Propiedades de los límites :

1. El límite de una función en un punto si existe , es único y es igual a los límites laterales .
2. Si una función tiene limite distinto de cero en un punto entonces existe un entorno del punto en el que los valores que toma f tienen el mismo signo que el límite .
3. lim f+g = lim f + lim g
4. lim f·g = lim f · lim g
5. lim k·f = k · lim f donde k es un nº real
6. limf/g = lim f / lim g   siempre que lim g $\neq$ 0
7. lim f^n = (lim f $)^n$ donde n es un nº real
8. lim f^g = (lim f $)^g$
9. lim g(f(x)) = g (lim f(x))

Cálculo de algunos límites : (Indeterminaciones)

Al aplicar las propiedades de los límites podemos encontrar una de las siguientes indeterminaciones :

$$\mathbf{0/0\ ,\ \infty/\infty\ ,\ \infty-\infty\ ,\ 0\cdot\infty\ ,\ 0^0\ ,\ \infty^0\ ,}\ 1^\infty$$

1. $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$ es decir en los polinómios se sustituye el punto .
2. $\lim P(x)/Q(x) = P(x_0)/Q(x_0)$ si $Q(x_0) \neq 0$

   Cuando $Q(x_0) = 0$ se puede distinguir dos casos :
   - Que $P(x_0) \neq 0$. Tendremos que calcular los límites laterales , si existen y son iguales la función tendrá límite que será $+\infty$ ó $-\infty$. En caso contrario no existirá límite .
   - Que $P(x_0) = 0$ por lo que tendremos una <u>indeterminación del tipo 0/0</u> que se resuelve factorizando numerador y denominador y simplificando la función racional . En el caso de que haya raices debemos multiplicar numerador y denominador por el conjugado .
3. $\lim P(x)/Q(x) = \infty/\infty$ <u>(indeterminación del tipo ∞/∞</u>) entonces se divide por la máxima potencia , tanto si las expresiones son racionales como si son radicales .

   En el caso más simple que es el de las funciones racionales podemos obtener los siguientes casos :
   - grado P(x)>gradoQ(x) $\longrightarrow$ lim = +/- ∞
   - grado P(x)=gradoQ(x) $\longrightarrow$ lim = a_n/b_n
   - grado P(x)<gradoQ(x) $\longrightarrow$ lim = 0

   Puede ser de utilidad saber que se puede transformar la indeterminación 0/0 a ∞/∞ o al revés , sin más que tener presente que : $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{1/Q}{1/P}$
4. Si al calcular el límite de la función aparece una <u>indeterminación del tipo</u> $\infty - \infty$ para eliminarla tendremos que distinguir dos casos :
   - Si f es la diferencia de dos funciones racionales se efectua dicha operación para conseguir estar en uno de los dos casos anteriores .
   - Si f es la diferencia de dos funciones con raices cuadradas multiplicaremos y dividiremos por el conjugado .
5. Si al calcular el límite de la función aparece una <u>indeterminación del tipo</u> 1^∞ debemos tener en cuenta que :

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$$

=2'71828...

6. La <u>indeterminación del tipo</u> $0\cdot\infty$ se reduce al tipo 0/0 ó ∞/∞ utilizando la igualdad $P\cdot Q = \dfrac{P}{1/Q} = \dfrac{Q}{1/P}$
7. Las indeterminaciones del tipo 0^0, ∞^0 y 1^∞ se pueden resolver utilizando la propiedad : $a^b = e^{b\cdot \ln a}$ con lo que se reducirá a una de las indeterminaciones ya estudiadas .

Definición de continuidad : se dice que una función es continua en un punto x_0 si :

a) Existe $f(x_0)$

b) Existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$

c) Son iguales

En forma matemática :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \quad \exists \delta \quad / \quad \text{si} \quad /x - x_0/ < \delta \quad \Rightarrow \quad /f(x) - f(x_0)/ < \varepsilon$$

Una función se dice que es continua en un intervalo si lo es en cada uno de sus puntos .

Tipos de discontinuidades :

a) **Discontinuidad evitable** : limite es un numero, hay discontinuidad evitable en x=a

b) **Discontinuidad por salto**: cuando no hay limite

c) **Discontinuidad con tendencia al inifinito:** si hay una asintota vertical en x=a

Asintotas:

A.V (graf) = lim x-> a^{-1} y lim x-> a^{+1}; si dan + arr, - abj (vals < **a** y > **a**)

A.H (graf) = f(x) – y =>f(g) => poner valores < y >; y ver si tiendea+o- (arr,abj)

A.O (graf) = f(x) – y (y es ax+b); si < 0 abj, si > 0 por arr (idem A.H)

A.V: lim x-> a f(x) = inf (a= df{..})

A.H: lim x->inf = num

A.O = a = [lim x->inf] f(x) * 1/x = <> 0 y <> inf | b = [lim x -> inf] f – a*x => y = ax+b

