Coordenadas homogéneas

Las coordenadas homogéneas permiten expresar los puntos de tal manera que podemos tratar las transformaciones bidimensionales como multiplicaciones.
Para ello, se agrega una tercera coordenada a cada punto. En vez de representar el punto como un par (x,y), se representa como (x,y,W).
Dos conjuntos de coordenadas homogéneas representan el mismo punto si y solo si uno es múltiplo del otro ; esto significa que cada punto tiene varias representaciones en este sistema.
Una condición importante es que al menos una de las coordenadas debe ser distinta de cero, es decir, no se permite (0,0,0).
Si la coordenada W es diferente de 0, es posible usarla como divisor, (x,y,W) es igual a (x/W, y/W, 1), de esta manera se obtienen las coordenadas cartesianas del punto homogéneo.
Los puntos con W = 0 se conocen como puntos en el infinito y son poco frecuentes.
Si bien usualmente los triples de coordenadas representan puntos en el espacio tridimensional, en este caso se utilizan para representar puntos en el espacio bidimensional.
Cada punto homogéneo representa una linea en el espacio tridimensional (al usar todos los triples que lo representan).
Los puntos homogeneizados de tipo (x,y,1) forman el plano definido por la ecuación W=1 en el espacio (x,y,W).

Transformaciones bidimensionales

Las representaciones matriciales para la traslación, escalamiento y la rotación son respectivamente:

P' = T+P
P' = S . P
P' = R . P

Afortunadamente, utilizando coordenadas homogéneas, las tres transformaciones se pueden tratar como multiplicaciones.

Como los puntos son vectores columna tridimensionales, las matrices de transformación que multiplican a un vector de punto deben ser de 3x3.
Asi, la ecuación de traslación en forma matricial se representa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

De manera similar, la ecuación de escalamiento se presenta en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Y finalmente, la ecuación de rotación se puede representar como:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformación de cuerpo rígido

Un matriz de transformación de la forma $\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ donde la submatriz superior de 2x2 es ortogonal, conserva los ángulos y las longitudes. Este tipo de transformación se denomina de cuerpo rígido, ya que el cuerpo que se transforma no se distorsiona de ninguna manera.
Una secuencia arbitraria de matrices de rotación y traslación crea una matriz de esta forma.

Transformaciones afines

Al producto de una secuencia arbitraria de matrices de rotación, escalamiento y traslación se lo denomina transformación afín, y tiene la propiedad de conservar el paralelismo de las lineas, pero no las longitudes, ni los ángulos.

Otro tipo de transformación afín, llamada transformación de sesgo tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{sesgo en “x”}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{sesgo en “y”}$$

Los términos “a” y “b” son la constante de proporcionalidad.

Composición de transformaciones bidimensionales

Al componer una transformación bidimensional, ganamos eficiencia al aplicar a un punto una sola transformación compuesta, en lugar de aplicar una serie sucesiva de transformaciones.
Para esto, simplemente se realiza el producto de una secuencia arbitraria de matrices (rotación, escalamiento, traslación, sesgo, etc), y obtendremos la transformación compuesta.
Si M_1 y M_2 representan una traslación, un escalamiento, o una rotación fundamental,
$M_1 . M_2 = M_2 . M_1$ (es conmutativa) en los siguientes casos especiales:

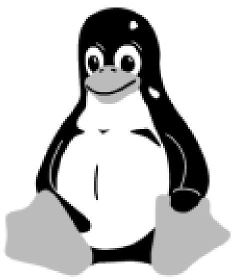
M_1	**M_2**
Traslación	Traslación
Escalamiento	Escalamiento
Rotación	Rotación
Escalamiento (con $S_x = S_y$)	Rotación

En estos casos antes mencionados, no hay que preocuparse por el orden de la composición de matrices.

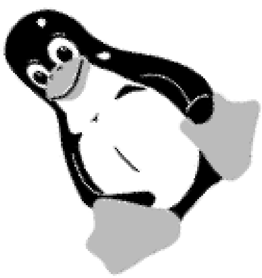
Ejemplo de la aplicación de las transformaciones

Utilizando un software de edición gráfica, vamos a realizar una serie de diferentes transformaciones sobre los puntos (pixels) de una imagen. El software se encarga automáticamente de aplicar las transformaciones sobre los puntos de la imagen.

Imagen original:



Aplicación de una transformación de rotación:



Aplicación de escalamiento y sesgo en 'x', combinadas: