Diseño térmico

Resumen y notas de clases

Ultima modificación el domingo 13 de mayo de 2007 a las 00:26:44

Transferencia de calor

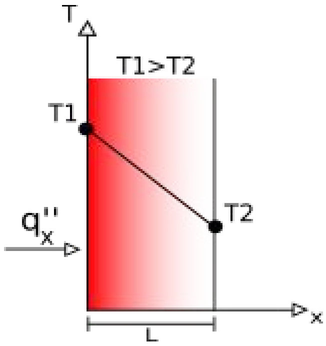
La transferencia de calor es energía termal en tránsito debido a una diferencia espacial de temperatura.

Donde sea que exista una diferencia de temperatura en un medio, ocurre transferencia de calor.

Mecanismos de transmisión de calor

- Conducción
- Convección
- Radiación

Conducción



Cuando existe un gradiente de temperatura en un medio estacionario (solido o fluido), se produce la conducción.

Notar que el calor fluye de la mayor a la menor temperatura.

La ecuación que rige su comportamiento es la ecuación de Fourier.

Ritmo de transferencia de calor

$$q(x) = -k\,A\frac{dT}{dx} \;=\; q(x)''\cdot A$$

$[q] = \frac{J}{s}$ (Joule / segundos, unidad de q)

k es la conductividad térmica, una propiedad del material, por lo general constante.

A es el área transversal a la dirección en la cual se transfiere el calor.

En condiciones constantes de estado (no hay generación externa de calor, etc) (ver figura), donde la distribución de temperatura es **linear**, el **gradiente** de temperatura $\frac{dT}{dx}$ puede ser expresado como $\frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{L}$

Flujo de calor

$q(x)'' = -k\frac{dT}{dx} \;=\; \frac{q(x)}{A}$; su unidad es $\frac{J}{s\,m^2}$

Debido a que el flujo de calor es una magnitud vectorial (indica dirección), esta dirección es normal a la superficie de temperatura constante (isotérmica).

Si trabajamos en el espacio, el flujo es

$$\vec{q}'' = -k\,\nabla T = -k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k}\right)$$

Ecuación de difusión del calor

Permite determinar la distribución de temperaturas en un medio resultado de condiciones impuestas en su contorno.

Esta distribución representa como varia la temperatura dentro del medio de acuerdo a la posición.

Forma general de la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

La solución permite obtener la distribución de temperatura T(x,y,,z) en función del tiempo.

Indica que en cualquier punto en el medio la tasa neta de transferencia de energía por conducción en una unidad de volumen mas la tasa volumétrica de generación de energía termal (q) debe igualar la tasa de cambio de energía termal almacenada dentro del volumen.

Se puede simplificar.

Si la conductividad termal es constante

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\dot{q}}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{donde} \quad \alpha=\frac{k}{\rho c_p} \quad \text{(difusión termal)}$$

Bajo condiciones estado estacionarias

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\dot{q}}{k}=0$$

Si la transferencia es unidimensional y no hay generación de energía

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)=0$$

Condiciones de contorno

Para determinar la distribución de temperatura, es necesario resolver la forma apropiada de la ecuación de calor. Esta solución depende de las condiciones físicas existentes en el ambiente del medio y en condiciones existentes al principio (si depende del tiempo).

Posibilidades mas comunes:

Superficie con temperatura constante

T(0,t) = T

Flujo de calor de superficie constante

(a) Flujo finito de calor $\quad -k\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0}=q_s''$

(b) Superficie adiabática o aislada $\quad \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0}=0$

Superficie de convección

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0}=h[T_\infty-T(0,t)]$$

Conducción unidimensional estacionaria sin generación

En este caso, en una pared plana la temperatura es una función de la coordenada x solamente, y el calor es transferido exclusivamente en esa dirección.

Distribución de temperatura

La distribución de temperatura puede determinarse resolviendo la ecuación de calor con las condiciones de contorno apropiadas.

La ecuación de calor apropiada es: $\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)=0$; integro dos veces, obteniendo la solución general $T(x)=C_1 x+C_2$; aplicamos $T(0)=T_{s,1}$ y $T(L)=T_{s,2}$, entonces $T_{s,1}=C_2$.

Entonces, la **distribución de temperatura es:**

$$T(x)=(T_{s,2}-T_{s,1})\cdot\frac{x}{L}+T_{s,1}$$

Esto que indica que la temperatura varia linealmente con x.

T son las temperaturas de la superficie, L el ancho de la pared.

