Algoritmo de Balas aplicado ao TSP com janelas de tempo e carro elétrico

22 de julho de 2025

Orientador: Álvaro Junio Pereira Franco - `alvaro.junio@ufsc.br`

Estudante: Felipe Lourenço da Silva - `felipe.lourenco@grad.ufsc.br`

Departamento: Informática e Estatística

Centro de ensino: Tecnológico

Título do projeto: Modelos e algoritmos para variações modernas do problema de roteamento de veículos

Fonte financiadora: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Termo de Outorga - Processo: 405247/2023-0 (SIGPEX N. 202104940)

Resumo

Adaptamos o algoritmo de Balas que resolve o TSP com janelas de tempo para resolver o TSP com janelas de tempo e carro elétrico.

O algoritmo de Balas

O algoritmo de Balas foi apresentado no artigo [1]. Uma implementação deste algoritmo foi apresentada em [2]. Vamos usar a mesma notação que aparece nos artigos citados. O grafo de entrada possui n vértices e é completo. As n cidades são indexadas por índices em $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Muitas vezes escrevemos i como o índice da cidade i. Uma permutação π de $1, 2, \ldots, n$ é uma solução do TSP clássico. A posição da cidade i em uma solução viável do problema é denotado por $\pi(i)$. O grafo possui custos nas arestas t_{ij} que representam tanto a distância quanto o tempo entre os vértices i e j. O algoritmo de Balas resolve o TSP com a seguinte restrição: dado um inteiro positivo k e qualquer par de cidades i e j, se $j \geq i + k$ então em qualquer solução viável do problema, a cidade i deve preceder a cidade j, ou seja, $\pi(i) < \pi(j)$. A este problema, vamos nos referir como TSP restrito. O algoritmo consiste de uma redução do TSP restrito para o problema de encontrar um caminho de menor custo em um grafo dirigido acíclico.

Existem propriedades importantes que valem destacar. A primeira delas determina as cidades candidatas a ocupar uma determinada posição em uma solução viável, π^{-1}. As cidades candidatas a ocupar a posição i de uma solução viável são aquelas dentro do intervalo de inteiros $\{\max\{1, i-k+1\}, \dots, \min\{i+k-1, n\}\}$. Podemos então escrever que uma cidade candidata $\pi^{-1}(i)$ atende a seguinte restrição

$$\max\{1, i-k+1\} \leq \pi^{-1}(i) \leq \min\{i+k-1, n\}.$$

Para qualquer cidade j, a posição de j em uma solução viável também está definida dentro do seguinte intervalo de inteiros $\{\max\{1, j-k+1\}, \dots \min\{j+k-1, n\}\}$, ou seja,

$$\max\{1, j-k+1\} \leq \pi(j) \leq \min\{j+k-1, n\}.$$

Portanto, dada a $(i-1)$-ésima visita do caixeiro viajante a algum vértice do grafo, o próximo vértice j a ser visitado poderá ser obtido através da construção de um grafo auxiliar considerando todas as possibilidades de vértices candidatos para a posição i (ou seja, $\pi^{-1}(i) = \max\{1, i-k+1\}, \dots, \min\{i+k-1, n\}$) e considerando todas as posições que uma cidade j pode ocupar (ou seja, $\pi(j) = \max\{1, j-k+1\}, \dots, \min\{j+k-1, n\}$). Caso alguma cidade candidata j para a posição i não esteja dentro do intervalo descrito acima, então essa cidade não deve ser considerada.

O grafo auxiliar G^* é construído com $n+1$ camadas. O conjunto de vértices da camada i do grafo auxiliar é denotado por V_i^*. $V_1^* = \{s\}$ (vértice fonte s). $V_{n+1}^* = \{t = s\}$ (vértice sorvedouro t que é igual a fonte s). O número de vértices de uma cada V_i^i é no máximo $(k+1)2^{k-2}$ para $i = 2, \dots, n$. O grau de entrada de cada vértice do grafo auxiliar é no máximo k.

