MATEMÁTICO I

Recopilación del concepto de número.

- Los números naturales (N)
- Construcción a partir de N de los números enteros (Z)
- Construcción a partir de Z de los números racionales (Q)
- *Construcción a partir de Q de los números reales (R)*
- Construcción a partir de R de los números complejos (C)
- Topología de R
- *Sucesiones y series de números reales*

Los números naturales N={0, 1, 2, 3, 4,.....}

Los suponemos bien conocidos. Sirven para contar y ordenar conjuntos finitos. En la función de contar está su origen.

Sea f la colección de todos los conjuntos finitos (con finitos elementos), podemos decir que A, B $\in f$ son equivalentes cuando se puede establecer una biyección (correspondencia uno a uno) entre ambos.

Esto es una relación de equivalencia en f, es decir, es una relación:

-Reflexiva: $\forall$ A $\in f$ A ~ A (A equivalente A)
-Simétrica: A, B $\in f$, A ~ B $\Rightarrow$ B ~ A
-Transitiva: A, B, C $\in f$, A ~ B , B ~ C $\Rightarrow$ A ~ C

Como eso es una relación de equivalencia induce en f una clasificación.

Una clasificación de f es una colección de subconjuntos de f disjuntos dos a dos y cuya unión es todo f, es decir una colección de subconjuntos tales que todo elemento está en uno y sólo en uno.

¿Cuáles son las clases que induce la relación ~?

Cada clase está formada por un conjunto finito y todos los que son equivalentes a él.

Al conjunto de clases se le suele denotar f / ~ (conjunto cociente o de clases de f respec-to a la relación ~)

Así que una clase es la formada por todos los conjuntos con un elemento. Otra clase es la formada por dos elementos. Otra clase es la formada por tres elementos. Etc.

Bien podemos decir que $\boldsymbol{f / \sim = \mathbf{N}}$

Un número natural es lo que tienen en común todos los conjuntos equivalentes a éste.

Sea A un conjunto finito. A la clase a la que pertenece A se le suele denotar cardinal de A (card. A).

El concepto de número natural no tiene nada que ver con el nombre que se den a ese número (uno, dos, tres,.....) (one, two, three,.....) ni con la forma con la que se representan (1, 2, 3,...) (I, II, III, IV,.....).

Decíamos que no sólo conocíamos los números naturales N sino también la estructura algebraica – topológica (N, +, ·, <) (algebraica por las operaciones + y ·, topológica por la relación <)

Diremos que conocemos la adición, la multiplicación y el orden en los números N. Es decir, sabemos que esas "cosas" tienen las siguientes propiedades básicas de las que se derivan otras.

Adición: A1. Asociativa $\forall$ a, b, c $\in$ N $(a + b) + c = a + (b +c)$
A2. Conmutativa $\forall$ a, b $\in$ N $a + b = b + a$
A3. Elemento neutro $\forall$ a $\in$ N $a + 0 = a$

Multiplicación: M1. Asociativa $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
M2. Conmutativa $a \cdot b = b \cdot a$
M3. Elemento unidad $a \cdot 1 = a$

Adición / multiplicación: AM. Distributiva $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Ser menor que: O1. Transitiva $a < b , b < c \Rightarrow a < c$
O2. Antisimétrica $a < b , b < a \Rightarrow a = b$
O3. Es total $\forall$ a, b $\in$ N $a \neq b \Rightarrow a < b$ ó $b < a$

Orden / adición: OA. Compatibilidad del orden / adición $a < b \;\; a +c < b + c \; (c \in N)$

Orden / multiplicación: OM. Compatibilidad del orden / multiplicación $a < b, 0 < c \Rightarrow ac < bc$

No hemos dicho:

- Existencia de opuesto para la adición
- Existencia de inverso para la multiplicación
- Y otras referentes al orden.

Haremos una primera extensión de número que nos dará el opuesto. Una segunda nos dará el inverso. Y una tercera nos dará lo no citado ahora del orden.

Sean A y B conjuntos finitos de elementos ($A \cap B \neq \emptyset$). Cardinal A y cardinal B son dos números naturales (son la clase a la que pertenece A y la clase a la que pertenece B).

Pues bien, card. A + card. B = card. (A U B), de aquí sale la suma o adición.

El concepto de multiplicación sale de: card. A · card. B = card. (A x B) (A x B es el producto cartesiano de A y B, es decir, el conjunto formado por los pares ordenados (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$).

Construcción de los números enteros (Z) a partir de los N

Se trata de construirlos formalmente, pero firmemente anclada la construcción en los problemas de la vida diaria que exigen la existencia de estos nuevos números.

Supongamos que tenemos el siguiente estado de cuenta:

Haber	Debe
7	4
9	23
25	1

Los números naturales sirven para escribir el haber y el debe, pero no alcanzan a escribir el haber menos el debe, sólo cuando el deber es menor o igual al haber. Entonces a partir de $(N, +, \cdot, <)$ creamos una nueva herramienta para expresar el saldo, sin perder nada (sólo ganar).

Consideramos el conjunto N x N de pares ordenados de números naturales.

Definimos en N x N la relación:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

Queríamos decir $a - b = c - d$, pero no podemos decir esto porque no siempre se puede restar en N, así que lo que decimos es aquella que es equivalente.

Con lo que sabemos de N vemos inmediatamente que eso es una relación de equivalencia en N x N: es reflexiva $\forall (a, b) \in N \times N \; (a, b) \sim (a, b)$ porque $a + b = b + a$; es simétrica $(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$ porque $c + d = b + c \Rightarrow c + b = d + a$; y es transitiva $(a, b) \sim (c, d)$, $(c, d) \sim (e, f) \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$ porque $a + d = b + c$, $c + f = d + e \Rightarrow a + d + c + f = b + c + d + e \Rightarrow a + f = b + e$

Por tanto ~ induce una clasificación, por definición el conjunto de números enteros:

$$\mathbf{Z = N \times N / \sim}$$

Un número entero es lo que tienen en común todos los balances con el mismo saldo (tienen en común el saldo):

$$[(0, 4)] = [(2, 6)] = [(1, 5)] = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Vamos a ver que podemos dotar a Z de una estructura algebraica – topológica análoga a la que tenía N pero con una propiedad importante más, la estructura anterior además se sumergirá en ésta. Es decir, ocurrirá que hay una aplicación inyectiva de N en Z que:

- $i: a \in N \rightarrow [(a, b)] \in Z$ tal que:

  - $i(a + b) = i(a) + i(b)$
  - $i(a \cdot b) = i(a) \cdot i(b)$ Da lo mismo primero sumar y luego sumergir que al revés
  - $i(a < b) = i(a) < i(b)$

Definición de adición, multiplicación y orden en Z:

$[(a, b)] + [(c, d)] = [(a + c, b + d)]$
$[(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(ac + bd, ad + bc)]$ [el "truco" $(a - b)(c - d) = ac + bd - (ad + bc)$]
$[(a, b)] < [(c, d)] :\Leftrightarrow a + d < b + c$

Lo primero que hay que ver es que esas definiciones no dependen de los representantes utilizados para darlas. Es decir que:

$$\left.\begin{array}{l}(a, b) \sim (a', b') \\ (c, d) \sim (c', d')\end{array}\right| \Rightarrow (a + c, b + d) \sim (a' + c', b' + d')$$

Y esto es cierto porque:

$$\left.\begin{array}{l}- \quad a + b' = b + a' \\ - \quad c + d' = d + c'\end{array}\right| \Rightarrow a + c + b' + d' = b + d + a' + c'$$

Para el caso de la multiplicación:

$$\left.\begin{array}{l}(a, b) \sim (a', b') \\ (c, d) \sim (c', d')\end{array}\right| \Rightarrow (ac + bd, ad + bc) \sim (a'c' + b'd', a'd' + b'c')$$

Y esto es porque:

$$\left.\begin{array}{l}- \quad a - b = a' - b' \\ - \quad c - d = c' - d'\end{array}\right| \Rightarrow ac - ad - bc + bd = a'c' - a'd' - b'c' + b'd' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ac + bd + a'd' + b'c' = a'c' + b'd' + ad + bc$$

Para el orden:

$$\left.\begin{array}{l}(a, b) < (a', b') \\ (c, d) < (c', d')\end{array}\right| \Rightarrow a + b' + c + d' < b + a' + d + c'$$

Esto es porque:

$$\left.\begin{array}{l}a + b' < b + a' \\ c + d' < d + c'\end{array}\right| \Rightarrow a + c + b' + d' < b + d + a' + c'$$

Lo segundo que estas definiciones extienden a las de N, es decir, aquello que antes escribíamos i $(a + b) = i(a) + i(b)$ donde $i: a \in N \rightarrow [(a, 0)] \in Z$

En efecto $\forall a, b \in N$ $i(a + b) = [(a + b, 0)]$

- $i(a) = [(a, 0)]$
- $i(b) = [(b, 0)]$

$i(a \cdot b) = [(ab, 0)]$
$i(a) = [(a, 0)]$
$i(b) = [(b, 0)]$

$i(a < b) = a < b$
$i(a) = [(a, 0)]$
$i(b) = [(b, 0)]$

Lo tercero, es ver las propiedades $+, \cdot, <$ y ver que tenemos las siguientes propiedades:

- La adición en Z es asociativa: $[(a, b)] + \{[(c, d)] + [(e, f)]\} \Rightarrow [(a, b)] + [(c + e, d + f)] \Rightarrow$
$\Rightarrow [(a + (c + e), b + (d + f))] \Rightarrow [((a + c) + e, (b + d) + f)] \Rightarrow$
$\Rightarrow [(a + c, b + d)] + [(e, f)] \Rightarrow \{[(a, b)] + [(c, d)]\} + [(e, f)]$

- La adición en Z es conmutativa: $[(a, b)] + [(c, d)] \Rightarrow [(a + c, b + d)] \Rightarrow [(c + a, d + b)] \Rightarrow$
$\Rightarrow [(c, d)] + [(a, b)]$

- La adición en Z tiene elemento neutro: $[(a, b)] + [(0, 0)] \Rightarrow [(a, b)]$

- La multiplicación en Z es asociativa: $[(a, b)] \cdot \{[(c, d)] \cdot [(e, f)]\} \Rightarrow [(a, b)] \cdot [(ce + df, cf + de)]$
$\Rightarrow [(ace + adf + bcf + bde, acf + ade + bce + bdf)] \Rightarrow$
$\Rightarrow [((ac + bd) e + (ad + bc) f, (ad + bc) e + (ac + bd) f))]$
$\Rightarrow [(ac + bd, ad + bc)] \cdot [(e, f)] \Rightarrow$
$\Rightarrow \{[(a, b)] \cdot [(c, d)]\} \cdot [(e, f)]$

- La multiplicación en Z es conmutativa: $[(a, b)] \cdot [(c, d)] \Rightarrow [(ac + bd, ad + bc)] \Rightarrow$
$\Rightarrow [(ca + db, da + cb)] \Rightarrow [(c, d)] + [(a, b)]$

- La multiplicación en Z tiene elemento unidad: $[(a, b)] \cdot [(1, 0)] \Rightarrow [(a, b)]$

- Los números Z tienen la propiedad distributiva: $[(a, b)] \cdot \{[(c, d)] + [(e, f)]\} \Rightarrow$
$\Rightarrow [(a, b)] [(c + e, d + f)] \Rightarrow$
$\Rightarrow [(ac + ae + bd + bf, ad + af + bc + be)]$
$\Rightarrow [(ac + bd, ad + bc)] + [(ae + bf, af + be)]$
$\Rightarrow [(a, b)] \cdot [(c, d)] + [(a, b)] \cdot [(e, f)]$

- Transitiva: $[(a, b)] < [(c, d)]$, $[(c, d)] < [(e, f)] \Rightarrow a + d < b + c$, $c + f < d + e \Rightarrow$
$\Rightarrow a + d + c + f < b + c + d + e \Rightarrow a + f < b + e \Rightarrow [(a, b)] < [(e, f)]$

- Antisimétrica: $[(a, b)] < [(c, d)]$, $[(c, d)] < [(a, b)] \Rightarrow a + d < b + c$, $c + b < d + a \Rightarrow$
$\Rightarrow [(a, b)] = [(c, d)]$

- Es Total : $[(a, b)] \neq [(c, d)] \Rightarrow a + d \neq b + c \Rightarrow$ ó $a + d < b + c$ ó $b + c < a + d \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ó $[(a, b)] < [(c, d)]$ ó $[(c, d)] < [(a, b)]$

- Orden / adición: $[(a, b)] < [(c, d)] \Rightarrow a + d < b + c$
$[(a, b)] + [(e, f)] < [(c, d)] + [(e, f)] \Rightarrow [(a + e, b + f)] < [(c + e, d + f)] \Rightarrow$
$\Rightarrow a + e + d + f < b + f + c + e \Rightarrow a + d < b + c$

- Orden / multiplicación: $[(a, b)] < [(c, d)]$, $[(1, 1)] < [(e, f)] \Rightarrow [(a, b)] [(e, f)] < [(c, d)] [(e, f)]$
$[(a, b)] < [(c, d)]$, $[(1, 1)] > [(e, f)] \Rightarrow [(a, b)] [(e, f)] > [(c, d)] [(e, f)]$

- Existencia de opuesto $[(a, b)] + [(b, a)] = [(a + b, b + a)] = [(1, 1)]$

Con Z hemos conseguido A4 (existencia de opuesto) pero no M4 (existencia de inverso), es decir, $\forall [(a, b)] \neq [(1, 1)] \; \exists [(c, d)] : [(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(1, 0)]$

Ni que decir tiene que los números Z no se escriben de aquella forma $[(a, b)]$ sino $[(3, 31)] = -28$. Con lo cual $Z = \{......., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Construcción a partir de Z de los números racionales (Q)

2ª extensión del concepto de número para sin perder nada de lo que tenemos, ganar M4 (existencia de inverso). Los nuevos números son lo racionales.

La no-existencia de inverso es equivalente a imposibilidad, en general, de dividir. La división de enteros sólo es factible cuando el dividendo es múltiplo del divisor. La sustracción de naturales sólo lo era cuando el minuendo es igual o mayor que el sustraendo. Ya hemos resuelto en Z este último problema, "restar" en Z es sumar el opuesto. Lo mismo que dividir en Q es multiplicar por el inverso.

Para introducir Z nos fijábamos en la relación Haber- deber. Para introducir Q nos fijaremos en repartos dividendo- divisor.

De la necesidad de una herramienta para expresar el saldo de un balance nacieron los enteros.

De la necesidad de una herramienta para expresar la ración de un reparto nacen los racionales.

Consideremos el conjunto Z x (Z $-\{0\}$) de pares ordenados de números enteros (el segundo distinto de 0), lo que se reparte entre a quien se reparte (tartas – niños).

Definimos en Z x (Z $-\{0\}$) la siguiente relación:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Con lo que sabemos de Z vemos inmediatamente que esto es una relación de equivalencia en Z x (Z $-\{0\}$): es reflexiva $\forall$ (a, b) $\in$ Z x (Z $-\{0\}$) (a, b) ~ (a, b) porque ab = ba; es simétrica (a, b) ~ (c, d) $\Rightarrow$ (c, d) ~ (a, b) porque ad = bc $\Rightarrow$ cb = da; y es transitiva (a, b) ~ (c, d) , (c, d) ~ (e, f) $\Rightarrow$ (a, b) ~ (e, f) porque ad = bc , cf = de $\Rightarrow$ adcf = bcde $\Rightarrow$ af = be.

Por definición lo racionales **Q = Z x (Z – {0}) / ~**

Un número racional es lo que tienen en común todos los repartos con la misma ración (tener en común la ración).

{(1, 3), (2, 6), (3, 5), (-1, -3), (-2, -6),.....} = [(1, 3)] = [(-2, -6)]

El conjunto Z se sumerge en Q de la siguiente forma: a $\in$ Z $\rightarrow$ [(a, 1)] $\in$ Q

No solo el conjunto Z se sumerge en Q sino que la estructura se sumerge en una nueva estructura más rica (Q, +, ·, <). Es decir una vez definamos en Q, +, ·, < se verificará:

- i(a + b) = i(a) + i(b)
- i(a · b) = i(a) · i(b)
- a < b = i(a) < i(b)

Definamos la adición, multiplicación y orden en Q:

[(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + bc, bd)]
[(a, b)] [(c, d)] = [(ac, bd)]
[(a, b)] < [(c, d)] = ad < bc

Damos por bien conocida su estructura (Q, +, ·, <) que acabamos de construir a partir de la (Z, +, ·, <).

Es decir suponemos sabido lo siguiente:

Que la adición en Q tiene las propiedades:

A1 Asociativa: $[(a, b)] +\{[(c, d)] + [(e, f)]\} \Rightarrow [(a, b)] + [(cf + de, df)] \Rightarrow$
$\Rightarrow [(adf + bcf + bde, bdf))] \Rightarrow [(ad + bc, bd)] + [(e, f)] \Rightarrow$
$\Rightarrow \{[(a, b)] + [(c, b)]\} + [(e, f)]$

A2 Conmutativa: $[(a, b)] + [(c, d)] \Rightarrow [(ad + bc, bd)] \Rightarrow [(da + cb, db)] \Rightarrow$
$\Rightarrow [(c, d)] + [(a, b)]$

A3 Existe elemento neutro: $[(a, b)] + [(0, 1)] \Rightarrow [(a, b)]$

A4 Existe opuesto: $[(a, b)] + [(-a, b)] = [(a, b)] + [(a, -b)] = [(0, b)]$

Que la multiplicación en Q tiene las propiedades:

M1 Asociativa: $[(a, b)] \cdot \{[(c, d)] \cdot [(e, f)]\} \Rightarrow [(a, b)] \cdot [(ce, df)] \Rightarrow [(ace, bdf)]$
$\Rightarrow [(ac, bd)] \cdot [(e, f)] \Rightarrow \{[(a, b)] \cdot [(c, d)]\} \cdot [(e, f)]$

M2 Conmutativa: $[(a, b)] \cdot [(c, d)] \Rightarrow [(ac , bd)] \Rightarrow [(ca, db)] \Rightarrow [(c, d)] \cdot [(a, b)]$

M3 Existe elemento unidad: $[(a, b)] \cdot [(1, 1)] \Rightarrow [(a, b)]$

M4 Existe inverso: $[(a, b)] \cdot [(a, b)]^{-1} \Rightarrow [(a \cdot a^{-1}, b \cdot b^{-1})] \Rightarrow [(1, 1)]$ (Ganancia respecto a Z)

Que el orden es:

O1Transitivo: $[(a, b)] < [(c, d)]$, $[(c, d)] < [(e, f)] \Rightarrow ad < bc$, $cf < de \Rightarrow adcf < bcde \Rightarrow$
$\Rightarrow af < be \Rightarrow [(a, b)] < [(e, f)]$

O2 Antisimétrico: $[(a, b)] < [(c, d)]$, $[(c, d)] < [(a, b)] \Rightarrow ad < bc$, $cb < da \Rightarrow$
$\Rightarrow [(a, b)] = [(c, d)]$

O3 Es Total: $[(a, b)] \neq [(c, d)] \Rightarrow ad \neq bc \Rightarrow$ ó $ad < bc$ ó $bc < ad \Rightarrow$ ó $[(a, b)] < [(c, d)]$ ó
ó $[(c, d)] < [(a, b)]$

AM Distributiva: $[(a, b)] \cdot \{[(c, d)] + [(e, f)]\} \Rightarrow [(a, b)] \cdot [(cf + de, df)] \Rightarrow$
$\Rightarrow [(acf + ade, bdf)] \Rightarrow [(a, b)] \cdot [(c, d)] + [(a, b)] \cdot [(e, f)]$

OA Orden / adición: $[(a, b)] < [(c, d)] \Rightarrow ad < bc$
$[(a, b)] + [(e, f)] < [(c, d)] + [(e, f)] \Rightarrow [(af + be, bf)] < [(cf + de, df)]$
$\Rightarrow (af + be) \cdot df < bf \cdot (cf + de) \Rightarrow afdf < bfcf \Rightarrow ad < bc$

OM Orden / multiplicación: $[(a, b)] < [(c, d)]$, $[(0, 1)] < [(e, f)] \Rightarrow$

$\Rightarrow [(a, b)]\, [(e, f)] < [(c, d)]\, [(e, f)]$

Un propiedad más que ya tenían las estructuras anteriores (naturales y enteros), pero que no merecía la pena citar entonces, la propiedad Arquimediana:

$\forall\ [(a, b)], [(c, d)] \in Q \quad [(a, b)] < [(0, 1)] \quad \exists\ n \in N : [(c, d)] < n\, [(a, b)]$

Dicho con palabras significa que cualquier número racional positivo sumado consigo mismo tantas veces como sea necesario, se "merienda" a cualquier número.

Por las propiedades A1,....., A4 (Q, +) es un grupo conmutativo o abeliano.

Por las propiedades A1,....., A4 M1,....., M4 y AM (Q, +, ·) es un cuerpo conmutativo.

Por las catorce propiedades primeras (Q, +, ·, <) es un cuerpo totalmente ordenado.
Por las 15 propiedades es un cuerpo arquimediano.

Sin embargo, el cuerpo (Q, +, · <) no es completo. (Q, + ·, <) sirve para contar conjuntos finitos (contiene N), para hacer balances (contiene Z). Para expresar raciones de reparto, pero no sirve para medir (expresar el resultado de la medida).

Veamos un ejemplo, el conocido Teorema de Pitágoras. Consideramos un cuadrado de lado 1. No hay ningún número racional a/b que exprese la longitud de la diagonal. Si lo hubiera, sería $(a/b)^{2} = 1+1 = 2$.

"Sabemos" que todo nº racional se puede expresar mediante una fracción a/b, tal que a es primo con b, es decir ay b no tienen ningún divisor en común. Así pues tenemos lo siguiente:

- $a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$ es par $\Rightarrow$ a es par, a^2 es múltiplo de 4, es decir, $a^2 = 4c \Rightarrow 4c=2b^2 \Rightarrow$
- $2c = b^2 \Rightarrow b^2$ es par $\Rightarrow$ b es par **CONTRADICCION**

Tampoco es racional la longitud de la circunferencia de diámetro 1 o el área del círculo de radio 1.

El problema más famoso de la matemática era saber qué nº es Π. Los egipcios Π ~ 3,14. A finales del siglo VXIII se probó que Π no es racional y a fines del XIX se probó que no es algebraico (no es raíz de ningún polinomio de cociente razonable). Es trascendente.

Construcción a partir de (Q,+,·,<) de los números R.

Como herramienta para la construcción utilizamos el concepto de números racionales, la sucesión de Cauchy.

Sucesión de números racionales :

Una sucesión de números racionales es una aplicación de N en Q $x: n \in N \rightarrow x_n \in Q$.

La sucesión la representaremos por (x_n).

Adición de sucesiones: $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$

Multiplicación de sucesiones: $(x_n) \cdot (y_n)\ (x_n \cdot y_n)$

Propiedades de la sucesiones:

Adición: - Asociativa: $(x_n) + [(y_n) + (z_n)] = [(x_n) + (y_n)] + (z_n)$
- Conmutativa: $(x_n) + (y_n) = (y_n) + (x_n)$
- $\exists$ Neutro: $(x_n) + (0) = (x_n)$
- $\exists$ Opuesto: $(x_n) + (-x_n) = (0)$

Multiplicación: - Asociativa: $(x_n) \cdot [(y_n) \cdot (z_n)] = [(x_n) \cdot (y_n)] \cdot (z_n)$
- Conmutativa: $(x_n) \cdot (y_n) = (y_n) \cdot (x_n)$
- $\exists$ Unidad: $(x_n) \cdot (1) = (x_n)$
- $\exists$ Inverso $(x_n) \neq 0$ / $(x_n) \cdot (x_n)^{-1} = (1)$ (Siempre que $0 \in (x_n)$)

- Distributiva: $(x_n) \cdot [(y_n) + (z_n)] = (x_n) \cdot (y_n) + (x_n) \cdot (z_n)$

Para la construcción de R, nos vamos a interesar por dos tipos de sucesiones: las sucesiones convergentes y la sucesiones de Cauchy.

Definición: Se verifique (x_n) converge a $a \in R$ ó tiene por límite a a, $a = \lim (x_n)$ cuando:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \upsilon \in N / n > \upsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Decir $|x_n - a| < \varepsilon$ es lo mismo que decir $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$, $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Esta definición dice que cualquiera que sea el intervalo centrado en a (con extremos $a - \varepsilon$, $a + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$) en el están todos los términos de la sucesión x_n salvo, a lo sumo, finitos (los υ primeros).

Ejemplo:

(1, ½, 1/3, ...) = (1/n) converge a 0

La sucesión (1, 2, 1, 2, 1, 2,.....) No converge a nada.

Tampoco es convergente (1, 1’4, 1’41, 1’414, 1’4142,.......) que resulta de la aplicación a 2 del algoritmo de la raíz cuadrada.

Para ver que esta sucesión no es convergente, basta con ver que si fuera convergente a un número $a \in R$, entonces $a^2 = 2$ (No hay ningún número racional cuyo cuadrado sea 2).

Definición: Se dice que (x_n) es de Cauchy cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \upsilon \in N / p, q > \upsilon \Rightarrow |x_p, x_q| < \varepsilon$$

Esto quiere decir que los términos, salvo finitos, distan entre si tan poco como queramos.

Ejemplo:

(1, ½, 1/3,......) Convergente y de Cauchy.

(1, 1’4, 1’41, 1’414, 1’1412......) No convergente y de Cauchy.

Todos los términos distan entre si menos que 1, menos que 1/10, menos que 1/100, etc...

Proposición:

Toda sucesión convergente es de Cauchy

Demostración:

Supongamos que (x_n) es convergente. Esto significa que:

$$\forall\ \varepsilon < 0\ ,\ \exists\ \upsilon \in N\ /\ n > \upsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon/2$$

Por consiguiente:

- $p, q > \upsilon \Rightarrow |x_p - x_q| = |x_p - a + a - x_q| \leq |x_p - a| + |x_q - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

Nota: Tanto en las definiciones como en las demostraciones se han utilizado el valos absoluto de números racionales. Por definición, dado $x \in Q$:

$$|x| = \begin{cases} - x \text{ si } x \geq 0 \\ - (-x) \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto tiene las siguientes propiedades:

$\forall\ x, y \in Q \qquad |x + y| \leq |x| + |y|$
$\qquad\qquad\qquad\qquad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

De estas propiedades se siguen otras:

$|-x| = |x| \qquad\qquad |x^{-1}| = |x|^{-1}\ (x \neq 0)$
$|x/y| = |x| / |y|\ \ (y \neq 0) \qquad\qquad |x| - |y| \leq |x - y| \ \Rightarrow |\ |x| - |y|\ | \leq |x \pm y|$

Sin embargo, hay sucesiones de Cauchy de números racionales que no son convergentes:

{1, 1'4, 1'41,.....} Resulta de aplicar el algoritmo de la raíz cuadrada a 2

Proposición:

Si (x_n) es convergente, entonces su límite es único

Demostración:

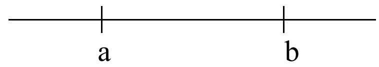
Supongamos que (x_n) converge a $a \in Q$ y a $b \in Q$

Llegamos a una contradicción. En efecto, de la definición de sucesión convergente se sigue que:

$$|a - b| / 3 > 0\ , \begin{cases} \exists\ \upsilon_1 \in N\ /\ n > \upsilon_1 \Rightarrow |x_n - a| < |a - b|\ /\ 3 \\ \exists\ \upsilon_2 \in N\ /\ n > \upsilon_2 \Rightarrow |x_n - b| < |a - b|\ /\ 3 \end{cases}$$

Por tanto, para $\max(\upsilon_1, \upsilon_2)$ se tiene que:

$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < 2/3\ |a - b|$



Todos salvo finitos

Definición:

Una sucesión (x_n) se dice que es acotada cuando existe $M \geq 0$ tal que $\forall\ n \in N\ |x_n| \leq M$, es decir es acotada cuando todos sus términos están dentro de un cierto intervalo.

Proposición:

Toda sucesión de Cauchy (por tanto toda sucesión convergente) es acotada.

Demostración:

Sea (x_n) de Cauchy, esto significa que:

(dado $1 > 0$) / $\exists\ \upsilon \in N$ / $n > 0 \Rightarrow |x_n - x_\upsilon| < 1$

Por tanto:

$|x_n| - |x_\upsilon| \leq |x_n - x_\upsilon| < 1 \Rightarrow |x_n| < 1 + |x_\upsilon|$

Luego $M = \text{máx.}\ \{|x_1|, |x_2|, \ldots\ldots\ldots, |x_{\upsilon-1}|, 1 + |x_\upsilon|\}$ es tal que $\forall\ n \in N$, $|x_n| \leq M$

Proposición:

Si (x_n) converge a a e (y_n) converge a b, entonces $(x_n) + (y_n)$ y $(x_n) \cdot (y_n)$ converge a a + b y $a \cdot b$, respectivamente.

Demostración:

Para la suma:

$|x_n + y_n - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|$

Para la multiplicación:

Sabemos que $|x_n - a|$ e $|y_n - b|$ son "tan pequeños como queramos" sin más que tomar n "suficientemente grande".

Queremos ver lo mismo para $|x_n y_n - ab|$. La clave de la demostración está en la siguiente desigualdad:

$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \leq |x_n| |y_n - b| + |x_n - a| |b|$

A la vista de eso aplicamos la hipótesis como más nos convenga. Sabemos que (x_n) es acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$

Por tanto:

$\exists \upsilon_1 \in N / n > \upsilon_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon/ 2|b|$ (Si $|b| = 0$ esto no se puede escribir, todo es más fácil)

$\forall 3 > 0$

$\exists \upsilon_2 \in N / n > \upsilon_2 \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon/2M$

Luego $n > \text{máx.} (\upsilon_1, \upsilon_2) \Rightarrow |x_n y_n - ab < \varepsilon$

Si denotamos S al conjunto de todas las sucesiones de números racionales.
C al conjunto de las que son de Cauchy.
C_0 al conjunto de las que son convergentes.

Tenemos que: $(S, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo y unitario.
$(C, +, \cdot)$ es un subanillo.
$(C_0, +, \cdot)$ es un subanillo del anterior.

$$C_0 \subset C \subset A \subset S$$

Con las sucesiones de Cauchy de números racionales como herramienta vamos a definir los números reales.

Definición:

Sean (x_n) e (y_n) sucesiones de Cauchy de números racionales, se dice que (x_n) es equivalente a (y_n) $((x_n) \sim (y_n))$, cuando la sucesión diferencia $(x_n - y_n)$ converge a 0

Nota: Las sucesiones de Cauchy son sucesiones cuyos términos se encuentran en algún sitio de la recta. Dos de ellos son equivalentes cuando se encuentran en el mismo sitio.

Ejercicio:

1) Demostrar que lo anterior es una relación de equivalencia en el conjunto C de las sucesiones de Cauchy de números racionales.

   a) Reflexiva: $\forall (x_n) \in C$, $(x_n) \sim (x_n) \Rightarrow (x_n - x_n)$ converge a 0
   b) Simétrica: $(x_n), (y_n) \in C$, $(x_n) \sim (y_n) \Rightarrow (x_n - y_n)$ converge a $0 \Rightarrow (y_n - x_n)$ converge a $0 \Rightarrow (y_n) \sim (x_n)$
   c) Transitiva: $(x_n) \sim (y_n), (y_n) \sim (z_n) \Rightarrow (x_n - y_n)$, $(y_n - z_n)$ convergen a $0 \Rightarrow$
   $\Rightarrow (x_n - z_n)$ converge a $0 \Rightarrow (x_n) \sim (z_n)$

2) Demostrar que si $(x_n) \to a$ y $(x_n) \sim (y_n) \Rightarrow y_n \to a$

   $(x_n) \sim (y_n) \Rightarrow (x_n - y_n) \to 0 \Rightarrow (x_n) \to a \Rightarrow a - x = 0 \Rightarrow x = a \Rightarrow (y_n) \to a$

Definición:

$$\mathbf{R = C / \sim}$$

Un número real es una clase de sucesiones de Cauchy equivalentes respecto a la sucesión anterior.

Recordemos que un número entero es una clase de pares de números naturales (haber, debe).

Un número racional es una clase de pares de números enteros.

Es número real "no racional" $\sqrt{2}$ es una clase formada por las sucesiones:

(1, 1'4, 1'41, 1'414,.....)
(2, 1'5, 1'42, 1'415,.....)
(1, 1'5, 1'41, 1'415,.....)

Vamos a definir una adición, una multiplicación y una relación "ser menor que" en R, a ver que estas operaciones y relación tienen las mismas propiedades que sus análogas en Q; a ver que $(Q, +, \cdot, <) \subset\!\!> (R, +, \cdot, <)$, es decir, es una aplicación inyectiva de Q en R, tal que:

- $i(a + b) = i(a) + i(b)$
- $i(a \cdot b) = i(a) \cdot i(b)$
- $a < b \Rightarrow i(a) < i(b)$

En esta nueva estructura hay una nueva propiedad que no había en la de partida (una propiedad que no demostramos).

Definición de adición en R:

Si (x_n) es una sucesión de Cauchy de números racionales, $[(x_n)]$ representa al número real formado por la sucesión y todas su equivalentes:

$$[(x_n)] + [(y_n)] = [(x_n + y_n)]$$

Veamos que esta definición no depende de los representantes elegidos para darla, es decir, que:

$$\left.\begin{array}{l}(x_n) \sim (x'_n)\\ \\ (y_n) \sim (y'_n)\end{array}\right. \Rightarrow (x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n)$$

Demostración:

Tenemos que $(x_n - x'_n) \to 0$, $(y_n - y'_n) \to 0$
Queremos ver que $((x_n + y_n) - (x'_n + y'_n)) \to 0$
Sabemos que $|(x_n + y_n) - (x'_n + y'_n)| \leq |x_n - x'_n| + |y_n - y'_n|$
Por hipótesis:

$\exists\ \upsilon_1 \in N \ / \ n > \upsilon_1 \Rightarrow |x_n - x'_n| < \varepsilon/2$
$\forall 3 > 0$
$\exists\ \upsilon_2 \in N \ / \ n > \upsilon_2 \Rightarrow |y_n - y'_n| < \varepsilon/2$

De eso y lo anterior sigue que:

$N > \text{máx.}\ (\upsilon_1, \upsilon_2) \Rightarrow |x_n + y_n| - |x'_n + y'_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

Si $(x_n - x'_n) \to 0$, $(y_n - y'_n) \to 0$ entonces:

$(x_n - x'_n) + (y_n - y'_n) = ((x_n + y_n) - (x'_n + y'_n)) \to 0$

Propiedades de la adición en R:

- Asociativa: $[(x_n)] + \{[(y_n)] + [(z_n)]\} = [(x_n)] + [(y_n + z_n)] = [(x_n + y_n + z_n)] =$
  $= [(x_n + y_n)] + [(z_n)] = \{[(x_n)] + [(y_n)]\} + [(z_n)]$

- Conmutativa: $[(x_n)] + [(y_n)] = [(x_n + y_n)] = [y_n + x_n)] = [(y_n)] + [(x_n)]$

- Elem. Neutro: $[(x_n)] + [(0)] = [(x_n + 0)] = [(x_n)]$

- Elem. Opuesto: $[(x_n)] + [(-x_n)] = [(x_n - x_n)] = [(0)]$

Multiplicación de números reales:

$[(x_n)]\ [(y_n)] = [(x_n\ y_n)]$

Sabemos que el producto de sucesiones de Cauchy es de Cauchy. Además por definición no depende de los representantes elegidos para darla, es decir, verifica que:

$(x_n) \sim (x'_n)$
$\Rightarrow (x_n\ y_n) \sim (x'_n\ y'_n)$
$(y_n) \sim (y'_n)$

Propiedades de la multiplicación de números reales:

- Asciativa: $[(x_n)]\ \{[(y_n)]\ [(z_n)]\} = [(x_n)]\ [(y_n\ z_n)] = [(x_n\ y_n\ z_n)] = [(x_n\ y_n)]\ [(z_n)] =$
  $= \{[(x_n)]\ [(y_n)]\}\ [(z_n)]$
- Conmutativa: $[(x_n)]\ [(y_n)] = [(x_n\ y_n)] = [(y_n\ x_n)] = [(y_n)]\ [(x_n)]$

- Elem. Unidad: $[(x_n)]\ [(1)] = [(x_n \cdot 1)] = [(x_n)]$

Además la multiplicación es distributiva respecto de la adición, es decir

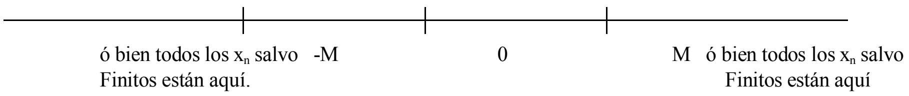
$[(x_n)]\ \{[(y_n)] + [(z_n)]\} = [(x_n)]\ [(y_n)] + [(x_n)]\ [(z_n)]$

No es fácil ver que todo número real no nulo tiene inverso, para eso vamos a utilizar un lema (resultado auxiliar) que también será útil para definir la relación “ser menor que” en R.

Lema:

Si (x_n) es una sucesión de Cauchy de números racionales que no converge a cero, entonces existe $M > 0$, $\upsilon \in N$ tales que:

ó bien $n > \upsilon \Rightarrow x_n > M$
ó bien $n > \upsilon \Rightarrow x_n < -M$



<u>Demostración:</u>

Que x_n no converge a 0, significa que:

|- $x_n > \varepsilon$
$\exists\, \varepsilon > 0 \,/\, \forall\, \upsilon \in N$, $\exists\, n > 0 \,/\, |x_n| \geq \varepsilon$ -|- $x_n < -\varepsilon$

Esto es la negación de:

|- $x_n < \varepsilon$
$\exists\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \upsilon \in N \,/\, n > \upsilon \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$ -|- $x_n > -\varepsilon$

Por otra parte con x_n es de Cauchy:

$\exists\, \upsilon_0 \in N \,/\, p, q > \upsilon$^0^$\Rightarrow |x_p - x_q| < \varepsilon/2$

Luego todos los x_n salvo finitos están o bien a la derecha de $\varepsilon/2$ o bien a la izquierda de $-\varepsilon/2$, es decir, $M = \varepsilon/2$

En efecto: dado $n_0 \in N$ tal que n0 > υ_0 tal que $|x_{n0}| > \varepsilon$ luego tenemos que o bien $x_{n0} \geq \varepsilon$ o bien $x_{n0} \leq -\varepsilon$

Supongamos $x_{n0} \geq \varepsilon$ tenemos entonces que:

- $n > \upsilon_0 \Rightarrow \varepsilon - x_n \leq x_{n0} - x_n < \varepsilon/2 \Rightarrow x_n = \varepsilon/2$

<u>Corolario:</u>

Si (x_n) es de Cauchy, no convergente a 0, entonces la sucesión $(1/x_n)$ está bien definida para casi todo n (es decir, $x_n \neq 0\ \forall\, n \in N$ salvo finitos) y además es de Cauchy.

<u>Demostración:</u>

Que $x_n \neq 0$ está comprobado con el lema anterior.
Veamos que $(1/x_n)$ es de Cauchy. La clave de la demostración está en la igualdad:

$|(1/x_p) - (1/x_q)| = |x_p - x_q| / |x_p|\, |x_q|$

En efecto, por ser (x_n) de Cauchy no convergente a 0

$\exists\, M > 0$, $\exists\, \upsilon_1 \in N \,/\, |x_n| > M_\upsilon\ (n > \upsilon_1)$

Además:

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \upsilon_2 \in N \,/\, p, q > \upsilon_2 \Rightarrow |x_p - x_q| < \varepsilon M^2$

Por tanto si p, q > máx. $(\upsilon_1, \upsilon_2) \Rightarrow |(1/x_p) - (1/x_q)| < \varepsilon M^2/M^2 = \varepsilon$

Como consecuencia de todo lo anterior tenemos:

Proposición:

Todo número real distinto de 0 tiene inverso multiplicativo.

Demostración:

Sea $[(x_n)]$ un número real distinto de 0. Eso significa que (x_n) es de Cauchy, no convergente a 0. Por tanto:

$\exists\ \upsilon \in N / x_n \neq 0, (n > \upsilon)$, y la sucesión $(1, 1, ..., 1 , 1/x_{\upsilon+1}, 1/x_{z+2}, 1/x_{\upsilon+3}, ...)$ es de Cauchy. Obviamente $[(x_1, x_2, ..., x_\upsilon, x_{\upsilon+1}, x_{\upsilon+2}, ...)] \cdot$
$\cdot\ [(1, 1, ..., 1, 1/x_{\upsilon+1}, 1/x_{\upsilon+2}, ...)] = [(x_1, x_2, ..., x_\upsilon, 1, 1, 1, ...)]$

Así que $(R, +, \cdot)$ es un cuerpo

Definición de la relación "ser menor que" en R:

Supongamos que $[(x_n)]$ es un número real distinto de 0, diremos que $[(x_n)]$ es positivo (mayor que cero) cuando se de la primera de las dos posibilidades del lema. Es decir, cuando:

$\exists\ M > 0, \exists\ \upsilon \in N / n > \upsilon \Rightarrow x_n > M$

Cuando se da la segunda $(x_n < -M)$ diremos que el número es negativo (menor que cero)

Por definición $[(x_n)] < [(y_n)]$ cuando $[(y_n - x_n)]$ sea positivo.

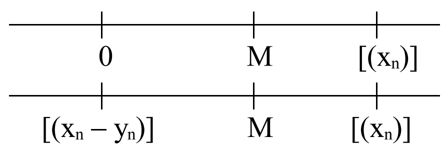
Ejercicio:

Probar que aquella definición de número real positivo (negativo) no depende de los representantes de número real elegidos para darlo, es decir, si (x_n) verifica la primera (segunda) de las propiedades del lema y si $(x_n) \sim (y_n)$ entonces (y_n) también las verifica, (en general con otras M, υ).

Si $[(x_n)]$ es positivo por definición:

$\exists\ M > 0, \upsilon_0 \in N / n > \upsilon \Rightarrow x_n > M$

Es decir, $[(x_n)]$ es mayor que M.



Y si $(x_n) \sim (y_n)$ por definición $(x_n - y_n) \rightarrow 0$

Por último si $(x_n) \rightarrow [(x_n)]$, (y_n) tiene que converger forzosamente a $[(x_n)] = [(y_n)]$, por lo cual (y_n) tiene cumple la propiedad que cumplía (x_n), es decir:

$\exists\ M > 0, \exists\ \upsilon_0 \in N / n > \upsilon_0 \Rightarrow y_n > M$

De forma análoga se probaría el caso de (x_n) negativo.

Ejercicio:

Probar también que la relación "ser menor que" en R es transitiva, antisimética y total.

- Transitiva $[(x_n)] < [(y_n)], [(y_n)] < [(z_n)] \Leftrightarrow [(y_n - x_n)] > 0, [(z_n - y_n)] > 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow [(z_n - x_n)] > 0 \Rightarrow [(x_n)] < [(z_n)]$
- Antisimétrica $[(x_n)] < [(y_n)], [(y_n)] < [(x_n)] \Rightarrow [(y_n - x_n)] > 0, [(x_n - y_n)] > 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow [(x_n)] = [(y_n)]$
- Total $\forall [(x_n)], [(y_n)], [(x_n)] \neq [(y_n)] \Rightarrow$ ó $[(y_n - x_n)] > 0$ ó $[(x_n - y_n)] > 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow$ ó $[(x_n)] < [(y_n)]$ ó $[(y_n)] < [(x_n)]$

Ver que el orden es compatible con la adición y multiplicación.

$[(x_n)] < [(y_n)] \Rightarrow [(y_n - x_n)] > 0$

$[(x_n)] + [(z_n)] < [(y_n)] + [(z_n)] \Rightarrow [(y_n + z_n - x_n - z_n)] = [(y_n - x_n)] > 0$

$[(x_n)]\,[(z_n)] < [(y_n)]\,[(z_n)] \Rightarrow [(y_n\, z_n - x_n\, z_n)] > 0 \quad ([(z_n)] > 0)$

Ver también, que se verifica la propiedad arquimediana, es decir, que:

$\forall\ [(x_n)], \forall\ [(y_n)], \exists\ k \in N\ /\ [(y_n)] < k\,[(x_n)]$

A partir de $(Q, +, \cdot, <)$ hemos construido $(R, +, \cdot, <)$. Esta última estructura R tiene las mismas propiedades que la de partida: la adición es asociativa, conmutativa, elemento neutro y opuesto, la multiplicación es asociativa, conmutativa, elemento unidad e inverso, el orden es transitivo, antisimétrico y total, la adición es distributiva respecto de la multiplicación, hay compatibilidad entre el orden y la adición, y compatibilidad entre el orden y la multiplicación.

La ganancia que hemos obtenido con los R se puede expresar de bastantes formas, pero nos fijaremos en una, que es el teorema fundamental del orden (TFO).

Teorema fundamental del orden:

Todo conjunto no vacío y acotado superiormente (inferiormente) de números reales tiene supremo (ínfimo).

Definición: Sea $A \subset R$, se dice que A está acotado superiormente (inferiormente) cuando existe $M \in R$ tal que $\forall\ x \in A,\ x \leq M$ (respectivamente $M \leq x$). De M se dice que es cota superior (inferior) de A.

Definición: Sea A un conjunto acotado superiormente de números reales. Se dice que $\alpha \in R$ es supremo de A cuando:

- α es cota superior de A
- Si β es otra cota superior de A $\Rightarrow\ \alpha < \beta$

Es decir, cuando es la menor de todas las cotas superiores de A. (α = sup. A)

Se dice que α es ínfimo, cuando α es la mayor de las cotas inferiores α = inf. A.

El conjunto $\varnothing$ está acotado superiormente, puesto que todo número real es una cota superior, ya que cualquier número es mayor que la "nada". Pero no tiene supremo, puesto que dado un número real siempre se hay otro menor que él.

Proposición:

El TFO no es cierto en Q. Para verlo basta poner un ejemplo.

El conjunto $A = \{x \in Q \,/\, x^2 < 2\}$ es acotado superiormente (ej: 2 es una cota superior) y no vacío ($1 \in A$), pero no tiene supremo en Q.

Supongamos que lo tuviera, que sup. $A = \alpha \in Q$

Sabemos que $\alpha^2 \neq 2$

Con Q es totalmente ordenado, ó $\alpha^2 < 2$ ó $\alpha^2 > 2$.

Veamos que no puede darse ninguna de estas propiedades, y que por lo tanto no existe, en Q, supremo de A.

Supongamos que $\alpha^2 < 2$. Encontraremos un elemento de A más grande que α, con lo que α no puede ser supremo de A (no es cota superior).

α es mayor o igual que 1

$\alpha^2 < (\alpha + 1/n)^2 = \alpha^2 + 2\alpha/n + 1/n^2 = \alpha^2 + 1/n\,(2\alpha + 1/n) < \alpha^2 + 1/n\,(2\alpha + 1)$

$$\alpha^2 < \alpha\,(\alpha + 1/n)$$

$0 < 1/n \Rightarrow \alpha < \alpha + 1/n \Rightarrow \alpha\,(\alpha + 1/n) < (\alpha + 1/n)^2 \Rightarrow_{\text{(transitiva)}} \alpha^2 < (\alpha + 1/n)^2$

Ahora bien, como $2 - \alpha^2 > 0$, por la propiedad arquimediana, existe $n \in N$ tal que $2\alpha + 1 < n\,(2 - \alpha^2)$, luego ese n, $\alpha^2 + 1/n\,(2\alpha + 1) < 2$.

Es decir, $\alpha + 1/n \in A \Rightarrow \alpha$ no es cota superior.

Ejercicio: Ver lo anterior para el caso de $\alpha^2 > 2$

Como se sumerge la estructura (Q,+, ·, <) en la (R, +, · <). Dicha inmersión la establece la aplicación inyectiva:

$$- f: \quad x \in Q \rightarrow [(x)] \in R$$

[(x)] clase formada por las sucesiones {(x, x, x,.......)}, {(x+1, x+½,......)} que convergen a x.

<u>Ejercicio:</u> Ver que eso es una aplicación inyectiva, es decir, cada elemento de Q tiene una y sólo una imagen en R (ser aplicación de Q en R).

- $x \neq y \Rightarrow [(x)] \neq [(y)]$ (puntos distintos tienen imágenes distintas)
- $x \in Q \quad y \in Q$
- $f(x) = [(x)] \quad f(y) = [(y)]$
- $x = y \Rightarrow [(x)] = [(y)] \Rightarrow f(x) = f(y)$

Además, no es sobreyectiva (hay elementos de R que no son imagen de ningún Q). Ejemplo: {(1, 1'4, 1'41, 1'414,........)} que resulta de la aplicación a 2 del algoritmo de la raíz cuadrada, (la demostración está relacionada con lo que vimos de que el conjunto $\{x \in Q / x^2 < 2\}$ no tiene supremo en Q.

Ver que, $\forall$ x, y $\in$ Q:

- $i (x + y) = [(x + y)] = [(x)] + [(y)] = i (x) + i (y)$
- $i (x \cdot y) = [(x \cdot y)] = [(x)] \cdot [(y)] = i (x) \cdot i (y)$
- $x < y \Rightarrow [(x)] < [(y)] \Rightarrow i (x) < i (y)$

Estos hechos nos permiten decir que i (Q) es un subcuerpo del cuerpo ordenado – arquimediano (R, +, ·, <).

Habitualmente se identifica i (Q) con Q y se dice, simplemente que Q es subcuerpo de R.

