Electricidad y magnetismo

Resumen y notas de clases – Parte de ELECTRICIDAD

Ultima modificación el lunes 25 de junio de 2007 a las 20:11:08

Carga eléctrica

Existen dos tipos de carga eléctrica, positiva (protón) y negativa (electrón). La carga eléctrica esta cuantizada, se representa por múltiplos enteros de la unidad fundamental de carga *e*.

La carga del protón es +e y la del electrón -e.

Carga fundamental: $e = 1.6 x 10^{-19} C$

La carga se conserva, en cualquier proceso no se crea ni se destruye, se transfiere.

Conductores y aislantes

En los conductores, aproximadamente un electrón por átomo posee libertad de movimiento en todo el material. En los aislantes todos los electrones están ligados a los átomos próximos.

Tierra se le dice a un conductor muy extenso que puede suministrar una cantidad ilimitada de carga (tal como el suelo terrestre).

Carga por inducción

Un conductor puede cargarse manteniendo una carga en sus proximidades que atrae o repele los electrones libres, uniendo entonces el conductor a tierra para que escapen las cargas mas alejadas.

Ley de Coulomb

La fuerza ejercida por una carga q_1 sobre q_2 viene dada por

$$F_{1,2} = \frac{k q_1 q_2}{r_{1,2}^2} \cdot \hat{r_{1,2}}$$

en donde $\hat{r_{1,2}}$ es un vector unitario (versor) dirigido de q_1 a q_2

Constante de Coulomb $k = 8.99 x 10^9 N \cdot m^2 / C^2$

Campo eléctrico

El campo eléctrico debido a un sistema de cargas en un punto se define como la fuerza neta ejercida por aquellas cargas sobre una carga testigo positiva q_0 , dividida por q_0 .

$$E = \frac{F}{q_0} \qquad E_{i,P} = \frac{k q_i}{r_{i,P}^2} \hat{r_{i,P}}$$

El campo eléctrico debido a **varias cargas** es la suma vectorial de los campos debidos a las cargas individuales. $E = \sum_i E_i = \sum_i \frac{k q_i}{r_{i,P}^2} \hat{r_{i,P}}$

Lineas de campo eléctrico

El campo eléctrico puede representarse mediante lineas del campo eléctrico o de fuerza que se originan en las cargas positivas, y terminan en las cargas negativas. La intensidad del campo eléctrico se indica por la densidad de las lineas de fuerza.

Las lineas comienzan en las cargas positivas (o el infinito) y terminan en las negativas (o el infinito). Se dibujan espaciadas uniformemente y saliendo o entrando de la carga(s).

NO pueden cortarse nunca dos lineas de campo.

Dipolo eléctrico

Un dipolo eléctrico es un sistema de dos cargas iguales pero opuestas, separadas por una distancia pequeña.

$$p = qL$$

en donde L apunta de la carga negativa a la positiva.

El campo eléctrico debido a un dipolo en un punto alejado del dipolo es proporcional al momento dipolar y disminuye con el cubo de la distancia.

En un campo eléctrico uniforme, la fuerza neta que actúa sobre un dipolo es cero, pero existe un momento τ dado por $\tau = p\, x\, E$

La energía potencial de un dipolo es $U = -p \cdot E$

Moléculas polares y no polares

Las moléculas polares (ej H2O) poseen momentos dipolares permanentes, ya que en ellas no coinciden los centros de la carga positiva y negativa. Se comportan como simples dipolos en un campo eléctrico.

Las moléculas no polares carecen de momentos dipolares permanentes, pero adquieren momentos dipolares inducidos en presencia de un campo eléctrico.

Densidad de carga

Con frecuencia hay situaciones donde un gran numero de cargas están tan próximas que la carga total puede considerarse distribuida continuamente en el espacio.

Densidad de carga volumétrica

Carga por unidad de volumen.

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

Densidad de carga superficial

Carga por unidad de área.

