Análisis matemático
Resumen y notas de clases

Ultima modificación:18 de abril de 2004

Conjuntos numéricos:

Naturales (Z+, Z-): enteros + y -
Fraccionarios: ½, ¼, etc...
Racionales (Q) { p/q }
Los números periódicos son reales.
Irracionales: pi,e, etc, infinitas cifras decimales
Reales R, conjunto de todos los anteriores.
Imaginarios: R + i

O sea:
$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$$

Función

Definicion:
Una función es una relación entre dos variables numéricas, habitualmente las denominamos x e y, a una de ellas la llamamos variable dependiente pues depende de los valores de la otra para su valor, suele ser la y, a la otra por tanto se la denomina variable independiente y suele ser la x.

Pero además, para que una relación sea función, a cada valor de la variable independiente le corresponde uno o ningún valor de la variable dependiente, no le pueden corresponder dos o más valores.

Dominio e imagen:
Se llama dominio de definición de una función al conjunto de valores de la variable independiente x para los que existe la función, es decir, para los que hay un valor de la variable dependiente y.

Se llama imagen o recorrido de una función a todos los valores de la variable dependiente que tienen algún valor de la variable independiente que se transforma en él por la función.

Inyectiva
A cada elemento de la imagen, le corresponde uno o ningún elemento del dominio (1 o 0)

Suryectiva
A cada elemento de la imagen, le corresponde por lo menos un elemento del dominio.

Biyectiva
A cada elemento de la imagen, le corresponde uno y solo un elemento del dominio. Esto es condición necesaria y suficiente para que la función posea una función inversa.
"Al trazar rectas horizontales en el eje "y", estas tienen que cortar una sola vez el gráfico, de esa manera, la función es biyectiva"

Conjuntos de ceros, positividad y negatividad:
$$Ceros(f)=\{x\in Dom(f)/f(x)=0\}$$
$$Pos(f)=\{x\in Dom(f)/f(x)>0\}$$
$$Neg(f)=\{x\in Dom(f)/f(x)<0\}$$

Inversa
La función inversa se obtiene (gráficamente) reflejando respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Función lineal

x = abscisas
y = ordenadas
P(x,y) = punto

Forma explicita: **y = m.x + b**
m = pendiente, b = ordenada al origen
Dominio: R
Imagen: R (salvo que sea horizontal, en cuyo caso, img = {b})

Inversa: $f^{-1}(x)=\frac{1}{m}\cdot x-\frac{b}{m}$

Para **graficar**: b = ordenada al origen (punto en (0,b))
Luego, avanzo uno (1) a la derecha, y asciendo (+)/desciendo (-) la pendiente (m).
O, si la pendiente es fraccionaria, se mueve el divisor a la derecha, y asciendo(+)/desciendo (-)
O sea, si fuera y = 1/2x + 1; coloco un punto en (0,1) y muevo 2 derecha, 1 arriba.

Forma implícita: **Ax + Bx = C** (se despeja y, ej: 2x+y=3 => y = -2x+3)
Las rectas verticales son de la forma x = C

Segmentaría: $\frac{Ax}{-C}\cdot x+\frac{Bx}{-C}\cdot y=1$ donde A,B,C corresponden a la forma implícita.

Luego, $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1$ donde a = abscisa (x); b = ordenada (y)

$$Abscisa\,al\,origen:-\frac{C}{A}\quad Ordenada\,al\,origen:-\frac{C}{B}$$

Distancia entre 2 puntos: $d^2=(x1-x2)^2+(y1-y2)^2$

Haz de rectas que pasan por P(x0, y0) => **y-y0 = m(x-x0)**

Recta que pasa por dos puntos: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ se reemplaza (x1,y1)(x2,y2) por los puntos.

Rectas paralelas tienen **igual** pendiente.

Las rectas perpendiculares tienen pendiente inversa $m_1=\frac{1}{m_2}$

Nota: $tg\,\gamma=\frac{sen\,\gamma}{\cos\gamma}$

Simbolos de los cuadrantes

-	+
+	-

Función cuadrática

$y=ax^2+bx+c$ esta es una parábola; las parábolas son simétricas por el eje.

