Matrices
Resumen y notas de clases

Ultima modificación:6 de noviembre de 2003

<u>Matriz</u>: es un conjunto ordenado de m x n elemento (m filas y n columnas) de forma tal que cada elemento brinda una información única según la posición que ocupa.

<u>Matriz cuadrada</u>: igual cantidad de filas que columnas.

<u>Igualdad de matrices</u>: dos matrices son iguales cuando tienen el mismo orden (tamaño), y además, los elementos que ocupan la misma posición son iguales. $\forall A \forall B \in \mathbb{R}^{mxn} : A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$

<u>Tipos de matrices</u>

- Matriz fila: ejemplo $A = [2 \;\; -1 \;\; 3]$
- Matriz columna: ejemplo $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$
- Matriz triangular superior: ejemplo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$
- Matriz triangular inferior: ejemplo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$
- Matriz diagonal: ejemplo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$
- Matriz escalar: ídem a diagonal, pero todos los números son iguales, ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$
- Matriz identidad: ídem a diagonal, con 1, se llama con letra I, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; es el elemento neutro del producto de matrices. (I * A = A ; ojo , no es conmutativa)
- Matriz nula: (no necesariamente cuadrada), letra N, ejemplo $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- Matriz transpuesta: se obtiene permutando el orden de la matriz dada, surge de intercambiar en forma ordenada filas por columnas.

La suma de matrices es conjunto Abeliano (cumple con ley interna, asociativa, conmutativa, elemento neutro, elemento opuesto).

El producto de un escalar por una matriz cumple ley externa, distributiva con respecto a suma de matrices, distributiva con respecto a suma de escalares, elemento neutro y asociativa mixta.
Por lo tanto, $(\mathbb{C}^{mxn}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ tiene estructura de espacio vectorial.

Producto de matrices

Es solo posible cuando el numero de columnas de la primer matriz coincide con las filas de la segunda matriz, es decir, datas las matrices $a^{mxn} y b^{nxp}$, n debe coincidir en ambas. El producto tendrá el tamaño m x p.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} \quad = \quad C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

donde

$C_{11}=a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+a_{1n}\cdot b_{n1}$ o sea, fila x columna (filas horizontales, columnas verticales)

Propiedades: Si A,B,C son matrices para las cuales están definidas las operaciones siguientes, se verifica:
1) Asociativa: (A.B).C = A.(B.C)
2) Distributiva: (Cuidado, no es conmutativa, por eso se distingue a derecha/izquierda)
   A derecha = (A+B).C = A.C + B.C
   A izquierda = A.(B+C) = A.C + A.C
3) Elemento neutro: I.A = A

Importante: el producto de matrices NO es conmutativo : A.C <> C.A
Nota: potencia: A^2 = A.A (solo si es matriz cuadrada)

Determinantes

Un determinante es un numero asociado a una matriz cuadrada. $\det A \in \mathbb{R} ; y A \in \mathbb{R}^{mxm}$

Determinante de orden 2: $A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$

Determinante de orden 3: resolver con **Sarrus** (se copia la 1er y 2nda fila, y se resuelve; SOLO orden 3)

Laplace

Sirve para cualquier orden de determinante.

- **Menor complementario**

  Es el determinante α_{ij} de a_{ij} que queda formado al eliminar la fija i y la columna j. Este determinante es de un orden menor que el de la matriz A.
  Por cada elemento de la matriz A se obtiene un menor complementario.

- **Adjunto** o **cofactor**

  $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot\alpha_{ij}$ (nota, se nombran con letra mayúscula)
  Si i+j es par, el adjunto es igual al menor complementario ; si es impar, se invierte el signo.

Metodo de Laplace

Se elije una fila o columna al azar ; conviene elegir la fila o columna con mayor cantidad de ceros.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\rightarrow|A|=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Elijo la 5,0,1, y ahora, se hace una suma de cada elemento con su cofactor así: $|A|=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}$ y de esa manera, obtengo el resultado final del determinante.

Propiedades de los determinantes

1) Todo determinante que tiene una linea de ceros es igual a cero.

2) $\det A = \det A^t$

3) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B / A \text{ y } B \in \mathbb{R}^{mxm}$

4) El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{23} \end{pmatrix} \rightarrow |A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

5) Un determinante con lineas paralelas iguales o proporcionales es igual a cero.

6) Si en un determinante se intercambian lineas de a pares, cambia el signo del determinante.