Em geral, a segunte recorrência calcula o custo de um segmento ótimo começando na cidade 1, passando pelas cidades de um subconjunto $W \subset N$ nas posições $2, \dots, i-1$ e visitando a cidade j na posição i:

$$C(W, i, j) = \min_{l \in W} \{W \backslash \{l\}, i-1, l\}.$$

No TSP clássico, existem muitas possibilidades para um conjunto W com $i-2$ elementos, a saber, $\binom{n}{i-2}$. No entanto, no TSP restrito, as possibilidades para W são poucas e descritas por pares de subconjuntos cujo tamanho de cada um é limitado por k. Os pares são:

$$S^-(\pi, i) := \{l \in (1, \dots, n) : l \geq i, \pi(l) \leq i-1\}$$

e

$$S^+(\pi, i) := \{h \in (1, \dots, n) : h \leq i-1, \pi(h) \geq i\}.$$

Descrevendo os conjuntos acima de outra forma, $S^-(\pi, i)$ é o conjunto de cidades de uma solução viável π que possuem índices maiores ou iguais a i e que foram visitadas em alguma posição $1, \ldots, i-1$, enquanto que $S^+(\pi, i)$ é o conjunto de cidades de uma solução viável π que possuem índices menores ou iguais a $i-1$ e serão visitadas em alguma posição $i, \ldots, n$. É demonstrado que $|S^-(\pi, i)| = |S^+(\pi, i)| \leq \lfloor k/2 \rfloor$.

Um caminho de custo mínimo no grafo auxiliar passará por um vértice em cada camada do grafo. Um vértice deste caminho na camada i contém a cidade que é visitada na posição i da solução ótima. Um vértice na camada i do grafo auxiliar é denotado por $(i, j, S^-_{ij}, S^+_{ij})$ sendo j uma cidade candidata à posição i, e S^-_{ij} e S^+_{ij} sendo, respectivamente, $S^-(\pi, i)$ e $S^+(\pi, i)$. A construção dos vértices $(i, j, S^-_{ij}, S^+_{ij})$ da camada V^*_i é realizada considerando todos os candidatos j para a posição i. Dessa forma, é possível obter todos os vértices da camada V^*_i. Os arcos de G^* conectam vértices de camadas consecutivas. Dois vértices, $(i-1, l, S^-_{i-1,l}, S^+_{i-1,l})$ e $(i, j, S^-_{ij}, S^+_{ij})$ são adjacentes (*compatíveis*) se cada caminho $T_{i,j}$ em G que vai da cidade 1 até a cidade j na posição i pode ser obtido por um caminho $T_{i-1,l}$ em G que vai da cidade 1 até a cidade l na posição $i-1$. Ou seja, basta adicionar j ao caminho $T_{i-1,l}$ para obter $T_{i,j}$. Os vértices de um caminho $T_{i,j}$ estão no conjunto $N(i, j, S^-_{ij}, S^+_{ij}) = (N_{i-1} \setminus S^+_{ij}) \cup S^-_{i,j}$. N_i é uma notação para o conjunto das cidades $\{1, 2, \ldots, i\}$. Com isso, vértices $(i-1, l, S^-, S^+)$ e (i, j, S^-, S^+) são compatíveis se e somente se

$$N(i, j, S^-_{ij}, S^+_{ij}) = N(i-1, l, S^-_{i-1,l}, S^+_{i-1,l}) \cup \{l\}.$$

Para obter os arcos de maneira eficiente, a última equação é expressa em termos dos conjuntos S^-_{ij}, S^+_{ij}, $S^-_{i-1,l}$ e $S^+_{i-1,l}$.

Proposição de Balas. Os vértices $(i-1, l, S^-_{i-1,l}, S^+_{i-1,l})$ e $(i, j, S^-_{ij}, S^+_{ij})$ são adjacentes (compatíveis) se e somente se $j \neq l$ e vale uma das seguintes condições.