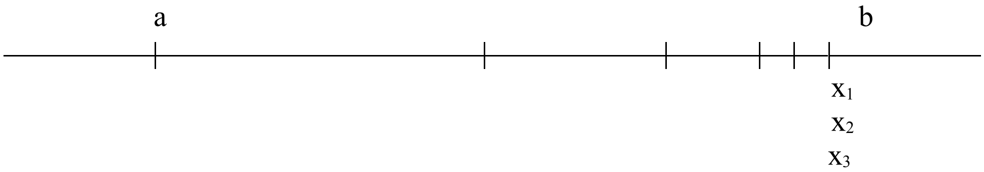
Para acabar con la construcción de R falta probar el TFO que dice:

Todo conjunto no vacío y acotado superiormente de números reales tiene supremo.

Demostración:

Supongamos que $A \subset R$ es no vacío y acotado superiormente.

Es fácil ver (consecuencia de la propiedad arquimediana) que entonces existen a, b en Q tales que b es cota superior de A y a no lo es.



A b lo llamamos x_1, dividimos por la mitad el [a, b]. Uno de los intervalos que resultan verifica lo mismo que [a, b] (extremo izq. no es cota superior de A, extremos der. si lo es)

Llamaremos x_2 al extremo derecho de éste, lo dividimos por la mitad, un de los dos intervalos que resultan verifica de nuevo lo de [a, b]. Llamamos x_3 a su extremo derecho, haciendo de nuevo la misma operación.

De esta forma obtenemos un sucesión de Cauchy de números racionales (x_n), es de Cauchy porque:

- $p, q > \upsilon \Rightarrow |x_p - x_q| < (b-a)/2^{\upsilon}$

- $\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ \upsilon \in N \Rightarrow (b-a)/2^{\upsilon} < \varepsilon$

Veamos que el número real x_n es precisamente el supremo de A. Hay que ver:

1.- Que es cota superior de A

Supongamos que x_n no es cota superior de A, es decir, que existe $[(y_n)] \in A\ /\ [(x_n)] < [(y_n)]$.

Significa que:

$\exists\ M > 0, \exists\ \upsilon \in N\ /n > \upsilon \Rightarrow y_n - x_n > M$

Por otra parte como (y_n) es de Cauchy:

$\exists\ \upsilon' \in N\ /\ p, q > \upsilon' \Rightarrow |y_p - y_q| < M/2$

Fijemos $m > \text{máx.}\ (\upsilon, \upsilon') \Rightarrow n > \text{máx.}\ (\upsilon, \upsilon') \Rightarrow y_n - x_m = y_n - y_m + y_m - x_m > M/2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_m = [(x_m, x_m, x_m, ...)]$ no es cota superior de A porque es menor que $[(y_n)]$, contra la hipótesis.

2.- Que si $[(z_n)]$ es otra cota superior de A entonces: $[(x_n)] < [(z_n)]$ (Véase)

$(R, +, \cdot, <)$ será en lo que sigue un conjunto de cosas (n^{os} reales) que verifica las 16 propiedades. Es decir, es un conjunto ordenado, arquimediano y completo.

Ejercicio: Demostrar que todo nº real positivo tiene una y sólo una raíz real positiva de cualquier otra, es decir, $\forall\ a \in R_+ ,\ \forall\ n \in N, \exists^*\ b \in R_+ / b^n = a\ (b = a^{1/n})$

Esto ya sabemos que no es cierto en Q: $\nexists\ b \in Q / b^2 = 2$

Para demostrar esto utilizaremos una técnica que ya utilizamos cuando vimos que sup. $\{x \in R / x^2 < 2\} = b$, tal que $b^2 = 2$

Es decir, $\forall\ a \in R_+, \forall\ n \in N$ el TFO afirma que existe $b = \sup. \{x \in R_+ / x^n < a\}$

Ver que en efecto, ese conjunto es no vacío y es acotado superiormente.

Ver que no puede ser $b^n < a$ ni $b^n > a$ ($\Rightarrow b^n = a$)

Suponiendo que $b^n < a$ ver que existe $m \in N / b^n < (b + 1/m)^n < a$ con lo que b no sería cota superior del conjunto.

$b^n < (b + 1/m)^n$

$$b^n < b^{n-1}(b + 1/m)$$

$0 < 1/m \Rightarrow b < b + 1/m \Rightarrow b^{n-1}(b + 1/m) < (b + 1/m)^n \Rightarrow b^n < (b + 1/m)^n$

Como $(b + 1/m)^n < a \Rightarrow b^n$ no es cota superior.

Construcción a partir de R de los números complejos (C)

¿Por qué esta nueva extensión? El polinomio x-3 tiene raíz en N (el 3), pero x+3 no. Si la tiene en Z (el –3). El polinomio 2x-3 no tiene raíz en Z pero si en Q (el –3/2). El polinomio x^2-2 no tiene raíces en Q, pero sí en R (el $\pm\sqrt{2}$). El polinomio x^2+2 no tiene raíces en R ($\forall\ a \in R,\ a^2 > 0$, puesto que $a < 0 \Rightarrow a\cdot a > a\cdot 0 \Rightarrow a^2 > 0$ y si $a > 0 \Rightarrow a\cdot a > 0\cdot a \Rightarrow a^2 > 0$). Este el fallo de R.

En la nueva extensión del concepto de número que vamos a hacer (números complejos) se verifica el siguiente teorema fundamental del álgebra.

Todo polinomio con coeficientes en C tiene alguna raíz en C.

Esta última extensión del conjunto de números halla aquella ganancia (TFA) pero también una pérdida importante, la del orden.

El cuerpo de los números complejos es simplemente el conjunto R x R de pares ordenados de números reales, dotado de las operaciones:

Adición: (a, b) + (c, d) = (a+b, c+d)
Multiplicación: (a, b) · (c, d) = (ac – bd, ad + bc)

La adición es asociativa, conmutativa, con neutro y opuesto.

- Asociativa (a, b) + [(c, d) + (e, f)] = (a, b) + (c+e, d+f) = (a+c+e, b+d+f) =
  = (a+c, b+d) + (e, f) = [(a, b) + (c, d)] + (e, f)
- Conmutativa: (a, b) + (c, d) = (a+c, b+d) = (c+a, d+b) = (c, d) + (a,b)
- Neutro: (a, b) + (0, 0) = (a+0, b+0) = (a, b)
- Opuesto: (a, b) + (-a, -b) = (a-a, b-b) = (0, 0)

La multiplicación es asociativa, conmutativa, con unidad e inverso.

- Asociativa: (a, b) [(c, d) (e, f)] = (a, b) (ce – df, cf + de) = (ac – bd, ad + bc) (e, f) =
  = [(a, b) (c, d)] (e, f)
- Conmutativa: (a, b) (c, d) = (ac – bd, ad + bc)
- Con unidad: (a, b) (1,0) = (a·1 - b·0, a·0 + b·1) = (a, b)
- Con inverso: (a, b) · $(a, b)^{-1}$ = (1, 0)

- Distributiva: (a, b) [(c, d) + (e, f)] = (a, b) (c+e, d+f) =
  = (a(c+e) – b(d+f), a(d+f) + b(c+e)) = (ac–bd, ad+bc) + (ae-bf, af+be)=
  =(a, b) (c, d) + (a, b) (e, f)

(C, + ·) es un cuerpo en el que se sumerge el cuerpo (R, +, ·):

$$x \in R \rightarrow (x, 0) \in C$$

Ver que:

- j(x+y) = (x+y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = j(x) + j(y)
- j(xy) = (xy, 0) = (x, 0) (y, 0) = j(x) j(y)

Para obtener el inverso $(a, b)^{-1}$ basta resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que resulta de (a, d) (x, y) = (1, 0)

- ax – by = 1
- bx + ay = 0

Tiene una única solución si sólo si $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 \neq 0$, es decir, si sólo si $(a, b) \neq (0,0)$

Ver que si estamos en cuerpo ordenado como R (14 propiedades), se verifican estas cosas:

$a < b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$
$a < 0 \Rightarrow a + (-a) < 0 + (-a) \Rightarrow 0 < -a$
$0 < 1$
$\forall a \neq 0, a^2 > 0$

Suponiendo eso, veamos que C no puede darse un orden que sea compatible con las operaciones (C no es un cuerpo ordenable).

Supongamos que $<$ fuera un orden en C compatible con las operaciones. Entonces: $(0,1)^2 > (0, 0)$, pero $(0, 1)^2 = (-1, 0) = -(1, 0) > (0,0) \Rightarrow (1, 0) < (0, 0)$ (unidad menor que neutro).

En C pueden definirse relaciones de orden, incluso todas (antisimétrica, transitiva, total), pero ninguna de ellas es compatible con las operaciones.

Ejemplo: El orden lexicográfico (el de los diccionarios)

$$(a, b) < (c, d) :\Leftrightarrow a < c \text{ ó } a = c\ ,\ b < d$$

Ejercicio: Ver que esa relación es transitiva, antisimétrica, total ¿Con cuál de las operaciones no es compatible?

Transitiva: $(a, b) < (c, d), (c, d) < (e, f) \Rightarrow (a, b) < (e, f)$
Antisimétrica: $(a, b) < (c, d), (c, d) < (a, b) \Rightarrow (a, b) = (c, d)$
Total: $(a, b) \neq (c, d) \Rightarrow (a, b) < (c, d)$ ó $(c, d) < (a, b)$

No es compatible con la multiplicación:

$(1, 2) < (1, 3)$ pero $(1, 2)\,(2, 3)=(2–6, 3+4) = (-4, 7) > (1, 3)\,(2, 3) = (2–9, 3+6) = (-7, 9)$

Lo mismo que el racional [(1, 2)] no suele denotarse de esa forma, sino ½. El complejo (a, b) tampoco suele denotarse de esta forma, sino a + bi. Entonces las operaciones entre complejos se hacen como si los complejos a + bi, c + di fueran polinomios de grado uno en la indeterminada i, con el convenio añadido de que $i^2 = -1$

En el complejo (a, b) ó a +bi, de a se dice que es la parte real y de b se dice que es la parte imaginaria.

$$\mathrm{Re}\,(a + bi) = a$$
$$\mathrm{Im}\,(a + bi) = b$$

$(C, +, \cdot)$ es algebraicamente cerrado, es decir, se verrifica el teorema fundamental del álgebra (todo polinomio con coeficientes en C tiene alguna raíz en él).

<u>Módulo de un número complejo:</u>

Por definición se llama módulo de a + bi al número real no negativo:

$$|a + bi| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

Sabemos que todo número real no negativo tiene una y sólo una raíz real.

Ejercicio:

$|z_1+z_2| = |a+bi + c+di| = |(a+c) + (b+d)i| \leq |a| + |c| + |b|i + |d|i = |a+bi| + |c+di| = |z_1| + |z_2|$
$|z_1\ z_2| = |(a+bi)\ (c+di)| = |a+bi|\ |c+di| = |z_1|\ |z_2|$
$|z^{-1}| = |z|^{-1}$
$|-z| = |z|$

La notación para el módulo en C es la misma que la de valor absoluto en R, por la sencilla razón de que: $\forall\ x \in R$, $|x| = |x + 0i|$

El módulo extiende a C el valor absoluto que teníamos en R, se llama argumento del complejo $a + bi \neq 0$ al ángulo que forma su afijo con el semieje positivo de abcisas, medido en el sentido directo.

$\theta = \arccos a/\sqrt{(a^2+b^2)} = \text{arcsen}\ b/\sqrt{(a^2+b^2)}$

$|a+bi| = \xi$

$a+bi = \xi(\cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta)$

Multiplicación de números complejos:

'$a+bi = \xi(\cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta)$
'$c+di = \xi(\cos\theta' + i\ \text{seno}\ \theta')$

$(a+bi)(c+di)= (ac-bd) + (ad+bc)i = \xi\xi'[\cos\theta\ \cos\theta' - \text{sen}\theta\ \text{sen}\theta' + i(\cos\theta\text{sen}\theta' + \text{sen}\theta\cos\theta')$

El producto del complejo de módulo ξ y argumento θ por el complejo de módulo ξ' y argumento θ', es el complejo de módulo $\xi\xi'$ y argumento $\theta+\theta'$

Luego de lo anterior obtenemos:

$\xi\ (\cos\theta + i\ \text{sen}\theta)^n = \xi(\cos n\theta + i\ \text{sen}\ n\theta)$

De ahí obtenemos inmediatamente que todo número complejo distinto de 0 tiene exactamente n raíces distintas de orden n.

$\xi^{1/n}(\cos\theta/n + i\ \text{sen}\ \theta/n)$
$\xi^{1/n}(\cos(\theta+2\Pi)/n + i\ \text{sen}\ (\theta+2\Pi)/n)$
$\xi^{1/n}(\cos(\theta+4\Pi)/n + i\ \text{sen}\ (\theta+4\Pi)/n)$

$\xi^{1/n}(\cos(\theta+2k\Pi)/n + i\ \text{sen}\ (\theta+2k\Pi)/n)$ (K=0, 1, 2,.....) FORMULA DE MOIVRE

Geométricamente:

Para n=5. Pentágono regular de radio $\xi^{1/n}$ inscrito en una circunferencia.

Nos falta decir que es el conjugado de un número complejo: $\overline{a+bi} = a-bi$

Expresión decimal de los números reales:

Suponemos conocida la forma "decimal" (en vez de cómo "quebrado" de enteros) de expresar los números racionales. Y también que una expresión decimal a' $b_1b_2b_3$.... es de un número racional si sólo si es periódica.

La expresión decimal periódica del número 3/7 la da el algoritmo de la división: 3/7 = 0'428571........

El periodo puede ser 0, en cuyo caso el número es "exacto". Sin embargo, es fácil razonar que todo número racional exacto (con periodo 0) admite otra expresión equivalente con periodo 9.

38'263 = 38'262999....

Hemos recordado como obtener la expresión decimal de un número racional dado como "quebrado" (par de números enteros)

Recíprocamente sabemos como se obtiene, dada la expresión decimal periódica, el "quebrado" al que representa.

23'97253 = 23 + 97253/99900

Hay una relación entre la fracciones y la expresiones decimales periódicas.

Naturalmente, dado un número real x existe el mayor entero $\leq \alpha$, también el mayor racional exacto con una cifra decimal $\leq \alpha$, también el mayor racional exacto con dos cifras decimales, etc.

Al primero lo llamamos a, al segundo a'b_1,.......

Así obtenemos en sucesión de Cauchy de números racionales (a, a'b_1, a'b_1b_2, a'$b_1b_2b_3$,..) que es fácil ver que representa a α, es decir, α = [(a, a'b_1, a'b_1b_2, a'$b_1b_2b_3$,....)]. La expresión decimal de α es a'$b_1b_2b_3$....... y sabemos que es periódica si sólo si α el racional.

Definición: Sea A un conjunto infinito (con infinitos elementos)

Se dice que A es numerable cuando se puede establecer una biyacción entre A y el conjunto N de los números naturales.

Ejemplo:

El conjunto P, de los números pares positivos es numerable.

$N \to P$	
1	2
2	4
3	6
n	2n

Nótese que cuando se trata de conjuntos finitos es imposible establecer una biyección entre el todo y la parte.

El conjunto Z de los número enteros es numerable

$N \to Z$			
0	0		
1	1		(n+1)/2 si n impar
2	–1		
3	2	$n \in N$	
4	–2		
5	3		-n/2 si n par
6	–3		

El conjunto Q de los números racionales es numerable:

Q

-1/3 –1/2 –1/1   1/1 ½ 1/3

-2/3 -2/2 –2/1   2/1 2/2 2/3

-3/3 –3/2 –3/1   3/1 3/2 3/3

$N \to Q$	
0	0
1	1/1
2	2/1
3	–2/1
4	–1/1
5	½
6	3/2

Proceso diagonal de Cantor.

¿Hay algún conjunto intermedio entre Q y R tal que se pueda establecer una biyección entre Q y él ni entre él y R.

El conjunto R de los números reales no es numerable, es decir, no se puede establecer ninguna aplicación 1 a 1 entre N y R. Bastará ver que ninguna aplicación:

$N \to R$	
1	$a_1{'}b_{11}b_{12}b_{13}$......
2	$a_2{'}b_{21}b_{22}b_{23}$......
3	$a_3{'}b_{31}b_{32}b_{33}$......

....

....

En el conjunto imagen de esta aplicación no está el número real $c'd_1d_2d_3....$ donde: $d_k=1$ si $b_{kk}\neq 1$, $d_k=3$ si $b_{kk}=1$

Tenemos $N \subset Z \subset Q \subset R$ donde N; Z; Q son numerables y R no es numerable

¿Existirá A, $Q \subset A \subset R$ tal que no exista biyección entre A y Q ni entre A y R?

Si se supone que si existe tal A no se llega a contradicción.

Si se supone que no existe, tampoco se llega a contradicción.

En otras palabras, es imposible encontrar tal A, es imposible probar que no existe.

<u>Ejercicio:</u>

1.- Ver que la unión finita o numerable de conjuntos numerables es numerable:

Indicación: Si $A_1, A_2,.....$, son numerables entonces se puede escribir:

$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13},.......\}$
$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23},.......\}$
$A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33},.......\}$
....
....

$A_1 \cup A_2 \cup .... = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41},..........\}$

Esto es el proceso diagonal:

$a_{11}, a_{12}, a_{13},.......$
$a_{21}, a_{22}, a_{23},.......$
$a_{31}, a_{32}, a_{33},.......$

$N \rightarrow$	$A_1 \cup A_2 \cup ....$
1	a_{11}
2	a_{12}
3	a_{21}
4	a_{13}

2.- El producto finito de conjuntos numerables es numerable:

Para dos conjuntos: $A = \{a_1, a_2, a_3,.........\}$
$B = \{b_1, b_2, b_3,........\}$

A x B: $(a_1, b_1)\ (a_1, b_2)\ (a_1, b_3).............$
$(a_2, b_1)\ (a_2, b_2)\ (a_2, b_3).............$
$(a_3, b_1)\ (a_3, b_2)\ (a_3, b_3).............$

$N \rightarrow$	A
1	a_1
2	a_2
3	a_3

$N \rightarrow$	B
1	b_1
2	b_3
3	b_3

$N \rightarrow$	A x B
1	(a_1, b_1)
2	(a_1, b_2)
3	(a_2, b_1)

4 (a_1, b_3)

Definición:

Un número real se dice que es algebraico si es raíz de algún polinomio con coeficientes racionales (equivalente enteros).

$2/3\ x^2 - ½\ x + 1 \equiv 4x^2 - 3x + 6$

Ejemplo: Todos los números racionales son algebraicos.

A/b es raíz de x – a/b

También es algebraico todo real de la forma

$\sqrt[n]{a}$ con $n \in N$ y $a \in Q_+$ es raíz de x – a

Se puede probar que Π y e no son algebraicos. Los números reales que no son algebraicos se llaman transcendentes (Π y e son transcendentes).

Ejercicio:

3.- Ver que el conjunto $A \subset R$ de los números reales algebraicos es numerables.

La demostración se hace teniendo en cuenta lo siguiente:

a) Que Q es numerables
b) Que, como consecuencia de a) y de los ejercicios anteriores, el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en Q es numerable.
c) Que un polinomio de grado n con coeficientes en Q tiene, a lo sumo, n raíces reales.

<u>La Topología de R</u>

<u>Conceptos básicos:</u> para el estudio de dicha topología son necesarios lo concepto de:

- Intervalo: dado a, b $\in$ R con a < b:

Intervalo <u>cerrado</u> a, b es $[a, b] = \{x \in R / a \leq x \leq b\}$,
Intervalo <u>abierto</u>: $]a, b[= \{x \in R / a < x < b\}$

- Valor absoluto: Por definición, dado $x \in R$, $|x| = x$ si $x \geq 0$ ó $-x$ si $x < 0$.

<u>Ejercicio:</u>

Ver que $d(x, y) \in R \times R \rightarrow d(x, y) = |x - y| \in R$ es una métrica en R

a) $d(x, y) \geq 0$
b) $d(x, y) = 0 \Rightarrow |x - y| = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$
   $x = y \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow |x - y| = 0 \Rightarrow d(x, y) = 0$
c) $d(x, y) = d(y, x)$
   $|x - y| = |y - x|$
d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$
   $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$

La topología de R que vamos a estudiar es la inducida por esta métrica. Ocurre que dados a, b $\in$ R, a < b:

- $[a, b] = B\,[(a+b)/2, (a-b)/2]$
- $]a, b[= B\,](a+b)/2, (b-a)/2[$

Es también, es topología, "la topología del orden (<)".

Conceptos importantes:

- <u>a</u> es <u>interior</u> de <u>A</u> cuando, $\exists\, r > 0 /\ ]a-r, a+r[\ \subset A$
- <u>a</u> es <u>adherente</u> a <u>A</u> cuando, $\forall\, r > 0,\ ]a-r, a+r[\ \cap A \neq \emptyset$
- <u>a</u> es <u>acumulación</u> de <u>A</u> cuando $\forall\, r > 0,\ (]a-r, a+r[\ \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$
- <u>a</u> es un <u>punto aislado</u> de <u>A</u> cuando, $\exists\, r > 0 /\ ]a-r, a+r[\ \cap A = \{a\}$

- $\underline{a}$ es <u>frontera</u> de $\underline{A}$ cuando $\forall$ r > 0: $]a-r, a+r[\cap A \neq \varnothing$, $]a-r, a+r[\cap A^c \neq \varnothing$

Denotaremos:

$\mathring{A} = \{x \in R \,/\, x$ es interior a $A\}$ interior de A
$\bar{A} = \{x \in R \,/\, x$ es adherente a $A\}$ adherencia o clausura de A
$A' = \{x \in R \,/\, x$ es de acumulación de $A\}$ derivado
ais $A = \{x \in R \,/\, x$ es aislado de $A\}$
$A^f = \{x \in R \,/\, x$ es frontera de $A\}$ frontera de A

Ejemplo:

$N \subset R$
Int $N = \varnothing$ — ais$N = N$
Adhe. $N = N$ — $N^f = N$
$N' = \varnothing$
- $A = [0, 1]$

$\mathring{A} =]0, 1[$
$\bar{A} = [0,1]$
$A' = [0,1)$
ais $A = \varnothing$
f $A = [0, 1]$

Definición:

Se dice que $A \subset R$ es abierto cuando sus puntos son interiores, es decir, cuando $A = \mathring{A}$.

Ejercicio:

Ver que el conjunto de los abiertos de R es una topología en R.

Es decir, Q, R son abiertos.
La unión de abiertos es abierto.
La intersección finita de abiertos es abierto.

La intersección infinita de abiertos no es, en general, abierto. Por ejemplo:

$\cap\,]-1/n, 1/n[= \{0\}$ no es abierto.

Definición:

Un conjunto $A \subset R$ es cerrado cuando su complementario, A^c, es abierto.

Ejercicio:

Ver que $A \subset R$ es cerrado si sólo si $A = \bar{A}$

$\Rightarrow$)Si A cerrado $\Rightarrow$ A^c abierto $\Rightarrow$ $A^c = \mathring{A}$ $\Rightarrow$ Con lo cual en A hay finitos elementos de A
$\Rightarrow A = A^-$
$\Leftarrow$) $A = A^-$

Equivalentemente $A' \subset A$

Equivalentemente fr $A \subset A$

Ejercicio:

Ver que A es abierto $\Leftrightarrow$ es unión de intervalos abiertos.

$\Rightarrow$) A abierto $\Rightarrow A = \mathring{A} \Rightarrow\ ]a-r, a+r[\ \subset A \Rightarrow \bigcup\ ]a-r, a+r[\ \subset A$
$\Leftarrow$) Implicaciones al revés.

Debido a esto, el conjunto de los intervalos abiertos es una base de la toplogía de R.

Ejercicio:

Ver que A es abierto $\Leftrightarrow A \cap \text{fr } A = \varnothing$

$\Rightarrow$) Si A es abierto $\Rightarrow A = \mathring{A} \Rightarrow$ A es un intervalo abierto $]a-r, a+r[\Rightarrow \text{fr } A = \{a-r, a+r\}$ pero $a-r$, $a+r \notin A$
$\Leftarrow$) Si $A \cap \text{fr. } A = \varnothing \Rightarrow$ Los puntos de A son interiores $\Rightarrow$ A es abierto.

Proposición:

$$\forall\ a, b \in R,\ a < b,\ \exists\ q \in Q,\ p \notin Q \ /\ \begin{array}{l} a < p < b \\ a < q < b \end{array}$$

Entre dos números reales cualesquiera existen siempre números racionales e irracionales (los racionales e irracionales están "en todos los sitios" en R)

Demostración:

Supongamos $0 < a < b$

Por la propiedad arquimediana, dado $c > 0$ (racional (1) o irracional (Π)) existe $n \in N$ tal que $c < n\ (b-a) = c/n < b-a$

Por la propiedad arquimediana, también, existe $m \in N$ tal que $b < m\ c/n$

Con lo que existe $k \in N$, $k < m$ tal que $a < k\ c/n < b$, esto es cierto por que la distancia de "a" a "b" es mayor que $|c|$ ($c/n < b-a$)

Si $c \in Q$, $k\ c/n \in Q$
Si $c \notin Q$, $k\ c/n \notin Q$

Si $a \leq 0 < b$ todo es más simple, pues el propio c/n estaría entre a y b.

Si $a < b \leq 0$, todo sería análogo al primer caso.

Supuesto lo anterior, nos preguntamos por

$Q^{\circ} = \varnothing$
$Q^{-} = R$ porque en todo intervalo centrado en $a \in R$ hay $x \in Q$
$Q' = R$
Fr $Q = R$ porque todo intervalo centrado en $a \in R$ hay $x \in Q$ y $x' \in I$.
Ais. $Q = \varnothing$ porque todo intervalo centrado tiene irracionales.

Por verificarse que la adherencia de Q es igual a R (Q^{-}=R) se dice que Q es <u>denso</u> en R.

<u>Definición:</u>

Un conjunto $A \subset R$ es denso en otro $B \subset R$ cuando $A \subset B \subset A^{-}$

<u>Definición:</u>

$a \in R$ es punto de acumulación de $A \subset R$ cuando en todo intervalo centrado en a hay algún punto de A que no es a, es decir, $\forall\ r > 0$ (]a-r, a+r[\ {a}) $\cap A \neq \emptyset$)

<u>Ejercicio:</u>

Ver que si a es punto de acumulación de A, entonces en todo intervalo centrado en a hay infinitos puntos de A.

Si en un intervalo centrado en a existe un punto de A que no es a, bastaría coger un siguiente intervalo con extremo en ese nuevo punto de A, con lo cual se encontraría otro punto de A en ese nuevo intervalo, si repetimos este proceso infinitas veces nos dará como resultado que existen infinito puntos en un intervalo centrado en a de A, siempre que éste sea un punto de acumulación.

Teorema de Bolzano:

Todo conjunto infinito (con infinitos elementos) y acotado de números reales tiene algún punto de acumulación.

<u>Demostración:</u>

Sea $A \subset R$ infinito y acotado, esto último significa que $A \subset [a, b]$. Consideramos el conjunto C = {$x \in \in$ / hay infinitos elementos de A mayores que x}. C es no vacio, $a \in C$, C es acotado superiormente, b es cota superior de C. Por el TFO esxiste p = sup C.

Vamos a ver que p es punto de acumulación de A.

En efecto, si en]p-r, p+r[(con r > 0), solo hubiera finitos elementos de A, p-r sería una cota superior de C más pequeña que p, con lo que p no sería supremo de C

Nótese que a la derecha de p+r sólo puede haber finitos elemento de A, o p no sería cota superior de C.

<u>Otra demostración:</u>

$A \subset [a, b]$

Dividimos [a, b] por la mitad y llamamos $[x_1, y_1]$ al intervalo de los que tiene infinitos elementos de A (a lo sumo son los dos y llamamos $[x_1, y_1]$ a un de ellos)

Dividimos $[x_1, y_1]$ por la mitad y llamamos $[x_2, y_2]$ al intervalo de los dos que tenga infinitos elementos. Repetimos indefinidamente este proceso.

No es difícil ver que α =sup $\{x_n / n \in N\}$ = inf. $\{y_n / n \in N\}$, qi que x es punto de acumulación de A.

Ejemplos:

- Ese teorema es falso en Q. Por ejemplo el conjunto infinito acotado {1, 1’4, 1’41, 1’414,....} de números racionales no tiene en Q ningún punto de acumulación (tampoco tenía supremo).

En R es conjunto si tiene punto de acumulación, $\sqrt{2}$

- El conjunto N es infinito pero no acotado. No tiene ningún punto de acumulación.

Definición:

Diremos que $\{G_i \,/\, i \in I\}$ es un recubrimiento de $A \subset R$, cuando $A \subset \cup G_i$

Se dice que es un recubrimiento abierto cuando todos los G_i son abiertos.

Proposición: (Lindelof)

Cualquiera que sea el conjunto $A \subset R$ y cualquiera que el recubrimiento abierto, infinito no numerable $\{G_i \,/\, i \in I\}$ de A, existen $i_1, i_2, ... \in I$ (finitos numerables índices) tales que $\{G_{ik} \,/\, k = 1, 2, ...\}$ es también recubrimiento de A. En otras palabras, de todo recubrimiento abierto (infinito no numerable) de A, se puede extraer un subrecubrimiento finito numerable.

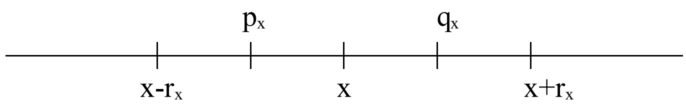
Ejemplo:

$\{\{x\} \,/\, x \in R\}$ es recubrimiento (no abierto) de R, que es no numerable (R no es numerable) y del que no se puede extraer ningún subrecubrimiento (ni numerable ni no), no se puede quitar ni uno, so pena de que deje de ser numerable.

$R \subset \cup \{x\}$

Demostración:

Sea $\{G_i \,/\, i \in I\}$ un recubrimiento abierto, infinito no numerable de A. Entonces, $\forall\, x \in A$ existe $i_x \in I$ tal que $x \in G_{ix}$. Como G_{ix} es abierto, existe $r_x > 0$ tal que $]x-r_x, x+r_x[\subset G_{ix}$ Como Q es denso en R existen $p_x, q_x \in Q$ tal que $x-r_x < p_x < x < q_x < x+r_x$



Evidentemente $\{]p_x, q_x[\,/\, x \in A\}$ que es finito o numerable (Q x Q lo es) recubre a A. Basta asociar a cada $]p_x, q_x[$ uno de los G_i que lo contiene para obtener el recubrimiento buscado

Ejercicio:

Sabemos que un conjunto es abierto si sólo si es unión de intervalos abiertos (los intervalos abiertos son la base de la topología de R). Ver que todo abierto se puede obtener como unión de intervalos abiertos de la forma $]a, b[$, con $a, b \in Q$, $a < b$. Como el conjunto de esos intervalos es numerable (Q x Q), resulta que todo R se puede obtener como unión de intervalos abiertos.

Definición:

Un conjunto $A \subset R$ se dice compacto cuando de todo recubrimiento abierto de él se puede extraer un subrecubrimiento finito.

Ejemplos de conjuntos no compactos:

Un recubrimiento de N del que no se puede extraer ningún subrecubrimiento finito es:

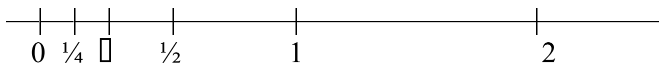
$\{]n-½, n+½[\ / \ n \in N\}$ Basta quitar uno para que deje de ser recubrimiento.
$\{]n-7, n+7[\ / \ n \in N\}$ podríamos quitar bastantes, pero finitos de ellos no recubren.
$\{]-1, n[\ / \ n \in N\}$ podemos quitar todos los que queramos, dejando infinitos sigue siendo un recubrimiento, pero finitos de ellos no son recubrimiento.

Un ejemplo de conjuntos compactos son los conjuntos finitos.

$A = \{1/n \ / \ n \in N\}$ no es compacto

Un recubrimiento abierto de él, del que se puede extraer un subrecubrimiento finito es, por ejemplo:

$\{]1/n, 2[\ / \ n \in N\}$



Nótese que si quitamos los que sean (finitos o infinitos), pero dejando infinitos, eso sigue siendo un recubrimiento. Pero si dejamos sólo finitos, deja de ser recubrimiento.

Un recubrimiento del que no se puede quitar ninguno es por ejemplo:

$\{]1/n-1/2n(n+1), 1/n+1/2n(n+1)[\ / \ n \in N\}$

Si es compacto, sin embargo, el conjunto $\{1/n \ / \ n \in N\} \cup \{0\}$, es compacto porque si $\{G_i \ / \ i \in I\}$ es un recubrimiento de él, entonces existe i_0 tal que $0 \in G_{i0}$.

Pues bien, como la sucesión $(1/n)$ es convergente a 0 y G_{i0} es abierto, es decir, contiene algún intervalo de la forma $]-\varepsilon, \varepsilon[$, con $\varepsilon > 0$, resulta que están "todos salvo finitos" lo x_n's. UN subrecubrimiento finito viene dado, entonces por G_{io} y una "boina" para cada uno de sus finitos.

Teorema: (Bolzano-Weierstrass, Heine-Bozel-Lebesgre)

Sea $A \subset R$. Son equivalentes las siguientes proposiciones:

1) A es cerrado y acotado.
2) Toda parte infinita de A tiene un punto de acumulación que está en A.
3) A es compacto.

Hemos tomado la propiedad de Heine-Bozel-Lebesgre (la más complicada de las tres) como definición de conjunto compacto porque esa es la definición usual en espacios topológicos generales. Nuestro teorema dice que las tres son equivalentes en el espacio topológico concreto que estamos estudiando.

Se verá en la asignatura de topología que $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow$ A cerrado

En particular, en los espacios métricos particulares (espacio topológico cuya topología está inducida por una métrica) $3 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 1$.

<u>Demostración:</u>

Vamos a ver que $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$

$(1 \Rightarrow 2)$ no es sencillo, pero ya lo sabemos, es particularmente el teorema de Bolzano.

En efecto, sea A cerrado y acotado (si A es finito, no hay nada que ver). Como es acotado, por el teorema de Bolzano, toda parte infinita de él tiene algún punto de acumulación (punto de acumulación de todo A, por tanto) y, como es cerrado, partenece a él.

$(2 \Rightarrow 3)$ Por el teorema de Lindelof: cualquiera que sea A, de todo recubrimiento abierto (no numerable) de A se puede extraer un subrecubrimiento numerable. Podemos suponer que el recubrimiento que tenemos de A es numerable, de la forma $\{G_n / n \in N\}$. Se trata de ver que si A verifica (2) entonces se puede extraer de él un subrecubrimiento finito.

Si G_1 deja fuera finitos elementos de A, ya está (no quedamos con G_1 y un G_n (el que sea) para cada uno de los finitos de fuera).

En otro caso, tenemos $x_1 \in A \setminus G_1$. Si $G_1 \cup G_2$ deja fuera finitos de A ya está.

En otro caso, tomamos $x_2 \in A \setminus (G_1 \cup G_2)$, $x_2 \neq x_1$. Si $G_1 \cup G_2 \cup G_3$ deja fuera finitos de A, ya está.

En otro caso, tomamos $x_3 \in A \setminus (G_1 \cup G_2 \cup G_3)$, $x_3 \neq x_1$, $x_3 \neq x_2$, etc.....

Si el conjunto así construido $\{x_1, x_2,......\}$ es finito, ya está. Si es infinito entonces, por 2 tiene un punto de acumulación $a \in A$. Por tanto, existe $m \in N$ / $a \in G_m$. Por ser G_m abierto y a punto de acumulación de $\{x_n / n \in N\}$ en G_m están infinitos elementos de $\{x_n / n \in N\}$en <u>contradicción</u> con la forma en que se han obtenido los x_n; en G_m están, a lo sumo, $x_1, x_2, ..., x_{m-1}$

Luego el conjunto $\{x_1, x_2,......\}$ es finito (tal vez vacío). Como queríamos demostrar.

$(3 \Rightarrow 1)$ o lo que es lo mismo (contrarrecíproco) no $1 \Rightarrow$ no 3

(1) es cerrado y acotado
(no 1) es no cerrado ó no acotado

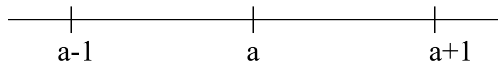
Así que, lo que tenemos que ver es que: no cerrado $\Rightarrow$ no compacto.
no acotado $\Rightarrow$ no compacto.

Supongamos que A <u>no es cerrado</u>. Esto significa que existe a punto de acumulación de A, tal que $a \notin A$ ($a \in A' \setminus A$)

Pues bien, un recubrimiento abierto de A, del que no se puede extraer ningún subrecubrimiento finito es por ejemplo:

$\{[a-1/n, a+1/n]^c \,/\, n \in N\}$

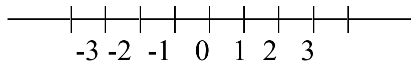
$A \subset U \{[a-1/n, a+1/n]^c \,/\, n \in N\} = R \setminus \{a\}$



Si A <u>no es acotado</u> entonces un recubrimiento abierto de A del que no se puede extraer ningún subrecubrimiento finito es por ejemplo:

$\{]-n, n[\,/\, n \in N\}$

$A \subset U\,]-n, n[= R$



<u>Corolario:</u>

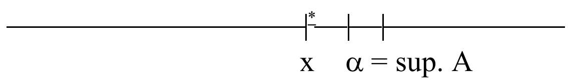
Si A es compacto y no vacío entonces inf. A, sup. A $\in$ A.

<u>Demostración:</u>

Por ser A acotado y no vacío existen, por el TFO, inf. A y sup. A.

Si inf. A ó sup. A es punto aislado de A, por supuesto que pertenece a A.

Si inf. A y sup. A no fueran de A, si no son puntos aislados entonces es fácil ver que son puntos de acumulación de A y por ser cerrado, pertenecen a él



Si α no es de A y aquí* no hay puntos de A entonces x es cota superior de A más pequeña que α.

Sucesiones y series de números reales:

Una sucesión de números reales es, formalmente, una aplicación x: $n \in N \to x_n \in R$, la representaremos como (x_n), $(x_n)_{n \in N}$, $\{x_1, x_2, ...\}$

En el conjunto ξ de las sucesiones de números reales se definen las operaciones:

- Adición: $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$
- Multiplicación: $(x_n)\ (y_n) = (x_n\ y_n)$
- Multiplicación por escalares: $\lambda(x_n) = (\lambda x_n)$

(ξ, +, ·, ·esc) es en álgebra sobre R conmutativo y unitario con divisores de 0, es decir, hay elementos que no son el 0 cuyo producto es 0.

Por ejemplo: (1, 0, 1, 0, 1, 0,.........) (0, 3, 0, 3, 0, 3,..........) = (0, 0, 0, 0, 0, 0,.........)

La adición es asociativa, conmutativa, neutro y opuesto.

La multiplicación es asociativa, conmutativa y con unidad

La multiplicación es distributiva respecto a la adición.

$\lambda[\mu(x_n)] = [\lambda\mu]\ (x_n)$
$\lambda[(x_n) + (y_n)] = \lambda(x_n) + \lambda(y_n)$
$[\lambda + \mu]\ (x_n) = \lambda(x_n) + \mu(y_n)$
$1\ (x_n) = (x_n)$
$\lambda[(x_n)\ (y_n)] = [\lambda(x_n)]\ (y_n)$

(ξ, +) Es un grupo abeliano
(ξ, +, ·) es anillo conmutativo y unitario |
(ξ, +, esc) espacio vectorial sobre R | + la prop. 14 álgebra conmutativa y unitaria sobre R.

Definición:

(x_n) es convergente a “a”, $\lim (x_n) = a$ cuando:

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \upsilon \in N / n > \upsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

Definición:

(x_n) es de Cauchy cuando:

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \upsilon \in N / p, q > \upsilon \Rightarrow |x_p - x_q| < \varepsilon$

Vimos para las sucesiones en Q que convergente $\Rightarrow$ Cauchy.
Veremos para las sucesiones en R que convergente $\Leftrightarrow$ Cauchy.

Vimos para las sucesiones en Q que toda sucesión de Cauchy (o convergente) es acotada. El recíproco es falso (0, 1, 0, 1, 0, 1,........) es acotada pero no es de Cauchy.

Demostración:

Sea (x_n) de Cauchy, esto significa que:

(dado $1 > 0$) / $\exists\ \upsilon \in N / n > 0 \Rightarrow |x_n - x_\upsilon| < 1$

Por tanto:

$|x_n| - |x_\upsilon| \leq |x_n - x_\upsilon| < 1 \Rightarrow |x_n| < 1 + |x_\upsilon|$

Luego $M = \text{máx.}\ \{|x_1|, |x_2|, \ldots\ldots.., |x_{\upsilon-1}|, 1 + |x_\upsilon|\}$ es tal que $\forall\ n \in N$, $|x_n| \leq M$

También vimos que la suma y el producto de sucesiones de Cauchy es de Cauchy (ver construcción de R a partir de Q). Ahora consideramos el producto por escalares.

Teorema:

Si (x_n) es una sucesión de Cauchy de números reales (λx_n) es también de Cauchy.

Fijemos arbitrariamente el número real $r > 0$.

$m \geq \upsilon_0,\ n \geq \upsilon_0 \Rightarrow |x_m - x_n| \leq r/\lambda$

Luego se tiene:

$|(x_m + x_m + ..^{\lambda \text{ veces}}.....+x_m) - (x_n + x_n +..^{\lambda \text{ veces}}.....+x_n)| \leq r/\lambda + ...^{\lambda \text{ veces}}....+ r/\lambda = (r/\lambda) \cdot \lambda$

Luego $|(x_m + x_m + ..^{\lambda \text{ veces}}.....+x_m) - (x_n + x_n +..^{\lambda \text{ veces}}.....+x_n)| \leq r$

Definición:

Se dice que $a \in R$ es valor de adherencia de (x_n) cuando:

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \forall\ \upsilon \in N,\ \exists\ n > \upsilon\ /\ |x_n - a| < \varepsilon$

Es decir, en $]a-\varepsilon,\ a+\varepsilon[$ hay infinitos, pero fuera de él pueden quedar finitos o infinitos.

(Ver que la definición dice exactamente lo anterior)

Ejemplos:

(1, 2, 1, 2, 1, 2, ...) Tiene a 1 y 2 como valores de adherencia.
(1, 2, 1, 3, 1, 4, ...) Tiene a 1 como único valor de adherencia.
(1, ½, 1, 1/3, 1, ¼, ...) Tiene a 1 y 0 como valores de adherencia.
(1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, ...) Tiene a N como conjunto de valores de adherencia.
(1, 2, 3, 4, ...) No tiene ningún valor de adherencia.

Importante: Sabemos que Q es numerable y es denso en R (en todo entorno de todo número real hay infinitos racionales), por tanto existe una sucesión (x_n) cuyo conjunto de términos es todo Q.

Al numerar Q resulta la siguiente sucesión: {0, 1/1, -1/1, ½, 2/2, 2/1, -2/1, -2/2, -1/2,...}
¿Cuáles son los valores de adherencia de esta sucesión? Todos los números reales (R).

Proposición:

$A \subset R$ es valor de adherencia de x_n si sólo si:

- o a se repite infinitas veces en la sucesión.
- o a es punto de acumulación del conjunto de los términos de la sucesión.

Naturalmente pueden ocurrir las dos cosas a la vez: (0, 1, 0, ½, 0, 1/3....)

Demostración:

Si A es valor de adherencia de x_n entonces $\forall\ \varepsilon > 0,\ \forall\ \upsilon \in N,\ \exists\ n > \upsilon\ /\ |x_n - a| < \varepsilon$

Luego en $]a-\varepsilon,\ a+\varepsilon[$ hay infinitos términos de la sucesión x_n, si en dicho intervalo no hay puntos distintos a "a", a se repite infinitas veces, si por el contrario hay términos diferentes de a entonces a es un punto de acumulación de x_n.

Proposición:

Toda sucesión acotada de números reales tiene algún valor de adherencia.

Demostración:

Si el conjunto de los términos de la sucesión es finito entonces alguno se repite infinitas veces y es por tanto valor de adherencia de dicho conjunto, si es infinito, como es acotado tiene algún punto de acumulación de acumulación (Tª de Bolzano) que es, por tanto, valor de adherencia.

Proposición:

El conjunto de los valores de adherencia de una sucesión es cerrado.

Demostración:

Sea A el conjunto de los valores de adherencia de (x_n). Hemos de probar cualquiera de estas dos cosas:

1º A contiene a todos sus puntos de acumulación.(Ejercicio)
2º A es cerrado.

2º Que A^c es abierto significa que para todo $a \in A \; \exists \; r > 0 \; / \;]a-r, a+r[\subset A^c$. Si esto no fuera cierto, en todo $]a-r, a+r[$, con $r > 0$, habría puntos de A. Por tanto, en todo $]a-r, a+r[$ habria infinitos términos de (x_n) y a sería valor de adherencia de (x_n), es decir $a \notin A^c$.

<u>Corlario:</u>

Si (x_n) es una sucesión acotada entonces el conjunto de sus valores de adherencia es compacto. Por consiguiente, existen el mínimo y el máximo de los valores de adherencia de la sucesión, los cuales se llaman respectivamente límite inferior de la sucesión y límite superior de la sucesión.

<u>Ejemplos:</u>

Lim inf (1, 2, 1, 2,......) = 1 lim sup (1, 2, 1, 2, 1, 2........) = 2
Lim inf (1/n) = 0 =lim sup (1/n)
Lim inf (1, 1,2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, ...) = 1
Lim sup (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, ...) = no existe.

Una sucesión no acotada inferiormente (superiormente) no tiene límite inferior (superior). A veces se dice que dicho límite es "$-\infty$" $(+\infty)$

El ser acotada inferiormente (superiormente) no garantiza la existencia de límite inferior (superior). Por ejemplo (1, 2, 3, 4,........)

Ni que decir tiene que si (x_n) es convergente, su límite es valor de adherencia de (x_n)

Más aún, hemos visto que toda sucesión acotada de números reales tiene algún valor de adherencia, (en Q esto es falso. Por ejemplo: la sucesión (1, 1'4, 1'41, 1'414,.....) no tiene ningún valor de adherencia en Q. Si lo tiene en R; es convergente a $\sqrt{2}$)

<u>Proposición:</u>

(x_n) acotada, es convergente si y sólo si tiene un único valor de adherencia (que es su límite).

<u>Demostración:</u>

Si (x_n) converge a "a", entonces en todo intervalo $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ están todos lo x_n's, salvo finitos.

Por tanto en $]-\infty, a-\varepsilon[$ y en $]a+\varepsilon, +\infty[$ hay solo finitos x_n's y, por tanto, en esas semirectas no puede haber ningún punto de adherencia de (x_n). Como eso es cierto para todo $\varepsilon > 0$, en $]-\infty, a[$ y $]a, +\infty[$ no puede haber ningún punto de adherencia. Por otra parte, ya sabemos que toda sucesión convergente es acotada.

$\Rightarrow$) $(x_n) \to a \Rightarrow (x_n)$ acotada, sólo tiene a "a" como valor de adherencia.

$\Leftarrow$) (x_n) es acotada $\Rightarrow$ Tiene un único valor de adherencia $\Rightarrow$ (x_n) es acotada?

<u>Teorema (de amplitud de R)</u>

Toda sucesión de Cauchy en R es convergente (el espacio métrico R $_{d(x,y)=|x-y|}$ es completo).

<u>Demostración:</u>

Sea (x_n) de Cauchy. Entonces es acotada y, por tanto, tiene algún valor de adherencia. Con lo que acabamos de ver, bastará probar que ese valor de adherencia es único.

Supongamos que a y b fueran valores de adherencia distintos de (x_n). Sea $\varepsilon=|a-b|/3$

En $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ y en $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$ hay infinitos términos de la sucesión.

Por tanto, existen infinitos p, q $\in$ N tales que: $|x_p-x_q| > \varepsilon$ y x_n no sería de Cauchy.

<u>Definición:</u>

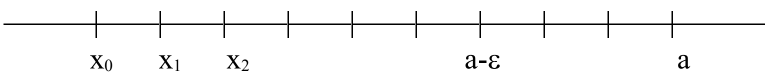
Se dice (x_n) es <u>monótona creciente</u> (decreciente) cuando, $\forall$ n $\in$ N, $x_n \leq x_{n+1}$ (respectivamente $x_n \geq x_{n+1}$), la monotonía se dice que es <u>estricta</u> cuando el signo es < (respect. >)

<u>Proposición:</u>

Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Además, si es creciente lim (x_n)=sup $\{x_n / n \in N\}$, si es decreciente limi (x_n) = inf. $\{x_n / n \in N\}$

<u>Demostración:</u>

Supongamos que (x_n) es creciente y acotada. Sea a el sup $\{x_n / n \in N\}$



De la definición de sup. Se sigue que:

-a la derecha de a no hay ningún x_n
-$\forall$ $\varepsilon > 0$, a la derecha de a-ε hay algún x_n. Sea este el x_υ. Entonces por ser (x_n) creciente,
$n>\upsilon \Rightarrow a-\varepsilon < x_n \leq a$
$|x_n - a| < \varepsilon$ (c.q.d.)

<u>Notación:</u>

Lim $(x_n) = a \Leftrightarrow (x_n) \to a$

Para indicar que (x_n) es creciente y que a es su límite se puede escribir: $(x_n) \nearrow a$.
Para indicar que es decreciente y que a es su límite: $(x_n) \searrow a$.

Supongamos que (x_n) es acotada, además tiene algún punto de adherencia.

El conjunto de los valores de adherencia es por tanto acotado. Además el conjunto de los valores de adherencia de cualquier sucesión es un conjunto acotado (podría ser $\emptyset$)

Por tanto, el conjunto de los valores de adherencia de una sucesión acotada es un conjunto no vacío, cerrado y acotado (compacto)

Por ser ese conjunto compacto y no vacío existen el mínimo y el máximo de sus adherentes. Por definición, este mínimo y máximo son el límite inferior y el límite superior de (x_n).

<u>Ejercicio:</u> Supongamos que (x_n) es una sucesión acotada.

