Programación dinámica

Vamos a considerar problemas para los cuales es posible identificar cierto número de pasos secuencial es que llamaremos “proceso de decisión en n etapas”

Las “decisiones” son las opciones que tenemos para completar las etapas.

Una secuencia de decisiones se denomina “política”.

La condición del proceso en una etapa dada se denomina “estado” en esa etapa.

Cuando se toma una decisión se produce una transición del estado actual a otro estado asociado con la etapa siguiente.

Por ahora nos ocuparemos de la programación dinámica finita si tiene n etapas finitas y si los estados asociados con cada etapa también son finitos. Es determinística si el resultado de cada decisión se conoce exactamente.

El objetivo es determinar una “política óptima”.

Desde el punto de vista matemático podemos expresar que:

Se debe optimizar $Z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + ... + f_n(x_n)$

sujeto a $x_1 + x_2 + ... + x_n \leq b$

donde todas las variables son enteras y no negativas.

Las funciones $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$, ... son funcionas (no lineales) de una sola variable y b es un entero no negativo. Por ejemplo: la etapa 1 comprende la especificación de la variable x1 con la contribución $f_1(x_1)$ a la determinación del óptimo. La variable x_1 se denomina “variable de decisión”.

La programación dinámica parte del principio de optimalidad enunciado por Richard Bellman: “Una política es óptima si, en un período dado, cualesquiera que sean las decisiones precedentes, las decisiones que se tomen en adelante constituyen una política óptima con respecto al resultado de las decisiones precedentes”.

Dicho de otro modo: “Toda subpolítica extraída de una política óptima es en sí óptima” o como corolario: Entre el conjunto de políticas que contienen a una subpolítica dada (óptima o no) la mejor es aquella que se obtiene al completar la subpolítica dada con una subpolítica óptima.

Para aplicar el principio de optimalidad de Bellman comencemos con la última etapa del proceso de n etapas y determinemos la mejor política para abandonar ese estado y finalizar el proceso (se supone que las etapas anteriores a la que se está considerando han concluido).

Consideremos algunos ejemplos:

Vamos a aplicar esto a un problema de reemplazo. Una compañía de máquinas expendedoras de gaseosas tiene una operando normalmente en un cierto lugar desde hace 2 años. La tabla siguiente da las estimaciones de mantenimiento, costo de reemplazo e ingresos para cualquier máquina ubicada en ese lugar, en función de los años de uso.

	Edad, *u*					
	0	1	2	3	4	5
Ingreso, *I(u)*	10.000	9.500	9.200	8.500	7.300	6.100
Mantenimiento, *M(u)*	100	400	800	2.000	2.800	3.300
Reemplazo, *R(u)*	...	3.500	4.200	4.900	5.800	5.900

De acuerdo a una política establecida, ninguna máquina se conserva después de que cumple seis años y solamente se reemplazan por máquinas nuevas.

Determine una política de reemplazo que maximice el beneficio total para este sitio durante los próximos 4 años.

Este problema de reemplazo de equipo es el proceso de cuatro etapas, donde cada etapa representa un año en el período bajo consideración. Los estados en una etapa dada son las posibles edades de las máquinas que entran a esta etapa; esto es, $u = 1, ..., 5$. En cada etapa, la variable de decisión tiene sólo dos valores, los cuales pueden denotarse como CONSERVAR (quedarse con la máquina actual) y COMPRAR (reemplazar la máquina actual con una nueva máquina). Se definen

b_j: beneficio máximo

$m_j(u)$: beneficio máximo que se logrará empezando en la etapa j, en un estado u