Tasa de transferencia de calor

$$q_x=\frac{kA}{L}(T_{s,1}-T_{s,2})$$

Flujo de calor

$$q_x''=\frac{q_x}{A}=\frac{k}{L}(T_{s,1}-T_{s,2})$$

Resistencia termal

Existe una analogía entre la difusión de calor y la carga eléctrica. En este caso particular antes mencionado de conducción unidimensional estacionaria sin generación, se pueden representar mediante circuitos.

Entonces, para simular con un circuito un sistema, debemos recurrir a resistencias equivalentes para la conducción y la convección.

Resistencia equivalente a la conducción

(en una pared)

$$R_{t,cond}=\frac{L}{kA}$$

Resistencia equivalente a la convección

$$R_{t,conv}=\frac{1}{hA}$$

Resistencia equivalente a la radiación

$$R_{t,rad}=\frac{1}{h_r A}$$

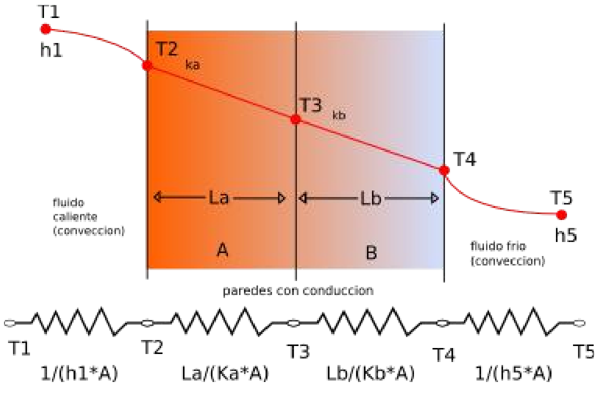
Con estas equivalencias , podemos encadenar resistencias en serie para saber la **tasa de transferencia de calor.**

Se hace (temperatura inicial – temperatura final) sobre sumatoria de las resistencias (en serie).

$$q_x=\frac{T_{\infty,1}-T_{\infty,final}}{\sum R_t}$$

Ejemplo con resistencias equivalentes

Teniendo esta pared compuesta:



Usando el circuito termal equivalente obtenemos:

$$q_x=\frac{T_1-T_5}{[(1/h_1 A)+(L_a/k_a A)+(L_b/k_b A)+(1/h_5 A)]}$$

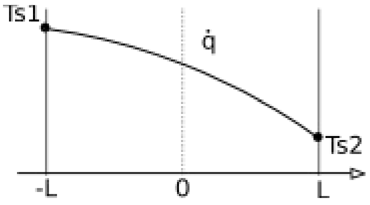
Resistencia de contacto

En sistemas compuestos, la temperatura decrece a través del contacto entre materiales.

Por unidad de área de la zona de contacto, la resistencia es definida como:

$$R_{t,c}'' = \frac{T_a - T_b}{q_x''}$$

Conducción unidimensional en pared plana con generación



Teniendo una pared plana de espesor 2L (ATENTO, DOS L), con temperaturas T_s1 y T_s2 en los extremos -L y L

Partiendo de la ecuación de difusión (unidimensional, con generación, estacionaria, k constante) $\frac{d^{2T}}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$ resolvemos, entonces $\frac{d^{2T}}{dx^2} = \frac{-\dot{q}}{k}$

integro y queda $\frac{dT}{dx} = \frac{-q}{k} x + C_1$ => integro de nuevo => $T(x) = \frac{-q}{2k} x^2 + C_1 x + C_2$; y averiguo C1 y C2

Tengo temperaturas conocidas en los extremos

$$T(-L) = T_{s1} \quad ; \quad T(L) = T_{s2}$$

Planteo sistema de dos ecuaciones y despejo C1 y C2

$$T_{s1} = \frac{-q}{2k}(-L)^2 + C_1(-L) + C_2$$

$$T_{s2} = \frac{-q}{2k}(L)^2 + C_1(L) + C_2$$

Y así obtenemos la temperatura en función de la posición:

$$T(x) = \frac{qL^2}{2k}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + \frac{T_{s2} - T_{s1}}{2}\frac{x}{L} + \frac{T_{s1} + T_{s2}}{2}$$

