1. a) Obtener la ecuación explícita de la recta tangente a la gráfica de las siguientes funciones en los puntos de tangencia cuyas abscisas se indican:

   i) $f(x)=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+x$ en $x_0=-1$

   ii) $g(x)=\left(\frac{1}{x+2}\right)^{x+3}$ en $x_0=-1$

   iii) $h(x)=2^{\left[\frac{1}{(x-2)^x}\right]}$ en $x_0=3$

   b) Mediante las ecuaciones de las rectas tangentes obtenidas en a), calcular aproximadamente $f(-1{,}25)$ $g(-0{,}8)$ $h(3{,}25)$

   c) ¿Se puede calcular mediante la recta tangente un valor aproximado de f (-2)?.Justificar.

   d) ¿Se puede calcular mediante la recta tangente un valor aproximado de h (2)?.Justificar.

2. a) Obtener la ecuación explícita de la recta y = t(x), tangente a la gráfica de la función $f(x)=\frac{1}{2-x}$ en el punto de tangencia de abscisa x_0 = 2,2.

   b) Calcular f (2,3).

   c) Calcular aproximadamente f (2,3) mediante t (2,3).

   d) ¿Se puede calcular mediante la recta tangente un valor aproximado de f (1,9)?. Justificar.

3. Mediante la recta tangente calcular valores aproximados de $\sqrt[3]{126}$, $\sqrt[3]{0{,}0009}$, $\sqrt[4]{78}$, $\sqrt{146}$, $\sqrt{102}$, indicando en cada caso la ecuación de la recta tangente utilizada.

4. Para una función f derivable en $\Re$, se sabe que f (3) = 5 y f'(3) = -2.

   a) Hallar la ecuación explícita de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (3 ;5).

   b) Obtener un valor aproximado de f (3,2) y de f (2,9).

5. Calcular el incremento y la diferencial en los siguientes casos:

a) $f(x)=x^3$, en $a=1$ si $h=0{,}1$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, en $a=1$ si $h=-0{,}5$

c) $f(x)=x^4+2x$, en $a=2$ si $h=0{,}005$

d) $f(x)=x^2$, en $a=-1$ si $h=0{,}08$

6. a) Calcular Δf - df para la función $f(x)=2x^2-1$ en x_0 = 2 y los siguientes valores de Δx:
   i) 1 ; ii) 0,1 ; iii) 0,001
   b) Para la misma función y abscisa, calcular Δx para Δf - df = 0,001

7. Un recipiente esférico de radio R = 12cm, por efecto de una variación de temperatura aumenta el volumen, creciendo su radio en 1,5 mm. Determinar:
   a) el aumento de volumen,
   b) el aumento aproximado de volumen mediante diferenciales.

   NOTA: V esfera: $\dfrac{4}{3}\pi R^3$

8. La intensidad I de la luz que penetra por una abertura está dada por I = k.r^2 , donde k es una constante y r es el radio de la abertura
   a) Determinar mediante diferenciales, un valor aproximado de ΔI.
   b) Determinar exactamente ΔI.

9. Hallar $df(x;\, dx)=f'(x)\,dx$ para cada una de las siguientes funciones:

df =f'(x) dx es la expresión genérica de la función diferencial

   i) $f(x)=\operatorname{cosec} x$
   ii) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$
   iii) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3}$
   iv) $f(x)=(2+\operatorname{sen} x)^2$
   v) $f(x)=\operatorname{tg} 3x+\operatorname{sen}^2 2x$
   vi) $f(x)=2^{3x}-e^x+\ln(x-1)$
   vii) $f(x)=(\operatorname{arcsen} x)^{x+1}$

10. a) Hallar $df = df\,(x;\, dx)$ para cada una de las siguientes funciones:
    i) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x$
    ii) $f(x)=(x+1)^{x+1}$
    iii) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

    b) Hallar para las funciones anteriores $df\,(0\,;\,dx)$, $df\,(x\,;\,0{,}2)$, $df\,(0\,;\,0{,}2)$.

11. Para la función $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x$
    a) Calcular el error que se comete si se reemplaza $f(2{,}96)$ por $f(3) + df(3\ ;\ -0{,}04)$.
    b) Calcular $\Delta f = f(3+\Delta x) - f(3)$ e identificar $df(3\ ;\ \Delta x)$ como la parte lineal del incremento Δf.

12. Identificar la diferencial df como la parte lineal del incremento Δf, con respecto a Δx:

    i) $\Delta f = x^2\Delta x + x\Delta x^2 + \dfrac{\Delta x^3}{3}$ ii) $\Delta f = x^2\Delta x + x\Delta x^2 + \dfrac{1}{3}\Delta x^3 + 3\Delta x$

13. a) Para la función $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + 1$ calcular df para $x_1 = 2$, $\Delta x = 1$
    Utilizando dichos valores dibujar la recta tangente a la gráfica en el punto P_1 de abscisa x_1
    Indicar sobre el gráfico realizado P_1 , Δx , Δf , df.
    b) Idem que en a) para la función $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 3$.

