SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES

• **SUCESIONES DE FUNCIONES:**

DEFINICIÓN: Sea $\{f_n\}_{n\in N}$ una sucesión de funciones($f_n : A \rightarrow R, \forall n \in N$). Decimos que $\{f_n\}_{n\in N}$ CONVERGE PUNTUALMENTE en A a una función $f : A \rightarrow R$, que se llama función ímite, si para cada $x_0 \in$ A se verifica que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

Es decir, si $\forall x_0 \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N \,/\, \forall n \geq n_0 \rightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$

A f se le llama también límite puntual de $\{f_n\}_{n\in N}$, y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$

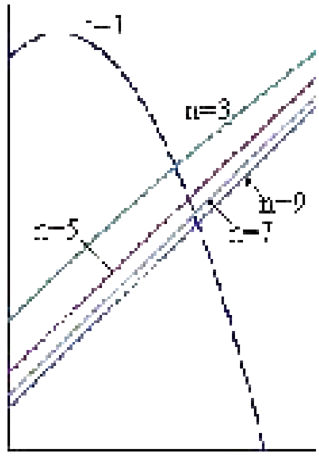
Ejemplos:

$$f_n(x) = 2\frac{n^2 - x^2}{n^3} + x, \; x \in R$$

Si hacemos el límite considerando x constante:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[2\frac{n^2 - x^2}{n^3} + x\right] = x$$

Es decir, a medida que aumenta n, la curva que describe $f_n(x)$, se va aproximando a f(x)=x



$$f_n(x) = \mathrm{sen}^n(x), \; x \in [0, 2\pi]$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[\mathrm{sen}^n(x)\right] = \begin{cases} 1 & x = \pi/2 \\ 0 & x \neq \pi/2, x \neq 3\pi/2 \\ \nexists & x = 3\pi/2 \end{cases}$$

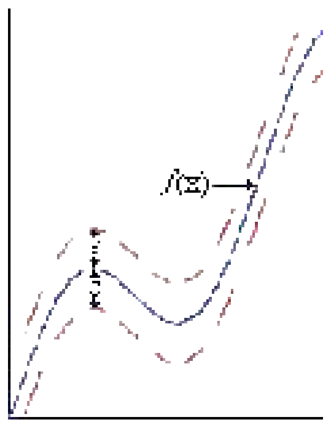
IDEA INTUITIVA: El límite de una sucesión de funciones continuas puede no ser continuas (ejemplo 2). A menudo nos interesa asegurar que la función límite será continua. Para ello vamos a endurecer la noción de convergencia, eliminando la dependencia de x_0.

DEFINICIÓN: Sea $\{f_n\}_{n\in N}$ una sucesión de funciones($f_n : A \rightarrow R, \forall n \in N$). Decimos que $\{f_n\}_{n\in N}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE en A hacía una función $f : A \rightarrow R$, si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N \,/\, \forall n \geq n_0 \rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \; \forall x \in A$

Geometricamente esto se puede ver de la siguiente manera.
A partir de un n_0, la función $f_n(x)$ puede hacer lo que quiera, pero estará contenida en un 'tubo', formado por las funciones f(x)+ε y f(x)-ε.

OBSERVACIÓN: La convergencia uniforme implica la convergencia puntual, es decir, es más fuerte la uniforme que la puntual.

NOTACIÓN: Si $\{f_n\}_{n\in N}$ converge uniformemente a f en A, lo escribiremos: $\{f_n\}_{n\in N} \xrightarrow{u,A} f$



TEOREMA(Caracterización del supremo):

$\{f_n\}_{n\in N} \xrightarrow{u,A} f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, donde $\sigma_n = \sup\{|f(x) - f_n(x)| / x \in A\}$

Demostración:

$\boxed{\Rightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N / \forall n \geq n_o \rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \; \forall x \in A$

$\sigma_n = \sup\{|f(x) - f_n(x)| / x \in A\} \leq \varepsilon/2 < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |\sigma_n| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$

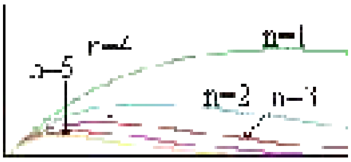
$\boxed{\Leftarrow}$ $|f(x) - f_n(x)| < \sigma_n \forall x \in A$

sí $\lim_{m\to\infty} \sigma_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in N / \forall n \geq n_o \rightarrow \sigma_n < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \sigma_n < \varepsilon$

que es la definición de convergencia uniforme.

