



UNIVERSIDAD  
**COMPLUTENSE**  
MADRID

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

ANÁLISIS NUMÉRICO DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

ECUACIÓN DE BURGERS VISCOSA COMO  
SIMPLIFICACIÓN DE LA ECUACIÓN DE  
NAVIER-STOKES EN UNA DIMENSIÓN

*Autores:* ÁLVARO MANDADO DÍAZ,  
NOELIA ROSALES LEDESMA

PROFESOR: MIHAELA NEGREANU PRUNA

9 de mayo de 2025

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. De Navier-Stokes a Burgers</b>	<b>1</b>
<b>3. Resolución analítica</b>	<b>2</b>
<b>4. Método de Lax-Friedrichs</b>	<b>3</b>
4.1. Introducción . . . . .	3
4.2. Discretización . . . . .	3
4.3. Existencia y unicidad . . . . .	4
4.4. Estabilidad . . . . .	4
4.5. Consistencia . . . . .	6
4.6. Convergencia . . . . .	6
4.7. Código de MATLAB . . . . .	8
4.8. Ejemplo . . . . .	8
<b>5. Cálculo numérico a partir de la transformada de Hopf-Cole</b>	<b>8</b>
5.1. Perfil inicial para $\phi$ . . . . .	8
5.2. Condiciones de contorno para $\phi$ . . . . .	9
5.3. Esquema numérico para $\phi$ . . . . .	9
5.4. Código de MATLAB . . . . .	10
5.5. Ejemplo . . . . .	10
<b>6. Estudio de los métodos</b>	<b>10</b>
6.1. Comparación para distintos perfiles . . . . .	10
6.2. Comparación para varias viscosidades . . . . .	15
<b>7. Ejemplo: Evolución del tráfico</b>	<b>19</b>
<b>8. Anexos</b>	<b>19</b>



## 1. Introducción

En este trabajo se tratará de plantear un problema físico, como es la resolución de un modelo sobre el movimiento de un fluido viscoso, dentro de un marco matemático tanto teórico como numérico. Es decir, se modelizará este problema mediante una serie de ecuaciones diferenciales para después estudiar propiedades teóricas como la unicidad y existencia de soluciones. Por último, se planteará un esquema numérico para su resolución, y se estudiarán las propiedades del mismo (convergencia, estabilidad, etc.).

La mecánica de fluidos es una rama de la física cuyo estudio se remonta atrás en el tiempo hasta tan lejos como la Grecia clásica, cuando por primera vez se postuló una ley sobre los mismos, el principio de Arquímedes. Mientras que la hidrostática, el estudio de fluidos en reposo, está bien estudiada y la mayoría de los problemas ya han sido resueltos, ese no es el caso de la fluidodinámica o dinámica de fluidos (en adelante FD).

Esto se debe a la complejidad para estudiar físicamente y con todo detalle cómo se comportan los fluidos, pero también a la no analiticidad de las soluciones matemáticas de los modelos que surgen de ese estudio.

## 2. De Navier-Stokes a Burgers

Las ecuaciones de Navier-Stokes, que rigen el movimiento de los fluidos, son las siguientes [1]:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i, \quad i = x, y, z \quad (2.1)$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Donde  $\rho$  es la densidad del fluido en cada punto y en cada momento,  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  es la velocidad del fluido,  $\mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z)$  es el campo de aceleraciones generado por las fuerzas aplicadas,  $P$  es la presión en cada punto del fluido y  $\mu$  es el coeficiente de viscosidad dinámica del fluido. El operador  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  es el operador nabla y el operador  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  es el laplaciano. El operador  $\frac{D(\cdot)}{Dt}$  se conoce como derivada material, y tiene la siguiente expresión:

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\cdot) \quad (2.2)$$

Esta derivada tiene en cuenta la variación de una magnitud de forma explícita en el tiempo junto con la variación debida a que el fluido se encuentra en movimiento. Para una única dimensión podemos entonces escribir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.3)$$

Donde  $\nu = \mu/\rho$  es el coeficiente de viscosidad cinemática. Nótese que la condición  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  en varias dimensiones representa la conservación de la masa, en cuanto a que no haya fuentes ni sumideros de fluido. En una única dimensión la condición cambiaría a  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ , lo cual nos dejaría un campo de velocidades que es igual en todo punto del espacio. Por tanto, reescribiremos esta condición pidiendo que el signo de  $u$  sea el mismo en todo momento. Si no fuese así, habría un punto donde el fluido tiene velocidad nula y desde el cual el fluido se aleja (o se acerca) por ambos lados, lo cual representa una fuente (o un sumidero).

