Índice

1. Resumen

Un conjunto de cargas eléctricas del mismo signo en un conductor tienden a repelerse, de forma que se sitúan en una configuración de mínima energía. Esta configuración sitúa las cargas en la superficie del conductor.

El siguiente programa de **OpenSCAD** simula el comportamiento de varias cargas encerradas en un conductor esférico. Tras encontrar la configuración de mínima energía, presenta el resultado como las aristas del cubrimiento convexo de las cargas, siendo este siempre un poliedro convexo.

Los poliedros generados presentan un alto grado se simetría. La forma final alcanzada parece depender únicamente del número de vértices iniciales, excepto por algunas simetrías especulares.

2. Cálculo del poliedro

2.1. Determinación de la posición de los vértices

Para determinar la posición final de las cargas dentro de la esfera se realiza una simulación del movimiento de las cargas eléctricas dentro de la esfera, hasta que su posición se estabilice. Para ello se siguen los siguientes pasos:

1. Se inicializan las N cargas a posiciones c_i aleatorias del espacio.

2. Por cada carga c_i:

   a) La fuerza de repulsión con cada una de las otras cargas c_j se calcula como

   $$f_{ij} = K \cdot \frac{(c_i - c_j)}{|(c_i - c_j)|^2}$$

   La constante K debería representar factores como el intervalo de tiempo de cada paso de la simulación y las masas de las cargas y su resistencia al movimiento, aunque en la práctica se ajusta a valores más altos para acelerar el resultado.

   b) Se suman dichas fuerzas para encontrar la fuerza total resultante f_i sobre c_i. $f_i = \sum_{j \neq i}^{N} f_{ij}$

3. Por cada carga c_i:

   a) Se calcula la nueva posición de la carga i como $c'_i = c_i + f_i$.

   b) La posición resultante se proyecta sobre una esfera de radio r centrada en el origen $c''_i = \frac{c'_i}{|c'_i|}$

4. Las nuevas posiciones c_i son los valores de c''_i

5. Se itera desde el paso 2 hasta alcanzar el criterio de terminación.

   a) El criterio de terminación del bucle es la estabilidad de las posiciones c_i, comparando un umbral ϵ con $\sum_i^N |c''_i - c_i|$

La figura 1 muestra gráficamente el proceso del cálculo de la nueva posición de una carga, para dos dimensiones y tres cargas totales.

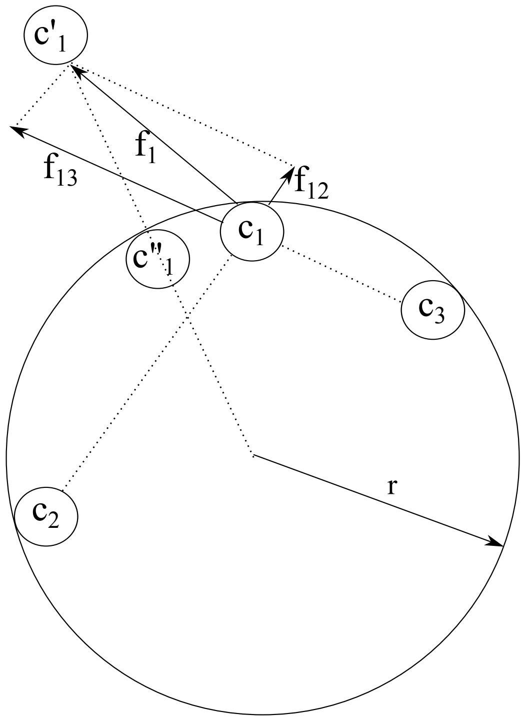


Figura 1: Cálculo de la nueva posición de la carga c_1 para un total de 3 cargas

2.2. Cubrimiento convexo de los vértices

Tras a primera parte del cálculo, se obtienen las posiciones c_i de los vértices del poliedro. Cada triplete de puntos define

- Una cara *exterior* (o parte de una cara) de este poliedro.
- Un triángulo *interior* que no forma parte del cubrimiento convexo de los vértices.

