Análisis Matemático 3

Resumen y notas de clases

Ultima modificación:22 de septiembre de 2005

Integrales dobles

R = recinto plano limitado por una curva cerrada C

$$\iint f(x;y)dA = \iint f(x;y)dxdy$$

Interpretación geométrica:

Volumen bajo la superficie hasta el recinto plano en (x,y) ;

si f(x;y) = 1 , $\iint 1\,dA$ entonces es el área plana del recinto R

Para calcularlo, se hacen integrales simples sucesivas, o sea, primero se considera la x constante y se integra en y (dy), queda una función de x, luego integro en x (dx) y queda un numero.

$$R=\{(x;y)/f_1(x)\le y\le f_2(x);a\le x\le b\}$$ } **Recinto**

$$\iint_R f(x;y)dy\,dx = \int_a^b\left[\int_c^d f\underbrace{(x;y)dy}_{F(x)}\right]dx = \int_a^b F(x)dx = G(b)-G(a)=Nro$$ } **Integrando**

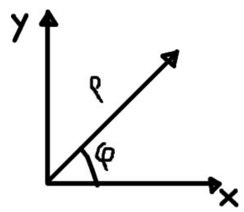
El orden x,y se puede invertir (primero dx y luego dy, o viceversa, hay que invertir las funciones en ese caso).

Coordenadas polares

Reemplazar x e y por estas en la función a integrar:

$$\left\{\begin{array}{l} x=\rho\cdot\cos\varphi \\ y=\rho\cdot sen\,\varphi\end{array}\right\} \quad \text{y} \quad \begin{array}{c}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\ \to\rho^2=x^2+y^2 \\ \varphi=arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)\end{array}$$

$$\rho=modulo,\ \varphi=angulo$$



Integral doble en coordenadas polares

$$\iint_R f(x;y)dx\,dy = \iint_R f[x(\rho,\varphi);y(\rho,\varphi)]\cdot\rho\cdot\ d\rho\,d\varphi$$

Para circunferencias y curvas similares, es mucho mas fácil integrar usando coordenadas polares.

Ejemplo: $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{(4-x^2)}} 5\mathrm{x}\ \ dy\,dx = 5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 \rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi = 5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^2\rho^2 d\rho=\frac{40}{3}$

Integrales triples

$$D=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\ /\ Q_1(x;y)\leq z\leq Q_2(x;y)\ ;\ G_1(x)\leq y\leq G_2(x)\ ;\ a\leq x\leq b\}$$

$$\iiint_D f(x;y;z)\,dV = \iiint_D f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\iiint_D f(x;y;z)\,dz\,dy\,dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{Q_1(x;y)}^{Q_2(x;y)} f(x;y;z)\,dz\,dy\,dx$$

Interpretación geométrica:

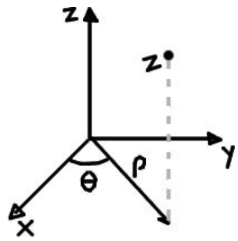
Si f(x;y;z)=1 resulta $\iiint_D \underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV}$ =volumen del recinto

Si f(x;y;z) = densidad de D en cada punto

$\iiint_D f(x;y;z)\,dV$ = masa de D

Coordenadas cilíndricas

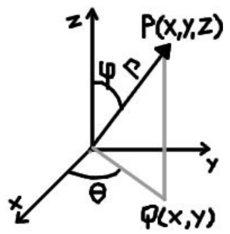
$$\iiint_d f(x;y;z)\underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV} = \iiint_d f\left[x(\rho,\theta);y(\rho,\theta);z\right]\rho\ \underbrace{d\rho\,d\theta\,dz}_{dV}$$



$\begin{Bmatrix} x=\rho\cdot\cos\theta \\ y=\rho\cdot sen\,\theta \\ z=z \end{Bmatrix}$ } reemplazar en F(x;y;z)

$\rho=modulo,\ \theta=angulo,\ z=altura(z)$

Coordenadas esféricas



$\begin{Bmatrix} x=\rho\cdot sen\,\varphi\cdot\cos\theta \\ y=\rho\cdot sen\,\varphi\cdot sen\,\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{Bmatrix}$ } reemplazar en F(x,y,z)

$$\iiint_d f(x;y;z)\underbrace{dx\,dy\,dz}_{V} = \iiint_D f\left[x(\rho,\varphi,\theta);y(\rho,\varphi,\theta),z(\rho,\varphi)\right]\cdot\rho^2\,sen\,\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