Tomaremos las siguientes simplificaciones del problema:

1. No hay fuerzas externas, o estas no generan aceleraciones y por tanto  $g = 0$ .

2. La presión es constante a lo largo del sistema y por tanto  $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ .
3. El fluido es homogéneo e incompresible y por tanto  $\nu$  es constante.
4. El perfil inicial cumple  $u_0(x) \geq 0$ .

Así, llegamos por fin a la ecuación de Burgers viscosa:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

Nótese que para un fluido no viscoso, donde  $\nu = 0$ , podemos resolver la ecuación mediante el método de las curvas características.

### 3. Resolución analítica

La ecuación que vamos a resolver es la siguiente:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = \nu u_{xx}, & (x, t) \in [a, b] \times [0, T] \\ u(a, t) = g_1(t), \quad u(b, t) = g_2(t), & t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [a, b] \end{cases} \quad (3.1)$$

Donde  $u_\alpha$  representa la derivada parcial de  $u$  respecto de la variable  $\alpha$ . En general, y por simplicidad, siempre podemos suponer  $a = 0$ ,  $b = 1$ , y  $T = 1$  nada más que reescalando, con lo que el dominio queda  $\Omega = [0, 1]^2$ .

La demostración de unicidad, puesto que la ecuación no es lineal, no es evidente. Sin embargo, Hopf y Cole de forma separada idearon una transformación que simplifica el problema. Supongamos por un momento que nuestra solución es de la forma  $u = \varphi_x$  donde  $\varphi(x, t)$  es una función suficientemente regular. Sustituyendo en la ecuación 3.1 obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi_{xt} + \varphi_x \varphi_{xx} &= \nu \varphi_{xxx} \\ (\varphi_t)_x + (\varphi_x^2)_x &= \nu (\varphi_{xx})_x \end{aligned} \quad (3.2)$$

Integrando respecto de  $x$  obtenemos la siguiente ecuación:

$$\varphi_t + \frac{1}{2} \varphi_x^2 = \nu \varphi_{xx} \quad (3.3)$$

Ahora hacemos una segunda transformación, tomando  $\varphi = -2\nu \log \phi$ , entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi_t &= -2\nu \frac{\phi_t}{\phi} \\ \varphi_x &= -2\nu \frac{\phi_x}{\phi} \\ \varphi_{xx} &= -2\nu \frac{\phi_{xx}\phi - \phi_x^2}{\phi^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Y simplemente sustituyendo en 3.3 obtenemos:

$$\begin{aligned} -2\nu \frac{\phi_t}{\phi} + \frac{1}{2} \left( -2\nu \frac{\phi_x}{\phi} \right)^2 &= \nu \left( -2\nu \frac{\phi_{xx}\phi - \phi_x^2}{\phi^2} \right) \\ -2\nu \frac{\phi_t}{\phi} + 2\nu^2 \frac{\phi_x^2}{\phi^2} &= -2\nu^2 \frac{\phi_{xx}}{\phi} + 2\nu^2 \frac{\phi_x^2}{\phi^2} \\ \phi_t &= \nu \phi_{xx} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Así, la solución que buscamos es  $u = -2\nu \frac{\phi_x}{\phi}$ , donde  $\phi$  es la solución de la ecuación del calor. La condición inicial  $u(x, 0) = u_0(x)$  debe cumplir  $u_0(x) = -2\nu \frac{\phi_x(x, 0)}{\phi(x, 0)} = -2\nu \frac{\partial}{\partial x} \log \phi(x, 0)$ , y por tanto la condición inicial de  $\phi$ , que es solución de la ecuación del calor, es la siguiente:

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x) = \exp \left( -\frac{1}{2\nu} \int_{x_0}^x u_0(\zeta) d\zeta \right) \quad (3.6)$$

Si suponemos una condición inicial suficientemente buena, tendremos que podemos escribir  $\phi_0(x)$  como su serie de Fourier, de ahí podemos obtener  $\phi(x, t)$  y  $\phi_x(x, t)$ , y por tanto obtenemos  $u(x, t)$ .

