Ultima modificación el lunes, 28 de junio de 2004

Ejemplo:

X1(kw*h)	***fi***	***Pmi***	***Pm*fi***	***F***
0-100	18	50	900	18
100-200	34	150	5100	52 (intervalo mediano)
200-300	28	250	7000	80
300-400	12	350	4200	92
400-500	4	450	1800	96
500-600	2	550	1100	98
600-1400	2	1000	2000	100
	100		22100	

$$Me = 100 + \frac{\left(\frac{100}{2} - 18\right) \cdot 100}{34} = 194.11 \text{ kw/h} \rightarrow \text{mediana en este ejemplo}$$

Fi = frecuencia absoluta
Pmi = punto medio intervalo
F = frecuencias acumuladas

En una *serie de frecuencias* o distribución *de frecuencias* se utiliza por lo general grupos de entre cinco y veinte intervalos. Con este tipo de agrupamiento hay cierta perdida de información del paso de los datos "en bruto" a los intervalos.
Como se trata de una variable continua no debe haber espacios entre los intervalos.

Intervalos: tienen rango inferior, superior y amplitud. Es común que el ultimo intervalo sea amplio.

Promedio de la muestra: $\bar{x} = \frac{\sum Pm_i \cdot f_i}{n}$ (n = tamaño muestra)

Mediana (**fractil 50**): $Me = l_i + \frac{\left(\frac{n}{2} - F_a\right) \cdot i}{f_i}$

donde: **li**=limite inferior del intervalo mediano, **fi** = frecuencia absoluta del intervalo mediano, **i** = amplitud del intervalo mediano, **Fa** = frecuencia acumulada **anterior** al intervalo mediano.

Para obtener el intervalo mediano, hacemos n/2.

Fractil: es un valor de x que acumula cierto porcentaje (la mediana es el fractil 50).

$$x\alpha = l_i + \frac{\left(\frac{\alpha n}{100} - Fa\right) \cdot i}{fi}$$ alfa debe ser el porcentaje del fractil.

Modo: esta en el intervalo de mayor frecuencia.

$M_o = L_i + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \cdot i$ Donde $\begin{matrix} \Delta_1 = fm - fa \\ \Delta_2 = fm - fp \end{matrix}$ fa = frecuencia anterior, fp = frec. Posterior, fm = frecuencia modal.

i = amplitud del intervalo modal, Li = limite inferior del intervalo modal.

Asimetría

La asimetría **positiva** es cuando predominan los valores bajos de la variable. Cuando hay asimetría positiva, $\bar{x} > Me > Mo$

La asimetría **negativa**, predominan los valores altos de la variable, entonces $Mo > Me > \bar{x}$

La distribución simétrica los valores mas frecuentes son centrales y $\bar{x} \simeq Me \simeq Mo$

Dispersión de la muestra

$S^2 = \frac{\sum fi \cdot (Pm - \bar{x})^2}{n}$ esto es la **varianza**, para sacar la **dispersión**, sacar la raíz cuadrada.

La misma formula, reescrita: $S^2 = \frac{1}{n} \cdot \left[\sum Pm_i \cdot f_i - n \cdot \bar{x}^2 \right]$

Coeficiente de variación $CV = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100$

Probabilidad

Definición clásica de Laplace: $P(A) = \frac{\text{N casos favorables}}{\text{N casos posibles igualmente probables}}$

Ley de los grandes números o principio de estabilidad de las frecuencias

A medida que se repite el suceso aleatorio, mas tiende a su valor real de probabilidad.

$\lim_{n \to \infty} P \{ | f(x) - P(nd) | \} > \epsilon = 0$ Nd es el numero que deseamos que “salga”

Criterio de probabilidad frecuencial o definición experimental

“La probabilidad de un suceso es el numero hacia el cual tienden las frecuencias relativas cuando el numero de pruebas crece”

La principal desventaja es que tenemos que poder repetir el fenómeno en condiciones uniformes.

Definición axiomática

No dice como calcular la probabilidad, sino como tiene que ser.