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A}$$

Densidad de carga lineal

Carga por unidad de longitud.

$$\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

Campo eléctrico en distribución continua de carga

El campo eléctrico en una distribución de carga continua, utilizando la ley de Coulomb, se puede obtener mediante

$$E = \int_V \frac{k\,dq}{r^2}\hat{r}$$

Flujo eléctrico

El numero de lineas de campo que atraviesa una superficie se llama flujo eléctrico.

Para una superficie perpendicular a E, es $\Phi = E \cdot A$ (A=área)

Las unidades del flujo son N m2/C.

La definición general del flujo eléctrico para superficies curvas es

$$\Phi \; = \; \lim_{\Delta A_i \to 0} \; \sum_i E_i \cdot \hat{n}_i \Delta A_i \; = \; \int_S E \cdot \hat{n}\, dA$$ (recordar que es una integral de superficie).

Flujo neto

En una superficie **cerrada,** el vector normal unitario $\hat{n}$ se define de modo que esta dirigido hacia fuera en cada punto.

El flujo neto a través de una superficie cerrada viene dado por

$$\Phi_{neto} \; = \; \oint_S E \cdot \hat{n}\, dA \; = \; \oint_S E_n\, dA$$ (dA = diferencial de área)

Ley de Gauss

La ley de Gauss relaciona el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada y la carga eléctrica encerrada en esta superficie.

Permite calcular fácilmente los campos eléctricos que resultan de distribuciones simétricas de carga, tales como una corteza esférica o una linea infinita.

Flujo neto mediante ley de Gauss

El flujo neto a través de cualquier superficie es igual a $4\pi k$ veces la carga neta dentro de la superficie.

$$\Phi_{neto} = \oint_S E_n\, dA \; = \; 4\pi k\, Q_{interior} \; = \; \frac{Q_{interior}}{\epsilon_0}$$ **} ESTA ES LA LEY DE GAUSS**

La ley de Gauss es valida para todas las superficies y distribuciones de carga.

Puede usarse también para calcular el campo eléctrico en algunas distribuciones simétricas.

E_0 es la constante de permitividad del espacio libre, $8{,}85\, x10^{-12}\, C^2 / Nm^2$

Campo eléctrico E mediante ley de Gauss

El campo eléctrico debido a una distribución de carga simétrica puede calcularse fácilmente con la ley de Gauss. Se determina una superficie cerrada imaginaria llamada **superficie gaussiana** (ej, esfera, cilindro, cubo, etc).

[DEBUG ver libro Tipler 2A 5ta edición – pg 648]

Potencial eléctrico

La energía potencial por unidad de carga es una función de la posición en el espacio de la carga y se denomina potencial eléctrico, el cual es un campo escalar.

La variación de energía potencial electrostática es $dU = -q_0 E \cdot dl$

Diferencia de potencial

Es la variación de energía potencial por unidad de carga, se denomina dV

$$dV = \frac{dU}{q_0} = -E \cdot dl$$

Diferencia de potencial finita

Para un desplazamiento finito desde el punto a al punto b, el cambio de potencial es

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_a^b E \cdot dl$$

Relación entre energía potencial U y potencial V

$$U = q_0 V$$

Potencial debido a una carga puntual

$$V = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{r_{ref}}$$

Potencial de coulomb

$V = \frac{kq}{r}$ (potencial a una distancia “r” de una carga “q”)

Energía potencial electrostática de un sistema de dos cargas

$$U = q_0 V = \frac{k\, q_0 q}{r}$$

Potencial debido a un sistema de cargas puntuales

$V = \sum_i \frac{kq_i}{r_i}$ r_i distancia de la carga q_i al al punto P donde deseo calcular el potencial.

Potencial debido a una distribución de carga continua

[DEBUG – ver libro pg 675 para formulas y ejemplos]

$$V = \int \frac{k\, d\, q}{r}$$

Determinar campo eléctrico a partir del potencial

Si el potencial es conocido, puede usarse para calcular el campo eléctrico.

