Algoritmo de Balas aplicado ao TSP com janelas de tempo e carro elétrico

21 de julho de 2025

Orientador: Álvaro Junio Pereira Franco - `alvaro.junio@ufsc.br`

Estudante: Felipe Lourenço da Silva - `felipe.lourenco@grad.ufsc.br`

Departamento: Informática e Estatística

Centro de ensino: Tecnológico

Título do projeto: Modelos e algoritmos para variações modernas do problema de roteamento de veículos

Fonte financiadora: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Termo de Outorga - Processo: 405247/2023-0 (SIGPEX N. 202104940)

Resumo

Adaptamos o algoritmo de Balas que resolve o TSP com janelas de tempo para resolver o TSP com janelas de tempo e carro elétrico.

O algoritmo de Balas

O algoritmo de Balas foi apresentado no artigo [1]. Uma implementação deste algoritmo foi apresentada em [2]. Vamos usar a mesma notação que aparece nos artigos citados. O grafo de entrada possui n vértices e é completo. Denotamos as n cidades por $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Uma permutação π de $1, 2, \ldots, n$ é uma solução do TSP clássico. A posição da cidade i em uma solução viável do problema é denotado por $\pi(i)$. O grafo possui custos nas arestas t_{ij} que representam tanto a distância quanto o tempo entre os vértices i e j. O algoritmo de Balas resolve o TSP com a seguinte restrição: dado um inteiro positivo k e qualquer par de cidades i e j, se $j \geq i + k$ então em qualquer solução viável do problema, a cidade i deve preceder a cidade j, ou seja, $\pi(i) < \pi(j)$. O algoritmo consiste de uma redução do TSP restrito para o problema de encontrar um caminho de menor custo em um grafo dirigido acíclico.

Existem propriedades importantes que valem destacar. A primeira delas determina as cidades candidatas a ocupar uma determinada posição em uma solução viável, π^{-1}. As cidades candidatas a ocupar a posição i de uma solução viável são aquelas dentro do intervalo de inteiros $\{\max\{1, i-k+1\}, \ldots, \min\{i+k-1, n\}\}$. Podemos então escrever que uma cidade candidata $\pi^{-1}(i)$ atende a seguinte restrição

$$\max\{1, i-k+1\} \leq \pi^{-1}(i) \leq \min\{i+k-1, n\}.$$

Para qualquer cidade j, a posição de j em uma solução viável também está definida dentro do seguinte intervalo de inteiros $\{\max\{1, j-k+1\}, \ldots \min\{j+k-1, n\}\}$, ou seja,

$$\max\{1, j-k+1\} \leq \pi(j) \leq \min\{j+k-1, n\}.$$

Portanto, dada a $(i-1)$-ésima visita do caixeiro viajante a algum vértice do grafo, o próximo vértice j a ser visitado poderá ser obtido através da construção de um grafo auxiliar considerando todas as possibilidades de vértices candidatos para a posição i (ou seja, $\pi^{-1}(i) = \max\{1, i-k+1\}, \ldots, \min\{i+k-1, n\}$) e considerando todas as posições que uma cidade j pode ocupar (ou seja, $\pi(j) = \max\{1, j-k+1\}, \ldots, \min\{j+k-1, n\}$). Caso alguma cidade candidata j para a posição i não esteja dentro do intervalo descrito acima, então essa cidade não deve ser considerada.

O grafo auxiliar G^* pode ser divido em $n+1$ camadas. O conjunto de vértices da camada i do grafo auxiliar é denotado por V_i^*. $V_1^* = \{s\}$ (vértice fonte s). $V_{n+1}^* = \{t = s\}$ (vértice sorvedouro t que é igual a fonte s). E $V_i^* \leq (k+1)2^{k-2}$ para $i = 2, \ldots, n$. O grau de entrada de cada vértice do grafo auxiliar é no máximo k.

Em geral, a segunte recorrência calcula o custo de um segmento ótimo começando na cidade 1, passando pelas cidades de um subconjunto $W \subset N$ nas posições $2, \ldots, i-1$ e visitando a cidade j na posição i:

$$C(W, i, j) = \min_{l \in W}\{W \backslash \{l\}, i-1, l\}.$$

No TSP clássico, existem muitas possibilidades para um conjunto W com $i-2$ elementos, a saber, $\binom{n}{i-2}$. No entanto, neste TSP restrito, as possibilidades para W são poucas e descritas por pares de subconjuntos cujo tamanho de cada um é limitado por k. Os pares são:

$$S^-(\pi, i) := \{l \in (1, \ldots, n) : l \geq i, \pi(l) \leq i-1\}$$

e

$$S^+(\pi, i) := \{h \in (1, \ldots, n) : h \leq i-1, \pi(h) \geq i\}.$$

Colocado de outra forma, $S^-(\pi, i)$ é o conjunto de cidades que possuem índices maiores ou iguais a i e que foram visitadas em alguma posição $1, \ldots, i-1$, enquanto que $S^+(\pi, i)$ é o conjunto de cidades que possuem índices menores ou iguais a $i-1$ e serão visitadas em alguma posição $i, \ldots, n$. É demonstrado que $|S^-(\pi, i)| = |S^+(\pi, i)| \leq \lfloor k/2 \rfloor$.

Um caminho de custo mínimo no grafo auxiliar passará por um vértice em cada camada. O vértice deste caminho na camada i contém a cidade que é visitada na posição i da solução ótima. Um vértice na camada i do grafo auxiliar é denotado por $(i, j, S^-_{ij}, S^+_{ij})$ sendo j uma cidade candidata à posição i, e S^-_{ij} e S^+_{ij} sendo, respectivamente, $S^-(\pi, i)$ e $S^+(\pi, i)$.

O tempo de execução para resolver o problema do caminho mínimo no grafo auxiliar construído previamente é $O(k^2 2^{k-2} n)$.

Referências

[1] Egon Balas. ≪New classes of efficiently solvable generalized traveling salesman problems≫. Em: *Annals of Operations Research* 86.0 (1999), pp. 529–558.

[2] Egon Balas e Neil Simonetti. ≪Linear time dynamic-programming algorithms for new classes of restricted TSPs: A computational study≫. Em: *INFORMS journal on Computing* 13.1 (2001), pp. 56–75.