Algoritmo de Balas aplicado ao TSP com janelas de tempo e carro elétrico

25 de julho de 2025

Orientador: Álvaro Junio Pereira Franco - alvaro.junio@ufsc.br

Estudante: Felipe Lourenço da Silva - felipe.lourenco@grad.ufsc.br

Departamento: Informática e Estatística

Centro de ensino: Tecnológico

Título do projeto: Modelos e algoritmos para variações modernas do problema de roteamento de veículos

Fonte financiadora: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Termo de Outorga - Processo: 405247/2023-0 (SIGPEX N. 202104940)

Resumo

Adaptamos o algoritmo de Balas que resolve o TSP com janelas de tempo para resolver o TSP com janelas de tempo e carro elétrico.

O algoritmo de Balas

O algoritmo de Balas foi apresentado no artigo [1]. Uma implementação deste algoritmo foi apresentada em [2]. Vamos usar a mesma notação que aparece nos artigos citados. O grafo de entrada possui n vértices e é completo. As n cidades são indexadas por índices em $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Muitas vezes escrevemos i como o índice da cidade i. Uma permutação π de $1, 2, \dots, n$ é uma solução do TSP clássico. A posição da cidade i em uma solução viável do problema é denotado por $\pi(i)$. O grafo possui custos nas arestas t_{ij} que representam tanto a distância quanto o tempo entre os vértices i e j. O algoritmo de Balas resolve o TSP com a seguinte restrição: dado um inteiro positivo k e qualquer par de cidades i e j, se $j \geq i + k$ então em qualquer solução viável do problema, a cidade i deve preceder a cidade j, ou seja, $\pi(i) < \pi(j)$. A este problema, vamos nos referir como TSP restrito. O algoritmo consiste de uma redução do TSP restrito para o problema de encontrar um caminho de menor custo em um grafo dirigido acíclico.

Existem condições necessárias importantes (mas não suficientes) que valem destacar. A primeira delas determina as cidades candidatas a ocupar uma determinada posição em uma solução viável, π^{-1}. As cidades candidatas a ocupar a posição i de uma solução viável são aquelas dentro do intervalo de inteiros $\{\max\{1, i-k+1\}, \ldots, \min\{i+k-1, n\}\}$. Podemos então escrever que uma cidade candidata $\pi^{-1}(i)$ atende a seguinte restrição

$$\max\{1, i-k+1\} \leq \pi^{-1}(i) \leq \min\{i+k-1, n\}.$$

Para qualquer cidade j, a posição de j em uma solução viável também está definida dentro do seguinte intervalo de inteiros $\{\max\{1, j-k+1\}, \ldots \min\{j+k-1, n\}\}$, ou seja,

$$\max\{1, j-k+1\} \leq \pi(j) \leq \min\{j+k-1, n\}.$$

Portanto, dada a $(i-1)$-ésima visita do caixeiro viajante a algum vértice do grafo, o próximo vértice j a ser visitado poderá ser obtido através da construção de um grafo auxiliar considerando todas as possibilidades de vértices candidatos para a posição i (ou seja, $\pi^{-1}(i) = \max\{1, i-k+1\}, \ldots, \min\{i+k-1, n\}$) e considerando todas as posições que uma cidade j pode ocupar (ou seja, $\pi(j) = \max\{1, j-k+1\}, \ldots, \min\{j+k-1, n\}$). Caso alguma cidade candidata j para a posição i não esteja dentro do intervalo descrito acima, então essa cidade não deve ser considerada. Além disso, devemos ainda verificar a condição do TSP restrito: se $j \geq i+k$ então $\pi(i) < \pi(j)$.

O grafo auxiliar G^* é construído com $n+1$ camadas. O conjunto de vértices da camada i do grafo auxiliar é denotado por V_i^*. $V_1^* = \{s\}$ (vértice fonte s). $V_{n+1}^* = \{t = s\}$ (vértice sorvedouro t que é igual a fonte s). O número de vértices de uma cada V_i^i é no máximo $(k+1)2^{k-2}$ para $i = 2, \ldots, n$. O grau de entrada de cada vértice do grafo auxiliar é no máximo k.