14. a) Hallar la ecuación explícita de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x_1 = 3$ sabiendo que $f(3) = -1$, $df = 1/2$ y $\Delta x = 0{,}2$.
    b) Calcular df para $x_1 = -3$ y $\Delta x = 1/2$ sabiendo que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x_1 = -3$ es $3x + 9y = 8$.

15. Usar diferenciales para calcular en forma aproximada:
    $e^{-0,1}$; $2^{0,2}$; $\ln 1{,}3$; $\ln 0{,}7$; $\sqrt[3]{128}$; $\sqrt{253}$

16. Desarrollar según la fórmula de Taylor, las siguientes funciones, para el valor de a y de n indicados:

    a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ $a = \dfrac{\pi}{2}$, $n = 3$
    b) $f(x) = \sqrt{x}$ $a = 4$, $n = 3$
    c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $a = -2$, $n = 5$

17. Desarrolle según la fórmula de Mac Laurin, las siguientes funciones, para los valores de n dados:

    a) $f(x) = \ln(x+1)$ $n = 4$ y calcular $\ln(1{,}25)$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ $\qquad n = 5$

c) $f(x) = e^{2x}$ $\qquad n = 5$

18. Hallar el polinomio de Taylor de orden 5 de las siguientes funciones en el punto $x_0 = 0$

a) $f(x) = senx$

b) $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$

c) $f(x) = \sqrt{1+x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

ii) Usar el polinomio obtenido que corresponda para calcular un valor aproximado de:

$\sqrt{0{,}8}$; $\sqrt{1{,}3}$; $\sqrt[3]{1{,}4}$; $\sqrt[3]{0{,}7}$

19. Demostrar que la siguiente expresión es verdadera

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + T_{n+1}$$

Calcular $e^{0,1}$ considerando una aproximación de 1º , 2º y 3º orden. Comparar los resultados.

20. Considerar la función $f : \Re \to \Re \,/\, f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$: expresar f según un polinomio de Mac Laurin y realizar la gráfica de f y de las dos primeras aproximaciones.

21. Desarrollar el polinomio $P(x)$ en potencias de $x - x_0$ en los siguientes casos:

a) $P(x) = -x^3 + 3x^2 + 5x - 3$ para i) $x_0 = -1$; ii) $x_0 = 2$

b) $P(x) = -x^4 + x^3 + x^2 - 2x - 5$ para i) $x_0 = -2$; ii) $x_0 = 1$

22. Dadas las siguientes funciones, determinar los polinomios de Mac Laurin de primero, segundo y tercer orden.

a) $f(x) = e^{x/2}$

b) $f(x) = x^{7/2} + \operatorname{sen} x$

Representar gráficamente la función dada en a) y los tres polinomios en un mismo gráfico

En la función dada en b) no existe el polinomio de cuarto orden. Justificar

23. Decidir sí las siguientes funciones (*f: D→ℜ*) satisfacen las hipótesis del Teorema de Rolle, en los intervalos [*a*; *b*] que se indican en cada caso. En caso afirmativo, hallar $c \in (a; b) \,/\, f'(c) = 0$

a) $f(x) = \begin{cases} -x+1 & si\ x \le 1 \\ 0{,}5x & si\ x > 1 \end{cases}$ en [0; 2]

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \le 1 \\ 2x-1 & si\ x > 1 \end{cases}$ en [-3; 5]

c) $f(x) = |x|(2-|x|)$ en i) [-2; 0] , ii) [1/2; 1/2]

d) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ en [0; π/4]

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2}$ en [-1/2; 1/2]

24. Determinar si es posible o no aplicar el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial a las siguientes funciones (*f: D→ℜ*) en los puntos indicados. En caso afirmativo determinar $c \in (a; b)$.

a) $f(x) = x^3+1$ en [1; 2]

b) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ en [0; 1]

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & si\, x \ge 0 \\ \operatorname{sen} x & si\, x < 0 \end{cases}$ en [-1; π/2]

d) $f(x) = \begin{cases} x^2+2x & si\ x \le 0 \\ -x^2+2x & si\, x > 0 \end{cases}$ en [-3; 3]

25. Verificar el Teorema de Cauchy y hallar $c \in (a; b)$ / $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, sí

$f(x)= x^3$ y $g(x)= x^2$ en $[a; b] = [1; 2]$

26. Para las siguientes funciones, determinar todos los puntos c en el intervalo $(a; b)$ tales que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