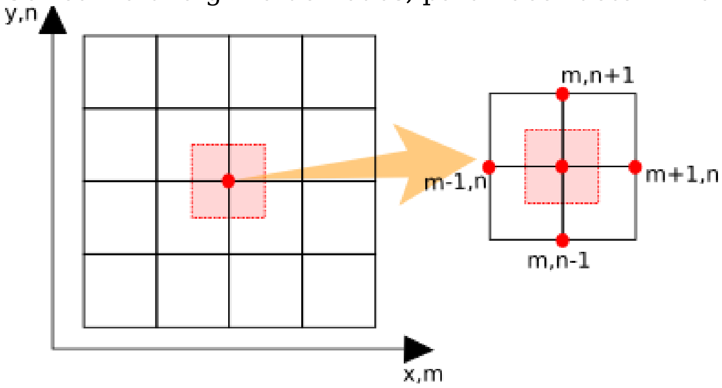
Conducción bidimensional estado estacionaria

Para determinar la distribución de temperatura en el medio T(x,y) se debe resolver la ecuación de calor $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$

No existe una solución analítica fácil. Usamos métodos numéricos para aproximarlo en puntos discretos.

Red de nodos

Se realiza una grilla de nodos, para hacer determinar la temperatura en puntos discretos.



Cada nodo representa una región, y su temperatura es el promedio de la región.

Los nodos se eligen de acuerdo a la geometría, cuantos mas nodos tengamos, mas precisa es la aproximación.

Si usamos una grilla cuadrada($\Delta x=\Delta y$), la expresión para cada nodo es:

$$T_{m,n+1}+T_{m,n-1}+T_{m+1,n}+T_{m-1,n}-4\mathrm{T}_{m,n}=0$$

Así tenemos una expresión algebraica finita que requiere que la temperatura de un nodo interior sea igual al promedio de los nodos adyacentes.

Entonces, para n nodos, tengo n ecuaciones con n incógnitas, se resuelve el sistema y se despeja la T para cada nodo.

Ejemplo con 4 nodos desconocidos (en gris), T1 y T0 son valores de temperatura conocidos.

T0	T0	T0	T0
T1	**1,1**	**2,1**	T1
T1	**1,2**	**2,2**	T1
T1	T1	T1	T1

Planteo ecuaciones

Nodo 1,1 $T_{2,1}+T1+T_{1,2}+T0-4T_{1,1}=0$

Nodo 2,1 $T1+T_{1,1}+T_{2,2}+T0-4T_{2,1}=0$

Nodo 1,2 $T_{2,2}+T1+T1+T_{1,1}-4T_{1,2}=0$

Nodo 2,2 $T1+T_{1,2}+T_{2,1}+T1-4\mathrm{T}_{2,2}=0$

Luego resuelvo el sistema y listo, se obtienen las temperaturas de los nodos.

El modelo de balance de energía

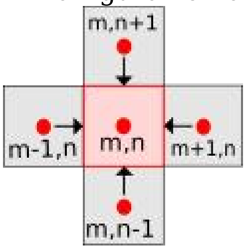
En muchos casos, se desea desarrollar el modelo de nodos mediante el modelo de balance de energía, ya que permite analizar otros fenómenos mas complejos tales como múltiples materiales, fuentes de calor, o superficies expuestas.

La ecuación finita se obtiene aplicando conservación de energía en un volumen de control sobre la región de nodos.

Se formula el balance de energía asumiendo que todo el flujo de calor va hacia dentro del nodo.

Se parte de $\dot{E}_{\mathrm{in}}+\dot{E}_{out}=0$

En la figura vemos como es la conducción de nodos adyacentes hacia un nodo interior (m,n)



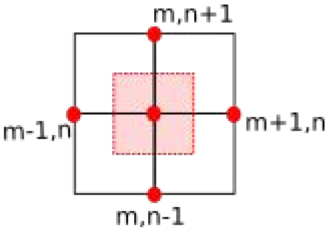
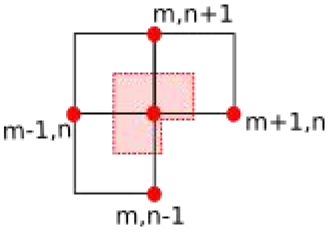
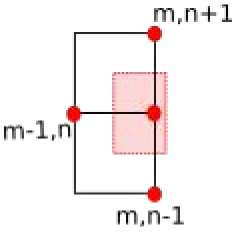
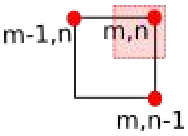
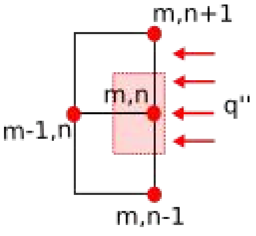
Si usamos una grilla cuadrada($\Delta x=\Delta y$), la expresión para cada nodo es:

$$T_{m,n+1}+T_{m,n-1}+T_{m+1,n}+T_{m-1,n}+\frac{\dot{q}(\Delta x)^2}{k}-4\mathrm{T}_{m,n}=0$$

Observar que es la misma ecuaciones que la anterior de la red de nodos, pero con el agregado del termino de generación $\dot{q}$.

