Vectores
Resumen y notas de clases

Ultima modificacion:26 de septiembre de 2003

Apuntes variados sobre vectores

Por Kronoman
En memoria de mi querido padre

<u>Sistemas de coordenadas</u>

Linear o unidimensional (1D)

Dos dimensiones (2D)
- Sistema de coordenadas polares
- Sistema de coordenadas cartesiana rectangular

Tridimensional (3D)
- Sistema de coordenadas tridimensionales
  Los ejes dividen al espacio en 8 octantes.

- Sistema de coordenadas cilindricas

- Sistema de coordenadas esfericas

<u>Vectores</u>

A todo punto le podemos asociar un segmento orientado referido al origen de coordenadas, dicho segmento, definido por un origen, y un extremo, se denomina “vector”

<u>Elementos de un vector</u>

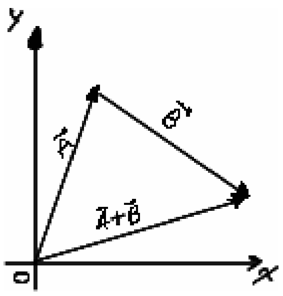
- Direccion: lo define la recta que lo contiene
- Sentido:determinado por la orientación del segmento
- Modulo o norma:longitud del segmento (escalar positivo)

<u>Vector unitario, o **versor**</u> Vector de modulo 1.

<u>Vector nulo:</u> vector cuyo modulo es 0, es un punto, no tiene direccion y no tiene sentido.

<u>Vector equipolente:</u> vectores con igual dirrecion,sentido, y modulo.

<u>Suma de vectores:</u>



Propiedades de la suma de vectores:
- Ley interna o de cierre $\forall \vec{a} \forall \vec{b} \in V : \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} ; \vec{c} \in V$
- Conmutativa $\forall \vec{a} \forall \vec{b} \in V : \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Asociativa $\forall a \forall b \forall c \in V : \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
- Existencia de elemento neutro $\exists \vec{0} \in V / \forall \vec{a} \in V : \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$
- Opuesto o simetrico $\forall \vec{a} \in v \exists (-\vec{a}) \in V : \vec{a} + (-\vec{a}) = 0$

Por cumplir las 5 propiedades, es un grupo conmutativo o Abeliano (v,+)

Producto de un vector por un escalar (numero)

siendo $\vec{A}(a_1, a_2, a_3)$; γ escalar

$\gamma.\vec{A}=$escalar

$\gamma.\vec{A}=(\gamma.a_1, \gamma.a_2, \gamma.a_3)$

igual direccion, igual sentido si $\gamma>0$ sino, sentido contrario

$\gamma.\vec{A};|\gamma.\vec{A}|=\frac{1}{a}.a=1=$versor   Vectores de modulo 1 son VERSORES

Propiedades:

1. Ley externa $\forall\alpha\in\mathbb{R};\forall\vec{a}\in V:\alpha\cdot\vec{a}=\vec{b};\vec{b}\in V$
2. Distributiva con respecto a la suma de vectores $\forall\alpha\in\mathbb{R};\forall\vec{a},\vec{b}\in V:\alpha\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\alpha a+\alpha b$
3. Distributiva con respecto a la suma de escalares $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R};\forall\vec{a}\in V:(\alpha+\beta)\cdot\vec{a}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{a}$
4. Asociatividad mixta o combinada $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R};\forall\vec{a}\in V:(\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{a}=\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{a})$
5. Elemento neutro $1\in\mathbb{R}/\forall\vec{a}\in V:1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

“Por ser grupo Abeliano, y además, cumplir con las cinco propiedades anteriores, se dice que (V,+,R,*) tiene estructura de **espacio vectorial**”

O sea, para tener estructura de espacio vectorial , tiene que cumplir las diez (10) condiciones anteriores a la vez.

Combinacion lineal

Definicion: dada una familia, o conjunto de vectores $A=\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}$ y un conjunto de escalares “k”, se dice que un vector V cualquiera perteneciente al conjunto de vectores, es combinacion lineal del conjunto A si y solo si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$ tal que $\vec{v}=\alpha_1\cdot\vec{v}_1+\alpha_2\cdot\vec{v}_2+\ldots+\alpha_n\cdot\vec{v}_n$ es decir $\vec{v}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\vec{v}_i$

Cuando $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n=0$ se dice que la combinacion lineal es **trivial**. Se origina el vector nulo (o sea, cuando todos los escalares son cero).