Demostrar que lim. Inf.(x_n)=sup $\{\inf\{x_0, x_1, x_2,........\}, \inf\{x_1, x_2,..........\}, \inf\{x_2,...\}....\}$

Lim. sup $(x_n) = \inf \{\sup \{x_0, x_1,....\}, \sup \{x_1, x_2,....\}, \sup \{x_2, x_3,.........\}.....\}$

Indicación:

Por ser x_n acotada existen esos inf's y sup's La sucesión $(\inf\{x_0, x_1,...\}, \inf\{x_1, x_2,...\}...)$ es monótona creciente.

Suponemos: Lim inf (x_n) = sup $[\inf \{x_0, x_1, x_2,...\}, \inf \{x_1, x_2,...\}...] = \alpha$

Todos los inf.'s están en $(-\infty, \alpha)$ y en $(\alpha+\varepsilon, \alpha)$ hay algún inf pues sino, α no sería el límite, pero al ser la sucesión de inf's es creciente, en este último intervalo están todos los inf's salvo finitos. Falta Acabarlo.

<u>Algunos ejemplos interesantes de límites:</u>

- $\forall\ a > 0$, $\lim \sqrt[n]{a} = 1$

Si $a = 1$ evidente.
Si $a > 1$ escribimos $x_n = \sqrt[n]{a} - 1$
Se trata de probar que $(x_n) \to 0$
$(x_n + 1)^n = 1 + \binom{n}{1} x_n + \binom{n}{2} x_n^2 + ...> 1 + n\, x_n \Rightarrow x_n < (a-1)/n \to 0$

Ejercicio, verlo para $a < 1$ (Indicación: tomar $1/a$)

- $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

$n = (\sqrt[n]{n} - 1 +1)^n = 1 + \binom{n}{1} (\sqrt[n]{n} - 1) + \binom{n}{2} (\sqrt[n]{n} - 1)^2 +.......> 1 + [n(n-1)/2] (\sqrt[n]{n} - 1)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \leq (\sqrt[n]{n} - 1)^2 \leq 2/(n+1) \to 0$

Ejercicio: Ver que $(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \to 0 \Rightarrow (\sqrt[n]{n} - 1) \to 0$

- $\lim \sqrt[n]{n^p} = 1$ (Ejercicio)

- $\forall\ a >1$, $\forall\ p$, $\lim n^p/a^n = 0$

Dice que la "exponencial" puede con la "potencial": el producto de ambas va a donde manda la exponencial. Si $p < 0$ evidente. Si $p > 0$ el numerador va a $+\infty$ y el denominador también.

$n^p (1/a^n) \to 0$

$b, p > 0, n^p/(1+b)^n \to 0$

Falta acabarlo.

Límites infinitos:

Aunque cuando hablamos de la convergencia, o del límite, de una sucesión, dicha convergencia o dicho límite, es a (un) nº real, a veces también se habla de convergencia a $+\infty$ ó $-\infty$ (de límites infinitos) El contexto suele dejar claro si se están admitiendo "límites infinitos".

Definición:

(x_n) converge a $+\infty$ ($-\infty$) cuando,

$\forall\ \rho \in R, \exists\ \upsilon \in N / n > \upsilon \Rightarrow x_n > \rho$ (respectivamente $x_n < \rho$)

Ejemplos: $(1, 2, 3, \ldots\ldots.) \to +\infty$
$(1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6, 5, 7, 6, 8, \ldots\ldots\ldots.) \to +\infty$

La primera de esas sucesiones es monótona creciente y no acotada, es evidente que cualquier sucesión de este tipo "converge" a $+\infty$.

La segunda no es monótona.

$(1, 2, 1, 3, 1, 4, \ldots\ldots)$ no converge a nada, ni a un número, ni a $+\infty$ ni a $-\infty$.

Por lo mismo, a veces se admiten como valores de adherencia (en particular, como "límite inf." Ó "límite sup") a $+\infty$ y $-\infty$.

Definición:

$+\infty$ ($-\infty$) es valor de adherencia de (x_n) cuando,

$\forall\ \rho \in R, \forall\ \upsilon \in N, \exists\ n > \upsilon / x_n > \rho$ (respectivamente $x_n < \rho$)

Si un sucesión es no acotada superiormente (inferiormente) su límite superior (inferior) es $+\infty$ ($-\infty$).

Lim sup $(1, 2, 1, 3, 1, 4, \ldots\ldots.) = +\infty$
Lim inf $(1, 2, 1, 3, 1, 4, \ldots\ldots.) = 1$
Lim inf $(1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots) = +\infty$ porque sólo tiene como valor de adherencia $+\infty$ = lim sup. $(1, 2, 3, \ldots..)$

Con este acuerdo (admitir $+\infty$ y $-\infty$ como posibles valores de adherencia), se verifica:

- Toda sucesión (acotada o no) tiene algún valor de adherencia.
- Toda sucesión (acotada o no) tiene lim inf y sup

$R^- = R \cup \{-\infty, +\infty\}$

Es muy fácil ver que:

$(x_n) \to +\infty$, $(y_n) \to a$ $(-\infty < a \leq +\infty) \Rightarrow (x_n + y_n) \to +\infty$

$(x_n) \to +\infty$, (y_n) es acotada inferiormente $\Rightarrow (x_n + y_n) \to +\infty$

$(x_n) \to +\infty$, $(y_n) \to a$ $(a\neq 0) \Rightarrow (x_n \cdot y_n) \to +\infty$ si $0 < a \leq +\infty$
$-\infty$ si $-\infty \leq a < 0$

$(x_n) \to +\infty$, (y_n) está acotada inferiormente por $a > 0$ (superiormente por $a < 0$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow (x_n \cdot y_n) \to +\infty$ (respectivamente $-\infty$)

Sin embargo,

Si $(x_n) \to +\infty$ e $(y_n) \to -\infty$, entonces a $(x_n + y_n)$ le puede pasar cualquier cosa.

Ejemplos:

$(x_n) = (1, 2, 3,.......)$, $(y_n) = (-1, -2, -3,.....)$, $(x_n + y_n) = (0, 0, 0,.......) \to 0$

$(x_n) = (1, 2, 3,......)$, $(y_n) = (-2, -4, -6,.....)$, $(x_n + y_n) = (-1, -2, -3,......) \to -\infty$

$(x_n) = (1, 2, 3,....)$, $(y_n) = (-2, -1, -5, -2, -8, -3,.......)$, $(x_n + y_n) = (-1, 1, -2, 2, -3, 3,....)$ no converge a nada

Si $(x_n) \to +\infty$ $(-\infty)$ e $(y_n) \to 0$ entonces $(x_n + y_n)$ cualquier cosa:

$(1, 2, 3,.......)$ $(1, ½, 1/3,......) = (1, 1, 1,.......) \to 1$

$(1, 2, 3,......)$ $(1, ½^2, 1/3^2,........) = (1, ½, 1/3,........) \to 0$

$(1, 2, 3,......)$ $(1, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3},.....) = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3},........) \to +\infty$

$(1, 2, 3, ...)$ $(1, ½^2, 1/\sqrt{3}, ¼^2, 1/\sqrt{5}, 1/6^2, 1/\sqrt{7},......) = (1, ½, \sqrt{3}, ¼, \sqrt{5},......)$

Series numéricas:

Vamos a tratar de dar sentido a las sumas infinitas (infinitos numerables sumandos).

$$x_1 + x_2 +............+ x_n +.......$$

donde los x_k son números reales.

Para ello sea (x_n) una sucesión de números reales a partir de ella construimos la sucesión de sumas parciales de aquella:

$$(x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3,........),$$

la cual se suele llamar serie de términos $(x_1, x_2, x_3,....)$ y denotar: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Definición:

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ se dice sumable, o convergente, a $a\in R$ cuando la sucesión de sumas parciales $(x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3.....)$ es convergente a a.

Es decir, cuando, $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \upsilon \in N / n > \upsilon \Rightarrow |{}^{n}\sum_{k=1} x_k - a| < \varepsilon$

Proposición:

$^{\infty}\sum_{n=1}$ es sumable si sólo si es de Cauchy, es decir, tal que,

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \upsilon \in N / \upsilon < p < q \Rightarrow |{}^{q}\sum_{k=p} x_k| < \varepsilon$$

Demostración:

Si $^{\infty}\sum_{n=1} x_n$ es sumable entonces:

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \upsilon \in N / n > \upsilon \Rightarrow |{}^{n}\sum_{k=1} x_k - a| < \varepsilon$,

es decir, es convergente a a, por consiguiente es de Cauchy, así pues:

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \upsilon \in N / p, q > \upsilon \Rightarrow |{}^{q}\sum_{k=p} x_k| < \varepsilon$

Corolario:

Condición necesaria para que la serie $^{\infty}\sum_{n=1} x_n$ sea sumable es que la sucesión de sus términos converja a cero, lim $(x_n) = 0$.

Demostración:

Tómese q = p es la proposición anterior (Verlo)

$^{\infty}\sum_{n=1} x_n$ es sumable $\Rightarrow (x_n) \rightarrow 0$

Veamos que el recíproco no se da en alguno de los ejemplos que siguen:

Ejemplos:

1) $(x_n) = (1, 1, 1, ...)$ la sucesión de sumas parciales es $(1, 2, 3, ...)$.

2) $(x_n) = (1, -1, 1, -1,.....)$ la sucesión de sumas parciales es $(1, 0, 1, 0, 1, 0,......)$ no convergente. En otras palabras, la serie $^{\infty}\sum_{n=1} (-1)^{n+1}$ no es sumable.

En ambos casos (x_n) no converge a 0, en el 1º converge a 1 y en el segundo no converge a nada, pues lim inf $\neq$ lim sup.

3) $^{\infty}\sum_{n=1} 1/2^n$ Como hemos dicho, será sumable si la sucesión de sumas parciales $({}^{n}\sum_{k=1} 1/2^k)$ es convergente (□, ½+1/4, ½+1/4+1/8,.....). El témino n-ésimo de estas sumas parciales es la suma de una progresión geométrica de primer término ½ y razón ½.

$^{n}\sum_{k=1} 1/2^k = ½ + ½^2 + ½^3 +........+ 1/2^n =$ (1er término – siguiente al último) / (1-razón) =
$= (½ - 1/2^{n+1})/ ½ = 1 - 1/2^n \rightarrow 1$

La serie $^{\infty}\sum_{n=1} 1/2^n$ es sumable y su suma es 1.

Naturalmente $(1/2^n) \rightarrow 0$

Ejercicio:

Estudiar la sumabilidad de las series geométricas $\sum_{n=0}^{\infty} a\, r^n$, donde a, r $\in$ R. Si a=0 evid.

Si a $\neq 0$ ver que la serie es sumable si sólo si $|r|<1$. Ver que, en dicho caso, la suma es a/ 1-r.

(ar, $ar + ar^2$, $ar + ar^2 + ar^3$,........) El término n-ésimo de estas sumas parciales es la suma de una progresión geométrica:

$\sum_{k=1}^{n} a\, r^k = ar + ar^2 + \dots\dots\dots + ar^n = (ar-ar^{n+1})/1-r = (a/1-r)\,(r-r^{n+1}) \xrightarrow{\text{se utiliza } |r|<1} a/1-r$

4) La serie armónica:

$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ se verifica que $1/n \rightarrow 0$, luego puede ser sumable.

A diferencia del caso anterior, no conocemos una fórmula que nos diga cuanto vale.

$$1 + ½ + \dots\dots\dots + 1/n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$$

$1+ ½ + 1/3 + ¼ + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + \dots\dots\dots + 1/15 + 1/16 + 1/17$

$S_1 = 1 > ½$
$S_2 = 1 + ½ >2/2$
$S_4 > 3/2$
$S_8 > 4/2$
$S_{16} > 5/2$
$S_n > (n+1)/2$

Por otra parte como los términos de esta serie son positivo, la sucesión de sumas parciales es monótona creciente: $S_1 < S_2 < S_3 <$..... y ocurre que sustracción $S_1 < S_2 < S_4 < S_8 <$... va a $+\infty$ Luego (S_n) va a $+\infty \Rightarrow$ la serie no es sumable.

Este ejemplo de serie armónica nos falla para poder afirmar que $(x_n) \rightarrow 0$ no implica $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sumable

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es sumable o convergente, cuando su sucesión de sumas parciales: $(s_1, s_2, s_3, \dots\dots\dots) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \dots\dots\dots)$ es convergente. En dicho caso, al límite de esta sucesión se llama suma de serie y se suele representar de la misma forma que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Ya el contexto dice de lo que hablamos es la serie, o caso de ser sumable de su suma.

Vimos que: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es sumable $\Leftrightarrow (x_n) \rightarrow 0$ y que el recíproco es falso.

Ejemplo: La serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ no es sumable, aunque $(1/n) \rightarrow 0$

Un ejemplo sorprendente: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ "n sin ceros" La expresión decimal de n no tiene ningún cero: $1 + ½ + \dots\dots\dots + 1/9 + 1/11 + \dots\dots + 1/99 + 1/111 + 1/112 + \dots\dots\dots$

Pues bien ocurre que la serie armónica "suma" $+\infty$ (no es sumable) mientras que esta sí lo es y su suma es menor que 90.

Veámoslo:

Términos $1/n$ con n de una cifra hay 9, todos ≤ 1
Términos $1/n$ con n de dos cifras hay 9^2, todos $< 1/10$
Términos $1/n$ con n de tres cifras hay 9^3, todos $< 1/100$
....

Sea $(s_1, s_2, \ldots\ldots)$ la sucesión de sumas parciales de la serie. Como los términos son positivos, la sucesión es creciente $s_1 < s_2 < s_3 < \ldots..$ Por tanto, es sumable si sólo si es acotada. Es acotada si sólo si lo es alguna de la sucesión:

$S_9 < 9$, $s_{9+9^2} < 9 + 9^2/10$, $s_{9+9^2+9^3} < 9 + 9^2/10 + 9^3/100$, $s_n < 9 + 9^2/10 + \ldots. + 9^n/10^{n-1}$, esto es una progresión geométrica de primer término 9 y de razón 9/10.

$$(9-9^{n+1}/10^n)/(1-9/10) \rightarrow_{n\to\infty} 9/(1-9/10) \Rightarrow \text{Lim}\ (S_{9+\ldots\ldots+9^n}) = \sup\ \{s_{9+\ldots\ldots+9^n} \ /\ n \in \mathbb{N}\} < 90$$
$$\text{Lim}\ S_n \Rightarrow \sup\ \{s_n \ /\ n \in \mathbb{N}\} < 90$$

Es desconcertante porque parece que quitamos pocos términos, de los 9 primeros no quitamos ninguno, de los 90 siguientes 9, de los 900 siguientes 171,............

<u>Ejercicio:</u> Sabiendo que ${}^{\infty}\sum_{n=1} 1/n$ no es sumable ("suma" $+\infty$) ver que tampoco es ${}^{\infty}\sum_{n=1} 1/(an+b)$, donde $a,b > 0$
Indicación, la sucesión de sumas parciales de esto es creciente como la de la anterior. En las sucesiones convergentes es lo mismo que ser acotada.

¿Qué ocurre en la sucesión armónica generalizada ${}^{\infty}\sum_{n=1} 1/n^p$?

Si $p < 1$ $1/n < 1/n^p$ luego $1 + ½ + \ldots\ldots + 1/n < 1 + 1/2^p + \ldots\ldots. + 1/n^p$

Si $p \leq 1$ la serie no es sumable ("suma" $+\infty$)

Si $p > 1$ tenemos $1/n^p < 1/n$ aquel agumento no vale (el que la grande vaya a $+\infty$ no implica nada). Vamos a ver que cuando $p > 1$ ${}^{\infty}\sum_{n=1} 1/n^p$ es sumable.

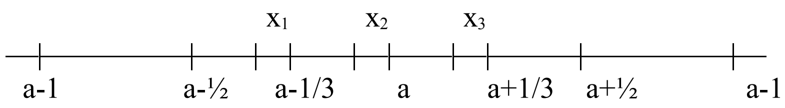
$1 + \underline{1/2^p + 1/3^p} + \underline{1/4^p + 1/5^p + 1/6^p + 1/7^p} + \underline{1/8^p + \ldots\ldots + 1/15^p} + \underline{1/16^p + \ldots\ldots + 1/31^p} + \ldots$

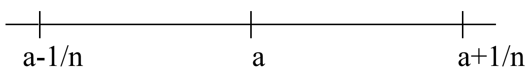
$S_1 = 1$
$S_{1+2} < 1 + 2/2^p$
$S_{1+2+2^2} < 1 + 2/2^p + 4/4^p$
....
$S_{1+2+\ldots\ldots+2^n} < 1 + 1/2^{p-1} + 1/4^{p-1} + 1/8^{p-1} + \ldots.. + 1/(2^{p-1})^n = 1+1/(2^{p-1})+1/(2^{p-1})^2 + \ldots.+1/(2^{p-1})^n$
$= [1-1/(2^{p-1})^{n+1}]/(1-2^{p-1}) \rightarrow_{n\to\infty} 1/(1-2^{p-1})$

Progresión geométrica de primer término 1 y de razón $1/2^{p-1} < 1$, luego la sucesión $(s_{1+2+\ldots.+2^n})$ es acotada $\Rightarrow$ (s_n) es creciente y acotada $\Rightarrow$ es convergente.

Una cosa que nos olvidamos ver en el capítulos de sucesiones:

- Ver que $a \in A^-$ si sólo si a es límite de alguna sucesión cuyos términos son de A (Indicación: trivialmente, si $a \in A$, entonces a es límite de (a, a, a,....), en otro caso, es decir, cuando $a \in A^- \setminus A$, resulta que $a \notin A$ y estamos en el caso siguiente).
- Ver que $a \in A'$ si solo si a es límite de una sucesión cuyos términos son de A y todos distintos, (equivalentemente, todos distintos de a).





$x_n \in\ ]a-1/n, a+1/n[$, $x_n \neq x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots., x_{n-1}$

Concepto de subsucesión de una sucesión:

Por definición, una sucesión de números reales es una aplicación de N en R, $n \rightarrow x_n$.

Supongamos que la aplicación $n \in N \rightarrow \varphi(n) \in N$ es estrictamente creciente, es decir, tal que $n < m \Rightarrow \varphi(n) < \varphi(m)$. Entonces la sucesión:

$N \rightarrow \varphi(n) \rightarrow x(\varphi(n)) = x_n$

Es una subsucesión de la dada.

Esto significa que una subsucesión de $(x_1, x_2, x_3, \ldots..)$ es “lo que queda de ella” después de quitar finitos o infinitos términos, siempre que queden infinitos. Por ejemplo, subsucesiones de $(x_1, x_2, x_3, \ldots...)$ son:

$(x_4, x_5, x_6, \ldots\ldots..)$
$(x_1, x_3, x_5, \ldots\ldots..)$
$(x_2, x_6, x_{10}, x_{14}, \ldots...)$

Ejercicio:

- Ver que a es valor de adherencia de (x_n) si y sólo si a es límite de alguna subsucesión de (x_n).

  Si $a \in A$, evidente, a es límite de la subsucesión (a, a, a,....).
  Si $a \notin A$, entonces a es punto de acumulación de los términos de alguna subsucesión, por lo tanto es valor de adherencia de x_n.

- Ver que toda sucesión acotada tiene alguna subsucesión convergente (corolario de la anterior).

- Ver que una sucesión monótona es convergente si sólo si es convergente una de sus subsucesiones.

Las series son una especie de “suma infinita”.

Dijimos $^{\infty}\sum_{n=1} x_n$ es sumable cuando es convergente la sucesión de sumas parciales $(s_n) = (s_1, s_2, s_3,........) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3,........)$

Lo que nos preguntamos ahora es si estas "sumas infinitas", que son la series, son "asociativas" o "conmutativas" como las sumas finitas de números reales.

La respuesta, en general, es no.

$1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 +$ ....

$^{\infty}\sum_{n=1} (-1)^n$ No es sumable porque $((-1)^n)$ no $\to 0$

Aunque no supiéramos eso, es trivial que no es sumable, porque su sucesión de sumas parciales, (1, 0, 1, 0, ...) no es convergente.

Sin embargo, asociando así: (1-1) + (1-1) + (1-1) +......... la serie que resulta es la 0+0+0+.... trivialmente sumable.

1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) +..........., la sucesión que resulta, 1+0+0+0+....... también es sumable, pero de suma 1.

Proposición:

Si $^{\infty}\sum_{n=1} x_n$ es sumable, entonces como quiera que asociemos sus términos, la serie resultante también es sumable y con la misma suma. (Sí podemos meter paréntesis en las series sumables).

Demostración:

Supongamos que:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 +$..........

es sumable. Esto significa que la sucesión de sumas parciales $(s_n) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3 + x_4,........)$ es convergente.

Introduzcamos esos paréntesis:

$x_1 + (x_2 + x_3) + x_4 + (x_5 + x_6 + x_7) + x_8 + x_9 +$............

La sucesión de sumas parciales de la serie resultante es $(s_1, s_3, s_4, s_7, s_8, s_9,......)$. Es decir, una subsucesión de $(s_1, s_2, s_3,......)$ que como ésta es convergente y con el mismo límite.

Reordenación de series:

Dada una serie $^{\infty}\sum_{n=1} x_n$ y una biyección $f: N \to N$, la serie $^{\infty}\sum_{n=1} x_{f(n)}$ se llama reordenada de aquella.

Se dice que esa serie es incondicionalmente sumable cuando toda biyección $f: N \to N$ $^{\infty}\sum_{n=1} x_{f(n)}$ es sumable y con la misma suma que $^{\infty}\sum_{n=1} x_n$

Una serie incondicionalmente sumable es una serie en la que la suma infinita es conmutativa.

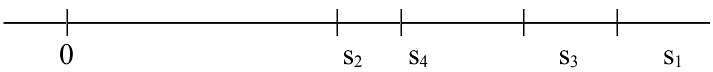
Ejercicio:

Ver que si ${}^{\infty}\sum_{n=1} x_n$ es sumable y si f: $N \to N$ es una biyección, tal que $f(n) = n$, para todos los $n \in N$, salvo finitos, entonces ${}^{\infty}\sum_{n=1} x_{f(n)}$ también es sumable y con la misma suma.

Consideramos la serie ${}^{\infty}\sum_{n=1} (-1)^{n+1}/n$ (es lo que se llama una serie alternada: los signos de sus términos son +, -, +, -, +, -, +,.......)

$1 – ½ + 1/3 – ¼ + 1/5 – 1/6 +$...........

Por ser alternada y verificarse que $(1/n) \searrow 0$ es fácil ver que esta serie es numerable (es la serie de valores absolutos de los términos)



(serie armónica alternada es sumable)

$s_1 = 1$
$s_2 = 1 – ½$ $\qquad$ $s_2 < s_4 < s_6 <......< s_5 < s_3 < s_1$
$s_3 = 1 – ½ + 1/3$
$s_4 = 1 – ½ + 1/3 – ¼$ $\qquad$ luego existen sup $\{s_{2n}/ n \in N\}$ es acotado superiormente por cualquier (s_{2n+1}) y no vacío. Inf $\{s_{2n+1} / n \in N\}$ es acotado inferiormente, por cualquier (s_{2n}) y no vacío. Además $s_{2n+1} – s_{2n} = x_{2n+1} \to_{n\to\infty} 0$ $\Rightarrow$ sup $\{s_{2n}\}$ = inf $\{s_{2n+1}\}$ = la suma de la serie. Además su suma es log. 2.

Estos mismos argumentos sirven para ver que toda serie alternada ${}^{\infty}\sum_{n=1} (-1)^n x_n$ tal que $(x_n) \searrow 0$ es sumable (ejercicio).

Por otra parte sabemos que la serie ${}^{\infty}\sum_{n=1} 1/n$ no es sumable (“suma” $+\infty$). Por tanto las series ${}^{\infty}\sum_{n=1} 1/2n$, ${}^{\infty}\sum_{n=1} 1/(2n-1)$ no son sumables.

½ + ¼ + 1/6 +..................} Simplemente basta tener en cuenta que las sumas parciales
1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 +.........} de ½ + ¼ +1/6 +..... son ½ de las sumas parciales de 1 + ½ + 1/3 + ¼ +......, éstas van a $+\infty \Rightarrow$ aquellas también.

Análogamente, se vería el caso de 1 + 1/3 + 1/5 +............

Supuesto lo anterior, podemos considerar la serie dada ${}^{\infty}\sum_{n=1} (-1)^n/n$ de forma que deje de ser sumable o sume lo que no de la gana (por ejemplo 278)

Reordenemos esa serie de forma que sume 278.

Como ${}^{\infty}\sum_{n=1} 1/(2n-1)$ “suma” $+\infty$, podemos encontrar $n \in N$ talque:

$$1 + 1/3 + 1/5 +............+1/(2n-1) \le 278 < 1 + 1/3 +..........+ 1/(2n-1) + 1/2n$$

Sea $n_2 \in N$ tal que:

$$1 + 1/3 +...+ 1/2n_1 – ½ - ¼ -...-1/(2n_2-2) \ge 278 > 1 + 1/3 +...+ 1/2n_1 – ½ - ¼ -... – 1/2n_2$$

Empezamos a sumar impares hasta sobrepasa 278, en ese momento restamos 1/n's (n par) hasta volver a la izquierda de 278. En ese momento sumamos 1/n's , n impar, hasta volver a la derecha de 278,............... Es fácil ver que esta reordenación de la serie dada es sumable, con suma 278, lo que se utiliza en todo esto es que $\sum$ "impares" = $+\infty$ y $\sum$ "pares" = $-\infty$.

Teorema: (Rieman)

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es una serie con infinitos términos positivos e infinitos términos negativos, tal que $(x_n) \to 0$, y que $\sum$ "positivos" = $+\infty$ y $\sum$ "negativos" = $-\infty$, entonces se puede reordenar de forma que sume lo que queramos. Más aún, se puede reordenar de forma que la sucesión de sumas parciales tenga como conjunto de valores de adherencia cualquier intervalo cerrado (acotado o no)

$[a, a]$, $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, a]$, $]-\infty, +\infty[$

Reordenación de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$ de forma que la sucesión de sumas parciales tenga como valores de adherencia a todos los números reales.

- Sumas positivos hasta sobrepasar al 1 por la derecha.
- Sumas negativos hasta sobrepasar al –1 por la izquierda
- Sumas positivos hasta sobrepasar al 2 por la derecha.
- Sumas negativos hasta sobrepasar al –2 por la izquierda
- Sumas positivos hasta sobrepasar al 3 por la derecha

Ejemplo:

La serie:

$2 - 1 + 1 - \frac{1}{2} + 2/3 - 1/3 + 2/4 - \frac{1}{4} + 2/5 - 1/5 +$...............

es alternada (+, - ,+, -, +,.......) y tal que la sucesión de sus términos converge a 0.

Sin embargo esa serie no es numerable ("suma" $+\infty$).

Ocurre que la sucesión de valores absolutos de sus términos no converge monótonamente a 0. Es decir, no verifica la condición suficiente para la sumabilidad que vimos ayer.

Definición:

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es absolutamente sumable cuando es sumable la serie de términos positivos, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$

Proposición:

Toda serie absolutamente sumable es sumable. (El recíproco no es cierto. Basta saber que ${}^{\infty}\sum_{n=1} (-1)^n/n$ es sumable, pero ${}^{\infty}\sum_{n=1} 1/n$ no lo es)

Demostración:

Supongamos que ${}^{\infty}\sum_{n=1} |x_n|$ es sumable. Esto significa (condición de Cauchy) que $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \upsilon \in N$ / $q > p > \upsilon \Rightarrow {}^{q}\sum_{n=p} |x_n| < \varepsilon$ (la sucesión de sumas parciales de aquella serie es de Cauchy). Pues bien, basta tener en cuenta que:

$|{}^{q}\sum_{n=p} x_n| \leq {}^{q}\sum_{n=p} |x_n|$ para obtener que también la serie ${}^{\infty}\sum_{n=1} x_n$ verifica condición de Cauchy.

Teorema:

Si ${}^{\infty}\sum_{n=1} x_n$ es absolutamente sumable entonces es incondicionalmente sumable (Recordemos que ${}^{\infty}\sum_{n=1} x_n$ es incondicionalmente sumable (reordenable) cuando cualquiera que sea la biyección $\varphi: N \rightarrow N$, ${}^{\infty}\sum_{n=1} x_n$ es sumable y con la misma suma que la dada).

[Es más, absolutamente sumable $\Leftrightarrow$ incondicionalmente sumable]

Demostración:

Supongamos que ${}^{\infty}\sum_{n=1} x_n$ es absolutamente sumable y que $\sigma : N \rightarrow N$ es una biyección.

Veremos primero que también ${}^{\infty}\sum_{n=1} x_{\sigma(n)}$ es absolutamente sumable y segundo que tiene la misma suma que la dada.

1º.- Que ${}^{\infty}\sum_{n=1} x_n$ es absolutamente sumable significa que: $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \upsilon \in N$ / $q > p > \upsilon \Rightarrow {}^{q}\sum_{n=p} |x_n| < \varepsilon$. Esto implica que ${}^{\infty}\sum_{n=\upsilon} |x_n| \leq \varepsilon$ (Recuérdese que la suma de la serie de términos positivos ${}^{\infty}\sum_{n=1} |x_n|$ es el límite de $(|x_\upsilon|, |x_\upsilon| + |x_{\upsilon+1}|, |x_\upsilon| + |x_{\upsilon+1}| + |x_{\upsilon+2}|,.....)$ el cual es igual, la sucesión es creciente, al sup $\{|x_\upsilon|, |x_\upsilon| + |x_{\upsilon+1}|,......\}$).

Por otra parte, como σ es una biyección, existe $\upsilon' \in N$ tal que $\{1, 2, ..., \upsilon\} \subset \subset \{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(\upsilon)\}$, por tanto $q > p > \upsilon' \Rightarrow {}^{q}\sum_{n=p} |x_{\sigma(n)}| \leq {}^{\infty}\sum_{n=\upsilon} |x_n| \leq \varepsilon \Rightarrow {}^{\infty}\sum_{n=1} |x_{\sigma(n)}|$ verifica la condición de Cauchy.

2º.- Sea s la suma de ${}^{\infty}\sum_{n=1} x_n$ y t la suma de ${}^{\infty}\sum_{n=1} x_{\sigma(n)}$. Queremos ver que $s = t$, o lo que es lo mismo, que $\forall\ \varepsilon > 0\ |s - t| < \varepsilon$

La clave de la demostración $s = t$ está en la siguiente desigualdad:

$|s - t| \leq |s - {}^{n}\sum_{k=1} x_k| + |{}^{n}\sum_{k=1} x_k - {}^{m}\sum_{k=1} x_{\sigma(n)}| + |{}^{m}\sum_{k=1} x_{\sigma(n)} - t|$

Dado $\varepsilon > 0$,

Por la definición de s, $\exists\ \upsilon_1 \in N$ / $n > \upsilon_1 \Rightarrow |s - {}^{n}\sum_{k=1} x_k| < \varepsilon/3$
Por la definición de t, $\exists\ \upsilon_2 \in N$ / $n \leq \upsilon_2 \Rightarrow\ ||{}^{m}\sum_{k=1} x_{\sigma(n)} - t| < \varepsilon/3$
Sabemos, además, que $\exists\ \upsilon_3 \in N\ {}^{\infty}\sum_{n=\upsilon_3} |x_n| < \varepsilon/3$ (esto estaba en la primera parte)

Por tanto, si tomamos $\upsilon \in N$ tal que $\upsilon =$ máx. $\{\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3\}$ y $\{1, 2,......, \upsilon_3\} \subset \subset \{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(\upsilon)\}$ entonces $|{}^{n}\sum_{k=1} x_k - {}^{m}\sum_{k=1} x_{\sigma(n)}| \leq {}^{\infty}\sum_{n=\upsilon_3} |x_n| < \varepsilon/3 \Rightarrow$
$\Rightarrow |s - t| < \varepsilon \quad (\forall\ \varepsilon > 0)$

Hemos probado que:

Absolutamente sumable $\Leftrightarrow$ incondicionalmente sumable (reordenable)

También es cierto:

Sumable, no absolutamente sumable$\Rightarrow$no incondicionalmente sumable (no reordenable)
(condicionalmente sumable)

Para ver esto último se procede de la siguiente manera:

1º.- Se ve que si una serie es sumable, pero no absolutamente sumable, entonces tiene infinitos términos positivos e infinitos negativos.

2º.- La serie formada por los infinitos términos positivos (negativos) no es sumable ("suma" $+\infty$ y $-\infty$, respectivamente, como ocurre por ejemplo en $^{\infty}\sum_{n=1} (-1)^n/n$)

3º.- La serie en cuestión, puede reordenarse de forma que la sucesión de sumas parciales tenga a cualquier intervalo cerrado como conjunto de valores de adherencia.

Criterios de sumabilidad (o de convergencia) para series de términos positivos:

Dada la serie $^{\infty}\sum_{n=1} x_n$, tal que $x_n > 0$, $(n \in N)$, se trata de saber si esa serie es sumable o no (no de calcular su "suma").

Una cuestión esencial en este asunto, es el hacho de que la sucesión de sumas parciales de una serie de términos positivos es monótona creciente.

Por tanto, es convergente si sólo si es acotada, si sólo si lo es alguna de sus subsucesiones.

Criterio de comparación.

Sean $^{\infty}\sum_{n=1} x_n$, $^{\infty}\sum_{n=1} y_n$ series de términos positivos.

Si se verifica que $x_n \leq y_n$, para todo n (o todo n salvo finitos) y si $^{\infty}\sum_{n=1} y_n$ es sumable, entonces $^{\infty}\sum_{n=1} x_n$ también lo es.

Por lo mismo, si $^{\infty}\sum_{n=1} x_n$ no es sumable, $^{\infty}\sum_{n=1} y_n$ tampoco lo es.

Demostración:

Basta tener en cuenta que $x_1 + ... + x_n \leq y_1 + ... + y_n$, y por tanto, $(y_1 + ... + y_n)$ creciente acotada $\Rightarrow (x_1 + ... + x_n)$ creciente.

En otras palabras, una serie de términos positivos que tiene mayorante sumable, es sumable, y una serie de términos positivos que tiene minorante no sumable, no es sumable.

Este criterio está en la base de todos los criterios de sumabilidad para series de términos positivos.

Criterio de comparación por paso al cociente:

Sean $^{\infty}\sum_{n=1} x_n$, $^{\infty}\sum_{n=1} y_n$ series de términos positivos.

Supongamos que se verifica que lim. $_{n\to\infty} x_n/y_n = a$ $(0 \le a \le +\infty)$

Entonces:

1º.- Si $0 < a < +\infty$, ambas series son sumables, o ambas son no sumables.
2º.- Si $a = 0$, $^{\infty}\sum_{n=1} y_n$ sumable $\Rightarrow$ $^{\infty}\sum_{n=1} x_n$ sumable, y si $^{\infty}\sum_{n=1} x_n$ no sumable $\Rightarrow$ $^{\infty}\sum_{n=1} y_n$ no sumable.
3º.- Si $a = +\infty$, al revés que la anterior.

Ejercicio: En el "criterio de comparación", ver que: basta con que $x_n \le y_n$ se verifique para todos los $n \in N$, salvo finitos.

Indicación: hacer uso del hecho de que si cambiamos finitos términos de una serie, la serie resultante tiene el mismo carácter (sumable o no sumable) que la dada.

Demostración:

1º De la definición de límite se sigue que $\exists\ \upsilon \in N$ $a/2 < x_n/y_n < 3a/2$ $(n > \upsilon)$ (nota: dado $\varepsilon = a/2$, $\exists\ \upsilon \in N$ / $n > \upsilon \Rightarrow |x_n/y_n - a| < a/2$)

Por tanto, cuando $n > \upsilon \Rightarrow y_n < 2/a\ x_n$
$x_n < 3a/2\ y_n$

Es decir, la serie $^{\infty}\sum_{n=1} 2/a\ x_n$ es mayorante (salvo finitos) de la $^{\infty}\sum_{n=1} y_n$ y la serie $^{\infty}\sum_{n=1} 3a/2\ y_n$ es mayorante (salvo finitos) de la $^{\infty}\sum_{n=1} x_n$

Nótese que cualquiera que sea $\lambda \neq 0$, $^{\infty}\sum_{n=1} x_n$ es sumable si sólo si lo es $^{\infty}\sum_{n=1} \lambda x_n$

2º De la definición de límite se sigue que $\exists\ \upsilon \in N$ / $n > \upsilon \Rightarrow x_n/y_n < 1$ basta tomar cualquier nº positivo $\Rightarrow$
$\Rightarrow x_n < y_n$ $(n > \upsilon)$

3º De la definición de límite se sigue que, $\exists\ \upsilon \in N$ / $n > \upsilon \Rightarrow x_n/y_n > 1 \Rightarrow y_n < x_n$ $(n > \upsilon)$

Ejemplos:

La serie $^{\infty}\sum_{n=1} 1/(3n+5)$ no es sumable porque:

Lim $_{n\to\infty}$ $[1/(3n+5)]/(1/n)$ = lim $_{n\to\infty}$ $n/(3n+5)$ = lim $_{n\to\infty}$ $1/(3+5/n) = 1/3$

$^{\infty}\sum_{n=1} 1/n$ no es sumable, esa tampoco.

La serie $^{\infty}\sum_{n=1} 1/(3n^2 + 2n + 1)$ si es sumable porque, lim $_{n\to\infty}$ $[1/(3n^2+2n + 1)]/(1/n^2) = 1/3$ y la serie $^{\infty}\sum_{n=1} 1/n^2$ también es sumable.

A la vista está que para aplicar estos criterios es necesario contar con una "bateria" de series cuyo comportamiento (sumabilidad o no) es conocido.

Cuando no existe lim $_{n\to\infty}$ x_n/y_n

Proposición:

Si $0 < \lim_{n\to\infty} \inf x_n/y_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup x_n/y_n < +\infty$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es sumable si solo si lo es $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$

Demostración:

Supongamos que $0 < a = \lim_{n\to\infty} \inf x_n/y_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup x_n/y_n = b < +\infty$

$\rightarrow$ todos salvo finitos los x_n/y_n ___________________$\rightarrow$

0 a/2 a b 2b

$\leftarrow$_____________________todos salvo finitos los x_n/y_n $\leftarrow$

De la definición de límite inferior (superior) se sigue que: $\exists\ \upsilon \in N \,/\, n > \upsilon \Rightarrow x_n/y_n > a/2$ es decir, $y_n < 2/a\ x_n$, $(n > \upsilon)$

$\exists\ \upsilon' \in N \,/\, n > \upsilon' \Rightarrow x_n/y_n < 2b$, es decir, $x_n < 2b\ y_n$, $(n > \upsilon') \Rightarrow$

-la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es salvo finitos términos y un factor multiplicativo > 0, mayorante de la $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$

$\Rightarrow$

-La serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es salvo finitos mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$

¿Qué ocurre si $a=0$ ó $b=+\infty$? (el caso $a=b$ es el de existencia de $\lim_{n\to\infty} x_n/y_n$, ya tratada anteriormente).

- Caso: $0 = a < b < +\infty$ solo tenemos que, $\exists\ \upsilon' \in N \,/\, n > \upsilon' \Rightarrow x_n/y_n < 2b$, $x_n < 2b\ y_n$

Es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ sumable $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sumable

- Caso: $0 < a < b = +\infty$, sólo tenemos que, $\exists\ \upsilon \in N \,/\, n > \upsilon \Rightarrow x_n/y_n > a/2$, $y_n < 2/a\ x_n$

Es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sumable $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ sumable

- Caso extremo: $0 = a < b = +\infty$ (no tenemos nada)

Ejemplo:

La serie $1 + 1/2^2 + 1/\sqrt{3} + 1/4^2 + 1/\sqrt{5} + 1/6^2 + 1/\sqrt{7} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ comparada con la armónica $1 + ½ + 1/3 + ¼ + \ldots\ldots\ldots\ldots$ de $a = 0$, $b = +\infty$ (lo anterior no dice nada)

Ejercicio:

Compárese con la $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ o con la $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$

Hemos visto "criterios de comparación" (de una serie de términos positivos con otra). Veamos ahora criterios intrínsecos (no aparece en ellos más que la serie, de términos positivos, cuya sumabilidad, o no sumabilidad, queremos conocer. Sin embargo, está "escondido" en ellos un criterio de comparación con series geométricas, que aparecerá en la demostración de las proposiciones).

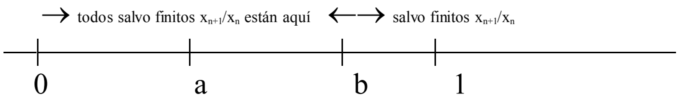
Proposición: (criterio de cociente o de D' Alembert)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie de términos positivos, se verifica:

1.- Si $\lim_{n\to\infty} \sup x_{n+1}/x_n < 1$, la serie es sumable
2.- Si $\lim_{n\to\infty} \inf x_{n+1}/x_n > 1$, la serie no es sumable
3.- Si $\lim_{n\to\infty} \inf x_{n+1}/x_n \leq 1 \leq$ Si $\lim_{n\to\infty} \sup x_{n+1}/x_n < 1$, el criterio no dice nada (puede ocurrir cualquier cosa).

<u>Demostración:</u>

1.- Sea $\lim_{n\to\infty} \sup x_{n+1}/x_n < 1$ y sea $a < b < 1$



$\exists\, \upsilon \in N \,/\, n \geq \upsilon \Rightarrow x_{n+1}/x_n < b$, es decir,

$$\begin{array}{l} x_{\upsilon+1} < x_\upsilon b \\ x_{\upsilon+2} < x_\upsilon b < x_\upsilon b^2 \\ x_{\upsilon+3} < \ldots\ldots < x_\upsilon b^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{\upsilon+k} < \ldots\ldots < x_\upsilon b^k \end{array}$$

Osea la serie $x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots + x_{\upsilon-1} + x_\upsilon + x_\upsilon b + x_\upsilon b^2 + \ldots\ldots\ldots$ que es sumable, salvo finitos términos, geométrica de razón $b < 1$ es mayorante de la dada $\Rightarrow$ la dada es sumable.

2.- Supongamos que $\lim_{n\to\infty} \inf x_{n+1}/x_n = a > 1$ entonces a la izquierda de cualquier entorno de a sólo quedan finitos x_{n+1}/x_n.

Es decir, $\exists\, \upsilon \in N \,/\, n > \upsilon \Rightarrow x_{n+1}/x_n > 1 \Rightarrow (x_n)$ no $\to 0$

$0 < x_{\upsilon+1} < x_{\upsilon+2} < x_{\upsilon+3} < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ no es sumable

3.- Para esto basta poner ejemplos:

$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ no es sumable y le ocurre que $\lim_{n\to\infty} x_{n+1}/x_n = 1$
$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ si es sumable y le ocurre lo mismo
Este criterio no sirve para estudiar la sumabilidad de series tan importantes como la armónica. Da el caso 3 para toda $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$

<u>Proposición:</u> (criterio de la raíz o de Cauchy)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie de términos positivos y sea $a = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{x_n}$, se verifica:

1.- Si $a < 1$, la serie es sumable
2.- Si $a > 1$, la serie no es sumable
3.- Si $a = 1$, puede ocurrir cualquier cosa.

<u>Demostración:</u>

3.- Basta considerar que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ no es sumable y se verifica que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1/n)} = \lim_{n\to\infty} 1/\sqrt[n]{n} = 1$

O que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ si es sumable y que se verifica que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1/n^2)} = \lim_{n\to\infty} 1/\sqrt[n]{n^2} = 1$

1.- $\rightarrow$ finitos $\sqrt[n]{x_n}$

0 a b 1

Sea $a < b < 1$. De la definición de límite superior se sigue que a la derecha de b sólo hay finitos $\sqrt[n]{x_n}$. Es decir, $\exists\ \upsilon \in N \ /\ n > \upsilon \Rightarrow \sqrt[n]{x_n} < b,\ x_n < b^n$. Por tanto, la serie $x_1 + ... + x_{\upsilon-1} + b^{\upsilon} + b^{\upsilon+1} + ... + b^{\upsilon+k} + ...$ es mayorante de la dada, $x_1 + x_2 + x_3.....$, y sumable (es sumable porque salvo finitos términos es geométrica de razón b y $0 < b < 1$). Por tanto la dada es sumable.

2.- $\rightarrow$ infinitos $\sqrt[n]{x_n}$

0 1 a

De la definición de lim sup. Se sigue que hay infinitos $\sqrt[n]{x_n}$ que son mayores que 1. Es decir, infinitos $x_n > 1$. Luego (x_n) no $\rightarrow 0 \Rightarrow$ la serie no es sumable.

Puede probarse que $\lim_{n\to\infty} \inf x_{n+1}/x_n \leq \lim_{n\to\infty} \inf \sqrt[n]{x_n} \leq \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{x_n} \leq \leq \lim_{n\to\infty} \sup x_{n+1}/x_n$

Por consiguiente el criterio de la raíz es mejor que el del cociente.

Puede ocurrir que el del cociente de el caso 3 y el de la raíz el caso 1.

Cuando estudiamos la sumabilidad de series armónicas $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ (sumable si solo si $p>1$) utilizamos un "truco" que puede utilizarse en muchos más casos. (repasarlo)

De hecho puede anunciarse como proposición de la siguiente forma:

Proposición:

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie de términos positivos tal que $(x_n) \searrow 0$. La serie es sumable $\Leftrightarrow$ la es la $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_2$

Demostración: es fácil ver por donde va, repasando aquello de las armónicas.

Ejercicio: Ver que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/[n(\log n)^p]$ es sumable $\Leftrightarrow p > 1$
Aplicando dos veces la misma proposición que lo mismo ocurre con
$\sum_{n=1}^{\infty} 1/[n \log n\ (\log(\log n))^p]$

Los criterios de sumabilidad que hemos visto para series de términos positivos sirven para estudiar la sumabilidad de series de términos cualesquiera.

Por definición la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, es absolutamente sumable cuando la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ es sumable.

La sumabilidad absoluta es más importante que la ordinaria (las serie absolutamente sumables con las reordenables incondicionalmente sumables).

Los criterios del cociente y la raíz tienen esta forma:

Proposición:

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie sin ceros, se verifica que:

1.- Si $\lim_{n\to\infty} \inf |x_{n+1}/x_n| < 1$, la serie es absolutamente sumable.
2.- Si $\lim_{n\to\infty} \inf |x_{n+1}/x_n| > 1$, la serie no es sumable, (no es sumables y menos absolutamente sumable)
3.- Si $\lim_{n\to\infty} \inf |x_{n+1}/x_n| \le 1 \le \lim_{n\to\infty} \sup |x_{n+1}/x_n|$ puede ocurrir cualquier cosa, que sea absolutamente sumable, que sea sumable pero no absolutamente sumable o que no sea sumable

Demostración:

1.- Ya la hemos visto.
2.- Recuérdese la correspondiente proposición para serie de términos positivos, véase que, $2 \Rightarrow (|x_n|)$ no $\to 0 \Rightarrow (x_n)$ no $\to 0$
3.- Series que verifican:

$\lim_{n\to\infty} |x_{n+1}/x_n| = 1$
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n^2$ absolutamente sumable
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$ sumable no absolutamente sumable

$2 - 1 + 2/2 - ½ + 2/3 - 1/3 + 2/4 - ¼ + 2/5 - 1/5$ ....
$|x_{n+1}/x_n| = (½ , 1, ½, 4/3, ½, 3/2, ½, 8/5, ½,..........)$
$\lim_{n\to\infty} \inf |x_{n+1}/x_n| = ½$ $\lim_{n\to\infty} \sup |x_{n+1}/x_n| = 2$

Proposición:

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie y sea $a = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|x_n|}$ (nótese que x_{n+1}/x_n tiene sentido para todo n, pero $\sqrt[n]{x_n}$ no tiene sentido cuando.......

Se verifica que:

1.- Si $a < 1$ la serie es absolutamente sumable (ya lo sabemos)
2.- Si $a > 1$ la serie no es sumable (ya lo sabemos porque $2 \Rightarrow (|x_n|)$no$\to 0 \Rightarrow (x_n)$no$\to 0$)
3.- Si $a = 1$ puede ocurrir cualquier cosa (lo mismos ejemplos de antes).

Estos criterios no sirven para averiguar la “sumabilidad”, sirven para averiguar la “absolutamente sumabilidad”.

Existen también criterios de sumabilidad de serie de términos cualesquiera.

<u>FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL</u>

Una función de este tipo es una "aplicación".

$$\begin{aligned} f: A \subset R &\rightarrow R \\ x \in A &\rightarrow f(x) \in R \end{aligned}$$

A cada $x \in A$ asegura un, y sólo un $f(x) \in R$. A es el dominio o conjunto de definición de f. El rango o conjunto imagen de f, $\{x \in R \ / \ f(x)=y \ \text{ para algún } x \in A\}$

La función se dice inyectiva cuando $x, y \in A$, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ (puntos distintos, imágenes distintas).

Las funciones las representamos así:

Es inyectiva cuando en cada línea
Horizontal hay, a lo sumo, un valor

Las operaciones usuales de adición y multiplicación en el conjunto imagen, R, de estas funciones, induces tres operaciones importantes en el conjunto de funciones de variable real.

Adición:

Dada $f: A \subset R \rightarrow R$ y $g: B \subset R \rightarrow R$ definimos $f + g: A \cap B \subset R \rightarrow R$ de la siguiente forma $x \in A \cap B$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

De las propiedades de la adición de números reales, se siguen inmediatamente las propiedades análogas de la adición de funciones:

$f + g = g + f$
$f + (g + h) = (f + g) + h$

Multiplicación:

$f \cdot g: A \cap B \in R \rightarrow R$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Con ciertas propiedades.