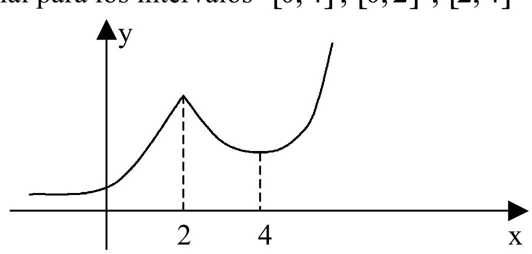
a) $f(x) = 5 - 2x$ $(a;b) = (0;4)$
b) $f(x) = \ln x$ $(a;b) = (e^2; e^3)$
c) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 2x$ $(a;b) = (-1;1)$

27. a) Dado el polinomio $P(x) = -x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 2$, decir si existe al menos un x perteneciente a (1; 3) tal que $P'(x) = 6$.

b) Para la función $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 5$ decir si existe $c \in (-2;1)$ tal que $f'(c) = 0$. En caso de que exista determinar c.

c) Para la función $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ decir si existe $c \in (-1; 1/2)$ que cumple $f(1/2) - f(-1) = \dfrac{3}{2} f'(c)$. En caso de que exista, determinar c.

28. Dada la función de la figura, determinar si es posible aplicar el Teorema del valor medio del cálculo diferencial para los intervalos $[0;4]$, $[0;2]$, $[2;4]$



29. Calcular los siguientes límites mediante la regla de L´ Hopital, indicando el tipo de indeterminación:

I) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$ II) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x}$

III) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$ IV) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x^2 + x}$

V) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^2}$

VI) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - x - 20}{x^2 - 25}$

VII) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{10\,x}$

VIII) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{2\,x}$

IX) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

X) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{x^2}$

XI) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln \ln x}{\sqrt{x}}$

XII) $\lim\limits_{x\to -\infty} x\,e^x$

XIII) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

XIV) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \cos ecx\right)$

XV) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

XVI) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

XVII) $\lim\limits_{x\to 0^+} (-\ln x)^x$

XVIII) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+1}{4x-3}$

XIX) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$

XX) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)\sec x$

XXI) $\lim\limits_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{(1-x)^6}}$

XXII) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x^2}}$

XXIII) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2 - 1} - \dfrac{x^3}{x^2 + 1}\right)$

XXIV) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$

XXV) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^8 x}{\operatorname{sen} x^8}$

XXVI) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}$

XXVII) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 2^x}{x}$

XXVIII) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{3x}$

XXIX) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

XXX) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{x}$

XXXI) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$

XXXII) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\cot gx}$

XXXIII) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

XXXIV) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\,\ln x}{x + \ln x}$

XXXV) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x^3}$

XXXVI) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^5}$

XXXVII) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x}{x^5}$

XXXVIII) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{e^x}$

XXXIX) $\lim\limits_{x\to 1} (1 - \cos x)\cot gx$

XL) $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x\,\ln(x-1)$

XLI) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

XLII) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{sen\,x}\right)$

XLIII) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{senx}$

XLIV) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2x^3\right)^{\frac{2}{x^3}}$

XLV) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-2x\right)^{\frac{3}{x}}$

XLVI) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x+2}-\dfrac{x^2+1}{x-2}\right)$

XLVII) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

XLVIII) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$

XLIX) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tg\,x}$

L) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x+x^3\right)$

30. Sean las funciones $f(x)=3x-5$; $g(x)=6x-10$

a) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ en forma directa.

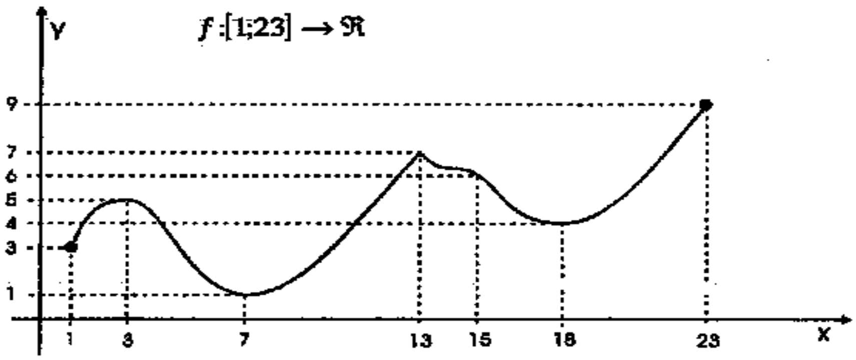
b) ¿Es lícito calcular el límite anterior mediante $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$?. Justificar

31. a) Dadas las siguientes gráficas de funciones f, definidas según se indica en cada caso, determinar para cada una de ellas, en caso de que exista, su máximo o mínimo absoluto o relativo.

