Análisis 2
Resumen y notas de clases

Ultima modificación:8 de julio de 2004

Funciones Vectoriales

Una función vectorial es del tipo $\bar{f}: A \rightarrow B$ **siendo** $A \subset \mathbb{R}; B \subset \mathbb{R}^n$

Ejemplo: $\bar{f}(x)=(\cos t, sen t); \bar{f}:[0,2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

Para sacar el limite y la derivada, se hace por campos (cada campo esta delimitado por la coma)

Ejemplo: $\bar{f}(x)=(t, sen t, t^2)$; $\lim_{t \rightarrow \pi/2} \bar{f}(t) (\frac{\pi}{2,} 1, (\pi/2)^2)$; $\bar{f}'(t)=(1, \cos t, 2t)$

Solo se gráfica la imagen de una función vectorial (si esta en R2 o R3), para lo cual, se elimina el parámetro del sistema, quedando

$$\begin{Bmatrix} x(x) \\ y(x) \\ z(x) \end{Bmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{Bmatrix} x(x) \\ y(x) \end{Bmatrix}$$

Ejemplo:

$\bar{f}(t)=(1+\cos t, sen t); \bar{f}:[0,\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

Elimino el parámetro $\begin{Bmatrix} x(t)=1+\cos t \rightarrow x-1=\cos t \\ y(t)=sen t \rightarrow y=sen t \end{Bmatrix} \rightarrow (x-1)^2+y^2=1 \leftarrow$ viene de elevar al 2 y $sen^2 t+\cos^2 t=1$

El vector derivada $\bar{f}'(t)$ es tangente a la curva en el punto f(t) para todo t.
Si se da un punto, hay que averiguar "t", porque tomamos x,y ; pero f '(t) esta en función de t

La **norma** del vector f' (t) mide la **rapidez** en el punto f(t).
Para sacar un vector **perpendicular** (recta **normal**) , hacer $u \cdot \bar{f}'(t)=0$ y hallar 'u' (producto escalar de vectores).
Teniendo un vector (x,y) , un vector **normal** es (-y, x).

El **limite** y la **continuidad** de una función vectorial se reduce al limite y la continuidad de cada una de las funciones escalares que la componen.

Primitivas integrales

Una primitiva de f es F si F' = f ; $F(X)=\int f(x)dx \Leftrightarrow F'=f$

Ejemplo: $\int \frac{dx}{x}=\ln x$

Información:
Dos primitivas cualesquiera de una misma función definidas en un intervalo común difieren en una constante, por lo tanto, suele indicarse con "+c" esta falta de unicidad (o sea, cada derivada tiene varias primitivas).

NOTA: la integral de la suma/resta, es la suma/resta de las integrales.

Método de sustitución

Hay que buscar un "u" que sea aquello cuya derivada sea un factor (salvo constantes) de lo que no sea "u" todavía (lo que queda).

Ejemplo 1:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{2x}=\frac{1}{2}\cdot\int \sqrt[3]{u}\cdot du = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} \cdot u^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{8}\cdot(1+\ln x)^{\frac{4}{3}}$$
$$\{u=1+\ln x \rightarrow u'=\frac{1}{x} \qquad \{du=\frac{1}{x}dx$$

Ejemplo 2:

$$\int e^{-x}dx = \int e^{u}(-du) = -\int e^{u}du = -e^{u} = -e^{-x}$$
$$\{u=-x \qquad \{du=-1\cdot dx=-dx$$

Integración de partes

$$d(uv)=u\cdot dv+v\cdot du \;\Rightarrow\; u\cdot dv=d(u\,v)-v\cdot du \;\Rightarrow\; \int u\cdot dv=uv-\int v\cdot du$$

Para elegir "u", recordar "**ilpet**" : **i**nversas (arctang, etc), **l**ogaritmos, **p**otencias (incluso elevadas a la 1, ej "x"), exponencial, **t**rigonométricas).
Preferencia de izquierda a derecha, i, l, p, e, t.

