce al tipo 0/0 ó ∞/∞ utilizando la igualdad $P\cdot Q = \frac{P}{1/Q} = \frac{Q}{1/P}$
7. Las indeterminaciones del tipo 0^0, ∞^0 y 1^{∞} se pueden resolver utilizando la propiedad : $a^b = e^{b\cdot \ln a}$ con lo que se reducirá a una de las indeterminaciones ya estudiadas .

Definición de continuidad : se dice que una función es continua en un punto x_0 si :

a) Existe $f(x_0)$
b) Existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$
c) Son iguales

En forma matemática :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon \quad \exists\delta \quad / \quad \text{si} \quad /x - x_0/ < \delta \quad \Rightarrow \quad /f(x) - f(x_0)/ < \varepsilon$$

Una función se dice que es continua en un intervalo si lo es en cada uno de sus puntos .

Tipos de discontinuidades :

a) **Discontinuidad evitable** : Existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ pero :
   - No existe $f(x_0)$
   - Existe $f(x_0)$ pero $f(x_0) \neq \lim_{x\to x_0} f(x)$

b) **Discontinuidad inevitable** : No existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$:
   - los límites laterales existen pero no son iguales : (**1ª especie**)
     - **salto finito**
     - **salto infinito**
   - alguno de los límites laterales no existe (**2ª especie**)

Tasa de variación media (cociente incremental): la tasa de variación de una función da una primera idea de la rapidez con que crece o decrece la función en un determinada intervalo .

La tasa de variación media viene a responder a la pregunta : ¿ cuántas unidades crece la variable y por cada una que crece la x?

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Δy

f(x)

Δx

La tasa de variación media puede ser positiva , negativa o nula , dependiendo de la función y del intervalo .

Tasa de variación instantanea (en un punto x_0) : es el límite de las tasas de variación media cuando los intervalos de la variable independiente se hacen cada vez más pequeños .

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Concepto de derivada en un punto x_0 : Se llama derivada de la función f en el punto $x = x_0$ al siguiente límite :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$$

Es decir , la derivada es la tasa de variación instantanea .
Si el límite existe se dice que la función es derivable en ese punto .
Por ejemplo vamos a calcular la derivada de $y = x^2 + 8$ en el punto $x_0 = 2$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left[2(x_0+h)^2+8\right]-\left[2{x_0}^2+8\right]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h+4x_0}{h}=4x_0=8$$

Interpretación geométrica de la derivada : la derivada es la pendiente m de la recta tangente en ese punto .Por lo tanto la ecuación de la recta tangente a ese punto será :

$$\frac{y-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

Derivadas laterales : deben de existir y ser iguales para que exista la derivada

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}\qquad\qquad \lim_{h\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Derivadas sucesivas : si una función es derivable en cada punto de un intervalo se puede definir una nueva función asignando a cada punto x_0 de ese intervalo la derivada $f'(x_0)$ en dicho punto . Esta función se llama función derivada de $f = f'(x)$ en un intervalo .
Si la función derivada de f es derivable en todos los puntos de un intervalo , su derivada se llama derivada segunda $f''(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta f'}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}$
En general podemos obtener la derivada enésima .

Teorema : Si una función admite derivada finita en un punto x_0 , entonces es continua en ese punto . **DERIVABLE $\Rightarrow$ CONTINUA**
Lo contrario no tiene por qué ser cierto . Por ejemplo la función valor absoluto es continua en el punto 0 pero no es derivable

Operaciones con derivadas : se pueden deducir a partir de la definición de límite y derivada .

$(f+g)' = f' + g'$
$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$
$(k\cdot f)' = k\cdot f'$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$
$[g(f(x))]' = g'(f(x))\cdot f'(x)$
$\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f'}$

Derivadas de las funciones elementales :

