INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

CAMPUS VITÓRIA

MESTRADO PROFISSIONAL EM TECNOLOGIAS SUSTENTÁVEIS

ÁLVARO LUIZ LAGO DE MENEZES

OTIMIZAÇÃO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO DE SEÇÃO RETANGULAR E ARMADURA SIMPLES

Vitória
2019

ÁLVARO LUIZ LAGO DE MENEZES

OTIMIZAÇÃO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO DE SEÇÃO RETANGULAR E ARMADURA SIMPLES

Trabalho apresentado durante a disciplina Métodos de Otimização: Matemáticos e Heurísticos do Programa de Pós-graduação em Tecnologias Sustentáveis do Instituto Federal do Espírito Santo.

Área de Concentração: Desenvolvimento de Produtos e Processos Sustentáveis.

Linha de pesquisa: Linha 1 – Otimização de Serviços, Sistemas e Processos.

Professor: Mário Mestria

Vitória
2019

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **4**

2 CONCEITOS **5**

3 DESENVOLVIMENTO **6**

3.1 FUNÇÃO OBJETIVO *6*

3.2 FUNÇÕES DE RESTRIÇÃO *7*

3.2.1 Capacidade de resistência à flexão 7

3.2.2 Armadura máxima 8

3.2.3 Capacidade de resistência ao cisalhamento 9

3.2.4 Verificação da flecha limite 9

3.2.5 Normas de segurança à instabilidade da viga 10

3.3 EXECUÇÃO DOS TESTES *11*

3 CONCLUSÃO **11**

REFERÊNCIA **13**

ANEXO I **14**

ANEXO II **21**

ANEXO III **22**

ANEXO IV **23**

ANEXO V **24**

1 INTRODUÇÃO

O concreto é o material construtivo mais utilizado do mundo, devido a possibilidade de modelagem em diversas formas e tamanhos, por ser resistente à água, pelo seu menor custo e pela sua menor produção de poluentes em relação a outros materiais utilizados na construção civil (Pedroso, 2009).

A Engenharia busca um dimensionamento estrutural correto do concreto armado, tendo em vista a preocupação com a relação custo/benefício e com a utilização sustentável do material. Por se tratar de um processo baseado em experiências, tentativas e erros, o auxílio de métodos computacionais é indicado para obtenção de dimensionamentos com o menor custo possível.

O dimensionamento tradicional do concreto armado é realizado através de iterações onde já se indica uma seção transversal, aproximada por experiências e projetos previamente realizados.

De acordo com as restrições do dimensionamento, uma nova seção transversal é adotada ou não, com a finalidade de atender as restrições ou de diminuir os custos. Por se tratar de um processo de tentativa e erro, o processo torna-se demorado se for feito sem a utilização de métodos computacionais.

Durante o trabalho serão apresentadas a função objetivo de custo e as restrições relativas à otimização de vigas de concreto armado biapoiadas, de seção retangular e armadura simples. Será utilizado o *solver fmincon*, presente no *Optimization Toolbox* do Matlab, para otimização do custo da viga, variando os possíveis algoritmos e comparando seus resultados e performance em termos de iterações.

Como a execução das tarefas era repetitiva, foi criada uma função auxiliar que recebe como parâmetros o comprimento L da viga em metros e executa o *solver fmincon* variando os algoritmos. O código da função está disponível no Anexo I.

Para a execução das tarefas, foi utilizado o Matlab R2018b, versão 9.5.0 em ambiente *Windows*.

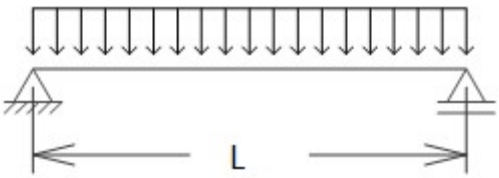
O código e os resultados obtidos nas execuções das tarefas também estão disponíveis no *Github* em https://github.com/alvarollmenezes/ifes-otimizacao-final.

2 CONCEITOS

O concreto armado é a associação entre o concreto simples e a armadura passiva convenientemente colocada, de tal maneira que ambos resistam aos esforços solicitantes (Carvalho e Figueiredo, 2014).

O trabalho busca dimensionar vigas biapoiadas com carregamentos distribuídos e comprimento L, conforme a Figura 1.

Figura 1 – Viga biapoiada com carregamento distribuído



Fonte: Acervo pessoal

Vigas de armadura simples possuem dois tipos de armadura: armadura longitudinal, responsável pela resistência ao momento fletor e armadura transversal, responsável pela resistência ao esforço cortante.

Portanto, na formação do custo, que será utilizado como função objetivo na otimização, deve ser calculado o custo do concreto e do aço das armaduras. Também deve ser levado em conta o custo da fôrma de madeira utilizada na construção da viga.

Para o dimensionamento da seção retangular, com vigas de armadura simples, foram admitidas as hipóteses de acordo com a NBR 6118 (2004). As restrições consideradas nas vigas são: a armadura máxima, a capacidade de resistência à flexão, a capacidade de resistência ao cisalhamento, a flecha limite e normas de segurança à instabilidade da viga.

3 DESENVOLVIMENTO

3.1 FUNÇÃO OBJETIVO

O objetivo do problema é minimizar o custo de construção da viga, os custos do concreto, aço e forma estão descritos abaixo, retirados da tabela SINAPI da Caixa Econômica Federal de 2017, referentes ao estado do Espírito Santo.

$$C_c = 314{,}66\ R\$/m^3$$

$$C_s = 7{,}8\ R\$/kg$$

$$C_f = 70{,}88\ R\$/m$$

Os valores de cada material são calculados abaixo:

- Valor total do concreto:

$$V_c = A_c \times C_c$$

Onde:

V_c = Valor total do concreto;

A_c = área da seção transversal do concreto;

C_c = Custo do concreto.

- Valor total do aço:

$$V_s = (A_s + A_{sw}/100) \times \rho_s \times C_s$$

Onde:

V_s = Valor total do aço;

A_s = área da seção longitudinal do aço;

A_{sw} = área da seção transversal do aço;

$\rho_s = 7850\ kg/m^3$ = Peso específico do aço;

C_s = custo do aço.

- Valor total da forma:

$$V_f = (2 \times h + b) \times C_f$$

Onde:

V_f = Valor total da forma;

h = altura da viga;

b = base da viga;

C_f = custo da forma.