- Toda probabilidad es un numero no negativo (entre 0 y 1). ($0 <= P(n) <= 1$)
- La probabilidad del conjunto universal es igual a 1 ($P(U) = 1$) (conjunto universal = todos los resultados posibles del evento aleatorio).
- La probabilidad de la unión (uno o el otro) de dos sucesos es la suma de sus probabilidades individuales siempre que los sucesos sean mutuamente excluyentes $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Suceso imposible: $P(s) = 0$

Suceso cierto: $P(s) = 1$

Dos eventos son **excluyentes** si la ocurrencia de uno implica la ausencia del otro.

Probabilidad subjetiva: un experto emite su opinión sobre la probabilidad.

Los sucesos son **exhaustivos** cuando su unión **agota** el universo (da 1 su suma de probabilidades).

Cuando los sucesos son **excluyentes** y **exhaustivos**, son **complementarios.** (ej: moneda=>cara o ceca)

Eventos **no excluyentes** tienen puntos en común, pueden ocurrir simultáneamente.

Reglas de la probabilidad

- La probabilidad de la **unión** (ocurre A,B o ambos) de 2 sucesos:
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  Si los sucesos son excluyentes, el termino de resta NO va (vale 0)
  La unión significa A o B (XOR)

- Probabilidad **condicional**: la probabilidad de un suceso habiendo ocurrido otro previamente.
  Se escribe $P(A/B) = n$
  Expresión general:
  $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
  o P(A/B) significa "prob. De A dado B"
  $$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

- Probabilidad de la intersección **("Y")** (o regla del **producto**)
  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$

Algunas cosas extra relacionadas con las reglas de la probabilidad

$P(A \cup B) = 1 - P(A \cap B)$ $\quad \cap = \text{y} ; \cup = \text{o}$ $\quad P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ $\quad P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$

Sucesos independientes
Es cuando un suceso no influye al siguiente suceso, o sea, que salga o no el suceso no afecta al siguiente suceso.

Si los sucesos son independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Sucesos:

- Excluyentes : dos sucesos excluyentes son dependientes.
- No excluyentes: pueden o no ser dependientes.
- Independientes: jamas son excluyentes.

Regla de la probabilidad total (regla de Bayes)

Si, teniendo dos o mas sucesos excluyentes y exhaustivos, aparece un tercer suceso llamado "x", que tiene puntos en común con A y B:
$P(x) = P(A \cap x) + P(B \cap x) = P(A) \cdot P(x/A) + P(B) \cdot P(x/B)$
Una probabilidad total es una suma de probabilidades conjuntas.
Tienen una probabilidad apriori por una probabilidad condicional, y esos eventos a priori son excluyentes y exhaustivos.

Probabilidad a posteriori o probabilidad de las causas

Si sabemos que ocurrió x, que probabilidad hay que haya ocurrido a causa de A?
$P(A/x) = \frac{P(A) \cdot P(x/A)}{P(x)}$ Cociente entre una probabilidad conjunta y la probabilidad total.

$P(B/x) = \frac{P(B) \cdot P(x/B)}{P(x)}$ Nota: Divisor: P(x) = P(A).P(x/A) + P(B).P(x/B)

La suma es 1 (apriori y a posteriori)

Pasos a seguir para calcularlo

A priori	Condicionales	Conjuntas	Posteriori
$P(A) + P(B) = 1$	$P(x/A)$ $P(x/B)$	P(A).P(x/A) + P(B).P(x/B) = P(x) Atento, esto es lo que divide en donde dice P(X) (a la derecha de la tabla, "posteriori" Es decir, el P(x) es esto.	$P(A/x) = \frac{P(A \cap x)}{P(x)}$ + $P(B/x) = \frac{P(B \cap x)}{P(x)}$ = cd 1

Nota: una unión es igual a una intersección con los eventos negados.

Modelos estadísticos

Variables discretas

Es aquella variable que puede tomar generalmente **enteros**.
Ejemplo: r = numero de ases al arrojar un dado 5 veces.