Expresion de un vector

- Por medio de sus componentes o coordenadas $\vec{v}=(a_1, a_2)$
- Expresion canonica (se expresa como combinacion lineal de vectores) $\vec{v}=a\cdot\vec{i}+b\cdot\vec{j}+c\cdot\vec{k}$
- Expresion conociendo su origen y extremo $\vec{ab}=$extremo$-$origen

Dependencia e independencia lineal

Conjunto linealmente independiente (L.I)

Un conjunto de vectores $A=\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}$ es L.I si y solo si la unica combinacion lineal de dichos vectores que originan al vector nulo es la trivial.

$$A\subset V\text{ es LI}\Leftrightarrow\forall\vec{v}_i\in V;\forall\alpha_i\in k:\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\vec{v}_i=\vec{0}\Rightarrow\alpha_i=0$$

Cuando una familia de vectores no es L.I, se denomina Linealmente Dependiente:

$A\subset V\text{ es LD}\Leftrightarrow\forall\vec{v}_i\in V;\forall\alpha_i\in k;\exists\alpha_i:\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\vec{v}_i=\vec{0}\ \wedge\ \alpha_i\neq0$ o sea, si existen numeros (no todos cero) tales que la combinacion lineal es = 0.

Propiedades

- Todo conjunto de vectores al que pertenezca el vector nulo, es LD
- Un conjunto finito y no vacio de vectores es LD si y solo si algun vector es combinacion lineal de los demas.
- Tres o mas vectores son coplanares (pertenecen a un mismo plano, o planos paralelos) si y solo si son LD.

Procedimiento: para saber si es LD o LI, se plantea la ecuacion $\alpha_1\vec{u}+\ldots\alpha_n\vec{u}_n=0$ y se hallan los valores de $\alpha_1\ldots\alpha_n$ y la ecuacion planteada conduce siempre a un sistema homogeneo y compatible ; si es compatible determinado, la unica solucion es la trivial, y el sistema es LI ; si es compatible indeterminado, admite infinitas soluciones, entonces es LD.

Sistema de generadores

Definicion: una familia de vectores $A=\{\vec{u}_{1,}\vec{u}_{2,}\ldots\vec{u}_{n}\}$ es un sistema de generadores de V si y solo si todo vector de V se puede expresar como combinacion lineal de dicha familia (ej: el conjunto de versores i,j,k en R3)

El procedimiento para averiguar si dado un vector "u" existen los escalares es:

Desarrollar la igualdad $\vec{u}=\alpha_1\vec{u}_1+\ldots+\alpha_n\vec{u}_n$ se obtiene un sistema de ecuaciones cuyas incognitas son los numeros $\alpha_1\ldots\alpha_n$; por lo tanto, si el sistema es compatible (determinado o indeterminado) , existen dichos numeros y por lo tanto es una combinacion lineal de los vectores

Base de un espacio vectorial

Una familia de vectores $A=\{\vec{v}_{1,}\vec{v}_{2,}\ldots\vec{v}_{n}\}$ es una base de (V,+,K,*) si y solo si es un conjunto L.I y a su vez, un sistema generador de V.

Propiedad:

Un conjunto de n vectores de un espacio n-dimensional es base si y solo si es LI o generador.
O sea, en un conjunto donde hay igual cantidad de vectores que de dimensiones, basta comprobar que es LI o generador para saber si es base.
Ejemplo: $A=\{(a_{1,}a_{2,}a_3),(b_{1,}b_{2,}b_3),(c_{1,}c_{2,}c_3)\}$ (3 vectores, 3 dimensiones) ; entonces A es base si y solo si A es LI o A es generador.

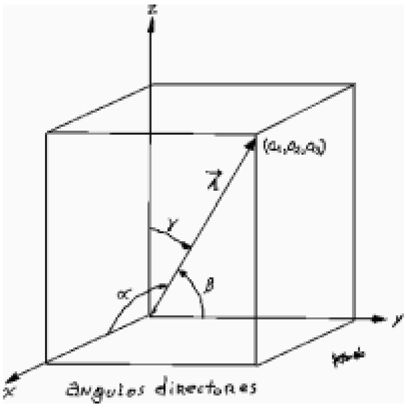
Consecuencias de esta propiedad

1) n vectores LI de un espacio n-dimensional constituyen una base del mismo
2) Todo sistema de generadores de n vectores de un espacio n dimensional es una base del mismo
3) Todo conjunto de mas de n vectores de un espacio n-dimensional es L.D
   Ejemplo: $A=\{(x_{1,}x_2),(y_{1,}y_2),(z_{1,}z_2)\}$ 3 vectores en 2 dimensiones, A es L.D

Longitud, modulo o norma de un vector:

$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (raíz cuadrada, usando Pitagoras)

Ángulos directores y cosenos directores



Los cosenos directores de un vector respecto de un sistema de coordenadas ortogonales a los cosenos de los ángulos que el vector forma con el sentido positivo de los ejes coordenados.

siendo $\vec{a}(a_{1,}a_{2,}a_3) \rightarrow \cos\alpha=\frac{a_1}{|\vec{a}|} \quad \cos\beta=\frac{a_2}{|\vec{a}|} \quad \cos\gamma=\frac{a_3}{|\vec{a}|}$

ademas $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

Nota: al vector nulo (o de modulo cero) no se le asignan ni ángulos directores ni cosenos directores.