Assim, tem-se o custo total:

$$V_t = V_c + V_s + V_f$$

3.2 FUNÇÕES DE RESTRIÇÃO

As restrições consideradas nas vigas são: a armadura máxima, a capacidade de resistência à flexão, a capacidade de resistência ao cisalhamento, a flecha limite e normas de segurança à instabilidade da viga. Seus cálculos são descritos a seguir.

3.2.1 Capacidade de resistência à flexão

Momento fletor de cálculo: o momento fletor depende do carregamento e dos apoios em uma viga. Os cálculos para cada caso, são encontrados no anexo II. Após calcular o momento fletor, este deve ser multiplicado pelo coeficiente de 1,4.

- Momento fletor de cálculo máximo com armadura simples:

$$M_{d,lim} = 0{,}272 \times b \times d^2 \times f_{cd}$$

$$Md \leq M_{d,lim} \rightarrow Armadura\ simples$$

Tendo-se:

- Resistência de cálculo do concreto à compressão (f_{cd}):

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{1{,}4}$$

- d = Altura útil da viga

$$d = 0{,}9 \times h$$

3.2.2 Armadura máxima

Para a armadura máxima, deve-se levar em conta a seguinte expressão (Restrição 3):

$$A_s/(b\ d) \leq 0{,}5\rho_b$$

Onde, de acordo com ACI, ρ_b é o índice de armadura para a condição balanceada, dado pela fórmula:

$$\rho_b = (0{,}85 f_{ck}\ \beta_1)/(f_{yk}\ (1 + f_{yk}/(0{,}003 E_s\ ))\ )$$

Onde:

f_{ck} = Resistência de compressão do concreto;

f_{yk} = Valor característico da resistência de escoamento do aço;

E_s = Módulo de elasticidade secante do concreto.

Tendo-se:

$f_{yk} = 500\ MPa, f_{ck} = 20\ MPa$ e $\beta_1 = 0{,}85$, para $20\ MPa \leq f_{ck} \leq 40\ MPa$, definido na seção 10.2.7.3 da norma ACI (1998). β_1 é um fator e este depende da resistência de compressão do concreto.

3.2.3 Capacidade de resistência ao cisalhamento

Para determinar a capacidade de resistência ao cisalhamento, devemos levar em conta a força cortante de cálculo máxima resistida por compressão diagonal das bielas de concreto. A força cortante de cálculo não pode ultrapassar a força cortante de cálculo máxima (Restrição 4):

$$V_{Rd2} = 0{,}45bdvf_{cd}$$
$$V_d < V_{Rd2} \rightarrow OK!$$

Tendo-se:

- Coeficiente de redução da resistência do concreto fissurado por força cortante:

$$v = 0{,}6 \times (1 - f_{ck}/250)$$

- Resistência de cálculo do concreto à compressão (f_{cd}):

$$f_{cd} = f_{ck}/1{,}4$$

- Esforço cortante de cálculo em kN (V_d):

$$V_d = (p \times L)/2$$

- Carregamento da viga em kN/m (p):

$$p = (1{,}4 \times (gpp + g + q))$$

- Carga do peso próprio da viga em kN/m (gpp):

$$gpp = h/100 * b/100 * 25$$

- Carregamento permanente em kN/m(g):

$$g = 22$$

3.2.4 Verificação da flecha limite

A flecha total não deve ultrapassar a flecha limite, sendo a flecha máxima para limitar o efeito visual desagradável (Restrição 5):

$$f_{total} \leq f_limite$$

Tendo-se:

- Cálculo da flecha limite em m:

$$f_{limite} = L/250$$

- Flecha total é definida a seguir:

$$f_{total} = f_{imedita} + f_{diferida}$$

- Cálculo da flecha imediata é escrito como:

$$f_{imeditada} = f_{elástica} * I_c/I_e$$

- Flecha elástica ($f_{elástica}$): depende do carregamento e dos apoios em uma viga. Entra em vigor ao entrar em carga. Os cálculos para cada caso, são encontrados no Anexo II.

- Momento de inércia da seção bruta para seção retangular (Ic):

$$I_c = b * h\text{^}3/12$$

- O momento de inércia da sessão (Ie) é calculado de acordo com o Anexo V, na seção flecha imediata.
- Para a flecha diferida ($f_{diferida}$): ocorre do efeito da fluência no concreto, o cálculo também segue o indicado no Anexo V.

3.2.5 Normas de segurança à instabilidade da viga

As normas de segurança estão definidas conforme a NBR 6118 (2004).

> A segurança à instabilidade lateral de vigas deve ser garantida através de procedimentos apropriados. Como procedimento aproximado pode-se adotar, para vigas de concreto, com armaduras passivas ou ativas, sujeitas à flambagem lateral, as seguintes condições (NBR 6118, 2004, p. 100).

- Restrição 6:

$$b \geq L/50$$

- Restrição 7:

$$h \geq 25$$

- Restrição 8:

$$b \geq \beta_{fl} h$$

Sendo que para a topologia da viga utilizada, de acordo com a NBR 6118: $\beta_{fl} = 0{,}4$.

3.3 EXECUÇÃO DOS TESTES

O *solver fmincon* precisa de um palpite inicial de solução (x_0), para isso adota-se uma altura e uma base inicial para a seção transversal da viga, de acordo com a NBR 6118 (2004):

- Para a estimativa da altura (h), em uma viga biapoiada:

$$h = 10 * L$$

- Para a estimativa da base (b):

$$b = 3 * L$$

Foram executados três testes com comprimentos de viga 5m, 6m e 7m, o código executado foi respectivamente:

```
>> app(5);
>> app(6);
>> app(7);
```

Os resultados estão nos arquivos *out_comprimento5.pdf*, *out_comprimento6.pdf* e *out_comprimento7.pdf* no Github.

3 CONCLUSÃO

Todos os testes convergiram para a solução ótima, mostrando que o problema tem um comportamento adequado para todos os algoritmos.

Como não foi possível calcular os gradientes das funções objetivo nem de algumas das restrições, não foi possível testar a execução com o algoritmo *trust-region-reflective*, pois este requer o gradiente da função objetivo.

Quanto a performance em termos de iterações e execuções da função objetivo, os algoritmos *sqp* e *active-set* foram os mais rápidos, com o *sqp* sendo o mais rápido, por uma pequena margem.