P(r) es una función que tiene por dominio una serie de resultados mutuamente excluyentes.
F(r) es la función de distribución izquierda (la probabilidad de que ocurra r es igual o menos <=)
G(r) es la función de distribución derecha (la probabilidad de que ocurra r es igual o mas >=)

$$F(r) = 1-G(r+1)$$
$$G(r) = 1-F(r-1)$$
$$P(r) = F(r)-F(r-1) = G(r)-G(r+1)$$

Media o esperanza matemática: $u=E(r)=\sum r_i \cdot P(r_i)$

Varianza: $V^2(r)=E(r_1-u)^2=\sum r_i^2 P(r_i)-u^2$ o $\sum (r_i-u)^2 P(r_i)$

Desvío: $V(r)=\sqrt{(V^2)}$

Proceso de Bernoulli

Una sucesión de n pruebas **independientes** entre si.
La probabilidad de éxito en cada prueba es **constante**.
Solo **dos** posibilidades, éxito o fracaso.

El proceso de Bernoulli puede generar una distribución binomial o de Pascal:

$0 \le r \le n$ Con n fijo, es **binomial**

$n \ge r$ Con r fijo, es **Pascal**

Binomial

$P_b(r/n, p)=k \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$ } probabilidad binomial.

Donde k es $k=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}=$calculadora [nCr]

$F_b(r/n, p)=1-G_b(r+1/n, p)$
$G_b(r/n, p)=1-F_b(r-1/n, p)$ } F y G binomiales (función izquierda (<=) y derecha (>=))

Esperanza binomial: $E_b(r)=\mu=n \cdot p$
Varianza binomial: $V_b^2(r)=n \cdot p(1-p)$
Desvío binomial: $V_b(r)=\nu=\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Una distribución binomial donde
p < 0,5 es asimétrica positiva
p = 0,5 es simétrica
p > 0,5 es asimétrica negativa

Como usar la tabla binomial

Teniendo por ejemplo: $G(3/10, 0.25)$ donde G(r/n, p) ; se busca en la tabla n=10, luego el valor de r=3, y el p=0,25 ; la intersección es el valor deseado (0,4744 en este caso).

Atento: Hay que saber que columna representa G(r) y que columna representa F(r) en la tabla!

Probabilidad de Pascal

El ultimo suceso/experimento es el ultimo éxito.
Probabilidad de necesitar n pruebas hasta obtener **r** éxitos con probabilidad **p**.

$$P_{pa}(n/r, p) = p(A\, y\, B) = \binom{n-1}{r-1} \cdot p^{r-1} \cdot (1-p)^{n-r} \cdot p = \binom{n-1}{r-1} \cdot p^{r} \cdot (1-p)^{n-r}$$

Probabilidades acumuladas y su equivalencia con la binomial (para buscar en la tabla)

$$Fpa(n/r, p) = Gb(r/n, p)$$

$$Gpa(n/r, p) = 1 - Fpa(n-1/r, p) = 1 - Gb(r/n-1, p) = Fb(r-1, n-1, p)$$

Para conseguir r éxitos, preciso n>= r pruebas

$$E(n) = \frac{r}{p}$$ esperanza matemática

$$O^2 = (n) = \frac{n}{p} \cdot (\frac{1}{p} - 1)$$

Variable hipergeométrica

En una variable hipergeométrica, la probabilidad de éxito no se mantiene constante (si lo fuera, es una variable binomial).

$$0; n-(N-R) \leq r \leq n; R$$

Donde N = población de la muestra, R = total de éxitos posibles, N-R = fracasos, n = numero de pruebas, r = éxitos en mi muestra.

$0; n-(N-R)$ Es el limite inferior, se toma el **máximo** (0 o n-(N-R))
$n; R$ es el limite superior, se toma el **mínimo** (n o R)

$$P_h(r/n, N, R) = \frac{\binom{R}{r} \cdot \binom{N-R}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$

Para las acumuladas, existe una tabla hipergeométrica.