Ejemplo:

Estudiar la convergencia(ambas) de



$f_n(x) = xe^{-nx} \qquad x \in [0,+\infty) = A$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} [xe^{-nx}] = 0 \quad \forall x \in A$

límite puntual $\quad f(x) = 0$

Hallamos σ_n (distancia entre el máximo y f(x))

$\sigma_n = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in A} |f_n(x)| = \sup_{x\in A} f_n(x)$

$f_n' = e^{-nx} + x(-n)e^{-nx} = e^{-nx}(1 - nx) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1/n$

$\sigma_n = f_n'(1/n) = \dfrac{1}{e \cdot n}$

Y el límite vale:

$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{e \cdot n} = 0$

Luego hay convergencia uniforme.

PROPOSICIÓN: Si $\{f_n\}_{n\in N} \xrightarrow{u,A} f$ y f_n están acotadas $\forall n \in N$, entonces f está acotada en A

Demostración:

$\varepsilon = 1 \quad \exists n_0 \in N / \forall n \geq n_0 \rightarrow |f_n(x) - f(x)| < 1 \quad \forall x \in A \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in [f_n(x) - 1, f_n(x) + 1]$

Como f_n están acotadas, f también lo está.

TEOREMA: Sea $\{f_n\}_{n\in N}$ una sucesión de funciones($f_n : A \rightarrow R, \forall n \in N$), y supongamos que existe $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = l_n, \forall n \in N$. Si $\{f_n\}_{n\in N} \xrightarrow{u,A} f$, entonces:

existe $\lim_{x\to a} f(x)$, y vale $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} l_n$

Demostración:

1)Veamos que $\{l_n\}_{n\in N}$ es convergente

$\{f_n\}_{n\in N} \xrightarrow{u,A} f \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 / \forall n, m \geq n_0 \rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon/2 \quad \forall x \in A$*

Tomando límites cuando x tiende a ‘a’

$|l_n - l_m| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon \quad \forall x \in A$ Luego $\{l_n\}_{n\in N}$ es de Cauchy, y por tanto convergente.

Sea $l = \lim_{n\to\infty} l_n$

* Véase problema nº5 de la hoja de problemas.

2)Hace falta demostrar que $\lim_{n\to\infty} f(x) = l$

$|f(x)-l| = |f(x)-f_n(x)+f_n(x)-l_n+l_n-l| \le |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-l_n| + |l_n-l|$

$|f(x)-f_n(x)| < \varepsilon/3$ Pues $\{f_n\}_{n\in N} \xrightarrow{u,A} f$

$|f_n(x)-l_n| < \varepsilon/3$ Pues si $0<|x-a|<\delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to q} f_n(x) = l_n$

$|l_n - l| < \varepsilon/3$ Dado que $\lim_{n\to\infty} l_n = l$

<u>COROLARIO:</u> Si $\{f_n\}_{n\in N} \xrightarrow{u,A} f$, y f_n continuas $\forall n \in N$, entonces f es continua en A.
Demostración:

$$f(a) \overset{??}{=} \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to a} f_n(x)\right] = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$$

<u>OBSERVACIÓN:</u> Si $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, y f_n continuas $\forall n \in N$, y f es discontinua, la convergencia no es uniforme.