Área de una superficie en el espacio

$$S = \iint_R \frac{\sqrt{(f_x')^2 + (f_y')^2 + (f_z')^2}}{|f_z'|} dxdy$$ } Diferencial S = dS

(nota: f_n' significa derivada de f respecto a n)

Expresión del **plano tangente** : $f_x'(x - x_0) + f_y'(y - y_0) + f_z'(z - z_0) = 0$

Si z = F(x;y) entonces $Area = \iint_R \sqrt{(f_x')^2 + (f_y')^2 + 1}\, dxdy$; ídem otros planos, cambia de posición el "1".

Proyección sobre otros planos

Se adapta la función, no siempre queda igual, algunas proyecciones convienen mas.

Ejemplo:

Proyección sobre XZ = $S = \iint_{R_1} \frac{\sqrt{(f_x')^2 + (f_y')^2 + (f_z')^2}}{|f_y'|} dxdz$

Proyección sobre YZ = $S = \iint_{R_2} \frac{\sqrt{(f_x')^2 + (f_y')^2 + (f_z')^2}}{|f_x'|} dydz$

O sea, en los d*n*, van las letras del plano, y dividiendo ("abajo") va la derivada respecto al plano que "dejamos afuera"

Implícitas

Si z = f(x;y) entonces f(x;y)-z = 0 entonces $S = \iint_R \sqrt{(f_x')^2 + (f_y')^2 + 1}\ \ dxdy$

El 1 **cambia** de lugar al proyectar sobre otros planos, cambia a la variable que falta, ejemplo: si falta la y, el 1 va en el lugar de $f_y'^2$

Con todas las formulas anteriores, se pueden usar coordenadas polares/cilíndricas/etc también.

Integral de superficie

Esta integral permite calcular masa, momento, etc.

$$\iint_R F(x;y;z)\, dS = \iint_R F(x;y;z) \frac{\sqrt{(f_x')^2 + (f_y')^2 + (f_z')^2}}{|f_z'|} dxdy$$

Recordatorio: Integral impropia (Analisis Mat 2)

Se reemplaza el infinito por "a", se hace la integral, y al resultado se le hace lim a->infinito del "resultado integral", puede dar un numero o infinito.

Campos vectoriales

Dado D un subconjunto $\mathbb{R}^2$

$F(x;y)=P(x;y)\breve{i}+Q(x;y)\breve{j}$ } campo vectorial en $\mathbb{R}^2$

Dado E un subconjunto $\mathbb{R}^3$

$F(x;y;z)=P(x;y;z)\breve{i}+Q(x;y;z)\breve{j}+R(x;y;z)\breve{k}$ } campo vectorial en $\mathbb{R}^3$

Gradiente de un campo *escalar*

$F(x;y;z)\ :\quad \overrightarrow{\nabla f}=(f_x'\ ;\ f_y'\ ;\ f_z')$ (sirve para F(x;y) también

Propiedades del gradiente:

- Es normal a las curvas o superficies de nivel
- La dirección y sentido indica el mayor crecimiento de f (el campo)
- El modulo del vector gradiente es el valor de la derivada direccional máxima del campo escalar considerado.

Divergencia de un campo vectorial

Sea $\vec{A}(x;y;z)\ =\ A_1(x;y;z)\breve{i}\ +\ A_2(x;y;z)\breve{j}\ +\ A_3(x;y;z)\breve{k}$

Llamamos divergencia al **escalar (número)** que resulta al calcular :

Divergencia : $\operatorname{div}\vec{A}=A1_x'\ +\ A2_y'\ +\ A3_z'$ = escalar (número)

Notar que NO se ponen los versores, pq estamos calculando un numero.

Si la divergencia da :

Igual a 0	$\vec{A}$ es soneloidal
Mayor que 0	$\vec{A}$ tiene una fuente
Menor que 0	$\vec{A}$ tiene un sumidero

Al reemplazar x,y,z por valores, puede que en un punto sea solenoidal p/ej, y en otro punto sea otra cosa distinta.