Tabela 1 Resultados das execuções

			Comprimento da Viga		
			5m	**6m**	**7m**
Algoritmos	**SQP**	Iterações	5	4	4
		FuncEvals	18	15	15
		b (cm)	22,3128	26,298	30,2104
		h (cm)	55,7821	65,745	75,5259
		Valor / m (R$/m)	186,01	230,65	278,67
		Valor Total (R$)	930,07	1383,87	1950,72
	Interior-point	Iterações	15	15	7
		FuncEvals	52	52	25
		b (cm)	22,3128	26,298	30,2104
		h (cm)	55,7821	65,745	75,5259
		Valor / m (R$/m)	186,01	230,65	278,67
		Valor Total (R$)	930,07	1383,87	1950,72
	Active-set	Iterações	6	6	5
		FuncEvals	18	18	15
		b (cm)	22,3128	26,298	30,2104
		h (cm)	55,7821	65,745	75,5259
		Valor / m (R$/m)	186,01	230,65	278,67
		Valor Total (R$)	930,07	1383,87	1950,72

REFERÊNCIA

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 318-98:** Building code requirements for reinforced concrete, 1998.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118:** Projetos de estruturas de concreto: procedimento. Rio de Janeiro, RJ. 2004.

CARVALHO R. C.; FIGUEIREDO FILHO J. R. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado.** 4 ed. São Carlos: EdUFSCar, 2014.

MAIA, J. P. R. **Otimização estrutural: estudo e aplicações em problemas clássicos de vigas utilizando a ferramenta Solver.** 2009. 83 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP. 2009.

MUSSO JUNIOR, F. **Estruturas de Concreto.** Vitória, ES. 2012. (Apostila).

PEDROSO, Fábio Luís. Concreto: as origens e a evolução do material construtivo mais usado pelo homem. **Concreto: material construtivo mais consumido no mundo.** São Paulo, SP. 53, p. 14-19, jan-mar, 2009.

PRAVIA, Z. M. C. **Exemplo de um Projeto Completo de um Edifício de Concreto Armado.** São Paulo, SP. 2001.

ANEXO I

Arquivo app.m:

```
function resp = app(L)

    x0 = [3*L, 10*L];
    % x0 = [-1, 1];
    lb = [ ]; % No lower bounds
    ub = [ ]; % No upper bounds

    objfungrad(x0);

    options = optimoptions(@fmincon,'Algorithm','sqp');
    [x1, fval1, exitflag1, output1] =
fmincon(@objfungrad,x0,[],[],[],[],...
        lb,ub,@confungrad,options)

    options = optimoptions(@fmincon,'Algorithm','interior-point');
    [x2, fval2, exitflag2, output2] =
fmincon(@objfungrad,x0,[],[],[],[],...
        lb,ub,@confungrad,options)

    options = optimoptions(@fmincon,'Algorithm','active-set');
    [x3, fval3, exitflag3, output3] =
fmincon(@objfungrad,x0,[],[],[],[],...
        lb,ub,@confungrad,options)

    function f = objfungrad(x)
        f = custo(x(1), x(2), L);
    end

    function [c,ceq] = confungrad(x)
       c = restricoes(x(1), x(2), L);
       ceq = [];
    end

end
```

Arquivo custo.m:

```
%
% Calculo do custo da viga (aço + concreto + forma)
%
% b = base da viga em cm
% h = altura da viga em cm
% L = comprimento da viga em m
%
function f = custo(b, h, L)
    Asl = asl(b, h, L);
    Asw = asw(b, h, L);

    %%% AÇO
    % Área do aço
    As = Asl + Asw / 100 * L; % cm²
    Asm = As / 10000; % m²

    % Peso específico do aço
    ROs = 7850; % kg/m³

    % Custo do aço (2017)
    Cs = 7.8; % R$/kg

    % Valor do aço por m
    Vs = Cs * ROs * Asm; % R$/m


    %%% CONCRETO
    % Área do concreto
    Ac = b * h; % cm²
    Acm = Ac / 10000; % m²

    % Custo do Concreto (2017)
    Cc = 314.66; % R$ / m³

    % Valor do concreto por m
    Vc = Acm * Cc; % R$ / m


    %%% FORMA
    % Perímetro da forma
    p = 2 * h + b; % cm
    pm = p / 100; % m

    % Custo da montagem e materiais da forma de madeira (2017)
    Cf = 70.88; % R$ / m²

    % Valor da forma por m
    Vf = pm * Cf; % R$ / m


    % Valor total
    f = Vc + Vs + Vf;

end
```