Igualdad de vectores: $\vec{a}=\vec{b}$ si sus componentes homologas son iguales

Producto escalar de dos vectores

Combina dos vectores y da un numero real. Se multiplican las componentes homologas de ambos vectores y se suman todos los productos. **Si este producto da cero, los vectores son perpendiculares.**

Formula general : $\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}|.|\vec{B}|.\cos\theta=k$

Formula general: $\vec{A}\cdot\vec{B}=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n$

Algunas propiedades

$\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$

$\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$

$c.(\vec{A}.\vec{B})=(c.\vec{A}).\vec{B}=\vec{A}.(c.\vec{B})$

$\vec{A}.\vec{A}=|\vec{A}|^2$

Ángulo entre dos vectores:

$$\cos\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|.|\vec{B}|}\rightarrow\theta=\arccos\frac{a_{1.}b_1+a_{2.}b_2+a_{3.}b_3}{|\vec{A}|.|\vec{B}|}$$

Paralelismo de vectores

siendo $\vec{a}(a_{1,}a_{2,}a_3);\ \vec{b}(b_{1,}b_{2,}b_3)$

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\pm\frac{a}{b}$$

Cuando dos vectores son paralelos, sus componentes homologas son proporcionales. Esto es necesario y suficiente para que sean paralelos.

Proyección de vectores

$\text{proy}_{\vec{u}}^{\vec{v}}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\cdot|\vec{u}|$ esto es el modulo del vector Proyección de v sobre u (es siempre positivo)

Se multiplican u*v, luego se divide por el modulo de u elevado al cuadrado, y se multiplica por el modulo de u.

Una vez obtenido, se obtiene el vector Proyección en si, multiplicando al vector u por el primer miembro de la multiplicación (me explico?) : o sea: $\text{proy}_{\vec{u}}^{\vec{v}}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\cdot(x,y,z)=(x_{1,}y_{1,}z_1)$ hago el producto escalar, y me da el vector Proyección. O sea, x1, y1, z1 son el resultado de multiplicar x,y,z del vector u por el (u*v)/|u|2

Producto vectorial de dos vectores (solo en R^3)

Su resultado es un **vector**, el cual tiene dirección perpendicular al plano determinado por los vectores, y su sentido se determina por el giro (horario, antihorario) del vector #1 sobre #2.

Su modulo: $|\vec{A} \wedge \vec{B}| = |\vec{A}| . |\vec{B}| \operatorname{sen} \alpha = |\vec{C}|$

El producto vectorial no es conmutativo, pues **u x v** = - **v x u**

Interpretación geométrica: El módulo del producto vectorial es igual a la superficie del plano formado por los vectores que se multiplican.

Si el producto vectorial es nulo (modulo cero), los vectores son paralelos.

Expresión cartesiana del producto vectorial:

$$\vec{U} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ux & uy & uz \\ vx & vy & vz \end{vmatrix} = (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y)\mathbf{i} + (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z)\mathbf{j} + (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x)\mathbf{k}$$

expresado por joako:
en la primera, tachas i, y multiplicas el resto cruzado (uy*vz-uz*vy)i
en la 2nda, tachas j, y multiplicas el resto, cruzado al reves (uz*vx-ux*vz)j
en la 3ra, tachas k, y multiplicas igual que en la primera (ux*vy-uy*vx)k
Tambien se puede resolver mediante Sarrus.

Propiedades:

1. $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$
2. $\forall k \in \mathbb{R} : k \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = k \cdot \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge k \cdot \vec{b}$ (k mult. solo a 1 de los vectores!)
3. $\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$

Observacion: $\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{a} \wedge \vec{b})$ no es conmutativo ; difiere el sentido

Producto mixto entre vectores

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) . \vec{c}$$

se realiza el producto vectorial entre A y B, y al vector resultante se lo multiplica escalarmente por C
Se puede calcular rápidamente usando determinantes

$$(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k \quad k \in \mathbb{R}$$

El producto mixto es el volumen de un paralelepipedo formado por los 3 vectores (A y B = base, C = altura)

Si el producto mixto es 0, los vectores son coplanares.

Condición de coplanaridad de los vectores
El producto mixto debe dar cero (esto significa que los vectores están en el mismo plano).

Pseudo vectores
Si necesito para definir un determinado vector, conocer la orientación del espacio, es un pseudo vector.

Orientación en el espacio
Dado un sistema de ejes coordenados al cual se refiere todo el espacio, decimos que se ha fijado una orientación al espacio, entendiendo por tal la orientación del triedro formado por los ejes coordenados.