Ejemplo:

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0,1]$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$. Función discontinua. Convergencia no uniforme

<u>TEOREMA(Integración):</u> Si $\{f_n\}_{n\in N} \xrightarrow{u,A} f$, y f_n integrables en A $\forall n \in N$, entonces la función límite es integrable en A y se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n$$

Además la convergencia del límite anterior es uniforme en A

<u>TEOREMA(Derivación):</u> Sea $\{f_n\}_{n\in N} \xrightarrow{u,A} f$, y f_n derivables en A $\forall n \in N$, $\{f_n'\}_{n\in N}$ es uniformemente convergente en A, y existe a $\in$ A tal que $\{f_n(a)\}_{n\in N}$ es convergente, entonces $\{f_n\}_{n\in N}$ es uniformemente convergente en A, la función límite es derivable y se verifica que:

$$\frac{d}{dx}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

• **SERIES DE FUNCIONES:**

<u>DEFINICIÓN:</u> Dada $\{f_n\}_{n\in N}$ ($f_n : A \to R, \forall n \in N$), llamamos SERIE FUNCIONAL ASOCIADA a $\{f_n\}_{n\in N}$ a la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n\in N}$, donde $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$

Decimos que la serie es convergente(puntual o uniformemente)si lo es la sucesión de sumas parciales. En ese caso escribiremos:

$$\sum_{n\ge 1} f_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Ejemplo:

Estudiar la convergencia de $\sum_{n\geq 1} e^{-nx}$

Es una serie geométrica de razón $r = e^{-nx}$. Es convergente puntualmente si r<1, es decir, x>0, y su suma vale $\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$

TEOREMA: Si $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge uniformemente a S(x) (función suma) en A, y f_n continuas $\forall n \in N$, entonces S(x) es continua.

Demostración:

$\sum_{n\geq 1} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$

$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$ Y $S_n(x)$ es continua por ser suma de funciones continuas, con lo

que la función límite S(x) también lo es.

TEOREMA(Criterio de la Mayorante. Weiertrass): Sea $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ una serie de funciones ($f_n : A \to R, \forall n \in N$), y $\sum_{n\geq 1} K_n$ una STP. Si $|f_n(x)| \leq K_n \quad \forall x \in A, \forall n \in N$, y $\sum_{n\geq 1} K_n$ es convergente, entonces $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ es uniformemente convergente.

Demostración

Demostremos el criterio de convergencia de Cauchy para series de funciones:

$$\sum_{n\geq 1} f_n \ \ unif.\ conv.\ en\ \ A \Leftrightarrow \{S_n\} unif.\ conv.\ en\ \ A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_o \in N / \forall n, m \geq n_0 (n > m) \to$$

$$\to |S_n - S_m| = |f_{m+1} + \cdots + f_n| < \varepsilon$$

Entonces

$$|f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \cdots + f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$$

Aplicandolo:

$$\sum_{n\geq 1} K_n \ \ convergente \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_o \in N / \forall n, m \geq n_0 (m > n) \to |k_{n+1} + h_{n+2} + \cdots + k_m| < \varepsilon$$

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_m(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_m(x)| \leq k_{n+1} + h_{n+2} + \cdots + k_m < \varepsilon$$

Ejemplo:

1) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\text{sen}\, nx}{n^2}$

$\left|\dfrac{\text{sen}\, nx}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ *convergente* Por tanto la serie original es convergente

2) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{x}{n} e^{-2n^2x^2}$

Vamos a intentar acotar la serie funcional derivando y hallando el máximo:

$$f_n(x) = \frac{x}{n} e^{-2n^2x^2} \qquad f_n'(x) = e^{-2n^2x^2}\left(\frac{1}{n} - 4x^2 n\right) \quad \Rightarrow \quad f_n'(c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{2n}, c' = \frac{1}{2n}$$

$$f_n(c) = \frac{1}{2n^2} e^{-2\cancel{n^2}\, 1/4\cancel{n^2}} = \frac{1}{2n^2} e^{-1/2}$$

$$f_n(c') = -\frac{1}{2n^2} e^{-2\cancel{n^2}\, 1/4\cancel{n^2}} = -\frac{1}{2n^2} e^{-1/2}$$

$\left|f_n(x)\right| \leq \frac{1}{2n^2} e^{-1/2} \forall x \in R \quad \Rightarrow \quad \sum \frac{1}{2n^2} e^{-1/2}$ convergente, luego la original es uniformente convergente.