Arquivo restricoes.m:

```
%
% Conjunto de restri??es do problema
%
% b = base da viga em cm
% h = altura da viga em cm
% L = comprimento da viga em m
%
function c = restricoes(b, h, L)

    hm = h / 100; % m
    bm = b / 100; % m

    fck = 2; % 2 kN / cm? = 20 Mpa
    v = 0.552;
    % M?dulo de elasticidade secante do concreto
    Ecs = 2128.74; % kN / cm?
    fctf = 0.221; % kN / cm?
    n = 9.865;
    Es = 21000; % kN / cm?

    fyk = 50; % 50 kN / cm? = 500 Mpa
    % Carregamento permanente
    g = 22; % kN/m
    % Carregamento vari?vel
    q = 11; % kN/m
    Lcm = L * 100; % cm

    % Resist?ncia de c?lculo do concreto e do a?o
    fcd = fck / 1.4; % kN / cm?
    fcdm = fcd * 10000; % kN / m?

    % altura ?til
    d = 0.9 * h; % cm
    dm = d / 100; % m

    % Carga do peso pr?prio
    gpp = hm * bm * 25; % kN/m

    % Carregamento
    p = 1.4 * ( gpp + g + q ); % kN / m

    % Armadura longitudinal
    % Momento de c?lculo
    Md = p * L * L / 8; % kNm
    Mdcm = Md * 100;

    % Momento limite
    Mdlim = 0.272 * bm * dm * dm * fcdm; % kNm
```

```
    % 4.4 Dimensionamento devido ao Momento Fletor
    % Restri??o 1 - para armadura longitudinal simples
    c(1) = Md - Mdlim;

    % Altura da Linha neutra
    x = 1.25 * d * ( 1 - sqrt( 1 - ( Mdcm / ( 0.425 * b * d * d * fcd )
) ) ); % cm

    % 4.4 Dimensionamento devido ao Momento Fletor
    % Restri??o 2 - verifica?ao da ductilidade das estruturas
    c(2) = x - 0.5 * d;


    % Armadura longitudinal
    Asl = asl(b, h, L);

    roB = 0.85 * fck * 0.85 / ( fyk * ( 1 + fyk / ( 0.003 * Es ) ) );

    % 4.1 Funções restrições
    % Restri??o 3 - verifica??o da armadura m?xima
    c(3) = Asl / ( b * d ) - 0.5 * roB;

    % Esfor?o cortante de c?lculo
    Vd = p * L / 2; % kN

    % For?a cortante de c?lculo m?xima resistida por compress?o das
bielas
    Vrd2 = 0.45 * b * d * v * fcd; % kN

    % 4.5   Dimensionamento devido ao Esforço Cortante
    % Restri??o 4 - verifica??o das bielas comprimidas
    c(4) = Vd - Vrd2;


    % Verifica??es no estado limite de servi?o
    % formulas.executarVerificacoes = ( Asl ) => {
    % Momento de in?rcia da sess?o bruta
    Ic = b * h * h * h / 12; % cm^4

    % Carregamento quase permanente
    Pqp = gpp + g + 0.4 * q; % kN / m
    Pqpcm = Pqp / 100; % kN / cm

    % Flecha el?stica
    felastica = 5 * Pqpcm * Lcm * Lcm * Lcm * Lcm / ( 384 * Ecs * Ic ) *
10; % mm
```

```
    % Flecha imediata

    % Momento fletor da a??o quase permanente
    Mqp = Pqp * L * L / 8; % kNm
    Mqpcm = Mqp * 100; % kNcm

    % Momento fletor de fissura??o
    Mr = b * h * h / 6 * fctf; % kNcm

    %a1, a2, a3, x2, I2, Ie;
    if ( Mqpcm >= Mr ) % Est?dio II com fissura??o
        % Momento de in?rcia da sess?o no est?dio II ( para armadura
simples )
        a1 = b / 2;
        a2 = n * Asl;
        a3 = -n * Asl * d;
        x2 = ( -a2 + sqrt( a2 * a2 - 4 * a1 * a3 ) ) / ( 2 * a1 );
        I2 = b * x2 * x2 * x2 / 3 + n * Asl * ( d - x2 ) * ( d - x2 );

        divisaoIe = ( Mr / Mqpcm ) * ( Mr / Mqpcm ) * ( Mr / Mqpcm );

        Ie = divisaoIe * Ic + ( 1 - divisaoIe ) * I2;
    else
        Ie = Ic;
    end

    fimediata = felastica * ( Ic / Ie ); % mm

    % Flecha diferida

    % Para t0/t = 1 / 70 meses
    alfaF = 1.323;

    fdiferida = alfaF * fimediata; % mm

    % Flecha total
    fTotal = fimediata + fdiferida; % mm

    % Flecha limite
    flimite = L * 1000 / 250; % mm

    % 4.6 Verificação de flecha
    % Restri??o 5 - verifica??o da flecha total
    c(5) = fTotal - flimite;

    % Restri??o 6 - seguran?a a instabilidade da viga NBR 6118
    c(6) = -b + 2*L;
    % Restri??o 7 - seguran?a a instabilidade da viga NBR 6118
    c(7) = -h + 25;
    % Restri??o 8 - seguran?a a instabilidade da viga NBR 6118
    c(8) = -b + 0.4*h;

end
```

Arquivo asl.m:

```
function f = asl(b, h, L)

    hm = h / 100; % m
    bm = b / 100; % m

    fck = 2; % 2 kN / cm² = 20 Mpa
    fyk = 50; % 50 kN / cm² = 50 Mpa

    % Carregamento permanente
    g = 22; % kN/m
    % Carregamento variável
    q = 11; % kN/m

    % Resistência de cálculo do concreto e do aço
    fcd = fck / 1.4; % kN / cm²
    fyd = fyk / 1.15; % kN / cm²

    % altura útil
    d = 0.9 * h; % cm

    % Carga do peso próprio
    gpp = hm * bm * 25; % kN/m

    % Carregamento
    p = 1.4 * ( gpp + g + q ); % kN / m

    % Armadura longitudinal
    % Momento de cálculo
    Md = p * L * L / 8; % kNm
    Mdcm = Md * 100;

    % Altura da Linha neutra
    x = 1.25 * d * ( 1 - sqrt( 1 - ( Mdcm / ( 0.425 * b * d * d * fcd )
) ) ); % cm

    % Armadura longitudinal
    Asl = 0.68 * b * x * fcd / fyd; % cm²

    % Armadura longitudinal mínima
    Aslmin = 0.15 / 100 * b * h;

    % Armadura longitudinal final
    f = max( Asl, Aslmin );

end
```

Arquivo asw.m:

```
function f = asw(b, h, L)

    hm = h / 100; % altura em m
    bm = b / 100; % base em m

    fyk = 50; % 50 kN / cm² = 50 Mpa

    fctd = 0.1105; % kN / cm²
    % Módulo de elasticidade secante do concreto
    % Carregamento permanente
    g = 22; % kN/m
    % Carregamento variável
    q = 11; % kN/m

    % Resistência de cálculo do concreto e do aço
    fyd = fyk / 1.15; % kN / cm²

    % altura útil
    d = 0.9 * h; % cm

    % Carga do peso próprio
    gpp = hm * bm * 25; % kN/m

    % Carregamento
    p = 1.4 * ( gpp + g + q ); % kN / m

    % Esforço cortante de cálculo
    Vd = p * L / 2; % kN

    % Armadura transversal
    s = 100;

    % Força cortante resistida por outros mecanismos
    Vc = 0.6 * b * d * fctd; % kN

    % Armadura transversal
    Asw = ( Vd - Vc ) * s / ( 0.9 * d * fyd ); % cm² / m

    % Armadura transversal mínima
    AswMin = 0.088 / 100 * b * s; % cm² / m

    % Armadura transversal final
    f = max( Asw, AswMin );

end
```

ANEXO II

VIGA - MOMENTO FLETOR, FORÇA CORTANTE, MOMENTO TORÇOR E FLECHA

Momento Fletor (α = a/L; β = b/L)