Rotor de un campo vectorial

Sea $\vec{A}(x;y;z)$, se llama rotor de A, al vector que se obtiene de la expresión:

$Rot\,\vec{A}=\begin{vmatrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ \frac{d}{d_x} & \frac{d}{d_y} & \frac{d}{d_z}\\ A_1 & A_2 & A_3\end{vmatrix}=((A3_y'-A2_z');(A1_z'-A3_x');(A2_x'-A1_y'))$ } hizo el producto vectorial.

*Si rotor A **igual** cero, A es irrotacional, sino es rotacional.*

Resumen de lo anterior

Operador: Nabla = $\vec{\nabla}=(\frac{d}{dx};\frac{d}{dy};\frac{d}{dz})$

Si f es un campo escalar:

Gradiente : $\vec{\nabla} f=(f_x';f_y';f_z')$

Divergencia: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = (producto\, escalar) = A1_x+A2_y+A3_z$

Rotor: $\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}=rotor(producto\, vectorial)$

Tabla resumen

	Campo escalar f	Campo vectorial A	
	Grad f	Div A	Rot A
Grad	NO	SI grad de [div A]	NO
Div	SI div[grad f]	NO	SI div[rotor A] = 0 (cero)
Rotor	SI rotor[grad f] = 0 (cero)	NO	SI rotor[rotor A]

Flujo

Si $\vec{F}=F_1(x;y;z)i+F_2(x;y;z)j+F_3(x;y;z)k$ entonces

$Flujo=\iint_R \vec{F}\cdot\breve{n}$ o sea, la integral doble en el recinto plano de la proyección (xy u otro), de el producto escalar de F por la normal.

Se hace <u>una vez por cara</u> del objeto / superficie. (O sea, las caras se toman según su normal, p/ej, si hay dos normales, se hacen dos cálculos de flujo, etc)

La normal se puede obtener $\breve{n}=\frac{grad\ f}{|grad\ f|}$ (o sea, saco el gradiente y lo normalizo al dividirlo por su módulo).

Teorema de Gauss o de la Divergencia para calcular el flujo

Si S es una superficie **cerrada** se puede hacer (es mas fácil usualmente)

$Flujo=\iint_R \vec{F}\cdot\breve{n} \;=\; \iiint_v \operatorname{div}\vec{F}\,dv$ donde v es el volumen encerrado por la superficie cerrada.

Cuando tenés una superficie cerrada, en vez de calcular cara por cara (como se hace con el flujo), se aplica esto una sola vez (una integral triple), y listo.

Ampliando la formula seria :

$$Flujo=\iiint_v \operatorname{div}\vec{F}\,dv \;=\; \iiint_v (P_x'+Q_y'+R_z')\,dxdydz$$

Ejemplo, si fuera en el plano x,y, quedaría : $\iiint_v P_x'\,dxdydz+\iiint_v Q_y'\,dxdydz$

Integrales curvilíneas o de linea – parte 1

$$\int_c M(x;y)\,dx+N(x;y)\,dy$$

Donde tengo $\vec{F}(x;y)=M(x;y)\breve{i}+N(x;y)\breve{j}$ y lo parametrizo a $\vec{r}(u)=x(u)\breve{i}+y(u)\breve{j}$, entonces $\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_c M(x;y)\,dx+N(x;y)\,dy$

En general, la integral curvilínea depende de la trayectoria, salvo cuando el campo vectorial es el gradiente de cierta función escalar que se llama función potencial.

Función potencial

$$\mu(x;y)=x^2+y^2$$

$$\vec{\nabla}_\mu=2\mathrm{xy}^2\breve{i}+2yx^2\breve{j}$$

La función potencial **no** depende de la trayectoria.

Si $\vec{F}=\vec{\nabla}_\mu$ (gradiente de la función potencial), entonces la $\int_c$ **no** depende de la trayectoria, solo de los limites de integración.