## 4. Método de Lax-Friedrichs

### 4.1. Introducción

El problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = \nu u_{xx}, & (x, t) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in [0, 1] \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, 1] \end{cases} \quad (4.1)$$

Deduzcamos el esquema numérico que nos ayudará a resolver esta ecuación.

En primer lugar, denotemos  $f(u) = \frac{u^2}{2}$ , que aplicando la regla de la cadena cumple:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.2)$$

De esta forma, particularizando para  $u$  la solución exacta de nuestro problema, podemos escribir la ecuación de Burgers:

$$u_t + f_x(u) = \nu u_{xx} \quad (4.3)$$

### 4.2. Discretización

Comenzamos creando una partición de  $[0, 1] \times [0, 1]$  de paso  $h = \frac{1}{N_x}$  en espacio y  $\tau = \frac{1}{N_T}$ . Esto nos define la malla uniforme:

$$\begin{aligned} G_h &= \{x_i := ih : i = 0, \dots, N_x\} \\ G_\tau &= \{t_i := i\tau : i = 0, \dots, N_T\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Aproximamos:

$$\begin{cases} u_t(x_i, t_j) \sim \frac{u(x_i, t_j + \tau) - u(x_i, t_j)}{\tau} \\ u_{xx}(x_i, t_j) \sim \frac{u(x_i + h, t_j) - u(x_i - h, t_j) + 2u(x_i, t_j)}{h^2} \end{cases} \quad (4.5)$$

Para  $f$  el operador que utilizaremos dependerá del signo de  $u$ :

$$\begin{cases} f_x(u(x_i, t_j)) \sim \frac{f(u(x_i + h, t_j)) - f(u(x_i, t_j))}{h}, & u(x_i, t_j) < 0 \\ f_x(u(x_i, t_j)) \sim \frac{f(u(x_i, t_j)) - f(u(x_i - h, t_j))}{h}, & u(x_i, t_j) > 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

En lo que sigue denotamos  $U(x_i, t_j) := U_i^j$  y  $f(U_i^j) := F_i^j$ . Si definimos el siguiente operador:

$$[F]_i^j = \begin{cases} \frac{F_{i+1}^j - F_i^j}{h} = \frac{(U_{i+1}^j)^2 - (U_i^j)^2}{2h}, & U_i^j < 0 \\ \frac{F_i^j - F_{i-1}^j}{h} = \frac{(U_i^j)^2 - (U_{i-1}^j)^2}{2h}, & U_i^j > 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Entonces  $U$  resuelve:

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\tau} + [F]_i^j = \nu \frac{U_{i+1}^j + U_{i-1}^j - 2U_i^j}{h^2} \quad (4.8)$$

Por tanto, obtenemos el siguiente esquema numérico del problema (4.1):

$$\begin{cases} \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\tau} + [F]_i^j = \nu \frac{U_{i+1}^j + U_{i-1}^j - 2U_i^j}{h^2}, & i = 1, \dots, N_x - 1, \quad j = 0, \dots, N_T - 1 \\ U_i^0 = u_0(x_i), & i = 1, \dots, N_x - 1 \\ U_0^j = U_{N_x}^j = 0, & j = 0, \dots, N_T - 1 \end{cases} \quad (4.9)$$

### 4.3. Existencia y unicidad

La existencia y unicidad del método de Lax-Friedrichs se puede garantizar dado que se trata de un método explícito, es decir, la solución para el tiempo  $t_{j+1}$  depende únicamente de la solución en  $t_j$ :

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \tau[F]_i^j + \tau\nu \frac{U_{i+1}^j + U_{i-1}^j - 2U_i^j}{h^2} \quad (4.10)$$

resultado que hemos conseguido manipulando la ecuación (4.7)

### 4.4. Estabilidad

Sea  $u(t, x) \in C^1([0, T]) \times C^4([0, 1])$ . La aproximación numérica  $U$  dada por el método de Lax-Friedrichs verifica el principio del máximo y del mínimo siempre y cuando se cumpla una condición tipo CFL.