Parábola: lugar geométrico de los puntos del plano cuyas distancias a un punto fijo llamado foco y a una recta llamada directriz es constante.

Biyectiva: NO (no sin acotar)
Dominio: R
Imagen: varia según la función, por lo general, empieza o termina en el "y" del vértice.

Si "a" > 0 la parábola sube; si "a" < 0 baja; "a" también indica el "ancho" de la parábola ("a" mas chica ensancha la parábola, "a" mas grande, la hace mas angosta).

El vértice se saca: $x_v=\frac{-b}{2\cdot a}$ $y_v=\frac{-b^2+4\cdot a\cdot c}{4\cdot a}$ nota: x_v = eje de la función; además, si se saca "xv", reemplazando en la función, se obtiene "y" sin hacer la formula.

Intersección con eje y = +c

Intersección con eje x = **raíces** con $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$

$b^2-4\cdot a\cdot c$ es el "discriminante" que indica como son las raíces: si es "> 0", hay 2 raíces reales diferentes, "= 0" una única raíz, "< 0" dos raíces complejas conjugadas.

Expresada factoreada según sus raíces (x1, x2)
$f(x)=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$

Ecuación **canónica** o universal de la parábola: $f(x)=a(x-x_v)^2+y_v$ donde xv,yv es el vértice.

Para hallar el vértice de la parábola en la ecuación canónica, hay que completar cuadrados en la formula anterior; entonces el vértice queda en P(-h,-k) (observar el cambio de signo, por lo expresado en la formula!).

El vértice siempre esta en medio de las raíces.

Función cubica

$f(x)=(x-a)^3+b$ donde "a" desplaza a la derecha (x-a) o izquierda (x+a) y "b" desplaza arriba o abajo.

para $f(x)=x^3$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x)=x^3$

Ceros $\{0\}$ Positividad = $(0,+\infty)$ Negatividad $=(-\infty,0)$ Biyectiva : SI

Raiz cubica

$f(x)=\sqrt[3]{x-a}+b$ donde "a" desplaza a la derecha (x-a) o izquierda (x+a) y "b" desplaza arriba o abajo.

Es la inversa de la función cubica $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x)=\sqrt[3]{x}$
Dominio: R , Imagen: R, Biyectiva: SI

Raiz cuadrada

"Para lograr que la raíz cuadrada sea la inversa de la función cuadrática, hay que acotar el dominio e imagen, para que sea biyectiva, y de esa manera obtengo la inversa"

$f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \ / \ f(x)=x^2$ es la funcion cuadratica acotada.

Ahora, obtengo la inversa:

$f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \ / \ f(x)=\sqrt[2]{x}$

<u>Ejemplo:</u> $f(x)=\sqrt{x-2}+3$ dominio $=[2,+\infty)$ imagen $=[3,+\infty)$
Grafico desplazado 2 a la derecha, y 3 arriba.

Función homografica

$f: \mathbb{R}-\{\text{-a}\} \to \mathbb{R} \ / \ f(x)=\dfrac{n}{x-a}+b$ "n" es un numero, por ejemplo, 1; y donde "a" desplaza a la derecha (x-a) o izquierda (x+a) y "b" desplaza arriba o abajo.
No corta al eje X, ni al eje Y. Tiene dos asíntotas :vertical (-a) y horizontal (b).

Dominio: = $\mathbb{R}-\{-a\}$ Imagen: = $\mathbb{R}-b$

Modulo

$f(x)=|(x)|=\begin{cases} x \ \text{si} \ x \geq 0 \\ -x \ \text{si} \ x<0 \end{cases}$ No es biyectiva.

Función exponencial

$f(x)=k\cdot a^x$ donde $\{a\in\mathbb{R}/a>0\wedge a\neq 1\}$ - Notar que la incógnita es el exponente.
El dominio (valores de x) es los R; la imagen son los R+ (0, +inf)

Biyectiva: No es biyectiva (R->R); si se acota f:R->(0,+inf), si lo es (notar que se excluye el cero)
Al acotarse, y ser biyectiva, tiene función inversa.

Graficar:
$f(x)=n^{x-a}+b$ donde "a" desplaza a la derecha (x-a) o izquierda (x+a) y "b" desplaza arriba o abajo.