La relación es así : $E = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \right)$ (E = gradiente V)

[DEBUG – ver resumen del libro pg 687-688 para COSAS IMPORTANTES]

Ruptura dieléctrica

La cantidad de carga que puede depositarse en un conductor viene limitada por el hecho de que las moléculas del medio que le rodea se ionizan en campos eléctricos muy intensos y el medio se hace conductor. La intensidad para la cual tiene lugar la ruptura eléctrica del material se llama **resistencia dieléctrica,** para el aire es $E_{max} = 3\text{x}10^6 V/m = 3\,MV/m$

Energía potencial electrostática

La energía potencial electrostática de un sistema de cargas puntuales es el trabajo necesario para transportar las cargas desde una distancia infinita hasta sus posiciones finales.

Energía potencial electrostática de un sistema de cargas puntuales

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i V_i$$

Energía potencial electrostática de un sistema de conductores

Esto se refiere a sistemas con distribuciones continuas de carga, por eso Q.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} Q_i V_i$$

Capacidad

El potencial de un único conductor aislado, que contiene una carga Q, es proporcional a esta carga y depende del tamaño y forma del conductor. En general, cuanto mayor es la superficie del conductor, mayor es la cantidad de carga que puede almacenar para un determinado potencial.

La capacidad de almacenar carga para una determinada diferencia de potencial.

$$C = \frac{Q}{V}$$

Condensadores

Un sistema de dos conductores portadores de cargas iguales y opuestas constituye un condensador.

Condensador de placas paralelas

La capacidad del condensador de placas paralelas es $C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$

Donde d es la separación entre placas, A el área de cada placa, Q la carga.

Condensadores cilíndricos

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)}$$

Almacenamiento de la energía eléctrica

Energía almacenada en un condensador.

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 (A d)$$

Energía del campo electrostático

En el proceso de carga del condensador, se crea un campo eléctrico entre las placas. La energía almacenada en el condensador reside en el campo eléctrico (de aquí el nombre).

$$u_e = \frac{energía}{volumen} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Condensadores, baterías y circuitos

La **diferencia de potencial** V entre los bornes de una batería es el **voltaje** de la batería.

Dentro de la batería existe un campo eléctrico dirigido desde el borne positivo al negativo.

Combinaciones de condensadores

Condensadores en paralelo

Cuando dos o mas dispositivos se conectan en paralelo, el voltaje entre sus extremos es el mismo en cada uno de ellos.

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + ...$$

Condensadores en serie

Cuando los dispositivos están en serie las caídas de voltaje se suman. Si la carga neta de cada par de placas es cero: $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + ...$

Dieléctricos

Un material no conductor, por ejemplo vidrio,papel o madera, es un dieléctrico.

Cuando se inserta entre las placas de un condensador, el campo eléctrico dentro del mismo se debilita y la capacidad se incrementa en el factor κ , la constante dieléctrica.

Usos del dieléctrico:

- Aumenta la capacidad.
- Aumenta la resistencia a la ruptura dieléctrica.
- Separa físicamente los conductores.

Campo eléctrico en el interior de un dieléctrico

$E=\frac{E_0}{\kappa}$ donde κ es la constante dieléctrica.

Efecto de un dieléctrico sobre la capacidad

$$C=\kappa C_0$$

Permitividad del dieléctrico

$$\epsilon=\kappa \epsilon_0$$

Diferencia de potencial entre placas

$$V=E\cdot d=\frac{E_0 d}{\kappa}=\frac{V_0}{\kappa}$$

Energía almacenada en presencia de un dieléctrico

$$U=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\epsilon E^2(Ad)$$

Efecto piezoeléctrico

En ciertos cristales que contiene moléculas polares, una tensión mecánica polariza las moléculas induciendo un voltaje a través del cristal. Inversamente, un voltaje produce una tensión mecánica (deforma) en el cristal.

Corriente eléctrica o intensidad de corriente

Es el flujo de cargas eléctricas que por unidad de tiempo atraviesan un área transversal.

$I=\frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqAv_d$ donde $\Delta Q=qnAv_d\Delta t$; n es la densidad numérica de partículas libres, q carga, A área, v velocidad de las partículas, y t tiempo.