Como el esquema incluye diferencias en la función  $f$ , pero lo útil son las diferencias entre valores de  $U$ , parece lógico hacer uso del teorema del valor medio.

**Teorema 4.1. (del Valor Medio)** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Entonces, existe un  $c \in (a, b)$  cumpliendo que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (4.11)$$

Si usamos este teorema para nuestra función  $f(u) = \frac{u^2}{2}$ , que es continua y diferenciable (de hecho es  $C^\infty$ ), entonces si  $U_i^j < 0$  podemos escribir:

$$F_{i+1}^j - F_i^j = f'(\xi_i^j)(U_{i+1}^j - U_i^j), \quad \xi_i^j \text{ entre } U_i^j \text{ y } U_{i+1}^j \quad (4.12)$$

Nótese que no conocemos si  $U_{i+1}^j$  es mayor que  $U_i^j$  en general. Entonces podemos sustituir esta expresión en la ecuación 4.41 obteniendo:

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{\tau}{h} f'(\xi_i^j)(U_{i+1}^j - U_i^j) + \frac{\tau\nu}{h^2}(U_{i+1}^j + U_{i-1}^j - 2U_i^j) \quad (4.13)$$

Reagrupando términos obtenemos:

$$U_i^{j+1} = U_i^j(1 + \frac{\tau}{h}f'(\xi_i^j) - \frac{2\tau\nu}{h^2}) - \frac{\tau}{h}f'(\xi_i^j)U_{i+1}^j + \frac{\tau\nu}{h^2}(U_{i+1}^j + U_{i-1}^j) \quad (4.14)$$

Ahora, denotamos:

$$U_I^j = \max_{i=0,\dots,N_x} U_i^j \quad (4.15)$$

Si se cumple que  $\nu > 0$  y además:

$$1 + \frac{\tau}{h}f'(\xi_i^j) - \frac{2\tau\nu}{h^2} > 0 \quad (4.16)$$

Entonces podemos decir que

$$U_i^{j+1} \leq U_I^j(1 + \frac{\tau}{h}f'(\xi_i^j) - \frac{2\tau\nu}{h^2}) - \frac{\tau}{h}f'(\xi_i^j)U_{i+1}^j + \frac{\tau\nu}{h^2}(U_{i+1}^j + U_{i-1}^j) \leq U_I^j + \frac{\tau}{h}f'(\xi_i^j)(U_I^j - U_{i+1}^j) \quad (4.17)$$

Si además tomamos perfiles iniciales suficientemente poco oscilantes, o en su defecto mallados espaciales suficientemente finos, entonces tendremos que  $f'(\xi_i^j) = \xi_i^j < 0$ . Como  $U_I^j - U_{i+1}^j \geq 0$ , se cumple lo siguiente:

$$U_i^{j+1} \leq U_I^j + \frac{\tau}{h}f'(\xi_i^j)(U_I^j - U_{i+1}^j) \leq U_I^j \quad (4.18)$$

Entonces se verifica:

$$U_{MAX}^{j+1} \leq U_{MAX}^j \quad (4.19)$$

Si en cambio  $U_i^j > 0$  podemos escribir:

$$F_i^j - F_{i-1}^j = f'(\xi_i^j)(U_i^j - U_{i-1}^j), \quad \xi_i^j \text{ entre } U_{i-1}^j \text{ y } U_i^j \quad (4.20)$$

Sustituyendo como antes obtenemos:

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{\tau}{h}f'(\xi_i^j)(U_i^j - U_{i-1}^j) + \frac{\tau\nu}{h^2}(U_{i+1}^j + U_{i-1}^j - 2U_i^j) \quad (4.21)$$