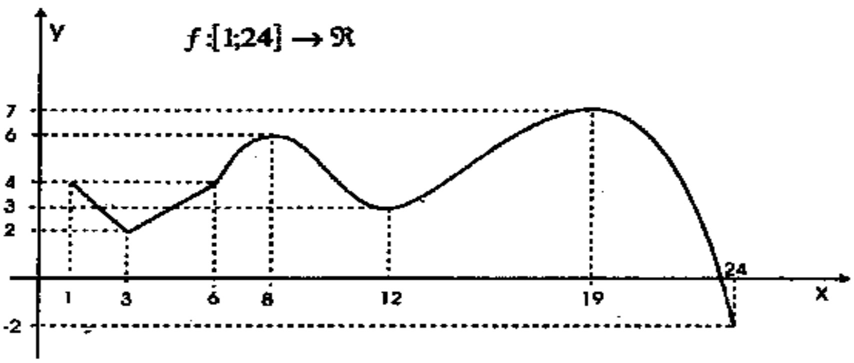
b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

.

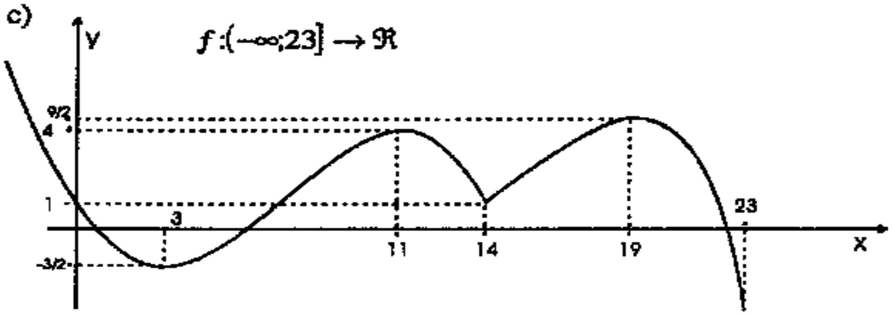
a)



b)