El algoritmo utilizado para determinar las aristas exteriores del poliedro es el siguiente:

1. Se parte del conjunto T de todos los tripletes

$$\{\{c_i, c_j, c_k\} | 1 \leq i < j < k \leq N\}$$

2. Por cada triplete $\{t_1, t_2, t_3\}$

   a) Se calcula la ecuación del plano que contiene sus tres puntos $ax+by+cy+d=0$, siendo $\times$ el producto vectorial y $\cdot$ el producto escalar.

$$(a, b, c) = (t_2 - t_1) \times (t_3, t_1)$$

$$d = -(a, b, c) \cdot t_1$$

   b) Se sustituye cada punto c_i en la ecuación del plano obtenida. Si el triplete pertenece al cubrimiento convexo, todos los resultados tendrán el mismo signo (o 0).

   c) Si el triplete pertenece al cubrimiento, sus aristas $\{t_1, t_2\}$, $\{t_2, t_3\}$ y $\{t_3, t_1\}$ se añaden al conjunto A de aristas exteriores.

3. Ejemplos de poliedros para $4 \leq N \leq 24$

Los ficheros `STL` de definición de cada poliedro pueden generarse desde la línea de comandos de **OpenSCAD**. El programa se invoca con los parámetros necesarios para fijar el número de vértices a calcular, así como la precisión del cálculo (variables `$fn` y `$fa`). El *shellscript* del listado **??** muestra un bucle con el cálculo de los poliedros desde 4 a 24 vértices.

```
#!/bin/sh
SCADFILE=./electrostatic-polyedron.scad

poliedro () {
  local N=$1
  openscad -o poliedro-$N.stl -D N=$N -D '$fn=50' -D '$fa=50' "$SCADFILE"
}
for i in $(seq 4 24)
do
  poliedro $i
done
```

Listado 1: Generación de los sólidos de ejemplo

Los ficheros `STL` generados pueden visualizarse con **OpenSCAD**, utilizando la orden `import`, como se muestra en el listado **??**

la referencia rara unareferenciainventada

```
STLFILE="poliedro-10.stl";          (unareferenciainventada)
ANGLE=20;

rotate([ANGLE,0,0]){
      translate([0,0,0]) {
            import(STLFILE);
      }
}
```

Listado 2: Generación de los sólidos de ejemplo

Las imágenes utilizadas en la tabla 1 se han generado con el programa del listado **??** y el *script* del listado **??**

```
#!/bin/bash -x
SCADFILE=./view-stl.scad

imagenes() {
  local N=$1
  local BIG=poliedro-$N.png
  local SMALL=poliedro-$N-small.png
  openscad -o $BIG --camera=0,0,525,0,0,0 --colorscheme=Nature -D STLFILE=\"poliedro-$N.st
  convert -resize 128x128 $BIG $SMALL
}

for i in $(seq 4 24)
do
  imagenes $i
done
```

Listado 3: Generación de los sólidos de ejemplo

Los ficheros `STL` se han importado en el servicio Sculpteo para su visualización en línea. La tabla 1 incluye la lista de poliedros y su *URL*.

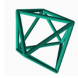
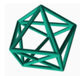
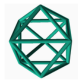
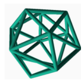
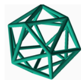
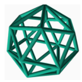
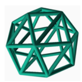
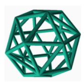
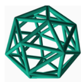
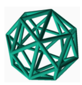
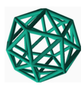
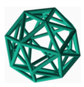
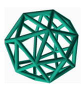
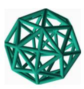
```
STLFILE="poliedro-10.stl";
ANGLE=20;

rotate([ANGLE,0,0]){
      translate([0,0,0]) {
            import(STLFILE);
      }
}
```

Listado 4: Generación de las imágenes de ejemplo

```
#!/bin/sh -x
SCADFILE=./electrostatic-polyedron.scad
```

