Algebra 1
Breves notas de clases

Ultima modificación:8 de julio de 2004

Repasar: unidad imaginaria, números complejos, propiedades de la potenciación, y logaritmos.
(Esta en otro apunte, numeros_complejos.pdf)

Números complejos:

Propiedades de la adición

- Interna o de cierre
  $\forall z_1 ; \forall z_2 \in \mathbb{C} \ : \ z_1 + z_2 = z_3 \ ; \ z_3 \in \mathbb{C}$
- Commutativa
  $\forall z_1 ; \forall z_2 \in \mathbb{C} \ : \ z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- Asociativa
  $\forall z_1 ; \forall z_2 ; \forall z_3 \in \mathbb{C} \ : \ (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
- Elemento neutro
  $\exists z = 0 + 0i \ \in \mathbb{C} \ / \ \forall z_1 \in \mathbb{C} \ : \ z + z_1 = z_1$
- Existencia elemento opuesto o simétrico
  $\exists \ z = -z_1 \ / \forall z_1 \in \mathbb{C} \ : \ z + z_1 = (0,0)$

"Por cumplir el conjunto de los números complejos con la adición, estas cinco propiedades, se denomina **Grupo conmutativo** o **Abeliano** (C,+)"
(Cualquier conjunto que cumpla estas propiedades se llama así"

Propiedades de un escalar por un numero complejo.

- Ley externa
  $\forall k \in \mathbb{R} ; \forall z \in \mathbb{C} \ : \ k \cdot z = z_1 \ ; \ z_1 \in \mathbb{C}$
- Distributividad con respecto a la suma de números complejos
  $\forall k \in \mathbb{R} ; \forall z_1 \in \mathbb{C} ; \forall z_2 \in \mathbb{C} \ : \ k \cdot (z_1 + z_2) = k \cdot z_1 + k \cdot z_2$
- Distributividad con respecto a la suma de escalares
  $\forall k_{1,} k_2 \in \mathbb{R} ; \forall z \in \mathbb{C} \ : \ (k_1 + k_2) \cdot z \ = \ k_1 \cdot z + k_2 \cdot z$
- Asociatividad mixta o combinada
  $\forall k_{1,} k_2 \in \mathbb{R} ; \forall z \in \mathbb{C} \ : \ (k_1 \cdot k_2) \cdot z \ = \ k_1 \cdot (k_2 \cdot z)$
- Elemento neutro
  $\text{exist}\, 1 \in R / \forall z \in \mathbb{C} \ : \ 1 \cdot z = z$

"Por ser el conjunto de los números complejos con la suma, grupo Abeliano, y además, el producto de un escalar por un complejo cumplir con las cinco propiedades anteriores, se dice que (C,+,R,*) tiene estructura de **espacio vectorial**"
O sea, para tener estructura de espacio vectorial , tiene que cumplir las diez (10) condiciones anteriores a la vez.

Sistemas de ecuaciones lineales

- Cuando hay una única solución, se llama “sistema compatible determinado”
- Cuando hay infinitas soluciones, es “sistema compatible indeterminado”
- Cuando no hay solución, es “indeterminado”

Determinantes

Regla de Sarrus

Se coloca todo en un determinante, , y se restan los productos de las diagonales:
ejemplo de orden 3:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = ((a_1 \cdot b_2 \cdot c_3) + (b_1 \cdot c_2 \cdot a_3) + (c_1 \cdot a_2 \cdot b_3)) - ((a_3 \cdot b_2 \cdot c_1) + (b_3 \cdot c_2 \cdot a_1) + (c_3 \cdot a_2 \cdot b_1))$$

Regla de Cramer

Se usa para resolver sistemas de n*n (cuadrados) (tiene la misma cantidad de ecuaciones que de incógnitas!) y el determinante general del sistema debe ser diferente de cero (0).

$$x = \frac{\Delta \cdot x}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta \cdot y}{\Delta} \quad z = \frac{\Delta \cdot z}{\Delta}$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x - 3y + 2z = 8 \\ x - 2y - z = -5 \\ 6x - y + 3z = 2 \end{array} \right\}$$

Se sacan el determinante, con la regla de Sarrus

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 35$$

Coloco la columna de resultados en la columna correspondiente a X, y resuelvo el determinante

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 8 & -3 & 2 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -77 \rightarrow x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-11}{5} \text{ valor de X}$$

Coloco la columna de resultados en la columna correspondiente a Y, y resuelvo el determinante

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 1 & -5 & -1 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -34 \rightarrow z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-34}{35} \text{ valor de Y}$$

Coloco la columna de resultados en la columna correspondiente a Z, y resuelvo el determinante

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 1 & -2 & -5 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 166 \rightarrow z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{166}{35} \text{ valor de Z}$$

Y así, se obtuvieron los valores de X,Y,Z

Sistemas escalonados

Cuando se tiene un sistema escalonado, por ejemplo:

$$\begin{cases} x+z+2t=3 \\ z+t=0 \\ 2t=4 \end{cases}$$ su resolución es sencilla: $$\begin{gathered} 2t=4 \to t=2 \\ z+2=0 \to z=-2 \\ x-2+4=3 \to x=1 \end{gathered}$$

sist. comp. determinado

Método de triangulación de Gauss

Cuando el sistema no es escalonado, se puede reducir a un sistema escalonado equivalente, mediante las siguientes operaciones elementales entre filas:

- Intercambiar la posición de dos ecuaciones
- Multiplicar una ecuación por un numero diferente de cero (<> 0)
- Reemplazar una ecuación por la suma de esta con otra multiplicada por un numero diferente de cero.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x-y=5 \\ y-z=-4 \\ z+x=3 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \_ & x & y & z & t \\ f1 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ f2 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ f3 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$ así ordeno primeramente las ecuaciones.