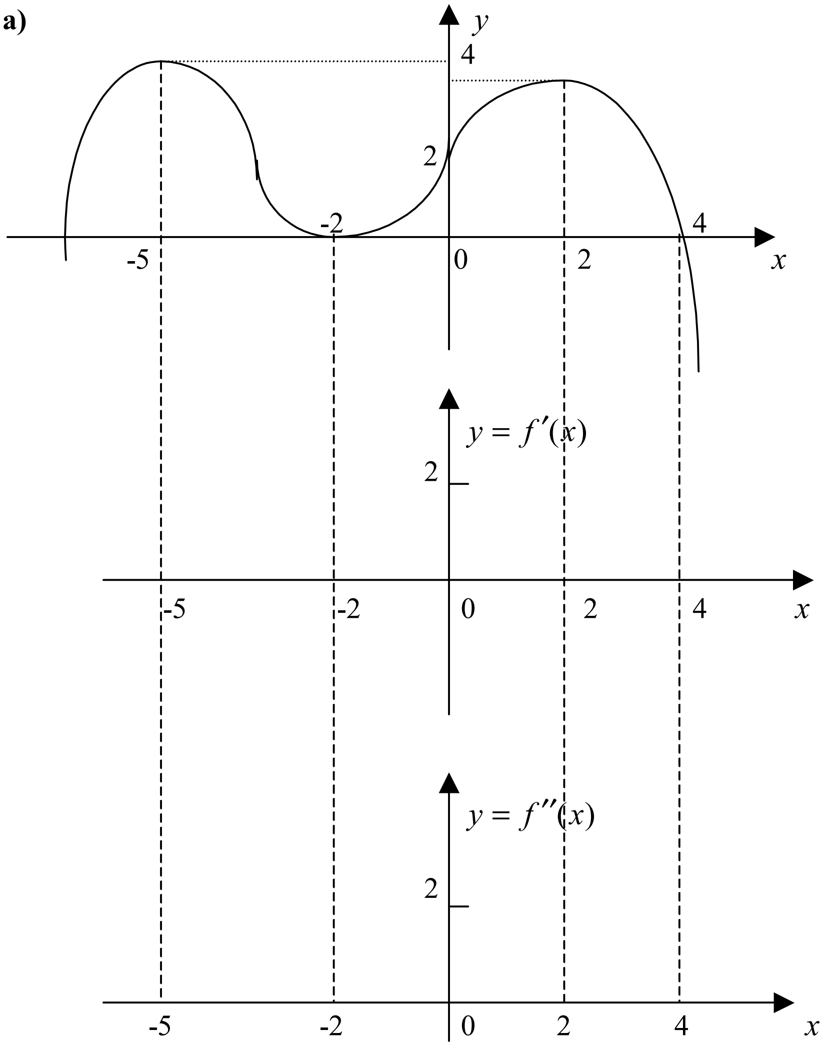


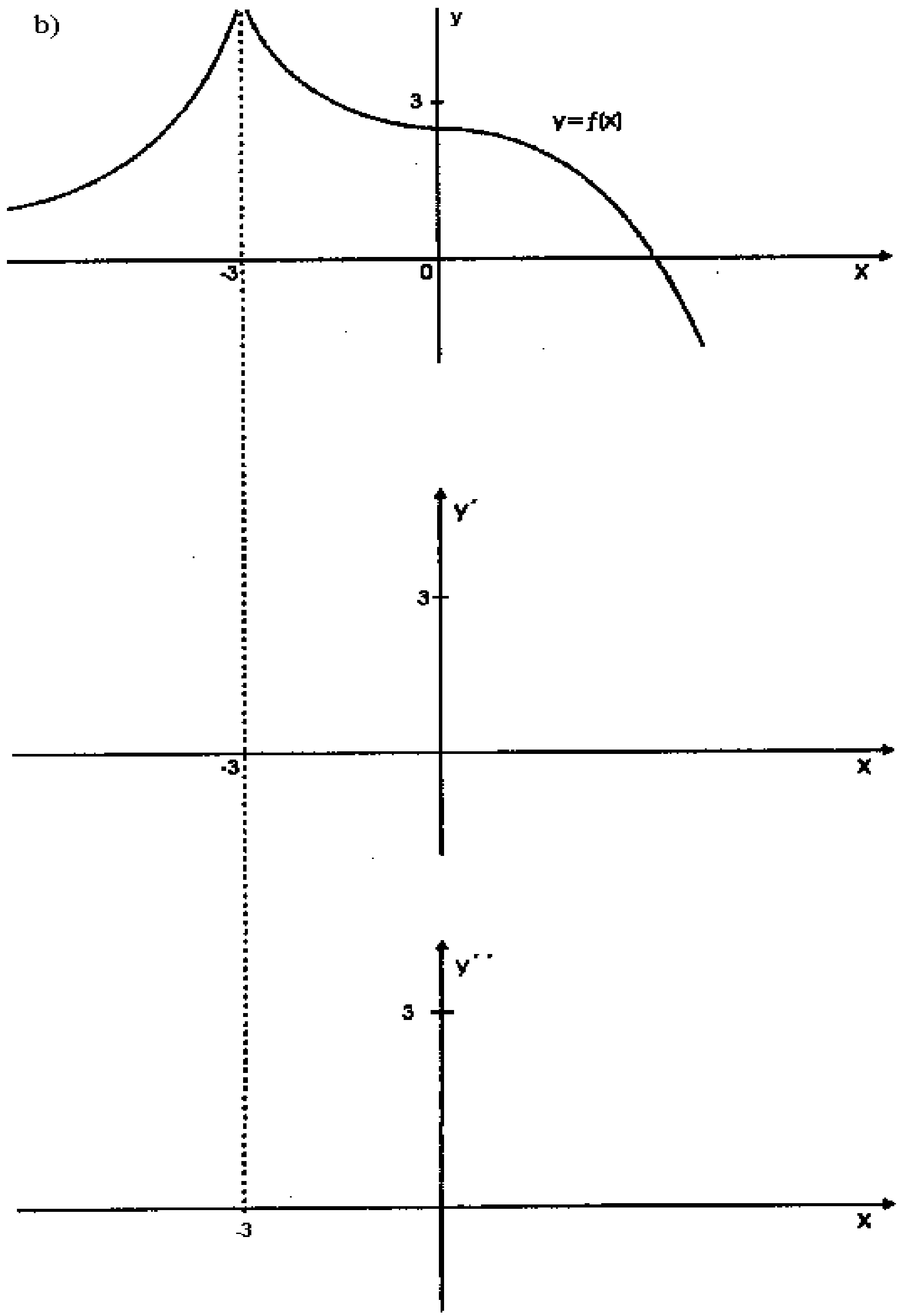
c)