Multiplicación por escalares

$\lambda \in R$, $\lambda f: A \subset R \rightarrow R$, $(\lambda f)(x) = \lambda\, f(x)$

Dado $A \subset R$, llamamos ƒ ≡ ƒ (A, R) al conjunto formado por todas las funciones de A en R.

Es fácil ver que:

(ƒ, +) es grupo abeliano
El neutro es la función 0, $x \in A \rightarrow 0$
El opuesto de $f: A \rightarrow R$ es $-f: A \rightarrow R$ definida por $(-f)(x) = -f(x)$

(ƒ, +, ·) anillo conmutativo y unitario.

Ejercicio:

Ver que si A tiene más de un elemento, entonces (ƒ, +, ·) no es un cuerpo. Es decir, existen funciones que no son la cero, que eso tiene inverso multiplicativo. Ver que ese anillo tiene "divisores de cero", es decir, existen f, g que no son la cero, tales que $f \cdot g$ si es la cero.

(ƒ, +, ·) es un espacio vectorial sobre R. (Véase)

Ejercicio:

Ver que si A tiene infinitos elementos, entonces ese espacio vectorial es de dimensión infinita, es decir, se pueden encontrar tantas funciones linealmente independientes como queramos.

Ejercicio:

Ver que si A tiene n elementos, entonces ese espacio vectorial tiene dimensión n, (encontrar una base con n elementos).

Definición:

Sea a un punto de acumulación de $A \subset R$. Se dice que $b \in R$ es límite en a de $f: A \subset R \to R$ cuando:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: x \in A, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

$b = \lim_{x \to a} f(x)$

Cualquier que sea $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$, con $\varepsilon > 0$, existe $]a-\delta, a+\delta[$, con $\delta > 0$, tal que todos los $x \in A$ salvo el a, que están en $]a-\delta, a+\delta[$, los lleva f a $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in A \cap (]a-\delta, a+\delta[\setminus \{a\}) \Rightarrow f(x) \in]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$

Ejercicio:

Ver que si mantenemos esa definición para a, no es punto de acumulación de A, entonces cualquier $b \in R$ es límite de f en A.

Nótese que f no tiene porque estar definida en a. En caso de estarlo, no importa para nada el valor de f(a).

Definición:

Se dice que $b \in R$ es límite en a (pto. de acumulación de A) de $f: A \subset R \to R$, cuando:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / x \in A, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

Propiedades de los límites:

Aunque, en general, no lo repetiremos, siempre que hablemos de límite de una función en un pto., se entenderá que ese pto. es de acumulación del dominio de la función.

Proposición:

Si f tiene límite en a, entonces dicho límite es único.

Demostración:

Supongamos que b y c son límites de f en a.

Entonces dado $[(|b - c|) / 3] > 0$ $\begin{matrix} \exists\ \delta_1 > 0 \\ \exists\ \delta_2 > 0 \end{matrix}$ $/ x \in A$ $\begin{matrix} 0 < |x - a| < \delta_1 \\ 0 < |x - a| < \delta_2 \end{matrix} \Rightarrow$

$\begin{matrix} |f(x) - b| < [(|b - c|) / 3] \\ \Rightarrow \\ |f(x) - c| < [(|b - c|) / 3] \end{matrix}$

Por tanto, si $x \in A$, $0 < |x - a| <$ máx. (δ_1, δ_2) entonces:
$|b - c| \leq |b - f(x)| + |f(x) - c| < 2/3\ |b - c|$ (absurdo)

Ejercicio:

Ver que la función de Dorichlet $f: x \in R \to \begin{cases} 0 & \text{si } x \in Q \\ 1 & \text{si } x \notin Q \end{cases}$ no tiene límite en ningún pto.

Proposición:

Si $f: A \subset R \to R$ y $g: B \subset R \to R$ tiene límite en a (ptos. De acumulación de $A \cap B$, por tanto, pto. de acumulación de A y de B).

- $f \cdot g : A \cap B \to R$ $\quad \lambda f : A \to R\ (\lambda \in R)$ y se confirma que:
$\lim_{x\to a} (f+g)(x) = \lim_{n\to a} f(x) + \lim_{n\to a} g(x)$
$\lim_{x\to a} (fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
$\lim_{x\to a} (\lambda f)(x) = \lambda \lim_{x\to a} f(x)$

Demostración:

Suma:

Por hipótesis:

$\forall\ \varepsilon > 0$ $\begin{matrix} \exists\ \delta_1 > 0 \quad x \in A \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \\ : \\ \exists\ \delta_2 > 0 \quad x \in B \quad 0 < |x - b| < \delta_2 \end{matrix}$ $\begin{matrix} |f(x) - b| < \varepsilon/2 \\ \Rightarrow \\ |g(x) - b| < \varepsilon/2 \end{matrix}$

Por tanto $0 < |x - a| <$ máx. $(\delta_1, \delta_2) \Rightarrow |(f + g)(x) - (b + c)| \leq |f(x) - b| + |g(x) - c| < \varepsilon$

Producto por escalares:

Por hipótesis:

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta_1 > 0 : x \in A\ , 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon/\lambda$

Por tanto $0 < \lambda|x - a| < \lambda\delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

Producto:

La clave de la desigualdad está en la desigualdad:

$|f(x)g(x) - bc| \leq |f(x)|\ |g(x) - c| + |f(x) - b|\ |c|$. A la vista de esto razonamos de la siguiente forma:

Por una parte:

$\exists\ \delta_1 > 0,\ \ 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < 1 \Rightarrow |f(x)| < 1 + |b|$

Por otra parte:

$$\begin{array}{llll} & \exists\ \delta_2 > 0\ \ x \in A, 0 < |x - a| < \delta_2 & & |f(x) - b| < \varepsilon/2|c| \\ \forall\ \varepsilon > 0 & \qquad\qquad : & & \qquad \Rightarrow \\ & \exists\ \delta_1 > 0\ \ x \in B, 0 < |x - a| < \delta_3 & & |g(x) - c| < \varepsilon/(1+|b|) \end{array}$$

Por tanto:

$x \in A \cap B, 0 < |x - a| < \min.\ (\delta_1, \delta_2, \delta_3) \Rightarrow |f(x)g(x) - bc|$

Proposición:

Si $f: A \subset R \rightarrow R$ tiene límite $b \neq 0$ en a (pto. de acumulación de A) entonces también $1/f: x \in A^* \subset R \rightarrow 1/f(x) \in R$, (donde $A^* = \{x \in A\ /\ f(x) \neq 0\}$) tiene límite en a, y dicho límite es $1/b$.

En otras palabras, si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to a} 1/f(x) = 1/\lim_{x\to a} f(x)$

Corolario:

Si existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$, y el segundo es distinto de cero también existe $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ y es igual a $[\lim_{x\to a} f(x)]/[\lim_{x\to a} g(x)]$

Nótese:

1º Que si f está definida en A y g lo está en B, entonces f/g lo está en $A \cap B^*$, donde $B^* = \{x \in B\ /\ g(x) \neq 0\}$.

2º Que para que tenga sentido el corolario, a debe de ser pto. de acumulación de $A \cap B^*$ (por tanto, también de A y de B).

Demostración de la proposición:

Lo 1º que hay que ver es que si a es pto. de acumulación de A, y si $\lim_{x\to a} g(x) = b \neq 0$, entonces también es pto. de acumulación de A^* .

En efecto, que a es pto. de acumulación de A, significa que:

$\forall \delta > 0$, $|]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$

Como $b \neq 0$ de la definición de límite se sigue que dado $|b|/2 > 0$, existe

$\delta > 0 \,/\, x \in A, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < |b|/2$,
$|f(x) - b| \leq |b| - |f(x)| \Rightarrow f(x) > |b|/2$

Así que, $(]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\}) \cap A = (]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\}) \cap A^*$, de donde se saca que a es pto. de acumulación de A^* .

Los ptos. de A (salvo a) que están próximos a "a" son de A^* .

Lo 2º es que, eso supuesto, tenemos que ver que $|1/f(x) - 1/b|$ es "tan pequeño como queramos", sin más que tomar x "suficientemente próximo" a "a" (pero $\neq$ a). La clave de la demostración está en $|1/f(x) - 1/b| = [|f(x) - b|] / [|f(x)|\,|b|]$

Por hipótesis, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta' > 0 \,/\, x \in A, 0 < |x - a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - b| < (|b|^2 / 2)\ \varepsilon$

Por tanto si $x \in A$, $0 < |x - a| < \min.(\delta, \delta')$, entonces $x \in A^*$ y además,
$|1/f(x) - 1/b| = [|f(x) - b|] / [|f(x)|\,|b|] < [|f(x) - b|] / [(|b| / 2)\,|b|] < \varepsilon$

Límites infinitos y límites en el infinito:

Definición:

Supongamos que a es pto. de acumulación de A.

Se dice que $+\infty$ ($-\infty$) es límite de $f: A \subset R \rightarrow R$, cuando:

$\forall$ M, $\exists\ \delta > 0 \,/\, x \in A, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$ (respectivamente $f(x) < M$)

Un enunciado equivalente al primero es:

$\forall$ M, $\exists\ \delta > 0 \,/\, x \in (]a-\delta, a+\delta[\setminus \{a\}) \cap A \Rightarrow f(x) \in\ ]M, +\infty[$

Ejemplos:

$F: x \in R \setminus \{0\} \to 1/x^2$

$\lim_{x\to 0} 1/x^2 = +\infty$

$G: x \in R \setminus\{0\} \to 1/x$

$\nexists \lim_{x\to 0} g(x)$

Si admitimos a los "límites infinitos", sin más, en la familia de los límites, tenemos lamentables pérdidas, deja de ser cierto, en general, que el límite de la suma (producto) sea la suma (el producto) de los límites. Algo se conserva, por ejemplo:

$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = b$ (nº real) $\Rightarrow \lim_{x\to a} (f + g)(x) = +\infty$

$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty\ (-\infty)$, $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty\ (-\infty) \Rightarrow \lim_{x\to a} (f + g)(x) = +\infty\ (-\infty)$

Sin embargo:

$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} (f + g)(x)$ puede ocurrir cualquier cosa, no existir, ser cualquier nº real, ser $+\infty$ ó $-\infty$.

Definición:

Supongamos que $+\infty$ $(-\infty)$ es "pto. de acumulación" de $A \subset R$ (esto significa que en toda semirecta positiva hay ptos. de A. Es decir, $\forall$ M, $\exists$ $x \in A / x > M$). Se dice que $b \in R$ es límite en $+\infty$ $(-\infty)$ de $f: A \subset R \to R$, $b = \lim_{x\to\infty} f(x)$, cuando:

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ M / x \in A, x > M\ (x < M) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

Nota: Recuérdese que una sucesión de números reales es una aplicación de $N \subset R$ en R. Nótese que la definición que dimos de límite de una sucesión es exactamente la de límite en $+\infty$ de esa función que es la sucesión.

Nótese que $+\infty$ es "pto. de acumulación" de N (el único pto. de acumulación que tiene).

Ejercicio:

Ver que se conserva el "álgebra de límites" que ya hemos estudiado (límite de la suma es la suma de los límites, etc.) para estos límites en el infinito (de hecho ya lo vimos para el caso particular de los límites de sucesiones).

Recuérdese que ese "álgebra de límites" se perdía parcialmente para los límites infinitos:

1º) Si el límite de una función en un pto. es $+\infty$ y otra en el mismo pto. es $-\infty$. El límite de la suma puede no existir o de existir puede valer cualquier cosa.

2º) Si el límite de una función en un pto. es $+\infty$ y el de otra en el mismo pto. es 0. El límite del producto puede no existir o, de existir, valer cualquier cosa.

Volviendo a los "limites infinitos", veamos ejemplos de esas restricciones.

Ejemplos de lo primero:

1.- $f: x \in R \setminus \{0\} \to 1/x^2$
$g: x \in R \setminus \{0\} \to 1/-x^2$

$x \to 0,\ f(x) \to +\infty\ ,\ g(x) \to -\infty \qquad (f + g)(x) \to 0$

2.- $f: x \in R \setminus \{0\} \to 1/x^2$
$g: x \in R \setminus \{0\} \to -2/x^2$

$x \to 0,\ f(x) \to +\infty,\ g(x) \to -\infty \qquad (f + g)(x) \to -\infty$

3.- $f: x \in R \setminus \{0\} \to 1/x^2$
$g: x \in R \setminus \{0\} \to -1/x^2 + 4$

$x \to \infty,\ f(x) \to +\infty,\ g(x) \to -\infty \qquad (f + g)(x) \to 4$

4.- $f: x \in R \setminus \{0\} \to 1/x^2$

$$g: x \in R \setminus \{0\} \to \begin{cases} -1/x^2 \text{ si } x \in Q \\ -1/x^2 - 7 \text{ si } x \notin Q \end{cases}$$

$$f + g: x \in R \setminus \{0\} \to \begin{cases} 0 \text{ si } x \in Q \\ -7 \text{ si } x \notin Q \end{cases}$$

$f + g$ no tiene límite en 0.

Ejemplos de lo segundo:

1.- $f: x \in R \setminus \{0\} \to 1/x^2$
$g: x \in R \to x^2$

$x \to 0$, $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 0$ $(f\,g)(x) \to 1$

2.- $f: x \in R \setminus \{0\} \to 1/x^2$
$g: x \in R \to 3x^2$

$x \to 0$, $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 0$ $(f\,g)(x) \to 3$

3.- $f: x \in R \setminus \{0\} \to 1/x^2$
$g: x \in R \to x^3$

$x \to 0$, $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 0$ $(f\,g)(x) \to 0$

4.- $f: x \in R \setminus \{0\} \to 1/x^2$
$g: x \in R \to x$

$x \to 0$, $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 0$ $(f\,g)(x) \to$ no existe.

En esto anterior están demasiado mezclados los límites infinitos y límites en el infinito.

Naturalmente, se pueden mezclar ambos conjuntos (de límite infinito y de límite en el infinito).

Definición:

Se dice que $f: A \subset R \to R$ tiene límite $-\infty$ en $+\infty$ ("pto. de acumulación" de A) cuando:

$\forall M, \exists N, x \in A, x > N \Rightarrow f(x) < M$

Ejemplo:

$F: x \to -x$

$\text{Lim}_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

Más sobre el conjunto de límite:

- Límites laterales (por la izqda. y por la dcha.)
- Límite inferior y superior.

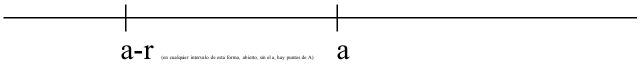
Ambos conjuntos, para funciones de R en R, son posibles porque R está totalmente ordenado. El orden en el conjunto original da lugar al concepto de límite por la izqda. y la dcha.

El orden del conjunto imagen, al concepto de límite inferior y superior.

Limites laterales:

Diremos que a es pto. de acumulación por la izqda. (dcha.) de $A \subset R$, cuando:

$\forall\, r > 0,\ ]a - r, a[\ \cap\ A \neq \emptyset$



Derecha: $]a, a+r[\ \cap A \neq \emptyset$

<u>Definición:</u>

Sea a pto. de acumulación por la izqda. de A. Se dice que $b \in R$ es límite por la izqda. de $f: a \subset R \to R$ en a cuando:

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \,/\, x \in A, a- \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

Izqda. $b = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x)$
Dcha. $b = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x)$

El álgebra de límites para límites laterales es la misma que para límites ordinarios. Es decir,

<u>Proposición:</u>

Si a es pto. de acumulación por la izqda. de $A \cap B$ (A dominio de f, B dominio de g) y si: $b = \lim_{x\to a^-} f(x)$, $c = \lim_{x\to a^-} g(x)$, entonces:

$b + c = \lim_{x\to a^-} (b + c)(x)$

La demostración es idéntica a la que conocemos para límites ordinarios.

Siempre que se hable de límite por la izqda. de una función en un pto. quedará sobreentendido que el pto. es de acumulación por la izqda. del dominio de la función.

<u>Proposición:</u>

Sea a pto. de acumulación por la izqda. y la dcha. de A. Entonces $f: A \subset R \to R$ tiene límite en a si sólo si tiene límite en a por la izqda. y la dcha. y ambos coinciden.

<u>Ejemplo:</u>

$$F: x \in R \to \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$ $\qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$

- Límites de oscilación de una función.
- Límites inferior y superior.

<u>Definición:</u>

Sea a pto. de acumulación de A. Se dice que b es un límite de oscilación de f: $A \subset R \to R$ en a cuando:

$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in A, 0 < x - a < \delta \,/\, |f(x) - b| < \varepsilon$

Ejercicio:

Ver que b es valor de adherencia de un sucesión x_n si solo si es "límite de oscilación" en $+\infty$ de f: $n \in N \to x_n$

Es un concepto que ya conocíamos para el caso particular de las sucesiones y el pto. $+\infty$.

Ejemplo:

$$F: x \in R \to \begin{cases} 0 \text{ si } x \in Q \\ 1 \text{ si } x \notin Q \end{cases}$$

Véase que 0 y 1 son los únicos límites de oscilación de f en cualquier pto.

$F: x \in R \setminus \{0\} \to \text{sen } 1/x$

Ejercicio:

Ver que todo número real $b \in [-1, 1]$ es límite de oscilación de f en 0.

Definición:

Se dice que b es límites superior (inferior) de f en a, cuando f es acotado en algún entorno de a y b es el mayor (menor) de los límites de oscilación de f en a. Si f no es acotada superiormente en ningún entorno de a puede decirse que $+\infty$ es $\lim_{x\to a} \sup f(x)$.

$b = \lim_{x\to a} \sup f(x) = \overline{\lim}_{x\to a} f(x)$

$b = \lim_{x\to a} \inf f(x) = \underline{\lim}_{x\to a} f(x)$

Para estos límites, superior e inferior, no funciona el álgebra de límites. Se verifica, por ejemplo que $\lim_{x\to a} \sup (f + g)(x) \leq \lim_{x\to a} \sup f(x) + \lim_{x\to a} \sup g(x)$ (Probarlo).

Ejercicio: Escribir la definición de límite superior con ε's y δ's.

Proposición:

Sea a un pto. de acumulación de A.

$f: A \subset R \rightarrow R$ tiene límite b en a si sólo si, para toda sucesión (x_n) de $A \setminus \{a\}$ que converge a a, la sucesión $(f(x_n))$ converge a b.

Esto es útil para ver que f no tiene límite en a, basta encontrar una sucesión $(x_n) \rightarrow a$ tal que $(f(x_n))$ no es convergente.

Puesto que esa es una condición necesaria y suficiente para que $\lim_{x\to a} f(x) = b$, bien podemos decir que es una definición alternativa del concepto de límite.

Para ver que $f: A \subset R \rightarrow R$ no es continua en $a \in A \cap A'$ basta encontrar una sucesión en A, $(x_n) \rightarrow a$, tal que $(f(x_n))$ no $\rightarrow f(a)$

Demostración:

$b = \lim_{x\to a} f(x)$

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 / x \in A\ , 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

$f \in\ ]a - \delta, a + \delta[\ \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in\ ]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$

Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Esto significa que $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 / x \in A, 0<|x-a|< \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Por consiguiente, si (x_n) es una sucesión de $A \setminus \{a\}$ que converge a a, dado aquel $\delta > 0$, $\exists\ \upsilon \in N / n > \upsilon \Rightarrow 0 < |x_n - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow (f(x)) \rightarrow b$

Recíprocamente (contra-). Supongamos que f no tiene límite de f en a. Entonces:

$\exists\ \varepsilon > 0 / \forall\ n \in N, \exists\ x_n \in A, 0 < |x_n - a| < 1/n, |f(x) - b| > \varepsilon$.

Es evidente que (x_n) (que es de $A \setminus \{a\}$) converge a a pero $f(x_n)$ no $\rightarrow$ b

FUNCIONES CONTINUAS

Definición:

Se dice que $f: A \subset R \rightarrow R$ es continua en $R \in A$ cuando:

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 / x \in A, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Es evidente que si f: $A \subset R \to R$ es continua en a, entonces:

- O bien a es pto. aislado de A (caso trivial) (si a es pto. aislado de A, es decir, si existe $\delta > 0$ / $]a - \delta, a + \delta[\cap A = \{a\}$ entonces f es continua en a, convenimos que toda función es continua en los ptos. aislados de su conjunto de definición).
- O bien a es pto. de acumulación de A, y se verifica que:

  - Existe límite de f en a.
  - Dicho límite es, precisamente, f(a).

De lo que hemos visto sobre el álgebra de límites se sigue que:

<u>Proposición:</u>

Si f: $A \subset R \to A$ y g: $B \subset R \to R$ son continuas en $a \in A \cap B$, entonces también lo son

- $f + g: A \cap B \to R$
- $\lambda f: A \to R$
- $f\, g: A \cap B \to R$
- y en caso de que $g(A) \neq 0$: $1/g: A \cap B^* \to R$, donde $B^* = \{x \in B / g(x) \neq 0\}$

En otras palabras un conjunto C_a (A, R), formado por las funciones de A en R que son continuas en $a \in A$ es un subálgebra del álgebra conmutativa y unitaria de todas las funciones de A en R ($\mathscr{F}$ (A, R)).

No sólo la adición, multiplicación, multiplicación por escalares, división (salvo por 0) de continuas dan continuas, sino también la composición:

<u>Proposición:</u>

Si f: $A \subset R \to R$ es continua en $a \in A$ y g: $B \subset R \to R$ es continua en $f(a) \in B$, entonces:

$g \circ f : f^{-1}(B) \subset R \to R$ es continua en a.

$f^{-1}(B) = \{ x \in A / f(x) \in B\}$

<u>Demostración:</u>

Por hipótesis $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \ /\ y \in B, |y - f(a)| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$

Por hipótesis, también:

Para ese $\delta > 0,\ \exists\ \rho > 0 \ /\ x \in A, |x - a| < \rho \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta$

Por consiguiente:

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \rho > 0 \ /\ \underbrace{\underline{x \in A, f(x) \in B}}_{x \in f^{-1}(B)}, |x - a| < \rho \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon \Rightarrow |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \varepsilon$$

Definición:

Se dice que $f: A \subset R \rightarrow R$ es continua en $B \subset A$ cuando es continua en todos los ptos. de B. Es decir, cuando, $\forall\ x \in B, \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \ /\ y \in A, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \delta=\delta(x,\varepsilon)$

Se dice que uniformemente continua en B cuando $\delta=\delta(\varepsilon)$ (dado $\varepsilon > 0$, hay un $\delta > 0$ que sirve para todos los $x \in B$)

Ejemplo:

La función $f: x \in R \rightarrow f(x) = x^2$ es continua en todo R. Basta tener en cuenta que es producto de la función $g: x \in R \rightarrow x$ (trivialmente continua, e incluso uniformemente continua en todo R / basta tomar $\delta = \varepsilon$) por ella misma ($f = g \cdot g = g^2$). Sin embargo es fácil ver que no es uniformemente continua en R. Ver que f si es uniformemente continua en cualquier conjunto acotado $B \subset R$.

Véase (intuitivamente y echando cuentas) que para un $\varepsilon > 0$, δ debe ser "más y más" pequeño a medida que x se hace grande (no hay un δ que sirva para todos los x).
Este mismo ejercicio nos sirve para saber que el producto de funciones uniformemente continuas es continuo pero puede no ser uniformemente continuo.

Si es verdad (véase) que si es uniformemente continua la suma y el producto por escalares de uniformemente continuas.

Sabemos que C (A, R) (funciones continuas de A en R) es con las operaciones de adición, multiplicación por escalares y multiplicación un álgebra.

C_u (A, R) (las que son uniformemente continuas) es un subespacio vectorial de aquel pero no una subálgebra.

Probaremos más adelante el siguiente teorema:

Teorema (Weierstrass):

Toda función continua en un compacto es uniformemente continua en él.

En general uniformemente continua $\Rightarrow$ continua (pero no $\Leftarrow$)

Ejemplo:

f: $x \in R \setminus \{0\} \rightarrow 1/x$ es continua en $R - \{0\}$. Basta considerar que es creciente de continua (incluso uniformemente continua).

g: $x \in R \rightarrow 1$ ($\forall\ \varepsilon > 0$, cualquier $\delta > 0$ vale)
h: $x \in R \rightarrow x$ ($\forall\ \varepsilon > 0$, vale $\delta = \delta$)

$f = g/h$: $x \in R \setminus \{0\} \rightarrow 1/x$

Sin embargo f no es continua (Véase)

Véase también que f si es uniformemente continua en cualquier $B \subset R$ que se disjunto, junto con algún entorno de 0.

Tipos de discontinuidades:

Para empezar, si f: $A \subset R \rightarrow R$ no es continua en $a \in A$, entonces a es pto. de acumulación de A.

Al no ser continua f en a, puede ocurrir:
1.- Que exista $\lim_{x\rightarrow a} f(x)$ pero que sea distinto que f(a), se dice entonces que f tiene una discontinuidad evitable en a.

Ejemplo:

x si $x\neq0$
f: $x \in R \rightarrow$

1 si x=0

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \neq f(0)$

2.- Que no exista $\lim_{x \to a} f(x)$ pero que existan $\lim_{x \to a^-} f(x)$, $\lim_{x \to a^+} f(x)$ pero que sean distintos. Se dice, entonces, que f tiene una discontinuidad de salto finito.

<u>Ejemplo:</u>

$$f: x \in R \to \begin{cases} -1 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

En ese ejemplo $\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$
se dice que es continua en 0 por la izqda.

2*.- Discontinuidad de salto infinito cuando alguno de los límites laterales es infinito ($+\infty$, $-\infty$). Evitable infinito cuando $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

<u>Ejemplo:</u>

$$f: x \in R \to \begin{cases} 1/x \text{ si } x \neq 0 \\ .1 \text{ si } x=0 \end{cases}$$

3.- No existe alguno de lo límites laterales. Discontinuidad esencial o de 2ª especie.

<u>Ejemplo:</u>

$$f: x \in R \to \begin{cases} 0 \text{ si } x \in Q \\ .1 \text{ si } x \notin Q \end{cases}$$

Otra forma de decir que una función es continua es esta:

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 / x \in]a - \delta, a + \delta[\cap A \Rightarrow f(x) \in]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[$

o bien

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 / f^{-1}(]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[) \subset]a - \delta, a + \delta[$

Teniendo en cuenta que este particular espacio topológico (R con su topología natural), un conjunto $U \subset R$ es entorno de un punto $p \in R$, si sólo si (por definición) U contiene contiene algún intervalo centrado en p, podemos decir que $f: A \subset R \rightarrow R$ es continua en $a \in A$ cuando:

$\forall\ V \in V^o(f(a)), f^{-1}(V) \in V^o(a)$ donde $V^o(A)$ son entornos de a con la topología relativa de A, es decir, con conjuntos que son intersección con A de lo entornos (con la topología de R).

Análogamente, $f: A \subset R \rightarrow R$ es continua (en todo punto de A) cuando $\forall\ G \in \tau_R$, $f^{-1}(G) \in \tau_A \rightarrow$ significa que $f^{-1}(G)$ es la intersección de A con un abierto de R, $\tau_A=\{G\cap A/G\in\tau\}$

Teorema:

Si $f: A \subset R \rightarrow R$ es continua y A es compacto entonces f(A) también es compacto.

Demostración:

Por hipótesis de todo recubrimiento abierto de A se puede extraer un subrecubrimiento finito (A es compacto).

Sea $\{G_i / i \in I\}$ un recubrimiento abierto de f(A). Por ser f continua cada $f^{-1}(G_i)$ es un abierto de A, luego $\{f^{-1}(G_i) / i \in I\}$ es un recubrimiento abierto de A. Como A es compacto $\exists\ i_1.....i_n$ en I / $\{f^{-1}(G_{i1}).....f^{-1}(G_{in})\}$ es un recubrimiento de A $\Rightarrow \{G_{i1}....G_{in}\}$ es un recubrimiento de f(A).

Corolario:

Si A es compacto y $f: A \subset R \rightarrow R$ es continua, entonces f alcanza un mínimo y un máximo, es decir, $\exists$ a, b $\in$ A / f(a) = min. $\{f(x) / x \in A\}$, f(b) = máx. $\{f(x) / x \in A\}$

Demostración:

Como f(A) es compacto, acotado y cerrado, existe m = inf.f(A), n = sup. f(A). Como f (A) es cerrado el inf y el sup. de él pertenecen a él.

Ejemplo:

$f: x \in]0, +\infty[\rightarrow 1/x$

Es continua pero no alcanza ni el máximo ni el mínimo.

Sup. $f(]0,+\infty[) =$ "$+\infty$"
Inf. $F(]0, +\infty[) = 0$

$f: x \in]0, 1[\rightarrow x$

inf. $f(]0, 1[) = 0$	$\nexists\ a, b \in]0, 1[\ / \ f(a) = 0, f(b) = 1$
sup $f(]0, 1[) = 1$	$\nexists\ a, b \in]0, 1[\ / \ f(a) = \min. f(A), f(b) = \text{máx}. f(A)$

Sabemos por el teorema anterior que si $f: A \subset R \rightarrow R$ es continua, entonces si A es compacto implica que f(A) es compacto.

Sin embargo:

1.- A abierto no $\Rightarrow$ f(A) abierto

Ejemplo:

$f: x \in]-1, 1[\rightarrow x^2$

$f (]-1, 1[) = [0, 1[$

2.- A cerrado no $\Rightarrow$ f(A) cerrado

Ejemplo:

$f: x \in [1, +\infty[\rightarrow 1/x$

$f([1, +\infty[) =]0, 1]$

3.- A acotado no $\Rightarrow$ f(A) acotado

f es secuencialmente continua $: \Leftrightarrow [(x_n) \rightarrow a \Rightarrow f(x) \rightarrow f(a)]$

Acabamos de ver que en R:

f secuencialmente continua $\Leftrightarrow$ f continua

Un intervalo en sentido amplio en R es un conjunto I tal que $x, y \in I, x < z < y \Rightarrow z \in I$ (un conjunto tal que, si contiene a dos puntos, también contiene a todo los intermedios).

Es evidente que I es un intervalo en sentido amplio si y sólo si es de la forma: $\varnothing$, $\{a\}$, $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$, con $a < b$, $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$, $]a, +\infty[$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, +\infty[$.

Teorema (del valor medio para funciones continuas):

Si $f: [a, b] \subset R \rightarrow R$ es continua y tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $f (c) = 0$

Demostración:

Supongamos que $f(a) < 0 < f(b)$. Consideremos el conjunto $M = \{x \in [a, b] / f(x) < 0\}$, M es no vacío, $a \in M$ y acotado superiormente, b es cota superior de M. Por tanto, tiene supremo. Sea $c = \sup M$. Vamos a ver $a < c < b$ y $f(c) = 0$. Para ello veremos cuatro casos, en cada uno de ellos el argumento es el mismo:

1.- $a < c$
2.- $c < b$ (ejercicio)
3.- $f(c)$ no < 0
4.- $f(c)$ no > 0 (ejercicio)

1.- Por ser f continua en c y tal que $f(a) < 0$, dado $-f(a) > 0$, $\exists\ \delta > 0 / x \in [a, b], |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < -f(a)$. Luego $f(x) = 0$
Como $[a, a + \delta] \subset M \Rightarrow c \geq a + \delta \Rightarrow c > a$

3.- Supongamos que $f(c) < 0$, por ser f continua en c (ya se sabe que $c \in [a, b]$), dado $-f(c) > 0$, $\exists\ \delta > 0 / x \in [a, b], |x - c| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(c)| < -f(c) \Rightarrow f(x) < 0$
Como $a < c < b$, eso significa que hay puntos en M a la derecha de c, luego c no es cota superior de M. Contradicción.

<u>Ejemplos:</u>

$f: x \subset Q \cap [0, 2] \rightarrow x - \sqrt{2}$

Por supuesto que f es continua y
tal que $f(0) \cdot f(2) < 0$. Sin embargo
$\nexists\ c \in Q \cap [0, 2] / f(c) = 0$
Esto ocurre porque el teorema es
falso en Q.
Lo mismo ocurre en
$f: x \in [0, 1[\ U\ ]1, 2] \rightarrow x - 1$
porque no es un intervalo.

Tampoco ocurre si f no es continua

-1 si $x < 1$

$f: x \in [0, 2] \rightarrow$

.1 si $x > 1$

Corolario:

Si I es un intervalo (en sentido amplio) y $f: I \rightarrow R$ es continuo, entonces f(I) también es un intervalo (en sentido amplio).

En otras palabras, f alcanza todo valor comprendido entre dos que alcanza. Es decir, si $x, y \in I$, $x < y$, $f(x) < \eta < f(y)$, (lo mismo si $f(y) < \eta < f(x)$), entonces existe ξ, δ entre x, y tal que $f(\xi\delta) = \eta$

En efecto, basta considerar la función continua $g: t \in [x, y] \rightarrow g(t) = f(t) - \eta$

Ejemplo:

Función no continua que también lleva intervalos en intervalos:

$$f: x \in R \rightarrow f(x) = \begin{cases} \text{Sen. } 1/x \text{ si} \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Damos por sabido que la función $x \in R \rightarrow \text{sen } x$ es continua y, por tanto, también lo es su composición con la $x \in R \setminus \{0\} \rightarrow 1/x$. Es decir, f es continua en $R - \{0\}$. Sin embargo, no es continua en 0. Basta tener en cuenta que $\forall\ \delta > 0$, $\forall\ z \in [-1, 1]$, $\exists\ x \in]-\delta, \delta[\ /\ f(x) = z$

$\text{Lim}_{x\to 0} \sup f(x) = 1$ $\qquad$ $\text{Lim}_{x\to 0} \inf f(x) = -1$

Esta f transforma intervalos en intervalos.
Si $0 \notin I$, f continua
Si $0 \in I$, $f(0) = 0$, $0 \in f(I) \subset [-1, 1]$.

Ejercicio:

Ver que si $f: R \rightarrow R$ tiene alguna discontinuidad de salto, entonces no lleva intervalos en intervalos.

Teorema (Weierstrass):

Si $A \subset R$ es compacto y $f: A \subset R \to R$ es continua entonces es uniformemente continua.

Toda función continua en un compacto es uniformemente continua.

La definiciones implicadas son:

f es continua en A $\Leftrightarrow \forall\, x \in A, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \,/\, y \in A, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

f es uniformemente continua en A $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \,/\, x, y \in A, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Un ejemplo de continua no uniformemente continua es la $f: x \in R \setminus \{0\} \to 1/x$ ó $f: x \in R \to x^2$ ó $f: x \in]0, 1[\to 1/x$ (Nótese que $R\setminus\{0\}$, R, $]0, 1[$ no son compactos).

Demostración:

Que f es continua en A significa que:

$\forall\, x \in A, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_x \,/\, y \in A, |x - y| < \delta_x \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$

Naturalmente, $\{]x - \delta_x/2, x + \delta_x/2[\,/\, x \in A\}$ es un recubrimiento abierto de A ("cada punto de a con su paraguas"). Como A es compacto, basta con finitos de ellos, es decir, existen $x_1,........., x_n \in A$ tales que $\{]x_1 - \delta_x/2, x_1 + \delta_x/2[......]x_n - \delta_x/2, x_n + \delta_x/2[\}$ recubren a A.

Sea $\delta = \min \{\delta_{x1}/2,..........., \delta_{x2}/2\} > 0$

Entonces, si $x, y \in A$, $|x - y| < \delta$, existe $k \in \{1,....., n\}$ tal que $x \in]x_k - \delta_{xk}/2, x + \delta_{xk}/2[$ y tenemos que $|y - x_k| \leq |y - x + x - x_k| < \delta + \delta_{xk}/2 \leq \delta_{xk}$
Por tanto, $x, y \in A, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

AMPLIACIÓN ANÁLISIS MATEMÁTICO I

TEMA I: Cálculo diferencial:

Supongamos que f y g son dos funciones reales definidas en sendos entornos de un punto $a \in R$.

$f: V \subset R \to R$

$g: U \subset R \to R$

Definición:

Diremos que f tiene un contacto con g en a de orden m (m = 0, 1, 2, 3,....), si:

- $f(a) = g(a)$
- $\lim_{x\to a} [(f(x) - g(x)) / (x - a)^m] = 0$

Nótese que $[(f(x) - g(x)) / (x - a)^m]$ está definido en $(U \cap V) \setminus \{a\}$, a es punto de acumulación de $(U \cap V) \setminus \{a\}$ y que tiene sentido hablar de ello.

Nótese, también que $U \cap V$ es entorno de a.

El numerador se hace 0
antes que el denominador

Denotaremos F_a al conjunto formado por las funciones reales definidas en algún entorno de a. Es fácil ver que la relación "tener un contacto de orden m en a" es de equivalencia en F_a.

- Reflexiva: $\forall$ $f \in F_a$, f tiene un contacto en a de orden m (cualquier m) consigo mismo.
- Simétrica: si $f(a) = g(a) \Rightarrow \lim_{x\to a} [(f(x) - g(x)) / (x - a)^m] = 0 \Rightarrow$
  $\lim_{x\to a} [(g(x) - f(x)) / (x - a)^m] = 0 \Rightarrow g(a) = f(a)$
- Transitiva: $f(a) = g(a)$, $g(a) = h(a) \Rightarrow f(a) = h(a)$
  $\lim_{x\to a}[(f(x)-h(x)) / (x-a)^m] = \lim_{x\to a}[(f(x)-g(x)) / (x-a)^m] + \lim_{x\to a}[(g(x)-h(x)) / (x-a)^m]$

Más propiedades de la relación:

Proposición:

Sean $f, g \in F_a$. Si f tiene un contacto en a de orden m con g y si $k < m$, entonces también tiene un contacto de orden menor.

Demostración:

Basta considerar que si $0 < |x - a| < 1$, entonces $|x - a|^m < |x - a|^k$, de donde:

$[(f(x) - g(x)) / (x - a)^k] \le [(f(x) - g(x)) / (x - a)^m] \to 0$ Como el grande tiende a 0, con más razón el pequeño.

Sean P y Q funciones polinómicas de grado menor o igual que m:

$P: x \in R \to b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_m x^m$

$Q: x \in R \rightarrow c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots\dots\dots + c_m x^m$

Proposición:

Si P tiene un contacto con Q en un punto $a \in R$, de orden m, entonces P = Q.

Corolario:

Si clasificamos las funciones de R en R utilizando la relación de equivalencia "tener un contacto en a de orden m" en cada clase hay una y sólo una función polinómica de grado menor o igual que m. Esta función puede verse como representante canónico de cada clase.

Demostración:

Es bien sabido que todo polinomio se puede ordenar en polinomios de binomio x - a. Es decir que:

$P(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots\dots\dots + b_m x^m \equiv p_0 + p_1 (x\text{-}a) + \dots\dots + p_m (x\text{-}a)^m$
$Q(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots\dots\dots + c_m x^m \equiv q_0 + q_1 (x\text{-}a) + \dots\dots + q_m (x\text{-}a)^m$

$P(x) = c_1 x (x\text{-}a) + p_0 \equiv [c_2 (x) (x\text{-}a) + p_1] (x\text{-}a) + p_0 = m$

Eso supuesto, si P tiene contacto con Q en a de orden m, también lo tiene de orden 0:

$0 = \lim_{x\to a} [p(x) - q(x)] = p_0 - q_0 \Rightarrow p_0 = q_0$

También lo tiene de orden 1:

$\lim_{x\to a} [p_0 + p_1 (x\text{-}a) + \dots\dots + p_m (x\text{-}a)^m] / (x\text{-}a) \Rightarrow p_1 = p_2$

etc.

Ya hemos visto que:

- La relación "tener un contacto en a de orden m" es de equivalencia en el conjunto de las funciones reales definidas en algún entorno de a.
- Si f tiene contacto en a de orden m con g, entonces también lo tiene de orden n = 1, 2, ..., m-1.
- Si dos polinomios (funciones polinómicas) de grado menor o igual que m tienen un contacto en algún punto, de orden m, entonces son la misma.

Se dice que el contacto es de orden ∞ cuando es de orden m para todo m.

Ejercicio:

La función $f: x \in R \rightarrow \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ tiene un contacto de orden ∞ en 0 con la función $g: x \in R \rightarrow 0$, es decir, se verifica que $\lim_{x\to a} e^{-1/x}/x^m = 0$, $(m = 0, 1, 2, \dots..)$

Definición:

Sea f una función definida en algún entorno de $a \in R$. Se dice que f es diferenciable o derivable en a cuando f tiene un contacto en a de orden 1 con una función afín (polinómica de grado menor o igual que 1).

Nótese que bastaba para poder dar esa definición (también la de contacto) con que a fuese pto. de acumulación del conjunto de definición. No compensa hablar con esta mayor generalidad.

Veamos lo que significa la definición anterior.

f definida en entorno de a, es diferenciable en a: $\exists$ g: $x \in R \rightarrow r x + s \in R$ tal que f(a) = g(a), $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] / (x - a) = 0$.

No merece la pena escribir g(x) ordenado en potencias de x – a, es decir, g(x) p(x-a) + q (bien sabemos que podemos hacerlo, basta poner p = r, q = s – ra)

Escribiendo así g(x), de g: $x \in R \rightarrow r x + s \in R$ tal que f(a) = g(a), $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] / (x - a) = 0$ se sigue que $f(a) = g(a) \Rightarrow q = f(a)$, esto supuesto, $0 = \lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] / (x-a) \Rightarrow p = \lim [f(x) - f(a)] / (x-a)$

En otras palabras f tiene un contacto en a de orden con una función afín (f es diferenciable en a), entonces dicha función es la $x \in R \rightarrow f(a) + f'(a)(x-a)$, donde $f'(a) = \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] / (x-a)$. De este número f'(a) se dice que es la derivada en a de f.

Ejercicio:

Haciendo uso de lo que queda dicho ver que f es diferenciable en a si sólo si existe $\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] / (x-a)$.

Sentido geométrico:

Intuitivamente la recta $y = f(a) + f'(a)\,(x\text{-}a)$, que pasa por $(a, f(a))$ y tiene pendiente $f'(a)$ es tangente en $(a, f(a))$ a la gráfica de f, $y = f(x)$.

Proposición:

Si f es derivable en a entonces es continua.

Demostración:

Por hipótesis, $\exists\ f'(a) \in R$, $\lim_{x\to a} [f(x) - f(a) - f'(a)\,(x\text{-}a)] / (x\text{-}a) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ * $\lim_{x\to a} [f(x) - f(a) - f'(a)\,(x\text{-}a)] = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

(*) basta tener en cuenta que para $0 < |x - a| < 1$, $|f(x) - f(a) - f'(a)\,(x\text{-}a)| \leq [f(x) - f(a) - f'(a)\,(x\text{-}a)] / (x\text{-}a)$

Para ver que el reciproco es falso, basta un ejemplo:

$f: x \in R \to |x|$ es continua en todo R (trivialmente, basta tomar $d = \varepsilon$ en la definición de función continua), pero no es diferenciable en 0, $\nexists\ \lim_{x\to 0} [f(x) - f(0)] / (x\text{-}0) = \lim_{x\to 0} |x|/x$ porque $|x|/x = -1$ si $x < 0$ ó 1 si $x > 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} |x|/x = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 0^+} |x|/x$

Ejercicio:

Ver que f, definida en algún entorno de a, es continua en a si sólo si tiene un contacto de orden 0 con una función constante (polinómica de grado 0).

Dicha función cte. es única y es la que $x \in R \to f(a)$

Otro ejemplo:

$$f: x \in R \to \begin{cases} x \operatorname{sen} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Es continua en 0 (también en todo punto) pro no diferenciable en 0. Continua en 0 porque $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 / |x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$, esto es cierto ya que $|x \operatorname{sen} 1/x| \leq |x|$ basta tomar $\delta = \varepsilon$ (sólo suponemos conocido para decir esto que $-1 < \operatorname{sen} y < 1$)

Sin embargo no es derivable en 0 porque $\exists \lim_{x\to 0} f(x)/x = \lim_{x\to 0} [x\text{-sen}1/x] / x$

No existe porque en cualquier entorno de 0 sen $1/x$ alcanza cualquier valor comprendido entre -1 y 1.

A diferencia del ejemplo anterior, aquí ni siquiera existen los límites laterales del "cociente elemental" $[f(x) - f(0)] / (x-0)$

Aprovechamos para decir que f se dice derivable por la izquierda (por la derecha) cuando existe el límite por la izquierda (derecha) $\lim_{x\to a^-} [f(x) - f(a)]/(x - a) = f'_-(a)$. Es decir cuando existen:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to a^-} [f(x) - f(a)]/(x - a) = f'_-(a) \\ \lim_{x\to a^+} [f(x) - f(a)]/(x - a) = f'_+(a)\end{aligned}\right. \quad \text{Derivadas por la izqda. y drcha. en a.}$$

Intuitivamente f es derivable en a si solo si los es por la izquierda y por la derecha y ambas derivadas coinciden.

Ejemplo:

La función $f: x \in R \to |x|$ es derivable por la izquierda y la derecha en 0.

$f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$ (Verlo en el ejemplo)

La del segundo ejemplo no es derivable por la izquierda ni por la derecha (x sen $1/x$)

Otro ejemplo:

Sea $f: R \to R$ tal que, $\forall x \in R\ |f(x)| \le x^2$. Una función como esa, es siempre derivable en 0. En efecto: $|[f(x) - f(0)] / (x-0)| = |f(x)/x| \le |x| \to_{x\to 0} 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)/x = 0 = f'(0)$. Lo que ocurre es $-x^2 \le f(x) \le x^2$.

La gráfica de f está en la parte rayada. Ni que decir tiene que la función $x \in R \to 0$ tiene un contacto con ella en 0 de orden 1.

Así que la función $f: x \in R \to \begin{cases} x^2 \text{ si } x \in Q \\ -x^2 \text{ si } x \in I \end{cases}$ es derivable en 0 (por lo tanto continua) y no continua (mucho menos derivable) en cualquier otro punto.

Ejercicio:

Ver que la función $f: x \in R \to f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ sen } 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ -x^2 & \text{si } x \in I \end{cases}$ es derivable en 0. (Representarla)

- Álgebra de derivadas (operaciones con funciones derivables):

Proposición:

Sean f y g funciones reales definidas en sendos entornos de $a \in R$. Si f y g son derivables en a, entonces también lo son:

- $f + g$: dom. $f \cap$ dom. $g \to R$

- λ f: dom. f $\to$ R
- f g: dom. f $\cap$ dom. g $\to$ R
- Si g(a) $\neq$ 0 f/g: dom. f $\cap$ (dom. g)* $\to$ R, donde (dom. g)* = {x $\in$ dom. g / g(x)$\neq$0}

Verificándose que:

- (f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)
- (λf)'(a) = λ f'(a)
- (f g)'(a) = f'(a) g(a) + f(a) g'(a)
- (f/g)'(a) = [f'(a) g(a) – f(a) g'(a)] / g^2(a)

Demostración:

Suma:

$$(f+g)'(a) = \lim_{x\to a} \{[(f+g)(x)-(f+g)(a)]/(x-a)\} = \lim_{x\to a} \{[f(x)-f(a)]/(x-a)\} +$$
$$+ \lim_{x\to a} \{[g(x)-g(a)]/(x-a)\} = f'(a) + g'(a)$$

Producto por escalar:

$$(\lambda f)'(a) = \lim_{x\to a} \{[(\lambda f)(x)-(\lambda f)(a)]/(x-a)\} = \lambda \lim_{x\to a} \{[f(x)-f(a)]/(x-a)\} = \lambda f'(a)$$

Producto:

$$(f\,g)'(a) = \lim_{x\to a} \{[(f\,g)(x)-(f\,g)(a)]/(x-a)\} =$$
$$= \lim_{x\to a} \{[f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)]/(x-a)\}=$$
$$= \lim_{x\to a} \{[f(x)-f(a)]/(x-a)\} \cdot \lim_{x\to a} g(x) + f(a) \lim_{x\to a} \{[g(x)-g(a)]/(x-a)\} =$$
$$= f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a)$$

Cociente:

$$(f/g)'(a) = \lim_{x\to a} \{[(f/g)(x)-(f/g)(a)]/(x-a)\} =$$
$$= \lim_{x\to a} \{[f(x)g(a) - f(a)g(x)]/ [(x-a)\,(g(x)-g(a))]\} =$$
$$= \lim_{x\to a} \{[f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)]/[(x-a)\,(g(x)-g(a))]\} =$$
$$= \lim_{x\to a} \{[f(x)-f(a)]/(x-a)\}\ \{g(a)/[g(x)-g(a)]\} -$$
$$- \lim_{x\to a} \{[g(x)-g(a)]/(x-a)\}\ \{f(a)/[g(x)-g(a)]\} =$$
$$= f'(a)\,[g(a)/g^2(a)] - g'(a)\,[f(a)/g^2(a)] = \{[f'(a)g(a)-f(a)g'(a)]/g^2(a)\}$$

Consecuencias de la proposición anterior:

La función f: x $\in$ R $\to$ x^2 es derivable, para todo x $\in$ R y tal que f'(x) = 2x. Basta considerar que f es producto por si misma de g: x $\in$ R $\to$ x que es tal que g'(x) = 1, (x $\in$ R). Por lo tanto: (g g)'(x) = g'(x)g(x) + g(x)g'(x) = 1·x+x·1= x + x = 2x.

Ejercicio:

Ver que también es diferenciable en todo x $\in$ R, la función f: x $\in$ R $\to$ x^n, donde n = 2, 3, 4,......, y que verifica que f'(x) = n x^{n-1}, ya lo sabemos para n = 1, lo suponemos cierto para n-1 y con ello lo probamos para n. (método de inducción).