Cuadro 1: Poliedros de ejemplo

Vértices	Sculpteo ID	Enlace	
4	hwBvUUPS	http://www.sculpteo.com/embed/design/hwBvUUPS	
5	zywXZ2Vv	http://www.sculpteo.com/embed/design/zywXZ2Vv	
6	Hd6M6qdV	http://www.sculpteo.com/embed/design/Hd6M6qdV	
7	e3Z7njee	http://www.sculpteo.com/embed/design/e3Z7njee	
8	zF9bWGAC	http://www.sculpteo.com/embed/design/zF9bWGAC	
9	MTTJEqKN	http://www.sculpteo.com/embed/design/MTTJEqKN	
10	XHaVXMzy	http://www.sculpteo.com/embed/design/XHaVXMzy	
11	cTu8ZKCy	http://www.sculpteo.com/embed/design/cTu8ZKCy	
12	XHZQE7ST	http://www.sculpteo.com/embed/design/XHZQE7ST	
13	A9fQg8jN	http://www.sculpteo.com/embed/design/A9fQg8jN	
14	BhTtJYyY	http://www.sculpteo.com/embed/design/BhTtJYyY	
15	kyYvU3Xd	http://www.sculpteo.com/embed/design/kyYvU3Xd	
16	HZBAytyz	http://www.sculpteo.com/embed/design/HZBAytyz	
17	BjZoe6GZ	http://www.sculpteo.com/embed/design/BjZoe6GZ	
18	dPc6d8nD	http://www.sculpteo.com/embed/design/dPc6d8nD	
19	PUog4ujR	http://www.sculpteo.com/embed/design/PUog4ujR	
20	Hfhs8x45	http://www.sculpteo.com/embed/design/Hfhs8x45	
21	SJuWkeMm	http://www.sculpteo.com/embed/design/SJuWkeMm	
22	ii3Bej6z	http://www.sculpteo.com/embed/design/ii3Bej6z	
23	KtMCe5s6	http://www.sculpteo.com/embed/design/KtMCe5s6	
24	xxAz2juM	http://www.sculpteo.com/embed/design/xxAz2juM	

```
poliedro () {
  local N=$1
  openscad -o poliedro-$N.stl -D N=$N -D '$fn=50' -D '$fa=50' "$SCADFILE"
}
for i in $(seq 4 24)
do
  gecho Generando poliedro $i
  poliedro $i
done
```

Listado 5: Generación de las imágenes de ejemplo

4. Implementación

4.1. Características del lenguaje

El lenguaje de **OpenSCAD** es de tipo funcional, con funciones matemáticas básicas.

- No hay bucles de tipo *mientras*, y deben implementarse como funciones recurivas.
- Distingue entre funciones (sin efectos laterales) y módulos (que crean efectivamente los sólidos).
  - Una consecuencia de que las funciones no tengan efectos laterales es la imposibilidad de trazar la ejecución de las mismas, ya que la instrución `log` se considera un efecto lateral.
- Las funciones admiten parámetros por defecto.
- Permite la construcción de listas de objetos, similares a *arrays*.
  - Los objetos pueden ser, entre otros, números y otras listas.
- Un punto tridimensional se especifica como una lista de tres valores.
- Ofrece facilidades para *for comprehensions*.

En la implementación se ha optado por utilizar las mínimas funciones del sistema.

4.2. Cálculo de la posición final de las cargas

OpenSCAD no ofrece facilidades básicas como la distancia entre puntos tridimentsionales. Esto permite incluir esta función simple a modo de ejemplo de sintaxis de su lenguaje

```
function distancia(a,b) =
  let(
    dx = a[0]-b[0],
    dy = a[1]-b[1],
    dz = a[2]-b[2]
  )
  sqrt(dx*dx + dy*dy + dz*dz);
```

Listado 6: Distancia entre puntos tridimensionales (sqrt es una función incluída en OpenSCAD)

A diferencia de la mayoría de lenguajes, **OpenSCAD** no ofrece bucles de tipo **mientras**. Estas construcciones deben emularse con funciones recursivas, que utilicen a su vez operador condicional ternario. En este ejemplo, se utiliza una función recursiva para recorrer una lista y acumular sus valores. puede verse también el uso de parámetros por defecto.

```
function sumaPuntos(lista) = suma(lista,[0,0,0],0);
function suma(lista,retorno=0,i=0) =
  i>=len(lista) ?
  retorno :
  suma(lista, lista[i]+retorno, i+1);
```

Listado 7: Distancia entre puntos tridimensionales

Los bucles `for` siempre forman parte de un *for comprehension*, lo que implica que su resultado no puee ser un valor único, sino una lista con una posición por cada vuelta. Para conseguir acumular la distancia total entre dos listas de puntos es necesario, por tanto, un bucle `for` y un bucle `while` implementado como función recursiva.

```
function distancias(puntos1, puntos2 ) =    [
     for( i =[0:1:len(puntos1)-1] )
          distancia(puntos1[i],puntos2[i])
];

function errorTotal(puntos1,puntos2) = suma(distancias(puntos1,puntos2));
```