La unidad de medida de I es el **Amperio** : 1 A = 1 C/s

Resistencia

El cociente entre la caida de potencial V y la intensidad de la corriente I se llama **resistencia del segmento.**

$$R=\frac{V}{I}$$

La unidad de resistencia es el voltio por amperio, se llama ohmio. $1\,\Omega=1\,V/A$

Ley de Ohm

Es una ley empírica que se cumple solo en ciertos materiales.

En los materiales óhmicos, la caída del potencial a través de una porción de conductor es proporcional a la corriente (mayoría de los metales).

$$V=I\cdot R \quad ; \quad R\, constante$$

La resistencia de un alambre conductor es proporcional a su longitud L e inversamente proporcional a su área A.

$R=\rho\frac{L}{A}$ donde ρ es una constante llamada **resistividad** del material conductor (se saca de una tabla).

Esta **resistividad** de un metal depende de la temperatura. En las tablas suele darse la resistividad a 20 C (ρ_{20}), y el **coeficiente de temperatura de la resistividad** α

Con esta formula se puede calcular la **resistividad** a diferentes temperaturas:

$$\alpha=\frac{(\rho-\rho_{20})/\rho_{20}}{t_c-20°C}$$

Energía en los circuitos eléctricos

Potencia disipada disipada en un conductor por unidad de tiempo

$$P=IV$$

Unidades : Como I es Amperios (A), y V voltios (V), P se expresa en vatios (W).

Potencia disipada en una resistencia

$$P=IV=I^2R=\frac{V^2}{R}$$

FEM y baterías

Un aparato que suministra energía eléctrica se llama fuente de **fem** (fuerza electromotriz)

Una batería **ideal** mantiene una diferencia de potencial constante entre sus dos terminales, independientemente del flujo de carga que exista entre ellos.

La diferencia de potencial es ξ

La intensidad de corriente que circula por la resistencia es $I=\frac{\xi}{R}$

La corriente circula del borne positivo (+) al negativo (-).

Potencia suministrada por una FEM

$$P=\frac{\Delta Q\,\xi}{\Delta t}=\xi I$$

Intensidad de la corriente en un circuito con una batería real

Para simular una batería real, se agrega una resistencia interna de la batería “r” (una resistencia próxima a la FEM ideal)

$$I=\frac{\xi}{R+r}$$

Donde R es la resistencia, y r la resistencia interna de la batería.

Energía total almacenada en la batería

Es la carga total multiplicada por la FEM: $W=Q\,\xi$

Combinaciones de resistencias

Resistencias en serie

La caída de potencial a través de resistencias en serie es la suma de las caídas de potencial a través de las resistencias individuales.

$$V=I\,R_1+I\,R_2=I\,(R_1+R_2)$$

La resistencia equivalente Req es la suma de las resistencias:

$$R_{eq}=R_1+R_2+R_3+\ldots$$

Resistencias en paralelo

$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\ldots$ } de aquí despejar Req.

Reglas de Kirchhoff

1. Al recorrer un circuito cerrado, la suma algebraica de los cambios de potencial es igual a cero.
2. En toda unión (nudo) de un circuito, donde la corriente puede dividirse, la suma de las corrientes entrantes es igual a la suma de las corrientes salientes.

Metodología Kirchhoff para circuitos de múltiples mallas

Para cada rama del circuito, dibujar una flecha indicando el sentido positivo de la corriente.

La diferencia de potencial entre los extremos final e inicial de una resistencia es -IR.

Luego, aplicar el método general para el análisis de circuitos con múltiples mallas:

1. Dibujar un esquema del circuito
2. Reemplazar cualquier asociación de resistencias o capacidades en serie o paralelo por su resistencia equivalente.
3. Elegir un sentido para la corriente en cada rama del circuito e indicar el sentido positivo con una flecha. Especificar las corrientes de cada rama. Añadir los signos mas y menos para indicar los extremos los potenciales de mayor y menor de cada fuente de fem.
4. Aplicar la regla de los nudos a cada una de las uniones en donde la corriente se divide.
5. Aplicar la regla de las mallas a cada uno de los bucles cerrados hasta obtener tantas ecuaciones como incógnitas. Cuando se atraviesa una resistencia en sentido positivo, el cambio de potencial es -IR. Cuando se atraviesa una batería desde el terminal negativo al positivo, el cambio en el potencial es $\epsilon - IR$.
6. Resolver las ecuaciones para deducir los valores de las incógnitas.
7. Comprobar los resultados asignando un potencial cero a un punto del circuito y utilizar los valores de las corrientes para determinar los potenciales en otros puntos del circuito.