Reagrupando términos obtenemos:

$$U_i^{j+1} = U_i^j(1 - \frac{\tau}{h}f'(\xi_i^j) - \frac{2\tau\nu}{h^2}) + \frac{\tau}{h}f'(\xi_i^j)U_{i-1}^j + \frac{\tau\nu}{h^2}(U_{i+1}^j + U_{i-1}^j) \quad (4.22)$$

Ahora, denotamos:

$$U_I^j = \max_{i=0,\dots,N_x} U_i^j \quad (4.23)$$

Si ahora tenemos:

$$1 - \frac{\tau}{h}f'(\xi_i^j) - \frac{2\tau\nu}{h^2} > 0 \quad (4.24)$$

Es la misma condición que en el caso anterior, puesto que ahora tendremos que  $f'(\xi_i^j) = \xi_i^j > 0$  para perfiles como los de antes. Por último, se tiene lo siguiente:

$$U_i^{j+1} \leq U_I^j(1 - \frac{\tau}{h}f'(\xi_i^j) - \frac{2\tau\nu}{h^2}) + \frac{\tau}{h}f'(\xi_i^j)U_{i-1}^j + \frac{\tau\nu}{h^2}(U_{i+1}^j + U_{i-1}^j) \leq U_I^j - \frac{\tau}{h}f'(\xi_i^j)(U_I^j - U_{i-1}^j) \leq U_I^j \quad (4.25)$$

Obteniendo el resultado deseado para ambos casos en los que hemos separado la actuación del operador  $[F]$ .



## 4.5. Consistencia

Sea  $u(t, x) \in C^2([0, T]) \times C^4([0, 1])$ , la aproximación numérica  $U$  dada por el método de Lax-Friedrichs, el error local de truncamiento verifica:

$$T(x_i, t_j) = \mathcal{O}(\tau + h) \quad (4.26)$$

Definimos el error local de truncamiento a partir de la solución exacta  $u$  como:

$$T(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\tau} + \frac{u^2(x_{i+1}, t_j) - u^2(x_i, t_j)}{2h} - \nu \frac{u(x_{i+1}, t_j) + u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j)}{h^2} \quad (4.27)$$

Restando esta expresión con la ecuación de Burgers:

$$u_t + f_x - \nu u_{xx} = 0 \quad (4.28)$$

Agrupando términos obtenemos:

$$T(x_i, t_j) = \left( \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\tau} - u_t \right) + \left( \frac{u^2(x_{i+1}, t_j) - u^2(x_i, t_j)}{2h} - f_x \right) - \left( \nu \frac{u(x_{i+1}, t_j) + u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j)}{h^2} - \nu u_{xx} \right) \quad (4.29)$$

Usamos los siguientes desarrollos demostrados en clase:

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j + \tau) - u(x_i, t_j)}{\tau} - u_{tt}(x_i, \eta_j) \frac{\tau}{2}, \text{ con } \eta_j \in [t_j, t_j + \tau] \quad (4.30)$$

$$u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i + h, t_j) + u(x_i - h, t_j) - 2u(x_i, t_j)}{h^2} - u_{xxx}(\xi_i, t_j) \frac{h^2}{12}, \text{ con } \xi_i \in [x_i - h, x_i + h] \quad (4.31)$$

$$f_x(x_i, t_j) = [f](x, t) - f_{xx}(\zeta_i, t_j) \frac{h}{2}, \text{ con } \zeta_i \in [x_i - h, x_i + h] \quad (4.32)$$

Esta última expresión se ha manejado ya en el apartado anterior, y en ambos casos da lugar al mismo error,  $\mathcal{O}(h)$ . Sustituyendo estos desarrollos en  $T(x_i, t_j)$  obtenemos:

$$T(x_i, t_j) = u_{tt}(x_i, \eta_j) \frac{\tau^2}{2} - \nu u_{xxx}(\xi_i, t_j) \frac{h^2}{12} + f_{xx}(\zeta_i, t_j) \frac{h}{2} = \mathcal{O}(\tau) + \mathcal{O}(h) - \nu \mathcal{O}(h^2) = \mathcal{O}(\tau + h) \quad (4.33)$$