Función logarítmica

es la operación inversa de función exponencial.
$\mathrm{f}:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$
$\mathrm{f}(\mathrm{x})=\log_{\mathrm{a}}(\mathrm{x})$

Propiedades de los logaritmos:

$$y=a^x\rightarrow\log_a(y)=x$$
$$p=q\rightarrow\log_a p=\log_a q$$
$$\log(a\cdot b)=\log a+\log b$$
$$\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log a-\log b$$
$$\log a^b=b\cdot\log a$$
$$\log\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\log a$$
$$\log_a a^x=x$$

cambio de base: $\rightarrow\log_c a=\log_{10} a/\log_{10} c$

La base tiene que ser positiva y diferente de 1. De esa manera, $\log_{\mathrm{a}}(\mathrm{x})$ es la inversa de $\mathrm{y}=\mathrm{a}^{\mathrm{x}}$
El numero "x" tiene que ser > 0 (o sea, no 0 y no negativo).
En particular, si la base = 10, se llama logaritmo decimal.
Si la base es "e" (constante de Euler, 2,718281...), $\mathrm{y}=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\rightarrow\mathrm{y}=\log_{\mathrm{e}}(\mathrm{x})\rightarrow\ln(\mathrm{x})$ (logaritmo neperiano, o natural)

Ecuación logarítmica

$x^{\log x}=n$

Limite de una función en un punto

Calcular un limite consiste en acercarse a un determinado valor de x (al que llamaremos x_0), que puede pertenecer o no al dominio de la función,y observar que sucede con los valores de ordenada (y).
Si la sucesión de valores que obtengo al acercarme a dicho valor de x, converge a algún valor, diremos que el limite existe, caso contrario, el limite no existe.
Para que exista el limite, el limite al aproximarse por derecha a x_0 debe ser igual al limite al aproximarse por izquierda a x_0.
La función no tiene por que estar definida en x_0 para tener limite en ese punto ; incluso si esta definida, no tiene porque ser igual al limite.

Indeterminaciones: son indeterminaciones si hallamos, por ejemplo $\frac{0}{0}\ ;\frac{\infty}{\infty}\ ;\infty\pm\infty\ ;0\cdot\infty\ ;0^0\ ;\infty^0\ ;1^\infty$
Si se halla una indeterminación, se debe tratar de eliminarla (usando factoreo, conjugadas,etc)

Continuidad

Diremos que la función f(x) es continua en x_0 si se verifica:

1) $\exists f(x_0)\in\mathbb{R}$ o sea, x_0 pertenece al dominio de la función.

2) $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)=L \in \mathbb{R}$ (existe el limite en x_0 y es un numero real)

3) $f(x_0) = L$ (el valor del limite en es igual a la función en x_0)

- Si falla 1 o 3, la discontinuidad es **evitable**.
- Si falla 2, la discontinuidad es **esencial**.

Nota: “si necesito levantar el lápiz para graficar la función, es discontinua”

Asíntotas

Una asíntota es una recta a la cual se acerca indefinidamente una rama de la curva y=f(x) cuando nos alejamos del origen.

Asíntota horizontal

Si $\lim_{x\to\infty} f(x)=L \quad L\in\mathbb{R}$ (el limite es un numero) Entonces, la recta y=L es asíntota horizontal.

Asíntota vertical

Si $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$ o si $\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty$ entonces x=a es asíntota vertical.
“a” se toma de los números que “faltan” del dominio (que son los mas probables de ser a. vertical.).

Asíntota oblicua

Si se cumple:
$\lim_{x\to\infty} f\frac{(x)}{x}=m \quad (m\in\mathbb{R} \wedge m\neq 0)$ y $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-m\cdot x=b\} \quad (b\in\mathbb{R})$ entonces, $y=m\cdot x+b$ es una asíntota oblicua.

Nota: si existe asíntota horizontal para un cierto lado (+ o -), para ese lado ya no hay asíntota oblicua. (si la asíntota horizontal va para los dos lados, no hay asíntota oblicua del todo).

Nota: En cuanto a asíntotas verticales, pueden haber muchas.

Derivadas

Tip: es mas fácil pasar 1/x a x^(-1) p/ej, para derivar.