Ejemplo:

$$\int x\cdot e^x dx \;=\; x\cdot e^x-\int e^x\cdot dx \;=\; x\cdot e^x-e^x$$

$\{u=x \;\rightarrow\;$ derivo $du=1\cdot dx$

$\{dv=e^x dx \;\rightarrow\;$ integro $v=e^x$ (aca puedo tener que usar el metodo anterior)

Integración por fracciones simples

Se aplica a las integrales de tipo $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ donde p y q **son polinomios** , siendo el grado de q > grado p.
Observación: si el grado de p > grado q ; entonces se efectúa una división previamente y luego se aplica el método a la fracción del resto.
Si grado P > Q ==> P(x)/Q(x) ==> integral resultado + {integral (resto / Q(x)) } <- y aplicar método a este termino

Siguiendo con el método, se factorea el polinomio q en sus raíces que admitiremos reales, y supondremos distintas.

$$\frac{p(x)}{q(x)} \;=\; \frac{p(x)}{a(x-x_1)\dots(x-x_n)} \;=\; \frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\dots+\frac{A_n}{x-x_n}$$

Y luego se hace

$\int \frac{p(x)}{q(x)} \;=\; A_1\int\frac{dx}{x-x_1}+A_2\int\frac{dx}{x-x_2}+\dots+A_n\int\frac{dx}{x-x_n}$ y derivando es igual a $=A_1(\ln(x-x_1))+A_2(\ln(x-x_2))+\dots+A_n(\ln(x-x_n))$

DEBUG – falta explicar como se calculan las constantes A1, A2, etc
Por ahora, ver
http://sosmath.com/calculus/integration/rational/rational.html
http://mathworld.wolfram.com/PartialFractionDecomposition.html
http://www.google.com/search?q=Integration+of+Rational+functions
http://www.google.com/search?q=partial+fraction+decomposition

Integral definida

$${}_a\!\int^b f(x)dx \;=\; F(x)\big|_a^b \;=\; F(b)-F(a)\,\text{siendo}\, F\; una\; primitiva\; de\; f$$

Integral impropia

Hay convergente y divergente.

$\lim_{b\to\infty} {}_a\!\int^b \frac{dx}{x^2}$ Si da un numero, la integral es convergente, y converge a ese numero. Si da infinito, es divergente.

Campos escalares

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

ejemplo $f(x, y, z) = x^y + sen\, z + 1 \qquad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

El gráfico de un campo escalar esta en $\mathbb{R}^{n+1}$

Curvas de nivel de un campo escalar

Conjunto de nivel K : $C_k(f) = \{(x, y) \in Df : f(x, y) = k\}$

"Es el conjunto de todos los x e y que al "entrar" a f, son iguales a k"

Campos vectoriales

$$\bar{f} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

ejemplo $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 / \bar{f}(x, y) = (x^2 y, e^{xy}, x + y + 1)$

Composición de funciones

$$h = f \, o \, g$$

Se lee de derecha a izquierda, es decir, primero se aplica "g", luego "f", "o" es el símbolo de "conexión"

Ejemplo:

$\bar{g}(x, y) = (x^2 y, x, x+y) \quad \bar{f}(u, v, w) = (uv, v+w)$

$\bar{h} = \bar{f} \, o \, \bar{g} \; = \; \bar{f}(\bar{g}(x, y)) \; = \; \bar{f}(x^2, x, x+y) \; = \; (x^3, 2x+y)$

Temas del segundo parcial

Derivada parcial

Por definición:
$$f_x'(x_{0,}y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_{0,}y_0)}{h}$$
$$f_y'(x_{0,}y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_{0,}y_0+h)-f(x_{0,}y_0)}{h}$$

La derivada parcial respecto de una variable puede obtenerse mediante el álgebra de derivadas (reglas de derivación), bastando considerar constantes aquellas variables respecto a las cuales no se deriva.

Derivadas segundas, terceras, etc

Las n derivadas primeras podrían ser a su vez derivadas, y en ese caso, dar lugar a n^2 derivadas segundas, n^3 derivadas terceras, etc (es un diagrama de árbol).

Teorema de Schwarz

Si f es un campo escalar de clase C^n , entonces son iguales todas las derivadas parciales cuyos subíndices sean permutaciones, (entendiendo que la permutación lleva los mismos subíndices en diferente orden).
Ejemplo: $f(x,y,z,w)\rightarrow f_{xxyxzwv}=f_{xxxyzwv}$

Derivadas respecto de un vector

$D_{p0}(f,\vec{v})$ o $f'(P_{0,}\vec{v})$ nomenclatura, significan lo mismo

$f'(p_{0,}\vec{v})$ def $\vec{V}\cdot f(p_0)\cdot\vec{v}$ Gradiente, su simbolo es $\vec{V}$

Gradiente: es el vector que carga en cada componente la correspondiente derivada parcial.