TEOREMA(Integración): Si $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente en A y f_n integrables en A $\forall n \in N$, entonces la función suma es integrable en A y se verifica:

$$\sum_{n\geq 1} \int_a^x f_n = \int_a^x \sum_{n\geq 1} f_n$$

Además la convergencia de la serie anterior es uniforme en A

TEOREMA(Derivación): Si f_n derivables en A $\forall n \in N$, $\sum_{n\geq 1} f_n'$ es uniformemente convergente en A, y existe a $\in$ A tal que $\sum_{n\geq 1} f_n(a)$ es convergente, entonces $\sum_{n\geq 1} f_n$ es uniformemente convergente en A, la función suma es derivable y se verifica que:

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n\geq 1} f_n(x)\right] = \sum_{n\geq 1} f_n'(x)$$

- **SERIES DE POTENCIAS:**

DEFINICIÓN: Una serie de potencias es una expresión de la forma: $\sum_{n\geq 0} a_n x^n, \quad a_r \in R$. A los términos a_n se les llama coeficientes de la serie.

Ejemplos:

$$\sum_{n\geq 0} x^n, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}, \quad \sum_{n\geq 0} nx^n$$

Para estudiar la convergencia puntual, fijaremos la x y la trataremos como una serie normal. Al no tratarse de una serie de términos positivos, utilizaremos la convergencia absoluta

Ejemplos:

$$1) \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} b_n, \quad b_n = \frac{|x|^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1} / (n+1)!}{|x|^n / n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$ Luego b_n es convergente $\forall x \in R$

Por tanto la serie original es absolutamente convergente.

$$2) \sum_{n\geq 0} nx^n = \sum_{n\geq 0} b_n, \quad b_n = n|x|^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|x|^{n+1}}{n|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|x|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n}|x| = |x| \quad \begin{cases} abs.\ conv & |x| < 1 \\ no\ \ abs.\ \ conv & |x| > 1 \\ ?? & |x| = 1 \end{cases}$$

El caso general de una serie de potencias se expresa:

$\sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n, \quad a_r \in R$. A los términos a_n se les llama coeficientes de la serie.

Si hacemos t=x-a la reducimos al tipo anterior.

TEOREMA:

1) Si $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge puntualmente en $x_1 \neq 0$ entonces es absolutamente convergente si $|x| < |x_1|$
2) Si $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ diverge en $x_1 \neq 0$ entonces es divergente si $|x| > |x_1|$

Demostración:

1) $\sum_{n\geq 0} a_n x_1^n$ convergente $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0 \Rightarrow \exists n_0 \in N / \forall n \geq n_0 \rightarrow \left|a_n x_1^n\right| < 1$

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n \frac{x^n}{x_1^n} x_1^n\right| = \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \left|a_n x_1^n\right| < \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \forall n \geq n_o \left(\left|a_n x_1^n\right| < 1\right)$$

Por tanto $\sum_{n\geq 0}\left|\frac{x}{x_1}\right|^n$ es una mayorante a partir de n_0 de $\sum_{n\geq 0}\left|a_n x^n\right|$

$\sum_{n\geq 0}\left|\frac{x}{x_1}\right|^n$ es una serie geométrica de razón $r = \left|\frac{x}{x_1}\right| \Rightarrow \begin{cases} Conv. & \left|\frac{x}{x_1}\right| < 1 \\ Diver. & \left|\frac{x}{x_1}\right| > 1 \\ ?? & \left|\frac{x}{x_1}\right| = 1 \end{cases}$