Derivada en un punto x_0 $$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=numero$$

Derivada de la función $$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=expresion$$

Recta tangente a una curva

La recta que pasa por (x_0, y_0) => $y - y_0 = (x-x_0)m$
Busco la tangente: $y-f(x_0)=m(x-x_0)$
no conozco m, la averiguo (es la derivada de la función en el punto x_0):
$$m=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=numero$$
y así, resulta que la ecuación de la recta tangente es:
$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Sirve además para aproximar valores en una ecuación.

Definición geométrica

$f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva f = f(x) trazada por el punto de coordenadas (x_0,$f(x_0)$)

Recta Normal

Es la perpendicular (90g) a la recta tangente ; su ecuación es: $y=\left(\frac{-1}{f'(x_0)}\right)(x-x_0)+f(x_0)$

Nota: NO siempre el punto es derivable; o sea, no siempre existe $f'(x_0)$; esto pasa cuando no hay limite, o cuando el limite es infinito. Cuando esto pasa, decimos que f no es derivable en x_0 y que no tiene recta tangente en el punto (x_0, $f(x_0)$).

Propiedad: Si existe $f'(x_0)$ => f es continua en x_0 ; cuidado, al reves puede no cumplirse!

Composición de funciones

Ejemplo:
$$f(x)=x^2;g(x)=x-2$$
$$gof(x)=g[f(x)]=f(x)-2=x^2-2$$
$$fog(x)=f[g(x)]=[g(x)]^2=(x-2)^2$$

Regla de la cadena
Sirve para derivar composiciones.
Se obtiene derivando de afuera hacia adentro; o sea, se elije el mas externo y se lo multiplica por la derivada del interno, hasta que se para donde se acaban las composiciones; básicamente, se va sacando y derivando el interior hasta que termina.
Así: $[g(f(x))]'=g'[f(x)]\cdot f'(x)$

Ejemplos:

$$f(x)=(x^2+5x)^2$$
$$f(x)'=2(x^2+5x)\cdot(2x+5)$$
$$f(x)'=(2x^2+10x)\cdot(2x+5)$$
$$f(x)'=4x^3+10x^2+20x^2+50x$$
$$f(x)'=4x^3+30x^2+50x$$

$$y=sen[(x^2+5x)^2]$$
$$y'=cos[(x^2+5x)^2]\cdot[(x^2+5x)^2]'$$
$$y'=cos(x^2+5x)^2\cdot 2(x^2+5x)\cdot(x^2+5x)'$$
$$y'=cos(x^2+5x)^2\cdot 2(x^2+5x)\cdot 2x+5$$

Derivadas logarítmicas

Caso típico: $y=x^{x}$

Lo transformo en un producto usando logaritmo natural (ln).

$\ln(y)=\ln(x^{x})$ por prop. logaritmos : $\ln(a^{b})=b\cdot\ln(a)$

$\ln(y)=x\cdot\ln(x)$ ahora derivo ambos miembros recordando que y = y(x)

$\frac{1}{y}\cdot y'=x'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'$

$y'=y\cdot(1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x})$

$y'=y\cdot(\ln x+1)$ recordamos que $y=x^{x}$ y lo reemplazamos de nuevo

$y'=x^{x}\cdot(\ln x+1)=(x^{x})'$ listo

Ejemplo #2:

$y=(1+\cos x)^{x}$

$\ln y=\ln([1+\cos x]^{x})$

$\ln y=x\cdot\ln(1+\cos x)$ a partir de aca, regla de cadena

$\frac{1}{y}\cdot y'=x'\cdot\ln(1+\cos x)+x\cdot(\ln(1+\cos x))'$

$y'=y\cdot 1\cdot\ln(1+\cos x)+x\cdot\frac{1}{1+\cos x}\cdot(1+\cos x)'$

$y'=(1+\cos x)^{x}\cdot[\ln(1+\cos x)+\frac{x}{1+\cos x}\cdot(-\operatorname{sen} x)]$

$y'=(1+\cos x)^{x}\cdot[\ln(1+\cos x)-\frac{x\operatorname{sen} x}{1+\cos x}]$

Aproximar mediante la recta tangente el valor de una función

- Incremento de x $\Delta x=x-x_0 \rightarrow x=x_0+\Delta x$
- Incremento de f $\Delta f=f(x)-f(x_0) \rightarrow \Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$
- Recta tangente $y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$