Circuitos RC

Descarga de un condensador

Carga en el condensador

$$Q(t)=Q_0 e^{-t/(RC)} \;=\; Q_0 e^{-t/\tau}$$

Corriente en el circuito

$$I=-\frac{dQ}{dt} \;=\; \frac{V_0}{R} e^{-t/(RC)} \;=\; I_0 e^{-t/\tau}$$

Constante de tiempo

$$\tau=R\cdot C$$

Carga de un condensador

Carga en el condensador

$$Q=C\xi\left(1-e^{-t/(RC)}\right) \;=\; Q_f\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

Corriente en el circuito

$$I=+\frac{dQ}{dt}=\frac{\xi}{R} e^{-t/(RC)}=I_0 e^{-t/\tau}$$

Geometría en el plano (2D)

Rectángulo

Área : base x altura

Perímetro : suma de sus lados

Circulo

Área : $\pi \cdot r^2$

Perímetro: $2 \cdot \pi \cdot r$

Triangulo

Área : $\frac{base \cdot altura}{2}$

Perímetro : suma de sus lados

Geometría en el espacio (3D)

Esfera

Ecuación de la esfera : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

De radio r:

Superficie/Área $a=4\pi\ r^2$

Volumen $v=\frac{4}{3}\pi\ r^3$

Cubo

De largo de arista w:

Superficie/Área $a=6\mathrm{w}^2$

Volumen $v=w^3$

Cilindro

Ecuación del cilindro $(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2=1$

De radio r y largo h:

Superficie/Área

(incluyendo las “tapas”) $a=2\pi\ r^2+2\pi\ r\,h \ = \ 2\pi\ r(r+h)$

(solo el cilindro, **sin** las tapas) $a=2\pi\ r\,h$

Volumen $v=\pi\ r^2\,h$

Apéndice de matemáticas y otras cosas útiles a la materia

Leyes de los exponentes

$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$	$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$	$\sqrt[n]{a} = b \quad si \quad b^n = a$
$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$	$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$(x+y)^n \neq x^n + y^n$
$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$	$\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$	$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$
$(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$	$x^1 = x \quad x^0 = 1$	$\sqrt[n2]{a^{n1}} = a^{(\frac{n1}{n2})}$ $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2^5}} = \sqrt{2^{(\frac{5}{4})}} = 2^{(\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2})} = 2^{\frac{5}{8}}$

Extraer factores

$$\sqrt[3]{a^7} = a^2 \cdot \sqrt[3]{a^1} \quad porque\ 7/3 = 2,\ y\ queda\ de\ resto\ 1$$

Solo si el valor absoluto del exponente es ≥ el indice de la raiz se puede extraer el radicando.

Ademas, sale con el signo correspondiente.

Introducir factores

$$3^2 \cdot \sqrt[5]{b^3} = \sqrt[5]{b^3 \cdot 3^{10}}\ porque\ 2 \cdot 5 = 10 \rightarrow 3^{10}$$

Logaritmos

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$$\log a^b = b \cdot \log a$$

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a$$

$$\log(a) a^x = x$$

Binomio

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$$

Relaciones fundamentales

$$sen^2 a+\cos^2 a=1\,; \quad tg\,a=\frac{sen\,a}{\cos a}\,; \quad cotg\,a=\frac{\cos a}{sen\,a}\,; sec\,a=\frac{1}{\cos a}\,;$$

$$cosec\,a=\frac{1}{sen\,a}\,; \quad sen\,a \;=\; \sqrt{1-\cos^2 a} \;=\; tg\,\frac{a}{\sqrt{1+tg^2 a}}\,; \quad \cos a=\sqrt{1-sen^2 a} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 a}}\,;$$

$$sec^2 a=tg^2 a+1\,; \quad tg^2 a=sec^2 a-1\,; \quad cosec^2 a=cotg^2 a+1\,; \quad cotg^2 a=cosec^2 a-1\,;$$