Em geral, a segunte recorrência calcula o custo de um segmento ótimo começando na cidade 1, passando pelas cidades de um subconjunto $W \subset N$ nas posições $2, \ldots, i-1$ e visitando a cidade j na posição i:

$$C(W, i, j) = \min_{l \in W} \{W \backslash \{l\}, i-1, l\}.$$

No TSP clássico, existem muitas possibilidades para um conjunto W com $i-2$ elementos, a saber, $\binom{n}{i-2}$. No entanto, no TSP restrito, as possibilidades para W são poucas e descritas por pares de subconjuntos cujo tamanho de cada um é limitado por k. Os pares são:

$$S^-(\pi, i) := \{l \in (1, \ldots, n) : l \geq i, \pi(l) \leq i-1\} \text{ e}$$

$$S^+(\pi, i) := \{h \in (1, \ldots, n) : h \leq i-1, \pi(h) \geq i\}.$$

Descrevendo os conjuntos acima de outra forma, $S^-(\pi, i)$ é o conjunto de cidades de uma solução viável π que possuem índices maiores ou iguais a i e que foram visitadas em alguma posição $1, \ldots, i-1$, enquanto que $S^+(\pi, i)$ é o conjunto de cidades de uma solução viável π que possuem índices menores ou iguais a $i-1$ e serão visitadas em alguma posição $i, \ldots, n$. É demonstrado que $|S^-(\pi, i)| = |S^+(\pi, i)| \leq \lfloor k/2 \rfloor$.

Um caminho de custo mínimo no grafo auxiliar passará por um vértice em cada camada do grafo. Um vértice deste caminho na camada i contém a cidade que é visitada na posição i da solução ótima. Um vértice na camada i do grafo auxiliar é denotado por $(i, j, S_{ij}^-, S_{ij}^+)$ sendo j uma cidade candidata à posição i, e S_{ij}^- e S_{ij}^+ sendo, respectivamente, $S^-(\pi, i)$ e $S^+(\pi, i)$. A construção dos vértices $(i, j, S_{ij}^-, S_{ij}^+)$ da camada V_i^* é realizada considerando todos os candidatos j para a posição i. Dessa forma, é possível obter todos os vértices da camada V_i^*. Os arcos de G^* conectam vértices de camadas consecutivas. Dois vértices, $(i-1, l, S_{i-1,l}^-, S_{i-1,l}^+)$ e $(i, j, S_{ij}^-, S_{ij}^+)$ são adjacentes (*compatíveis*) se cada caminho $T_{i,j}$ em G que vai da cidade 1 até a cidade j na posição i pode ser obtido por um caminho $T_{i-1,l}$ em G que vai da cidade 1 até a cidade l na posição $i-1$. Ou seja, basta adicionar j ao caminho $T_{i-1,l}$ para obter $T_{i,j}$. Os vértices de um caminho $T_{i,j}$ estão no conjunto $N(i, j, S_{ij}^-, S_{ij}^+) = (N_{i-1} \setminus S_{ij}^+) \cup S_{i,j}^-$. N_i é uma notação para o conjunto das cidades $\{1, 2, \ldots, i\}$. Com isso, vértices $(i-1, l, S^-, S^+)$ e (i, j, S^-, S^+) são compatíveis se e somente se

$$N(i, j, S_{ij}^-, S_{ij}^+) = N(i-1, l, S_{i-1,l}^-, S_{i-1,l}^+) \cup \{l\}.$$

Para obter os arcos de maneira eficiente, a última equação é expressa em termos dos conjuntos S_{ij}^-, S_{ij}^+, $S_{i-1,l}^-$ e $S_{i-1,l}^+$.

Proposição de Balas. Os vértices $(i-1, l, S_{i-1,l}^-, S_{i-1,l}^+)$ e $(i, j, S_{ij}^-, S_{ij}^+)$ são adjacentes (compatíveis) se e somente se $j \neq l$ e vale uma das seguintes condições.

- Se $l < i-1$ e $i-1 \in S_{i-1,l}^-$,
  então $S_{ij}^- = S_{i-1,l}^- \setminus \{i-1\}$ e $S_{ij}^+ = S_{i-1,l}^+ \setminus \{l\}$.
- Se $l < i-1$ e $i-1 \notin S_{i-1,l}^-$,
  então $S_{ij}^- = S_{i-1,l}^-$ e $S_{ij}^+ = S_{i-1,l}^+ \setminus \{l\} \cup \{i-1\}$.
- Se $l = i-1$,
  então $S_{ij}^- = S_{i-1,l}^-$ e $S_{ij}^+ = S_{i-1,l}^+$.
- Se $l > i-1$ e $i-1 \in S_{i-1,l}^-$,
  então $S_{ij}^- = S_{i-1,l}^- \setminus \{i-1\} \cup \{l\}$ e $S_{ij}^+ = S_{i-1,l}^+$.
- Se $l > i-1$ e $i-1 \notin S_{i-1,l}^-$,
  então $S_{ij}^- = S_{i-1,l}^- \cup \{l\}$ e $S_{ij}^+ = S_{i-1,l}^+ \cup \{i-1\}$.