Ejemplo:

$f(x)=5-x^{2}$

$\Delta f=(5-(x_0+\Delta x)^{2})-(5-(x_0)^{2})$

$\Delta f=5-(x_0)^{2}-2x_0\Delta x-(\Delta x)^{2}-5+(x_0)^{2}$

$\Delta f=-2x_0\Delta x-(\Delta x)^{2}$

y p/ej: si $x_0=1$ y $\Delta x=-0.2 \rightarrow \Delta f=-2\cdot 1\cdot(-0.2)-(-0.2)^{2}=0.36$

Atención a esto: (es lo mismo que lo anterior, es decir, la recta tangente aproxima el valor de la función).

$f(x_0+\Delta x)\approx= f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

entonces, reemplazo $x-x_o$

$f(x_0+\Delta x)\approx= f'(x_0)\Delta x+f(x_0)$

Esto sirve, para teniendo una función, mediante su recta tangente poder aproximar su valor.
Ejemplo:

$x_0=1$ y $\Delta x=0{,}2 \,\text{en}\, f(x)=5-x^{2}$

$f'(x)=-2x \rightarrow f'(1)=-2$

$t(x)=-2(x-1)+4=-2\Delta x+4$ reemplaze x-1 por Δx por que $x-x_0=\Delta x$

$f(1-0{,}2)=f(0{,}8)\sim= t(0{,}8)=-2(-0{,}2)+4=4{,}4$ valor aproximado

Diferencial de f

El diferencial de f en x_0, para un incremento $\Delta x = x - x_0$ es $df(x_0, \Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x$
El diferencial es el incremento de la recta tangente cuando se pasa de $x_0 a x_0 + \Delta x$

Comentario: para que la aproximación sea valida, se requiere que x_0 sea un valor chico, y la función debe ser continua y derivable entre x_0 y $x_0 + \Delta x$
O sea, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta x} = 0$

Polinomio de Taylor

Factorial de un numero $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$; por convención, 0! = 1.

Definición: si f(x) puede derivarse n veces en x_0 que es un punto de su dominio, entonces, el polinomio de Taylor de orden n alrededor de x_0 es:

$$Pn(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \cdot f'(x_0)(x - x_0)^1 + \frac{1}{2!} \cdot f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot f^{(\text{derivada n veces})}(x_0)(x - x_0)^n$$

(atención, el 1ero es **sin** derivar)

Nota: por lo general, cuantos mas términos se tomen, mas se aproximara a la función real.

Nota: Si x_0=0, el polinomio de Taylor se lo conoce como polinomio de McLaurin

Teorema de Rolle

Si f(x) es una función que cumple:
- Es continua en el intervalo [a,b]
- Es derivable en el intervalo (a,b)
- f(a) = f(b)

Entonces existe $c \in (a, b) / f'(c) = 0$, o sea, hay lugar(es) donde la recta tangente es horizontal ; lo que no dice es como encontrar "c".
Este teorema es útil, p/ej, para obtener máximos y mínimos de una función.
La forma sencilla de obtener c, es igualar la derivada de la función a cero.

Teorema de Lagrange o del valor medio

Generalización del teorema de Rolle.
Si f(x) es una función que cumple:
- Es continua en el intervalo [a,b]
- Es derivable en el intervalo (a,b)

Entonces, existe $c \in (a, b) \ / \ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ o $f(b) - f(a) = f'(c) - (b - a)$, o sea, encuentro una recta tangente en c que es paralela a la secante (la recta que une a y b)

"Si f(x) es continua en [a,b], derivable en (a,b), y además, $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b)$ entonces, f es una función constante.

Regla de L'Hopital

Sirve para calcular limites usando derivadas cuando hay indeterminación.

Primer caso, **indeterminación de tipo** $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$.

Si $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ entonces, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, es decir, el limite de las derivadas es el limite.
"a" y "L" pueden ser infinito, no necesariamente un numero.
Si no existe el limite de las derivadas, el limite original igual puede existir ; o sea, esto solo sirve si hay indeterminación.

Nota: si me queda una indeterminación nuevamente, puedo volver a aplicar L'Hopital de nuevo.

