

# Algoritmo de Balas aplicado ao TSP com janelas de tempo e carro elétrico

24 de julho de 2025

**Orientador:** Álvaro Junio Pereira Franco - `alvaro.junio@ufsc.br`

**Estudante:** Felipe Lourenço da Silva - `felipe.lourenco@grad.ufsc.br`

**Departamento:** Informática e Estatística

**Centro de ensino:** Tecnológico

**Título do projeto:** Modelos e algoritmos para variações modernas do problema de roteamento de veículos

**Fonte financiadora:** Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Termo de Outorga - Processo: 405247/2023-0 (SIGPEX N. 202104940)

## Resumo

Adaptamos o algoritmo de Balas que resolve o TSP com janelas de tempo para resolver o TSP com janelas de tempo e carro elétrico.

## O algoritmo de Balas

O algoritmo de Balas foi apresentado no artigo [1]. Uma implementação deste algoritmo foi apresentada em [2]. Vamos usar a mesma notação que aparece nos artigos citados. O grafo de entrada possui  $n$  vértices e é completo. As  $n$  cidades são indexadas por índices em  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ . Muitas vezes escrevemos  $i$  como o índice da cidade  $i$ . Uma permutação  $\pi$  de  $1, 2, \dots, n$  é uma solução do TSP clássico. A posição da cidade  $i$  em uma solução viável do problema é denotado por  $\pi(i)$ . O grafo possui custos nas arestas  $t_{ij}$  que representam tanto a distância quanto o tempo entre os vértices  $i$  e  $j$ . O algoritmo de Balas resolve o TSP com a seguinte restrição: dado um inteiro positivo  $k$  e qualquer par de cidades  $i$  e  $j$ , se  $j \geq i + k$  então em qualquer solução viável do problema, a cidade  $i$  deve preceder a cidade  $j$ , ou seja,  $\pi(i) < \pi(j)$ . A este problema, vamos

nos referir como TSP restrito. O algoritmo consiste de uma redução do TSP restrito para o problema de encontrar um caminho de menor custo em um grafo dirigido acíclico.

Existem condições necessárias importantes (mas não suficientes) que valem destacar. A primeira delas determina as cidades candidatas a ocupar uma determinada posição em uma solução viável,  $\pi^{-1}$ . As cidades candidatas a ocupar a posição  $i$  de uma solução viável são aquelas dentro do intervalo de inteiros  $\{\max\{1, i - k + 1\}, \dots, \min\{i + k - 1, n\}\}$ . Podemos então escrever que uma cidade candidata  $\pi^{-1}(i)$  atende a seguinte restrição

$$\max\{1, i - k + 1\} \leq \pi^{-1}(i) \leq \min\{i + k - 1, n\}.$$

Para qualquer cidade  $j$ , a posição de  $j$  em uma solução viável também está definida dentro do seguinte intervalo de inteiros  $\{\max\{1, j - k + 1\}, \dots, \min\{j + k - 1, n\}\}$ , ou seja,

$$\max\{1, j - k + 1\} \leq \pi(j) \leq \min\{j + k - 1, n\}.$$

Portanto, dada a  $(i - 1)$ -ésima visita do caixeiro viajante a algum vértice do grafo, o próximo vértice  $j$  a ser visitado poderá ser obtido através da construção de um grafo auxiliar considerando todas as possibilidades de vértices candidatos para a posição  $i$  (ou seja,  $\pi^{-1}(i) = \max\{1, i - k + 1\}, \dots, \min\{i + k - 1, n\}$ ) e considerando todas as posições que uma cidade  $j$  pode ocupar (ou seja,  $\pi(j) = \max\{1, j - k + 1\}, \dots, \min\{j + k - 1, n\}$ ). Caso alguma cidade candidata  $j$  para a posição  $i$  não esteja dentro do intervalo descrito acima, então essa cidade não deve ser considerada. Além disso, devemos ainda verificar a condição do TSP restrito: se  $j \geq i + k$  então  $\pi(i) < \pi(j)$ .

O grafo auxiliar  $G^*$  é construído com  $n + 1$  camadas. O conjunto de vértices da camada  $i$  do grafo auxiliar é denotado por  $V_i^*$ .  $V_1^* = \{s\}$  (vértice fonte  $s$ ).  $V_{n+1}^* = \{t = s\}$  (vértice sorvedouro  $t$  que é igual a fonte  $s$ ). O número de vértices de uma cada  $V_i^*$  é no máximo  $(k + 1)2^{k-2}$  para  $i = 2, \dots, n$ . O grau de entrada de cada vértice do grafo auxiliar é no máximo  $k$ .