Sistema							
Carga	$M_{máx}$; x_o/L	$M_{máx}$; x_o/L	M_{dir}	$M_{máx}$; x_o/L	M_{esq}	M_{dir}	M_{esq}
	$\frac{pL^2}{8}$; 0,5	$\frac{9pL^2}{128}$; 0,375	$-\frac{pL^2}{8}$	$\frac{pL^2}{24}$; 0,5	$-\frac{pL^2}{12}$	$-\frac{pL^2}{12}$	$-\frac{pL^2}{2}$
	$\frac{pL^2}{9\sqrt{3}}$; 0,577	$\frac{pL^2}{15\sqrt{5}}$; 0,447	$-\frac{pL^2}{15}$	$\frac{pL^2}{46,64}$; 0,548	$-\frac{pL^2}{30}$	$-\frac{pL^2}{20}$	$-\frac{pL^2}{3}$
	$\frac{pL^2}{9\sqrt{3}}$; 0,423	$\frac{pL^2}{23,65}$; 0,329	$-\frac{7pL^2}{120}$	$\frac{pL^2}{46,64}$; 0,452	$-\frac{pL^2}{20}$	$-\frac{pL^2}{30}$	$-\frac{pL^2}{6}$
L/2	$\frac{PL}{4}$; 0,5	$\frac{5PL}{32}$; 0,5	$-\frac{3PL}{16}$	$\frac{PL}{8}$; 0,5	$-\frac{PL}{8}$	$-\frac{PL}{8}$	$-\frac{PL}{2}$
a b	$\alpha\beta PL$; α	$\frac{3-\beta}{2}\alpha\beta^2PL$; α	$-\frac{1-\alpha^2}{2}\alpha PL$	$2\alpha^2\beta^2PL$; α	$-\alpha\beta^2PL$	$-\alpha^2\beta PL$	$-\alpha PL$

Força Cortante (α = a/L; β = b/L)

Sistema							
Carga	V_{esq}	V_{dir}	V_{esq}	V_{dir}	V_{esq}	V_{dir}	V_{esq}
	$\frac{pL}{2}$	$-\frac{pL}{2}$	$\frac{3pL}{8}$	$-\frac{5pL}{8}$	$\frac{pL}{2}$	$-\frac{pL}{2}$	pL
	$\frac{pL}{6}$	$-\frac{pL}{3}$	$\frac{pL}{10}$	$-\frac{2pL}{5}$	0,15pL	–0,35pL	$\frac{pL}{2}$
	$\frac{pL}{3}$	$-\frac{pL}{6}$	$\frac{11pL}{40}$	$-\frac{9pL}{40}$	0,35pL	–0,15pL	$\frac{pL}{2}$
L/2	$\frac{P}{2}$	$-\frac{P}{2}$	$\frac{5P}{16}$	$-\frac{11P}{16}$	$\frac{P}{2}$	$-\frac{P}{2}$	P
a b	βP	$-\alpha P$	$\frac{3-\beta}{2}\beta^2P$	$-\frac{3-\alpha^2}{2}\alpha P$	$(3-2\beta)\beta^2P$	$-(3-2\alpha)\alpha^2P$	P

Momento Torçor (α = a/L; β = b/L)

Carga										
Sistema	T_{esq}	T_{dir}	T_{esq}	T_{dir}	T_{esq}	T_{dir}	T_{esq}	T_{dir}	T_{esq}	T_{dir}
	$\frac{tL}{2}$	$-\frac{tL}{2}$	$\frac{tL}{6}$	$-\frac{tL}{3}$	$\frac{tL}{3}$	$-\frac{tL}{6}$	$\frac{T}{2}$	$-\frac{T}{2}$	βT	$-\alpha T$
	T_{esq}		T_{esq}		T_{esq}		T_{esq}		T_{esq}	
	tL		$\frac{tL}{2}$		$\frac{tL}{2}$		T		T	

Flechas (α = a/L; β = b/L)

Sistema				
Carga	$\Delta_{máx}$; x_o/L	$\Delta_{máx}$; x_o/L	$\Delta_{máx}$; x_o/L	Δ_{dir}
	$\frac{5pL^4}{384EI}$; 0,5	$\frac{pL^4}{184,6EI}$; 0,422	$\frac{pL^4}{384EI}$; 0,5	$\frac{pL^4}{8EI}$
	$0,00652\frac{pL^4}{EI}$; 0,519	$\frac{pL^4}{419,3EI}$; 0,447	$\frac{pL^4}{764,2EI}$; 0,525	$\frac{11pL^4}{120EI}$
	$0,00652\frac{pL^4}{EI}$; 0,481	$\frac{pL^4}{328,1EI}$; 0,402	$\frac{pL^4}{764,2EI}$; 0,475	$\frac{pL^4}{30EI}$
L/2	$\frac{PL^3}{48EI}$; 0,5	$\frac{PL^3}{48\sqrt{5}EI}$; 0,447	$\frac{PL^3}{192EI}$; 0,5	$\frac{5PL^3}{48EI}$
a b	$\frac{(3-4\alpha^2)\alpha PL^3}{48EI}$; $\alpha \le 0,5$	-	-	$\frac{(3-\alpha)\alpha^2PL^3}{6EI}$

[MUSSO]

Fernando Musso Junior musso@npd.ufes.br Estruturas de Concreto Armado 26

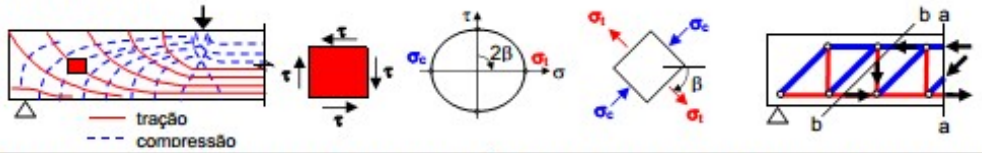
Fonte: Musso Junior (2012)

ANEXO III

VIGA - FORMULÁRIO DE DIMENSIONAMENTO DE SEÇÃO RETANGULAR À FORÇA CORTANTE (ELU-V)