Temas del segundo parcial

Variables continuas

$P(\tilde{x}=x)=0$ Probabilidad de que tome exactamente ese valor. Esta probabilidad casi siempre es un numero muy pequeño.
Se asume que vale cero la probabilidad puntual.
Si tiene sentido calcular F(x) y G(x).

$F'(x)=f(x)$ función de densidad de probabilidad o función de frecuencias.

Todos los modelos de probabilidad continua se identifican por su función de densidad.

Una función de densidad, para que sea considerada como tal, debe cumplir:

- La integral para todo el dominio de esa función debe valer uno (1).
  $\int f(x)\,dx=1$
- Para todo valor de x, la función de densidad es un numero **no** negativo
  $f(x)\geq 0$

Distribución normal o campana de Gauss

Es una variable de comportamiento simétrico, predominio de valores centrados, poca densidad en los extremos.

Mo ~= Me ~= u

$CV=\frac{v}{\mu}$ El coeficiente de variación es relativamente bajo. (u = promedio, v=varianza)

“Casi todas aquellas variables que provengan de procesos tecnológicos comprobados tienen este comportamiento” (muy baja dispersión).

Modelo: Distribución normal o campana de Gauss

- La dispersión relativa suele estar abajo del 15%, 20%
- Si el coeficiente de variación supera el 15%, ya entramos al campo de las distribuciones asimétricas.

Distribuciones asimétricas:

Mo < Me < u	Asimetría positiva
Mo < Me < u	Asimetría positiva pronunciada (alta dispersión)
Modelo distribución Log Normal o Normal Logaritmica	
u < Me < Mo	Asimetría negativa Este comportamiento se da en fenómenos de vida que están sujetos a una fatiga o desgaste (vida útil)

Algunas formulas:

$$\int f(x)\,dx=1$$

$$\int_{-\infty}^{x'} f(x)\,dx=F(x')$$

$$\int_{x'}^{\infty} f(x)\,dx=G(x')$$

F(x) + G(x) = 1

$$\int x\cdot f(x)\,dx=E(x)=\mu$$ Esperanza matemática (y promedio)

$$\int_{-\infty}^{x'} x\cdot f(x)\,dx=E(x\leq x')$$ Esperanza matemática parcial izquierda = H(x')

$$\int_{x'}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx=E(x\geq x')$$ Esperanza matemática parcial derecha = J(x')

H(x') + J(x') = E(x') = u

$$\int (x-\mu)^2 f(x)\,dx=\nu^2(x)$$ Varianza

$$f(x)=\frac{1}{\nu\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-u}{\nu}\right)^2}$$ Normal en un punto exacto

Los cálculos que se pueden hacer son:
1) Dado un x, calcular F(x) y G(x)
2) Dada una probabilidad, sacar el fractil (valor de x)

Variable normal estandard

Cada vez que se trabaja con un problema real, hay que normalizar la variable.

$Z = \frac{x-\mu}{\nu}$ <-- este Z se busca luego en la tabla.

Al restar u se desplaza la media de u a 0, y luego al dividir entre v se gradúa la variable para que la desviación estandard sea 1 en lugar de v (de esta manera se lleva la variable normal no estandard a una variable normal estandard.)

La idea clave es que al estandarizar, cualquier probabilidad en la que aparezca X se puede expresar como una probabilidad en la que aparece una variable Z normal estandard, por lo cual se puede usar la tabla para calcularla.
En particular:

$$P(X \leq x) = P\left[Z \leq \frac{(x-\mu)}{\nu}\right] = \Phi\left[\frac{(x-\mu)}{\nu}\right]$$

Ejemplo:

"El tiempo de reacción de frenado de un automovilista se puede modelar con una distribución normal con valor medio 1.25 s y desviación estandard de 0.46 s ¿Cual es la probabilidad de que el tiempo de reacción se encuentre entre 1s y 1.75 s?"

