Investigación Operativa

Resumen y notas de clases – Temas Primer parcial

Ultima modificación el jueves 22 de junio de 2006 a las 02:12:12
Copyright © 2006, Kronoman – In loving memory of my father - http://kronoman.kicks-ass.org/apuntes/

Programación Lineal

El objetivo es maximizar o minimizar los resultados, usualmente de un proceso productivo.

Las inecuaciones se plantean:

$$\begin{Bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n <>= b_1 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n <>= bn \end{Bmatrix}$$ (nota, usualmente, hay mas de 2 filas, por eso, n x m)

Z = c1x1 + c2x2 + ... + cnxn -> MAX o MIN

Donde a son los coeficientes tecnológicos, y b los recursos.

Condición : todas las variables x deben ser >= 0 SIEMPRE.

Nota: Al graficar, la solución siempre esta en un vértice del conjunto convexo de soluciones.

Si es convexo no acotado, se puede encontrar una solución mínima, pero no una máxima.

Las variables sn son variables "slack" o de holgura, es decir, indican cuanto sobra de cada recurso. Para poder poner variables slack, se debe igualar las inecuaciones anteriores, transformándolas en ecuaciones así:

$$\begin{Bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + s1 = b_1 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + sn = bn \end{Bmatrix}$$

Y en Z, las slacks llevan coeficiente 0 (no suman ni restan)

Z = c1x1 + c2x2 + ... + cnxn + 0s1 + 0s2 + ... + 0sn -> MAX o MIN

Método gráfico

Lo puedo aplicar para problemas en 2D solamente, es decir que tienen dos variables (x1,x2).

Resuelvo las ecuaciones y las represento, esto forma un polígono convexo de soluciones factibles. Si no es convexo, **no** hay solución.

Hay que recordar que los ejes X,Y forman parte de los limites del polígono.

Luego, calculo el gradiente de Z, que es, p/ej : $Z = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \nabla Z = (4,3)$

Gráfico el gradiente, escalado proporcionalmente al gráfico, para saber hacia donde va.

Trazo una recta perpendicular al gradiente, y el ultimo vértice del polígono siguiendo esa recta perpendicular y el sentido del gradiente es la solución óptima.

Listo. =)

Método SIMPLEX

Sirve para resolver de manera analítica las ecuaciones planteadas.

Usualmente, estas tablas se resuelve con software tal como Storm, QSB, Excel, etc.

Caso especial: si las variables slack **restan** (son negativas, usualmente al minimizar), en este caso, representan en cuanto me excedo del mínimo requerido ; debo agregar **variables artificiales**, las cuales aparecen en dos circunstancias:

- si la variable slack resta (es cuando las restricciones son **>=**)
- Si no hay variable slack porque la restricción es de **=** y no admite slacks.

Las variables artificiales (v.a) no tienen interpretación, son trucos para calcular la primera solución en el simplex. Se crea así una "**primera solución base no factible".**

Se agregan λ_n solo donde las slacks restan. Si minimizo, con signo positivo, si maximizo, con signo negativo. *Nota: El software lo agrega solo ; esto solo es necesario si lo hago manualmente al simplex.*

Nota: entre una tabla simplex y la siguiente del mismo problema, la variación es:

(Si maximizo, min cambia signo): $\Delta Z = -\theta \underbrace{(Z_j - C_j)}_{\text{debe dar} < 0}$; si Zj - Cj da mayor que 0, no hay posibilidades de mejorar; si hay solución alternativa, Zj – Cj da cero.

Análisis de sensibilidad o análisis post-óptimo

El análisis de sensibilidad se hace después de obtener la solución óptima (actual) de un modelo. La meta es determinar si los **cambios en los coeficientes del modelo** dejaran inalterada la solución actual y, de no ser así, como obtener con eficiencia una manera óptima (suponiendo que existe una).