Derivadas de las funciones elementales :

y	y'	y	y'
k	**0**		
x	**1**		
x^n	nx^{n-1}	u^n	$nu^{n-1}u'$
a^x	$a^x \ln a$	a^u	$a^u \cdot \ln a \cdot u'$
e^x	e^x	e^u	$e^u \cdot u'$
u^v	$v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$		
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\sqrt[n]{u}$	$\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x}\log_a e$	$\log_a u$	$\dfrac{u'}{u}\log_a e$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$
senx	**cosx**	**senu**	**cosu·u'**
cosx	**-senx**	**cosu**	**-senu·u'**
tgx	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	**tgu**	$\dfrac{u'}{\cos^2 u}$
cotgx	$\dfrac{-1}{\mathrm{sen}^2 x}$	**cotgu**	$\dfrac{-u'}{\mathrm{sen}^2 u}$
secx	$\dfrac{\mathrm{sen}x}{\cos^2 x}$	**secu**	$\dfrac{\mathrm{sen}u}{\cos^2 u}u'$
cosecx	$\dfrac{-\cos x}{\mathrm{sen}^2 x}$	**cosecu**	$\dfrac{-\cos u}{\mathrm{sen}^2 u}u'$
arc senx	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	**arc senu**	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
arc cosx	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	**arc cosu**	$\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
arc tgx	$\dfrac{1}{1+x^2}$	**arc tgu**	$\dfrac{u'}{1+u^2}$
arc cotgx	$\dfrac{-1}{1+x^2}$	**arc cotgu**	$\dfrac{-u'}{1+u^2}$
arc secx	$\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	**arc secu**	$\dfrac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$
arc cosecx	$\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$	**arc cosecu**	$\dfrac{-u'}{u\sqrt{u^2-1}}$

Cadena: ejemplo: f(x) = $\mathrm{sen}^3(4x)$ = $3\mathrm{sen}^2(4x)$.cos(4x).4 => f ' (x) = $12\mathrm{sen}^2(4x)$.cos(4x)

A.V (graf) = lim x-> a^{-1} y lim x-> a^{+1}; si dan + arr, - abj (vals **< a** y **> a**) |||A.H (graf) = f(x) – y =>f(g) => poner valores < y >; y ver si tiendea+o- (arr,abj) ||| A.O (graf) = f(x) – y (y es ax+b); si < 0 abj, si > 0 por arr (idem A.H) ||| A.V: lim x-> a f(x) = inf (a= df{..}) ||| A.H: lim x->inf = num ||| A.O = a = [lim x->inf] f(x) * 1/x = <> 0 y <> inf | b = [lim x -> inf] f – a*x => y = ax+b

Nota: en x puede ser un numero; u se aplica a la regla de la **cadena**

Formula de la funcion derivada en un punto

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ Si es la funcion, reemplazar x0 por x

Cadena: ejemplo: f(x) = $sen^3(4x) = 3sen^2(4x).cos(4x).4$ => f ' (x) = $12sen^2(4x).cos(4x)$

Operaciones:

Potencia: x^y => $\mathbf{x^{n} = nx^{n-1}}$ Ej: $x^2 = 2x$; $x^3 = 3x^2$; **x = 1**
Raiz => f(x) = $\sqrt[n]{x}$ = $x^{1/n}$ => $\mathbf{f'(x) = 1/n\ x^{1/n-1}}$
Suma / resta => **(f+g) ' = f ' + g '**
Multiplicar => **(f·g) ' = f '·g + f·g '**
Multiplicar funcion por constante => **(k·f(x))' = k·f(x) '**
Una constante por x, da la constante: ej: f'(x) = (k.x)' = **k** (numero, ej: 2)

Division $\left(\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}\right)' = \frac{\mathbf{f'\cdot g - f\cdot g'}}{\mathbf{g^2}}$

[g(f(x))]' = g'(f(x))·f '(x)

$$\left(\mathbf{f}^{-1}\right)=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f\,'}}$$

Derivada de una constante (**numero**) da cero (**0**)
La derivada de una funcion lineal da la derivada del coeficiente principal. Ej: **7x + 3 = 7**

Indeterminaciones:**0/0 ,** ∞/∞ **,** $\infty - \infty$ **,** $\mathbf{0\cdot\infty}$ **,** $\mathbf{0^0}$ **,** $\infty^{\mathbf{0}}$ **,** 1^{∞}

Utiles:
$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Logaritmo: $$\log({}_y x)=\frac{\log x}{\log y}$$

$$\sin(\pi)=0 \quad \cos(\pi)=-1 \quad \tan(\pi)=0$$

$$-b\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}}$$

Funciones derivadas (metodo simplificado)

$$(a^x)'=a^x\ln a \quad a\in\mathbb{R} \qquad (e^x)'=e^x \qquad (\ln x)'=\frac{1}{x} \qquad (\sin x)'=\cos x$$

$$(\cos x)'=-\sin x \qquad (\tan x)'=sec^2 x \qquad (cotg\,x)'=-cosec^2 x$$

Regla de la cadena: g'[f(x)] . f '(x)

Regla de la cadena para funciones trigonométricas

$$(\sin u)'=u'\cdot\cos u \qquad (\cos u)'=-u\cdot\sin u \qquad (\tan u)'=u'\cdot sec^2 u \qquad (sec\,u)'=u'\cdot sec\,u\cdot\tan u$$

$$(cosec\,u)'=-u'\cdot cosec\,u\cdot cotg\,u \qquad (cotg\,u)'=\frac{-u'}{\sin^2\cdot u}$$