Em geral, a seguinte recorrência calcula o custo de um segmento ótimo começando na cidade 1, passando pelas cidades de um subconjunto  $W \subset N$  nas posições  $2, \dots, i - 1$  e visitando a cidade  $j$  na posição  $i$ :

$$C(W, i, j) = \min_{l \in W} \{C(W \setminus \{l\}, i - 1, l) + c_{il}\}.$$

No TSP clássico, existem muitas possibilidades para um conjunto  $W$  com  $i - 2$  elementos, a saber,  $\binom{n}{i-2}$ . No entanto, no TSP restrito, as possibilidades para  $W$  são poucas e descritas por pares de subconjuntos cujo tamanho de cada um é limitado por  $k$ . Os pares são:

$$S^-(\pi, i) := \{l \in (1, \dots, n) : l \geq i, \pi(l) \leq i - 1\} \text{ e}$$

$$S^+(\pi, i) := \{h \in (1, \dots, n) : h \leq i - 1, \pi(h) \geq i\}.$$

Descrevendo os conjuntos acima de outra forma,  $S^-(\pi, i)$  é o conjunto de cidades de uma solução viável  $\pi$  que possuem índices maiores ou iguais a  $i$  e

que foram visitadas em alguma posição  $1, \dots, i-1$ , enquanto que  $S^+(\pi, i)$  é o conjunto de cidades de uma solução viável  $\pi$  que possuem índices menores ou iguais a  $i-1$  e serão visitadas em alguma posição  $i, \dots, n$ . É demonstrado que  $|S^-(\pi, i)| = |S^+(\pi, i)| \leq \lfloor k/2 \rfloor$ .

Um caminho de custo mínimo no grafo auxiliar passará por um vértice em cada camada do grafo. Um vértice deste caminho na camada  $i$  contém a cidade que é visitada na posição  $i$  da solução ótima. Um vértice na camada  $i$  do grafo auxiliar é denotado por  $(i, j, S_{ij}^-, S_{ij}^+)$  sendo  $j$  uma cidade candidata à posição  $i$ , e  $S_{ij}^-$  e  $S_{ij}^+$  sendo, respectivamente,  $S^-(\pi, i)$  e  $S^+(\pi, i)$ . A construção dos vértices  $(i, j, S_{ij}^-, S_{ij}^+)$  da camada  $V_i^*$  é realizada considerando todos os candidatos  $j$  para a posição  $i$ . Dessa forma, é possível obter todos os vértices da camada  $V_i^*$ . Os arcos de  $G^*$  conectam vértices de camadas consecutivas. Dois vértices,  $(i-1, l, S_{i-1,l}^-, S_{i-1,l}^+)$  e  $(i, j, S_{ij}^-, S_{ij}^+)$  são adjacentes (*compatíveis*) se cada caminho  $T_{i,j}$  em  $G$  que vai da cidade 1 até a cidade  $j$  na posição  $i$  pode ser obtido por um caminho  $T_{i-1,l}$  em  $G$  que vai da cidade 1 até a cidade  $l$  na posição  $i-1$ . Ou seja, basta adicionar  $j$  ao caminho  $T_{i-1,l}$  para obter  $T_{i,j}$ . Os vértices de um caminho  $T_{i,j}$  estão no conjunto  $N(i, j, S_{ij}^-, S_{ij}^+) = (N_{i-1} \setminus S_{ij}^+) \cup S_{i,j}^-$ .  $N_i$  é uma notação para o conjunto das cidades  $\{1, 2, \dots, i\}$ . Com isso, vértices  $(i-1, l, S^-, S^+)$  e  $(i, j, S^-, S^+)$  são compatíveis se e somente se

$$N(i, j, S_{ij}^-, S_{ij}^+) = N(i-1, l, S_{i-1,l}^-, S_{i-1,l}^+) \cup \{l\}.$$

Para obter os arcos de maneira eficiente, a última equação é expressa em termos dos conjuntos  $S_{ij}^-$ ,  $S_{ij}^+$ ,  $S_{i-1,l}^-$  e  $S_{i-1,l}^+$ .

**Proposição de Balas.** Os vértices  $(i-1, l, S_{i-1,l}^-, S_{i-1,l}^+)$  e  $(i, j, S_{ij}^-, S_{ij}^+)$  são adjacentes (compatíveis) se e somente se  $j \neq l$  e vale uma das seguintes condições.

- Se  $l < i-1$  e  $i-1 \in S_{i-1,l}^-$ ,  
então  $S_{ij}^- = S_{i-1,l}^- \setminus \{i-1\}$  e  $S_{ij}^+ = S_{i-1,l}^+ \setminus \{l\}$ .
- Se  $l < i-1$  e  $i-1 \notin S_{i-1,l}^-$ ,  
então  $S_{ij}^- = S_{i-1,l}^-$  e  $S_{ij}^+ = S_{i-1,l}^+ \setminus \{l\} \cup \{i-1\}$ .
- Se  $l = i-1$ ,  
então  $S_{ij}^- = S_{i-1,l}^-$  e  $S_{ij}^+ = S_{i-1,l}^+$ .
- Se  $l > i-1$  e  $i-1 \in S_{i-1,l}^-$ ,  
então  $S_{ij}^- = S_{i-1,l}^- \setminus \{i-1\} \cup \{l\}$  e  $S_{ij}^+ = S_{i-1,l}^+$ .
- Se  $l > i-1$  e  $i-1 \notin S_{i-1,l}^-$ ,  
então  $S_{ij}^- = S_{i-1,l}^- \cup \{l\}$  e  $S_{ij}^+ = S_{i-1,l}^+ \cup \{i-1\}$ .