Para finalizar, o custo de um arco entre os vértices $(i-1, l, S_{i-1,l}^-, S_{i-1,l}^+)$ e $(i, j, S_{ij}^-, S_{ij}^+)$ em G^* é o custo do arco entre os vértices l e j de G (c_{lj}).

O tempo de execução para resolver o problema do caminho mínimo no grafo auxiliar construído para o problema do TSP restrito é $O(k^2 2^{k-2} n)$. Ou seja, o problema está é tratável quando o parâmetro k é fixo e pequeno (FPT - *Fixed Parameter Tractable*).

Com isso, finalizamos a descrição do algoritmo de Balas para o TSP restrito. No entanto, Balas generalizou o algoritmo para o caso onde a restrição de que i preceda a cidade j em uma solução viável sempre que $j \geq i + k(i)$. Ou seja, cada vértice i pode ter um k diferente. Em seguida vamos descrever o algoritmos de Balas restrito e generalizado para este caso.

Para que uma posição de uma cidade j seja igual a i em uma solução viável ($\pi(j) = i$), é necessário e suficiente que i esteja no seguinte intervalo $\max\{1, j - |P_j|\} \leq i \leq \min\{n, j + k(j) - 1\}$, sendo $P_j = \{l \in N : l < j \text{ e } l + k(l) \geq j + 1\}$.

Vamos acompanhar de perto a demonstração de Bala para as desigualdades acima.

Necessidade. Primeiro note que se $i \geq j$, então $\max\{1, j - |P_j|\} \leq i$ é satisfeita. Se $i \leq j$, então $i \leq \min\{n, j + k(j) - 1\}$ é satisfeita. Logo, falta mostrar que a primeira inequação é válida quando $i < j$ e a segunda inequação é válida quando $i > j$.

Quando $i > j$, pelo princípio da casa dos pombos, é fato que teremos algum valor entre 1 e $i - 1$ sendo a posição de alguma cidade $l > i$. Logo, $\pi(j) > \pi(l)$ e assim

$$i < l < j + k(j) - 1,$$

sendo que a segunda desigualdade vale pois precisamos atender ao TSP restrito generalizado onde temos se $\pi(l) \leq \pi(j)$ então $l \leq j + k(j) - 1$.

Quando $i < j$, então teremos $\pi(l) > \pi(j)$ para $j - i$ cidades l tais que $l < j$. Vamos ver o porquê. As cidades de N_{j-1} podem ocupar até $i - 1$ posições k tal que $\pi(k) < \pi(j)$. As outras cidades de N_{j-1}, ou seja $j - 1 - (i - 1) = j - i$ cidades, ocupam posições depois de i. Dessa forma, para uma cidade l dentre essa $j - i$ cidades, temos $\pi(l) > \pi(j)$ como queríamos mostrar. Mas, $\pi(l) > \pi(j)$ implica que $j \leq l + k(l) - 1$ (TSP restrito). Assim, o conjunto de cidades $l < j$ tal que $\pi(l) > \pi(j)$ é exatamente P_j. Portanto, $|P_j| \geq j - i$ ou $i \geq j - |P_j|$.

Suficiência. Balas segue com a demonstração da suficiência construindo soluções viáveis com $\pi(j) = i$. Para mais detalhes, consulte [1].

Balas apresenta uma caracterização que determina o valor de $\pi(i)$ dentro de um intervalo de números inteiros. Para que haja também uma caracterização determinando o valor de $\pi^{-1}(i)$ (ou seja, os candidatos para a posição i) dentro de um intervalo de números inteiros, os valores $k(i)$ precisam atender ao seguinte: $k(i) - k(i+1) \leq 1$ para $i = 1, \ldots, n$. Em geral, o que temos é a seguinte condição necessária mas não suficiente. Para qualquer solução viável do TSP restrito e generalizado, $j_{(i)} \leq \pi^{-1}(i) \leq j^{(i)}$ para qualquer posição i desta solução sendo