- Se $l < i-1$ e $i-1 \in S^-_{i-1,l}$,
  então $S^-_{ij} = S^-_{i-1,l} \setminus \{i-1\}$ e $S^+_{ij} = S^+_{i-1,l} \setminus \{l\}$.
- Se $l < i-1$ e $i-1 \notin S^-_{i-1,l}$,
  então $S^-_{ij} = S^-_{i-1,l}$ e $S^+_{ij} = S^+_{i-1,l} \setminus \{l\} \cup \{i-1\}$.
- Se $l = i-1$,
  então $S^-_{ij} = S^-_{i-1,l}$ e $S^+_{ij} = S^+_{i-1,l}$.
- Se $l > i-1$ e $i-1 \in S^-_{i-1,l}$,
  então $S^-_{ij} = S^-_{i-1,l} \setminus \{i-1\} \cup \{l\}$ e $S^+_{ij} = S^+_{i-1,l}$.
- Se $l > i-1$ e $i-1 \notin S^-_{i-1,l}$,
  então $S^-_{ij} = S^-_{i-1,l} \cup \{l\}$ e $S^+_{ij} = S^+_{i-1,l} \cup \{i-1\}$.

Para finalizar, o custo de um arco entre os vértices $(i-1, l, S^-_{i-1,l}, S^+_{i-1,l})$ e $(i, j, S^-_{ij}, S^+_{ij})$ em G^* é o custo do arco entre os vértices l e j de G (c_{lj}).

O tempo de execução para resolver o problema do caminho mínimo no grafo auxiliar construído para o problema do TSP restrito é $O(k^2 2^{k-2} n)$. Ou seja, o problema está é tratável quando o parâmetro k é fixo e pequeno (FPT - *Fixed Parameter Tractable*).

Com isso, finalizamos a descrição do algoritmo de Balas para o TSP restrito. No entanto, Balas generalizou o algoritmo para o caso onde a restrição de que i preceda a cidade j em uma solução viável sempre que $j \geq i+k(i)$. Ou seja, cada vértice i pode ter um k diferente. Em seguida vamos descrever o algoritmos de Balas restrito e generalizado para este caso.

Para que uma posição de uma cidade j seja igual a i em uma solução viável ($\pi(j) = i$), i precisa estar no seguinte intervalo $\max\{1, j-|P_j|\} \leq i \leq \min\{n, j+k(j)-1\}$, sendo $P_j = \{l \in N : l < j \text{ e } l + k(l) \geq j + 1\}$.

Vamos acompanhar de perto a demonstração de Bala para as desigualdades acima. Primeiro note que se $i \geq j$, então $\max\{1, j - |P_j|\} \leq i$ é satisfeita. Se $i \leq j$, então $i \leq \min\{n, j + k(j) - 1\}$ é satisfeita. É necessário mostrar que a primeira inequação é válida quando $i < j$ e a segunda inequação é válida quando $i > j$.

Quando $i > j$, pelo princípio da casa dos pombos, é fato que teremos algum valor entre 1 e $i - 1$ sendo a posição de alguma cidade $l > i$. Logo, $\pi(j) > \pi(l)$ e assim

$$i < l < j + k(j) - 1,$$

sendo que a segunda desigualdade vale pois precisamos atender ao TSP restrito generalizado onde temos se $\pi(l) \leq \pi(j)$ então $l \leq j + k(j) - 1$.

Quando $i < j$, então teremos $\pi(l) > \pi(j)$ para $j - i$ cidades l tais que $l < j$. No entanto, $\pi(l) > \pi(j)$ implica que $j \leq l + k(l) - 1$, e assim o conjunto de cidades $l < j$ tal que $\pi(l) > \pi(j)$ é exatamente P_j. Portanto, $|P_j| \geq j - i$ or $i \geq j - |P_j|$.

Referências

[1] Egon Balas. «New classes of efficiently solvable generalized traveling salesman problems». Em: *Annals of Operations Research* 86.0 (1999), pp. 529–558.

[2] Egon Balas e Neil Simonetti. «Linear time dynamic-programming algorithms for new classes of restricted TSPs: A computational study». Em: *INFORMS journal on Computing* 13.1 (2001), pp. 56–75.