Entonces la $\oint_c=0$

Cálculo de la función potencial

$$\vec{\nabla}_\mu=M(x;y)\breve{i}+N(x;y)\breve{j}$$

$$\mu=\mu(x;y)$$

$$\vec{\nabla}_\mu=\mu_x'(x;y)\breve{i}+\mu_y'(x;y)\breve{j}$$

La condición necesaria y suficiente para que exista la función potencial es que $M_y'=N_x'$

Si esto pasa, ya se que él $\oint_c=0$

Función potencial – Ejemplo teórico importante

$$\int_c \underbrace{2xy^2}_{u_x'} dx + \underbrace{2x^{2y}}_{u_y'} dy \quad => \quad \int_c \underbrace{u_x' dx + u_y' dy}_{du} \quad => \quad \int_c du = u(x;y)$$

=> $\int_c du \ = \ u(x;y) \int_{(x_0;y_0)}^{(x_1;y_1)} \ = \ u(x_1;y_1) - u(x_0;y_0)$ } con esto calculo cualquier integral al que se le pueda aplicar la potencial. O sea, me fijo si le puedo aplicar la potencial, si puedo, le meto los limites a u y listo. =)

Integrales curvilíneas o de linea – parte 2

Esta es la teoría que "cierra" todo el tema de las curvilíneas. Atento a esto =)

$$\int_c f(x;y) ds \ = \ \int_{t_0}^{t_1} f[x(y);y(t)] \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

O sea, parametrizo la función en base a t, y la multiplico por la norma de la derivada, y dt.

Simplificando : $S = \int_{t_0}^{t_1} f(t) \cdot \|r'(t)\| dt$

Circulación del campo vectorial a lo largo de la curva C

$$\int_c M(x;y) dx + N(x;y) dy$$

Depende de la curva que elija, excepto en un caso : $F(x;y) = \vec{\nabla}_\mu$ donde μ es la función potencial.

Si se cumple $u_{xy}'' = u_{yx}''$ (la derivada segunda de u: xy, yx son iguales) entonces se cumplen las siguientes condiciones :

$\vec{\nabla}_\mu = \mu_x' \breve{i} + \mu_y' \breve{j}$ } gradiente

$\int_c \underbrace{u_x' dx + u_y' dy}_{du} \ = \ u(x;y) \int_a^b \ = \ u(b) - u(a)$ } u en el punto inicial menos u en punto final

$\oint_c du = u(x;y) \int_{p_0}^{p_0} = 0$ } en una curva cerrada es cero.

Teorema de Green en el plano

Vincula integrales curvilíneas con integrales dobles.

Nota importante sobre las curvas:

Para "recorrer" la curva, se lo hace en sentido **antihorario**.

Esto significa que hay que poner los limites de acuerdo al giro que hacemos.

Condiciones:

M(x;y) y N(x;y) son campos escalares

$M_y' ; N_x'$ son continuas sobre los puntos de R y su contorno **(curva cerrada)**

Entonces:

$$\int_c M(x;y)\,dx + N(x;y)\,dy \; = \; \iint_R (N_x' - M_y')\,dxdy$$

Esto me facilita el calculo de integrales de curvas, siempre que se cumplan las condiciones.

Empleo de integral curvilínea para el cálculo de área plana

Si N(x;y) = x y M(x;y) = -y entonces

Área = $\frac{1}{2}\int_c x\,dy - y\,dx$

Teoría – Extendiendo lo anterior al espacio 3D

$$\vec{F}(x;y;z) = P(x;y;z)\breve{i} + Q(x;y;z)\breve{j} + R(x;y;z)\breve{k}$$

Si $F(x;y;z) = \vec{\nabla} f$ entonces $\vec{F}(x;y;z) = f_x'\breve{i} + f_y'\breve{j} + f_z'\breve{k}$

y entonces $\int_c \vec{F}\,d\vec{r} = \int_c f_x'\,dx + f_y'\,dy + f_z'\,dz$

Para que se verifique (y exista la función potencial) , se debe cumplir (todas a la vez)

$f_{xy}'' = f_{yx}''$ o lo que es lo mismo $P_y' = Q_x'$

$f_{xz}'' = f_{zx}''$ o lo que es lo mismo $P_z' = R_x'$

$f_{yz}'' = f_{zy}''$ o lo que es lo mismo $Q_z' = R_y'$

Si esto pasa, se cumple lo mismo que antes, el integral de la curva cerrada es cero (0) , y puedo trabajar calculando en los extremos con la función potencial.

Temas del segundo parcial

Teorema del rotor o de Strokes

$$\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = \iint_S rot\, \vec{f}\, \breve{n}\, ds$$

$$\vec{F}(x;y;z) = P(x;y;z)\,\breve{i} + Q(x;y;z)\,\breve{j} + R(x;y;z)\,\breve{k}$$