A_{sw}	área da seção da armadura transversal	h	altura da seção transversal
$A_{sw,min}$	área mínima da seção da armadura transversal	M_d	momento fletor de cálculo
b	largura da seção transversal	s	espaçamento longitudinal entre estribos 100 cm (para obter A_{sw} em cm^2/m)
C	força de compressão nas bielas de concreto	V_c	força cortante resistida por outros mecanismos
d	altura útil da seção transversal	V_d	$1{,}4(V_G + V_Q)$ força cortante de cálculo
	distância do centróide da armadura tracionada à borda comprimida da seção transversal	V_{Rd2}	força cortante de cálculo máxima resistida por compressão diagonal das bielas de concreto
f_{cd}	$f_{ck}/1{,}4$ resistência de cálculo do concreto à compressão	V_G	força cortante da ação permanente G
f_{ck}	resistência característica do concreto à compressão aos 28 dias	V_Q	força cortante da ação variável Q
f_{ctd}	$f_{ctk}/1{,}4$ resistência de cálculo do concreto à tração	V_{sw}	força cortante de cálculo resistida pela armadura transversal
f_{ctk}	$0{,}7f_{ctm}$ resistência característica do concreto à tração	z	braço de alavanca
f_{ctm}	$0{,}3f_{ck}^{2/3}$ (f_{ck} em MPa) resistência média do concreto à tração	β	ângulo da tensão principal de tração
f_{yd}	$f_{yk}/1{,}15$ resistência de cálculo de escoamento do aço	ν	$0{,}6(1 - f_{ck}/250)$ (f_{ck} em MPa) coeficiente de redução da resistência do concreto fissurado por força cortante
f_{yk}	resistência característica de escoamento do aço	σ_c	tensão principal de compressão
F_c	força de compressão no concreto	σ_t	tensão principal de tração
F_s	força de tração na armadura longitudinal	τ	tensão tangencial da força cortante
		θ	ângulo das bielas de concreto comprimidas

Analogia de treliça



A – Verificação da compressão diagonal do concreto (dados b, d e f_{ck}, obter V_{Rd2}; $V_d \le V_{Rd2}$)

cálculo	simplificado θ (45°)	refinado θ (30° a 45°)	
V_{Rd2}	$0{,}45bdvf_{cd}$	$0{,}45bdvf_{cd}\text{sen}2\theta$	A1

f_{ck} MPa		20	25	30	35
ν		0,552	0,540	0,528	0,516
$V_{Rd2}/(bd)$	θ (45°)	0,355	0,434	0,509	0,581
	θ (30°)	0,307	0,376	0,441	0,503

obs.: $V_{Rd2}/(bd)$ em kN/cm^2

B – Dimensionamento da armadura transversal (dados V_d, b, d, f_{ck} e f_{yk}, obter A_{sw})

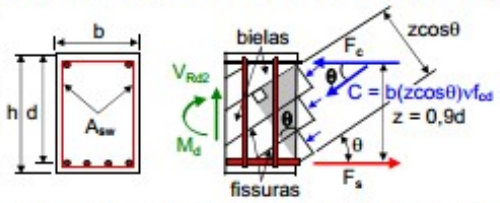
cálculo	simplificado θ (45°)	refinado θ (30° a 45°)		
A_{sw}	$\frac{(V_d - V_c)s}{0{,}9df_{yd}}$	$\frac{(V_d - V_c)s}{0{,}9df_{yd}\cot\theta}$		B1
V_c	V_o	$V_d \le V_o$	$V_d > V_o$	B2
		V_o	$\left[\frac{V_{Rd2} - V_d}{V_{Rd2} - V_o}\right]V_o$	
V_o	$0{,}6bdf_{ctd}$			B3
$A_{sw,min}$	$0{,}2bsf_{ctm}/f_{yk}$			B4

f_{ck} MPa	20	25	30	35
f_{ctm} MPa	2,210	2,565	2,896	3,210
f_{ctd} MPa	1,105	1,282	1,448	1,605
$V_o/(bd)$	0,0663	0,0769	0,0869	0,0963
$A_{sw,min}/(bs)$	0,088%	0,103%	0,116%	0,128%

obs.: $V_o/(bd)$ em kN/cm^2 e $A_{sw,min}/(bs)$ para f_{yk} = 500 MPa

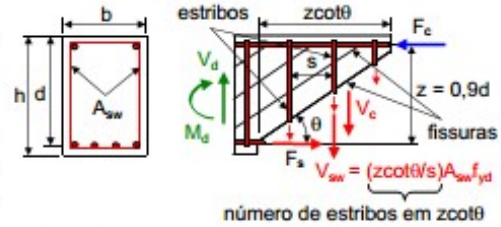
Modelo resistente à força cortante no estado limite último

Compressão diagonal das bielas de concreto (corte a-a)



(a) $V_{Rd2} = C\text{sen}\theta = bz\nu f_{cd}\cos\theta\text{sen}\theta = 0{,}45bd\nu f_{cd}\text{sen}2\theta$

Tração transversal dos estribos (corte b-b)



(b) $V_d = V_{sw} + V_c$ ou $V_{sw} = V_d - V_c$

(c) $V_{sw} = z\frac{A_{sw}}{s}f_{yd}\cot\theta = 0{,}9d\frac{A_{sw}}{s}f_{yd}\cot\theta$

(b) em (c): $A_{sw} = \frac{(V_d - V_c)s}{0{,}9df_{yd}\cot\theta}$

[MUSSO]

Fernando Musso Junior musso@npd.ufes.br Estruturas de Concreto Armado 38

Fonte: Musso Junior (2012)

ANEXO IV

VIGA - FORMULÁRIO DE DIMENSIONAMENTO DE SEÇÃO RETANGULAR À MOMENTO FLETOR (ELU-M)