Solución:

Si X es el tiempo de reacción, la estandarización da:

$1.00 \leq x \leq 1.75$ si y solo si $\frac{1.00-1.25}{0.46} \leq \frac{X-1.25}{0.46} \leq \frac{1.75-1.25}{0.46}$

Así:

$P(1.00 \leq x \leq 1.75) = P(-0.54 \leq Z \leq 1.09) = \Phi(1.09) - \Phi(-0.54) = 0.8621 - 0.2946 = 0.5675$

¿Cual es la probabilidad de que el tiempo de reacción sea mayor a 2 s?

$$P(X > 2) = P\left(Z > \frac{2-1.25}{0.46}\right) = P(Z > 1.63) = 1 - \Phi(1.63) = 0.0516$$

Percentiles/fractiles de una distribución normal estandard y de una arbitraria

Standard:

Para una distribución normal estandard, el 99avo percentil es aquel punto sobre el eje tal que el area bajo la curva a la izquierda del punto sea 0.9900 ; en la tabla tenemos para z fija, el area bajo la curva a la izquierda de z, mientras que aca tenemos el area y buscamos el valor de z. Esto es el problema inverso a "P(Z <= z) = ?", por lo cual, la tabla se usa a la inversa, se busca 0.9900 y se encuentra z (en este caso, z = 2.33). Por simetría, el primer percentil es el negativo del 99avo, y es igual a -2.33 (1% esta abajo del primero y arriba del 99avo).-

Arbitraria:

De una arbitraria:

(100p)avo percentil para (u,v) normal = u + [(100p)avo para normal estandard] * v

Si z es el percentil deseado para la distribuciones normal estandard, entonces el percentil deseado para la distribución normal (u,v) es z desviaciones estandard a partir de u.

Ejemplo:

valor medio: 64 , desviación estandard: 0.78 ; averiguar P(X>c) = 0.005 o equivalentemente P(X<=c) = 0.995.
Entonces, c es el 99.5avo percentil de la distribución normal estandard con u=64 y v = 0.78
El 99.5avo percentil de la normal estandard es 2.58 (tabla) así que:
c = n(0.995) = 64 + (2.58) * (0.78) = 64 + 2.0 = 66

Variables transversales

Se miden en un punto fijo en el tiempo.
Tienen mucha dispersión, asimetría positiva.
Mo < Me < u

Distribución log-normal o normal logarítmica

$CV=\frac{\nu}{\mu}>0{,}5$ usualmente

$f(x)=\frac{1}{xD\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{\ln x-m}{D}\right)}$

Una variable log normal es aquella cuyos logaritmos en cualquier base tienen distribución normal.

Parámetros de la distribución log normal:

$E(\ln x)=m$ promedio de los logaritmos, no es el log(u)!

$V^2(\ln x)=D^2$

$V(\ln x)=D$

Estandarizar la variable: $Z=\frac{\ln x-m}{D}$ donde: $D=\sqrt{\ln(1+(\frac{V}{u})^2)}$ $m=\ln\frac{u}{\sqrt{1+(\frac{V}{u})^2}}$

Fractil: $x_\alpha=e^{(m+z_\alpha\cdot D)}$ Mediana: $x_{50}=Me=e^m$

Para sacar el modo, hay que derivar la función de densidad, igualar a cero, y sacar x. $Mo=e^{(m-D^2)}$

Promedio teniendo m y D $u=e^{(m+\frac{d^2}{2})}$

Desvío teniendo m y D $v=\sqrt{(e^{(2m+D^2)})\cdot(e^{d^2}-1)}$

Suma de variables aleatorias

x ~ normal { u , v

y = x1 + x2 + ... + xn
y ~ normal

$u_y=m\cdot u_{(x)}$ $v_y^2=n\cdot v_{(x)}^2$

Teorema central del limite

Una suma de variables aleatorias independientes entre si tienen distribución aproximadamente normal cuanto mayor sea la cantidad de sumandos, independientemente de como se distribuya la variable x. Eso si, cuanto mas dispersa sea la variable (mas asimetría) mayor tendrá que ser la cantidad de sumandos para que la variable suma (y) se aproxime a la distribución normal. En el caso de que x provenga de una población normal, la variable suma (y) tendrá una distribución exactament4e normal independientemente de la cantidad de sumandos.