Ahora, hago -1*f1+f3 y la coloco en f3

$$\begin{vmatrix} \_ & x & y & z & t \\ f1 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ f2 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ f3 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Nuevamente, hago, -1*f2 + f3 y lo coloco en f3

$$\begin{vmatrix} \_ & x & y & z & t \\ f1 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ f2 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ f3 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Hago esto porque la idea es que quede un “triángulo” de ceros inferior izquierdo.
Una vez que tengo el “triángulo” de ceros, puedo resolver como un sistema escalonado.

$$\begin{gathered} \begin{cases} x-y=5 \\ y-z=-4 \\ 2z=2 \end{cases} \\ z=1 \\ x-(-3)=5 \to x=2 \\ y-1=4 \to y=-3 \end{gathered}$$ Y así, el sistema queda resuelto.

Transformaciones Bidimensionales

Dado un punto "p" perpendicular a "pi", se denomina transformación del plano en si mismo, a una ley que a cada punto P correspondiente a "pi", le hace corresponder un punto P' del mismo plano.
P' se llama transformado de P, y se lo simboliza P' = T(P)

Las transformaciones que vamos a estudiar se llaman:

- Traslacion: a cada punto P(x,y) , lo queremos transformar en P'(x',y'), vamos a desplazar X e X
- Rotacion: buscamos una rotación entre (x,y) y (x',y')
- Escalamiento: agrandamos/achicamos la figura

Conicas

Circunferencia lugar geométrico de los puntos del plano situados a una distancia fija r "radio" de un punto C(h,k) "centro".

Elementos: r = radio, (h,k) = centro

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Elipse lugar geométrico de los puntos P(x,y) del plano tales que la suma de las distancias de P a dos puntos fijos F_1 y F_2 llamados **focos** es una constante **k**

Semieje mayor = a
Semieje menor = b
Centro
Si el mayor divisor divide a la x, el elipse es horizontal (mas ancho), sino, es vertical (mas alto).

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Hiperbola es el lugar geométrico de los puntos P(x,y) del plano tales que la diferencia de las distancias de P a dos puntos fijos F1 y F2 (llamados focos) es una constante K. (igual que la elipse, pero con asíntotas.)

La hipérbola presenta asíntotas
Si x es +, las ramas se apoyan en el eje x, sino, en el eje y.
SIEMPRE, si x es +, y es – y viceversa.
Elementos: semieje real = a, semieje imaginario = b, centro(h,k)

$$\frac{+(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \text{o} \quad \frac{-(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Parabola lugar geométrico de todos los puntos P(x,y) del plano que equidistan de un punto fijo F llamado foco y de una recta fija L llamada directriz, esta directriz es paralela a uno de los ejes.

$$(x-h)^2=2\cdot p\cdot(y-k) \quad \text{o} \quad (y-k)^2=2\cdot p\cdot(x-h)$$

Transformaciones lineales

Sean (V;+;k;*) y (W,+,k,*) dos espacios vectoriales

Las transformaciones lineales son funciones
La función T:V->W es transformación lineal si y solo si:
1) La imagen de la suma de dos vectores cualesquiera de V es igual a la suma de sus imágenes en W. $T(\vec{u}+\vec{v})=T(\vec{u})+T(\vec{v})$
2) La imagen del producto de un escalar por un vector de V es igual al producto del escalar por la imagen de dicho vector. $T(\alpha\cdot\vec{u})=\alpha\cdot T(\vec{u})$

Método para completar cuadrados

Por ejemplo, es ir de x^2-4x+4 a $(x-2)^2$
Se hace de la siguiente manera:
$x^2+6x \Rightarrow x^2+6x+9-9 \Rightarrow (x+3)^2-9 \quad \text{listo!}$
Lo que se hizo fue, dividir a 6 (de 6x) sobre 2 y luego elevarlo al cuadrado (6/2 = 3 ; 3^2 = 9); ese termino 9 se suma y se resta al final (de hay x^2+6x + 9 – 9), y luego se “comprime” al cuadrado del binomio.
Este método requiere que x^2 tenga como coeficiente 1 (1.x^2)

Ejemplo con un coeficiente <> 1 en x^2:
$2\cdot x^2+4x$ (tome factor común 2) => $2(x^2+2x)$
ahora, divido el 2 de +2x por 2 y lo elevo al cuadrado $(\frac{2}{2})^2=1$
ahora queda: $2(x^2+2x+1-1)$
“comprimo el cuadrado del binomio” y distribuyo el 2 de afuera del parentesis.
$2((x+1)^2-1) \Rightarrow 2(x+1)^2-2$ y listo.