A_s	área da seção da armadura longitudinal tracionada	f_{yk}	resistência característica de escoamento do aço
A'_s	área da seção da armadura longitudinal comprimida	h	altura da seção transversal
$A_{s,min}$	área mínima da seção da armadura longitudinal tracionada	M_d	$1{,}4(M_G + M_Q)$ momento fletor de cálculo
$A_{s,lim}$	área da seção da armadura tracionada correspondente a $M_{d,lim}$	$M_{d,lim}$	momento fletor de cálculo máximo com armadura simples
b	largura da seção transversal	M_G	momento fletor da ação permanente G
C	força de compressão no concreto	M_Q	momento fletor da ação variável Q
d	altura útil da seção transversal	T	força de tração na armadura longitudinal
	distância do centróide da armadura tracionada à borda comprimida da seção transversal	x	profundidade da linha neutra no estádio 3 (ELU)
d'	distância do centróide da armadura comprimida à borda comprimida da seção transversal	x_{lim}	profundidade máxima da linha neutra para ruptura dúctil da seção (ruptura com aviso)
d''	$h - d$	z	braço de alavanca (braço do binário)
d_{lim}	altura útil mínima com armadura simples	ε_c	encurtamento da fibra extrema de concreto
E_s	210000 MPa módulo de elasticidade do aço	ε_{yd}	f_{yd}/E_s deformação de escoamento do aço
f_{cd}	$f_{ck}/1{,}4$ resistência de cálculo do concreto à compressão	ε_s	alongamento da armadura tracionada
f_{ck}	resistência característica do concreto à compressão aos 28 dias	ε'_s	encurtamento da armadura comprimida
f_{yd}	$f_{yk}/1{,}15$ resistência de cálculo de escoamento do aço	ξ	x/d profundidade da linha neutra adimensional
		λ	0,8 coeficiente de redução da altura comprimida da seção (diagrama retangular x parabólico)
		η	0,85 coeficiente de redução da resistência de cálculo do concreto à compressão
		μ	$M_d/(bd^2\eta f_{cd})$ momento fletor adimensional
		σ'_{sd}	tensão de compressão na armadura longitudinal

A – Momento fletor de cálculo máximo com armadura simples (dados b, d e f_{ck}, obter $M_{d,lim}$)

f_{ck}	$\leq$ 35 MPa	> 35 MPa	
x_{lim}	0,5d	0,4d	A1
$M_{d,lim}$	$0{,}272bd^2f_{cd}$	$0{,}22848bd^2f_{cd}$	A2
$A_{s,lim}$	$0{,}34bdf_{cd}/f_{yd}$	$0{,}272bdf_{cd}/f_{yd}$	A3

B – Altura útil mínima da seção com armadura simples (dados M_d e b, obter d_{lim})

f_{ck}	$\leq$ 35 MPa	> 35 MPa	
d_{lim}	$\sqrt{\dfrac{M_d}{0{,}272bf_{cd}}}$	$\sqrt{\dfrac{M_d}{0{,}22848bf_{cd}}}$	B1

C - Dimensionamento da armadura longitudinal (dados M_d, b, d, f_{ck} e f_{yk}, obter A_s e A_s')

Armadura simples (seção com A_s; $M_d \leq M_{d,lim}$; $x \leq x_{lim}$)

$$x = 1{,}25d\left[1-\sqrt{1-\frac{M_d}{0{,}425bd^2f_{cd}}}\right] \quad \text{C1}$$

$$A_s = 0{,}68bxf_{cd}/f_{yd} \quad \text{C2}$$

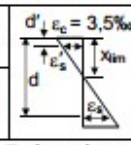
$$A_{s,min} = \text{máximo}(0{,}15\%;\ 0{,}035f_{cd}/f_{yd})bh \quad \text{C3}$$

f_{ck} MPa	20	25	30	35
$A_{s,min}/(bh)$	0,150%	0,150%	0,173%	0,201%

Armadura dupla (seção com A_s e A'_s; $M_d > M_{d,lim}$; $x = x_{lim}$)

$$A_s = A_{s,lim} + \frac{M_d - M_{d,lim}}{f_{yd}(d-d')} \quad \text{C4}$$

$$A'_s = \frac{M_d - M_{d,lim}}{\sigma'_{sd}(d-d')} \quad \text{C5}$$



$$\frac{\varepsilon'_s}{x_{lim}-d'} = \frac{3{,}5‰}{x_{lim}}$$

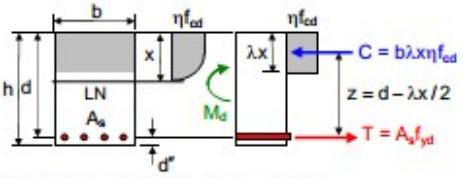
$$\sigma'_{sd} = f_{yd} \text{ se } \varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd};\ \sigma'_{sd} = E_s\varepsilon'_s \text{ se } \varepsilon'_s < \varepsilon_{yd} \quad \text{C6}$$

f_{ck}	$\leq$ 35 MPa	> 35 MPa	
ε'_s	$0{,}007(0{,}5 - d'/d)$	$0{,}00875(0{,}4 - d'/d)$	C7

f_{yk}	250 MPa	500 MPa	600 MPa	
ε_{yd}	1,035‰	2,070‰	2,484‰	C8

Modelo resistente à momento fletor no estado limite último

Armadura simples (seção com A_s; $M_d \leq M_{d,lim}$; $x \leq x_{lim}$)



(a) $M_d = Cz = f(x) = b\lambda x\eta f_{cd}(d - \lambda x/2)$

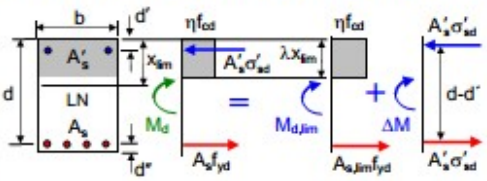
(b) $T = A_s f_{yd} = C = b\lambda x\eta f_{cd}$ ou $A_s = b\lambda x\eta f_{cd}/f_{yd}$

(a) $\div bd^2\eta f_{cd}$: $\dfrac{M_d}{bd^2\eta f_{cd}} = \dfrac{\lambda x}{d}\left(1-\dfrac{\lambda x}{2d}\right)$ ou

$\mu = \lambda\xi(1-\lambda\xi/2) = (\lambda\xi) - (\lambda\xi)^2/2 \therefore (\lambda\xi)^2/2 - (\lambda\xi) + \mu = 0$

(c) $\lambda\xi = 1-\sqrt{1-2\mu}$ ou $x = f(M_d) = \dfrac{d}{\lambda}\left[1-\sqrt{1-2\dfrac{M_d}{bd^2\eta f_{cd}}}\right]$

Armadura dupla (seção com A_s e A'_s; $M_d > M_{d,lim}$; $x = x_{lim}$)



(d) $M_d = M_{d,lim} + \Delta M$ ou $\Delta M = M_d - M_{d,lim}$

(e) $\Delta M = A'_s\sigma'_{sd}(d-d')$ ou $A'_s = \Delta M/[\sigma'_{sd}(d-d')]$