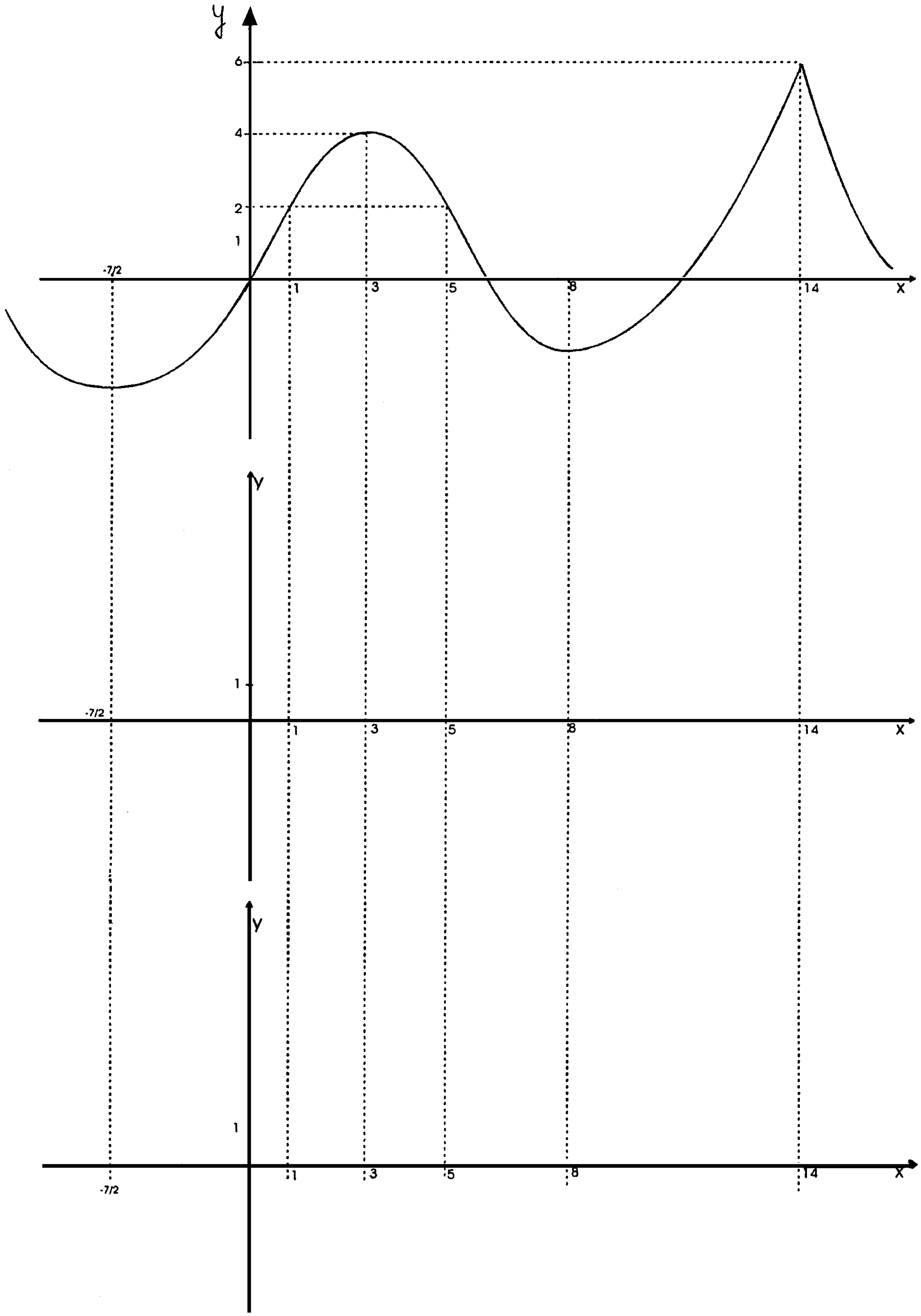
32. Dadas las siguientes gráficas de funciones, obtener las gráficas aproximadas de sus funciones derivada primera y segunda trazando rectas tangentes por los puntos que considere convenientes

a)




b)
y
3
y=f(x)
-3
0
x
y'
3
-3
x
y''
3
-3
x

c)



33. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y hallar los máximos y mínimos locales de las siguientes funciones, indicando los números críticos hallados:

a) $f(x) = 1 - 4x - x^2$
b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$
c) $f(x) = (x+2)^3$
d) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 1$
e) $f(x) = \dfrac{1+x}{1+x^2}$
f) $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+3}$
g) $f(x) = 1 - x^2$

34. Determinar los máximos y mínimos absolutos, en caso de que existan, para las siguientes funciones:

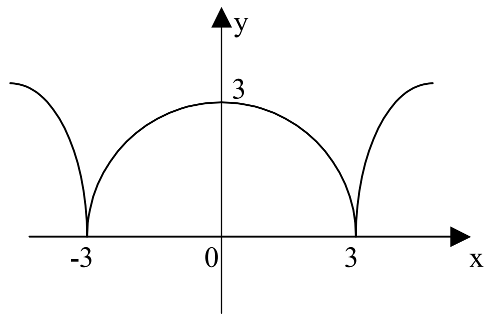
a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$
b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ en el intervalo i) $[-1;5]$, ii) $[-10;12]$
c) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ en $[-1;2]$
d) $f(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x + 7$ en $[0;3]$
e) $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ en $[1;2]$