Resumen de ecuaciones de nodos según el caso

Recordar que son todas para el caso de grilla cuadrada donde $\Delta x = \Delta y$

Configuración	Ecuación
	Nodo interior $T_{m,n+1}+T_{m,n-1}+T_{m+1,n}+T_{m-1,n}-4T_{m,n}=0$
	Nodo en una esquina interior con convección $2(T_{m-1,n}+T_{m,n+1})+(T_{m+1,n}+T_{m,n-1})+2\frac{h\Delta x}{k}T_{\infty}-2\left(3+\frac{h\Delta x}{k}\right)T_{m,n}=0$
	Nodo en una superficie plana con convección $(2T_{m-1,n}+T_{m,n+1}+T_{m,n-1})+\frac{2h\Delta x}{k}T_{\infty}-2\left(\frac{h\Delta x}{k}+2\right)T_{m,n}=0$
	Nodo en una esquina externa con convección $(T_{m,n-1}+T_{m-1,n})+2\frac{h\Delta x}{k}T_{\infty}-2\left(\frac{h\Delta x}{k}+1\right)T_{m,n}=0$
	Nodo en una superficie plana con flujo de calor uniforme $(2T_{m-1,n}+T_{m,n+1}+T_{m,n-1})+\frac{2q''\Delta x}{k}-4T_{m,n}=0$

Convección

La transferencia de calor por convección ocurre entre un fluido en movimiento y una superficie en contacto, cuando están a diferente temperatura.

(El fluido puede ser aire, p/ej la corriente de un ventilador sobre una superficie caliente).

La ecuaciones que rigen la convección son las de Newton.

Dos tipos de convección según la naturaleza del flujo

- Convección natural
- Convección forzada

Ritmo de transferencia de calor

$$q = hA(T_s - T_\infty)$$

h = coeficiente de transferencia de calor por convección, $[h] = \frac{W}{m^2 K}$

A = área de la superficie en contacto

T_s = temperatura superficie

T_∞ = temperatura del fluido (ej aire)

Flujo de calor

$$q'' = h(T_s - T_\infty)$$

Radiación

La radiación termal es energía emitida por materia que esta a una temperatura diferente de 0 grados Kelvin. La radiación puede ocurrir tanto de solidos como líquidos o gases.

Existe un limite al poder de emisión, descripto por la siguiente ley.

Ley de Stefan-Boltzmann

$q_{max}'' = \sigma T_s^4$ } flujo de calor **máximo**

$\sigma = 5.67 \text{x} 10^{-8} \ \frac{W}{m^2 K^4}$ } sigma es constante

La temperatura Ts debe estar expresada en grados Kelvin.

Ritmo de transferencia de calor

$q = h_r A(T_s - T_{sur})$; hr = coeficiente de transferencia por radiacion

Flujo de calor

$$q'' = \epsilon \sigma (T_s^4 - T_{sur}^4)$$

ϵ es la emisividad, depende del material.

T_{sur} = temperatura del ambiente, ejemplo paredes

T_s = temperatura superficie

Conservación de la energía en un volumen de control

La primera ley de la termodinámica indica que la energía total de un sistema es conservada.

El cambio en la energía total de un sistema E es igual al calor transferido al sistema Q menos el trabajo W realizado por el sistema.

$$\Delta E_{st}^{tot} = Q - W$$

Por lo tanto, la energía en un volumen de control debe ser igual a la cantidad de energía que entra al volumen menos la energía que sale del volumen.

$$\dot{E}_{st} = \dot{E}_{\mathrm{in}} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{g}$$ (in = entrada, out = salida, g = generada, st = almacenada)

(El punto $\dot{E}$ *indica tasa de algo.)*

Ecuación simplificada para flujo de energía termal constante

$$q = \dot{m} c_p (T_{out} - T_{\mathrm{in}})$$

donde $\dot{m}$ es el flujo total

c_p es el calor especifico a presión constante

$T_{\mathrm{in}}\, y\, T_{out}$ las temperaturas de la entrada y de la salida

Balance energético superficial

Si las superficies de control están ubicadas en cada lado de los limites físicos y no encierran masa o volumen se puede utilizar esto :

$$\dot{E}_{\mathrm{in}} = \dot{E}_{\mathrm{out}}$$