Ejemplo:
$f(x,y)=2e^x sen\, y$
$p_0=(0,\pi/4)$
$\vec{v}=(-1,1)$
$f_x(x,y)=2e^x sen\, y\rightarrow(p_0)\rightarrow\sqrt{2}$
$f_x(x,y)=2e^x\cos y\rightarrow(p_0)\rightarrow\sqrt{2}$
$f'(p_{0,}\vec{v})=\vec{V}f(p_0)\cdot\vec{v}=(\sqrt{2},\sqrt{2})\cdot(-1,1)=-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$

Derivadas direccionales

Derivada direccional es la derivada respecto del vector cuando el vector es un **versor.**

$f'(p_{0,}\breve{v})=\vec{V}f(p_0)\cdot\breve{v}$; se hace el producto escalar del gradiente en el punto por el versor dado.

Interpretación geométrica para la derivada direccional

$$f'(p_{0,}\breve{v})=\vec{V}f(p_0)\cdot\breve{b}=\left|\vec{V}f(p_0)\right|\cdot\cos\alpha$$

El **gradiente** indica para donde (ángulo y distancia) tengo la máxima y su norma.
El gradiente es ortogonal (perpendicular) a las curvas de nivel.
Dado el campo, el gradiente es único.
El gradiente proyectado sobre el versor da la derivada direccional.

La derivada direccional es máxima si v tiene la dirección y sentido del gradiente, y vale la norma de $\left|\vec{v}f(p_0)\right|$
Es mínima si tiene sentido opuesto, y vale $-\left|\vec{v}f(p_0)\right|$

Es nula si $\breve{v}\perp\vec{V}f(p_0)$

Además, la curva de nivel que pasa por p_0 es perpendicular. El vector gradiente resulta ser perpendicular a la curva de nivel que pasa por ese punto, y las curvas se incrementan en el sentido del gradiente.

Diferenciales de campos escalares

Sea f(x,y)

$$df(x,y)=f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy$$

$$d^2 f(x,y)=d(df(x,y))=(f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy)_x dx+(fx(x,y)dx+fy(x,y)dy)=f_{xx}dx^2+2f_{yx}dxdy+f_{yy}(x,y)dy^2$$

$$d^3 f(x,y)=f_{xxx}dx^3+3f_{xxy}dx^2dy+3f_{xyy}dx\,dy^2+f_{yyy}dy^3$$

Geométricamente, indica cuanto varia el plano tangente en el incremento dx,dy.

Polinomio de Taylor para campos escalares

$$P_0=(x_{0,}y_0) \quad dx=x-x_0$$
$$P=(x,y) \quad dy=y-y_0$$

$$P_n(x,y)=f(p_0)+df(p_0)+\frac{1}{2!}d^2 f(p_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^n f(p_0)$$

entonces

$$P_n(x,y)=f(p_0)+f_x(p_0)(x-x_0)+f_y(p_0)(y-y_0)+\frac{1}{2!}[f_{xx}(p_0)(x-x_0)^2+2f_{xy}(p_0)(x-x0)(y-y0)+f_{yy}(p_0)(y-y0)^2]+\ldots+\frac{1}{n!}d^n f(p_0)$$

$f(x,y)\simeq P_n(x,y)$ (el polinomio de Taylor aproxima a l campo escalar real)

Plano tangente y recta normal

Siendo $z=f(x,y) \quad p_0(x_{0,}y_0) \quad z_0=f(p_0)$

$\Pi r: Z=f'_x(p_0)(x-x_0)+f'_y(p_0)(y-y_0)+z_0$ (plano tangente, notar que es el df)

Recta normal

$(x,y,z)=(x_{0,}y_{0,}z_0)+\lambda(f_x(p_0),f_y(p_0),-1)$ (el ultimo termino siempre es -1)

(ecuación vectorial)

$$\frac{x-x_0}{f_x(p_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(p_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

(cartesiana)

Como obtener la derivada de una función compuesta

Al tener una función tipo:

$$z=x\cdot tg\ y \quad \text{donde} \quad \begin{Bmatrix} x=\cos t \\ y=\sqrt{t} \end{Bmatrix}$$