En el caso particular de que la variable x provenga de una población normal, la variable suma tendrá una distribución exactamente normal, independientemente de la cantidad de sumandos.

Atención:
W es la combinación linear de x e y, que son variables aleatorias con distribución normal ; a y b son constantes ; x e y son independientes ; la variable w tendrá distribución normal.

$uw=a\,u_x+b\,u_y$ Media | $V_{(w)}^2=a^2V_{(x)}^2+b^2V_{(y)}^2$ varianza, solo para variables independientes.

$V_{(w)}^2=a^2V_{(x)}^2+b^2V_{(y)}^2+2ab\,V_{(x)}V_{(y)}\varrho$ Generalizado , ϱ mide el grado de intensidad en que esas dos variables están correlacionadas linealmente.
Las varianzas NO se pueden restar.

Aproximación normal a la distribución de Poisson

Si m > 20 en Poisson, se puede usar la normal con buena aproximación.

$$F_{po}(r/m) \simeq \phi\left(\frac{r+0.5-m}{\sqrt{m}}\right)$$ (m = media, 0,5 = factor de corrección)

Relación de Molina

$$F_g(r/n,p) = G_{po}(n/r\cdot p) = 1-F_{po}(n-1/n) \simeq 1-\phi\left(\frac{(n-1)+0.5-r\cdot p}{\sqrt{(n)}}\right)$$

Aproximación de Wilson Hilferthy a la distribución Gamma izquierda (Fg)

Se puede hacer siempre, sin necesidad de ninguna condición especial

$$Fg(x/r;\lambda)=G_{po}(r/m=\lambda\cdot x)\simeq\Phi(Z)=\Phi\left\{3\sqrt{r}\cdot\left[\left(\frac{\lambda x}{r}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{9\cdot r}-1\right]\right\}$$

Aproximación de Poisson a la distribución binomial

Si p < 0,1 ; esa binomial tiene asimetría positiva y se puede resolver usando la distribución de Poisson.

$$F_b(r/n;p) \simeq F_{po}(r,n\cdot p) \simeq G_{po}(n-r,n(1-p))$$

$$G_{po}(n,\lambda)=1-F_{po}(n-1,\lambda)$$

Lo mismo para G y la puntual.
Esta aproximación es valida cuando p es pequeño y n es grande.

Aproximación normal a la distribución binomial

n tiene que ser un numero grande y p no muy chico ni grande (0,1 < p < 0,9)
si n * p y n*(1-p) > 10, entonces la aproximación se puede usar.

$$F_b(r/n,p) \simeq \phi\left(\frac{r+0.5-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p(1-p)}}\right)$$

Proceso de Poisson

$\lambda:$ numero medio de exitos / u.t , Ej: 2 clientes/minuto

Puedo fijar la cantidad del continuo (ej 10 minutos) y cuento la cantidad de éxitos

$r\geq 0\ ;t\ fijo\rightarrow$ variable discreta $\rightarrow Poisson$

Puedo fijar r y medir el continuo necesario hasta que ocurran todos los r
r: fijo (éxitos) ; x > 0 => variable Gamma

t: continuo necesario => variable exponencial
r: 1 exito

Variable del modelo de Poisson

$m=\lambda\cdot t$ parámetro

$$P_{po}(r/m=\lambda\cdot t)=\frac{e^{-m}\cdot m^r}{r!}$$

La distribución de Poisson tiene asimetría positiva.

P(r = m) = P(r = m – 1)

Cuando m crece, la distribución tiende a ser simétrica. Para m > 20 , es prácticamente simétrica, y puede aproximarse con la normal.

$P_{po}(0/m=\lambda\cdot t)=e^{\lambda t}=G(t)=0,5$ Mediana
$F(t)=1-e^{-\lambda t}$ mediana
$f(t)=F'(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ función de densidad
$u=E(t)=\int t\cdot F(t)dt\frac{1}{\lambda}=\nu$ $\quad cv=\frac{\mu}{\nu}=1$