Se mantienen : cantidades a producir y sobrantes

Se modifican : funcional (Z) y precios sombra

Ejemplo:

		Cj	**C1** (4)				
Ck	Xk	Bk	X1	X2	S1	S2	S3
0	S1	14000	0	0	1	4/3	-26/9
C1 (4)	X1	3000	1	0	0	1/6	-1/9
3	X2	1000	0	1	6	-1/6	2/9
Zj		15000	**C1**(4)	3	0	1/6	2/9
Zj-Cj			0	0	0	1/6	2/9

Análisis de C1=4: $0 \cdot \frac{5}{3} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 3 (\frac{-1}{6}) - 0 = \frac{1}{6}$

que valor pongo en el 4 (C1) , para que el resultado siga siendo >=0 ?

$0 \cdot \frac{5}{3} + C1 \cdot \frac{1}{6} + 3 (\frac{-1}{6}) - 0 \geq 0$ => C1 >= 3

Con el mismo análisis de $0 \cdot \frac{-26}{9} + 4 \cdot \frac{-1}{9} + 3 (\frac{2}{9}) - 0 = \frac{2}{9}$ => C1 <= 6

Entonces, **3 <= C1 <= 6** hace que la solución óptima se mantenga (con variación de Z y PM)

Luego, pruebo ambos valores (3 y 6) en la tabla, a ver que pasa.

Pruebo con 3 en C1

		Cj	3				
Ck	Xk	Bk	X1	X2	S1	S2	S3
0	S1	14000	0	0	1	5/3	26/9
3	X1	3000	1	0	0	1/6	-1/9
3	X2	1000	0	1	0	-1/2	2/9
Zj		12000	3	3	0	1/2	2/9
Zj-Cj			0	0	0	0	3/9

El cero nuevo indica infinitas soluciones. (Cero alternativo)
Veo que pasa con X1 y X2, entonces Z = 12000, como mantengo la ganancia, esta es la solución alternativa.
Luego pruebo en la tabla con 6 en C1 (otra tabla).

El Z me da 21000, y X1 = 3500, X2=0

Luego pruebo con 2<=C2<=4 (es decir C2=2, y C2=4) (se hace la tabla de nuevo).

Tabla dual para modificar recursos

La tabla dual me permite modificar recursos y observar que pasa.

Partiendo de tabla VTPP del problema original (problema lineal primitivo/primal o PLP , TP 2-EJ 4)

		Cj	13	23	0	0	0
Ck	Xk	Bk	X1	X2	S1	S2	S3
23(c2)	X2	28(b2)	0	1	0,1	-0,125	0
13(c1)	X1	12(b1)	1	0	-0,1	0,375	0
0	S3	210	0	1	1,5	-10,625	1
Zj		800	13	23	1	2	0
Zj-Cj			0	0	**1**	**2**	0

Para la tabla dual, se toman las columnas <u>diferentes</u> de 0 de la fila de Zj-Cj (S1,S2 en este caso)

De planteo original (A) $\begin{Bmatrix} 5x_1+15x_2 \le 480 \\ 4x_1+4x_2 \le 160 \\ 35x_1+20x_2 \le 1190 \end{Bmatrix}$ $Z=13x_1+23x_2 \rightarrow \text{MAX}$ $x_1 \ge 0 ; x_2 \ge 0$ hago este (B) $\begin{Bmatrix} 5y_1+4y_2+35y_3 \ge 13 \\ 15y_1+4y_2+20y_3 \ge 23 \end{Bmatrix}$ $W=480y_1+160y_2+1190y_3 \rightarrow MIN$ $y_1 \ge 0 ; y_2 \ge 0 ; y_3 \ge 0$

Notar que puse los coeficientes de (A) que estaban en columnas, en filas de (B), e invertí MIN en lugar de MAX.

Para hacer la dual, los valores marginales de la tabla son [yi]

Si pongo los S1,S2,S3 de la tabla en W, debe dar igual a Z (W=800 en este caso).

O sea, para poder hacer la tabla, se cambian filas por columnas, se invierte el signo, y los valores pasan de **xn => tn ; Sn => yn**

Así:

Dual

	t1	
y1	2,1	

Original

	S1	
x1	-2,1	

Ahora, usando la tabla PLP (original), genero la correspondiente tabla (es semi rotada, algunos valores salen de la tabla original).