Se desea la derivada de Z respecto de t ; $Z'(t)=\frac{dz}{dt}$; entonces se genera un "árbol" y se recorren las ramas de ambos nodos terminales, y se deriva. Al recorrer un "camino", multiplico las derivadas ; cada "camino" se suma.

$$z \begin{array}{l} \nearrow x \rightarrow t \\ \searrow y \rightarrow t \end{array}$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{az}{ax}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{ax}{ay}\cdot\frac{dy}{dt} \quad = \quad \frac{dz}{dt}=tg(\sqrt{(t)})(-sen\,t)+\frac{\cos t}{\cos^2\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

Nota: Cuando tengo $\frac{dx}{dt}$, lo que esta abajo (dt) es lo que **no** es constante al derivar, el resto lo trato y derivo como constante.

Matriz Jacobiana

$\bar{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$\bar{f} = (f_1, f_2, \dots f_n)$ siendo fi un campo escalar para i=1,2,..n

$$J\bar{f}(p) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_1 m \\ f_{21} & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & \dots & \dots & f_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\,x\,m}$$

- La Jf(p) es tal que $(Jf)_{ij} = \dfrac{y\,fi}{y\,xi}$
- La Jf(p) es tal que fila i (Jf) = Vfi

Funciones implícitas

La idea es que x^2+y^2-z define implícitamente a $Z=Z(x,y)$; hallar Zx, y, Zy
Primero se deriva y luego se despeja:

$$x^2+y^2-z(x,y)=0$$
$$F_x=2x+0-Z'_x=0 \to Z_x=2x$$
$$F_y=0+2y-Z'_y=0 \to Z_y=2y$$

Un **truco**, para realizarlo mas rápido, aplicar la formula:

$Z'_x = \dfrac{-(F'_x)}{F'_z}$ o $X'_y = \dfrac{-(F'_y)}{F'_x}$ o $X'_z = \dfrac{-(F'_z)}{F'_x}$ etc... (la letra chica va arriba, la grande abajo)

Ver funciones implícitas definidas por sistemas también (en el cuaderno :P)

Extremos de campos escalares

Sea f un campo escalar del cual p0 es un punto interior, se dice que p0 se alcanza un máximo local si para todo punto p de algún entorno de p0 se verifica f'(p) <= p'(p0) ; el máximo local es el numero f(p0).
Para mínimo, es igual, pero con f'(p) >= f'(p0).

Importante: el mínimo/máximo es un numero (el valor de la función en ese punto), NO el punto.

Condición necesaria para existencia de extremos locales en campos diferenciales

Si el campo es diferenciable y en p0 se alcanza un extremo, entonces, todas las derivadas parciales deben ser cero. Esto permite detectar posibles puntos donde se alcanza un extremo. Esto identifica “puntos críticos”.

Ejemplo

$f(x,y)=x^2+y^2+1$
$f_x(x,y)=2x$; $2x=0 \to x=0$
$f_y(x,y)=2y$; $2y=0 \to y=0$
punto critico en (0,0)

La **condición suficiente** para la existencia de un extremo en p0 (siendo p0 un punto critico) es que el HESSIANO sea positivo en p0.
Si el Hessiano es negativo en p0, no hay extremo allí, sino que hay un punto de ensilladura en (x0, y0, f(x0,y0)
Si en p0 se tiene un extremo, sera máximo o mínimo según que f'xx sea negativo o bien f'xx positivo en respectivamente (en ese punto).

El Hessiano es el determinante de $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$ (con las derivadas en el punto)

NOTA: Ver extremos condicionados en el cuaderno.

Recta normal a una superficie definida por f(x,y,z) = 0

El gradiente es la recta normal y plano tangente.
Ejemplo:

$x^2+yz-\cos z+1=x^3y=0\ en\ P_0=(-1,-1,0)$ $gradiente=\vec{V}f(x,y,z)=(2x-3x2y, z-x^3, sen\,z+y) \to \vec{V}f(p_0)=(1,1,-1)$

Recta normal $:(x,y,z)=(-1,-1,0)+\lambda(1,1,-1)$ ecuacion vectorial $\to \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$ ecuacion cartesiana

Plano tangente $(x+1, y+1, z)\cdot(1,1,-1)=0 \to x+y-z+2=0$