7) Si se reemplaza una linea por la suma de esta linea con otra multiplicada por un numero, el determinante no varia (solo lineas paralelas ; se justifica porque es una combinación lineal, es demostrable).

8) $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A \ / \ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \wedge k \in \mathbb{R}$

O sea: $|A| = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} \rightarrow |A| = k^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Observación: si tengo n.det A , n afecta una sola linea ; por eso, si A fuera, por ejemplo 3x3, pongo n.n.n, o n^3 para que n modifique toda la matriz A.

9) $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

Observación: det (A+B) no es igual a det A + det B
Nota: si el det A = 0 , A es matriz singular.

Matriz inversa

La matriz, para tener inversa, debe ser cuadrada.

$$A \in \mathbb{R}^{mxm} ; A^{-1} \text{es inversa de A si:} A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Matriz adjunta es la matriz que resulta de reemplazar a cada elemento de la matriz transpuesta por su **cofactor**.

Formula de la matriz inversa: $A^{-1} = \operatorname{adj} A \cdot \dfrac{1}{|A|}$

Notas:

matriz ortogonal $A^t = A^{-1}$; ej: I (el determinante de toda matriz ortogonal es 1 o -1)
matriz simétrica $A = A^t$
matriz antisimetrica $A = -A^t$
idempotente $A^2 = A$
involutiva $A^2 = I$
singular : determinante = 0

Rango de una matriz

Es el orden (tamaño) del mayor determinante distinto de cero que se puede extraer de una matriz.
Se simboliza con la letra griega rho $\rho(A) = \text{numero}$

Sistemas de ecuaciones

$$\begin{Bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_1 n x_n=b1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_2 n x_n=b2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=bm \end{Bmatrix}$$

$a_{ij} \rightarrow \text{coeficientes del sistema}$

$x_j; 1 \leq j \leq n \rightarrow \text{incognitas del sistema}$ ejemplo: $\begin{Bmatrix} 2x-y+z=0 \\ 2x-2+y=0 \end{Bmatrix}$ no homogéneo (esta -2, termino indep.)

$b_i; 1 \leq i \leq m \rightarrow \text{terminos independientes}$

$$\text{si}\,\exists b_i \neq 0 \Rightarrow \text{sistema no homogeneo}$$
$$\text{si}\,\forall b_i = 0 \Rightarrow \text{sistema homogeneo}$$

Clasificación de los sistemas

- Compatibles
  - Determinado (S.C.D) = existe una única solución.
  - Indeterminado (S.C.I) = existen infinitas soluciones.

- Incompatibles (S.I) = no hay solución.

Sistemas homogéneos: SCD o SCI ; siempre tienen solución ; al menos la trivial (ceros).

Representación matricial

$$\begin{Bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_1 n x_n=b1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_2 n x_n=b2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=bm \end{Bmatrix}$$

Con a_{ij} determinamos la matriz A, matriz de los coeficientes.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_1 n \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_2 n \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Con x_j determinamos la matriz X, matriz de las incógnitas.

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Con b_i determinamos la matriz B, matriz de los términos independientes.

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Luego, se resuelve aplicando $A \cdot X = B$ (ver ejercicios)

Matriz orlada o ampliada (A^0, A^*, A')

Es la matriz “A” con una columna donde van los términos independientes.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_1 n & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_2 n & | & b_2 \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$

Teorema de los rangos o de Rouche Frobenius

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de **m** ecuaciones con **n** incógnitas admita una solución es que el rango de la matriz A sea igual al rango de la matriz ampliada.
Si el rango de la matriz A es distinta del rango de la matriz ampliada, el sistema es incompatible.
Además, si el rango de A es igual al rango de la ampliada y es igual a n (**n es la cantidad de incógnitas**), el sistema es compatible determinado.
Si el rango de A es igual al rango de la ampliada, pero menor que n, es sistema compatible indeterminado.
En símbolos:

$$\rho(A)=\rho(A^0)=n \rightarrow S.C.D$$

$$\rho(A)=\rho(A^0)<n \rightarrow S.C.I$$

$$\rho(A)\neq\rho(A^0) \rightarrow S.I$$

Método matricial

Demostración:
Sabemos A * X = B
No puedo despejar dividiendo, porque la división de matrices no existe.

$$A^{-1}\cdot A=A^{-1}\cdot B$$

$$I \cdot X=A^{-1}\cdot B$$: porque $A^{-1}\cdot A=I$

$$\mathbf{X}=\mathbf{A^{-1}}\cdot\mathbf{B}$$ <- resuelto, 'formula' lista! ; basado en $I\cdot X=X$