Ver que también las funciones polinómicas son derivables en todo R (y tales que las funciones racionales donde A = {raíces del denominador} conjunto, de a lo sumo, m elementos son también derivables en todo $x \in R\backslash A$

$f: x \in R \rightarrow a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$
$f'(x) = na_n x^{n-1} + ... + 2a_2 x + a_1$
$f: x \in R\backslash A \rightarrow (a_n x^n + ... + a_1 x + a_0) / (b_m x^m + ... + b_1 x + b_0)$

Proposición: (Regla de la cadena o de derivación de funciones compuestas)

Si f (definida en un entorno de $a \in R$) es derivable en a y g (definida en un entorno de a) es derivable de a) es derivable en f(a), entonces (g º f) es derivable en a, y se verifica:

$(g \circ f)'(a)= g'(f(a)) \cdot f'(a)$

Demostración:

En primer lugar veamos, donde está definida es función (g º f).

Supongamos:

$f: U \subset R \rightarrow R$ (U entorno de a)
$g: V \subset R \rightarrow R$ (V entorno de f(a))

Entonces (g º f) está definida en $g \circ f: f^{-1}(V) \subset R \rightarrow R$, donde $f^{-1}(V) =\{x \in V / f(x) \in V\}$

Pues como f es continua en a, resulta que $f^{-1}(V)$ = dom. (g º f) es entorno de a, (entorno de a en la topología relativa de V, pero, bonito ejercicio de topología, "un entorno de un punto en la topología relativa de otro entorno de ese punto" es un entorno).

Pues como $f^{-1}(V)$ es entorno de a, se puede hablar de (g º f)'(a). Una vez visto eso, la demostración de lo que decimos es "casi" inmediata. Bastaría escribir:

$\{g[f(x)] – g[f(a)]\} / (x - a) = \{[g[f(x)] – g[f(a)]] / [f(x) – f(a)]\} \cdot [f(x) – f(a)] / (x – a)$ y

tener en cuenta que por un f continúa en a $f(x) \rightarrow f(a)$, cuando $x \rightarrow a$, luego tomando límites ahí arriba obtenemos lo que queríamos. (Hay que tener en cuenta que al multiplicar por f(x)-f(a) puede ser 0, luego no vale).

Esta forma de argumentar no es lícita porque no está argumentando que $f(x) – f(a)$ sea $\neq 0$. Hay que dar un rodeo para esquivar esa problemática argumentación. P. ej. Podemos proceder de la siguiente forma.

Defino la función auxiliar $h: g \in \text{dom. } g \rightarrow h(g) = \begin{cases} [g(y) – g[f(a)] / [y – f(a)] & \text{si } y \neq a \\ g'[f(a)] & \text{si } y = f(a) \end{cases}$

de modo que quedaría $\{g[f(x)] – g[f(a)] / (x – a)\} = h[f(x)] \{[f(x) – f(a)] / (x – a)\}$
Pues bien, por ser g derivable en f(a), $h[f(x)] \rightarrow g'[f(a)]$ cuando $x \rightarrow a$ y ya está.
Ejemplo:

Supongamos que sabemos que la función:

$f: x \in R \rightarrow \text{sen } x$

es derivable en todo punto y tal que f'(x) = cos x

Vamos a componerla con la función g: $x \in R \to x^3$ que también sabemos que es derivable en todo punto, y tal que $g'(x) = 3\,x^2$

Podemos componerlas de dos formas:

$g \circ f: x \to \text{sen } x \to \text{sen}^3 x$
$f \circ g: x \to x^3 \to \text{sen } x^3$

Tanto $g \circ f$ como $f \circ g$ son derivables, y se verifica además que $(g \circ f)'(x) = 3 \text{ sen}^2 \cos x$ y que $(f \circ g)'(x) = 3x^2 \cos x^3$

Definición:

Diremos que f: $A \subset R \to R$ es diferenciable en $B \subset A$, cuando sea diferenciable en todos los puntos de B. (Como hemos hablado de diferenciabilidad en los puntos tales que f está definida en un entorno del mismo, A deberá ser entorno de todos los puntos de B).

Nótese que para hablar de límite $\lim_{x\to a} [f(x) - f(a)] / (x - a)$ basta con que a sea punto de acumulación (no punto interior) del dominio de f. Pero no merece la pena considerar esta mayor generalidad.

No obstante, es frecuente hablar de diferenciabilidad en todos los puntos de [a, b], de una función f: $[a, b] \to R$. (Nótese que a y b no son interiores a [a, b]). Ni que decir tiene que la diferenciabilidad de f en a (en b) es también diferenciabilidad por la derecha (izquierda).

Diremos que f: $A \subset R \to R$ es diferenciable continuamente en $B \subset A$, cuando sea diferenciable en B y la función f': $B^* \to R$ es continua. También se dice que f es de clase 1 o de clase C' en B, $f \in C'(B)$.

Ejercicio:

Ver que la suma, producto y producto por escalares de funciones diferenciables continuamente son diferenciable continuamente.

Ejemplo:

$$f: x \in R \to \begin{cases} x^2 \text{ sen } 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Supuesto que sabemos que la función seno es diferenciable en todo punto y que su derivada es la función coseno, entonces, aplicando el álgebra de derivadas (derivada de la composición, producto, ...) obtenemos, para $x \neq 0$:

$f'(x) = 2x \text{ sen } 1/x - (1/x^2)\, x^2 \cos 1/x = 2x \text{ sen } 1/x - \cos 1/x$

Si x = 0, f no es “elemental” (si elemental a trazos) en ningún entorno de 0. No sabemos derivar de memoria en 0. Si sabemos, naturalmente, aplicar la definición de derivada.

$\text{Lim}_{x\to 0} [f(x) - f(0)] / (x - 0) = \lim_{x\to 0} (x \text{ sen } 1/x) = 0$

Pues bien $f': R \rightarrow R$ es continua en $R\setminus\{0\}$ (lo sabemos) pero no es continua en todo R porque $\nexists \lim_{x\to 0} f'(x)$, $f \in C'(R\setminus\{0\})$ f' tiene una discontinuidad esencial en 0.

Veremos que si una función es derivada de otra en un intervalo (en cierto uso el intervalo es todo R), entonces no puede tener discontinuidades de primera especie, si de segunda especie, como hemos visto en este ejemplo.

Teoremas fundamentales del Cálculo Diferencial:

Antes de ellos, algunos conceptos y proposiciones:

Supongamos que $a \in \mathring{A}$ (esto es exactamente lo mismo que decir que A es entorno de a). Se dice que f es creciente en a cuando:

$\exists\ \delta > 0: a - \delta < x < a < y < a + \delta \Rightarrow f(x) \leq f(a) \leq f(y)$ (queda implícito aquí que $]a-\delta, a+\delta[\subset A$)

decreciente cuando:

$\exists\ \delta > 0 : a-\delta < x < a < y < a+\delta \Rightarrow f(x) \geq f(a) \geq f(y)$

estrictamente creciente cuando:

$\exists\ \delta > 0 : a-\delta < x < a < y < a+\delta \Rightarrow f(x) < f(a) < f(y)$

estrictamente decreciente cuando:

$\exists\ \delta > 0 : a-\delta < x < a < y < a+\delta \Rightarrow f(x) > f(a) > f(y)$

Se dice que f alcanza en a un mínimo (máximo) relativo cuando:

$\exists\ \delta > 0 : a-\delta < x < a < y < a+\delta \Rightarrow f(x) \geq f(a) \leq f(y)$
$\exists\ \delta > 0 : a-\delta < x < a < y < a+\delta \Rightarrow f(x) \leq f(a) \geq f(y)$

Se dice que el extremo (máximo o mínimo) relativo es estricto cuando:

$\exists\ \delta > 0 : a-\delta < x < a < y < a+\delta \Rightarrow f(x) > f(a) < f(y)$
$\exists\ \delta > 0 : a-\delta < x < a < y < a+\delta \Rightarrow f(x) < f(a) > f(y)$

Ejercicio:

Ver que f es creciente en a si sólo si:

$\exists\ \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow [f(x) - f(a)] / (x - a) \geq 0$

decreciente:

$\exists\ \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow [f(x) - f(a)] / (x - a) \leq 0$

estrictamente creciente:

$\exists\ \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow [f(x) - f(a)] / (x - a) > 0$

estrictamente decreciente:

$\exists\ \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow [f(x) - f(a)] / (x - a) < 0$

¿Cómo queda esto en el caso de los extremos relativos?

Ejercicio:

Ver cuales son los puntos de crecimiento, decrecimiento, en los que alcanzan extremos relativos,........, de la función:

$$f: x \in R \to \begin{cases} x \text{ sen } 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Ver que el 0 no es ninguna de las ocho cosas anteriores:

Ejemplo:

$$F: x \in R \to f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \notin Q \\ 0 \text{ si } x \in Q \end{cases}$$

no es creciente ni decreciente en ningún punto, todos son mínimo o máximo (no estrictos).

Supongamos que $f: A \subset R \to R$ es derivable en $a \in \mathring{A}$

1ª Proposición:

Si f es creciente (decreciente) en a, entonces $f'(a) \geq 0$ (≤ 0)

Demostración:

Vimos que f es creciente (decreciente) en a si sólo si:
$\exists\ \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow [f(x) - f(a)] / (x - a) \geq 0$ (≤ 0)

Por tanto, si existe (que es nuestra primera hipótesis), $\lim_{x\to a} [f(x) - f(a)] / (x - a)$, dicho límite no tiene mas remedio que ser ≥ 0 (≤ 0)

2ª Proposición:

Si f alcanza un extremo (máximo o mínimo) relativa en a, entonces $f'(a) = 0$

Demostración:

Nótese que alcanzar un máximo relativo en a significa que:

$\exists\, \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow [f(x) - f(a)] / (x - a) \geq 0$
$\exists\, \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow [f(x) - f(a)] / (x - a) \leq 0$

En otras palabras, f es creciente por la izquierda y decreciente por la derecha en a.

3ª Proposición:

Si $f'(a) > 0$ (< 0), entonces es estrictamente creciente (decreciente) en a.

Demostración:

Supongamos que $f'(a) = \lim_{x\to a} [f(x) - f(a)] / (x - a) > 0$. Entonces de la definición de límite se sigue que dado $f'(a) > 0$, $\exists\, \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow \{[f(x) - f(a)] / (x - a)\} - f'(a) < f'(a) \quad \Rightarrow [f(x) - f(a)] / (x - a) > 0$

En el caso $f'(a) < 0$

$-f'(a) > 0$, $\exists\, \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \{[f(x) - f(a)] / (x - a)\} + f'(a) < -f'(a) \Rightarrow$
$\Rightarrow [f(x) - f(a)] / (x - a) < 0$

Ejemplo:

La función $f: x \in R \to x^3$ es estrictamente creciente en 0 y tal que $f'(0) = 0$
Por consiguiente, no es cierto que $f'(a) = 0 \Rightarrow$ f alcanza en a un extremos relativo. No es cierto que estrictamente creciente en a $\Rightarrow f'(a) > 0$

En otras palabras no son ciertos los recíprocos de las proposiciones 2 y 3.
Ejemplo:

1 si $x \notin Q$
La función $f: x \in R \to$ alcanza mínimos (máximos) relativos (incluso

0 si $x \in Q$ absolutos) en los racionales (irracionales). Su derivada no es esa en ningún punto, por la sencilla razón de que no existe tal derivada (la función ni siquiera es continua en ningún punto).

Ejemplo:

La función $f: x \in R \to |x|$ tiene un mínimo relativo (y absoluto) estricto en 0. No se verifica que $f'(0) = 0$, es que $\nexists\ f'(0)$. El cálculo diferencial si permite en este caso localizar es mínimo, porque $f'_-(0) = -1 < 0$ y $f'_+(0) = 1 > 0$ no existe $f'(0)$ pero si existen las derivadas laterales y verifican que por la izquierda es negativa y por la derecha positiva.

Ejercicio:

Ver que si existen $f'_-(a)$ y $f'_+(a)$ y ambas son mayores que cero entonces la función es estrictamente creciente en a (estrictamente creciente por la izquierda y la derecha).

La función $f: x \in R \to \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es tal que $f'(0) = 0$ y en 0 no es nada (ni decrece, ni crece, ni es máximo, ni mínimo). Pero esto no lo dice el cálculo diferencial.

Otro ejemplo:

Consideremos la función:

$f: x \in [0, 1] \to x$, fe es derivable en todo x del interior de $[0, 1] =]0, 1[$ y también si admitimos el concepto de derivada tal cual en puntos que son interiores a [0, 1], a los puntos 0 y 1.

$\lim_{x\to 1} [(x-1) / (x-1)] = 1$ $\lim_{x\to 0} [(x-0) / (x-0)] = 0$

- Hay un mínimo (máximo) en 0 (en 1).
- No se verifica $f'(0) = 0$ ni $f'(1) = 1$

Explicación:

En las proposiciones anteriores es esencial $a \in \mathring{A}$ (o, como mínimo, punto de acumulación por la izquierda y la derecha de A. Esto y la transcendencia de la proposiciones anteriores son la razón de que al definir la derivada hayamos dicho $a \in \mathring{A}$.

Teorema de Rolle: (Fundamental de Cálculo Diferencial).

Si $f: [a, b] \to R$ es continua en [a, b], diferenciable en]a, b[y tal que $f(a) = f(b)$ entonces existe un $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Demostración:

1.- Si f es una función constante es evidente: $f'(c) = 0$ en todo $c \in]a, b[$.

2.- Si f no es constante [a, b] es compacto y f es continua, f alcanza el mínimo y el máximo absoluto (relativo).
Como f no es constante, o bien el máximo, o bien el mínimo, es distinto a f(a) = f(b), es decir, se alcanza en algún punto $c \in \,]a, b[$. Para este c se verifica que f'(c) = 0.

Este teorema no es cierto si f no esta definida en un intervalo:

$$f: x \in [0, 1[\cup]1, 2 \rightarrow \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x - 2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

es continua en $[0, 2] \setminus \{1\}$, derivable en el interior de $[0, 2] \setminus \{1\}$ tal que f(0) = f(2) = 0 f' no se anula en ningún punto.

<u>Teoremas de los incremento finitos o del valor medio de Cálculo Diferencial:</u>

Sean f, g: $[a, b] \rightarrow R$ continua en [a, b] y diferenciable en su interior.

<u>Teorema 1:</u>

$\exists\, c \in \,]a, b[$ tal que $[f(b) – f(a)]\, g'(c) = [g(b) – g(a)]\, f'(c)$

<u>Teorema 2:</u>

$\exists\, c \in \,]a, b[$ tal que $f(b) – f(a) = f'(c)\,(b – a)$

<u>Teorema 3:</u>

Si, además, $|f'(a)| \leq g'(x)$ para cada $x \in \,]a, b[$, entonces $|f(b) – f(a)| \leq g(b) – g(a)$

<u>Teorema 4:</u>

Si $|f'(x)| \leq M$, ($x \in \,]a, b[$), entonces $|f(b) – f(a)| \leq M\,(x – a)$

<u>Demostración:</u>

<u>Rolle $\Rightarrow$ Tª 1)</u>

Consideremos la función auxiliar, F: $x \in [a, b] \rightarrow F(x) =$ determinante $\begin{matrix} 1 & f(x) & g(x) \\ 1 & f(a) & g(a) \\ 1 & f(b) & g(b) \end{matrix}$

F es cte. + cte. f + cte. g. Por tanto, F es igual que f y g, continua en [a, b], derivable en]a, b[y tal que F(a) = F(b) = 0. Por consiguiente (Tª de Rolle) $\exists\, c \in \,]a, b[$ tal que f'(c) = 0.

<u>Tª 1 $\Rightarrow$ Tª 2)</u>

Basta toman en el Tª 1 g(x) = x. Si quisiéramos obtenerlo directamente del Tª de Rolle, utilizaríamos, naturalmente, la función auxiliar:

F: $x \in [a, b] \rightarrow F(x) =$ determinante $\begin{matrix} 1 & f(x) & g(x) \\ 1 & f(a) & g(a) \\ 1 & f(b) & g(b) \end{matrix}$

<u>Tª 2 $\Rightarrow$ Tª 4)</u>

Evidente

<u>Tª 1 $\Rightarrow$ Tª 3)</u>

Nótese que como consecuencia inmediata del Tª 2, si $g'(x) = 0$, ($x \in]a, b[$) entonces $g(b) - g(a) \geq 0$. Eso supuesto también $1 \Rightarrow 3$, sería inmediato si no fuera porque algunos factores en esta formula, $|f(b) - f(a)|\ |g'(c)| = |g(b) - g(a)|\ |f'(c)|$, puedan ser cero. Nótese que sobran los valores absolutos en $|g'(c)|$ y en $|g(b) - g(a)|$.

Esta demostración no vale porque puede ocurrir que: $7 \cdot 0 = 0 \cdot 6$ ó que $6 \cdot 0 = 0 \cdot 7$, tenemos que dar un pequeño rodeo.

Para cada $\varepsilon > 0$, consideramos la función:

g_ε: $x \in [a, b] \rightarrow g_\varepsilon(x) + \varepsilon (x - a)$. Como $g'(x) \geq 0$, ($x \in]a, b[$), $g'(x) = g'(x) + \varepsilon > 0$

Por tanto, (Tª 2)

$g_\varepsilon(b) - g_\varepsilon(a) = g(b) - g(a) + \varepsilon (b - a) > 0$

Aplicando el Tª 1 f y g_ε obtenemos que existe $c_\varepsilon \in]a, b[$ tal que

$|f(b) - f(a)|\ |g_\varepsilon'(c_\varepsilon)| = |g_\varepsilon(b) - g_\varepsilon(a)|\ |f(c_\varepsilon)|$. Lo cual (ya no hay peligro de que $g_\varepsilon'(c_\varepsilon)$ ó $g(b)-g(a)$ sean cero) implica que $|f(b) - f(a)| \leq g_\varepsilon(b) - g_\varepsilon(a) = g(b) - g(a) + \varepsilon (b - a)$. Finalmente como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, resulta que $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$.

<u>Ejercicio:</u>

<u>Tª 3 $\Rightarrow$ Tª 4)</u>

<u>Interpretación geométrica del Tª 2:</u>

$\exists\ c \in]a, b[\ /\ f'(c) = [f(b)- f(a)] / (b - a)$. Hay algún punto de $]a, b[$ en el que la tangente de la gráfica de f, $g = f(x)$, es paralela a la cuerda que une los extremos de esa gráfica, $(a, f(a))$, $(b, f(b))$.

tg. $= [f(b) - f(a)] / (b - a)$

Teorema de Rolle "girado". Teorema de Rolle es el caso particular tg $\alpha = 0$, $\alpha = 0$.
<u>Interpretación cinemática</u> (relativa al movimiento), de los teoremas anteriores.

Supongamos que f y g describen sendos movimientos (el del móvil f y el del móvil g), f y g asignan a cada tiempo t de un intervalo [a, b], el espacio recorrido por el móvil, f'(t), g'(t) en las velocidades respectivas en el instantes t.

El teorema (0) dice que si el móvil f está al final donde estaba al principio, entonces alguna vez se ha parado, (velocidad 0).

¿Qué dice el teorema 1? La razón de espacios recorridos por f y g en el intervalo de tiempo [a, b] es igual a la razón de las velocidades en algún instante de]a, b[.

$$[(f(b) - f(a)) / (g(b) - g(a))] = [f'(c) / g'(c)]$$

Algunas consecuencias inmediatas de esos teoremas (en realidad, prácticamente todo lo que sigue del cálculo diferencial será consecuencia de ellos).

Proposición:

$f: [a, b] \to R$ es un función constante si sólo si es continua en [a, b], derivables en]a, b[y tal que $f'(x) = 0$ ($x \in$]a, b[).

Demostración:

Si f es constante, ya lo sabemos:

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \{[f(y) - f(x)] / (y - x)\} = 0$$

Recíprocamente, supongamos que f verifica lo dicho arriba, entonces (Tª 2) $\exists\, c_x \in$]a, b[tal que $f(x) - f(a) = f'(c_x)(x - a) = 0$, es decir, $f(x) = f(a)$, $x \in [a, b]$.

Ejemplo:

$$F: x \in [0, 2] \setminus \{1\} \to f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

f es continua en $[0, 2] \setminus \{1\}$, derivable en $[0, 2] \setminus \{1\}$ tal que $f'(x) = 0$, ($x \in [0, 2] \setminus \{1\}$), pero no es constante. Si es constante "a trazos" (en cada parte "conexa"). Una función no es constante si su dominio no es un intervalo.

Proposición:

Si $f: x \in [a, b] \to R$ es continua en $[a, b]$, derivable en $]a, b[$ y tal que $f'(x) > 0$ $(x \in]a, b[)$, entonces f es estrictamente en $[a, b]$, (decreciente si $f'(x) < 0$)

Es decir, es tal que $a \leq x < y \leq b \Rightarrow f(x) < f(y)$

Nótese que es un concepto "global" y también "local" como el de "crecimiento en un compacto".

<u>Demostración:</u> (ejercicio)

<u>Ejemplo:</u>

$$f: x \in [0, 2] \setminus \{1\} \to \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x-1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$f'(x) = 1 > 0$, $(x \in]0, 2[\setminus \{1\})$

Es creciente en parte de ella pero globalmente no es creciente.

<u>Proposición:</u>

Supongamos que $f: [a, b] \to R$ es derivable en $[a, b]$ (derivadas laterales en a y en b). Entonces la función derivada $f': [a, b] \to R$ verifica (que no tiene porque ser continua) la misma propiedad del valor medio que las funciones continuas *.

(*) Cualesquiera que sean $x, y \in [a, b]$, $a \leq x < y \leq b$, y cualquier que sea η entre $f(x)$ y $f(y)$ existe ξ entre x e y tal que $f(\xi) = \eta$

<u>Demostración:</u>

Sean $x, y \in [a, b]$, $a \leq x < y \leq b$, y sea η comprendido entre $f'(x)$ y $f'(y)$. Queremos ver que existe ξ, $x < \xi < y$ tal que $f(\xi) = R$. Consideremos las funciones:

$$h: z \in [x, y] \to h(z) \begin{cases} [f(z)-f(x)]/(z-x) & \text{si } x < z \leq y \\ f'(x) & \text{si } z = x \end{cases}$$

$$k: z \in [x, y] \to k(y) \begin{cases} [f(y)-f(z)]/(y-z) & \text{si } x \leq z < y \\ f'(y) & \text{si } z = y \end{cases}$$

Además $h(y) = f'(x)$, $h(y) = [f(y)-f(x)]/(y-x) = k(x)$; $k(y) = f'(y)$.

Por tanto, si η está entre $f'(x)$ y $f'(y)$, también está entre $h(x)$ y $h(y)$, o bien, entre $k(x)$ y $k(y)$. Supongamos lo primero (lo segundo es igual). Como h es continua, existe $\xi \in [x, y]$ / $h(\xi)=\eta$ (T^a valor medio de funciones continuas). Ahora bien, $h(\xi) = [f(\xi) - f(x)]/(\xi-x)$ y por el T^a 2 existe $\xi \in (x, \xi)$ tal que $[f(\xi)-f(x)]/(\xi-x) = f'(\xi)$. C.Q.D.

<u>Corolario:</u>

Si una función es derivada de otra en un intervalo entonces no tiene discontinuidades de primera especie (las funciones derivada de otra en un intervalo no tiene por qué ser continuas, pero sus posibles discontinuidades son todas esenciales o de segunda especie).

Demostración:

Supongamos que f: [a, b] $\rightarrow$ R tiene una discontinuidad de salto en c $\in$]a, b[. Sea d = $\lim_{x\to c^-} f(x) \neq \lim_{x\to c^+} f(x)$ = e. Entonces dado [|d-e|/3] > 0, existen δ_1, δ_2 tal que c-$\delta_1 \leq$ x < c $\Rightarrow$ |f(x)-d|<[|d-e|/3] , c < x $\leq$ c+δ_2 $\Rightarrow$ |f(x)-e|<[|d-e|/3].

Por tanto, f([c-δ_1, c+δ_2]) no es un intervalo. f no puede ser derivada de otra porque no lleva intervalos en intervalos.

Ejercicio:

Ver que lo mismo es cierto si f tiene en c una discontinuidad evitable.

Proposición: (Regla de l'Hopital)

Sean f, g dos funciones derivables definidas en algún entorno de a distintas de 0 en todo x $\neq$ a e iguales a 0 en a. Entonces, si existe $\lim_{x\to a}$ [f'(x)/g'(x)], entonces también existe y vale lo mismo, $\lim_{x\to a}$ [f(x)/g(x)] (Esto viene a cuento de que carece de sentido decir que $\lim_{x\to a}$ [f(x)/g(x)] = {[$\lim_{x\to a}$ f(x)]/[$\lim_{x\to a}$ g(x)]}

Demostración:

Por el teorema del valor medio, $\forall$ x de intervalo centrado en a en el que son derivables f y g, $\exists$ z_x, entre x y a tal que: [f(x)/g(x)] = {[f(x)-f(a)] / [g(x)-g(a)]} = [f'(z_x)/g'(z_x)]. Basta entonces tener en cuenta que $z_x \rightarrow$ a cuando x $\rightarrow$ a. En otras palabras:
$\lim_{x\to a}$ [f'(z_x)/g'(z_x)] = $\lim_{z_x\to a}$ [f'(z_x)/g'(z_x)] = $\lim_{x\to a}$ [f'(x)/g'(x)]

Derivadas de orden:

Supongamos que f es derivable en algún entorno A de a . Cabe hablar entonces de la función f': x $\in$ A $\rightarrow$ f'(x). Se dice que f es dos veces derivable en a cuando f' es derivable en a. Al número real f''(a) = (f')'(a) = $\lim_{x\to a}$[f'(x)-f'(a)]/(x-a) se le llama derivada segunda de f en a.

Obviamente se dice que f es m veces derivable en a cuando es (m-1) veces derivable en algún entorno de a y su derivada (m-1) es derivable en a $f^{m)}(a) = (f^{m-1)})'(a)$.

Cuando definimos la derivada primera dijimos que el hecho de que exista el límite f'(x) = $\lim_{x\to a}$ [f(x)-f(a)]/(x-a) era equivalente a decir que f tiene un contacto de orden 1 en a con una función polinómica de grado menor o igual que 1, (dicha función polinómica era entonces única y precisamente la x $\in$ R $\rightarrow$ f(a) + f'(a)(x-a)). De aquí surge la siguiente pregunta: ¿Es equivalente la derivabilidad 2 veces de f en a al hecho de que f tenga un contacto de orden 2 en a con un función polinómica de grado menor o igual a 2? La respuesta es no. Sólo se verifica que si f es m veces diferenciable $\Rightarrow$ f tiene un contacto de orden m en a con una función polinómica de grado menor o igual a m, dicha función es única, f: x $\in$ R$\rightarrow$ f(a) +[f'(a)/1!](x-a) + [f''(a)/2!]$(x-a)^2$ + ... + [$f^{m)}$(a)/m!]$(x-a)^m$, el recíproco es falso, esto es el polinomio de Taylor de grado m de f en a.

Ejemplo:

$$f: x \in R \to \begin{cases} x^3 \text{ sen } 1/x, & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f tiene un contacto de orden 2 en o con el polinomio 0, f(0) = g(0) y $\lim_{x\to 0} [f(x)-g(x)]/(x-0)^2 = \lim_{x\to 0} x \text{ sen } 1/x = 0$. Sin embargo no es dos veces derivable en 0.

Teorema (local de Taylor):

Si f: $A \subset R \to R$ es m veces derivable en $a \in Å$, entonces tiene un contacto de orden m en a con una y sólo una función polinómica de grado $\leq$ m, dicha función es la:

$$x \in R \to P^m_a f(x) = f(a) + [f'(a)/1!](x-a) + \dots\dots\dots + [f^{m)}(a)/m!](x-a)^m$$

que es el polinomio de Taylor de grado m de f en a.

Demostración:

Hemos de ver que existe una y sólo una función polinómica de grado $\leq$ m, g(x) tal que:

$f(a) = g(a)$
$\lim_{x\to a} \{[f(x)-g(x)]/(x-a)^m\} = 0$

Escribamos g(x) ordenado en potencias de (x-a):

$$g(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots\dots + c_m(x-a)^m$$

e impongamos $f(a) = g(a)$, $\lim_{x\to a} \{[f(x)-g(x)]/(x-a)\} = 0$, $\lim_{x\to a} \{[f(x)-g(x)]/(x-a)^2\} = 0$, (hasta m).

$f(a) = g(a) \Rightarrow c_0 = f(a)$

Esto supuesto, $0 = \lim_{x\to a} \{[f(x)-g(x)]/(x-a)\} = \lim_{x\to a}\{[f(x)-f(a)-c_1(x-a)-c_2(x-a)^2-\dots]/(x-a)$
$\Rightarrow c_1 = f'(a)$

Esto supuesto, $0 = \lim_{x\to a} \{[f(x)-g(x)]/(x-a)\} =$
$\lim_{x\to a} \{[f(x)-f(a)-c_1(x-a)-c_2(x-a)^2-c_3(x-a)^3-\dots]/(x-a)^2\} =$
$\lim_{x\to a} \{[f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)]/(x-a)^2\} - c_2 = \lim_{x\to a} \{[f'(x)-f'(a)]/2(x-a)\}- c_2 \Rightarrow$
$c_2 = [f''(a)/2!]$

Repitiendo este proceso m veces se deduce el polinomio de Taylor.

Ejercicio:

Hacer la demostración anterior por inducción.

Para $m = 0$ ya lo sabemos (la continuidad de f en a). También lo sabemos para $m = 1$ (diferenciabilidad de f en a). Supuesto dicho para $m - 1$, probarlos para m. (Nótese que f' es $m - 1$ veces derivable en a y, por la hipótesis de inducción f' tiene un contacto de valor m-1 en a con la función polinómica $f(a) + [f'(a)/1!](x-a) + \ldots\ldots + [f'^{m)}(a)/m!](x-a)^m$

Cuando la función polinómica de Taylor coincide en la función $y = f(x)$, a la función se le llama función analítica en el punto.

Ejemplo:

$$f: x \in R \rightarrow f(x) = \begin{cases} e^{-x^{\wedge}-2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Ocurre que $f(0) = f'(0) + f''(0) + \ldots\ldots$, es indefinidamente diferenciable en todo punto, en particular en el 0.

Por tanto, $P^m{}_0\, f(x) = 0$, esta función no es analítica en 0.

Algunas aplicaciones del Teorema local de Taylor:

Posición relativa, en la proximidades de a, de la gráfica de una función m veces derivable en a y de su recta tangente en (a,f(a)).

Si f es cóncava en a y tangente horizontal, f alcanza en a un máximo relativo.

Si f es convexa en a y tangente horizontal, f alcanza en a un mínimo relativo.

Información sobre estas cosa las da el anterior teorema, concretamente, las da el valor de f'(a), f''(a), etc......

f: $A \subset R \to R$, varias veces derivable en $a \in A$. (Ver anterior dibujo).

Puede ocurrir que:

- La tangente esté, en las proximidades de a, por encima de la gráfica de f.
- La tangente esté, en las proximidades de a, por debajo de la gráfica de f.
- La tangente esté, en las proximidades de a, por encima a la izquierda de la gráfica de f.
- La tangente esté, en las proximidades de a, por debajo a la izquierda de la gráfica de f.

Supongamos que la primera derivada de f, después de la primera, que no se anula en a sea la m-ésima, (m = 2, 3, ...).

El teorema local de Taylor dice entonces que f tiene un contacto en a de orden m con la función.

$P^m_a f: x \in R \to \underbrace{f(a) + f'(a)\,(x-a)}_{t(x)} + [f'^{m)}(a)/m!](x-a)^m$

es decir, $\lim_{x\to a} \{[f(x)-t(x)-(f'^{m)}(a)/m!)(x-a)^m]/(x-a)^m\} = 0$, es decir,
$\lim_{x\to a} \{[f(x)-t(x)]/(x-a)^m\} = [f'^{m)}(a)/m!]$

Varios casos

M par, $f'^{m)}(a) > 0$

Caso 1º. De la definición de límite se sigue que dado $[f'^{m)}(a)/m!] > 0$, $\exists\ \delta>0 : 0<|x-a|<\delta$
$\Rightarrow |\{[f(x)-t(x)]/(x-a)^m\}-[f'^{m)}(a)/m!]| < [f'^{m)}(a)/m!] \Rightarrow \{[f(x)-t(x)]/(x-a)^m\} > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)-t(x) > 0$

Esto significa que en las proximidades de a (en $]a-\delta,a+\delta[\setminus\{a\}$) la tangente en a, y = t(x), está por debajo de y = f(x), entonces a es punto de convexidad estricta.

<u>Ejercicio:</u>

Ver la concavidad estricta (tangente por encima) cuando m par, $f^{m)}(a) < 0$.

Dado $-[f'^{m)}(a)/m!] > 0$, $\exists\ \delta>0 : 0<|x-a|<\delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |\{[f(x)-t(x)]/(x-a)^m\}-[f'^{m)}(a)/m!]| < -[f'^{m)}(a)/m!] \Rightarrow \{[f(x)-t(x)]/(x-a)^m\} < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)-t(x) < 0$

Caso: m impar, $f'^{m)}(a) < 0$

Dado $-[f'^{m)}(a)/m!] > 0$, $\exists\ \delta>0 : 0<|x-a|<\delta$
$\Rightarrow |\{[f(x)-t(x)]/(x-a)^m\}-[f'^{m)}(a)/m!]| < -[f'^{m)}(a)/m!] \Rightarrow \{[f(x)-t(x)]/(x-a)^m\} < 0 \Rightarrow$
$f(x)-t(x) > 0$, si $a-\delta < x < a$
$\Rightarrow$
$f(x)-t(x) < 0$, si $a < x < a+\delta$

Tangente por debajo de la gráfica a la izquierda de a y sobre la gráfica a la derecha.

<u>Ejercicio:</u>

Caso: m impar, $f'^{m)}(a) > 0$

Dado $[f'^{m)}(a)/m!] > 0$, $\exists\ \delta>0 : 0<|x-a|<\delta$
$\Rightarrow |\{[f(x)-t(x)]/(x-a)^m\}-[f'^{m)}(a)/m!]| < [f'^{m)}(a)/m!] \Rightarrow \{[f(x)-t(x)]/(x-a)^m\} > 0 \Rightarrow$
$f(x)-t(x) < 0$, si $a-\delta < x < a$
$\Rightarrow$
$f(x)-t(x) > 0$, si $a < x < a+\delta$

Tangente por debajo de la gráfica a la derecha de a y sobre la gráfica a la izquierda.

Ejemplo:

$$- f: x \in R \to f(x) = \begin{cases} e^{-x^{\wedge}-2}, \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \quad \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

0 es punto de convexidad estricta, pero lo que acabamos de decir no delata este hecho porque $f''(0) = f'''(0) = \ldots\ldots.. = 0$

$-f: x \in R \to |x|$

0 es punto de convexidad estricta, en el sentido de que hay una recta por ejemplo la $y = 0$, que pasa por $(0, 0)$ y está por debajo de $y = 0$. Sin embargo, la función no es ni una vez derivable en 0, (no vale aplicar la antes dicho).

$$- f: x \in R \to |x|^3 = \begin{cases} x^3, \text{ si } x \geq 0 \\ -x^3, \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Si $x \neq 0$, sabemos derivar de memoria (f es "elemental"). Si $x = 0$ la función ya no es elemental en ningún entorno de 0. (Es la $-x^3$ a la izquierda y x^3 a la derecha: "elemental a trozos"). No sabemos de memoria y tenemos que aplicar la definición:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \{[f(x)-f(0)]/(x-0)\} = \lim_{x\to 0} (|x|^3/x) = 0$$

$$\text{Así que } f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \text{ si } x \geq 0 \\ -3x^2 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 6x \text{ si } x \geq 0 \\ -6x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \{[f'(x)-f'(0)]/(x-0)\} = \lim_{x\to 0} \begin{cases} (3x^2/x) \text{ si } x > 0 \\ (-3x^2/x) \text{ si } x < 0 \end{cases} = 0$$

$$f'''(x) = \begin{cases} 6 \text{ si } x \geq 0 \\ -6 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

$$f'''(0) = \lim_{x\to 0} \{[f''(x)-f''(0)]/(x-0)\} = \lim_{x\to 0} \begin{cases} 6 \text{ si } x > 0 \\ -6 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

No existe el límite por tanto no existe $f'''(0)$, f es dos veces derivable en 0 e indefinidamente derivable en $R\backslash\{0\}$.

Ejercicio:

Determinar (si es posible) a, b, c $\in$ R para que la función f: x $\in$ R $\to$ sen x si x $\leq$ 0, $ax^2 + bx + c$ si x>0

sea continua, diferenciable, dos veces diferenciable, ...

Sabemos bien que si x > 0 entonces f es indefinidamente diferenciable en x,
$f'(x) = 2ax + b$, $f''(x) = 2a$, $f'''(x) = 0$, $f^{iv}(x) = 0$, ... (x > 0)

Suponemos también sabido para x < 0.

f es continua
$f'(x) = \cos x$
$f''(x) = -\operatorname{sen} x$
$f'''(x) = -\cos x$ (x < 0)

El problema está en x = 0

Para que f sea continua en 0 tiene que verificar que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$
$\Rightarrow$ f es continua en 0 $\Leftrightarrow$ c = 0
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

Supongamos que f es continua en 0, es decir, que c = 0. Para que sea diferenciable en 0 debe ocurrir que:

$\lim_{x\to 0^-} \{[f(x)-f(0)]/(x-0)\} = \lim_{x\to 0^+} \{[f(x)-f(0)]/(x-0)\}$,
$\downarrow$ $\downarrow$
$\lim_{x\to 0^-} [\operatorname{sen} x / x] = 1$ $\lim_{x\to 0^+} [(ax^2 + bx)/x] = b$

f es diferenciable en 0 $\Leftrightarrow$ c = 0, b = 1

Supongamos ahora que f es diferenciable en 0, es decir, que c = 0, b = 1

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 2ax + 1 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Para que sea 2 veces diferenciable en 0, ha de ocurrir:

$\lim_{x\to 0^-} \{[f'(x)-f'(0)]/(x-0)\} = \lim_{x\to 0^+} \{[f'(x)-f'(0)]/(x-0)\}$

$\qquad\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$

$\lim_{x\to 0^-} [(\cos x - 1)/x] = 0$ $\qquad \lim_{x\to 0^+} [(2ax + 1 - 1)/x] = 2a$ $\Rightarrow$ f es 2 veces deferenciable en 0 $\Leftrightarrow$ c = 0, b = 1, a = 0

Supuesto a = 0, b = 1, c = 0

$$f''(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Será tres veces diferenciable si

$0 = \lim_{x\to 0^-} \{[f''(x)-f''(0)]/(x-0)\} = \lim_{x\to 0^+} \{[f''(x)-f''(0)]/(x-0)]\} = 1$, como los límites no son iguales, la función no es diferenciable tres veces.

Hemos visto que la función $f: x \in R \to \begin{cases} e^{-x^{\wedge}-2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Es tal que f(0) = f'(0) = f''(0) = ... = 0, por tanto la función $g: x \in R \to \begin{cases} e^{-x^{\wedge}-2} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Es indefinidamente diferenciable en 0 y tal que $g(0) = g'(0) = g''(0) = \ldots\ldots. = 0$

Extremos (máximos y mínimos) relativos de funciones varias veces diferenciables:

Supongamos que A es un abierto en R y que $f: A \to R$ es varias veces diferenciable en A. Los posibles extremos relativos de f se alcanzan en los puntos $x \in A$ tales que $f'(x) = 0$. Es decir, en aquellos puntos en los que la tangente a la gráfica de f es horizontal.

(La derivada de la función $f: x \in R \to x^3$ sólo se anula en $x = 0$ que no es un extremos, sino como todos los otros, es un punto de crecimiento estricto. En otras palabras, el simple hecho de que $f'(x) = 0$ no garantiza que f alcanza en x un extremo relativo).

Supongamos que $f'(a) = 0$. Por lo que hemos visto, si f alcanza en a un mínimo (máximo) relativo, a es además, punto de convexidad (concavidad), es decir, si la primera derivada, después de la primera, que no se anula es de orden par y positiva.

Si dicha derivada es de orden impar f tiene en a un punto de inflexión (arriba/abajo o abajo/arriba según el signo de la derivada).

$P = \{x \in A \ / \ f \text{ alcanza en } x \text{ un extremo relativo}\} \subset \{x \in A \ / \ f'(x) = 0\}$

$Q = \{x \in A \ / \ f \text{ tiene una inflexión}\} \subset \{x \in A \ / \ f''(x) = 0\}$

Supongamos que $x \in P$, es decir, $f'(x)=0$, supongamos también que $f''(x)=\ldots=f^{n-1}(x) = 0$ y $f^{n} \neq 0$:

Mínimo relativo estricto si $f^{n}(x) > 0$

Si n es par

Máximo relativo estricto si $f^{n}(x) < 0$

Arriba, abajo

Si n impar, inflexión:

Abajo, arriba

Supongamos que $x \in Q$, es decir, $f''(x) = 0$, supongamos también que $f'''(x) = \ldots =f^{n-1}(x) = 0$, $f^{n} \neq 0$:

Punto de convexidad estricta si $f^{n}(x) > 0$

Si n par

Punto de concavidad estricta si $f^{n}(x) < 0$

Arriba, abajo

Si n impar, inflexión:

Abajo, arriba

Ejemplo:

Consideremos la función polinómica $f: x \in R \to a_n x^n + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$

Sus posible extremos relativos están entre los puntos $x \in R$ para los que, $f'(x) = n a_n x^{n-1} + \ldots\ldots. + 2a_2 x + a_1 = 0$.

Por consiguiente, tiene a lo sumo n-1 extremos relativos.

Un polinomio de grado n-1 tiene, a lo sumo, n-1 raíces reales. Seguro que por lo menos, una si n-1 es impar, simplemente porque todo polinomio de coeficientes reales tiene exactamente tantas raíces en C como su grado, siempre que cada una se cuente tantas veces como sea su multiplicidad. Además, con cada raíz compleja (no real) tiene también como raíz a su conjugada con la misma multiplicidad, es decir, las raíces complejas (no reales) "van a pares".

Son posibles puntos de inflexión los $x \in R$ tales que: $f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + ... + 2a_2 = 0$ Por tanto, f tiene a lo sumo, n-2 puntos de inflexión. Cuando menos una si n-2 es impar, (n impar).

<u>Ejercicio:</u>

Buscar, por ahí, y hacer problemas de máximo y mínimos.

<u>Teorema global de Taylor:</u> (el del valor medio es el caso m = 0 de este teorema).

Supongamos que f, g: $[a, b] \to R$ son continuas en [a, b], m veces diferenciables en [a, b[y m + 1 veces diferenciables en]a, b[.

<u>Teorema 1:</u>

$\exists\, c \in\,]a, b[\ /\ [f(b) - P^m{}_a f(b)]\, g'^{m+1}(c) = [g(b) - P^m{}_a g(b)]\, f'^{m+1}(c)$

<u>Teorema 2:</u>

$\exists\, c \in\,]a, b[\ /\ f(b) - P^m{}_a f(b) = [f'^{m+1}(c) / (m+1)]\, (b-a)^{m+1}$

<u>Teorema 3:</u>

Si $|f'^{m+1}(x)| \leq g'^{m+1}(x)$, $(x \in\,]a, b[)$, entonces $|f(b) - P^m{}_a f(b)| \leq g(b) - P^m{}_a g(b)$

<u>Teorema 4:</u>

Si $|f'^{m+1}(x)| \leq M$, $(x \in\,]a, b[)$, entonces $|f(b) - P^m{}_a\, f(b)| \leq [M/(m+1)!](b-a)^{m+1}$

<u>Ejercicio:</u>

Ver que para m = 0 esos son los teoremas del valor medio ya probados. Entonces suponer esto cierto para m-1 (par tanto para las funciones f' y g') y verlo para m (inducción).
<u>Demostración de 1:</u>

Consideremos la función auxiliar:

$F: x \in [a, b] \to F(x) = [f(b) - P^m{}_a f(b)][g(x) - P^m{}_a g(x)] - [g(b) - P^m{}_a g(b)][f(x) - P^m{}_a f(x)]$

F al igual que f y g, es continua en [a, b], m veces diferenciable en [a, b[y m+1 veces diferenciable en]a, b[. Además, es tal que F(a) = F(b) = 0, luego existe $c_1 \in\,]a, b[$ tal que $F'(c_1) = 0$. También se verifica que:

$F'(a) = F'(c_1) = 0 \Rightarrow \exists\, c_2 \in\,]a, c_1[\ /\ F''(c_2) = 0$
$F''(a) = F''(c_2) \Rightarrow \exists\, c_3 \in\,]a, c_2[\ /\ F'''(c_3) = 0$, ...,
$F'^m(a) = F'^m(c_m) = 0 \Rightarrow \exists\, c \in\,]a, c_m[\ /$

$$F'^{m+1}(c) = 0$$

Demostración de $1 \Rightarrow 2$:

Basta tomar $g(x) = (x-a)^{m+1}$

Corolario de 2:

Si $g'^{m+1}(x) > 0$, ($x \in]a, b[$), entonces $g(b) - P^m{}_a g(b) > 0$

Demostración de $1 \Rightarrow 3$:

Si fuese $g'^{m+1}(x) > 0$ ($x \in]a, b[$) será evidente (en vista de lo anterior)

Como eso no tiene que ocurrir, hemos de dar un pequeño rodeo. Para $\varepsilon > 0$, consideremos la función: $g_\varepsilon: x \in [a, b] \rightarrow g_\varepsilon(x) + \varepsilon (x-a)^{m+1}$. Si a esta g_ε le ocurre que $g_\varepsilon'^{m+1}(x) = g'^{m+1}(x) + (m+1)!\, \varepsilon > 0$, y además, $|f'^{m+1}(x)| < g_\varepsilon{}^{m+1}(x)$, ($x \in]a, b[$).

Por tanto, $|f(b) - P^m{}_a f(b)| < g_\varepsilon(b) + P^m{}_a g_\varepsilon(b) = g(b) - P^m{}_a g(b) + \varepsilon (b-a)^{m+1} \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(b) - P^m{}_a f(b)| \leq g(b) - P^m{}_a g(b)$

Ejercicio:

Ver que $2 \Rightarrow 4$ y que $3 \Rightarrow 4$

Ejercicio:

Ver que todo es idéntico si, en vez de considerar el intervalo [a, b] consideramos el [b, a] (es decir, en lugar de ser más grande, sea más pequeño que a). Idéntico salvo que en 3 $|f(b) - p^m{}_a f(b)| \leq P^m{}_a g(b) - g(b)$ y en el 4 $(a-b)^{m+1}$

El más famoso de esos teoremas en el segundo, que suele verse escrito de la siguiente forma: $f(x) = f(a) + [f'(a)/1!](x-a) + \ldots.. + [f'^{m)}(a)/m!](x-a)^m + [f'^{m+1)}(z)/(m+1)!](x-a)^{m+1}$ (esto es la fórmula de Taylor de grado m).

Donde z es algún punto (desconocido, en general) entre a y x.

Del último sumando suele decirse que es el "resto, en forma de Lagrange, de la fómula de Taylor (de grdo m)".

El Teorema 2 tiene gran importancia teórica y el teorema 4 gran importancia práctica.

Ejemplo:

La utilización del teorema 4 para el calculo aproximado de sen 1, supuesto que sabemos que la función $f: x \in R \rightarrow \text{sen } x$ es indefinidamente diferenciable y tal que:

$f(x) = \text{sen } x$
$f'(x) = \cos x$
$f''(x) = - \text{sen } x$
$f'''(x) = - \cos x$
$f'^{IV}(x) = \text{sen } x$

Vamos a calcularlo con 6 cifras decimales exactas, error menor que 10^{-6}

Para $a = 0$

Sen $1 = f(0) + [f'(0)/1!]\cdot 1 + [f''(0)/2!]\cdot 1^2 + ... + [f'^m(0)/m!]\cdot 1^m + [f'^{m+1}(z)/(m+1)!]\cdot 1^{m+1} =$
$= 1 - 1/3! + 1/5! - 1/7! + 1/9!$

¿Cuántos sumandos para que el error sea menor que 10^{-6}?

$|f'^{m+1}(z)/(m+1)!| < [1/(m+1)!] < 1/10^6$, es decir, que $(m+1)! > 10^6$, basta con que $m+1 \geq 10$

Acabamos de ver que para $a = 0$, por ejemplo,

$\text{sen } x = x - x^3/3! + x^5/5! - ... \pm x^{2m-1}/(2m-1)! + [f'^{2m}(z)/(2m)!]\, x^{2m}$ (z entre x y 0)

Como $f'^{2m}(z) = \pm$ sen z, resulta que $|[f'^{2m}(z)/(2m)!]\, x^{2m}| \leq x^{2m}/(2m)! \rightarrow_{m\rightarrow\infty} 0$, cualquiera que sea x. Es decir, cualquiera que sea $x \in R$, la sucesión $(P_0{}^0f(x), P_0{}^1f(x), P_0{}^2f(x),.......)$ $\rightarrow_{m\rightarrow\infty} f(x)$. En otras palabras:

$$f(x) = {}^{\infty}\sum_{m=0} \{[f'^m(0)/m!]\, x^m\} \quad \text{(serie de Taylor de f relativa al pto. 0)}$$

Esa sucesión de polinomios no es más que la serie de sumas parciales de esa serie.

La función seno es <u>analítica</u> en 0, (también en cualquier otro punto).

De estas cosas hablaremos cuando estudiemos las sucesiones y series funcionales.

Sin embargo la sucesión $(P_0{}^0f(x), P_0{}^1f(x), P_0{}^2f(x),.......)$, de sumas parciales de la serie ${}^{\infty}\sum_{m=0} \{[f'^m(0)/m!]\, x^m\}$ no converge a f en ningún $x \neq 0$ para

$$f: x \in R \rightarrow \begin{cases} e^{-x^{\wedge}-2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

por la sencilla razón de que esa sucesión es (0, 0, 0, 0, ...). La serie de Taylor en 0 de esta función es la serie 0. f que es indefinidamente diferenciable en 0, no es analítica en 0.

Volvemos atrás, antes de seguir con las funciones convexas necesitamos decir algo sobre las funciones monótonas.