## 4.6. Convergencia

Sea  $u(t, x) \in C^2([0, T]) \times C^4([0, 1])$ , lo cual implica que  $[f(u)](t, x) \in C^2([0, T]) \times C^4([0, 1])$ , la aproximación numérica  $U$  dada por el método de Lax-Friedrichs, se verifica:

$$|e_i^j| = \max_{i,j} |U_i^j - u(x_i, t_j)| = \mathcal{O}(\tau + h) \quad (4.34)$$

de manera que el método es convergente, es decir, se cumple:

$$\max_{i,j} |e_i^j| \xrightarrow{h, \tau \rightarrow 0} 0 \quad (4.35)$$

Lo haremos para el caso en el que  $U_i^j < 0$ , pero el razonamiento es análogo para el caso contrario, debido a que tomaremos valores absolutos (que son independientes del signo) y máximos en cada paso temporal. Así, reagrupamos términos y obtenemos:

$$U_i^{j+1} = (1 - \frac{2\tau\nu}{h^2})U_i^j + \frac{\nu\tau}{h^2}(U_{i+1}^j + U_{i-1}^j) - \frac{\tau}{h}(F_{i+1}^j - F_i^j) \quad (4.36)$$

Por otro lado, si denotamos  $u(x_i, t_j) := u_i^j$  y  $f(u_i^j) := f_i^j$

$$u_i^{j+1} = (1 - \frac{2\tau\nu}{h^2})u_i^j + \frac{\nu\tau}{h^2}(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) - \frac{\tau}{h}(f_{i+1}^j - f_i^j) + \tau T(x_i, t_j) \quad (4.37)$$

Restando ambas ecuaciones:

$$e_i^{j+1} = (1 - \frac{2\tau\nu}{h^2})e_i^j + \frac{\nu\tau}{h^2}(e_{i+1}^j + e_{i-1}^j) - \frac{\tau}{h}(F_{i+1}^j - f_{i+1}^j - F_i^j + f_i^j) - \tau T(x_i, t_j) \quad (4.38)$$

Ahora, usando el teorema del valor medio de nuevo:

$$F_{i+1}^j - f_{i+1}^j = f'(\xi_{i+1}^j)(U_{i+1}^j - u_{i+1}^j), \quad \xi_{i+1}^j \text{ entre } U_{i+1}^j \text{ y } u_{i+1}^j \quad (4.39)$$

$$F_i^j - f_i^j = f'(\xi_i^j)(U_i^j - u_i^j), \quad \xi_i^j \text{ entre } U_i^j \text{ y } u_i^j \quad (4.40)$$

Obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} e_i^{j+1} &= \left(1 - \frac{2\tau\nu}{h^2}\right)e_i^j + \frac{\nu\tau}{h^2}(e_{i+1}^j + e_{i-1}^j) - \frac{\tau}{h}(f'(\xi_{i+1}^j)e_{i+1}^j - f'(\xi_i^j)e_i^j) - \tau T(x_i, t_j) = \\ &= \left(1 - \frac{2\tau\nu}{h^2} + \frac{\tau}{h}f'(\xi_i^j)\right)e_i^j + \frac{\nu\tau}{h^2}e_{i-1}^j + \left(\frac{\nu\tau}{h^2} - \frac{\tau}{h}f'(\xi_{i+1}^j)\right)e_{i+1}^j - \tau T(x_i, t_j) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Pidiendo una condición de tipo CFL,  $1 - \frac{2\tau\nu}{h^2} \geq 0$ , podemos acotar tomando valores absolutos, pidiendo que  $I$  sea el índice para el cuál se alcanza el máximo de los  $|e_i^j|$ , como sigue:

$$\begin{aligned} |e_i^{j+1}| &\leq |e_I^j| \left(1 - \frac{2\tau\nu}{h^2} + 2\frac{\tau\nu}{h^2} + \frac{\tau}{h}2 \cdot \max\{|f'(\xi_{i+1}^j)|, |f'(\xi_i^j)|\}\right) + \tau |T(x_i, t_j)| \leq \\ &\leq |e_I^j| \left(1 + \frac{2\tau}{h} \|f'\|_\infty\right) + \tau \mathcal{O}(\tau + h) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Ahora bien, hemos pedido la condición CFL y por tanto tenemos  $\frac{2\tau}{h} < \frac{h}{\nu}$ . Por otro lado, como  $f'(x) = x$  entonces  $\|f'\|_\infty = \max_{i,j} |U_i^j|$ , pero tenemos demostrada la estabilidad y por tanto es una constante  $M$ . Así, tenemos lo siguiente:

$$|e_i^{j+1}| \leq |e_I^j| \left(1 + \frac{2\tau}{h} \|f'\|_\infty\right) + \tau \mathcal{O}(\tau + h) \leq |e_I^j| \left(1 + \frac{hM}{\nu}\right) + \tau \mathcal{O}(\tau + h) \quad (4.43)$$

Bajando cada vez más en el índice temporal obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} |e_i^{j+1}| &\leq |e_I^j| \left(1 + \frac{hM}{\nu}\right) + \tau \mathcal{O}(\tau + h) \leq |e_{I'}^{j-1}| \left[\left(1 + \frac{hM}{\nu}\right) + \tau \mathcal{O}(\tau + h)\right] \left(1 + \frac{hM}{\nu}\right) + \tau \mathcal{O}(\tau + h) = \\ &= |e_{I_{j-1}}^{j-1}| \left(1 + \frac{hM}{\nu}\right)^2 + |e_{I_{j-1}}^{j-1}| \left(1 + \frac{hM}{\nu}\right) \tau \mathcal{O}(\tau + h) + \tau \mathcal{O}(\tau + h) = |e_{I_{j-1}}^{j-1}| \left(1 + \frac{hM}{\nu}\right)^2 + \mathcal{O}(\tau + h) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Queremos ver que  $|e_i^{j+1}| = \mathcal{O}(\tau + h)$  para todo  $j$ . Para  $j = 1$  tenemos:

$$|e_i^1| \leq |e_I^0| \left(1 + \frac{hM}{\nu}\right) + \tau \mathcal{O}(\tau + h) \quad (4.45)$$

Si tomamos el perfil inicial en los puntos del mallado como los datos de entrada del esquema,  $|e_I^0| = 0$ , luego en efecto,  $|e_i^1| = \mathcal{O}(\tau + h)$ . Supongamos que el resultado es cierto hasta el paso temporal  $j$ . Bajando hasta el paso inicial obtenemos lo siguiente:

$$|e_i^{j+1}| \leq |e_{I_0}^0| \left(1 + \frac{hM}{\nu}\right)^{j+1} + \mathcal{O}(\tau + h) = \mathcal{O}(\tau + h) \quad (4.46)$$

Por tanto la solución aproximada converge a la real cuando  $\tau, h \rightarrow 0$ , siempre que se cumpla CFL y que haya estabilidad.

## 4.7. Código de MATLAB

El código para el esquema que acabamos de discutir se puede encontrar en la sección *Anexos* [8]. Este calcula  $U$  y dibuja una animación de cómo  $U$  avanza con el tiempo y representa en una misma figura estática los perfiles para ciertos valores de  $t$ .

## 4.8. Ejemplo

En la sección *Anexos* [8] se encuentra una animación con la evolución de una cierta perturbación inicial, en particular la primera con la que comparamos ambos métodos.

# 5. Cálculo numérico a partir de la transformada de Hopf-Cole

Para contrastar lo obtenido a partir del esquema anterior, aprovecharemos que ya conocemos varios esquemas numéricos para la ecuación del calor y los usaremos para resolver la ecuación para  $\phi$  y de ahí obtener  $u$ . Veamos cómo lo vamos a hacer.