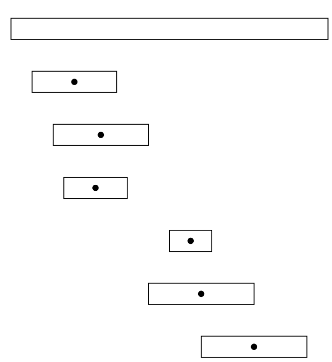
$$j_{(i)} := \min\{j : j + k(j) \geq i + 1\},$$

$$j^{(i)} := \max\{j : j - i \leq |P_j|\}.$$

Como esta condição em geral é necessária mas não suficiente, para evitar criar vértices que não estarão em qualquer solução viável do problema, é também necessário verificar a condição do TSP restrito e generalizado: ao criar um vértice $(i, j, S_{ij}^-, S_{ij}^+)$, devemos verificar para toda cidade l ainda não visitada (em S_{ij}^+), a condição $\pi(l) < \pi(j)$, caso $j \geq l + k(l)$. No trabalho de Balas e Simonetti [2], os autores apresentam uma forma mais rápida para tratar este caso (veja sobre $kthresh(v)$ no próximo parágrafo). Para nosso intuito, vamos trabalhar com o teste mais lento (verificar todos os vértices em S^+), porém ainda polinomial no tamanho da entrada.

Um teste mais rápido para verificar se um vértice v do grafo construído pertence a alguma solução inviável pode ser feita através de um limitante denotado $kthresh(v)$. Primeiro, é importante notar que um vértice $v = (i, j, S_{ij}^-, S_{ij}^+)$ em uma solução viável do problema, implica que $k(j)$ é maior que a diferença entre a cidade de maior índice em S^- e j (pois, $l < j + k(j)$ para todo l em S_{ij}^- e assim, $k(j) > \max\{S_{ij}^-\} - j$). Para tratar $S_{ij}^- = \emptyset$, temos $k(j) > \max\{0, \max\{S_{ij}^-\}\} - j$. Dessa forma, $kthresh(v) = 1 + \max\{0, \max\{S_{ij}^-\}\} - j$. Portanto, qualquer vértice $v = (i, j, S_{ij}^-, S_{ij}^+)$ tal que $kthresh(v) > k(j)$ pertence a uma solução inviável e pode ser desconsiderado.

Para finalizar, agora vamos mostrar como Balas e Simonetti transformam o problema do TSP com janelas de tempos para o TSP restrito e generalizado. A ideia é usar as janelas para impor restrições de precedência: se $j \geq i + k(i)$, então $\pi(i) < \pi(j)$. Suponha que cada cidade i tenha janelas de tempo definidas no intervalo $[a_i, b_i]$. Considere também t_{ij}, o tempo de viagem de i até j. Em qualquer solução viável, uma cidade i tem que preceder uma cidade j se $a_j + t_{ji} > b_i$. Fixada uma cidade i, ao escolher a cidade j_0 com menor índice tal que $a_j + t_{ji} > b_i$ para toda cidade $j \geq j_0$, então podemos definir $k(i) = j_0 - i$. Para a cidade 1, $k(1) = 1$ e para as outras cidades, caso não exista tal j_0, então $j_0 = n + 1$.



i	janela	$j_0 - i$	k
1			1
2		$5-2$	3
3		$7-3$	4
4		$5-4$	1
5		$8-5$	3
6		$8-6$	2
7		$8-7$	1

Figura 1: Caso com $t_{ji} = 0$. Mesmo exemplo presente no trabalho de Balas e Simonetti.

Alterar a ordem das cidades pode alterar os $k(i)$'s encontrados. Quanto menor for $k = \max_{i=1,\ldots,n}\{k(i)\}$, melhor será o desempenho do algoritmo, já que o tempo de execução depende exponenciamente de tal k. Balas e Simonetti comentam que encontrar tal k talvez seja NP-difícil [2].

Carro elétrico

A partir daqui, vamos também usar a notação presente no artigo de Roberti e Wen [3].

Referências

[1] Egon Balas. ≪New classes of efficiently solvable generalized traveling salesman problems≫. Em: *Annals of Operations Research* 86.0 (1999), pp. 529–558.

[2] Egon Balas e Neil Simonetti. ≪Linear time dynamic-programming algorithms for new classes of restricted TSPs: A computational study≫. Em: *INFORMS journal on Computing* 13.1 (2001), pp. 56–75.

[3] R. Roberti e M. Wen. ≪The electric traveling salesman problem with time windows≫. Em: *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review* 89 (2016), pp. 32–52.