		Bj	480	160	1190	0	0
Bk	Yk	Ck	y1	y2	y3	t1	t2
480	y1	1	1	0	-1,5	*0,1*	*-0,1*
160	y2	2	0	1	10,625	*-0,375*	*0,125*
Wj		800	480	160	980	-12	-28
Wj-Bj			0	0	-210	-12	-28
			-(Sobrantes)			**-(Plan producción)**	

Nota 1: los valores Wj-Bj deben ser <=0.
Nota 2: los valores de t1 y t2 en *cursiva* se buscan en la PLP, pero se les cambia el signo.

Este nuevo enfoque me permite trabajar con **recursos agotados,** para estudiar posibles modificaciones.

Análisis de sensibilidad o análisis post-óptimo de los recursos

El análisis de sensibilidad o post-óptimo de los **recursos** se hace sobre la ultima tabla dual obtenida.

Los recursos saturados **aparecen** en la tabla (tienen valor marginal >= 0)
Los recursos no saturados **no** aparecen en la tabla.

La solución óptima es que todos los (Wj – Bj) sean <= 0

En la tabla dual, los (Wj-Bj) de t1,t2...tn son el **plan de producción** con signo invertido ; y los valores y1,y2...yn de (Wj-Bj) son los **sobrantes** con signo invertido.

Luego, se toma un rango de valores para bn y se prueba en la tabla (esto se obtiene mediante el software o "a mano" [DEBUG explicar como].

En el caso de ejemplo (ver tabla pagina anterior) , se obtuvo:
128 <= b2 <= 179,76

Poniendo los valores en la tabla analizamos con b2=128

		Bj	480	**128**	1190	0	0
Bk	Yk	Ck	y1	y2	y3	t1	t2
480	y1	1	1	0	-1,5	**0,1 pivote**	-0,1
128	y2	2	0	1	10,625	-0,375	0,125
Wj		**736**	480	128	980	-12	-28
Wj-Bj			0	0	-550	0 **ALT**	-32
			-(Sobrantes)			**-(Plan producción)**	

Ahora hago lo mismo con 179,76

		Bj	480	**179,76**	1190	0	0
Bk	Yk	Ck	y1	y2	y3	t1	t2
480	y1	1	1	0	-1,5	0,1	-0,1
179,76	y2	2	0	1	10,625 **pivote**	-0,375	0,125
Wj		**839,52**	480	179,76	1190	-19,41	-25,53
Wj-Bj			0	0	0 **ALT**	-19,41	-25,53
			-(Sobrantes)			**-(Plan producción)**	

Entonces, a partir de 179,76 o menos, el valor marginal del recurso va a cambiar (VM=0 en este caso).

Esto se llama la ley de rendimientos decrecientes.

Análisis marginal

El análisis marginal me indica si debo o no rehacer la tabla para agregar una nueva variable xn. Si da no, descarto inmediatamente, si da si, rehago la tabla.

En el punto (h) del ejemplo “Tipo parcial” esta bien demostrado que quiere decir esto. Mirarlo.

Valores de importancia económica

DEBUG !! también explicar valores de importancia económica, valor marginal y costo de oportunidad. También lo de entra y sale fila.

Ceros alternativos en la tabla

Un cero alternativo es aquel que aparece abajo de la columna de la variable que no esta en las filas.

Ejemplo

Bk	Yk	Ck	y1	y2	y3	**t1**	t2
480	**y1**	1	1	0	-1,5	0,1	-0,1
128	**y2**	2	0	1	10,625	-0,375	0,125
Wj		736	480	128	980	-12	-28
Wj-Bj			0	0	-550	0 **ALTERNATIVO**	-32

Aquí se ve que el cero esta bajo la columna de t1, ya que t1 no aparece en las filas (aparecen y1 e y2)

Ejemplo estilo parcial completo paso a paso

***Enunciado**: una fabrica de cerveza produce 2 tipos de cerveza : Negra (precio venta: 13 $/barril) y Blanca (precio venta : 23 $/barril).*

La fábrica dispone de 480 kg de maíz, 160 unidades de lúpulo, y 1190 kg de malta.