Luego si $|x| < |x_1|$ entonces $\sum_{n\geq n_0}\left|\frac{x}{x_1}\right|^n$ es una mayorante convergente de $\sum_{n\geq n_0}\left|a_n x^n\right|$, luego la original es convergente a partir de n_0 y por tanto a partir de n=0. Debido a ello $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ es absolutamente convergente si $|x| < |x_1|$

2)Reducción al absurdo:

Supongamos que existe $x_2 / |x_2| > |x_1|$ y $\sum_{n\geq 0} a_n x_2^n$ absolutamente convergente. Por 1) la serie seria convergente si $|x| < |x_2|$, luego sería convergente en x_1, lo que es contradictorio.

DEFINICIÓN: De lo anterior se deduce que existe $r \in \overline{R} (r \geq 0)$ tal que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ es absolutamente convergente $\forall x \in R / |x| < r$, y divergente si $|x| > r$. Si $|x| = r$ puede ocurrir cualquier cosa. A r le llamaremos radio de convergencia de la serie de potencias.

$$r = \sup\left\{ s \in \overline{R} / \sum_{n\geq 0} a_n x^n \quad conv.\ si \quad |x| < s \right\}$$

PROPOSICIÓN: Sea $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ una serie de potencias con radio de convergencia r:

1)Si $\exists\, l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in \overline{R}$ entonces $r = 1/l$, es decir:

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

2) Si $\exists\, l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \overline{R}$ entonces $r = 1/l$, es decir:

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Demostración:

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n \quad b_n = |a_n x^n| \quad \sum_{n\geq 0} b_n\ ??$$

Aplicando el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} |x| \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x| l$$

Si $|x| l < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} b_n \ conv. \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n \ abs.\ conv.$ si $|x| < \frac{1}{l}$

Si $|x| l > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} b_n \ div. \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n \ no\ abs.\ conv.$ si $|x| > \frac{1}{l}$

No solo no es absolutamente convergente, sino que es divergente: si $|x| l > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} \neq 0$, luego la serie es divergente.

DEFINICIÓN: Si $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ tiene radio de convergencia r, llamamos intervalo de convergencia al intervalo (-r,r), y campo de convergencia al mayor intervalo en el que converge la serie. Por tanto el campo de convergencia será (-r,r), (-r,r], [-r,r) y [-r,r].

Ejemplos:

$$\sum_{n\geq 0} x^n$$

$a_n = 1 \quad \forall n \in N \quad r = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$ Intervalo de convergencia (-1,1)

$x = \pm 1 \Rightarrow$ Serie divergente $\Rightarrow$ Campo de convergencia (-1,1)

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad r = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n / n}{(-1)^{n+1} / (n+1)} \right| = 1$ Intervalo de convergencia(-1,1)

$x = -1 \Rightarrow$ Serie armónica $\Rightarrow$ Divergente

$x = 1 \Rightarrow$ Serie armónica alternada $\Rightarrow$ Convergente

Campo de convergencia (-1,1]

$\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n}$ r=1 Intervalo de convergencia(-1,1)

$x = -1 \Rightarrow$ Serie armónica alternada $\Rightarrow$ Convergente

$x = 1 \Rightarrow$ Serie armónica $\Rightarrow$ Divergente

Campo de convergencia [-1,1)

$\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n^2}$ r=1 Intervalo de convergencia(-1,1)

$x = -1 \Rightarrow$ Convergente

$x = 1 \Rightarrow$ Divergente

Campo de convergencia [-1,1]

DEFINICIÓN: Si $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ tiene radio de convergencia r>0 entonces converge uniformemente en cualquier intervalo $[a,b]\subset(-r,r)$.