35. Encontrar los números críticos y los extremos relativos de las siguientes funciones:

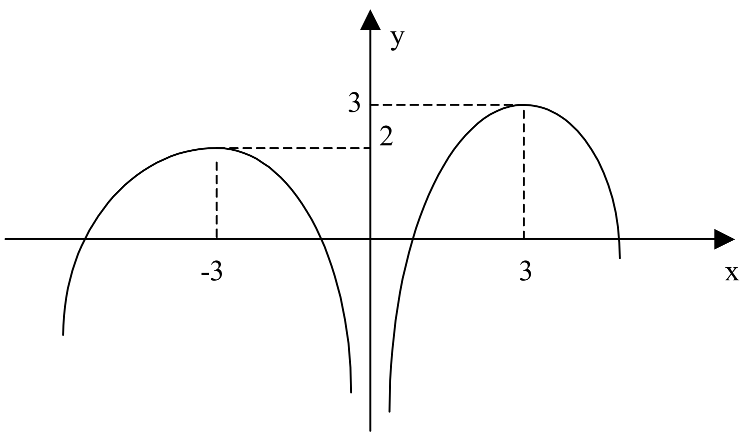
a) $f(x) = 2x - 3x^2$
b) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 1$
c) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2$
d) $f(x) = \sqrt[9]{x}$
e) $f(x) = 5x^{2/3} + x^{5/3}$
f) $f(x) = x\sqrt{x-2}$

36. Para cada una de las funciones cuyas gráficas se representan a continuación:
    a) Determinar su dominio de definición.
    b) Identificar los puntos críticos de la función. Justificar.
    c) Determinar los puntos de máximo y mínimo relativos.
    d) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.
    e) Determinar los puntos de inflexión.
    f) Hallar los intervalos de concavidad positiva y de concavidad negativa.

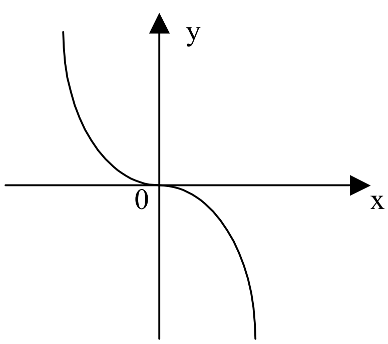
i)



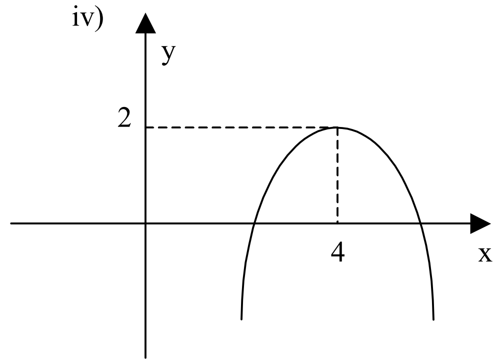
ii)



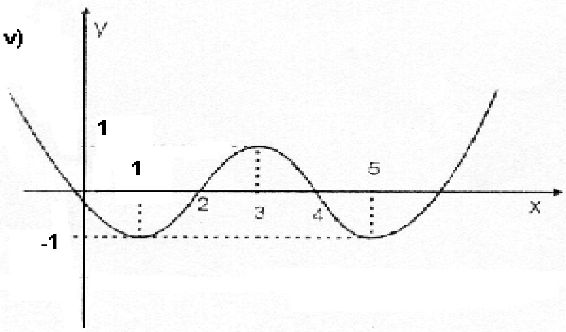
iii)



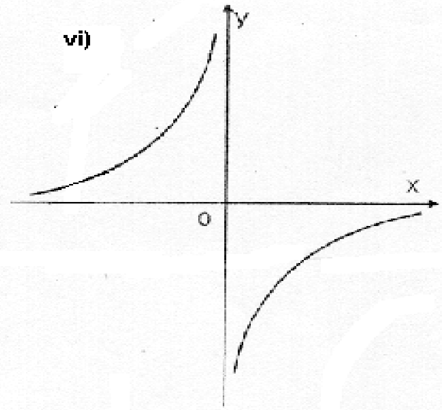
iv)



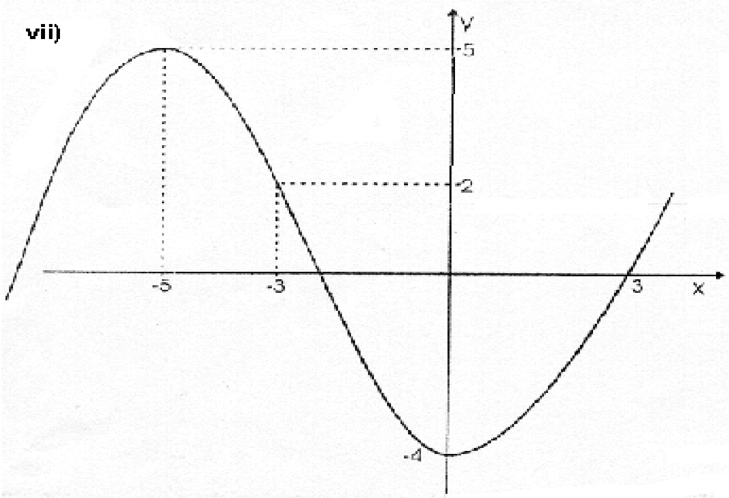
v)



