UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Ciencias Matemáticas

Análisis Numérico de Ecuaciones en Derivadas Parciales

Proyecto 1

Autor: Álvaro Mandado Díaz

Profesor: Mihaela Negreanu

29 de enero de 2025

Índice

1. Introducción

Este documento pretende dar respuesta al primer proyecto de la asignatura [1]. En la sección *4. Anexos* se puede encontrar el script de MATLAB utilizado.

2. Discretización

Usando la expresión del polinomio de Taylor, podemos escribir las diferentes diferencias finitas:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{iv)}(\zeta), \quad \zeta \in [x, x+h] \\ f(x+2h) &= f(x) + 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) + \frac{4h^3}{3}f'''(x) + \frac{2h^4}{3}f^{iv)}(\zeta), \quad \zeta \in [x, x+2h] \\ f(x+3h) &= f(x) + 3hf'(x) + \frac{9h^2}{2}f''(x) + \frac{9h^3}{2}f'''(x) + \frac{27h^4}{8}f^{iv)}(\zeta), \quad \zeta \in [x, x+3h] \end{aligned} \tag{2.1}$$

Estas son suficientes para calcular $D_h^a f(x)$. Si ahora sustituimos en la expresión del enunciado nos queda lo siguiente:

$$\begin{aligned} D_h^a f(x) = \frac{a_0+a_1+a_2+a_3}{h} f(x) + (a_1+2a_2+3a_3)f'(x) + h\left(\frac{1}{2}a_1 + 2a_2 + \frac{9}{2}a_3\right)f''(x) + \\ +h^2\left(\frac{1}{6}a_1 + \frac{4}{3}a_2 + \frac{9}{2}a_3\right)f'''(x) + h^3\left(\frac{a_1}{24} + \frac{2}{3}a_2 + \frac{27}{8}a_3\right)f^{iv)}(\zeta) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Puesto que queremos que sea una aproximación de f', pediremos que se cumplan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 &= 1 \\ \frac{1}{2}a_1 + 2a_2 + \frac{9}{2}a_3 &= 0 \\ \frac{1}{6}a_1 + \frac{4}{3}a_2 + \frac{9}{2}a_3 &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Así, la solución es la siguiente:

$$a_0 = -\frac{11}{6}, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = -\frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3} \tag{2.4}$$

Luego el último término de la suma, el error, vale:

$$6f^{iv)}(\zeta)h^3 \tag{2.5}$$

Basta ver que el error cometido es:

$$|D_h^a f(x) - f'(x)| = \left|6f^{iv)}(\zeta)h^3\right| \leq \mathrm{K}h^3 \tag{2.6}$$

Donde K es una constante que acote a $6f^{iv)}(x)$ en el intervalo de definición, y que existe por hipótesis. Así, concluimos que D_h^a es una discretización de orden 3 de f'.

Para $D_h^b f(x)$ utilizaremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{iv)}(x) + \frac{h^5}{120}f^{v)}(\zeta), \quad \zeta \in [x, x+h] \\
f(x+2h) &= f(x) + 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) + \frac{4h^3}{3}f'''(x) + \frac{2h^4}{3}f^{iv)}(x) + \frac{4h^5}{15}f^{v)}(\zeta), \quad \zeta \in [x, x+2h] \\
f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{iv)}(x) - \frac{h^5}{120}f^{v)}(\zeta), \quad \zeta \in [x-h, x] \\
f(x-2h) &= f(x) - 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) - \frac{4h^3}{3}f'''(x) + \frac{2h^4}{3}f^{iv)}(x) - \frac{4h^5}{15}f^{v)}(\zeta), \quad \zeta \in [x-2h, x]
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Si ahora sustituimos en la expresión del enunciado nos queda lo siguiente:

$$\begin{aligned}
D_h^b f(x) = \frac{b_1 + b_{-1} + b_2 + b_{-2}}{h} f(x) + (b_1 - b_{-1} + 2b_2 - 2b_{-2})f'(x) + \\
+ h\left(\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_{-1} + 2b_2 + 2b_{-2} = 0\right) f''(x) + h^2\left(\frac{1}{6}b_1 - \frac{1}{6}b_{-1} + \frac{4}{3}b_2 - \frac{4}{3}b_{-2}\right) f'''(x) + \\
+ h^3\left(\frac{1}{24}b_1 + \frac{1}{24}b_{-1} + \frac{2}{3}b_2 + \frac{2}{3}b_{-2}\right) f^{iv)}(x) + h^4\left(\frac{1}{120}b_1 - \frac{1}{120}b_{-1} + \frac{4}{15}b_2 - \frac{4}{15}b_{-2}\right) f^{v)}(\zeta)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Puesto que queremos que sea una aproximación de f', pediremos que se cumplan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
b_1 + b_{-1} + b_2 + b_{-2} &= 0 \\
b_1 - b_{-1} + 2b_2 - 2b_{-2} &= 1 \\
\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_{-1} + 2b_2 + 2b_{-2} &= 0 \\
\frac{1}{6}b_1 - \frac{1}{6}b_{-1} + \frac{4}{3}b_2 - \frac{4}{3}b_{-2} &= 0
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Así, la solución es la siguiente:

$$b_1 = \frac{2}{3}, \quad b_{-1} = -\frac{2}{3}, \quad b_2 = -\frac{1}{12}, \quad b_{-2} = \frac{1}{12} \tag{2.10}$$

Hemos calculado un término más porque con esta solución el término en $f^{iv)}(x)$ se anula, luego el último término de la suma, el error, vale:

$$-\frac{1}{60}f^{v)}(\zeta)h^4 \tag{2.11}$$

Basta ver que el error cometido es:

$$\left| D_h^b f(x) - f'(x) \right| = \left| -\frac{1}{60}f^{v)}(\zeta)h^4 \right| \leq \mathrm{K}h^4 \tag{2.12}$$

Donde K es una constante que acote a $-\frac{1}{60}f^{iv)}(x)$ en el intervalo de definición, y que existe por hipótesis. Así, concluimos que D_h^b es una discretización de orden 4 de f'.

3. Programa de MATLAB

A continuación se pueden ver todas las gráficas devueltas por el script:

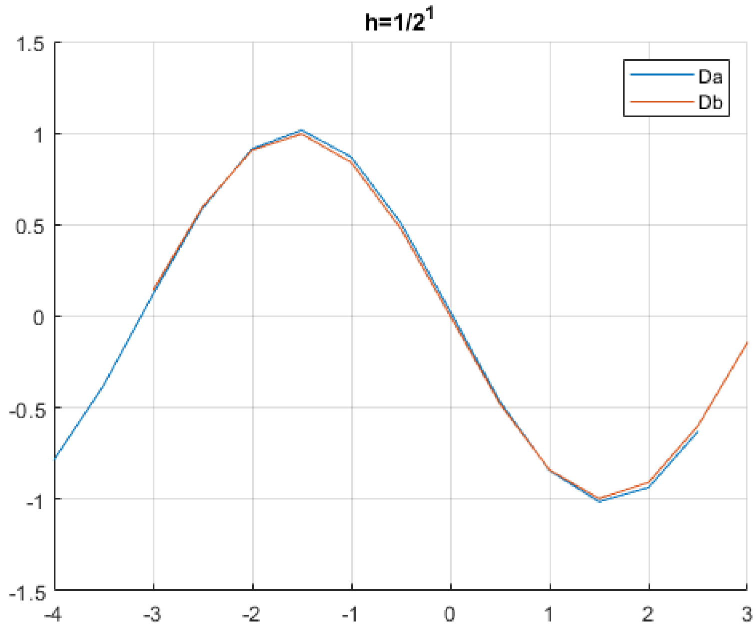

Figura 1: $D_h^a f(x)$ y $D_h^b f(x)$ para $h = 2^{-1}$.