Los requerimientos de materia prima son Negra/barril : 5 kg maíz, 4 un lúpulo, 35 kg malta y Blanca/barril: 15 kg maíz, 4 un lúpulo, 20 kg malta.

>> Comienzo a buscar la solución: planteo la tabla, las inecuaciones y ecuaciones primero:

	Negra	Blanca	Disponibilidad del material
Maíz (kg/barril)	5 kg	15 kg	480 kg
Lúpulo (un/barril)	4 u	4 u	160 u
Malta (kg/barril)	35 kg	20 kg	1190 kg
Precio venta	13 $	23 $	

x1 = barriles negra ; x2 = barriles blanca } >> defino las variables (importante!)

>> planteo inecuaciones a la izquierda y ecuaciones a la derecha (notar las slacks)

$$\begin{Bmatrix} 5x_1 + 15x_2 \le 480 \\ 4x_1 + 4x_2 \le 160 \\ 35x_1 + 20x_2 \le 1190 \end{Bmatrix} \quad ==> \quad \begin{Bmatrix} 5x_1 + 15x_2 + s_1 = 480 \\ 4x_1 + 4x_2 + s_2 = 160 \\ 35x_1 + 20x_2 + s_3 = 1190 \end{Bmatrix}$$

$$x_1 \ge 0 ; x_2 \ge 0 \qquad x_1 \ge 0 ; x_2 \ge 0 ; s_1 \ge 0 ; s_2 \ge 0 ; s_3 \ge 0$$

$$Z = 13x_1 + 23x_2 \rightarrow MAX \qquad Z = 13x_1 + 23x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 \rightarrow MAX$$

Luego, se resuelve con el software, y se comienza a responder las preguntas.

Obtengo la siguiente tabla **VTPP** (final)

		Bj ==>	*13*	*23*	*0*	*0*	*0*
Ck	Xk	Bk	x1	x2	s1	s2	s3
23	x2	**28**	0	1	0,1	-0,125	0
13	x1	**12**	1	0	-0,1	0,375	0
0	s3	**210**	0	0	1,5	-10,625	1
Zj		**800**	13	23	1	2	0
Zj - Cj			0	0	**1**	**2**	0

Aquí observamos, en anaranjado, la solución óptima, en gris claro los valores de importancia económica, en las columnas de variables slack (s1,s2,s3), son **valores marginales** (o precios sombra) ; en las columnas de variables reales (x1,x2), son **costos de oportunidad**.

Todas las variables que no están en esta tabla en la zona naranja, tienen valor igual a cero.

Por lo tanto, x1 = 12, x2 = 28, s1 = 0, s2 = 0, s3 = 210, y Zj = 800 (beneficio)

Aca también observamos que el maíz y lúpulo (s1 y s2) son recursos agotados, pero sobra 210 kg de malta (s3 = 210)

El 1 y 2 en Zj-Cj indican los valores marginales del maíz y lúpulo respectivamente.

Ahora procedo a responder las preguntas:

El fabricante desea saber:

a) Plan óptimo de producción que maximice sus ingresos por venta:

Para el beneficio máximo de $ 800, producir 12 barriles de cerveza negra (x1) y 28 barriles de cerveza blanca (x2).

b) Que pasaría si pudiera disponer de 100 kg mas de malta?

Tengo un sobrante mayor, de 310 kg de malta (210 + 100)

c) Que pasaría si solo dispongo de 1000 kg de malta ?

Aun sobran 20 kg de malta. Puedo reducir hasta 980 kg la malta sin afectar.