<u>Definición:</u>

Se dice que $f: A \subset R \rightarrow R$ es monótona creciente cuando $x, y \in A$, $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

- decreciente cuando $\geq$
- estrictamente creciente cuando $<$
- estrictamente decreciente cuando $>$

Proposición:

Si f: $A \subset R \to R$ es monótona (creciente o decreciente) entonces sus posibles discontinuidades son de primera especie (existen límites laterales) y a lo sumo numerables.

(Las funciones monótonas no puede tener "demasiadas" discontinuidades, si discontinuidades de segunda especie).

Demostración:

Supongamos que f: $A \subset R \to R$ es creciente y que $a \in A$ es punto de acumulación por la izquierda de A. Se verifica, entonces, que $\lim_{x \to a^-} f(x) = \sup \{f(x) / x \in A, x < a\} = p$.

Este sup. existe porque el conjunto es no vacio (hay puntos de A a la izquierda de a) y acotado superiormente (f(a) es acotado superiormente). De la definición de supremo se sigue que:

$\forall \varepsilon > 0, \exists z \in A, z < x / f(z) < p-\varepsilon$

Denotando $x-z = \delta$, como f es creciente tenemos que:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / x \in A, a-\delta < x < a \Rightarrow |f(x)-p| < \varepsilon$ (c.q.d)

Esto es la definición de límite por la izquierda.

Eso supuesto, veamos ahora que f tiene, a lo sumo, numerables discontinuidades.

Supongamos, en primer lugar, que f es acotada. Sea $m = \inf \{f(x): x \in A\}$, $M = \sup \{f(x) / x \in A\}$. Entonces f tiene a lo sumo, entre (M-m) saltos de amplitud ≥ 1 (o "saltos" de discontinuidad evitable porque el punto no es de acumulación por algún lado).

- f tiene, a lo sumo, 2 entre (M-m) discontinuidades de salto $\geq$ ½.
- 3 1/3.

{discontinuidades de f} = $\bigcup_{n \in N}$ {discontinuidades de salto $\geq 1/n$} Unión numerable de conjuntos finitos es finita y numerable.

Supongamos ahora que f no es acotado. Entonces (véase) o bien inf. A $\in$ A o bien inf A $\notin$ A. Supongamos lo primero. Sea (a_n) una sucesión de puntos de A tal que:

$(a_n) \searrow \inf A$ (Puede ser inf A = $-\infty$) y $(b_n) \nearrow \sup A$

f restringida a $A \cap [a_n, b_n]$ es acotada ($f(a_n)$ es cota inferior, $f(b_n)$ cota superior) y tiene por tanto, a lo sumo numerables discontinuidades. Basta considerar que:

{discontinuidades de f} = $\bigcup_{n \in N}$ {discontinuidades de f restringida a $A \cap [a_n, b_n]$}

Unión numerable de, a lo sumo, numerables, es a lo sumo, numerable.

Funciones Convexas:

Sea $I \subset R$ un intervalo (en sentido amplio).

Definición:

f: $I \to R$ es convexa si:

$\forall$ x, y $\in$ I, $\forall$ t $\in$ [0,1], $f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y)$

Se dice cóncava si es $\ge$ (cuerda por debajo del arco).

Vamos a probar que si f es convexa entonces es continua en todos los puntos del I^o salvo, a lo sumo, numerables (es diferenciable casi por doquier (c.p.q.)).

Veremos también que si f es 2 veces diferenciable en I y tal que $f''(x) \ge 0$, $(x \in I^o)$ entonces es convexa en I.

Proposición:

f: $I \to R$ es convexa si sólo si:

$$x, y, z \in I,\ x < y < z \Rightarrow \{[f(x)-f(y)]/(x-y)\} \le \{[f(x)-f(z)]/(x-z)\} \le \{[f(y)-f(z)]/(y-z)\}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \le \operatorname{tg} \rho \le \operatorname{tg} \varphi$$

Demostración:

$\{[f(x)-f(y)]/(x-y)\} \leq \{[f(x)-f(z)]/(x-z)\} \Leftrightarrow f(x)-f(y) \geq [(x-y)/(x-z)]\ [f(x)-f(z)] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(y) \leq [(y-z)/(x-z)]\ f(x) + [(x-y)/(x-z)]f(z)$

Ahora bien, si ponemos $t = [(y-z)/(x-z)]$ tenemos que $y = tx + (1-t)z$, $t \in [0, 1]$ y que f(x) es exactamente $f(tx + (1-t)z) \leq tf(x) + (1-t)f(z)$

Proposición:

Si $f: I \to R$ es convexa entonces:

1.- Tiene derivadas laterales en todos los puntos del I^o (por tanto, es continua en I^o)
2.- Las funciones $f'_-: I^o \to R$ y $f'_+: I^o \to R$ son crecientes y tales que $f'_-(x) \leq f'_+(x)$, $(x \in I^o)$
3.- f es derivable en todo punto del I^o, salvo a lo sumo en numerables.

Demostración:

1.- Sea $y \in I^o$, entonces existen $x, y \in I$ tales que $x < y < z$ y se verifica que:

$\{[f(x)-f(y)](x-y)\} \leq \{[f(y)-f(z)]/(y-z)\}$ Además, la función $x \in I \to \{[f(x)-f(y)]/(x-y)\}$ es creciente y acotada superiormente por $\{[f(y)-f(z)]/(y-z)\}$

Por tanto existe $\lim_{x\to y} \{[f(x)-f(y)]/(x-y)] = \sup_{x<y} \{[f(x)-f(y)]/(x-y)\} = f'_-(y)$

Análogamente $f'_+(y)$

Evidentemente $f'_-(y) \leq f'_+(y)$

Al tener f derivadas laterales en y, f es continua en y por la izquierda y la derecha, luego continua.

Ejercicio:

Ver lo que queda.
Acabamos de ver que si $f: I \to R$ es convexa y diferenciable (en I^o) entonces f' es creciente . Por tanto, si f es convexa y dos veces diferenciable, entonces $f''(x) \geq 0$ $(x \in I^o)$.

También el reciproco es cierto.

Proposición:

Sea I un intervalo abierto. Si $f: I \to R$ es diferenciable y $f': I \to R$ es creciente, entonces f es convexa. Por tanto, si f es dos veces diferenciable y tal que $f'(x) \geq 0$, $(x \in I)$, entonces f es convexa.

Demostración:

Basta aplicar el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial. Sean $x, y, z \in I$, $x < y < z$. Por el citado teorema existe α entre x e y, β entre y y z tales que:

$\{[f(x)-f(y)]/(x-y)\} = f'(\alpha)$; $\{[f(y)-f(z)]/(y-z)\} = f'(\beta)$
$\{[f(x)-f(y)]/(x-y)\} \leq \{[f(y)-f(z)]/(y-z)\}$ c.q.d.

Funciones de variación acotada:

Sea [a, b] un intervalo compacto (cerrado y acotado). Se llama partición de [a, b] a todo conjunto finito y ordenado de puntos de [a, b] que empieza por a y termina por b.

P: $a = x_0 < x_1 < \ldots\ldots < x_n = b$

Diremos que una partición P' de [a, b] es más fina que otra P, si P' se obtiene añadiendo a P nuevos puntos. La denotaremos $P \subset P'$.

La relación "ser más fina que" en el conjunto $\mathcal{P}[a, b]$ de la particiones de [a, b] es:

- Reflexiva: $\forall P, P \subset P$
- Transitiva: $P \subset P', P' \subset P'' \Rightarrow P \subset P''$
- Antisimétrica: $P \subset P', P' \subset P \Rightarrow P = P'$

Es decir, es una relación de orden.

No es total. Es decir, no es cierto que $\forall$ P, P' $\{P \subset P', P' \subset P\}$ si es filtrante o dirigida o More-Smith, es decir, tal que $\forall P, P' \in \mathcal{P}[a, b], \exists P'' \in \mathcal{P}[a, b]. P \subset P', P' \subset P''$. Por ejemplo: $P'' = P \cup P'$.

Definición:

Dada una función f: $[a, b] \rightarrow R$ y una partición P: $a = x_0 < x_1 < \ldots. < x_n = b$, de [a, b], se llama variación de f relativa a P al número real $V(f, P) = {}^{n}\sum_{k=1}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$

Definición:

Se dice que una función f: $[a, b] \rightarrow R$ es de variación acotada si:

$\exists M \geq 0: \forall P \in \mathcal{P}[a, b], V(f, P) \leq M$, en dicho caso se llama variación de f en [a, b] al número real $V^b{}_a f = \sup \{V(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\} = \inf \{M's....\}$

Ejemplos:

1.-) Si f: $[a, b] \to R$ es creciente, entonces es de variación acotada y se verifica que $V^b_a f = f(b) - f(a)$. Caso decreciente $V^b_a = f(a) - f(b)$.

En efecto:
$\forall\ P \in P[a, b]$

$$V(f, P) = {}^n\sum_{k=1} |f(x_k)-f(x_{k-1})| = {}^n\sum_{k=1} f(x_k)-f(x_{k-1}) = f(b) - f(a)$$

Si es decreciente

$$V(f, P) = {}^n\sum_{k=1} |f(x_k)-f(x_{k-1})| = - {}^n\sum_{k=1} f(x_k)-f(x_{k-1}) = f(a) - f(b)$$

Ejercicio:

Ver que f: $[a, b] \to R$ es constante $\Leftrightarrow V^b_a\, f = 0$

2.-) Variación acotada (no$\Rightarrow$) continua
(no$\Leftarrow$)

Una función de variación acotada no continua, es por ejemplo cualquier función monótona no continua.

3.-) Una función continua que no es de variación acotada:

$$f: x \in [0, 1] \to \begin{cases} x \text{ sen } 1/x, & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Vamos a ver que esta función no es de variación acotada.

Tomamos la partición:

$$P: o < 2/(2n\Pi) < 2/[(2n-1)\Pi] < 2/[(2n-2)\Pi] < .... < 2/\Pi < 1$$

$V(f, P)=|[2/(2n\Pi)]sen[(2n\Pi)/2]–0|+|2/[(2n-1)\Pi]sen[(2n-1)\Pi/2]–[2/(2n\Pi)]sen[(2n\Pi)/2]|$
$+ ...... + |(2/\Pi)sen(\Pi/2)-(2/2\Pi)sen(2\Pi/2)|+|sen\ 1-(2/\Pi)sen(\Pi/2)| =$
$= 2/\Pi \{[1/(2n-1)] + [1/(2n-1)] + [1/(2n-3)] + [1/(2n-3)] + ... +$
$+ 1/3 + 1/3 + 1 + 1\} + |sen\ 1 – 2/\Pi|$

Pues bien, lo que está fuera del valor absoluto es "tan grande como queramos" sin más que tomar n "suficientemente grande". (Ya sabemos que la serie $\sum [1/(2\Pi+1)]$ "suma" $+\infty$).

4.-) Ejercicio:

Ver que la función $x \in [0, 1] \rightarrow \begin{cases} x^2 sen1/x & si\ x \neq 0 \\ 0 & s1\ x = 0 \end{cases}$

Denotaremos BV[a, b] al conjunto de las funciones de variación acotada en [a, b].

Proposición:

Si f es de variación acotada en [a, b] entonces es acotada.

Demostración:

Ejercicio: Tomar P: $a < x < b$ con cualquier $x \in]a, b[$.

Ejemplo 5:

$f: x \in [0, 1] \rightarrow \begin{cases} 1 & si\ x \notin Q \\ 0 & si\ x \in Q \end{cases}$ no es de variación acotada.

Definición:

$f: [a, b] \rightarrow R$ es de variación acotada (en [a, b]) si:

$\exists\ M > 0, \forall\ P \in P[a, b], V(f, P) \leq M$

En dicho caso, se llama variación de f(en [a, b]) al número real:

$Sup\ \{V(f, P) : P \in P[a, b]\} = V^b_a\ f.$

Proposición:

Si f, g: $[a, b] \rightarrow R$ son de variación acotada, entonces también lo son f + g, λf ($\lambda \in R$) y f·g. Se verifica, además, que:

$V^b_a\ (f+g) \leq V^b_a f + V^b_a g$
$V^b_a (\lambda f) = |\lambda|\ V^b_a f$
$V^b_a\ (f\cdot g) \leq M(|g|)V^b_a f + M(|f|)V^b_a g$ donde $M(|f|) = sup\ \{|f(x)| : x \in [a, b]\}$

Demostración:

a) Suma: $\forall\ P \in P[a, b]$

$V(f, P) = \sum_p|(f+g)(x_k) – (f+g)(x_{k-1})| \leq \sum_p|f(x_k)-f(x_{k-1})| + \sum_p|g(x_k)-g(x_{k-1})| \leq V^b_a f + V^b_a g \Rightarrow$
$\Rightarrow sup\ \{V(f+g, P) : P \in P[a, b]\} = V^b_a(f+g) \leq V^b_a f + V^b_a g.$

b) Producto por escalar (ejercicio).

c) Producto: $\forall$ P $\in$ P[a, b]

$V(f\cdot g, P) = \sum_p |(f\cdot g)(x_k) - (f\cdot g)(x_{k-1})| \leq \sum_p |f(x_k)|\,|g(x_k)-g(x_{k-1})| + \sum_p |g(_{k-1})|\,|f(x_k)-f(x_{k-1})| \leq$
$\leq M(|f|) \sum_p |g(x_k)-g(x_{k-1})| + M(|g|) \sum_p |f(x_k)-f(x_{k-1})| \leq M(|f|)V^b{}_a g + M(|g|)V^b{}_a f.$

Por consiguiente, (BV[a, b], +, ·es, ·) es un álgebra conmutativa y unitaria sobre el cuerpo R.

Subálgebra de (B[a, b], +, ·es, ·)
↑
funciones acotadas en [a, b]

M[a, b] son las funciones monótonas en [a, b].

Ejercicios:

Ver que M[a, b] no es, con las operaciones usuales (+, ·es, ·) una subálgebra de B[a, b], ni siquiera es un subgrupo aditivo.

f, g $\in$ M[a, b] no $\Rightarrow$ f+g $\in$ M[a, b]
no $\Rightarrow$ f·g $\in$ M[a, b]

Por supuesto, f, g creciente $\Rightarrow$ f+g creciente
no $\Rightarrow$ f-g creciente

MC[a, b] (monótonas crecientes) es un cono positivo del espacio vectorial B[a, b], porque:

f, g $\in$ MC[a, b] $\Rightarrow$ f+g $\in$ MC[a, b]
f $\in$ MC[a, b], $\lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda f \in$ MC[a, b]

Vamos a ver que BV[a, b] es el menor grupo aditivo (también el menor espacio vectorial, o la menor subálgebra) que contiene a M[a, b]

[0, 2] $x \rightarrow x^2$
$x \rightarrow x^3$

x^2-x^3 no es monótona, ni
creciente ni decreciente.

Proposición:

Si f: [a, b] $\rightarrow$ R es de variación acotada y si c $\in$ [a, b] entonces también son de variación acotada: $f|_{[a, c]}$ y $f|_{[c, b]}$. Se verifica, además, que:

$$V^b_a f = V^c_a f + V^b_c f$$

Demostración: (ejercicio)

Indicación: sup {V(f,P): P $\in$ P[a, b]} = sup {V(f, PU{c}): P $\in$ P[a, b]}

$$\sum_P |f(x_k)-f(x_{k-1})| = |f(x_1)-f(x_0)| + ... + |f(c)-f(x_r)| + |f(x_{r+1})-f(c)| + ... + |f(x_n)-f(x_{n-1})|$$

$$a = x_0 < x_1 < .... < x_r < c < x_{r+1} < ... < x_n = b$$

Otra indicación: Ver que $P \subset P' \Rightarrow V(f, P) \leq V(f, P')$
(Consecuencia de la desigualdad triangular)

Basta verlo para el caso en que P' tiene un punto más que P.

P: $a = x_0 < x_1 < ...... < x_r < z < x_{r+1} < ...... < x_n = b$

$$|f(x_1)- f(x_0)| + ... + |f(x_{r+1})-f(x_r)| + ... +|f(x_n)-f(x_{n-1})| \leq$$
$$|f(x_1)- f(x_0)| + ... + |f(z)-f(x_r)| + |f(x_{r+1})-f(x_r)| + ... + |f(x_n)-f(x_{n-1})|$$

Corolario:

Sea f $\in$ BV[a, b]. La función υ: $x\in[a, b] \rightarrow V^x_a f$ es monótona creciente ($V^a_a f = 0$).

Demostración:

Sea $a \leq x < y \leq b$

$V(y) = V^y_a f = V^x_a f + V^y_a f \geq V^x_a f = V(x)$
$V^y_x \geq 0$

Teorema:

f: $[a, b] \to R$ es de variación acotada si sólo si es diferencia de funciones monótonas crecientes.

Demostración:

Si f es diferencia de monótonas crecientes, entonces, como las monótonas son de variación acotada y las de variación acotada son un grupo aditivo, f es de variación acotada.

Recíprocamente, supongamos que f es de variación acotada en [a, b], entonces
v: $x \in [a, b] \to v(x) = V^x_a f$ es como sabemos, monótona creciente.

Es fácil ver que, por otra parte, v – f también es monótona creciente, con lo que
$f = v - (v + f)$.

Ha de probarse que $a \leq x < y \leq b \Rightarrow v(x)-f(x) \leq v(y)-f(y)$ o, lo que es lo mismo, que $f(x)-f(y) \leq v(y)-v(x)$.

Corolario:

Si $f \in BV[a, b]$, entonces $f = g - h$, dadas g y h monótonas. Por tanto,
{discont. de f} $\subset$ {discont. de g} U {discont. de h}

- Unión finita de conjuntos a lo sumo numerables es a lo sumo numerable.
- Todo subconjunto de un conjunto a lo sumo numerables es a lo suma numerable.

Por otra parte el que g y h tengan límites laterales en cualquier punto de [a, b] implica que $f = g - h$ también los tiene.

$\text{Lim}_{x\to c^-} f(x) = \text{Lim}_{x\to c^-} g(x) - \text{Lim}_{x\to c^-} h(x)$

Corolario:

BV[a, b] es el menor grupo aditivo (espacio vectorial, álgebra) que contiene a las funciones monótonas. (Véase).

Sea C[a, b] el espacio vectorial de las funciones continuas en [a, b] (No sólo un espacio vectorial, sin álgebra, como [a, b] es compacto no sólo son continuas sino infinitamente continuas).

Es fácil ver que:

D(f, g) = máx. |f(x)-g(x)| es una métrica en C[a, b]

Consideremos C[a, b]* (conjunto dual de C[a, b])
C[a, b]* = {φ: C[a, b] $\rightarrow$ R, liniales}
Dual algebraico de C[a, b]

$\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$
$\varphi(\lambda f) = \lambda\ \varphi(f)$

Se pueden encontrar muchas aplicaciones para demostrar que es de dimensión infinita.

$x \in [a, b] \rightarrow 1$
$x \in [a, b] \rightarrow x$
$x \in [a, b] \rightarrow x^2$

C[a, b]' = {φ: β[a, b] $\rightarrow$ R, lineales y continuas} del espacio topológico de c[a, b].

<u>Teorema: (Riesz)</u>

C'[a, b] $\cong$ BV[a, b] / ctes.

Todo funcional lineal continuo de C[a, b], φ: C[a, b] $\rightarrow$ R lineal y continuo es de la forma: $\varphi(f) = \int^b_a f(x)\ dg(x)$.

<u>TEMA II: Cálculo Integral:</u>

Dada f: [a, b] $\rightarrow$ R acotada (su gráfica está contenida en algún rectángulo) y no negativa (su gráfica está por encima del eje de abcisas), integrar f es medir el área del conjunto subyacente a la gráfica de f.

No es esencial que el dominio de la función sea un intervalo. “Acotada” y “no negativa” son restricciones esenciales. Mantendremos casi todo el tiempo dedicado a la integración el carácter acotado, pero no mantendremos el “no negativa”.

Integrar una función acotada $f: [a, b] \to R$ es medir el área del conjunto subyacente por arriba del eje de abcisas, medir el área del que está por debajo y restar ambas.

Así que el problema de integrar es el de medir áreas de conjuntos subyacentes a gráficas de funciones (conjunto con “lado” y “fondo” rectos y en ángulo recto, pero con “tapas” raras).

Serán integrables aquellas funciones cuya área del subyacente sea “medible” (sepamos medir).

Para medir esa área (integrar esa función) podemos usar procedimientos más o menos finos. El método que vamos a utilizar en esta asignatura es “medianamente fino”: el método de Reiman o Jordan.

Serán integrables en él bastantes funciones, pero no demasiadas. El año que viene se estudiará el método fuerte de Lebesgue.

Al modo de Reiman serán integrables las funciones continuas, las de variación acotada, y en general, todas las funciones no “demasiado discontinuas”, las que son continuas “casi por doquier” (cpq).

Así que no será integrable la función de Dirichlet:

$$f: x \in [0,1] \to \begin{matrix} 1 \text{ si } x \notin Q \\ \\ 0 \text{ si } x \in Q \end{matrix}$$

Esta si será integrable al modo de Lebesgue.

En esencia, el método de Reiman para integrar funciones (medir conjunto suyacente a las gráficas de las funciones) consiste en lo siguiente:

Como punto de partida se toma a las funciones escalonadas y ese concepto totalmente elemental de integrar. Dado una partición: $a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$ de $[a, b]$ una función escalonada es una función $f: [a, b] \to R$ tal que $f(x) = y_k$, si $x \in]x_{k-1}, x_k[$

Se define $\int^b_a f = {}^n\sum_{k=1} y_k \Delta x_k$, donde $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

Véase que cada sumando es el área de un rectángulo de aquellos. Con signo + si está encima y – si está debajo. Es muy fácil ver que si f y g son escalonadas también lo son f+g, λf, fg y que:

$\int^b_a(f+g) = \int^b_a f + \int^b_a g$ $\qquad\qquad$ $\int^b_a \lambda f = \lambda \int^b_a f$

Mientras que con el producto puede pasar cualquier cosa, puede ser igual, menor o mayor que el producto de la integrales.

<u>Definición:</u>

Se dice que $f: [a, b] \to R$, acotada, es R-integrable (integrable en el sentido de Reiman) si:

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ h, k, f$ escalonadas: $h \leq f \leq k$, $\qquad$ $\int^b_a (k-h) < \varepsilon$

En dicho caso, se define $\int^b_a f = \sup \{\int^b_a h$ / h escalonada, $h \leq f\} =$
$= \inf \{\int^b_a k$ / k escalonada, $f \leq k\}$.

<u>Ejemplos de funciones R-integrables y no R-integrables:</u>

1.-) La función de Dirichlet, $f: x \in [0, 1] \to f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \notin Q \\ 0 \text{ si } x \in Q \end{cases}$

En efecto, si h es escalonada y está por debajo de f, $h \leq f$ (esto significa que $\forall\ x \in [0, 1]$ $h(x) \leq f(x)$), entonces $\int^1_0 h \leq 0$. Es la suma de estos rectángulos, todos negativos, en el mayor de los casos $h(x) = f(x) = 0$, $\int^1_0 h = 0$.

Y si k es escalonada y $f \leq k$, entonces $\int^1_0 k \geq 1$, k vale más que 1.

Por tanto, $\forall$ h, k escalonadas, $h \leq f \leq k$, $\int^1_0(k-h) = \int^1_0 k - \int^1_0 h \geq 1$ y no "es tan pequeño como queramos".

Proposición:

Si f: [a, b] $\rightarrow$ R es continua, entonces es Reiman-integrable.

Demostración:

Sabemos que toda función continua en un compacto (como el [a, b] es uniformemente continua, es decir, se verifica que: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: x,y \in [a, b], |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y) < [\varepsilon/(b-a)]$
Sea P: $a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$ una partición de [a, b] tal que $x_k-x_{k-1} < \delta$, (k=1,..., n).
Denotaremos $m_k(f) = \min.\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ y $M_k(f) = \text{máx } \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$.

Como $x_k - x_{k-1} < \delta$, $M_k(f) - m_k(f) < [\varepsilon/(b-a)]$. Por tanto, si definimos:

h: $x \in [a, b] \rightarrow m_k(f)$, si $x_{k-1} \leq x < x_k$
k: $x \in [a, b] \rightarrow M_k(f)$, si $x_{k-1} \leq x < x_k$

Tenemos que h y k son escalonadas tales que $h \leq f \leq k$ y:

$\int^b_a(k-h) = {}^n\sum_{k=1} [M_k(f)-m_k(f)]\, \Delta x_k < [\varepsilon/(b-a)]\, {}^n\sum_{k=y} \Delta x_k = \varepsilon$ (c.q.d).

Proposición:

Si f: [a, b] $\rightarrow$ R es monótona entonces es R-integrable.

Demostración:

Supongamos que f es creciente (igual para decreciente). Tomamos una partición
P: $a = x_0 < x_1 < ...... < x_n = b$ tal que $x_k-x_{k-1} = [(b-a)/n]$ (puntos igualmente separados).

Tenemos, entonces, que $m_k(f) = f(x_{k-1})$, $M_k(f) = f(x_k)$

Igual que antes tomamos las escalonadas:

h: $x \in [a, b] \rightarrow h(x) = m_k(f)$, si $x_{k-1} \leq x \leq x_k$
k: $x \in [a, b] \rightarrow k(x) = M_k(f)$, si $x_{k-1} \leq x \leq x_k$

Ahora tenemos que $h \leq f \leq k$, $\int^b_a(k-h) = {}^n\sum_{k=1} [M_k(f) - m_k(f)]\, \Delta x_k =$
$= [(b-a)/n]\, {}^n\sum_{k=1} [f(x_k)-f(x_{k-1})] = [(b-a)/n]\, [f(b)-f(a)]$

Se puede hacer menor que cualquier $\varepsilon > 0$, sin más que tomar n suficientemente grande.

Nos sería fácil ver, ahora mismo, que la suma, producto por escalar y producto de R-integrables es R-integrable.

Por tanto el producto no es R-integrable en funciones no acotadas. Pero esto se verá más adelante.

Corolario:

Toda función de variación acotada en [a, b] es R-integrable, sabemos que
$C[a, b] \cup BV[a, b] \subset R[a, b]$.

Sea f: $[a, b] \to R$ acotada y sea P: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ una partición de [a, b]

Definición:

Se llama suma de Reiman de f relativa a P y a lo puntos $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, al número real:

$S(f, P, \{t_k\}) = {}^n\sum_{h=1} f(t_k)\Delta x_k$, dada $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. A veces escribiremos simplemente S(t, P)

El número $S(f, P, \{t_k\})$ es la integral de la función escalonada g: $x \in [a, b] \to f(t_k)$ si $x_{k-1} < x < x_k$. Es decir, la suma algebraica ("con signo +, con signo –") de las áreas rayadas.

Se llama suma inferior (superior) de Reiman de f relativa a P el número real:

$\underline{S}(f, P) = L(f, P) = {}^n\sum_{k=1} m_k(f)\Delta x_k$, $m_k(f) = \inf. \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

$S^-(f, P) = U(f, P) = {}^n\sum_{k=1} M_k(f)\,\Delta x_k$, $M_k = \sup\ \{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

Es evidente, que $\forall\ P \in P[a, b]$, $m(t)(b-a) \leq L(f, P) \leq S(f, P) \leq U(f, P) \leq M(f)(b-a)$, donde $m(f) = \inf \{f(x) : x \in [a, b]\}$ y $M(f) \sup \{f(x): x \in [a, b]$ (*)

Es fácil ver (ejercicio) que $P < P'$ (P' más fina que P) $\Rightarrow L(f, P) \leq L(f, P')$, $U(f, P') \leq U(f, P)$. (**)

Corolario:

$\forall P_1, P_2 \in P[a, b], L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$.

Demostración:

Basta tomar $P_1 \cup P_2$ (que es más fina que P_1 y P_2) y utilizar los resultados anteriores.

$L(f, P_1) < \underbrace{L(f, P_1 \cup P_2) \leq U(f, P_1 \cup P_2)}_{(*)} \leq U(f, P_2)$ (los extremos por (**)).

Definición / Teorema:

$f: [a, b] \to R$ acotada, es R-integrable (en $[a, b]$) si verifica alguna (a la fuerza, todas) de las siguientes proposiciones equivalentes:

1.- Existe un número real, $\int_a^b f$, tal que: $\forall \varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon \in P[a, b] : P_\varepsilon \subset P \Rightarrow |S(f, P)-\int_a^b f|<\varepsilon$
2.- $\sup \{L(f, P): P \in P[a, b]\} = \inf \{U(f, P): P \in P[a, b]\} = \int_a^b f$
3.- $\forall \varepsilon > 0, \exists P \in P[a, b]: U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$

Demostración:

Vamos a ver que $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 2)$

Sea $A = \sup \{L(f, P): P \in P[a, b]\}$, $B = \inf \{U(f, P): P \in P[a, b]\}$. Sabemos que ambas existen (el primer conjunto está acotado superiormente por $M(f)(b-a)$ y el segundo acotado inferiormente por $m(f)(b-a)$ y $A \subset B$, porque cualquier $U(f, P)$ (respectivamente $L(f, P)$) es cota superior (inferior) del conjunto. Queremos ver que $A = B = \int_a^b f$.

$|A-B| \leq |A-L(f, P)|^1 + |L(f, P)-S(f, P,\{t'_k\})|^2 + |S(f, P,\{t'_k\})-\int_a^b f|^3 + |\int_a^b f-S(f, P,\{t''_k\})|^4 +$
$+ |S(f, P,\{t''_k\})-U(f, P)|^5 + |U(f, P) - B|^6$

- 1 y 6 se pueden hacer menores que $\varepsilon/6$ sin más que tomar P suficientemente fina (definiciones de sup e inf) y el hecho de que $L(f, P)$ crece al afinar P y $U(f, P)$ decrece al afinar P..

- 2 y 5 lo mismo (de las definiciones de $m_k(f)$ y $M_k(f)$). (Véase).

- 3 y 4 lo mismo por la hipótesis.

El véase de 2 y 5.

De la definición de $m_k(f)$ se sigue que $\exists\ t'_k \in [x_k, x_{k-1}]$ tal que $|m_k(f) - f(t'_k)| < [\varepsilon/6(b-a)]$ $\Rightarrow 2 < \varepsilon/6$

Es decir, $\forall\ \varepsilon > 0$, $|A-B| < \varepsilon$, lo que es lo mismo, $A = B$

Falta ver que $A = B = \int_a^b f$ (ejercicio).

Sale de que $|A-\int_a^b f| \leq |A-L(f, P)| + |L(f, P) - S(f, P, \{t'_k\})| + |S(f, P, \{t'_k\}) - \int_a^b f|$

$1 \Rightarrow 3)$

Evidente.

De la definición de inf. se sigue que $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ P_1 \in P[a, b]\ /\ 0 \leq \int_a^b f - L(f, P_1) < \varepsilon$

De la definición de sup se sigue que $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ P_2 \in P[a, b]\ /\ 0 \leq U(f, P_2) - \int_a^b f < \varepsilon/2$

Y como para $P = P_1 \cup P_2$, $L(f, P_1) \leq U(f, P) \leq L(f, P_2)$, resulta que $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$.

$3 \Rightarrow 2)$
$2 \Rightarrow 1)$ Ejercicio.

Nótese que cualquiera que sea $f: [a, b] \rightarrow R$ acotada existe:

$\sup\{L(f,, P) : P \in P[a, b]\} = \underline{\int}_a^b f$

y que $\underline{\int}_a^b f \leq \overline{\int}_a^b f$

$\inf\{U(f, P) : P \in P[a, b]\} = \overline{\int}_a^b f$

Basta tener en cuenta que cualquier $U(f, P)$ ($L(f, P)$) es cota superior (inferior) de $\{L(f, P) : P \in P[a, b]\}$ ($\{U(f, P) : P \in P[a, b]\}$)

Por tanto 2 dice que f es R-integrable cuando: $\underline{\int}_a^b f = \overline{\int}_a^b f = \int_a^b f$

<u>Ejercicio:</u>

Calcular $\underline{\int}_a^b f$, $\overline{\int}_a^b f$ cuando $f: x \in [0, 1] \rightarrow \begin{cases} 1 \text{ si } x \notin Q \\ 0 \text{ si } x \in Q \end{cases}$

<u>Ejercicio:</u>

Calcular $\underline{\int}_a^b f$, $\overline{\int}_a^b f$ cuando $f: x \in [0, 1] \rightarrow \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin Q \\ 1/n \text{ si } x = m/n \text{ (irreducible) } (m, n \in N) \end{cases}$

Indicación: Cualquiera que sea $p \in N$, existan <u>finitos</u> $m/n \in [0, 1]$, irreducibles, tales que $n < p$.

¿Es R-integrable esta f?

Esta función es obviamente discontinua en los racionales de [0, 1], pero es continua en los irracionales de [0, 1], la razón es la existencia de esos finitos m/n.

Denotaremos R[a, b] al conjunto de las funciones R-integrables en [a, b].

Ejercicio:

Al empezar este capítulo dimos una definición más simple de función R-integrable. No es difícil ver que las funciones continuas y monótonas en [a, b] son R-integrables en [a, b]. Ver esas demostraciones utilizando 3.

Proposición:

Si f, g $\in$ R[a, b] y $\lambda, \mu \in$ R, entonces $\lambda f+\mu g \in$ R[a, b] y se verifica que:
$\int^b_a(\lambda f+\mu g) = \lambda\int^b_a f + \mu\int^b_a g$

Es decir, con las operaciones usuales de la adición y multiplicación por escalares, R[a, b] es un espacio vectorial sobre R, subespacio de B[a, b], es de las acotadas, que los es del F [a, b] de todas las funciones de [a, b] en R.

Demostración:

$S(\lambda f+\mu g, P) = \sum_p(\lambda f(t_k) + \mu g(t_k))\, \Delta x_k = \lambda\sum_p f(t_k)\Delta x_k + \mu\sum_p g(t_k)\Delta x_k$

Utilizamos 1. Por hipótesis:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \begin{matrix} \exists P'_\varepsilon \in P[a, b] \quad P'_\varepsilon \subset P' \Rightarrow |S(f, P) - \int^b_a f| < [\varepsilon/(2|\lambda|)] \\ : \\ \exists P''_\varepsilon \in P[a, b] \quad P''_\varepsilon \subset P'' \Rightarrow |S(g, P) - \int^b_a g| < [\varepsilon/(2|\lambda|)] \end{matrix}$$

(Si λ=0 ó μ=0 todo más fácil)

Por tanto, tomando $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$ tenemos $P_\varepsilon \subset P \Rightarrow |S(\lambda f+\mu g, P) – (\lambda\int^b_a f-\mu\int^b_a g| \leq$
$\leq |\lambda|\ |S(f, P) - \int^b_a f| + |\mu|\ |S(g, P) - \int^b_a g| < \varepsilon$ (c.q.d.)

Proposición:

Si f, g $\in$ R[a, b] y $f \leq g$ (es decir, $f(x) \leq g(x)$, $\forall\ x \in$ [a, b]) entonces $\int^b_a f \leq \int^b_a g$ (es decir, el funcional lineal $f \in R[a, b] \rightarrow \int^b_a f \in R$ es monótona creciente).

Demostración:

Evidente ($L(f, P) \leq L(f, P)$, etc...)

Proposición:

Si f, g $\in$ R[a, b] entonces min. (f, g) máx. (f, g) $\in$ R[a, b]

Demostración:

Basta considerar que:

$U(\text{min.}(f, g), P) – L(\text{min.}(f, g), P) \leq U(f, g) - L(f, P) + U(g, P) – L(g, P)$
$U(\text{máx.}(f, g), P) – L(\text{máx.}(f, g), P) \leq U(f, g) - L(f, P) + U(g, P) – L(g, P)$

Nota: La definición 3, puede escribirse de la siguiente forma equivalente:

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ P_\varepsilon \in P(a, b): P_\varepsilon \subset P \Rightarrow U(f, P) – L(f, P) < \varepsilon.$

Simplemente porque:

$P' \subset P'' \Rightarrow U(f, P'') – L(f, P'') \leq U(f, P') – L(f, P').$

Ya vemos que $L(f, P') \leq L(f, P'') \leq U(f, P'') \leq L(f, P')$

También es verdad que $f\cdot g \in R[a, b]$ pero no hay relación fija entre $\int^b_a f\cdot g$ y $\int^b_a f \cdot \int^b_a g$.

Si es cierto, y es una desigualdad importante (Cauchy-Schwar)

$\int^b_a f\cdot g \leq (\int^b_a f)^{1/2} \cdot (\int^b_a g)^{1/2}$

Sin embargo:

1.- es algo difícil probar ahora que $f\cdot g \in R[a, b]$

2.- Cuando se integran conjuntos no acotados, o funciones no acotadas, puede ocurrir que $f, g \in R[a, b]$ pero que $f \cdot g \notin R[a, b]$.

Corolario:

Si $f \in R[a, b] \Rightarrow f^+, f^-, |f| \in R[a, b]$ (Por definición $f^+ = \text{máx.}(f, 0)$; $f^- = \text{máx.}(-f, 0)$; $|f| = f^+ + f^-$).

Más todavía, f^+, $f^- \in R[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$, y además, $\int_a^b f = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^-$. Sin embargo $|f| \in R[a, b]$ no $\Rightarrow f \in R[a, b]$.

Ejemplo:

$$f: x \in [0, 1] \rightarrow \begin{cases} 1 \text{ si } x \notin Q \\ -1 \text{ si } x \in Q \end{cases}$$ no es R-integrable, pero $|f| \in R[a, b]$.

Otra forma de escribir el corolario anterior:

$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f^+, f^- \in R[a, b]$ y se verifica que $\int_a^b f = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^-$

Corolario:

$f \in R[a, b] \Rightarrow |f| \in R[a, b]$ (no es cierto $\Leftarrow$) y se verifica que $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ (desigualdad muy importante).

La razón de la desigualdad es:

$$\begin{matrix} f \leq |f| \\ -f \leq |f| \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \\ -\int_a^b f \leq \int_a^b (-f) \leq \int_a^b |f| \end{matrix} \Rightarrow \text{la desigualdad.}$$

Dicha desigualdad, es la desigualdad triangular.

$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\, dx$

Proposición:

Sea $a < c < b$, $f \in R[a, b]$ si sólo si $f \in R[a, c]$ y $f \in R[c, b]$ y si verifica que: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Demostración:

Dado que P' $\subset$ P'' $\Rightarrow$ L(f, P') $\leq$ L(f, P'') $\leq$ U(f, P'') $\leq$ U(f, P') resulta que a las definiciones de función integrable y de integral podemos considerar solo particiones de [a, b] que tengan a c entre sus puntos.

Esto supuesto, si P es una de tales particiones, P: $\underbrace{a = x_0 < x_1 < \ldots < c}_{P' \in P[a,c]} \underbrace{< \ldots < x_n = b}_{P'' \in P[c,b]}$

U(f, P) – L(f, P) = U(f, P') – L(f, P') + U(f, P'') – L(f, P''). Su de dos números mayores que cero es "pequeño" si sólo si ambas son "pequeñas".

Queda ver que $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ (ejercicio teniendo en cuenta lo anterior).

Proposición (Teorema del valor medio del Cálculo Integral):

Si f: [a, b] $\to$ R, acotada, es R-integrable, entonces exista $\eta \in$ [m(f), M(f)] tal que $\int_a^b f = \eta(b-a)$

Si, además, f es continua, entonces existe $\xi \in$ [a, b] tal que $\int_a^b f = f(\xi)$ (b-a)

m(f) = inf {f(x) / x $\in$ [a, b]}
M(f) = máx {f(x) / x$\in$ [a, b]}

Demostración:

Sabemos que (es inmediato) $m(f)(b-a) \leq \int^b_a f \leq M(f)(b-a)$.

Así que la existencia de η es inmediata.

Por otra parte, cuando, f es continua en el intervalo [a, b], $m(f) = \min.\{f(x) / x \in [a, b]\}$ y $M(f) = \text{máx.}\ \{f(x) / x \in [a, b]\}$ ([a, b] es compacto).

Pues bien, (teorema valor medio para funciones continuas). Sabemos que una función continua en un intervalo alcanza cualquier valor comprendido entre dos que alcance (en particular, el valor η).
Teoremas fundamentales de cálculo infinitesimal (diferencial e integral).

Son resultado que, sorprendentemente, ligan el cálculo diferencial (de tangente a gráficas de funciones) con el cálculo integral (de áreas subyacentes a gráficas de funciones).

Teorema:

Si $f \in R[a, b]$ entonces $F: x \in [a, b] \rightarrow F(x) = \int^x_a f$ es continua en [a, b] (incluso lipschitziana). Además, si f es continua en $x \in [a, b]$, entonces $F'(x) = f(x)$.

Demostración:

Sabemos que $f \in R[a, b]$, $x \in [a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$ (Convenimos que $f \in R[a, b]$ y que $\int^b_a f = 0$) (También convenimos que $\int^b_a f = -\int^b_a f$).

Sea $x, y \in [a, b]$. Tenemos que (ya lo hemos visto):

$|F(y)-F(x)| = |\int^y_a f - \int^x_a f| = |\int^y_x f| \leq |\int^b_a |f|| = \int^{\text{máx}(x,\ y)}_{\text{min.}(x,\ y)} |f| \leq M(|f|)|x-y|$. Es decir, f es lipschitziana, por tanto, uniformemente continua (luego hablaremos de esto). Para ver la continuidad uniforme basta tomar $\delta = [\varepsilon/M(f)]$

Supongamos ahora que f es continua en x. Queremos ver que existe
$\lim_{g\rightarrow x} \{[F(y)-F(x)]/(x-y)\}$ y que vale f(x).

Por el teorema del valor medio que acabamos de probar tenemos que existe $\eta = \eta(x, y)$ entre $\inf \{f(z) / z$ entre x e y$\}$, $\sup \{f(z) / z$ entre x e y$\}$ tal que:

$\{[F(y)-F(x)]/(x-y)\} = \{[\int^y_x f]/(x-y)\} = \{[\eta(y-x)]/(y-x)\} = \eta$, y por ser f continua en x

$\eta \rightarrow f(x)$
$y \rightarrow x$ (c.q.d.)

Funciones Lipschitszianas:

Se dice que $f: A \subset R \rightarrow R$ es lipschitziana si existe $k \geq 0$ tal que $|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$.

Es inmediato que si f es lipschitsziana entonces es uniformemente continua: bast tomar $\delta = \varepsilon/k$ (Si k = 0, trivial):

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta = \varepsilon/k\ /\ x, y \in A, |x-y| < \varepsilon/k \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Definición:

Diremos que F: [a, b] $\rightarrow$ R es una primitiva de f: [a, b] $\rightarrow$ R si F es continua en [a, b], derivable en]a, b[y tal que F'(x) = f(x), (x $\in$]a, b[).

Sabemos, por ejemplo, que si f tiene alguna discontinuidad de primera especie (evitable o de salto) entonces no tiene ninguna primitiva.

Teorema (Regla de Barrow):

Si f $\in$ R[a, b] y F es una primitiva de f (en [a, b]) entonces $\int^b_a f = F(b)-F(a)$. Es una fórmula de extraordinario valor teórico, no tanto valor práctico.

1.-) No tanto valor práctico, porque no es fácil calcular primitivas de una función dada, ni siquiera de las funciones elementales (potencial, exponencial, logarítmica, seno, arcseno, y las que se obtienen operando y componiendo).

2.-) Más aún, toda función elemental tiene derivada elemental, pero no es cierto que toda función elemental tenga primitiva elemental.

Demostración:

Sea P: $a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$ una partición cualquiera de [a, b]. Se verifica que:

$F(b)-F(a) = F(x_n)-F(x_0) = {}^n\sum_{k=1} (F(x_k)-F(x_{k-1})) = {}^n\sum_{k=1} F'(t_k)\Delta x_k = S(f, P, \{t_k\})$. (c.q.d.)

Así que f $\in$ R[a, b] y $\forall$ P $\in$ P[a, b] se pueden elegir las $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tales que:
$|S(f, P, \{t_k\})-[F(b)-F(a)]| = 0 \Rightarrow F(b)-F(a) = \int^b_a f$. (c.q.d.)

Vamos a ver algunos ejemplos:

1.-) Consideramos la función (escalonada y por lo tanto, trivialmente integrable).

$$f: x \in [-1, 2] \rightarrow f(x) = E(x) = f(x) = \begin{matrix} -1 \text{ si } -1 \leq x < 0 \\ 0 \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ si } 1 \leq x < 2 \\ 2 \text{ s1 } x = 2 \end{matrix}$$

(E(x) es la parte entera de x, es el mayor número entero que es menor o igual a x)

Se pide, calcular $F: x \in [-1, 2] \rightarrow F(x) = \int^x_a f$

Podríamos echar todas la cuentas a ojo, vamos a hacer uso, sin embargo, de los teoremas anteriores.

Si $-1 \leq x < 0$, f es la función $t \in [-1, x]$ en $[-1, x]$. Una primitiva de ella es la función que a cada $\varphi: t \in [-1, x] \rightarrow -t$. Por lo tanto regla de Barrow:

$F(x) = \int^x_{-1} f = \int^x_{-1} -1dt = \varphi(x)-\varphi(-1) = -x-1$

Si $0 \leq x < 1$, f es la función que $t \in [0, x]-1 = 0$. Una primitiva de ella es la 0. Por lo tanto Regla de Barrow.

$F(x) = \int^x_{-1} f = \int^0_{-1} f + \int^x_0 f = -1 + \int^x_0 0\ dt = -1$ (hacemos esto porque f no tiene primitiva en $[-1, x]$ con $x > 0$. Esto es porque tiene una discontinuidad de salto en un punto del interior, el 0).

Si $1 \leq x \leq 2$, f es la función $t \in [-1, x] = 1$ una primitiva es x. Regla de Barrow.

$F(x) = \int^x_{-1} f = \int^1_{-1} f + \int^x_1 f = -1 + \int^x_1 1dt = -1 + \varphi(x) - \varphi(1) = -1 + x - 1 = x-2$

$$F: x \in [-1, 2] \rightarrow F(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ -1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x-2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Vamos a hacer lo mismo para esta F.

Ahora como F es continua si hay primitiva en F en (-1, 2], dicha primitiva no es "elemental" pero si "elemental a trozos".

Si $-1 \leq x \leq 0$, $g(x) = \int^x_{-1} F = \int^x_{-1} (-t-1)dt = [-t^2/2] - t\ ]^x_{-1} = -x^2/2 - x - 1/2 - 1$

Si $0 < x \leq 1$, $G(x) = \int^0_{-1} F + \int^x_0 F = -3/2 + \int^x_0 -1dt = -3/2 + [-t]^x_0 = -3/2 - x$

Si $1 < x \leq 2$, etc....

Ejercicios:

Dada f: $x \in [-1,2] \to |x|$, calcular $F(x) = \int^x_1 f$

Dada f: $x \in [-\Pi/2, \Pi/2] \to |\text{sen } x|$, calcular $F(x) = \int^x_{-\Pi/2} f$

Representar f, F, interpretar los resultados, ...

Vamos a probar un importante teorema de caracterización de las funciones R-integrables.

Teorema (Lebesgue):

Condición necesaria y suficiente para que una función acotada f: $[a, b] \to R$ sea R-integrable es que sea continua c.p.d. (casi por doquier).

Continua c.p.d. significa continua en todos los puntos de [a, b] salvo, a lo sumo, en lo de un subconjunto de medida (de Labesgue) cero.

Tendremos que trabajar bastante para ponernos en condiciones de probar ese teorema.

Lo primero es ver que es un conjunto de medida cero.

Aún antes veremos lo que es un conjunto de contenido (medida de Jordan) cero.

Definción:

$A \subset R$ es de contenido (medida de Jordan) cero si: $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ I_1, ..., I_n$ intervalos tal que $A \subset I_1 \cup .... \cup I_n$, y, $\mu(I_1) + ... + \mu(I_n) < \varepsilon$

$\mu(I)$ es la medida (longitud) del intervalo I

Ejemplos:

1.-) Si A es finito, $A = \{x_1, ..., x_n\}$ entonces es de contenido cero.

Basta tomar $I_k =]x_k\text{-}\varepsilon/3n, x_k+\varepsilon/3n[$, (k = 1,...., n) para tener que $A \subset I_1$ U .... U I_n, y, $\mu(I_1) + ... + \mu(I_n) < 2/3\ \varepsilon < \varepsilon$

Los conjuntos finitos son de contenido cero.

2.-) Si (x_n) es una sucesión convergente, el conjunto de sus término es de contenido cero

En efecto, sea a = lim $_{a\to\infty}$ (x_n). Entonces en $]a\text{-}\varepsilon/6, a+\varepsilon/6[$ están todos, salvo finitos, los términos de la sucesión, quedan fuera, a lo sumo, $\{x_1, ..., x_\upsilon\}$. Tomamos
$I_k =]x_k\text{-}\varepsilon/4n, x_k+\varepsilon/4n[$, (k = 1, ..., n). Tenemos que $\{x_n / n \in N\} \subset I_1$ U .... U I_n, y,
$\mu(I_1) + ... + \mu(I_n) = \varepsilon/2\upsilon + ... + \varepsilon/2\upsilon + \varepsilon/3 = \varepsilon/2 + \varepsilon/3 < \varepsilon$

3.-) Un conjunto "no muy grande" (numerable) que no es de contenido cero: $Q \cap [0, 1]$

Véase que si $Q \cap [0, 1] \subset I_1$ U .... U I_n (intervalo) entonces $\mu(I_1) + ... + \mu(I_n) \geq 1 =$
$= \mu([0,1])$.