y	y'	y	y'
k	0		
x	1		
x^n	nx^{n-1}	u^n	$nu^{n-1}u'$
a^x	$a^x\ln a$	a^u	$a^u\cdot \ln a\cdot u'$
e^x	e^x	e^u	$e^u\cdot u'$
u^v	$v\cdot u^{v-1}\cdot u'+u^v\cdot \ln u\cdot v'$		
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\sqrt[n]{u}$	$\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x}\log_a e$	$\log_a u$	$\dfrac{u'}{u}\log_a e$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$
$\mathrm{sen}x$	$\cos x$	$\mathrm{sen}u$	$\cos u\cdot u'$
$\cos x$	$-\mathrm{sen}x$	$\cos u$	$-\mathrm{sen}u\cdot u'$
$\mathrm{tg}x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}u$	$\dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$\mathrm{cotg}x$	$\dfrac{-1}{\mathrm{sen}^2 x}$	$\mathrm{cotg}u$	$\dfrac{-u'}{\mathrm{sen}^2 u}$
$\sec x$	$\dfrac{\mathrm{sen}x}{\cos^2 x}$	$\sec u$	$\dfrac{\mathrm{sen}u}{\cos^2 u}u'$
$\mathrm{cosec}x$	$\dfrac{-\cos x}{\mathrm{sen}^2 x}$	$\mathrm{cosec}u$	$\dfrac{-\cos u}{\mathrm{sen}^2 u}u'$
$\mathrm{arc\ sen}x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{arc\ sen}u$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\mathrm{arc\ cos}x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{arc\ cos}u$	$\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

arc tgx	$\mathbf{\frac{1}{1+x^2}}$	**arc tgu**	$\mathbf{\frac{u'}{1+u^2}}$
arc cotgx	$\mathbf{\frac{-1}{1+x^2}}$	**arc cotgu**	$\mathbf{\frac{-u'}{1+u^2}}$
arc secx	$\mathbf{\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$	**arc secu**	$\mathbf{\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}}$
arc cosecx	$\mathbf{\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}}$	**arc cosecu**	$\mathbf{\frac{-u'}{u\sqrt{u^2-1}}}$

Crecimiento y decrecimiento de una función :

- Una función se dice que es creciente cuando al aumentar la x aumenta la y ,es decir:

creciente $x_0-h < x_0 < x_0+h \Rightarrow f(x_0-h) \leq f(x_0) \leq f(x_0+h)$

Al sustituir esto en la definición de derivada observamos que tanto para la derecha como para la izquierda :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$$

Una función es creciente en un punto si la derivada es mayor o igual que cero .

- Una función se dice que es decreciente cuando al aumentar la x disminuye la y ,es decir:

decreciente $x_0-h < x_0 < x_0+h \Rightarrow f(x_0-h) \geq f(x_0) \geq f(x_0+h)$

Al sustituir esto en la definición de derivada observamos que tanto para la derecha como para la izquierda :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$$

Una función es decreciente en un punto si la derivada es menor o igual que cero .

Si en las anteriores fórmulas cambiamos el mayor(menor) o igual que ... por mayor (menor) entonces obtenemos la definición de estríctamente creciente y decreciente .

Importante :

creciente $\Rightarrow$ la derivada en ese punto es positiva o igual que 0 . El contrario no es cierto ya que puede ocurrir que la derivada valga 0 y no sea creciente .
decreciente $\Rightarrow$ la derivada en ese punto es negativa o igual que 0 . El contrario no es cierto ya que puede ocurrir que la derivada valga 0 y no sea decreciente .
Podría ocurrir que la derivada fuera 0 y no fuese creciente ni decreciente .
Por otro lado :
estríctamente creciente $\Rightarrow$ la derivada en ese punto es positiva . El contrario si es cierto , es decir , si la derivada es positiva seguro que es estríctamente creciente .
estríctamente decreciente $\Rightarrow$ la derivada en ese punto es negativa . El contrario si es cierto , es decir , si la derivada es negativa seguro que es estríctamente decreciente .

En resumen :

$f'(x_0) > 0$ estríctamente creciente

$f'(x_0)<0$ estríctamente decreciente

$f'(x_0)=0$ No se sabe

¿ Qué hacer en el caso de que la derivada sea cero ?
Podemos dar valores próximos al punto y ver lo que hace la función .

Máximos y mínimos de una función

Se dice que una función tiene un máximo relativo en un punto x_0 cuando existe un entorno del punto tal que se verifíca que : $f(x_0-h)<f(x_0)>f(x_0+h)$. Es decir a la izquierda es creciente y a la derecha decreciente .

Se dice que una función tiene un mínimo relativo en un punto x_0 cuando existe un entorno del punto tal que se verifíca que : $f(x_0-h)>f(x_0)<f(x_0+h)$. Es decir a la izquierda decreciente y a la derecha creciente .

<u>La condición necesaria para que haya un máximo o un mínimo es que la derivada de la función en ese punto valga 0</u> . Esto es lógico pues si no sería estríctamente creciente o estríctamente decreciente .