Listado 8: Suma de distancias entre dos listas de puntos

Las fuerzas aplicadas en cada carga se calculan también como un *for comprehension*.

```
function fuerzasParaPunto( p, puntos ) = [
 for( punto = puntos )
   let(
      d = distancia(p,punto)
   )
   if( punto != p )
     (p - punto)/(d*d)
];

function modulo(vector) = distancia(vector,[0,0,0]);
```

Listado 9: Cálclo de las fuerzas que actúan sobre una carga

La función `nuevoPuntoParaIteracion` determina la nueva posición de un punto, y la función `iteracion` utiliza la anterior para calcular la nueva posición de todos los puntos.

```
function normaliza( p, radio ) = radio * p / modulo(p);

function nuevoPuntoParaIteracion(p,puntos, radio=100) =
   let(
      fuerzas = fuerzasParaPunto( p, puntos ),
      factorDeAmpliacion = radio*radio,
      fuerza = sumaPuntos(fuerzas)*factorDeAmpliacion,
      nuevoPunto = p + fuerza
   )
   normaliza(nuevoPunto,radio);

function iteracion(puntos, radio=100) = [
   for( i = puntos) nuevoPuntoParaIteracion(i,puntos,radio)
];
```

Listado 10: Cálculo de las nuevas posiciones de las cargas a partir de las actuales

La función `iteraCalculoDePuntos` realiza un bucle `while` (nuevamente, en forma de función recursiva) hasta que la diferencia de posición entre un paso y el anterior es menor de un umbral. Por seguridad, se incluye también un límite en el número máximo de iteraciones.

```
function iteraCalculoDePuntos( puntos, radio=100, errorMaximo=0.01, contador=0, iteraciones
  let(
    siguientesPuntos = iteracion(puntos,radio),
    error = errorTotal(siguientesPuntos, puntos)
  )
  error <= errorMaximo || contador >= iteracionesMaximas ?
        siguientesPuntos :
        iteraCalculoDePuntos(siguientesPuntos, radio, errorMaximo, contador+1,iteracionesMa
```

Listado 11: Bucle hasta no superar una diferencia mínima o un número máximo de iteraciones

Tan solo resta comenzar con un número determinado de puntos aleatorios e iterarlos hasta conseguir llegar al equilibrio.

```
function puntoAleatorio() = rands(-1000,1000,3);

function puntosAleatorios(n) = [for( i=[0:n-1] ) puntoAleatorio()];

function verticesPoliedroElectrostatico(n) = iteraCalculoDePuntos(puntosAleatorios(n));
```

Listado 12: Cálculo de los vértices de un poliedro

4.3. Cálculo del cubrimiento convexo

Comenzamos definiendo primitivas básicas para el trabajo con vectores: producto escalar y vectorial. El producto vectorial ya está implementado en **OpenSCAD** (función `cross`), pero se incluye aquí por completitud del algoritmo.

```
function productoEscalar(v1,v2) =
  suma( [
    for(i=[0:len(v1)-1]) v1[i]*v2[i]
  ] );

function productoVectorial(v1,v2) = [
    v1[1]*v2[2] - v1[2]*v2[1],
    - v1[0]*v2[2] + v1[2]*v2[0],
    v1[0]*v2[1] - v1[1]*v2[0]
];
```

Listado 13: Cálculo del producto escalar y vectorial

Utilizando los productos, podemos definir la ecuación del plano que pasa por tres puntos, y una función que determina si un punto pertenece a un plano, o si queda a un lado o a otro del mismo.

```
function ecuacionDePlanoPorTresPuntos(p1,p2,p3) =
  let(
    puntoEnElPlano = p1,
    vector1 = p2-p1,
    vector2 = p3-p1,
    normal = productoVectorial(vector1,vector2),
    d = -productoEscalar(puntoEnElPlano,normal)
  )
  [normal,d];

function ecuacionDePlanoPorTresPuntosEnLista(lista) =
   ecuacionDePlanoPorTresPuntos(lista[0],lista[1],lista[2]);

function sustituyeEcuacionPlano(ecuacion,punto) =
    productoEscalar(ecuacion[0],punto) + ecuacion[1];
```

Listado 14: Determinación de la ecuación de un plano por tres ypuntos, y su aplicación a un punto