(f) $A_s f_{yd} = A_{s,lim}f_{yd} + A'_s\sigma'_{sd}$ ou $A_s = A_{s,lim} + A'_s\sigma'_{sd}/f_{yd}$

[MUSSO]

Fernando Musso Junior musso@npd.ufes.br Estruturas de Concreto Armado 31

Fonte: Musso Junior (2012)

ANEXO V

VIGA - VERIFICAÇÃO DE FLECHA EM VIGA DE SEÇÃO RETANGULAR (ELS-DEF)

A_s	área da seção da armadura longitudinal tracionada	L_{bal}	comprimento do balanço
A'_s	área da seção da armadura longitudinal comprimida	M_G	momento fletor da ação permanente G
b	largura da seção transversal	M_Q	momento fletor da ação variável Q
d	altura útil da seção transversal	M_{QP}	$M_G + \psi_2 M_Q$ momento fletor da ação quase permanente p_{QP} (momento positivo no vão; momento no engaste, no caso de balanço)
	distância do centróide da armadura tracionada à borda comprimida da seção transversal	M_r	$W_c f_{ctf}$ momento fletor de fissuração
d'	distância do centróide da armadura comprimida à borda comprimida da seção transversal	n	E_s/E_{cs} razão entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto
d"	h - d	p_{QP}	$G + \psi_2 Q$ ação quase permanente
E_{cs}	$4760 f_{ck}^{1/2}$ MPa módulo de elasticidade secante do concreto	Q	ação variável
E_s	210000 MPa módulo de elasticidade do aço	x_2	profundidade da linha neutra no estádio 2
f_{ck}	resistência característica do concreto à compressão aos 28 dias	x_c	profundidade da linha neutra da seção bruta
f_{ctf}	αf_{ctm} resistência do concreto à tração na flexão	t	distância do centróide da seção bruta à fibra extrema comprimida
f_{ctm}	$0{,}3 f_{ck}^{2/3}$ (f_{ck} em MPa) resistência média do concreto à tração	t_o	tempo que se deseja calcular a flecha (meses)
$f_{diferida}$	flecha do efeito da fluência do concreto	y_t	h - x_c distância do centróide da seção bruta à fibra extrema tracionada
$f_{elástica}$	flecha obtida com $p = p_{QP}$, $E = E_{cs}$ e $I = I_c$	W_c	I_c/y_t ($bh^2/6$ para seção retangular) módulo resistente da seção bruta
$f_{imediata}$	flecha da viga ao entrar em carga	α	1,0 (EC2); 1,5 seção retangular (NBR 6118)
f_{limite}	flecha máxima para limitar efeito visual desagradável	α_f	coeficiente para levar em conta a fluência do concreto no cálculo da flecha diferida
f_{total}	$f_{imediata} + f_{diferida}$ flecha total	ψ_2	0,3 para edifícios residenciais
G	ação permanente		0,4 para edifícios comerciais, de escritórios, estações e edifícios públicos
h	altura da seção transversal		0,6 para bibliotecas, oficinas e garagens
I_2	momento de inércia da seção no estádio 2		fator de redução da ação variável para combinação de ação quase permanente
I_c	$bh^3/12$ para seção retangular momento de inércia da seção bruta	ρ'	$A'_s/(bd)$ taxa geométrica de armadura longitudinal comprimida
I_e	momento de inércia efetivo da seção		
L	vão entre apoios		

A – Flecha elástica

$f_{elástica}$ (ver flechas em diversos sistemas) — A1

B – Flecha imediata

$$f_{imediata} = f_{elástica}\frac{I_c}{I_e} \quad \text{B1}$$

seção fissurada ($M_{QP} \geq M_r$)

$$I_e = \left(\frac{M_r}{M_{QP}}\right)^3 I_c + \left[1-\left(\frac{M_r}{M_{QP}}\right)^3\right] I_2 \text{ (BRANSON)} \quad \text{B2}$$

seção não fissurada ($M_{QP} < M_r$)

$$I_e = I_c \quad \text{B3}$$

C – Flecha diferida

$$f_{diferida} = \alpha_f f_{imediata} \quad \text{C1}$$

$$\alpha_f = \frac{\xi(t) - \xi(t_o)}{1 + 50\rho'} \quad \text{C2}$$

$\xi(t \leq 70$ meses)		$0{,}68(0{,}996^t)t^{0{,}32}$				C3
$\xi(t > 70$ meses)		2				C3
t meses	1	3	6	12	≥ 70	
$\xi(t)$	0,68	0,95	1,18	1,44	2,00	

D – Flecha total

$$f_{total} = f_{imediata} + f_{diferida} \leq f_{limite} \quad \text{D1}$$

E – Flecha limite

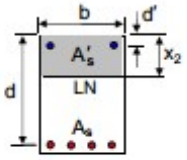
$$f_{limite} = \frac{L}{250} \quad (L = 2L_{bal}\text{, no caso de balanço}) \quad \text{E1}$$

F - Parâmetros auxiliares

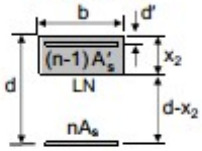
f_{ck} MPa	20	25	30	35
f_{ctm} MPa	2,210	2,565	2,896	3,210
$f_{ctf,EC2}$ MPa	2,210	2,565	2,896	3,210
E_{cs} MPa	21287	23800	26072	28161
$n = E_s/E_{cs}$	9,865	8,824	8,055	7,457

G – Seção equivalente (seção fissurada – estádio 2)

seção real



seção equivalente de concreto



$$x_2 = [-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_1a_3}]/(2a_1) \quad \text{G1}$$

$$a_1 = b/2 \quad \text{G2}$$

$$a_2 = nA_s + (n-1)A'_s \quad \text{G3}$$

$$a_3 = -nA_s d - (n-1)A'_s d' \quad \text{G4}$$

$$I_2 = \frac{bx_2^3}{3} + nA_s(d - x_2)^2 + (n-1)A'_s(x_2 - d')^2 \quad \text{G5}$$

profundidade da l. neutra $x = \sum x_i A_i / \sum A_i$

momento de inércia $I = \sum (I_i + A_i \Delta_i^2)$

[MUSSO]

Fernando Musso Junior musso@npd.ufes.br Estruturas de Concreto Armado 50

Fonte: Musso Junior (2012)