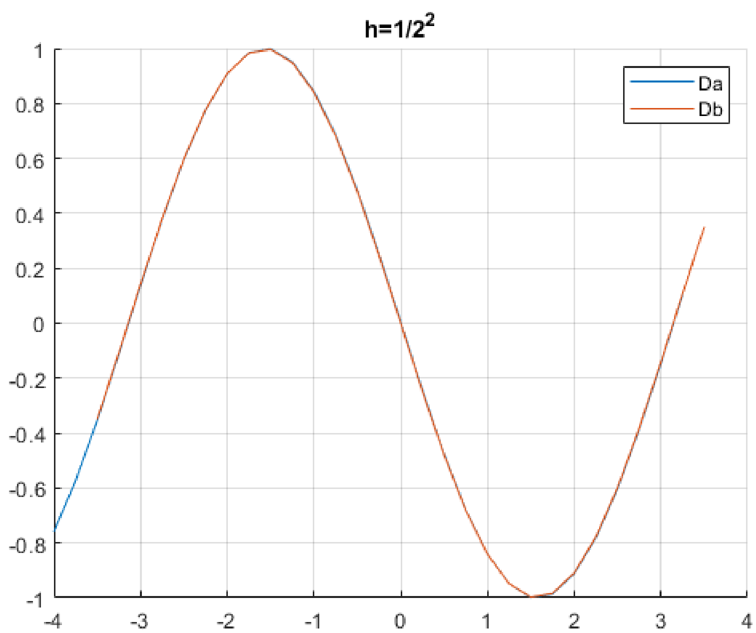

Figura 2: $D_h^a f(x)$ y $D_h^b f(x)$ para $h = 2^{-2}$.

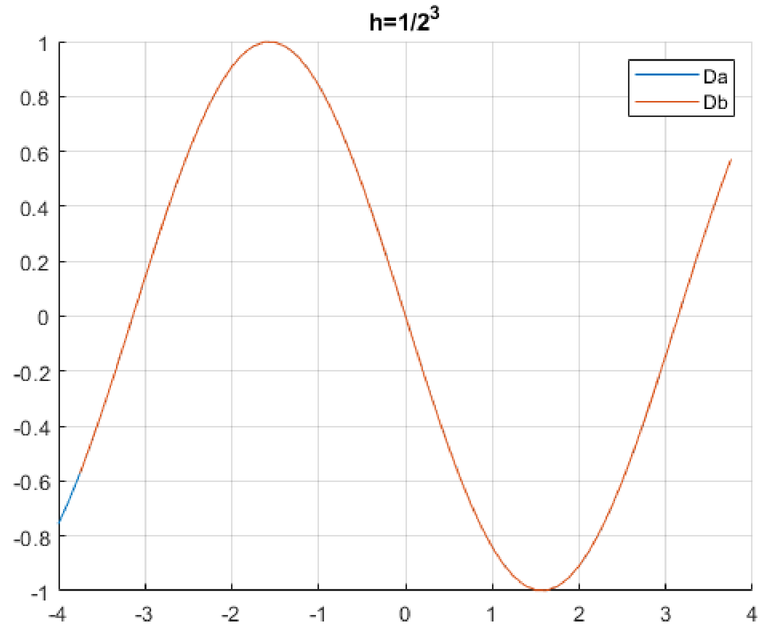

Figura 3: $D_h^a f(x)$ y $D_h^b f(x)$ para $h = 2^{-3}$.