>> Para las siguientes preguntas, utilizamos el software nuevamente,y tomamos los siguientes datos relevantes:

128 <= b2 <= 179,76 } variación que tolera el lúpulo en unidades (s2)

7,66 <= c1 <= 23 } variación que tolera el precio de cerveza negra (x1)

Preciso analizar la variación de los recursos agotados, por lo tanto, fabrico una **tabla dual.**

Original: $\left\{\begin{array}{l} 5x_1+15x_2 \leq 480 \\ 4x_1+4x_2 \leq 160 \\ 35x_1+20x_2 \leq 1190 \end{array}\right\}$ $Z=13x_1+23x_2 \rightarrow MAX$ la llevo a => $\left\{\begin{array}{l} 5y_1+4y_2+35y_3 \geq 13 \\ 15y_1+4y_2+20y_3 \geq 23 \end{array}\right\}$ $W=480y_1+160y_2+1190y3 \rightarrow MIN$

Lo interesante es que al poner los valores marginales, W da 800, o sea lo mismo que Z (pq y1=1, y2=2, y3=0)

Ahora armo la **tabla dual (algunos valores salen de la VTPP original con distinto signo, donde yn = sn, tn = xn)**:

		Bj==>	480	160	1190	0	0
Bk	Yk	Ck	y1	y2	y3	t1	t2
480	y1	1	1	0	-1,5	0,1	-0,1
160	y2	2	0	1	10,625	-0,375	0,125
Wj		800	480	160	980	-12	-28
Wj-Bj			0	0	-210	-12	-28
			-(Sobrantes)			-(Plan de producción)	

El **160** es el b2 (que afecta a y2), entonces, voy a ver el efecto con **b2=128 y b2=179,76**

Entonces, recalculo la tabla con **b2=128.** (algunos valores no cambian, los que cambian en verde)

		Bj==>	480	**128**	1190	0	0
Bk	Yk	Ck	y1	y2	y3	t1	t2
<<480	y1	1	1	0	-1,5	0,1:**pivote**	-0,1
128	y2	2	0	1	10,625	-0,375	0,125
Wj		**736**	480	**128**	980	-12	-28
Wj-Bj			0	0	**-550**	**0** (alternativo)^^	**-32**
			-(Sobrantes)			-(Plan de producción)	

d) Si falta lúpulo => Plan de producción : Negra : 32, Blanca : 0 y ganancia $736

e) Le conviene adquirir mas lúpulo a $1,2/unidad ? Si es así, cuantas unidades, y cual es el nuevo plan óptimo de producción?

Pruebo con 179,76

Bk	Yk	Ck	y1	y2	y3	t1	t2
		Bj==>	480	179,76	1190	0	0
480	y1	1	1	0	-1,5	0,1	-0,1
<<179,76	y2	2	0	1	10,625 (pivote)	-0,375	0,125
Wj		839,52	480	179,76	1190	-19,41	-25,53
Wj-Bj			0	0	0 alternativo ^^	-19,41	-25,53
			-(Sobrantes)			-(Plan de producción)	

Entonces, conviene comprar solo **19,76** (179,76-160) unidades, porque vemos que de 179,76 a 160 hay 19,76 ; a partir de 179,76, el valor marginal del lúpulo se hace 0 (pasa de $2 a $0)
Esto pasa porque el lúpulo (y2) se VA de la tabla (ver el <<), con lo cual se hace cero su valor marginal.
El plan de producción seria 19 barriles de cerveza blanca y 25 barriles de negra.

f) Un competidor le ofrece algunos kg de maíz a 1,15$/kg. Conviene comprarlos?

(Sale directo la respuesta) No conviene porque el maíz tiene valor marginal de 1$/kg, si el precio es de 1,15$/kg pierdo plata.

g) Un gerente de la fabrica pronostica que el precio de venta de la cerveza negra va a bajar y que no sera rentable su fabricación. El dueño responde que seria conveniente seguirla fabricando. Quien tiene razón y porque ?

Esto plantea si baja el precio de x1 (negra) a 7,66 (c1 menor), entonces lo pruebo a ver que pasa.
Como no varían recursos, sino el precio, utilizo la tabla original (la VTPP, NO la dual de recién)

Ck	Xk	Bk	x1	x2	s1	s2	s3
		Bj ==>	*7,66*	*23*	*0*	*0*	*0*
23	x2	**28**	0	1	0,1	-0,125	0
<<7,66	x1	**12**	1	0	-0,1	0,375	0
0	s3	**210**	0	0	1,5	-10,625	1
Zj		**735,92**	7,66	23	1,534	-0,0025	0
Zj - Cj			0	0	**1,534**	**~0**^^(alt)	0

Como sale x1, x1=0, o sea, si el precio baja de 7,66, la cerveza negra debe ser 0.