Si me queda otro tipo de indeterminación, p/ej $\infty - \infty, 0 \cdot \infty$, debo tratar de llevarlo a la forma del primer caso, y aplico L'Hopital.

Máximos y mínimos (también conocidos como **extremos**)

Basados en el teorema de Lagrange.
F(x) es **creciente** si para $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
F(x) es **decreciente** si $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
Si es constante es creciente y decreciente a la vez.
Si se pone < y > en vez de <= o >=, se dice "estrictamente creciente/decreciente".

Propiedades

Si f(x) es continua y derivable en (a,b) y si f '(x) > 0 en (a,b) => f(x) es estrictamente creciente en (a,b).
Lo mismo ocurre a la inversa (f '(x) < 0 => estrictamente decreciente).
Si f '(x) = 0 para todo (a,b) => f es constante en ese intervalo (a,b).

Máximos y mínimos relativos

- La función f(x) tiene un máximo relativo en $x_0 \in Dom(f)$ si hay un intervalo (a,b) que contiene a x_0 y si $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in (a,b) \cap Dom(f)$
- La función f(x) tiene mínimo relativo en $x_0 \in Dom(f)$ si hay un intervalo (a,b) que contiene a x_0 y si $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in (a,b) \cap Dom(f)$

La intersección con el dominio significa que x esta en el dominio y el intervalo.

Máximos y mínimos absolutos

- La función f(x) tiene un máximo absoluto en $x_0 \in Dom(f)$ si $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in Dom(f)$
- La función f(x) tiene un mínimo absoluto en $x_0 \in Dom(f)$ si $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in Dom(f)$

Teorema de Format

Si f(x) tiene un extremo relativo en x_0 y f(x) es derivable en x_0 => f ' (x_0) = 0

Definición

El punto $x_0 \in \mathrm{Dom}\, f$ se llama un "punto critico" si f ' (x_0) = 0 o si no se puede derivar en ese punto.
Este punto es candidato para luego buscar máximos y mínimos (extremos) de la función.

Criterio

Si $x_0 \in (a, b) \subset \mathrm{Dom}\, f$ y x_0 es un punto critico de f y además f ' (x) es < 0 entre (a, x_0) y f '(x) > 0 en (x_0, b), entonces hay un mínimo relativo en x_0.
(o sea, la función primero baja, y luego vuelve a subir a partir de x_0).

En cambio, si f ' (x) es > 0 entre (a, x_0) y f '(x) < 0 en (x_0, b), entonces hay un máximo relativo en x_0.
(o sea, la función primero sube, y baja luego de x_0).

Definición

- Si $f^{II} > 0$ en un intervalo diremos que f es cóncava hacia arriba.
- Si $f^{II} < 0$ en un intervalo diremos que f es cóncava hacia abajo.

Observación

Si en un intervalo I
- Si $f^{II} > 0$ el gráfico esta arriba de la recta tangente
- Si $f^{II} < 0$ el gráfico esta abajo de la recta tangente

Criterio de la derivada segunda

- Si $f^{I}(x_0) = 0$ y $f^{II}(x_0) > 0$ => hay un mínimo relativo en x_0
- Si $f^{I}(x_0) = 0$ y $f^{II}(x_0) < 0$ => hay un máximo relativo en x_0
- Si $f^{I}(x_0) = 0$ y $f^{II}(x_0) = 0$ => se usa el otro criterio.

Si $f^{II}(x_0) = 0$ y si F^{II} cambia de signo a uno y otro lado de x_0, decimos que hay un punto de inflexión en x_0.

Derivadas

1) $(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$

2) $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$

3) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Tabla de derivadas

$k' = 0$	$\operatorname{sen} x' = \cos x$
$x' = 1$	$\cos x' = -\operatorname{sen} x$
$x^{n}{}' = n x^{n-1}$	$\tan x' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
$e^{x}{}' = e^x$	$\operatorname{arcsen} x' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$a^{x}{}' = a^x \cdot \ln a$	$\arctan x' = \frac{1}{x^2+1}$
$\ln x' = \frac{1}{x}$	$\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\log_a x' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$u \cdot v \cdot w' = u'vw + uv'w + uvw'$