Demostración:

Sea $h = max\{|a|,|b|\}$ $h < r$

Si $x \in [a,b] \Rightarrow |x|^n \leq h^n \Rightarrow |a_n x^n| \leq |a_n| h^n$

$\sum_{n\geq 0} |a_n| h^n$ es una mayorante de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$

Como $h < r$, $\sum_{n\geq 0} |a_n| h^n$ es convergente, y por el criterio de Weiertrasss $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ es absolutamente convergente $\forall x \in [a,b]$

COROLARIOS:

1) Si $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ tiene radio de convergencia r y $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ entonces $S(x)$ es continua en (-r,r)

2) (para integrales)Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformemente, entonces $\int_a^x \sum_{n\geq 0} f_n = \sum_{n\geq 0} \int_a^x f_n$

Si $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ tiene radio de convergencia r entonces:

$$\int_0^x \left(\sum a_n t^n\right) dt = \sum \int_0^x a_n t^n dt = \sum \int_0^x a_n t^n dt = \sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad x \in [a,b]\subset(-r,r)$$

la integral tiene radio de convergencia al menos r

3) (para derivadas)Si $\sum_{n\geq 0} f'_n$ converge uniformemente, entonces $\int_a^x \sum_{n\geq 0} f_n = \sum_{n\geq 0} \int_a^x f_n$

Demostración:

1)Veamos que $S(x)$ es continua en $x_0 \in (-r,r)$.

Existe $[a,b] / x_0 \in [a,b]\subset(-r,r)$. $S(x)$ es continua en $[a,b]$ por ser suma de funciones continuas, luego es continua en x_0

PROPOSICIÓN: Si $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ tiene radio de convergencia r, entonces:

$\sum_{n\geq 0} n a_n x^{n-1}$ y $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ también tiene radio de convergencia r.

No haremos la demostración, pero la idea es que si el radio de convergencia aumentara(Como ya hemos visto, no puede disminuir), al derivarla tendríamos una serie de radio de convergencia $r' > r$, y si integramos dicha serie obtendríamos la serie original con un radio de convergencia $r'' > r' > r$, lo cual es imposible, pues habría cambiado el radio de la serie original.

Por ello una serie de potencias define una función indefinidamente derivable en su intervalo de convergencia.

NOTACIÓN: Decimos que f pertenece a las funciones de clase infinita en I si y solo si f es indefinidamente derivable en I. Se representa así:

$f \in C^{\infty}(I)$

Por tanto $S(x) \in C^{\infty}(I)$

DEFINICIÓN: Dada una función f indefinidamente derivable en un intervalo $(-\delta,+\delta), \delta > 0$ definimos su SERIE DE TAYLOR en $x = 0$ como:

$$ST(f) = \sum_{k\geq 0} \frac{f^{k)}(0)}{k!}(x)^k$$

Analogamente se define la SERIE DE TAYLOR en $x = a$ como:

$$ST(f,a) = \sum_{k\geq 0} \frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

OBSERVACIÓN: ¿Qué relación hay entre f y $ST(f,a)$?

1)Si la serie no converge, no pueden ser iguales.

Ejemplo:

$$ST\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n\geq 0} x^n \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 1$$

2)Si la serie converge, la suma puede ser distinta de f. Serán iguales si además el resto enésimo tiende a cero.

TEOREMA: Si f es indefinidamente derivable en $(-\delta,+\delta), \delta > 0$ y $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \; \forall x \in I$, entonces:

$f(x) = ST(f)$ en I

TEOREMA: Si $\left|f^{n)}(x)\right| < M^n$ para un cierto $M \in R^+$ y $x \in I$, podemos asegurar la convergencia y $f(x) = ST(f)$

Ejemplo:

$$1) \operatorname{sen} x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$1/r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \quad r = \infty$, luego es convergente en R

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

- **SERIES DE FOURIER:**

IDEA INTUITIVA: Nos proponemos escribir cualquier función periódica, de periodo en principio 2π, en forma de una serie de senos y cosenos. Para ello habrá que tener en cuenta las siguientes expresiones:

1) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx = \pi, \; \forall n \in N$

2) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx = 0 \; \forall n \in N$

3) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = 0, \; \forall n,m \in N (n \neq m)$

4) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\cos(mx)dx = 0, \; \forall n,m \in N$

Demostracion:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(nx)dx = 1/2 \int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos(2nx))dx = 1/2 \left[x - 1/2n \operatorname{sen}(2nx)\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)dx = \left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\,\text{sen}(mx)dx = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x))dx = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{n-m}\text{sen}((n-m)x))\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left[-\frac{1}{n+m}\text{sen}((n+m)x)\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\cos(mx)dx = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}((n-m)x) + \text{sen}((n+m)x)dx = \tfrac{1}{2}\left[\frac{-1}{n-m}\cos((n-m)x)\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left[\frac{-1}{n+m}\cos((n+m)x)\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0$$

DEFINICIÓN: Dada una función periódica de periodo 2π, definimos su SERIE DE FOURIER como :

$$SF(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n\cos(nx) + b_n\,\text{sen}(nx)\right)$$

Donde a_0, a_n, b_n son los llamados coeficientes de Fourier, y vienen dados por:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}(nx)dx$$

Demostración:

Supongamos que $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n\cos(nx) + b_n\,\text{sen}(nx)\right)$. Integrando en $[-\pi,\pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx + 0 = \frac{a_0}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi$$

Si multiplicamos por $\cos(mx)$ e integramos en el mismo intervalo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0 + \sum_{n\geq 1}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(a_n\cos(nx)\cos(mx)\right)dx + 0\right] = a_m x$$

Haciendo lo mismo con $\text{sen}(mx)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}(nx)dx = 0 + \sum_{n\geq 1}\left[0 + \int_{-\pi}^{\pi}\left(b_n\,\text{sen}(nx)\,\text{sen}(mx)\right)dx\right] = b_m x$$

Donde los ceros se producen porque las integrales que quedan son impares, y por tanto se anulan.

OBSERVACIÓN: Lo que haremos será estudiar funciones en el intervalo $[-\pi,\pi]$ y extenderlas (hacerlas periódicas) en R

Ejemplo:

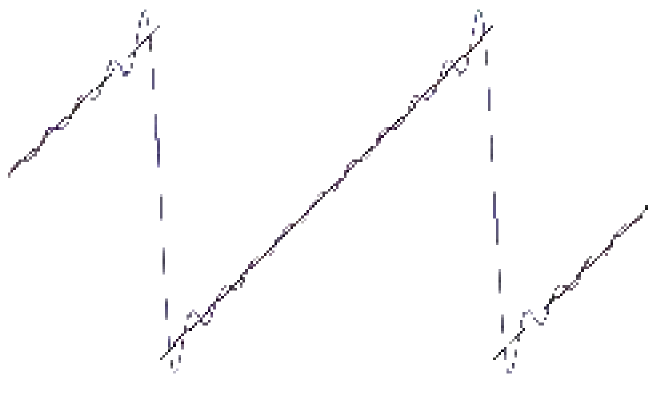
$$f(x) = x \text{ si } x \in (-\pi,\pi]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\text{sen}(nx)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,\text{sen}(nx)dx = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$



Como se observa en la gráfica, a medida que aumenta n, la serie de Fourier se aproxima más a la función. En la gráfica se han sumado los 10 primeros términos.

PROPOSICIÓN: Si $f(x)$ es periódica de periodo T, entonces se verifica que:

$$\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx, \quad \forall a \in R$$

Demostración:
Veamos que:

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx, \quad \forall a \in R$$

Hacemos $t = x - T$

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_{T-T}^{a-T+T} f(t+T)dt = \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(x)dx$$

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 g(x)dx + \int_0^T g(x)dx + \int_T^{a+T} g(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

IDEA INTUITIVA: Ahora vamos a intentar hacer la SF para funciones periodo arbitrario. Lo que vamos a hacer es usar una adaptación de las formulas de senos y cosenos:

$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{T}x\right)\\ \cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right)\end{array}\right\}$ son periódicas de periodo $\frac{2T}{n}$, cosa que se comprueba fácilmente, aplicando la definición de periodicidad.