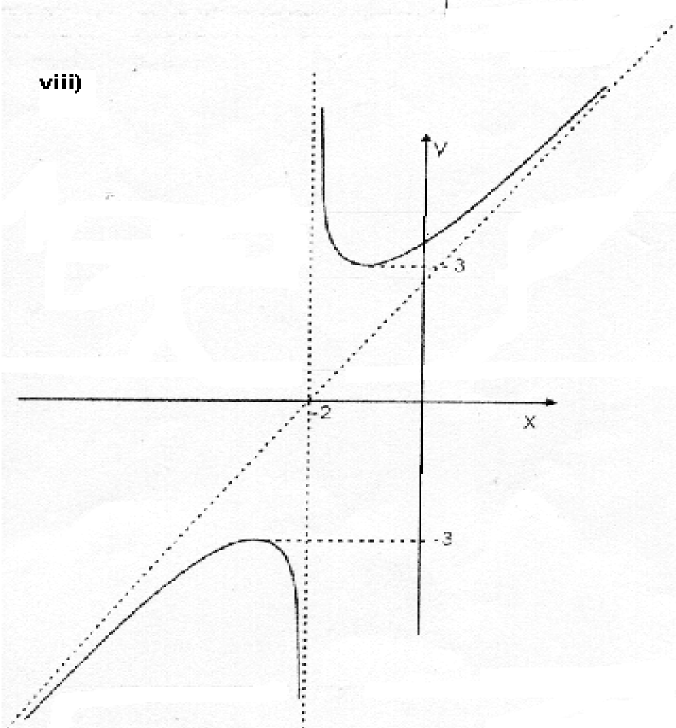
vi)



vii)



viii)



37. Para cada una de las siguientes funciones se pide:

a) Dominio
b) Ceros
c) Paridad
d) Asíntotas
e) Puntos críticos
f) Intervalos de crecimiento y decrecimiento
g) Extremos relativos y/o absolutos
h) Intervalos de concavidad positiva y negativa
i) Puntos de inflexión
j) Gráfico aproximado
k) Conjunto imagen

i) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

ii) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x - 1}$

iii) $f(x) = x(x-1)^3$

iv) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x}$

v) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$

vi) $f(x) = (x-4)^{\frac{2}{3}}$

vii) $f(x) = x\sqrt{3 - x}$

viii) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

ix) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

x) $f(x) = e^x\left(x^2 + 2x + 1\right)$

xi) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 1$

xii) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$

xiii) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

xiv) $f(x) = e^{-x^2}$

xv) $f(x) = x \ln x$

xvi) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x - 3}$

xvii) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

xviii) $f(x) = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}$

xix) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

xx) $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

xxi) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - x}$

xxii) $f(x) = e^{-3x}\,(1-3x)$

xxiii) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$

xxiv) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)^2}$

xxv) $f(x) = 9x^{-3} - 3x^{-1}$

38. a) Encontrar dos números no negativos cuya suma sea 10 y cuyo producto sea máximo.

b) ¿Cuál es el rectángulo con perímetro fijo 16, que tiene máxima área?.

c) Un rectángulo de perímetro p se hace girar alrededor de uno de sus lados generando un cilindro. ¿De todos los rectángulos que se sujetan a la condición de perímetro dado, cuál es el que genera un cilindro de volumen máximo?.

d) Se desea construir una caja sin tapa con base rectangular a partir de una hoja rectangular de cartón de 16 cm de ancho y 21 cm de largo. Recortando un cuadrado en cada esquina y doblando los bordes hacia arriba. Calcular el lado del cuadrado para el cual se obtiene una caja de volumen máximo.

e) Entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30 cm. ¿Cuál es el de área máxima?.

f) Descomponer un número positivo dado a, en dos sumandos de tal forma que su producto sea el mayor posible.

g) Se desea construir una caja de base cuadrada con tapa, que tenga una capacidad de 1 dm^3 ¿Cuáles serán las dimensiones de la caja que permiten minimizar la cantidad de material?.

h) Igual que el problema anterior pero la caja debe ser abierta, es decir, sin tapa.

i) Se dispone de 1200 cm^2 de material para construir una caja de base cuadrada, abierta en la parte superior. Encontrar el volumen máximo posible de la caja.

j) En un cartel rectangular sus márgenes superior e inferior miden 6 cm y los laterales 4 cm. Si el área impresa mide 384 cm^2, determinar las dimensiones del cartel que tenga la mínima área.

k) Se quiere fabricar una lata cilíndrica sin tapa para contener V cm^3 de líquido. Encontrar las dimensiones que minimizarán el costo del metal requerido para fabricar la lata.