4.-) El conjunto ternario de Cantor es infinito no numerable de contenido cero. Dicho conjunto se obtiene de la siguiente forma:

Consideramos el intervalo [0, 1]. Dividimos el intervalo [0, 1] en tres trozos iguales y quitamos el de medio (C_1 = [0, 1/3] U [2/3, 1]). Hacemos lo mismo a los dos que quedan y obtenemos C_2 = [0, 1/9] U [2/9, 1/3] U [2/3, 7/9] U [8/9, 1]. Reiterando el proceso obtenemos dicho conjunto $C = {}^{\infty}\cap_{n=1} C_n$.

No es difícil ver que:

1.- C no es numerable
2.- $C = C^- = C'$
3.- C es de contenido cero.

Lo más fácil es lo tercero:

Está contenido en [0,1] ← mide 1
[0, 1/3] U [2/3, 1] ← suma de medidas 2/3
[0, 1/9] U [2/9, 1/3] U [2/3, 7/9] U [8/9, 1] ← suma de medidas $(2/3)^2$

$(2/3)^n \to_{n\to\infty} 0$

Veamos que C es infinito no numerable.

Utilizaremos el sistema de numeración en base 3: 0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101, 102,..... Todo número, salvos los "exactos" excepto el cero, que admiten una representación de "periodo 2" (21 = 20'2222....)

Veamos cuales son, escritos en base 3, los elementos de C. Convenimos que los números exactos que terminan en 1 los representamos con periodo 2. Por ejemplo: 0'201 = 0'200222.... Los que terminan en 2 los dejamos como están.

Eso supuesto, se puede ver que $C = \{0'a_1a_2a_3...... / a_k = 0 \text{ ó } 2\}$. Pues bien, la correspondencia $0'a_1a_2a_3..... \in C \to 0'b_1b_2b_3.....$ donde $b_k = a_k$ si $a_k = 0$; $b_k = 1$ si $a_k = 2$ (Cambiar doses por unos). Biyección entre C y su imagen por ella. Pero la imagen de C son, en base 2, todos los puntos del intervalo [0, 1] que no es numerable.

Algunas propiedades de los conjuntos de contenido cero:

- Si A es de contenido cero y $B \subset A$, entonces B es de contenido cero.
- Por tanto, la intersección de conjuntos de contenido cero es de contenido cero.
- La unión finita de conjuntos de contenido cero es de contenido cero.

Demostración:

Sean $A_1, \ldots, A_n$ de contenido cero. Esto significa que: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \begin{matrix} I_{11} \ldots\ldots I_{1m} \\ \ldots\ldots\ldots \\ I_{n1} \ldots\ldots I_{nm} \end{matrix}$ /

$A_k \subset I_{x1} \cup \ldots \cup I_{km}$
$\mu(I_{k1}) + \ldots + \mu(I_{km}) < \varepsilon/n$

Por tanto, ${}^{\infty}\bigcup_{k=1} A_k = {}^{n}\bigcup_{k=1} {}^{m}\bigcup_{j=1} I_{kj}$, $\sum_{todos}(I_{kj}) < \varepsilon$

Sin embargo, la unión de infinitos (aunque sean numerables) conjuntos de contenido cero no es de contenido cero.
Ejemplo:

$Q \cap [0, 1]$ es un conjunto numerable, es decir, unión numerable de conjuntos de un solo punto, que son de contenido cero. El no es de contenido cero.

Definición:

$A \subset R$ es de medida (de Lebesgue) cero si: $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ I_1, I_2, \ldots$ (finitos o numerables infinitos) /
$A \subset I_1 \cup I_2 \cup \ldots$; $\mu(I_1) + \mu(I_2) + \ldots < \varepsilon$ (una suma finita o suma de una serie de términos positivos –no importa el orden-)

Es evidente, que si A es de contenido cero entonces es de medida cero (cont(A) = 0 $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ med(A) = 0). El recíproco es falso. Basta considerar que todo conjunto numerable, por ejemplo Q, es de medida cero (Q no es de contenido cero).

Ejercicio:

Ver que si $\mathring{A} \neq \emptyset$ entonces no es de contenido cero. Indicación: $\mathring{A} \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists\ [a, b] \subset A$ (un intervalo no es de contenido cero luego A tampoco es de contenido cero).

Está claro que A de contenido cero $\Rightarrow$ A acotado, sin embargo, esto no es esencial, se puede generalizar la definición de "contenido cero" a conjuntos no acotados. Así, A no acotado, es de contenido cero, para todo intervalo acotado I, $A \cap I$ es de contenido cero.

Por ejemplo:

N o Z son no acotados de contenido cero. Q no es de contenido cero ($Q \cap I$ nunca es de contenido cero) Cualquier colección finita de intervalos que contenga a $Q \cap I$ tiene suma de longitudes mayor que la de I.

Hemos visto un ejemplo (el conjunto de Cantor) de conjuntos infinitos no numerables de contenido cero.

Propiedades de los conjuntos de medida cero:

- Si A es de medida cero, $B \subset A \Rightarrow B$ es de medida cero.

- Por tanto, la intersección de conjuntos de medida cero es de medida cero.
- La unión finita o numerable de conjuntos de medida cero es de medida cero.

Demostración:

Supongamos que $A_1, A_2, \ldots$ son de medida cero. Esto significa que (que A_k es de medida cero), $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ I_{k1}, I_{k2}, \ldots : A_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{kj};\ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_{kj}) < \varepsilon/2^k$.

Entonces $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} I_{kj}$ (unión numerable de uniones numerables es unión numerable).

$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_{kj}) < \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon/2^k = \varepsilon$ (serie geométrica de primer término ½ y de razón ½)

Proposición:

Si A es compacto y de medida cero entonces es de contenido cero.

Esta proposición es consecuencia inmediata del siguiente lema:

Lema:

Para definir "medida cero" basta utilizar intervalos abiertos.

Demostración:

Supongamos que A es de medida cero, es decir, que dado $\varepsilon > 0$, existen:

$I_1, I_2, \ldots : A \subset I_1 \cup I_2 \cup \ldots ;\ \mu(I_1) + \mu(I_2) + \ldots < \varepsilon/2$

Quiero ver que, entonces, también existen $I_1, I_2, \ldots$ intervalos abiertos tales que:

$A \subset I_1 \cup I_2 \cup \ldots ;\ \mu(I_1) + \mu(I_2) + \ldots < \varepsilon$

Suponiendo que I_k es el intervalo de extremos a_k, b_k basta tomar $J_k =]a_k - \varepsilon/2^{k+2}, b_k + \varepsilon/2^{k+2}[$

Naturalmente $A \subset J_1 \cup J_2 \cup \ldots$ (porque $I_k \subset J_k$).

Por otra parte:

$\mu(I_1) + \mu(I_2) + \ldots = \mu(I_1) + \varepsilon/2^2 + \mu(I_2) + \varepsilon/2^3 + \mu(I_3) + \varepsilon/2^4 + \ldots < \varepsilon/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon/2^{k+1} =$
$= \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

Supongamos que tenemos una función $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un conjunto $B \subset A$.

Definición:

Se llama oscilación de f en B al número real (ó $+\infty$)

$\Omega(f, B) = \sup\ \{f(x) - f(y) : x, y \in B\}$

Ni que decir tiene que $\Omega(f, B) \geq 0$ (evidentemente $+\infty$) y que $D \subset B \Rightarrow \Omega(f, D) < \Omega(f, B)$,
$\Omega(f, B) = \underset{\text{posible } +\infty}{\sup\{f(x) : x \in B\}} - \underset{\text{posible } -\infty}{\inf\{f(x) : x \in B\}}$

Definición:

Se llama oscilación de f en $x \in A$ al número real (ó $+\infty$)

$\omega(f, x) = \inf_{r>0}\Omega(f,]x\text{-}r, x\text{+}r[) \cap A = \lim_{r\searrow 0}\Omega(f,]x\text{-}r, x\text{+}r[\cap A)$

La última igualdad se debe al hecho evidente de que $r < s \Rightarrow \Omega(f,]x\text{-}r, x\text{+}r[\cap A) \leq$
$\leq \Omega(f,]x\text{-}s, x\text{+}s[\cap A)$.

Recuérdese que una función monótona tiene límites laterales y dichos límites son supremos o ínfimos.

Con mayor precisión: si $g: R \to R$ no creciente entonces $\lim_{r\searrow 0}g(r) = \inf\{g(r) : r > 0\}$

Proposición:

Cualquiera que sea $\rho > 0$, el conjunto $\{x \in A: \omega(f, x) \geq \rho\}$ es cerrado (en A) (Cerrado en A significa intersección de A con un cerrado de R).

Demostración:

Veamos que $B = \{x \in A: \omega(f, x) < \rho\}$ abierto (en A), es decir, que todo $b \in B$ es interior a B. Tenemos que $\omega(f, b) = \sigma < \rho$ por tanto, de la definición de $\inf_{r>0}$, ó de $\lim_{r\searrow 0}$ se sigue que
$\sigma < r < \rho$, existe $r > 0 : \Omega(f,]b\text{-}r, b\text{+}r[\cap A) < \tau$.

Por consiguiente $\forall\ x \in]b\text{-}r, b\text{+}r[\cap A$, $\omega(f, x) < \tau < \rho$. (c.q.d.).

Teorema:

$f:[a, b] \to R$, acotada, es R-integrable si sólo si es continua c.p.d. (casi por doquier, significa continua en todos los puntos de [a, b] salvo, a lo sumo, en los de un subconjunto de medida cero).

Demostración:

Sea $A = \{x \in [a, b] / f \text{ no es continua en } x\} = \{x \in [a, b) / \omega(f, x) > 0\}$.

A es de medida cero. Dado $\varepsilon > 0$, denotaremos

$A_\varepsilon = \{x \in [a, b] / \omega(f, x) \geq \varepsilon\}$. Por tanto, $A_\varepsilon \subset A$ y es cerrado, luego es compacto y de medida cero. Por tanto, de contenido cero. Así que existe $I_1, \ldots, I_n$ (intervalos abiertos) tales que $A \subset I_1 \cup \ldots \cup I_n$; $\mu(I_1) + \ldots + \mu(I_n) < \varepsilon$

Esos intervalos, $I_1, \ldots, I_n$, inducen una partición P de [a, b]

Lamemos $P' = \{J \text{ (intervalitos)} \in P / J \cap A_\varepsilon \neq \varnothing\}$
$P'' = \{J \in P / J \cap A_\varepsilon = \varnothing\}$. Tenemos, entonces,

$U(f, P) - L(f, P) = U(f, P') - L(f, P') + U(f, P'') - L(f, P'') = \sum_{J\in P'}[M_J(f)\text{-}m_J(f)]\mu(J) +$
$+ \sum_{J\in P''}[M_J(f)\text{-}m_J(f)]\mu(J) \leq 2M(|f|) \sum_{J\in P'}\mu(I) + \sum_{J\in P''}[M_J(f)\text{-}m_J(f)]\mu(I) < 2M(|f|)\varepsilon +$
$+ \sum_{J\in P''}[M_J(f)\text{-}m_J(f)]\mu(I)$

Como $2M(|f|)$ es cte. y ε es tan pequeño como queramos entonces $2M(|f|)\varepsilon$ es tan pequeño como queramos

Como $\omega(f, x) < \varepsilon$ para $x \in J$, resulta que podemos afinar P'' para que $x \in J \in P'' \Rightarrow$
$\Rightarrow M_J(f)-m_J(f) < \varepsilon$, siendo esto así tenemos, finalmente, que

$\sum_{J\in P''}[M_J(f)-m_J(f)]\mu(I) < \varepsilon \sum_{J\in P''}\mu(I) \leq \varepsilon(b-a)$

Es decir, para tal P, partición de [a, b]

$U(f, P) - L(f, P) < [2M(|f|) + (b-a)]\, \varepsilon$ (c.q.d.)

Recíprocamente, supongamos que $f \in R[a, b]$, queremos ver que, entonces, es continua c. p.d.

Para cada $n \in N$ escribimos $A_{1/n} = \{x \in [a, b] / \omega(f, x) \geq 1/n\}$

Es evidente que $A = \{x \in [a, b] / \omega(f, x) > 0\} = \{x \in [a, b] / f$ no continua en $x\} =$
$= U_{n\in N}A_{1/n}$

Vamos a ver que cada $A_{1/n}$ es de contenido cero, luego de medida cero, luego A (unión numerable de conjuntos de medida cero) también es de medida cero, que es lo que queremos.

Por ser $f \in R[a, b]$, cual quiera que sea $\varepsilon > 0$ y $n \in N$, existe $P \in P[a, b]$ tal que:

$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{J\in P}[M_J(f)-m_J(f)]\mu(J) < \varepsilon/n$

Sea $P' = \{J \in P / J \cap A_{1/n} \neq \varnothing\}$. Evidentemente $1/n \sum_{J\in P'}\mu(J) \leq U(f, P') - L(f, P') \leq$
$\leq U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon/n \Rightarrow \sum_{J\in P'}\mu(J) < \varepsilon$

Es decir, $\forall\ \varepsilon > 0$, existen intervalos (los $J \in P'$) tales que: $A_{1/n} \subset U_{J\in P'}J$; $\sum_{J\in P'}\mu(J) < \varepsilon$, es decir, $A_{1/n}$ es de contenido cero.

Complementos de Integración:

- Integración en conjuntos no acotados.
- Integración de funciones no acotadas.
- Integración en conjuntos cualquiera.
- Integral de Reiman-Stieltjes.

Al definir el conjunto de funciones R-integrables, hemos considerado funciones acotadas en un intervalo compacto.

Si en vez de considerar un intervalo [a, b] es un intervalo]a, b],]a, b[, [a, b[, todo es igual.

Ya no es "todo lo mismo" si de lo que se trata es de un intervalo no acotado [a, +∞[,]-∞, +∞[ó]-∞, b].

<u>"Concepto de función R-integrable en [a, +∞[(lo mismo en]a, +∞[).</u>

Diremos, en primer lugar, lo que es una función no negativa R-integrable en [a, +∞[.

Sea f: [a, +∞[→ R acotada tal que $f(x) \geq 0$ ($x \in [a, +\infty[$).

<u>Definición:</u>

$f \in R[a, +\infty[$ si $f \in R[a, b]$, para todo $b > a$ y existe $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f =_{def.} \int_a^{+\infty} f$. Nótese que $a < b < c \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^c f$ y por tanto, ese límite existe (es un número real) ó es $+\infty$.

Ejemplo:

1.-) f: $x \in [1, +\infty[\to 1/x$

$\int_1^b 1/x\, dx = \log x\,|_1^b = \log b - \log 1 = \log b$
$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b f = \lim_{b\to+\infty} \log b = +\infty$

$f \notin R[1, +\infty[$

2.- f: $x \in [1, +\infty[\to 1/\sqrt{x}$

$\int_1^b 1/\sqrt{x}\, dx = 2\sqrt{x}]_1^b = 2\sqrt{b} - 2\sqrt{1} \to +\infty$
$f \notin R[1, +\infty[$

3.- f: $x \in [1, +\infty[\to 1/x^2$

$\int_1^b 1/x^2\, dx = -1/x|_1^b = 1-1/b \to 1$

$f \in R[1, +\infty[$

Supongamos ahora que $f = [a, +\infty[$ es acotada (en valores positivos o negativos).

Definición:

Diremos que $f \in R[a, +\infty[$ si lo son f^+ y f^-, en cuyo caso se define $\int_a^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} f^+ + \int_a^{+\infty} f^-$

$f(x)$ si $f(x) \geq 0$

$f^+(x) =$
$\quad 0 \quad$ si $f(x) < 0$

$\quad -f(x)$ si $f(x) \leq 0$
$f^-(x) =$
$\quad 0 \quad$ si $f(x) > 0$

<u>Nota</u>:

$\int^{+\infty}_a(\lambda f + \mu g) = \lambda\int^{+\infty}_a f + \mu\int^{+\infty}_a g$

¿Cómo son las cosas en $]-\infty, +\infty[\equiv R$?

<u>Definición:</u>

$f:]-\infty, +\infty[\rightarrow R$ acotada, no negativa es R-integrable si:

$\forall\ b > 0$, $f \in R[-b, b]$ y existe $\lim_{b\to+\infty} \int^b_{-b} f = \int^{+\infty}_{-\infty} f$

En caso "de cualquier signo", $f \in R]-\infty, +\infty[$ cuando f^+, $f^- \in R]-\infty, +\infty[$ y se define $\int^{+\infty}_{-\infty} f = \int^{+\infty}_{-\infty} f^+ - \int^{+\infty}_{-\infty} f^-$

<u>Ojo:</u> No confundir esto con el concepto de "integral impropia de Reiman de primera especie"

<u>Definición:</u>

$f: [a, +\infty[\rightarrow R$ acotada es "impropiamente integrable en el sentido de Reiman en $[a, +\infty[$ si:

$\forall\ b > a$, $f \in R[a, b]$ y existe $\lim_{b\to+\infty} \int^b_a f = \int^{+\infty}_a f$ (Misma notación, pero otra cosa).

Si f es no negativa, esto es exactamente lo mismo que antes.

<u>Ejemplo:</u>

$f: x \in [0, +\infty[\rightarrow f(x) = (-1)^{n-1}/n$ si $n-1 < x < n$

$\int^{+\infty}_0 f^+ = \sum^{+\infty}_{n=0} 1/(2n+1) = +\infty$

$\int^{+\infty}_0 f^- = \sum^{\infty}_{n=0} 1/2n = +\infty$

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^{+\infty} f = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n = \log 2$$

Esta función es impropiamente integrable pero no integrables

Hemos visto como se extiende la integral de Reiman a intervalos no acotados. Veamos ahora como se extiende a funciones no acotadas.

Sea f: [a, b] $\to$ R no negativa y no acotada.

Definición:

Diremos que f: [a, b] $\to$ R, no negativa y no acotada es R-integrable si para todo m > 0, inf (f, m) es R-integrable y se verifica que existe:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \inf (f, m) = \int_a^b f$$

$$\inf (f, m) (x) = \inf (f(x), m)$$

f: [a, b] $\to$ R no acotada es R-integrable si lo son f^+ y f^- (en el sentido anterior), en cuyo caso se define: $\int_a^b f = \int_a^b f^+ + \int_a^b f^-$.

Ejemplo:

1.-) f: $x \in]0, 1] \to 1/x$

Para cada m > 0, inf (f, m) $\in$ R[0, 1]
porque es continua. Por otra parte:

$$\int_0^1 \inf (f, m) = \int_0^{1/m} m\, dx + \int_{1/m}^1 1/x\, dx = 1 + \log 1 - \log 1/m = 1 - \log 1/m \to +\infty$$

Es decir, f $\notin$ R[0, 1].

2.-) f: $x \in]0, 1] \to 1/\sqrt{x}$

Inf (f, m) es continua $\Rightarrow$ R-integrable

$$\int_0^1 \inf (f, m) = \int_0^{1/m^2} m\, dx + \int_{1/m^2}^1 1/\sqrt{x}\, dx = 1/m + 2\sqrt{x}\,\Big]_{1/m^2}^1 = 1/m + 2 - 2/m \to 2$$

Nótese que la anterior f es R-integrable en [0, 1] pero que f^2 no lo es. Es decir, pera la integración de funciones no acotadas no se conserva la propiedad.

Un ejemplo de lo anterior es la función $1/\sqrt{x}$ ya que $(1/\sqrt{x})^2 = 1/x$

Mezclando la definición de ayer y la de hoy tenemos "integración de funciones no acotadas en intervalos no acotados".

Definición:

Diremos que un conjunto $C \subset R$ (acotado o no) es J-integrable (medible en el sentido de Jordan), si su función característica

$$\chi_c: x \in R \to \begin{cases} 1 \text{ si } x \in C \\ 0 \text{ si } x \notin C \end{cases}$$

es R-integrable (en $]-\infty, +\infty[$) en cuyo caso, la medida (de Jordan) de C se define como $\mu(c) = \int_{-\infty}^{+\infty}\chi_c$

Por ejemplo:

$Q \cap [0, 1]$ no es J-medible.

C (conjunto terciario de Cantor) si es J-medible y de medida cero.

Sea C un conjunto de números reales y sea $f: C \to R$ una función:

Definición:

Se dice que f es R-integrable en C, $f \in R(C)$ cuando:

$$f \cdot \chi_c : x \in R \to f(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in C \\ 0 \quad \text{ si } x \notin C \end{cases}$$

es R-integrable (en $]-\infty, +\infty[$) y se define:

$\int_c f = \int_{-\infty}^{+\infty} f\cdot\chi_c$

De lo que ya sabemos se obtiene inmediatamente:

$f, g \in R(C), \lambda, \mu \in R \Rightarrow \lambda f + \mu g \in R(C), \int_c(\lambda f+\mu g) = \lambda\int_c f + \mu\int_c g$

$f \in R(C), f \in R(D) \Rightarrow f \in R(C \cup D)$, además, si $C \cap D = \varnothing$ entonces:

$\int_{C\cup D} f = \int_C f + \int_D f$, etc....

La integral de Reiman-Stieltjes:

Sean $f, \alpha: [a, b] \to R$ funciones acotadas

Se llama <u>suma de Reiman</u> (ó de R-S) de f relativa a α y a la partición P: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ al número real:

$S(f, \alpha, P) = \sum^{n}_{k=1} f(t_k)\Delta\alpha_k$, donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $\Delta\alpha_k = \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$

Es decir, como la suma de Reiman ordinaria, pero allí $\alpha: x \to x$

<u>Definición:</u>

f es R-integrable respecto a α en [a, b] si existe el número real, $\int^b_a f\, d\alpha = \int^b_a f(x)\, d\alpha(x)$ tal que $\forall\ \varepsilon > 0$, $P_\varepsilon \in P[a, b]$ / $P_\varepsilon \subset P \Rightarrow |S(f, \alpha, P) - \int^b_a f\, d\alpha| < \varepsilon$.

Es decir, si aquellas sumas "convergen" a un cierto número (que llamamos $\int^b_a f\, d\alpha$) al afinar la partición.

Es fácil ver que (se hace exactamente igual que el caso $\alpha(x) = x$) que:

<u>Proposición:</u>

$f, g \in R_\alpha[a, b], \lambda, \mu \in R \Rightarrow \lambda f + \mu g \in R_\alpha[a, b]$
$\Rightarrow \int^b_a(\lambda f + \mu g)\, d\alpha = \lambda\int^b_a f\, d\alpha + \mu\int^b_a g\, d\alpha$

Análogamente:

<u>Proposición:</u>

$f \in R_\alpha[a, b] \cap R_\beta[a, b], \lambda, \mu \in R \Rightarrow$

$f \in R_{\lambda\alpha+\mu\beta}[a, b]$,

$\int^b_a f\, d(\lambda\alpha+\mu\beta) = \lambda\int^b_a f\, d\alpha + \mu\int^b_a f\, d\beta$

Espacio vectorial de los integrandos (f's) y de los integradores (α's).

<u>Proposición:</u>

$f \in R_\alpha[a, b] \Rightarrow \alpha \in R_f[a, b]$

Demostración: (hacerla).

Proposición:

Sea $a < c < b$, $f \in R_\alpha[a, b] \Leftrightarrow f \in R_\alpha[a, c]$, $f \in R_\alpha[c, b]$ y se verifica que $\int^b_a f\, d\alpha = \int^c_a f\, d\alpha + \int^b_c f\, d\alpha$

Demostración: (hacerla).

Proposición:

Si f es continua en [a, b] y α es monótona, entonces $f \in R_\alpha[a, b]$

Demostración: (hacerla, es igual que lo que hicimos para ver que si f es continua entonces es R-integrable).

Corolario:

Si f es continua y α es de variación acotada, entonces $f \in R_\alpha[a, b]$.

Corolario:

Si f es de variación acotada y α es continua, entonces $f \in R_\alpha[a, b]$

Sea I = [a, b] y sea C(I) y BV(I) los espacios vectoriales de funciones continuas y de variación acotada en I.

Es fácil ver:

$d(f, g) = \sup_{x\in I} |f(x)-g(x)|$ es una métrica en C(I)

Y que $\delta(f, g) = V^b_a(f-g)$ es una partición en BV(I)

$\delta(f, g)$ no $\Rightarrow f = g$
$\Rightarrow$ f-g es constante (las funciones ctes. Son las que tienen variación 0).

Por tanto, es una métrica en el espacio cociente BV(I)/ctes.

Consideramos el espacio dual de C(I), es decir, el espacio formado por las funciones (formas) lineales en C(I), (aplicaciones lineales de C(I) en el cuerpo R)

$\varphi: f \in C(I) \to \varphi(f) \in R$ $\qquad \varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$

Un subespacio de ese dual algebraico, C(I)*, es el dual topológico C(I)', formado por las funciones lineales que son continuas.

(la topología de C(I) y la indicada por aquella métrica).

Teorema (Riesz):

$C(I)' \cong BV(I)/ctes.$

Isomorfismo algebraico isométrico

$\forall\ \varphi \in C(I)', \exists^*\ \alpha \in BV(I)$ tal que $\varphi(f) = \int_I f\ d\alpha$

$\sup\ \{|\varphi(f)|\ /\ d(f, 0) = I\} = V^b_a\ \alpha$

Para determinar con la integral de Reiman-Stieltjes más ejercicios.

- Supongamos que α es diferenciable en [a, b] y que $f \in R_\alpha[a, b]$, $f\alpha' \in R[a, b]$.. Ver haciendo uso del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial que, entonces $\int^b_a f\ d\alpha = \int^b_a f\ \alpha'$. Con otra notación más clásica $\int^b_a f(x)\ d\alpha(x) = \int^b_a f(x)\alpha'(x)\ dx$.

- Sea $a < c < b$ y sea $\alpha: x \in [a, b] \to \begin{cases} 0 \text{ si } a \leq x \leq c \\ 1 \text{ si } c < x \leq b \end{cases}$

Función de Heaviside. Si $f: [a, b] \to R$ es continua en c entonces $f \in R_\alpha[a, b]$ y se verifica que $\int^b_a f\ dx = f(c)$ (medida de Dirac).

- Sea $\alpha: x \in R_+ \to \alpha(x) = E(x)$ parte entera de x

Supongamos que $f: R_+ \to R$ es no negativa. Como ya hemos dicho para la integral de Reiman, lo podemos decir para la de R-S que $f \in R_\alpha[0, +\infty[$ cuando $f \in R_\alpha[0, b]$, $\forall\ b > 0$ y se verifica que existe $\lim_{b \nearrow +\infty} \int^b_0 f\ d\alpha = \int^{+\infty}_0 f\ d\alpha$.

Pues bien, si f es continua en los puntos de N e integrable en ese sentido en $[0, +\infty[$ entonces $\int^{+\infty}_0 f\ d\alpha = {}^{\infty}\sum_{n=1} f(n)$.

La teoría de la integral de R-S abarca a la teoría de series.

TEMA 3
SUCESIONES Y SERIES FUNCIONALES

Formalmente, una sucesión funcional es una aplicación de N en un conjunto de funciones. Supondremos que este conjunto de funciones de $A \subset R \to R$.

$$n \in N \to f_n \in F(A, R)$$

Como siempre, denotaremos (f_n) ó $(f_1, f_2, f_3,....)$ ó $(f_n)_{n\in N}$, ..., a tal sucesión.

Así como para las sucesiones de números reales dábamos un único conjunto de convergencia $(x_n) \to a \Leftrightarrow: \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \upsilon\ \in\ N : n < \upsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$, para las sucesiones funcionales podemos dar muchos conceptos distintos de convergencia. Nos vamos a fijar especialmente en dos:

- La convergencia puntual
- La convergencia uniforme.

Sea (f_n) una sucesión cuyos términos son funciones de $A \subset R \to R$.

Definición:

Diremos que (f_n) converge a f (otra función de A en R) cuando $\forall\ x \in A, \forall\ \varepsilon > 0$,
$\exists\ \upsilon \in N / n > \upsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
$\upsilon = \upsilon(x, \varepsilon)$

Es decir, cuando para cada $x \in A$, la sucesión numérica $(f_n(x))$ converge a $f(x)$.

Definición:

Diremos que (f_n) converge uniformemente a f cuando $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \upsilon \in N / n > \upsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ (x \in A)$ $\upsilon = \upsilon(\varepsilon)$

Ni que decir tiene que $[(f_n) \rightarrow_{(unif)} f] \Rightarrow [(f_n) \rightarrow_{(punt)} f]$
Sin embargo es falso el recíproco.

Antes de poner ejemplo de convergencia puntual no uniforme, veamos gráficamente lo que significa esos conceptos:

Cualquiera que sea $x \in A$.
Cualquiera que sea el segmento vertical de radio ε centrado en f(x)
$\Rightarrow$ Todas las f_n excepto finitas, a lo sumo las $\upsilon = \upsilon(x, \varepsilon)$ funciones, cortan al segmento.

Ni que decir tiene que $[f_n \rightarrow_{unif.} f] \Rightarrow [(f_n) \rightarrow_{punt.} F]$ Eso antes era la "convergencia puntual". Veamos que significa gráficamente la "convergencia uniforme".

Que $(f_n) \rightarrow_{unif.} f$ significa que, dada una banda alrededor de f (en gráfica) de radio $\varepsilon > 0$, todas salvo finitas (a lo sumo, la $\upsilon = \upsilon(\varepsilon)$ primeras) las f_n, tienen su gráfica en la banda.

Ejemplo:

$f_n: x \in [0, 1] \rightarrow x^n$

Es evidente que si $0 \le x < 1$ $(f_n(x)) = (x^n) \rightarrow 0$
si $x = 1$ $(f_n(1)) = (1) \rightarrow 1$

0 si $0 \le x < 1$
Es decir, $f: x \in [0, 1] \rightarrow$ es límite puntual de (f_n)

1 si x = 1

f no es límite uniforme porque en esa banda, no está la gráfica de ni una sóla de las f_n.

Este es un ejemplo de convergencia puntual no uniforme.

Sean f_n ($n \in N$), y f funciones de $A \subset R$ en R.

Definición:

$$(f_n) \to_{\text{punt.}} f \Leftrightarrow: \forall\ x \in A, \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \upsilon \in N / n > \upsilon \Rightarrow |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$$
$$\upsilon = \upsilon\ (x, \varepsilon)$$

Definición:

$$(f_n) \to_{\text{unif.}} f \Leftrightarrow: \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \upsilon \in N / n > \upsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ (x \in A)$$
$$\upsilon = \upsilon(\varepsilon)$$

Evidentemente convergencia uniforme $\Rightarrow$ convergencia puntual, pero el recíproco es falso.

Otros ejemplos:

Esta función se conoce con el nombre de "joroba deslizante".

f: $[0, 1] \to R$

Es evidente que $\forall\ x \in [0, 1]$, $(f_n(x)) \to 0$ $_{(\text{nº cero})}$ porque $(f_n(x))$ = (…$_{\text{lo que sea}}$…, 0, 0,…$_{\text{ceros}}$…)

Así que $(f_n(x)) \to_{\text{punt.}} 0$ $_{(\text{función cero})}$.

Es evidente, igualmente, que (f_n) no $\to_{\text{unif.}} 0$.

Ni una sola de las f_n tiene su gráfica en esa banda. Para que $(f_n) \to_{\text{unif.}} 0$ todas salvo finitas, las f_n tendrán que tener su gráfica en esa banda.

Ejercicio:

Ver que:

- Si $(f_n) \to f$ (puntual o uniformemente) entonces f es única.
- Si $(f_n) \to_{\text{punt.}} f$ entonces puede ocurrir que (f_n) sea unifermemente convergente o que no lo sea. En el caso primero su límite uniforme no tiene más remedio que ser f.
- Condición necesaria y suficiente para que (f_n) sea convergente puntualmente (uniformemente) es que sea de Cauchy puntualmente (uniformemente), es decir, que:

  (puntual) $\forall\ x \in A, \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \upsilon \in N / p, q > \upsilon \Rightarrow |f_p(x)-f_q(x)| < \varepsilon$
  (uniforme) $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \upsilon \in N / p, q > \upsilon \Rightarrow |f_p(x)-f_q(x)| < \varepsilon\ (x \in A)$

  Nos hacemos las siguientes (importantísimas) preguntas:

- Supongamos que las (f_n) son continuas y que $(f_n) \to f$, ¿es continua f?

- Supongamos que las (f_n) son R-integrables y que $(f_n) \to f$, ¿es R-integrable f? Esto supuesto ¿se verifica $(\int_A f_n) \to \int_A f$?
- Supongamos que las (f_n) son derivables y que $(f_n) \to f$, ¿es derivable f? Esto supuesto ¿se verifica que $(f'_n) \to f'$?

Vamos a ver las respuestas:

Una primera repuesta a la primera cuestión la tenemos en el primer ejemplo que hemos visto de funciones continuas (f_n), donde $f_n: x \in [0, 1] \to x^n$ converge puntualmente a la función no continua:

$$f: x \in [0, 1] \to \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases} \quad \text{luego, } \begin{matrix} (f_n) \to_{\text{punt.}} f \\ f_n \text{ continua} \end{matrix} \quad \text{no} \Rightarrow f \text{ continua}$$

Naturalmente, tampoco es cierto que:

$$\begin{matrix} (f_n) \to_{\text{punt}} f \\ f_n \text{ continua} \end{matrix} \quad \text{no} \Rightarrow f \text{ no continua}$$

Nótese, que en el segundo ejemplo (joroba deslizante)

$$\begin{matrix} (f_n) \to_{\text{punt.}} f \\ f_n \text{ continua} \end{matrix} \quad , f \text{ continua.}$$

Probemos $\begin{matrix} (f_n) \to_{\text{unif.}} f \\ f_n \text{ continuas} \end{matrix} \Rightarrow f$ continua (Teorema importante y sencillo).

Segunda cuestión (la de la integrabilidad), sea (x_n) una sucesión cuyo conjunto de términos en $Q \cap [0, 1]$ (existe esa sucesión porque Q y, por tanto, $Q \cap [0, 1]$ es numerable).

Sea $(f_n) = \chi_{\{x1, ..., xn\}}$, restringida a [0, 1], la función característica del conjunto $\{x_1,..., x_n\}$, es decir,

$$f_n: x \in [0, 1] \to f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = x_1, ..., x_n \\ 0 \text{ en otro sitio.} \end{cases}$$

f_n es continua c.p.d. (en todo [0, 1] salvo en $x_1, ..., x_n$), por tanto R-integrable en [0, 1] y tal que (fácil de ver) $\int_0^1 f_n = 0$.

$$(f_n) \to_{\text{punt.}} f \text{ (función de Dirichlet), } f: x \in [0, 1] \to f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in Q \\ 0 \text{ si } x \notin Q \end{cases}$$

Por tanto, $f \notin R[0, 1]$

Así que: $\begin{matrix} (f_n) \to_{\text{punt.}} f \\ f_n \text{ R-integrable} \end{matrix}$ no $\Rightarrow$ f R-integrable.

Otro ejemplo:

La joroba deslizante y creciente

$\forall\ x \in [0, 1], (f_n(x)) = (....., 0, 0, ...) \to 0$
Por consiguiente, $(f_n) \to_{\text{punt.}} 0_{\text{función cero}}$
no $\to_{\text{unif.}} 0$
Subyacente f_n = triángulo de base 1/n y
altura n
$\int^1_0 f_n = ½\ (n \in N)$

Así que la sucesión de funciones R- integrables (f_n), convergentes puntualmente, no uniformemente, a lo función cero, pero obviamente

$(\int^1_0 f_n) = (½, ½, ½, ...) \to ½ \neq \int^1_0 0 = 0$

$½ = \lim_{n\to\infty} \int^1_0 f_n \neq \int^1_0 \lim_{n\to\infty} f_n = 0$

Interesante y sencillo ejercicio. Estudiar y representar las funciones:

f_n: $x \in [0, 1] \to nx(1\text{-}x)^n \leftarrow$ joroba deslizante no cubista.
g_n: $x \in [0, 1] \to nx^2(1\text{-}x)^n \leftarrow$ joroba deslizante y creciente no cubista.

Ejemplo relativos al tercer problema:

(¿Es derivable el límite de derivables?
Caso de serlo, ¿se verifica que la derivada del límite es el límite de las derivadas?)

Vamos a construir sencillamente
una sucesión de funciones derivables
que converge uniformemente a una
función no derivada, la
f: $x \in\ ]\text{-}1, 1[\ \to |x|$ (que es deslizante
en cero)

$$f_n: x \in\ ]-1, 1[\ \to \begin{cases} -x & \text{si } -1 < x < -1/n \\ a_n x^2 + b_n & \text{si } -1/n \le x \le 1/n \\ x & \text{si } 1/n < x < 1 \end{cases}$$

Se trata de determinar $a_n, b_n \in R$ tales que f_n sea derivable (en los puntos $-1/n$, $1/n$, porque en los demás, claro que lo es). Para que f_n sea continua en $-1/n$ y $1/n$ basta con que $\lim_{x \nearrow 1/n} f(x) = \lim_{x \searrow 1/n} f(x)$, es decir, $a_n 1/n^2 + b_n = 1/n$; $b_n = (n\text{-}a_n)/n^2$. Idéntico es $-1/n$, f_n es simétrica respecto a OY. Eso supuesto, para que f_n sea derivable en $-1/n$ y $1/n$, etc...

Osea, $(f_n) \to_{\text{unif.}} f$
no $\Rightarrow$ f derivable
f_n derivable

Más todavía, aunque f fuera derivable, no tiene porque ocurrir que $\lim_{n\to\infty}(f_n'(x)) =$
$= (\lim_{n\to\infty} f_n)'(x)$

¿Cómo podríamos construir un ejemplo?

$(f_n) \to_{\text{unif.}} 0$ (función cero)
$f'_n(0) = (1) \to 1$
$f'(0) = 0$

<u>Teorema:</u>(de convergencia uniforme y continuidad)

Sea (f_n) una sucesión de funciones de $A \subset R \to R$ que convergen uniformemente a $f: A \to R$. Si las f_n son continuas en $a \in A$, entonces también lo es f. (El límite uniforme de funciones continua es continuo).

<u>Demostración:</u>

La clave de la demostración está en la siguiente desigualdad:

$|f(x)-f(a)| \le |f(x)-f_\upsilon(x)| + |f_\upsilon(x)-f_\upsilon(a)| + |f_\upsilon(a)-f(x)|$

A la vista de eso penemos las hipótesis:

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \upsilon \in N / |f_\upsilon(y)-f(y)| < \varepsilon/3\ (y \in A)$ (la convergencia uniforme)

Como esa f_υ es continua:

$\exists\ \delta > 0 / x \in A, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon/3$

De estas hipótesis se suige que:

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 / x \in A, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$

<u>Teorema:</u>(de aproximación de Weierstrass)

Toda función continua en un compacto es límite uniforme de una sucesión de polinomios, (funciones polinómicas).

<u>Significa:</u>

Supongamos que el compacto es un
intervalo compacto y que $f: [a, b] \to R$
es continua. Entonces:
$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ P: x \in [a, b] \to a_n x^n + ... + a_0$
tal que $|f(x)-P(x)| < \varepsilon$, $(x \in [a, b])$
$\forall\ n \in N, \exists\ P_n$ polinómica tal que
$|f(x)-P_n(x)| < 1/n$, $(x \in K)$.
$f: K \subset R \to R$ continua.

Sea $K \subset R$ compacto. En C(K) (conjunto de las funciones continua en K) consideramos la métrica: $d(f, g) = \max_{x\in K} |f(x)-g(x)|$

Las sucesiones convergentes en el espacio métrico (C(K), d) son, precisamente, las sucesiones uniformemente convergentes (de Cauchy).

El teorema de ayer (los límites uniformes de funciones continuas es conyinuo) dice, exactamente, que el espacio métrico (C(K), d) es completo (tal que toda sucesión de Cauchy en él es convergente).

El teorema de aproximación de Weierstrass, dice que el conjunto de funciones polinómicas es denso en ese espacio.

Teorema:(de convergencia uniforme y integración).

Si $f_n \to_{unif.} f$ y si $f_n \in R[a, b]$, $(n \in N)$, entonces:

1.-) $f \in R[a, b]$
2.-) $(\int^b_a f_n) \to \int^b_a f$ $\qquad \lim_{n\to\infty} \int^b_a f_n = \int^b_a \lim_{n\to\infty} f_n$

Demostración:

Nos basaremos en las siguientes desigualdades:

$\sup_{x\in A} (f(x)+g(x)) \leq \sup f(x) + \sup g(x)$
$\inf_{x\in A} (f(x)+g(x)) \geq \inf f(x) + \inf g(x)$

Eso supuesto, queremos ver, en primer lugar, que:

$U(f, P)-L(f, P)$ es "tan pequeño como queramos", sin más que tomar $P \in P[a, b]$ "suficientemente fina". Pues bien, debido a aquellas desigualdades:

$U(f, P)-L(f, P) \leq U(f-f_\upsilon, P)-L(f-f_\upsilon, P) + U(f_\upsilon, P)-L(f_\upsilon, P)$

Hemos hecho $f \leq f-f_\upsilon+f_\upsilon$

A la vista de esto y de las hipótesis tenemos que:

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \upsilon \in N / |f(x)-f_\upsilon(x)| < \varepsilon/3(b-a) \Rightarrow |U(f-f_\upsilon, P)|$
$|L(f-f_\upsilon, P)| \leq \varepsilon/3$

Por otra parte, como $f_\upsilon \in R[a, b]$, $\exists\ P \in P[a, b] / U(f_\upsilon, P)-L(f_\upsilon, P) < \varepsilon/3$

Luego $U(f, P)-L(f, P) < \varepsilon$, para aquella P.

Para probar (2.-) sólo necesitamos tener en cuenta que:

$|\int^b_a f_n-\int^b_a f| = |\int^b_a f-f_n| \leq \int^b_a|f-f_n|$ y, por hipótesis, $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \upsilon \in N / n > \upsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x)-f_n(x)| < \varepsilon/(b-a)$, $(x \in [a, b]$. Luego $|\int^b_a f-\int^b_a f_n| < \varepsilon$ (c.q.d.)

Unos ejemplos, vistos ayer, muestran que $(f_n) \to_{punt.} f$
no $\Rightarrow f \in R[a, b]$
$f_n \in R[a, b]$

Más aún, aunque ocurriera que $f \in R[a, b]$, tampoco tendría que ocurrir que $(\int^b_a f_n) \to \int^b_a f$

Cuando, en vez de integral de Reiman se utiliza la más general (generalización de ella) integral de Lebesgue, se verifica el siguiente teorema:

<u>Teorema:</u>(de la convergencia dominada de Lebesgue)

Si $(f_n) \to_{punt.} f$, si f_n es L-integrable, $(n \in N)$, y si existe $g \in$ L-integrable tal que $|f_n| \leq g$, entonces:

1.-) f es L-integrable
2.-) $(\int f_n) \to \int f$

<u>Corolario:</u>

Si $(f_n) \to_{punt} f$, si $f_n \in R[a, b]$, si $f \in R[a, b]$ y si existe $g \in R[a, b]$ tal que $|f_n| \leq g$, entonces: $(\int^b_a f_n) \to \int^b_a f$

<u>Nota:</u> $f \in R[a, b]$, tenemos que meterlo como hipótesis porque (ejemplo de ayer) no se sigue de los otros. Este es el gran fallo de la integral de Reiman.

<u>Ejercicio:</u>

Véase que, como no podría ser menos, la sucesión de funciones del ejemplo de "la joroba deslizante y creciente" no está determinada por la función R-integrable.

Para la preservación de la continuidad es esencial la convergencia uniforme. Para la de la integrabilidad, basta, en esencia (véanse los teoremas anteriores, con conceptos más fuertes de integral), con la convergencia puntual. Para la diferenciabilidad, no basta ni con la convergencia ni con la convergencia uniforme (véase ejemplo de ayer).

Nótese que $D[a, b] \subset C[a, b] \subset R[a, b]$

<u>Teorema:</u>(de convergencia uniforme y derivación).

Sea (f_n) una sucesión de funciones derivable en $]a, b[$

Si $(f'_n) \to_{unif} f$ y si existe $c \in]a, b[$ tal que $(f_n(c))$ es convergente, entonces:

1.-) $(f_n) \to_{unif} f$
2.-) f es derivable y f' = 0, es decir, $\lim_{n\to\infty} f'_n = (\lim_{n\to\infty} f_n)'$

<u>Demostración:</u>

1.-) Veremos que (f_n) es uniformemente de Cauchy, es decir que $|f_p(x)-f_g(x)|$ es "tan pequeño como queramos" sin más que tomar p y q "suficientemente grandes". Pues bien, tenemos que:

$|f_p(x)-f_q(x)| \leq |(f_p-f_q)(x)-(f_p-f_q)(c)| + |f_p(c)-f_q(c)| =_{TVM} |(f_p-f_q)'(z)|\ |x-c| + |f_p(c)-f_q(c)|_{(z \text{ entre } x,c)}$

A la vista de eso aplicamos las hipótesis:

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \upsilon_1 \in N$ / p, q $> \upsilon_1 \Rightarrow |f_p(c)-f_q(c)| < \varepsilon/2$

$\exists\ \upsilon_2 \in N$ / p, q $> \upsilon_2 \Rightarrow |f_p(c)-f_q(c)| < \varepsilon/2(b-a)$, $(z \in\ ]a, b[)$

Por tanto, p, q $>$ máx $(\upsilon_1, \upsilon_2) \Rightarrow |f_p(x)-f_q(x)| < \varepsilon$ (c.q.d.)

2.-)Queremos ver que, $\forall\ x \in\ ]a, b[$, $|\{[f(y)-f(x)]/(y-x)\}-g(x)|$ es "tan pequeño como queramos", sin más que tomar $y \in\ ]a, b[$ "suficientemente próxima" a x.

$|\{[f(y)-f(x)]/(y-x)\}-g(x)| \leq |\{[f(y)-f(x)]/(y-x)\} - \{[f_\upsilon(y)-f_\upsilon(x)]/(y-x)\}|^{(i)} +$
$+ |\{[f_\upsilon(y)-f_\upsilon(x)]/(y-x)\}-f_\upsilon'(x)|^{(ii)} + |f_\upsilon'(x)-g(x)|^{(iii)}$

Que (ii) e (iii) son pequeños, está claro.

Veamos (i). Por el T.V.M. $|\{[(f_n-f_\upsilon)(y)-(f_n-f_\upsilon)(x)]/(y-x)\}| = |f_n'(z)-f_\upsilon'(z)|$ Por ser f_n' uniforme de Cauchy $\exists\ \upsilon \in N$ / n $> \upsilon \Rightarrow |A| <$

Luego (i) $< \varepsilon/3$ (porque $(f_n) \to_{\text{unif.}} f$).

(iii) $< \varepsilon/3$ (por lo mismo)

Finalmente, como f_υ es derivable:

$\exists\ \delta > 0$ / $y \in\ ]a, b[$; $0 < |x - y| < \delta \Rightarrow$ (ii) $< \varepsilon/3$.

<u>SERIES FUNCIONALES (series cuyos términos son funciones)</u>

Vamos a tratar con series de la forma $^\infty\sum_{n=1} f_n$ donde cada f_n es una función de $A \subset R$ en R.

Naturalmente, diremos que la serie es sumable o convergente (en el sentido que sea) cuando sea convergente (en tal sentido) la sucesión de sumas parciales: $(f_1, f_1+f_2, f_1+f_2+f_3, ...)$.

Así, la serie $^\infty\sum_{n=1} f_n$ es (puntualmente o uniformemente) sumable cuando la sucesión de sumas parciales $(f_1, f_1+f_2, f_1+f_2+f_3, ...)$ sea (puntualmente/uniformemente) convergente.

Condición necesaria y suficiente para ello es que sea (puntualmente, uniformemente) de Cauchy, es decir, tal que:

$\forall\ x \in A, \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \upsilon \in N$ / $q > p > \upsilon \Rightarrow |^q\sum_{n=p} f_n(x)| < \varepsilon$
$\upsilon = \upsilon(x, \varepsilon)$

o bien,

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \upsilon \in N$ / $q > p > \upsilon \Rightarrow {}^q\sum_{n=p} f_n(x)| < \varepsilon$, $(x \in A)$
$\upsilon = \upsilon(\varepsilon)$

Se dice que $^{\infty}\sum_{n=1} f_n$ es (puntual o uniforme) absolutamente sumable cuando lo se la serie $^{\infty}\sum_{n=1}|f_n|$

De los teoremas que hemos visto para sucesiones funcionales y del hecho de que la suma (finita, naturalmente) de funciones continuas, o derivables o integrables tenga al mismo carácter, así como de las igualdades:

$(f+g)' = f' + g'$, $\int^b_a(f+g) = \int^b_a f + \int^b_a g$

se siguen los siguientes teoremas para series funcionales.

Teorema:

Sean f_n: $A \subset R \to R$

Si todas las f_n son continuas en $a \in A$ y si $^{\infty}\sum_{n=1} f_n$ es uniformemente sumable, entonces su suma $f = {^{\infty}\sum_{n=1}} f_n$ es continua en a. (Utilizaremos la misma expresión para la serie y su suma).

Demostración: (ejercicio).

Por ejemplo, pusimos ejemplos de sucesiones (f_n) cuyos términos son funciones continuas, que convergen "puntualmente" a una función no continua.

Con tal ejemplo, podemos poner inmediatamente un ejemplo para "series".

$^{\infty}\sum_{n=1} g_n$, donde $g_n=f_{n+1}-f_n$

La sucesión de sumas parciales de $\sum g_n$ es: $(f_2-f_1, f_3-f_1, f_4-f_1,......) \to_{punt} f-f_1$.