DEFINICIÓN: Sea f una función periódica de periodo $2T$. Llamamos SERIE DE FOURIER de f a:

$$SF(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{T}x\right)\right)$$

Donde a_0, a_n, b_n son los llamados coeficientes de Fourier, y vienen dados por:

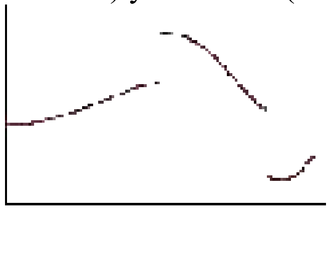
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)dx$$

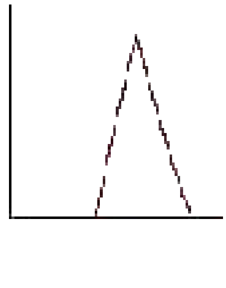
$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{T}x\right)dx$$

OBSERVACIÓN: Las integrales se pueden tomar en cualquier intervalo de longitud $2T$, como ya vimos.

DEFINICIÓN: Decimos que f es continua a trozos en un intervalo $[a,b]$, si es continua en $[a,b]$, excepto en un nº finito de puntos $c_1,\ldots,c_n$ y existen $f(c_i^-)$ y $f(c_i^+)$, $i = 1,\ldots,n$ (Es decir, los límites laterales) y son finitos(Es decir, si la discontinuidad es de tipo finito.)





Análogamente se define una función derivable a trozos, siendo además distintas las derivadas laterales(pues sino sería derivable en el punto.):

TEOREMA(Dirichlet): Si f es periódica y derivable a trozos, su SF converge en el punto x_0 a $\frac{1}{2}\left[f(x_0^-)+f(x_0^+)\right]$.

Por tanto, si f es continua en x_0, converge a x_0.

OBSERVACIÓN: Hasta ahora hemos estudiado el caso general de que las funciones sean cualesquiera. Pero si la función presenta simetría par o impar, los cálculos son más sencillas.

1)Sí f es par:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right)dx$$

$$b_n = 0$$

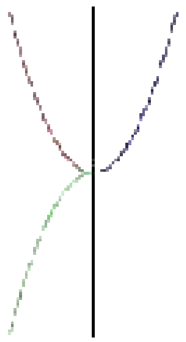
2)Si f es impar:

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{T}x\right)dx$$

CALCULO(Series de senos y cosenos): Supongamos $f:[0,\pi]\to R$. Queremos desarrollarla en forma de SERIE DE SENOS. Para ello consideraremos la extensión impar de f. Con ello hacemos que f sea impar. A esa nueva función la llamaremos f^i



Lo mismo podemos hacer con la extensión par, consiguiendo así la SERIE DE COSENOS de la función, pues f se hace par. A esta función la llamaremos f^p

En la figura la función original está en azul, la par en rojo y la impar en verde.

Haciendo las SF de las funciones que nos quedan obtendremos una expresión que converge a f en $[0,\pi]$, y a f^i o a f^p en $[-\pi,0]$según corresponda.

CALCULO(Sumación de series): A menudo nos piden que hallemos la serie de senos o de cosenos de una función, y después nos piden que sumemos una serie numérica a partir de la primera. El método para hacerlo consiste basicamente en hallar una valor de x , para el cual la serie de Fourier de senos o cosenos se pueda transformar en la serie numérica que buscamos.

Ejemplo:

$$f(x)=|x|+1,\ x\in[-\pi,\pi] \quad \text{Sumar}:\ 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$$

La serie de Fourier se calcula facilmente, ya que la función es par

$$f(x)=1+\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2},\ x\in[-\pi,\pi]$$

Como la función es convergente para x=π

$$f(\pi)=1+\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)\pi)}{(2n-1)^2}=1+\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\pi+1=1+\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\pi}{2}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8} \quad\Rightarrow\quad 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$