Las siguientes funciones resumen el cálculo de aristas ocultas. Necesitan varias funciones de utilidad definidas posteriormente.

```
function quitarAristasDuplicadas(aristas,ret=[],indice=0) =
  indice >= len(aristas) ?
  ret :
  (
      let(
        a1 = aristas[indice],
        a2 = [a1[1],a1[0]]
      )
      contenidoEnLista(a1,ret) || contenidoEnLista(a2,ret) ?
      quitarAristasDuplicadas(aristas,ret,indice+1) :
      quitarAristasDuplicadas(aristas,agregarALista(ret,a1),indice+1)
  );

function aristasExteriores(vertices) =
```

```
    let(
      n = len(vertices),
      indicesTriangulos = todosLosTripletesHasta(n)
    )
    aplanaUnNivel([
        for( indices = indicesTriangulos )
            if( todosLosPuntosAlMismoLado(indices, vertices) )
                aristasDeTriangulo(indices)
    ]);

function todosLosPuntosAlMismoLado(triangulo, puntos, tolerancia=1) =
   let(
      ecuacionPlano = ecuacionDePlanoPorTresPuntosEnLista(trianguloConIndicesDeVertices(tri
      lados = [
        for(punto=puntos)
            sustituyeEcuacionPlano(ecuacionPlano, punto)
      ],
      ladosNegados = [for(lado=lados) -lado]
   )
   todosMayoresOIgualesQue(lados,-tolerancia) ||
        todosMayoresOIgualesQue(ladosNegados,-tolerancia);
```

Listado 15: Cálculo de aristas exteriores

algoalgoalgoalgoalgoalgo algoalgoalgoalgoalgoalgoalgoalgoalgoalgoalgoa lgoalgoalgoalgoalgoalgoalgoalgoalgoalgo algoalgoalgoalgoalgoalgoalgoalgoalgo algoalgoalgoalgoalgoalgoalgoalgoalgoalgoalgoalgoalgoalgoa lgoalgoalgoalgoalgoalgoalgo algoalgoalgoalgoalgoa lgoalgoalgoalgoalgoalgoalgoalgoalgoalgoalgoalgoalgoalgo algoalgoalgoalgoalgo

```
function todosMayoresOIgualesQue(valores, umbral) =
    let(
        comprobaciones = [
            for( v=valores )
                v - umbral >= 0 ?
                1 :
                0
        ]
    )
    suma(comprobaciones) == len(valores);



function todosLosTripletesHasta(n) = [
      for( i=[0:n-3] , j=[i+1:n-2] , k=[j+1:n-1] ) [i,j,k]
];

function trianguloConIndicesDeVertices(indices, vertices) =
  [vertices[indices[0]], vertices[indices[1]], vertices[indices[2]]];

function aristasDeTriangulo(triplete) = [
      [triplete[0], triplete[1]],
      [triplete[1], triplete[2]],
      [triplete[2], triplete[0]]
];

// SI UNA LISTA ES [[[a,b],[c,d]],[[e,f],[g,h]]] la deja en [[a,b],[c,d],[e,f],[g,h]]
function aplanaUnNivel(lista) = [
      for( a = lista , b = a ) b
];


function contenidoEnLista(v, lista, indice=0) =
  lista[indice] == v ?
```

```
  true : (
    indice>=len(lista) ?
    false :
    contenidoEnLista(v,lista,indice+1)
  );

function agregarALista(lista,valor) = [
      for(i=[0:len(lista)])
          i < len(lista) ? lista[i] : valor
];
```

Listado 16: Funciones auxiliares para el cálculo de aristas exteriores

4.4. Renderización de poliedros

Hasta el momento, sólo se ha realizado el cálculo de los vértices del poliedro, pero **OpenSCAD** no ha renderizado ninguna forma.

Para que **OpenSCAD** genere algún volumen hay que utilizar un `module` predefinido o uno propio construido a base de los ya existentes.

En este caso, cada arista se renderiza como un cilindro rematado por esferas.

```
N = 20;
vertices = verticesPoliedroElectrostatico(N);
aristas = aristasExteriores(vertices);
aristasSinDuplicados = quitarAristasDuplicadas(aristas);

module palo(a,b,r){
    hull(){
        translate(a) sphere(r);
        translate(b) sphere(r);
    }
}

module aristasAPalos(aristas,vertices,ancho=10){
    for( i=aristas )
        palo(vertices[i[0]],vertices[i[1]],ancho);
}

aristasAPalos(aristasSinDuplicados,vertices,5);
```

Listado 17: Generación de un poliedro