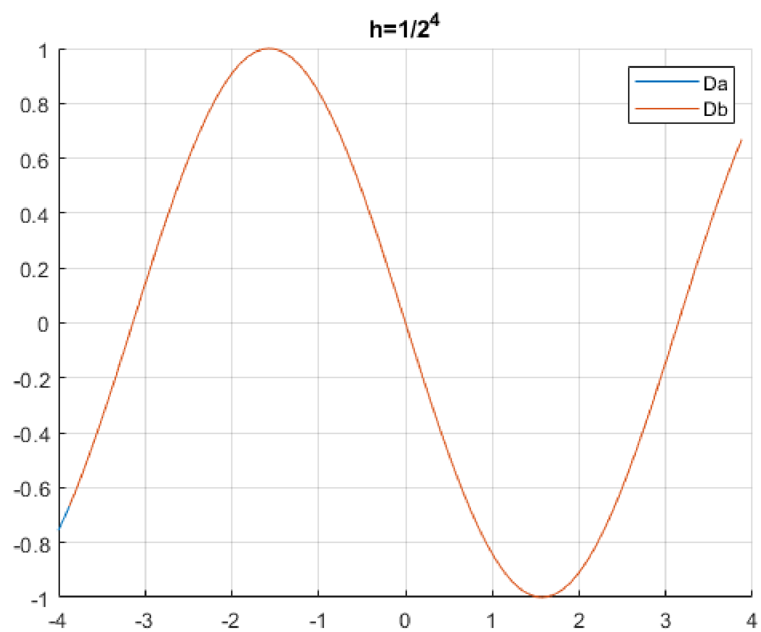

Figura 4: $D_h^a f(x)$ y $D_h^b f(x)$ para $h = 2^{-4}$.

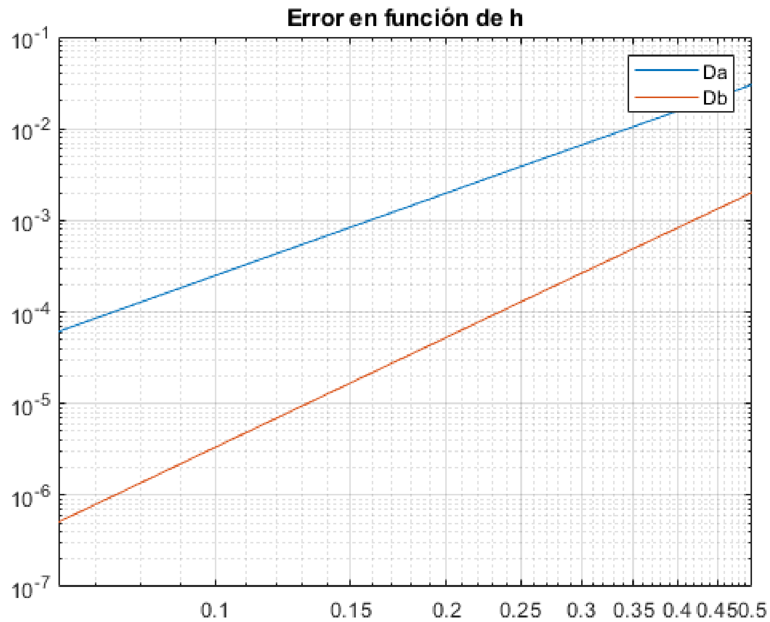

Figura 5: Error cometido en función de h, en escala logarítmica en ambos ejes.

Como cabía esperar, según disminuye h, más *suaves* se vuelven las discretizaciones D_h y más se asemejan a $f'(x) = -sen(x)$.

En la figura 5 se observa cómo ambos errores tienen, en representación *loglog*, pendientes diferentes. En el script se observa que el orden para D_h^a es ~ 3 (obtenido según los errores de cada par de valores consecutivos de h) y para D_h^b es ~ 4, como habíamos predicho en la sección anterior.

4. Anexos

Aquí se adjunta el archivo .m de MATLAB. Las figuras se obtienen al ejecutarlo.

Bibliografía

[1] Mihaela Negreanu Pruna. *Proyecto 1*. URL: `https://cvdof.ucm.es/moodle/pluginfile.php/2202389/mod_resource/content/1/Proyecto%201.pdf`.