Para finalizar, o custo de um arco entre os vértices  $(i-1, l, S_{i-1,l}^-, S_{i-1,l}^+)$  e  $(i, j, S_{ij}^-, S_{ij}^+)$  em  $G^*$  é o custo do arco entre os vértices  $l$  e  $j$  de  $G$  ( $c_{lj}$ ).

O tempo de execução para resolver o problema do caminho mínimo no grafo auxiliar construído para o problema do TSP restrito é  $O(k^2 2^{k-2} n)$ . Ou seja, o

problema está é tratável quando o parâmetro  $k$  é fixo e pequeno (FPT - *Fixed Parameter Tractable*).

Com isso, finalizamos a descrição do algoritmo de Balas para o TSP restrito. No entanto, Balas generalizou o algoritmo para o caso onde a restrição de que  $i$  preceda a cidade  $j$  em uma solução viável sempre que  $j \geq i + k(i)$ . Ou seja, cada vértice  $i$  pode ter um  $k$  diferente. Em seguida vamos descrever o algoritmo de Balas restrito e generalizado para este caso.

Para que uma posição de uma cidade  $j$  seja igual a  $i$  em uma solução viável ( $\pi(j) = i$ ), é necessário e suficiente que  $i$  esteja no seguinte intervalo  $\max\{1, j - |P_j|\} \leq i \leq \min\{n, j + k(j) - 1\}$ , sendo  $P_j = \{l \in N : l < j \text{ e } l + k(l) \geq j + 1\}$ .

Vamos acompanhar de perto a demonstração de Balas para as desigualdades acima.

**Necessidade.** Primeiro note que se  $i \geq j$ , então  $\max\{1, j - |P_j|\} \leq i$  é satisfeita. Se  $i \leq j$ , então  $i \leq \min\{n, j + k(j) - 1\}$  é satisfeita. Logo, falta mostrar que a primeira inequação é válida quando  $i < j$  e a segunda inequação é válida quando  $i > j$ .

Quando  $i > j$ , pelo princípio da casa dos pombos, é fato que teremos algum valor entre 1 e  $i - 1$  sendo a posição de alguma cidade  $l > i$ . Logo,  $\pi(j) > \pi(l)$  e assim

$$i < l < j + k(j) - 1,$$

sendo que a segunda desigualdade vale pois precisamos atender ao TSP restrito generalizado onde temos se  $\pi(l) \leq \pi(j)$  então  $l \leq j + k(j) - 1$ .

Quando  $i < j$ , então teremos  $\pi(l) > \pi(j)$  para  $j - i$  cidades  $l$  tais que  $l < j$ . Vamos ver o porquê. As cidades de  $N_{j-1}$  podem ocupar até  $i - 1$  posições  $k$  tal que  $\pi(k) < \pi(j)$ . As outras cidades de  $N_{j-1}$ , ou seja  $j - 1 - (i - 1) = j - i$  cidades, ocupam posições depois de  $i$ . Dessa forma, para uma cidade  $l$  dentre essa  $j - i$  cidades, temos  $\pi(l) > \pi(j)$  como queríamos mostrar. Mas,  $\pi(l) > \pi(j)$  implica que  $j \leq l + k(l) - 1$  (TSP restrito). Assim, o conjunto de cidades  $l < j$  tal que  $\pi(l) > \pi(j)$  é exatamente  $P_j$ . Portanto,  $|P_j| \geq j - i$  ou  $i \geq j - |P_j|$ .

**Suficiência.** Balas segue com a demonstração da suficiência construindo soluções viáveis com  $\pi(j) = i$ . Para mais detalhes, consulte [1].

Balas apresenta uma caracterização que determina o valor de  $\pi(i)$  dentro de um intervalo de números inteiros. Para que haja também uma caracterização determinando o valor de  $\pi^{-1}(i)$  (ou seja, os candidatos para a posição  $i$ ) dentro de um intervalo de números inteiros, os valores  $k(i)$  precisam atender ao seguinte:  $k(i) - k(i+1) \leq 1$  para  $i = 1, \dots, n$ . Em geral, o que temos é a seguinte condição necessária mas não suficiente. Para qualquer solução viável do TSP restrito e generalizado,  $j_{(i)} \leq \pi^{-1}(i) \leq j^{(i)}$  para qualquer posição  $i$  desta solução sendo

$$j_{(i)} := \min\{j : j + k(j) \geq i + 1\},$$

$$j^{(i)} := \max\{j : j - i \leq |P_j|\}.$$

## Referências

- [1] Egon Balas. «New classes of efficiently solvable generalized traveling salesman problems». Em: *Annals of Operations Research* 86.0 (1999), pp. 529–558.
- [2] Egon Balas e Neil Simonetti. «Linear time dynamic-programming algorithms for new classes of restricted TSPs: A computational study». Em: *INFORMS journal on Computing* 13.1 (2001), pp. 56–75.