Respuesta: ambos tienen razón. Hay que seguir produciendo si el valor esta entre 7,66 y 23 ; si baja de 7,66, no producirla.

h) Incorporaría cerveza bock ? Lleva 7 kg de maíz, 6 un de lúpulo y 50 kg de malta con un beneficio por barril de $ 21

Aquí primero hay que realizar un **análisis marginal** para ver si debo o no rehacer la tabla para incorporar x3 (bock) (si da NO, descarto y no hago nada, si da SI, debo rehacer la tabla).

R = como sobran 210 kg de malta, puedo tomar 50 kg de malta, el problema lo tengo con los recursos saturados (lúpulo y maíz)
Los evalúo:

	Z
7 kg de maíz	-7 $
6 un de lúpulo	-12 $
50 kg de malta	0 $
	-19$

$21 - $19 = +2$

Como 21$ (ganancia de bock) – 19$ (perdida) = +2$ (<u>positivo</u>), <u>debo</u> rehacer la tabla y ver que cantidades y beneficios produzco al incorporar bock (x3)
Si da negativo, <u>NO</u> hago nada, descarto, porque pierdo plata (o sea, no conviene incorporar x3).

Así concluye este ejemplo.

Programación lineal entera (PLE)

Transporte o distribución

Se utiliza un modelo de tabla como el siguiente:

Destino (Dn) Origen (On)	D1	D2	D3	D4	Ai disponibilidad
O1	c11	c12	c13	c14	a1
O2	c21	c22	c23	c24	a2
O3	c31	c32	c33	c34	a3
Requerimientos	b1	b2	b3	b4	

Donde

Xij = cantidad a distribuir desde Oi hasta Dj ; debe ser >= 0

Cij = Costo de transporte unitarios desde Oi hasta Dj

Se arma así el modelo lineal:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\leq a_1 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}\leq a_3 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}\geq b_1 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}\geq b_4 \end{array}\right\}$$

Y el funcional

$$Z=C_{11}x_{11}+C_{12}x_{12}+\ldots+C_{34}x_{34}\rightarrow MIN$$

Esto se puede resolver usando SIMPLEX, pero no conviene.

La resolución se hace usualmente mediante:

a) obtención de primera solución factible, para lo cual hay varios métodos:

- Regla del Noroeste NO
- Método de costos mínimos (o beneficios máximos)
- VAM (Método Aproximación de Voegel
- Método de Russell

  NOTA: Solo es necesario usar uno de los métodos, no repetir!.

b) Prueba y optimización -> MODI

NOTA: Los métodos dan un máximo de variables distintas a cero igual a (filas + columnas – 1). Esto sirve verificar que hicimos bien la tabla.

Regla del Noroeste (N.O)

Suposición: $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$; si fuera $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq \sum_{j=1}^{m} b_j$ (lo mas real), se hace con software.

Con la regla N.O, el método es avanzar en diagonal de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo. Notar que este es el método mas fácil, pero el peor. No tiene en cuenta el transporte, es simple pero da una solución mala.

Si sobra disponibilidad, se agrega una columna ficticia donde se pone lo que sobra.

Solo voy otorgando recursos de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo.

Ejemplo: (verticales = origen, horizontal = destino)

	Rosario	San Pedro	Santa Rosa	Esquel	Ai Disponibilidad
Buenos Aires	25 *12*	5 *11*	- *20*	- *45*	30
Córdoba	- *10*	20 *14*	10 *8*	- *55*	30
La Plata	- *18*	- *9*	15 *15*	25 *28*	40
Requerimientos	25	25	25	25	100

NOTA: el número a la derecha en letra cursiva pequeña es el costo unitario. El número central es la asignación del recurso.

Ahora que tengo la primer solución factible (sea este u otro método), hago una prueba de optimización.

El funcional de la tabla es la sumatoria de asignación de recurso por costo unitario.