Teorema:

Si $f_n \in R[a, b]$, $(n \in N)$, y si $^{\infty}\sum_{n=1} f_n$ es uniformemente sumable, entonces:

$f = {^{\infty}\sum_{n=1}} f_n \in R[a, b]$
$\int^b_a {^{\infty}\sum_{n=1}} f_n = {^{\infty}\sum_{n=1}} \int^b_a f_n$

Demostración: (ejercicio)

Teorema:

Si f_n: $]a, b[\to R$, $(n \in N)$, son derivables, si $^{\infty}\sum_{n=1} f'_n$ es uniformemente sumable y si existe $c \in]a, b[$ tal que $^{\infty}\sum_{n=1} f_n(c)$ es sumable, entonces $^{\infty}\sum_{n=1} f_n$ es uniformemente sumable y $^{\infty}\sum_{n=1} f'_n = ({^{\infty}\sum_{n=1}} f_n)'$

Demostración: (ejercicio)

Proposición:(Criterio Mayorante de Weierstrass)

Si la serie ${}^{\infty}\sum_{n=1} f_n$, donde $f_n: A \subset R \rightarrow R$, es tal que $|f_n(x)| \leq M_n$ es sumable, entonces la serie dada es absoluta y uniformemente sumable.

Demostración: (ejercicio)

Ejercicio:

Ver, usando lo anterior, que la serie ${}^{\infty}\sum_{n=1}|f_n|$ es uniformemente de Cauchy.

Hay dos tipo de series funcionales que importan al Análisis.

(1) Las series de potencias, que son series ${}^{\infty}\sum_{n=1} f_n$ donde $f_n: x \in R \rightarrow c_n(x-a)^n$, es decir,
series que escribiremos simplemente: ${}^{\infty}\sum_{n=1} c_n(x-a)^n$ ("polinomios infinitos" ordenados en potencias de x-a).

(2) Las series trigonométricas (o de Fourier) que son aquellas en las que
$f_n: x \in R \rightarrow a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx$

Simplemente,

${}^{\infty}\sum_{n=1}(a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx)$

- Las funciones que son suma de una serie de potencias son las llamadas funciones analíticas, las funciones más regulares y perfectas del Análisis.

- Por otra parte, en un sentido difícil de precisar en este momento, prácticamente todas las funciones (todas las que son "concebibles") es suma de una serie trigonométrica.

¿Para qué valores de $x \in R$ es sumable la serie de potencias ${}^{\infty}\sum_{n=1} c_n(x-a)^n$?

Si aplicamos el criterio de la raíz, la serie es:

1.-) Absolutamente sumable si $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|c_n(x-a)^n|} < 1$
2.-) No sumable si $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|c_n(x-a)^n|} > 1$
3.-) Cualquier cosa si $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|c_n(x-a)^n|} = 1$

- Caso de absoluta sumabilidad:

$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|c_n(x-a)^n|} = |x-a| \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|c_n|} < 1$

Es decir, la serie es absolutamente sumable cuando:

$|x-a| < \{1/[\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|c_n|}]\}$

Convenimos que esto es $+\infty$ cuando $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|c_n|} = 0$
0 cuando $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|c_n|} = +\infty$

Definición:

Se llama radio de convergencia de la serie al número real ≥ 0 (ó $+\infty$):

$r = \{1/[\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|c_n|}]\}$

Lo que hemos obtenido es que la serie es:

- Absolutamente sumable para $x \in\ ]a\text{-}r, a\text{+}r[$
- No sumable para $x \in [a\text{-}r, a\text{+}r]^c$
- Cualquier cosa para $x = a\text{-}r$, $x = a\text{+}r$

Esto que hemos visto es el <u>Teorema de Cauchy-Hadamard.</u>

<u>Ejemplos:</u>

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ $\quad r = \{1/[\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{1}]\} = 1$

- Absolutamente sumable en $]-1, 1[$
- No sumable en $[-1, 1]^c$
- Veamos en $x = -1$, $x = 1$. Evidentemente no es sumable en ninguno de los dos puntos.

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ $\quad r = \{1/[\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{1/n}]\} = 1$ $(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1)$

- Absolutamente sumable en $]-1, 1[$
- No sumable en $[-1, 1]^c$
- Sí sumable en $x = -1$
- No sumable en $x = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^2$ $\quad r = \{1/[\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{1/n^2}]\} = 1$ $(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1)$

- Absolutamente sumable en $]-1, 1[$
- No sumable en $[-1, 1]^c$
- Sí sumable en $x = -1$ y $x = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n!$ $\quad r = \{1/[\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{1/n!}]\} = +\infty$ $(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty)$

- Absolutamente sumable en todo R
- Su suma es e^x (ya se verá).

$\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$ $\quad r = \{1/[\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{n!}]\} = 0$

- Sólo es sumable en $x = 0$

Del teorema Mayorante de Weierstrass obtenemos inmediatamente el siguiente resultado:

<u>Proposición:</u>

Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ es una serie de potencias con radio de convergencias, $r > 0$ y si $0 < s < r$, entonces la serie es uniformemente (y absolutamente) sumable en $[a\text{-}s, a\text{+}s]$.

Equivalentemente la serie es uniformemente sumable en todo compacto contenido en el interior de un intervalo de convergencia.

Demostración:

Basta tener en cuente que, en esas hipótesis la serie armónica $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|s^n$ es sumable y tal que $|c_n(x-a)^n| \leq |c_n|s^n$, cuando $x \in [a-s, a+s]$ (Criterio mayorante de Weierstrass)

Como consecuencia de esto, y de los teoremas de convergencia $r > 0$. Podemos definir, entonces, la "función suma".

$f: x \in]a-r, a+r[\rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$

Como la serie es uniformemente sumable en $]a-s, a+s[$, con $0 < s < r$.

Supongamos que la serie de potencias:

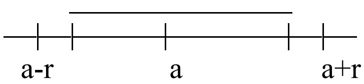
$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$

tiene radio de convergencia $r > 0$ y consideramos la función

$f: x \in]x-r, x+r[\rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$

Como para todo $0 < s < r$ la serie es uniforme (y absolutamente) sumable, resulta que f es continua en todo $]a-s, a+s[$, $(a < s < r)$ y, por tanto, en $]a-r, a+r[$.

Más todavía:



Consideremos la serie que resulta de derivar término a término la serie dada, $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$. El radio de convergencia de esta serie es:

$r = \{1/[\lim_{n\rightarrow\infty} \sup \sqrt[n-1]{n|c_n|}]\} = \{1/[\lim_{n\rightarrow\infty} \sup \sqrt[n]{|c_n|}]\}$

Por consiguiente, la serie dada y la serie derivada término a término son uniformemente sumables en cualquier $]a-s, a+s[$, con $0 < s < r \Rightarrow$ f es derivable, $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$ en $]a-r, a+r[$

Reiterando el argumento, lo que tenemos es que f es indefinidamente derivable en $]a-r, a+r[$ y

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$
$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$
$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n(x-a)^{n-2}$, etc.......

Luego,

$c_0 = f(a)$; $c_1 = f'(a)/1!$; $c_2 = f''(a)/2!$; ...... ; $c_n = f^n(a)/n!$

Es decir, la serie de potencias cuya suma es f, es la serie de Taylor alrededor de a de f.

Definición:

Una función $f: A \subset R \rightarrow R$ se dice analítica en $a \in A$ si existe $s > 0$ tal que
$f(x) = {}^{\infty}\sum_{n=0} c_n(x-a)^n$, $(x \in]a-s, a+s[)$ (*)

Notas:

1.-) Forzosamente f es indefinidamente diferenciable en a y $c_n = f'^n(a)/n!$
2.-) Aquel $s > 0$ es, naturalmente, menor que el radio de convergencia de la serie.
3.-) f puede ser indefinidamente diferenciable en a y no ser analítica en a (véase ej.)
4.-) Se puede probar (no lo hacemos) que si f es analítica en a y se verifica aquello (*), entonces también es analítica en, por lo menos, todo $b \in]a-s, a+s[$

Ejemplos:

La función $f: x \in R \rightarrow f(x) = \begin{cases} e^{-x^{\wedge}-2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es indefinidamente diferenciable en todo $x \in R$ (y analítica en todo $x \neq 0$) pero no es analítica en 0.

No es analítica en 0 porque
$f(0) = f'(0) = f''(0) = ... = 0$
Es decir, la serie de Taylor de f
alrededor de 0 es la serie cero,
cuya suma, obviamente, no coincide
con f(x) en ningún entorno de cero.

Algunos ejemplos:

${}^{\infty}\sum_{n=0} x^n/n!$ Tiene radio de convergencia $r = +\infty$. Es decir, es absolutamente sumable para todo $x \in R$ y es uniformemente sumable en todo acotado de $A \subset R$.

La serie que se obtiene de ella derivando término a término es ella misma:

$1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + ...$
$1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + ...$

Es decir, si escribimos $f(x) = {}^{\infty}\sum_{n=0} x^n/n!$ Tenemos que $f'(x) = f(x)$; $(x \in R)$.

Vamos a ver lo que significa a^b con $a \in R^+$, $b \in R$. Sabiendo eso y alguna cosa más sabremos lo que es la función $f: x \in R \rightarrow e^x$ y podremos ver que f es derivable en todo punto y tal que $f'(x) = f(x)$ $(x \in R)$. Es más, podremos ver que aquella serie de potencias, es precisamente, la de Taylor de esta función alrededor de cero, y también que, la suma de esta serie, $\forall\ x \in R$, es e^x.

¿Qué es a^b, con $a \in R^+$ y $b \in R$?

Sabemos bien lo que es si $b \in N$, $a^b = a \cdot ...$b veces$... \cdot a$. Es evidente que para $b, c \in N$ $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$; $(a^b)^c = a^{bc}$ (*).

Si $b \in Z$

- Lo mismo si $b > 0$
- $a^0 = 1$
- $a^b = 1/a^{-b}$, si $b < 0$

Es fácil ver que con esta definición permanecen las fórmulas vistas en el apartado anterior.

Si $b \in Q$, $b = p/q$, $(p \in Z, q \in N\backslash\{0\})$, por definición $a^{p/q} = (a^p)^{1/q}$ donde esto es la única raíz real de orden q que sabemos que tiene el número real a^p.

Es fácil ver que si $p/q = p'/q'$ $(pq' = qp')$, entonces $(a^p)^{1/q} = (a^{p'})^{1/q'}$ y se mantiene lo mismo que lo que se dijo en el primer apartado.

Nos falta definir a^b para $b \in R$. Sabemos que todo $b \in R$ es límite de algún (de infinito) .... de racionales.

$(b_n) \to_{bn \in Q} b$. Haciendo uso de (*) y probando que $(b_n) \to 0$, entonces $(a^{bn}) \to 1$, obtenemos que si (b_n) es convergente, entonces (a^{bn}) también lo es y que si $(b_n) \sim (b'_n)$, $[b_n - b'_n] \to 0$ entonces (a^{bn}) converge a lo mismo que $(a^{b'n})$. Este límite es, por definición, a^b.

Finalmente, se prueba que permanece (*).

Con análogas herramientas se puede probar que la función:

$f: x \in R \to a^x$, $(a > 0)$, es derivable en todo punto y tal que $f'(x) = a^x \log a$

Con lo que acabamos de decir sabemos que:

$f: x \in R \to e^x$

es indefinidamente diferenciable en todo punto y que $f(x) = f'(x)$. Cabe hablar, por tanto, de la serie de Taylor de esta función alrededor de (por ejemplo) cero.

A esa serie de Taylor le puede ocurrir:

1.- Que sea o que no sea sumable en un cierto punto $x \in R$.
2.- Supuesto que sea sumable, que su suma sea o no sea f(x)

$f(0) = e^0 = 1$ $\qquad$ $f(0) + [f'(0)/1!](x-0) + [f''(0)/2!)(x-0)^2 + ... = 1 + x/1! + x^2/2! + ...$

$f'(0) = e^0 = 1$

Esa suma es sumable $\forall\ x \in R$ porque tiene radio de convergencia $+\infty$ (criterio de la raíz).

$x \in R$, $\lim_{n\to\infty} {}^n\sqrt{x^n/n!} = 0 \Rightarrow$ absolutamente sumable $|x| \lim_{n\to\infty} [1/{}^n\sqrt{n!}] = 0$

El problema es saber para que valores de x la suma de la serie es, precisamente, e^x (Veremos que para todos). ¿Cómo lo vemos?

Contamos para ello con el Teorema Global de Taylor:

$\forall\ x$, $\exists$ z entre 0 y x / $e^x = 1 + x/1! + ... + x^n/n! + [e^z/(n+1)!]\, x^{n+1} \to_{n\to\infty} 0$

Basta ver que ese resto tiende a cero cuando $n \to \infty$.

$x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + ... = {}^{\infty}\sum_{n=0} [(-1)^n/(2n+1)!]x^{2n+1}$ (*)

Es evidente que si la serie ${}^{\infty}\sum_{n=0} x^n/n!$ Tiene radio de convergencia $+\infty$, con mayor razón la tiene esta.

Absolutamente sumable en todo R.

Uniformemente sumable en todo $A \subset R$, acotado.

Derivando término a término obtenemos:

$1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + ...$ (**)

Por supuesto el mismo radio de convergencia $+\infty$.

Volviendo a derivar término a término:

$-x + x^3/3! - x^5/5! + x^7/7! + ...$; es decir, "menos" la primera.

Hasta ahora no habíamos definido "formalmente" lo que era "sen x".

Geométricamente, sen x se calcula así:

Dado $x \in R$, dada la circunferencia de radio 1, orientada (con un sentido de giro).

Para arriba positivo
Para abajo negativo.

$f: x \in R \rightarrow \text{sen } x$ dom f = R ; Im f = [-1, 1]
Con argumentos geométricos, de nuevo, no es difícil ver que $\lim_{x \to 0} [(\text{sen } x)/x] = 1$

$$1 \leq [(\text{sen } x)/x] \leq [(\text{tg } x)/x]$$

A priori de ahí se sigue que la función serie es derivable y su derivada es la función coseno.

$x \in R \rightarrow \cos x$ (Verlo a partir de la definición de derivada).

Las funciones seno y coseno son indefinidamente derivables en todo R, si calculamos las series de Taylor de seno y coseno alrededor de cero, veremos que son (*) (**), sen'x = cos x y cos'x = - sen x, (las dos series de antes), cuyo radio de convergencia es $+\infty$. Por tanto, ambas series definen sendas funciones en R.

¿Son las sumas de esas series, sen x y cos x?

Para saberlo utilizamos el Teorema Global de Taylor, que dice, para la función sen 0, que $\forall$ n > 0, $\exists$ z entre 0 y x tal que:

Sen x = x – $x^3/3!$ + ... $\pm$ $x^{2n+1}/(2n+1)!$ + g(z), g(z) = $\pm$ [cos z/(2n-2)!]x^{2n-2} ocurre que g(z) $\to$ 0 cuando n $\to$ +∞, luego sen x = $\sum$....., $\forall$ x $\in$ R.

TEMA 4
CÁLCULO DE PRIMITIVAS

Regla de Barrow:

Si f $\in$ R[a, b] y si F: [a, b] $\to$ R es una primitiva de f entonces:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Por definición F: [a, b] $\to$ R es una primitiva de f: [a, b] $\to$ R si:

F es continua en [a, b].
F es diferenciable en]a, b[
F'(x) = f(x), (x $\in$]a, b[)

Es decir, el cálculo de primitivas, también llamado "Integración indefinida" no es otra cosa que el "cálculo antideferendial".

Cosas que sabemos:

- Si f tiene discontinuidad de salto, entonces no tiene primitiva (puede tener primitivas a trozos).

$\int^b_a f = \int^c_a f + \int^b_c = F(c) - F(a) + G(b) - G(c)$ donde f es la primitiva en [a, c] y G en [c, b]

- También sabemos que las derivadas de funciones elementales (potencial, exponencial, logarítmica, seno, arco seno y las que se obtienen operando y componiendo estas), son siempre elementales.

- Sin embargo, no es cierto que las funciones elementales tengan, en general, primitivas elementales. (Una función elemental no es, en general, derivada de otra elemental). (Si f es continua en [a, b], $F(x) = \int^x_a f$ es una primitiva de f. Ahora bien, f elemental no $\Rightarrow$ F elemental).

Cálculo de primitivas:

Dada f: $[a, b] \to R$ se trata de encontrar F: $[a, b] \subset R \to R$ continua en [a, b], derivable en]a, b[y tal que $F'(x) = f(x)$, ($x \in$]a, b[).

Algunas proposiciones sencillas:

1.-) Sea F una primitiva de f. Entonces G es otra primitiva de f si sólo si $F - G = cte$. (Basta conocer una primitiva de una función en un intervalo para conocerlas todas).

Demostración:

Es evidente, por una parte, que si F es una primitiva de f, entonces lo es también $G = F + cte$. Recíprocamente, como consecuencia del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial, si F y G son primitivas de f entonces F-G es una primitiva de 0 y una función continua en (a, b) y tal que su derivada es 0, en todo punto, es cte.*

*Nota: Véase que es último es falso si hablamos de primitivas en conjuntos que no sean intervalos. (lo que sí es cierto es que F-G es cte, en cada componente conexa del conjunto).

Ejemplo:

f: $x \in R \setminus \{0\} \to 1/x^2$

Funciones cuya derivada es f:

$$F: x \in R \setminus \{0\} \to \begin{cases} -1/x + C & \text{si } -\infty < x < 0 \\ -1/x + D & \text{si } 0 < x < +\infty \end{cases}$$

La notación habitual para el conjunto de las primitivas de f es:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

De las "reglas del Cálculo Diferencial" resultan:

2.-) De lo relativo a la derivada de la suma y el producto por escalares:

$\int[\lambda_1 f_1(x) + ... + \lambda_n f_n(x)]\, dx = \lambda_1\int f_1(x)\, dx + ... + \lambda_n\int f_n(x)\, dx = \lambda_1 F_1(x) +...+ \lambda_n F_n(x) + C$

Método de integración (cálculo de primitivas) por descomposición:

Ejemplo:

$\int(3x^3 + 2x - 1)\, dx = ¾\, x^4 + x^2 - x + C$

3.-) De lo relativo a la derivada del producto resulta es método de integración por partes:

$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx$

que es muy frecuente ver escrito así:

$\int u\, dv = uv - \int v du$

Esto es debido a que:

$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow f(x)g(x) = \int(fg)'(x)dx = \int f'(x)g(x)\, dx + \int f(x)g'(x)\, dx$

Ejemplos:

a.-) $\int x\, e^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + C$

$u = x$	$du = dx$
$dv = e^x\, dx$	$v = e^x$

b.-) $\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2 \int x \operatorname{sen} x\, dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2[-x \cos x + \int \cos x\, dx] =$
$= x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C$

$u = x^2$	$du = 2x\, dx$	$u = x$	$du = dx$
$dv = \cos x\, dx$	$v = \operatorname{sen} x$	$dv = \operatorname{sen} x\, dx$	$v = -\cos x$

c.-) $\int \log x\, dx = x \log x - \int 1\, dx = x \log x - x + C$

$u = \log x$	$du = 1/x\, dx$
$dv = dx$	$v = x$

d.-) $\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x + C$

$u = e^x$	$du = e^x\, dx$	$u = e^x$	$du = e^x\, dx$
$dv = \cos x\, dx$	$v = \operatorname{sen} x$	$dv = \operatorname{sen} x\, dx$	$v = - \cos x$

4.-) La regla de la cadena, por último, da lugar al llamado método de integración (cálculo de primitivas) por cambio de variable. La regla de la cadena decía que:

$(f \circ g)'\, (x) = f'[g(x)]g'(x)$ de donde:

$(f \circ g)\, (x) + C = \int(f \circ g)'\, (x) = \int f'[g(x)] + g'(x)\, dx$

¿Cómo se utiliza esto? Cuando queremos calcular $\int f(x)\, dx$ y no sabemos, pero si podemos encontrar una g tal que si sabemos calcular $\int f[g(x)]g'(x)\, dx = H(x) + C$. Pues bien, de acuerdo con lo anterior, $H(x) = (f \circ g)\, (x)$, donde $F'(x) = f(x)$ luego $F(x) = (H \circ g^{-1})\, (x)$ con esto deshacemos el cambio de variable $y = g(x)$.

Otra manera de hacer 4.-), con distinta notación:

$F'(x) = f(x)$
$(F \circ g)'(x) = f[g(x)]g'(x)$ de donde
$(F \circ g)(x) + C = \int (F \circ g)'(x) = \int f[g(x)]g'(x)\,dx$

Queremos calcular $\int f(x)\,dx$ y no sabemos. No obstante, podemos llamar $F(x)$ a una desconocida primitiva.

Sin embargo, somos capaces de encontrar g (inyectiva) tales que si sabemos calcular $H(t) = f[g(t)]g'(t)\,dt$ (Hemos hecho el cambio de variable $x = g(t)$, $dx = g'(t)\,dt$).

Sabemos, entonces, por la regla de la cadena que:

$H(t) = (F \circ g)(t) \Rightarrow (H \circ g^{-1})(x) = F(x)$.

<u>Ejercicio:</u>

Buscar por ahí problemas de integración por cambio de variable y hacerlos.

Integración (Cálculo de primitivas) de <u>funciones racionales:</u>

$\int [P(x)/Q(x)]\,dx$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

$P(x) = a_m x^m + ... + a_1 x + a_0$
$Q(x) = b_n x^n + ... + b_1 x + b_0$

Al ser $Q(x)$ un polinomio de coeficientes reales sabemos que con cada raíz compleja (no real) tiene a su conjugado y con la misma multiplicidad. Es decir, si $c + di$, $(d \neq 0)$ es raíz de multiplicidad t de $Q(x)$, también $c - di$ es raíz con multiplicidad t.

Pues bien, ocurre que existe $A_1, ..., A_r, B_1, ..., B_s \in C$ tales que:

$$(**)[P(x)/Q(x)]=[A_1/(x-a)]+[A_2/(x-a)^2]+...+[A_r/(x-a)^r]+[B_1/(x-b)]+[B_2/(x-b)^2]+...+[B_s/(x-b)^s]$$

Donde $A_1, ..., A_r$ es real si a es real.
$A_1, ..., A_r$ es complejo si a es complejo.

Más aún, si b es el conjugado de a (por lo que $r=s$), entonces A_i es el conjugado de B_i $(i = 1, ..., r)$. Esto es una proposición que aceptamos sin demostrar.

El siguiente problema es: ¿Cómo calcular los $A_1, A_2, ...$?

Primera forma:

"Coeficientes indeterminados".

Escribimos (**), con $A_1, A_2, ...$, "desconocidos" (indeterminados) y hacemos la suma siguiente:

$[P(x)/Q(x)] = \{[A_1(x-a)^{r-1}(x-b)^s + A_2(x-a)^{r-2}(x-b)^s + ...]/[(x-a)^r(x-b)^s]\}$

Ahora bien, $Q(x) = q_n(x-a)^r(x-b)^s .... \Rightarrow P(x) \equiv q_n$ (numerador)

Esto da lugar a , exactamente, n ecuaciones lineales con n incógnitas (A_1, A_2, ...).

Este sistema resultante tiene soluciones únicas.

Ejemplo:

$[(x-2)/(x+1)(x+2)x^2] = [A/(x+1)] + [B/(x+2)] + [C/x] + [D/x^2]$ (*)

El denominador es un polinomio de grado 4, que tiene raíces: -1 simple, -2 simple y 0 doble.

1 como coeficiente del término de mayor grado.

Se trata de determinar A, B , C, D, $\in$ R. Por "coeficientes indeterminados", tenemos que:

$x-2 = A(x+2)x^2 + B(x+1)x^2 + C(x+2)(x+1)x + D(x+1)(x+2)$

coeficientes

x^3: $0 = A + B + C$
x^2: $0 = 2A + B + 3C + D$
x : $1 = 2C + 3D$
x^0: $-2 = 2D$

$D = -1$
$C = 2$
$2A + B = -5 \qquad A = -3$
$A + B = -2 \qquad B = 1$

$\int[(x-2)/(x+1)(x+2)x^2]\, dx = \int[-3/(x+1)]\, dx + \int[1/(x+2)]\, dx + \int[2/x]\, dx + \int[-1/x^2]\, dx =$
$= -3\log|x+1| + \log|x+2| + 2\log|x| + 1/x + C$
Una forma más rápida de calcular esos coeficientes, es la siguiente:

Para calcular A, multiplicamos ambos mienbors de (*) por (x+1) y hacemos x =-1.

$[(x-2)/(x+2)x^2]_{x=-1} = A \qquad A = -3$

B lo mismo pero por (x+2) y hacemos x = -2.

$[(x-2)/(x+1)x^2]_{x=-2} = B \qquad B = 1$

Para calcular D multiplicamos ambos miembros por x^2 y hacemos x = 0

$[(x-2)/(x+1)(x+2)]_{x=0} = D \qquad D = -1$

Finalmente, para calcular C derivamos en:

$[(x-2)/(x+1)(x+2)] = A\, [x^2/(x+1)] + B\, [x^2/(x+2)] + Cx + D$ y hacemos x = 0

$\{[(x+1)(x+2) – (x-2)(x+1+x+2)]/(x+1)^2(x+2)^2\}_{x=0} = C \qquad C = 2$

Ya sabemos descomponer una fracción propia en suma de fracciones simples. Nos falta saber como son las primitivas "inmediatas", de las fracciones simples.

Hay cuatro tipos posibles de fracciones simples:

1.-) $A/(x-a)$, $(a, A \in R)$

2.-) $A/(x-a)$, $(a, A \in C)$

3.-) $A/(x-a)^r$, $(a, A \in R)$, $r = 1, 2, ...$

4.-) $A/(x-a)^r$, $(a, A \in R)$, $r = 2, 3, ...$

1.-) $\int[A/(x-a)]\, dx = A \log |x-a| + K$

3.-) $\int[A/(x-a)^r]\, dx = A \int(x-a)^{-r}\, dx = [-A/(r-1)](x-a)^{-r+1} = [A/(r-1)(x-a)^{r-1}] + K$

Más complicados son los casoso 2 y 4 en que aparecen números complejos.

2.-) Sabemos que si un polinomio con coeficientes reales tiene una raíz compleja (no real) entonces también tiene como raíz a su conjugada y con la misma multiplicidad. Además, los numeradores, de las fracciones homólogas correspodientes a esas raices, son conjugadas. Es decir, si aparece la fracción $[(B + Ci)/(x-b-ci)^r]$ también aparece la $[(B-Ci)/(x-b+ci)^r]$ donde $r=1$. Sumando ambos factores:

$$[(B + Ci)/(x-b-ci)] + [(B - Ci)/(x-b+ci)] = [(2B(x-b) - 2Cc)/(x-b)^2 + c^2 =$$
$$= B\{[2(x-b)]/[(x-b)^2+c^2]\} - 2c\{[1/C]/[1+((x-b)/c)^2]\} =$$
$$= B \log (x-b)^2 + c^2 - 2C \operatorname{arctg} [(x-b)/c] + K$$

$$\boldsymbol{\int [f'(x)/f(x)]\, dx = \log |f(x)| + K}$$

$$\boldsymbol{\int [f'(x)/(1+f^2(x))]\, dx = \operatorname{arctg} f(x) + K}$$

4.-) Algo análogo a lo anterior, sólo aparece "parte racional" cuando hay raíces múltiples.

<u>Método de Hermite:</u>

Sirve para calcular "directamente" la parte racional de una integral de una función racional (por tanto, sólo cuando el denominador tiene raíces múltiples). Incluso sin conocer raíces del denominador (evita los casos 2 y 4).

Se basa en lo siguiente:

a (real o compleja) es raíz de orden r de $Q(x)$ si y solo si es también raíz de orden r-1 de $Q'(x)$.

Nota: Considerese lo siguiente:

$$Q(x) = b_n(x-a)^r(x-b)^s \;.... \Rightarrow Q'(x) = b_n r(x-a)^{r-1}(x-b)^s \;..... + b_n s(x-a)^r(x-b)^{s-1}...... + ...$$

Por consiguiente si $Q(x) = b_n(x-a)^r(x-b)^{s-1}$........mcd $(Q(x), Q'(x)) = (x-a)^{r-1}(x-b)^{s-1}$.....

$[Q(x)/\text{mcd}(Q(x),Q'(x))] = b_n(x-a)(x-b)$.......

Este polinomio tiene las mismas raices multiples de $Q(x)$ con orden una unidad inferior.

Este polinomio tiene exactamente las mismas raíces que Q(x) pero todas simples.

$\int[P(x)/Q(x)]\,dx = [M(x)/(x-a)^{r-1}(x-b)^{s-1}...] + \int[N(x)/(x-a)(x-b)...]\,dx$ (**)

$[M(x)/(x-a)^{r-1}(x-b)^{s-1}...]$ Viene de:

$\int[A_2/(x-a)^2\,dx + \int[A_3/(x-a)^3]\,dx + ... + \int[A_r/(x-a)^r]\,dx + ...$ (*)

$\int[N(x)/(x-a)(x-b)...]\,dx$ Viene de:

$\int[A_1/(x-a)]\,dx + \int[B_1/(x-b)]\,dx + ...$

Al calcular estas integrales (*), el denominador común del resultado es $(x-a)^{r-1}(x-b)^{s-1}$

Por otra parte, el denominador común de:

$[A_1/(x-a)] + [B_1/(x-b)] + ...$ es $(x-a)(x-b)......$

Pues bien, el método de Hermite, consiste en poner M(x) y N(x) como polinomios genéricos (interminados) de grado una unidad inferior al de su correspondiente denominador y calcular esos coeficientes indeterminados derivando ambos miembros:

$$[P(x)/Q(x)] = \{[M'(x)(x-a)^{r-1}(x-b)^{s-1} ..... - M(x)(\text{denominador})']/(\text{denomidor})^2\} +$$
$$+ [N(x)/(x-a)(x-b)]$$

Sumando lo de la derecha y quitando denominadores e identificando coeficientos, obtenemos tantas ecuaciones como incógnitas (coeficientes incógnitos) y, se puede probrar, que tiene solución única. Es decir, existen unos únicos M(x) y N(x) con grado menor que el correspondiente denominador, tales que (**).

La ventaja de este métododo es que podemos conocer la parte racional de la integral sin conocer las raíces del denominador. Basta tener en cuenta que:

$$Q(x) = (x-a)^r(x-b)^s .... \Rightarrow \begin{cases} \text{m.c.d. } (Q(x), Q'(x)) = (x-a)^{r-1}(x-b)^{s-1} \\ [Q(x)/\text{m.c.d.}(Q(x), Q'(x))] = (x-a)(x.-b) \end{cases}$$

<u>Ejemplo:</u>

$\int[(3x^2+1)/(x^2+1)^2x^3(x-1)]\,dx$

El denominador tiene las siguientes raíces:

i de multiplicidad 2
-1 de multiplicidad 2
0 de multiplicidad 3
1 de multiplicidad 1

$$\int[(3x^2+1)/(x^2+1)^2x^3(x-1)]\,dx = [(Ax^3+Bx^2+Cx+D)/(x^2+1)x^2] +$$
$$+ \int[(Ex^3+Fx^2+Gx+H)/(x^2+1)x(x-1)]dx$$

$$[(3x^2+1)/(x^2+1)^2x^3(x-1)] =$$
$$= \{[(3Ax^2+2Bx+C)(x^2+1)x^2 - (Ax^3+Bx^2+Cx+D)(2x^3+2x^2+2x)]/(x^2+1)^2x^4\} +$$
$$+ [(Ex^3+Fx^2+Gx+H)/(x^2+1)x(x-1)]$$

$x(3x^2+1) = [1^{er}\text{numerador}](x-1) + [2^{o}\text{ numerador}](x^2+1)x^3$

$0 =$ coeficientes x^7
$0 =$ coeficientes x^6
$0 =$ coeficientes x^5
$0 =$ coeficientes x^4
$3 =$ coeficientes x^3
$0 =$ coeficientes x^2
$1 =$ coeficientes x
$0 =$ coeficientes x^0

Otro ejemplo:

$\int[1/(x^2+1)^2]\, dx = [(Ax+B)/(x^2+1)] + \int[(Cx+D)/(x^2+1)]\, dx$

$[1/(x^2+1)^2] = \{[A(x^2+1)-(Ax+B)2x]/(x^2+1)^2\} + [(Cx+D)/(x^2+1)]$

$1 = -Ax^2-2Bx+A+Cx^3+Dx^2+Cx+D$

$C = 0$	$C = 0$
$-A + D = 0$	$B = 0$
$-2B + C = 0$	$D = ½$
$A + D = 1$	$A = ½$

$\int[1/(x^2+1)^2]\, dx = [(½x)/(x^2+1)] + ½\int[1/(x^2+1)]\, dx = [x/2(x^2+1)] + ½\text{arctg } x + K.$

Cálculo de primitivas de funciones racionales trigonométricas:

$\int R(\text{sen } x, \cos x)\, dx$, donde R es una "función racional", es decir, R(sen x, cos x) se obtiene "sumando, restando, multiplicando, dividiendo y multiplicando por escalares" senos y cosenos de x. Por ejemplo: $\int[(3\text{sen}^2x + \cos x)/(8\cos x\, \text{sen}^2x + 3\cos x)]\, dx$

Cálculo de primitivas de funciones racionales de irracionales cuadráticos:

$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$

Por ejemplo:

$\int \{[x\sqrt{(x^2-2x+1)}]/[x^3+2]\}\, dx$

$\int R(\text{sen } x, \cos x)\, dx$ donde R es una función racional. Existen cuatro posible cambios de variable que "racionalizan" aquella integral.

1^{er}) Si R(sen x, cos x) es impar en sen x, es decir, R(-sen x, cos x) = -R(sen x, cos x), entonces un cambio de variable que racionaliza aquello es:

$\cos x = t$
$-\text{sen } x\, dx = dt$

Ejemplo:

(1) $\int dx/\text{sen } x = \int \text{sen } x\, dx/\text{sen}^2x = \int -dt/1-t^2$

$1/1-t^2 = A/1-t + B/1+t$; $A = ½$; $B = ½$

Entonces queda:

$\int -dt/1-t^2 = -½\int dt/1-t -½\int dt/1+t = -½ (\log|1-t|+\log|1+t|) + \log|K| = \log [|K|/\sqrt{|1-\cos^2x|}] =$
$= \log [|K|/\text{sen } x]$

(2) $\int[\text{sen}^3x/(1-\cos x)]\, dx = \int[(1-\cos^2x)/(1-\cos x)]\text{sen } x\, dx = \int(1+\cos x)\text{sen } x\, dx =$
$= -\cos x - ½ \cos^2x + C$

(3) $\int[\text{sen } x/(1+\cos^2x)]dx = \int -dt/(1+t^2) = -\text{arctg } t + C = \text{arctg} \cos x + C.$

2º) R impar en cos x: R(sen x, -cos x) = -R(sen x, cos x)

sen x = t
-cos x dx = dt

3er) R par: R(-sen x, -cos x) = R(sen x, cos x)

$\text{tg } x = t$	$\text{tg } x = \text{sen } x/\cos x$
$dx/\cos^2x = dt$	$\text{tg}'x = \text{sen}^2x+\cos^2x/\cos^2x = 1/\cos^2x$

Ejemplos:

(1) $\int dx/(\text{sen}^2x+2\cos^4x) = \int[\cos^2x/(\text{sen}^2x+2\cos^4x)][dx/\cos^2x] = \int dx/(\text{tg}^2x+2\cos^2x) =$
$= \int dt/(t^2+2/(1+t^2)) = \int[(1+t^2)/(t^4+t^2+2)]\, dt = ...$
4º) Vale siempre, cualquiera que sea R.

$\text{tg } x/2 = t$
$dx/2\cos^2x/2 = dt$

Nos interesa saber cuanto valen, en función de t, sen x y cos x cuando tg x/2 = t

$\cos x = \cos 2\, x/2 = \cos^2x/2 + \text{sen}^2x/2 = (1-\text{tg}^2x)/(1+\text{tg}^2x) = (1-t^2)/(1+t^2)$
$\text{sen } x = 2 \text{ sen } x/2 \cos x/2 = (2\text{tg}^2x/2)/(1+\text{tg}^2x/2 = 2t^2/(1+t^2)$

$\text{tg}^2y = \text{sen}^2y/\cos^2y = (1-\cos^2y)/\cos^2y$; $\cos^2y = 1/(1+\text{tg}^2y)$
$= \text{sen}^2y/(1-\text{sen}^2y)$; $\text{sen}^2y = \text{tg}^2y/(1+\text{tg}^2y)$

$dx = 2dt/1+t^2$

$\int R(\text{sen } x, \cos x) = \underline{\int R(2t^2/(1+t^2), (1-t^2)/(1+t^2))2/(1+t^2)\, dt}$ (racional en t)

Ejemplo:

(1) $\int dx/(1+\cos x) = \int[1/(1+(1-t^2)/(1+t^2))][2/(1+t^2)]\, dt = \int dt = t + C = \text{tg } x/2 + C$

$\int R(x, \sqrt{(ax^2+bx+c)})\, dx$

R(-) "racional" en x y $\sqrt{(ax^2+bx+c)}$. Hay varios cambios de variable que racionalizan esa integral.

Ninguno vale en todos los casos, pero siempre hay por lo menos uno posible.

Tres cambios que corresponden a los casos:

1.- $a \geq 0$
2.- $c \geq 0$
3.- ax^2+bx+c tiene raíces reales.

Veamos como es ax^2+bx+c si:

$a > 0$)

$c > 0$)

Raíces reales quiere decir que la gráfica corta o toca al eje de abcisas.

<u>Ejercicio:</u>

Véase que si no se da alguno de aquellos casos es que no hay función.

No hay función real cuando $ax^2+bx+c < 0$, por tanto x, lo cual significa $a < 0$, $c < 0$, no raíces reales.

1º) Si $a > 0$, un cambio de racionaliza es $\sqrt{(ax^2+bx+c)} = \sqrt{a}\, x \pm t$

$ax^2+bx+c = ax^2+t^2 \pm a\sqrt{a}\, xt$; $x = (t^2-c)/(b\pm 2\sqrt{a}\, t)$

$dx = \{[2t(b\pm 2\sqrt{a}\, t)\pm 2\sqrt{a}(t^2-c)]/(b\pm 2\sqrt{a}\, t)^2\}\, dt$

$\int R(x, \sqrt{(ax^2+bx+c)})\, dx =$
$= \int R((t^2-c)/(b\pm 2\sqrt{a}\, t), \sqrt{a}(t^2-c)/(b\pm 2\sqrt{a}\, t)\pm t)\ \{[2t(b\pm 2\sqrt{a}\, t)\pm 2\sqrt{a}(t^2-c)]/(b\pm 2\sqrt{a}\, t)^2\}\, dt$

$\int 1/(\sqrt{(x^2+x+1)})\, dx = \int [(t^2-1)/(1+2t)+t][(-2t^2+2t-2)/(1-2t)^2]dt$

$\sqrt{(x^2+x+1)} = x + t$; $x^2+x+1 = x^2+t^2+2xt$; $x = (t^2-1)/(1-2t)$

$dx = \{[2t(1-2t)+2(t^2-1)]/(1-2t)^2\}dt = [(2t^2+2t-2)/(1-2t)^2]dt$

Una vez hecho eso, se deshace el cambio de variable, se pone $t = \sqrt{(x^2+x+1)}-x$

$\int R(x, \sqrt{(ax^2+bx+c)})dx$

R racional.

1.- Si $a > 0$, $\sqrt{(ax^2+bx+c)} = \sqrt{a}\, x \pm t$
2.- Si $c > 0$, $\sqrt{(ax^2+bx+c)} = xt \pm \sqrt{c}$
3.- Si ax^2+bx+c tiene raíces reales α, β: $\sqrt{(ax^2+bx+c)} = \sqrt{[a(x-\alpha)(y-\beta)]} =$

2.-) $ax^2+bx+c = x^2t^2+2\sqrt{c}\, xt + c$
$ax+b = xt^2+2\sqrt{c}\, t$
$x = (b-2\sqrt{c}\, t)/(t^2-a)$

<u>Ejemplo:</u>

$\int [(-x^2+x+2)^{2/3}/(x+1)]\, dx =$ Ver fotocopia (99)

Terminamos aquí el "cálculo de primitivas".

Algunas cosas más del Cálculo Integral:

<u>Cálculo del volumen de un cuerpo de revolución:</u>

Concretamente, el volumen de la figura que engendra la gráfica, $y=f(x)$, de una función R-integrable $f:[a, b] \to R$, al girar alrededor del eje OX.

Supongamos que $P: a = x_0 < x_1 <...< x_n = b$
es una partición de $[a, b]$. Sea $x_{k-1}< t_k < x_k$. Entonces,
el volumen de la "aspirina" de altura Δx_k y radio de la

base $f(t_k)$ es $\Pi f^2(t_k)\cdot\Delta x_k$

La suma de las columnas de las "aspirinas" es:
${}^n\sum_{k=1}\Pi f^2(t_k)\Delta x_k = S(\Pi f^2,P)$

Sabemos que $f \in R[a, b] \to \Pi f^2 \in R[a, b]$

Luego esas sumas de Reiman "tienden", al "afinar" la partición a $\int^b_a \Pi f^2 = \Pi\int^b_a f^2$. Este es (lo convenimos así) el volumen buscado.

<u>Volumen de la esfera de radio r:</u>

$f: x \in [-r, r] \to \sqrt{(r^2-x^2)}$

$V = \Pi \int^r_{-r}(r^2-x^2)\, dx = \Pi[r^2x-x^3/3]^r_{-r} = 4/3\Pi r^3$

<u>Área lateral de un cuerpo de revolución:</u>

$f: [a, b] \to R$

$y = f(x)$

gira alrededor del eje OX

$P: a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$

Si la rebanada fuera cilíndrica como la anterior, el área lateral sería muy fácil de calcular: $2\Pi rh$, pero esto no lleva al resultado observado.

Por lo mismo que la consideración de la suma de las longitudes de los segmentos horizontales no lleva, en el límite, a la longitud del segmento indicado, sino a la longitud de

<u>Ejemplo:</u>

Supongamos que para calcular el área lateral de ese cono hiciéramos así:

Sumas laterales de esas rodajas cilíndricas es: ${}^n\sum_{k=1}2\Pi f(t_k)\Delta x_k \to 2\Pi \int^a_0 f$.

$2\Pi\sqrt{2}\ a \rightarrow \Pi 2a^2$
$2\Pi x \quad \rightarrow x$

$x = \sqrt{2}\ \Pi a^2$

Es evidente que el resultado bueno si lleva la consideración de áreas laterales de troncos de conos como los de la figura.

Eso es lo que vamos a hacer: partimos la figura en rodajas "tronco-cónicas" y sumamos las áreas laterales de esos tronquitos de cono.

Área lateral del tronco de cono de altura $h = \Delta x_k$ y radio de las bases $r = f(x_{k-1})$, $s = f(x_k)$

Área lateral del cono de generatriz g y radio de la base r.

$2\Pi g \rightarrow \Pi g^2$
$x = \Pi rg$

$2\Pi r \to x$

El área lateral del tronco de la figura es:

$\Pi rg-\Pi s(g-l) = \Pi(r-s)g+\Pi ls = \Pi lr+\Pi ls = \Pi(r+s)\sqrt{[(r-s)^2+p^2]}$

El área lateral de este tronco de cono es:

$\Pi[f(x_{k-1})+f(x_k)]\sqrt{\{[f(x_k)-f(x_{k-1})]^2+(\Delta x_k)^2\}}$

Suponemos $f(x) \geq 0$ ($x\in[a, b]$). Si f es diferenciable continuamente en $[a, b]$ $f \in C^1[a, b]$ tenemos:

1.-) Por el teorema del valor medio de las funciones continuas:

$\exists\ s_k \in [x_{k-1}, x_k] / f(x_{k-1})-f(x_k) = 2f(s_k)$

2.-) Por el teorema del valor medio del cálculo diferencial:

$\exists\ t_k \in [x_{k-1}, x_k] / f(x_k)-f(x_{k-1}) = f'(t_k)\Delta x_k$

Luego $\Pi[f(x_{k-1})+f(x_k)]\sqrt{\{[f(x_k)-f(x_{k-1})]^2+(\Delta x_k)^2\}} = 2\Pi f(s_k)\sqrt{[1+f'^2(t_k)]}\Delta x_k$

Si fuera $s_k = t_k$ esto sería un sumando $S(2\Pi f\sqrt{(1+f'^2)}, P)$ que "al afinar P" tiende a $2\Pi\int^b_a f(x)\sqrt{[1+f'^2(x)]}\, dx$ que es el área buscada, (nótese, que por serf y f' continuas, esa función es R-integrable).

Ahora bien, en general, $s_k \neq t_k$. Pero por ser f uniformemente continua, dado $\varepsilon > 0$, para P suficientemente fina:

$|2\Pi f(s_k)\sqrt{[1+f'^2(t_k)]}-2\Pi f(t_k)\sqrt{[1+f'^2(t_k)]}| < \varepsilon/(b-a)$

Con lo que "da lo mismo" tomar t_k en lugar de s_k.

Área de la esfera de radio r:

$2\Pi\int^r_{-r}\{\sqrt{(r^2-x^2)}\sqrt{[1+x^2/(r^2-x^2)]}\}\, dx = 2\Pi\int^r_{-r} r\, dx = 4\Pi r^2$

Ejercicio:

Calcular el área lateral en [-1, 1] de:

<u>Longitud de un arco de curva:</u>(Curvas rectificables)

Cosideramos curvas en R^2 (en R^n, es lo mismo, pero con puntos suspensivos)

Un arco en R^2 es (la imagen de) una aplicación continua:

α: $[a, b] \subset R \rightarrow R^2$
$x \in [a, b] \rightarrow \quad \alpha(x) = [\alpha_1(x), \alpha_2(x)]$

Que significa continúa, simplemente:

$\forall\ x \in [a, b], \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0\ /\ |x-y| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)-\alpha(y)| < \varepsilon$

donde $\|\alpha(x)-\alpha(y)\| = \sqrt{\{|\alpha_1(x)-\alpha_1(y)1|^2+|\alpha_2(x)-\alpha_2(y)|^2\}}$. La distancia euclidea entre los puntos de R^2 $(\alpha_1(x),\alpha_2(x))$ y $(\alpha_1(y), \alpha_2(y))$

Es muy fácil ver que $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)$ es continua si sólo si lo son $\alpha_1\ \alpha_2$ (funciones de R en R)

Basta considerar que $|p| \leq \sqrt{(p^2+q^2)} \leq |p|+|q|$
$|q|$
max. $(|p|, |q|) \leq \sqrt{(p^2+q^2)} \leq |p| + |q|$

Se dice que α es una arco simple si es inyectiva.

<u>Longitud del arco (en R^2):</u>

α: $x \in [a, b] \rightarrow \alpha(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x)) \in R^2$ donde x (equivalentemente, α_1 y α_2) es continua:

Sea P: $a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$ una partición de [a, b] diremos que el arco es rectificable si es acotado el conjunto $\sum_p\|\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})\| \ / \ P \in P[a, b]\}$ en cuyo caso a su supremo lo llamaremos longitud del arco.

Evidentemente, el número real $\sum_p\|\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})\|$ es la longitud de la poligonal de vértices $\alpha(x_0)$, $\alpha(x_1)$, ..., $\alpha(x_n)$.

$\|\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})\| = \sqrt{\{[\alpha_1(x_k)-\alpha_1(x_{k-1})]^2+[\alpha_2(x_k)-\alpha_2(x_{k-1})]^2\}}$

Es evidente que:

$P \subset P' \Rightarrow \sum_p \|\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})\| \leq \sum_{p'}\|\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})\|$ es la desigualdad triangular.

Las desigualdades:

$\max \{|p| \ |q|\} \leq \|(p, q)\| \leq |p| + |q|$

puede que el conjunto $\{\sum_p\|\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})\| \ / \ P \in P[a, b]\}$ es acotado si solo si son acotados los conjuntos:

$\{\sum_p|\alpha_i(x_k)-\alpha_i(x_{k-1})| \ / \ P \in P[a, b]\}$ (i = 1, 2, ...)

Por tanto, el arco es rectificable si sólo si α_1 y α_2 son de variación acotada.

En estos términos, el arco es rectificable cuando α es continua y de variación acotada.

Supongamos ahora que α (es decir, α_1 y α_2) es diferenciable continuamente en [a, b], $\alpha \in C^1[a, b]$. Entonces por el teorema del valor medio del Cálculo Diferencial resulta que existen s_k, $t_k \in \,]x_{k-1}, x_k[$, (k = 1, ..., n), tales que $\sum_p \|\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})\| =$

$= \sum_p \sqrt{\{[\alpha_1(x_k)-\alpha_1(x_{k-1})]^2+[\alpha_2(x_k)-\alpha_2(x_{k-1})]^2\}} = \sqrt{[\alpha_1'^2(s_k)+\alpha_2'^2(t_k)]}\ \Delta x_k$ (**)

Por ser α_1' y α_2' continuas, dado $\varepsilon > 0$, para P "suficientemente fina" (**) se diferencia menos que ε de $\sqrt{[\alpha_1'^2(t_k)+\alpha_2'^2(t_k)]}\ \Delta x_k$ y esto no es otra cosa que una $S(\sqrt{[\alpha_1'^2+\alpha_2'^2]}, P)$.

Por consiguiente $\alpha \in C^1[a, b]$, el arco $\alpha: [a, b] \to R^2$ es rectificable y su longitud es:

$\int_a^b \sqrt{[\alpha_1'^2(x)+\alpha_2'^2(x)]}\ dx$

<u>Ejemplo:</u>

Longitud de la circunferencia de radio r:

$\alpha: x \in [0, 2\Pi] \to (r \cos x, r \text{ sen } x)$

$\int_0^{2\Pi} \sqrt{[r^2 \text{sen}^2 x + r^2 \cos^2 x]}dx = r\int_0^{2\Pi} dx = 2\Pi r$

Un ejemplo de curva no rectificable: la gráfica de:

$$f: x \in [0, 1] \to f(x) = \begin{cases} x \text{ sen } 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Ni que decir tiene que la gráfica de una función continua $f:[a, b] \to R$ es un arco en R^2. Basta tener en cuenta que

$\alpha: x \in [a, b] \to (x, f(x)) \in R^2$

$x \in [0, 1] \to (x, f(x)) \in R^2$

Pues bien, sabemos que esa f no es de variación acotada.