$d_j(u)$: la decisión en la etapa j que permite lograr $m_j(u)$

y sean las funciones $I(u)$, $M(u)$ y $R(u)$ tal como se define en la talba anterior. Si la compañía entra en la etapa j con una máquina de u años de antigüedad y decide CONSERVAR la máquina, costará a la compañía $M(u)$ mantener la máquina, para tener un beneficio anual $I(u) – M(u)$. La compañía pasará después a la siguiente etapa con una máquina que tenga $(u + 1)$ años de antigüedad, y el mayor beneficio que puede lograr con ella (y con su posible sucesora) es $m_{j+1}(u + 1)$. Entonces, el beneficio general hasta completar es:

$$I(u) - M(u) + m_{j+1}(u + 1) \qquad (1)$$

Si en vez de esto la compañía decide vender la máquina con u años de antigüedad en la etapa j y COMPRAR una nueva máquina, tiene un costo de reemplazo de $R(u)$. La nueva máquina tiene una edad de 0 años, así que generará un ingreso de $I(0)$ y tendrá un costo de mantenimiento $M(0)$. El beneficio anual será de $I(0) – M(0) – R(u)$. Después, la compañía entra a la siguiente etapa, un año de antigüedad, y el mayor beneficio subsecuente que puede lograr es $m_{j+1}(1)$. En este caso el beneficio general para completar es :

$$I(0) - M(0) - R(u) + m_{j+1}(1) \qquad (2)$$

La decisión óptima en la etapa j produce la mayor de las cantidades (1) y (2); esto es,

$$m_j(u) = \max \{I(u) - M(u) + m_{j+1}(u + 1), I(0) - M(0) - R(u) + m_{j+1}(1)\} \qquad (3)$$

Se observa que, comenzando la etapa 1 con una máquina de 2 años de antigüedad, es imposible entra a la etapa j ($j = 1, ..., 4$) con una máquina de más de $j + 1$ años de antigüedad o con una edad j. Por lo tanto, se fijará $m_j(u) = -M$, un rendimiento negativo muy alto, siempre que $u > j + 1$ o $u = j$.

Etapa 4 La fórmula (3) del problema también es válida para $j = 4$, si se define $m_5(u) = 0$. Así,

$m_4(5) = \max \{I(5) – M(5), I(0) – M(0) – R(5)\}$
$= \max \{6.100 – 3.300, 10.000 – 100 –5.900\} = 4.000$ con $d_4(5) =$ COMPRAR

$m_4(4) = - M$

$m_4(3) = \max \{I(3) – M(3), I(0) – M(0) – R(3)\}$
$= \max \{8.500 – 2.000, 10.000 – 100 – 4.900)\} = 6.500$ con $d_4(3) =$ CONSERVAR

$m_4(2) = \max \{I(2) – M(2), I(0) – M(0) – R(2)\}$
$= \max \{9.200 – 800, 10.000 – 100 – 4.200\} = 8.400$ con $d_4(2) =$ CONSERVAR

$m_4(1) = \max \{I(1) – M(1), I(0) – M(0) – R(1)\}$
$= \max \{9.500 – 400, 10.000 – 100 – 3.500\}$ 9.100 con $d_4(1) =$ CONSERVAR

Estos resultados constituyen los primeros renglones de la siguiente tabla:

	u				
	1	2	3	4	5
$m_4(u)$	9.100	8.400	6.500	$-M$	4.000
$d_4(u)$	CONSERVAR	CONSERVAR	CONSERVAR	...	COMPRAR
$m_3(u)$	17.500	14.900	$-M$	13.200	$-M$
$d_3(u)$	CONSERVAR	CONSERVAR	...	COMPRAR	...
$m_2(u)$	24.000	$-M$	22.500	$-M$	$-M$
$d_2(u)$	CONSERVAR	...	COMPRAR	...	...
$m_1(u)$	...	30.900	...	...	...
$d1(u)$	...	CONSERVAR	...	...	...

El resto de las anotaciones en esta tabla se obtienen con la aplicación secuencia de la fórmula de recursión para j = 3, 2, 1, con los rendimientos par los estados imposibles penalizados como previamente se estipuló. Se tiene de la tabla que la compañía puede lograr un beneficio total máximo de $30.900 durante los próximos 4 años, empezando con una máquina con 2 años de antigüedad. Para lograr esto, deberá conservar la máquina actual durante un año más, comprar entonces una nueva máquina y conservarla por el resto del período.