Z = 1740 en este caso.

Método de costos mínimos o beneficios máximos

Este método consiste en revisar la matriz de costos, y asignar empezando por el menor costo, e ir completando de menor a mayor costo. Si hay dos o mas iguales, hacer primero el que requiere mas cantidad.

Repito el ejemplo anterior, esta vez con el método de costos mínimos.

	Rosario	San Pedro	Santa Rosa	Esquel	Ai Disponibilidad
Buenos Aires	- *12*	- *11*	5 *20*	25 *45*	30
Córdoba	25 *10*	- *14*	5 *8*	- *55*	30
La Plata	- *18*	25 *9*	15 *15*	- *28*	40
Requerimientos	25	25	25	25	100
	10 min (2nd)	9 min (1er)	15 min (3ro)		

Método con software

Lo óptimo seria hacer el calculo con un software apropiado.

A continuación, el resultado utilizando QSB

	Rosario	San Pedro	Santa Rosa	Esquel
Buenos Aires	0 5 *12*	0 25 *11*	0 - *20*	12 - *45*
Córdoba	0 20 *10*	5 - *14*	0 10 *8*	24 - *55*
La Plata	11 - *18*	3 - *9*	0 15 *15*	0 25 *28*

Los cuadros de esta tabla se leen así:

Dij Xij **Cij**

Dij = costo de oportunidad
Xij = recursos asignados
Cij = costo unitario por recurso asignado

El Dij (costo oportunidad) indica cuanto crece Z por unidad (o sea, cuanto $ pierdo p'q' lo quiero minimizar a Z), si decido asignar igual en celdas que no fueron asignadas.
Ejemplo: Si pongo 1 en La Plata, Rosario, pierdo $11 y Z += 11.

Asignación

Esto sirve para asignar un conjunto de tareas/etc que pueden ser realizadas por un conjunto de máquinas/equipos/personas/etc.

	E1	E2	...	En
T1				
T2				
...				
Tn				

Notar que la matriz DEBE ser **cuadrada** (n*n).

Las variables (celdas) toman valor binario (SI/NO) (1/0) que indican si el equipo (En) se asigna o no a la tarea (Tn).

La resolución se hace por SIMPLEX, o un método especial, llamado **algoritmo húngaro (Koenig),** el cual solo minimiza.
Si quiero maximizar con el método húngaro, resto el menor valor a c/u de la matriz (el software lo hace solo)

Fenómenos de espera – Teoría de colas

Esto permite estudiar el comportamiento de colas de espera en variadas situaciones.

Algunas definiciones y formulas comunes/generales a los modelos (no todas aplican a todos los modelos, p/ej M no tiene sentido en un único canal, es 1) :

$E(n,t) = \text{estado n del sistema en el instante de tiempo t}$
$\lambda = \text{media velocidad de llegada de clientes al sistema}$
$\mu = \text{media velocidad de salida del sistema del cliente}$
$N = \text{cantidad de elementos/clientes}$
$M = \text{cantidad de canales de atencion}$

$$\lambda = \frac{\text{cantidad elementos entrantes}}{\text{unidad de tiempo}}$$

$$\mu = \frac{\text{cantidad elementos salientes}}{\text{unidad de tiempo}}$$

$T_a = \frac{1}{\lambda}$ } tiempo de **arribo** promedio

$T_s = \frac{1}{\mu}$ } tiempo de **servicio** promedio

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ **} Factor de trafico** ; adimensional, no tiene unidades.

$L = \sum_{n=0}^{\infty} n\, p_n$ } longitud media del **sistema**

$L_c = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\, p_n$ } longitud media de la **cola**

$W = \frac{L}{\lambda} \quad \lambda W = L \quad W = W_c + T_s$ } tiempo medio de espera en el **sistema**

$W_c = W - T_s$ } tiempo medio de espera en **cola**

$\lambda W = L \quad \lambda W_c = Lc \quad W = W_c + T_s$ } otras relaciones de W y Wc

Formula que rige todos los modelos que hacemos (importante, aprenderla)

$$0 = -(\lambda+\mu)\rho(n) + \lambda\rho(n-1) + \mu\rho(n+1)$$

Costo por unidad de tiempo (CUT)

Dos costos asociados, c1 = $ improductividad/espera, y c2=$ por canal de atención / servicio

$CUT = c_1 \cdot L + c_2 \cdot n$ done L es la longitud media del sistema, y n los canales de atención.

Modelo 1 : población infinita en un único canal de atención

Tenemos una población infinita , cola ilimitada , un único canal de atención y arribo de tipo Poisson – Exp.

Es importante decir que se DEBE cumplir $\rho < 1$, sino la cola se hace infinita y el sistema es inviable.

Formulas especificas:

$P_n = \rho^n p_0$ } probabilidad pn

$P_0 = 1 - \rho$ } probabilidad p0

$L = \dfrac{\rho}{1-\rho} = L_c + \rho$ } longitud promedio del **sistema**

$L_c = \dfrac{\rho^2}{1-\rho} = L - \rho$ longitud media de la **cola**

La diferencia L – Lc es ρ (pregunta de parcial, a veces. Ojo).

$W = \dfrac{L}{\lambda}$

$\lambda W = L$ } tiempo medio de espera en este sistema.

$W = \dfrac{1}{\mu - \lambda}$

$Wc = \dfrac{\rho}{\mu - \lambda}$ } tiempo media de espera en cola

Modelo 2 : población infinita, en varios canales de atención

Tenemos una población infinita , cola ilimitada , varios canales de atención y arribo de tipo Poisson – Exp.

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}<>=1 \;\; ; \;\; \frac{\rho}{M}<1 \;\; ; \;\; \lambda<\mu M$$ } Condiciones

M es la cantidad de canales de atención.

Hay dos momentos, 1...M clientes no hay cola ; M+1 .... hay cola.

Calculo de P0 (probabilidad de gente en el sistema)

$$P_0=\frac{1}{\frac{\rho^M}{M!}\cdot\frac{M}{M\cdot\rho}+\sum_{M=0}^{M-1}\frac{\rho^n}{n!}}$$

Probabilidad de n es

$$P_n=\frac{\rho^n}{n!}\cdot P_0$$ cuando n <= M

$$P_n=\frac{\rho^n}{M^{n-M}\cdot M!}\cdot P_0$$ cuando n>M

$$L_c=\frac{\lambda\mu\rho^M}{(M-1)!(M\mu-\lambda)^2}\cdot P_0$$ } Longitud de la cola

$$L=L_c+\rho$$ } Longitud de todo el sistema

$$\lambda W=L \qquad \lambda W_c=Lc \qquad W=W_c+T_s$$

$$H=\rho$$ } numero medio de canales ocupados

$$P(n\geq M)=\frac{\rho^M}{M!}\cdot P_0\cdot\frac{M}{M-\rho}$$ } probabilidad de que se forme cola.

Modelo 3 : población finita, en un único canal de atención

Tenemos una población finita (N elementos) , cola ilimitada , un solo canal de atención y arribo de tipo Poisson – Exp.

Modelo 4 : población finita, en varios canales de atención

Tenemos una población finita (N elementos) , cola ilimitada , varios canales (M) de atención y arribo de tipo Poisson – Exp.

Modelo 5 : población infinita, y cola limitada

Tenemos población infinita, cola limitada (restricción de espacio en cola) y uno o varios canales de atención.

Limitaciones: al ser cola limitada, se acepta cualquier valor de ρ

$P_0 = \frac{1}{n}$; entonces $P_1 ... P_n = P_0$; a partir de n+1, $P_{n+1} = 0$ en todas

$P_n = \rho^n \cdot P_0$

$L = \sum_{n=0}^{n} n\, p_n$ } longitud media del **sistema**

$L_c = \sum_{n=1}^{n} (n-1)\, p_n$ } longitud media de la **cola**

$\lambda W = L \qquad \lambda W_c = Lc \qquad W = W_c + T_s$

Modelo 6 : población impaciente

Algunos de los que esperan desisten de la cola y se van.