Funciones circulares inversas

$$arcsenx=\operatorname{arccos}\sqrt{1-x^2} \;=\; \frac{\pi}{2}-\operatorname{arccos} x$$

$$\operatorname{arccos} x=arcsen\sqrt{1-x^2} \;=\; \frac{\pi}{2}-arcsen\,x$$

$$arctg\,x=arcsen\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \;=\; \frac{\pi}{2}-arc\,cotg\,x$$

Reglas de derivadas

1) $(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$

2) $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$

3) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

4) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Tabla de derivadas

x = incógnita ; k = constante ; u,v,w = expresión mas compleja / funciones

$k' = 0$	$sen\, x' = \cos x$
$x' = 1$	$\cos x' = -sen\, x$
$k \cdot x' = k$	$(k \cdot u)' = k \cdot u'$
$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	$\ln u' = \frac{1}{u} \cdot u'$
$x^n{}' = n x^{n-1}$	$\tan x' = \frac{1}{\cos^2 x} = sec^2\, x$
$e^x{}' = e^x$	$arcsen\, x' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$k^x{}' = k^x \cdot \ln k$	$\arccos x' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x' = \frac{1}{x}$	$\arctan x' = \frac{1}{x^2+1}$
$\log_a x' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$u \cdot v \cdot w' = u'vw + uv'w + uvw'$
$e^u{}' = e^u \cdot u'$	$\frac{1}{u} = \frac{-1}{u^2} \cdot u'$
$\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{u}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Tabla de Integrales

$\int x^a\,dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}\quad a\neq -1$	$\int dx=x$
$\int k\,dx=k\,x$ (las constantes "salen")	$\int \frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert$ (ídem x^-1)
$\int k\,f(x)dx=k\int f(x)dx$ (constantes "salen")	$\int e^{kx}dx=\frac{e^{kx}}{k}+c$
$\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}$	$\int [f(x)\pm g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$
$\int x^{-1}dx=\ln\lvert x\rvert$	$\int e^x\,dx=e^x$
$\int \ln x\,dx=x\ln x-x$	$\int \sin x\,dx=-\cos x$
$\int \cos x\,dx=\sin x$	$\int \tan x\,dx=\ln\lvert sec\;x\rvert$
$\int \cot x\,dx=-\ln\lvert csc\,x\rvert=\ln\lvert\sin x\rvert$	$\int sec\;x\,dx=\ln\lvert sec\;x+\tan x\rvert$
$\int csc\,x\,dx=-\ln\lvert csc\;x+\cot x\rvert=\ln\lvert csc\,x-\cot x\rvert$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=tg\;x$
$\int \frac{dx}{sen^2 x}dx=-cotg\;x$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=arcsen\,x$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arccos x$	$\int \frac{1}{1+x^2}dx=arctg\;x$

Integración por partes: $d(uv)=u\cdot dv+v\cdot du\;\Rightarrow\;u\cdot dv=d(uv)-v\cdot du\;\Rightarrow\;\int u\cdot dv=uv-\int v\cdot du$ (criterio **ilpet**)

Integración por fracciones simples: grado Q > P

factorear Q en sus raíces, luego igualar P(x) a A1,A2, etc ; y averiguar A1, etc usando los valores de las raíces de Q

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(x)}{a(x-x_1)\ldots(x-x_n)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-x_n}$$

Si grado P > Q ==> P(x)/Q(x) ==> integral resultado + {integral (resto / Q(x)) } <- y aplicar método a este termino

Integral impropia

Hay convergente y divergente.

$\lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{dx}{x^2}$ Si da un numero, la integral es convergente, y converge a ese numero. Si da infinito, es divergente.

Curvas de nivel de un campo escalar

Conjunto de nivel K : $C_k(f)=\{(x,y)\in Df : f(x,y)=k\}$ "Es el conjunto de todos los x e y que al "entrar" a f, son iguales a k"