En el caso del máximo si a la izquierda es creciente (derivada primera positiva) y a la derecha decreciente (derivada primera negativa) entonces :

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)}{h}$$

Por la izquierda $h<0$ y $f'(x_0-h)>0$ luego $f''(x_0)<0$
Por la derecha $h>0$ y $f'(x_0+h)<0$ luego $f''(x_0)<0$
Por lo tanto cuando hay un máximo $f''(x_0)<0$
Si hacemos lo mismo para el mínimo obtendremos que la $f''(x_0)>0$

En resumen :

$f''(x_0)>0$ Mínimo

$f''(x_0)<0$ Máximo

$f''(x_0)=0$ No se sabe

Pero ¿ que ocurre si $f''(x_0)=0$?
Puede que sea máximo , mínimo o ninguno de las dos .
Debemos de dar valores a la derecha y a la izquierda del punto y ver que hace la <u>función</u> , o podemos dar valores a la derecha y a la izauierda del punto para ver que hace la <u>derivada de la función</u> .

Concavidad y convexidad :

Se dice que una función ese cóncava en un punto cuando la función derivada en un entorno de ese punto es creciente es decir :

Una función se dice que es cóncava cuando al aumentar la x aumenta la y' ,es decir:

$$x_0-h < x_0 < x_0+h \quad \Rightarrow \quad f'(x_0-h) \leq f'(x_0) \leq f'(x_0+h)$$

Si sustituimos en la definición de derivada segunda obtenemos para la derecha e izquierda que :

$$\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h} \geq 0$$

Por lo tanto si la función es cóncava la derivada segunda es mayor o igual que cero .
Lo contrario no tiene por qué ser cierto .

Una función se dice que es convexa cuando al aumentar la x disminuye la y' ,es decir:

$$x_0-h < x_0 < x_0+h \quad \Rightarrow \quad f'(x_0-h) \geq f'(x_0) \geq f'(x_0+h)$$

Si sustituimos en la definición de derivada segunda obtenemos para la derecha e izquierda que :

$$\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h} \leq 0$$

Por lo tanto si la función es convexa la derivada segunda es menor o igual que cero
Lo contrario no tiene por qué ser cierto .

Como ocurría con el crecimiento y decrecimiento , si la derivada segunda es positiva seguro que es cóncava , si es negativa seguro que es convexa pero si es 0 no se puede afirmar en principio nada .

$f''(x_0)>0$ Cóncava

$f''(x_0)<0$ Convexa

$f''(x_0)=0$ No se sabe

¿ Qué hacer si la derivada segunda es 0 ? Pues debemos de estudiar en los alrededores del punto a ver que es lo que hace la derivada primera .

Punto de inflexión :

Se dice que tenemos un punto de inflexión cuando la función pasa de cóncava a convexa o al revés .

<u>La condición necesaria para que haya un punto de inflexión es que la derivada segunda sea 0</u> . Esto es lógico pues si no sería cóncava o convexa .

Supongamos que por la izquierda es cóncava y por la derecha es convexa , entonces :

$$f'''(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f''(x_0+h)-f''(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f''(x_0+h)-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f''(x_0+h)}{h}$$

Por la izquierda h<0 y $f''(x_0-h)>0$ luego $f'''(x_0)<0$
Por la derecha h>0 y $f''(x_0+h)<0$ luego $f'''(x_0)<0$
Por lo tanto $f'''(x_0)<0$
Si por la izquierda es convexa y por la derecha cóncava :
Por la izquierda h<0 y $f''(x_0-h)<0$ luego $f'''(x_0)>0$

Por la derecha h>0 y $f''(x_0+h) > 0$ luego $f'''(x_0)>0$
Por lo tanto $f'''(x_0)>0$
En resumen si $f'''(x_0) \neq 0$ hay un punto de inflexión ya que pasará de cóncava a convexa o al revés .

En resumen :
$f'''(x_0) \neq 0$ Punto de inflexión
$f'''(x_0)= 0$ No se sabe

Pero ¿ que ocurre si $f'''(x_0)=0$? Puede que sea punto de inflexión o no .
Para averiguarlo debemos ver como varía la derivada segunda en los alrededores del punto .

Representación gráfica de funciones :

1. **Dominio**
2. **Puntos de corte con los ejes**
3. **Simetrías**
4. **Asíntotas**
5. **Crecimiento y decrecimiento**
6. **Máximos y mínimos**
7. **Concavidad y convexidad**
8. **Puntos de inflexión**