## 5.1. Perfil inicial para $\phi$

Recordamos que la ecuación (3.6) nos indicaba cómo calcular la condición inicial de  $\phi$ . Aplicando este resultados a los puntos del mallado obtenemos:

$$\phi(x_i, 0) = \phi_0(x_i) = \exp\left(-\frac{1}{2\nu} \int_{x_0}^{x_i} u_0(\zeta) d\zeta\right) \quad (5.1)$$

donde  $u_0$  es un perfil conocido, al menos en los puntos del mallado. Usaremos la siguiente aproximación, teniendo en cuenta que  $x_0 = 0$  por simplicidad:

$$\int_0^{x_i} u_0(\zeta) d\zeta \approx \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{i-1} [u_0(x_j) + u_0(x_{j+1})] = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{i-1} (U_j^0 + U_{j+1}^0) \quad (5.2)$$

Así tenemos el perfil inicial  $\phi_0$

$$\phi_0(x_i) = \exp\left(-\frac{h}{\nu} \sum_{j=0}^{i-1} (U_j^0 + U_{j+1}^0)\right) \quad (5.3)$$

## 5.2. Condiciones de contorno para $\phi$

Las condiciones de contorno tipo Dirichlet para  $u$  dan lugar a condiciones de contorno tipo Neumann para  $\phi$ , como se puede deducir trivialmente de la definición de la transformada:

$$u(a, t) = \frac{-2\nu}{\phi(a, t)} \frac{\partial \phi}{\partial x}(a, t) = 0 \implies \frac{\partial \phi}{\partial x}(a, t) = 0, \quad a \in \{0, 1\} \quad (5.4)$$

## 5.3. Esquema numérico para $\phi$

Tendremos por tanto que resolver una ecuación de calor con condiciones de contorno de von Neumann homogéneas para un cierto perfil inicial. Estas condiciones se resumen de la siguiente forma:

$$\Phi_0^j = \Phi_1^j, \quad \Phi_{N_x}^j = \Phi_{N_x-1}^j, \quad \forall j = 1, \dots, N_T \quad (5.5)$$

En todo caso, el esquema que usaremos es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\phi_i^{j+1} - \phi_i^j}{\tau} - \nu \frac{\phi_{i+1}^j + \phi_{i-1}^j - 2\phi_i^j}{h^2} = 0, & i = 1, \dots, N_x - 1, \quad j = 0, \dots, N_T - 1 \\ \Phi_i^0 = \phi_0(x_i), & i = 1, \dots, N_x - 1 \\ \Phi_0^j = \Phi_1^j, \quad \Phi_{N_x}^j = \Phi_{N_x-1}^j, & j = 1, \dots, N_T \end{cases} \quad (5.6)$$

De forma similar a cómo se calcula en el caso de las condiciones de Dirichlet homogéneas, el esquema es explícito y podemos despejar:

$$\Phi_i^{j+1} = \left(1 - 2\nu \frac{\tau}{h^2}\right) \Phi_i^j + \frac{\nu\tau}{h^2} \Phi_{i+1}^j + \frac{\nu\tau}{h^2} \Phi_{i-1}^j \quad (5.7)$$

En forma matricial podemos escribirlo de la siguiente manera:

$$\Phi^{j+1} = \left(\mathbb{1} + \frac{\nu\tau}{h^2} B\right) \Phi^j \quad (5.8)$$

Donde  $\mathbb{1}$  es la matriz identidad,  $\Phi^j$  es el vector columna

$$\Phi^j = \begin{pmatrix} \Phi_0^j \\ \vdots \\ \Phi_{N_x}^j \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

y  $B$  es el laplaciano discreto de von Neumann

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

La diferencia con el caso de Dirichlet es que en este caso  $\Phi_0^j$  y  $\Phi_{N_x+1}^j$  no son constantemente nulos, luego hay que añadir sus filas correspondientes a la matriz. Esas filas deben ser las correspondientes a las condiciones que hemos impuesto en 5.5.

Para recuperar  $U$ , tendremos que aproximar la derivada espacial de  $\Phi$  mediante diferencias centradas. Así, el esquema numérico para  $U$  es el siguiente:

$$U_i^j = -\nu \frac{\Phi_{i+1}^j - \Phi_{i-1}^j}{h\Phi_i^j} \quad (5.11)$$

Nótese que tendremos problemas para calcular los valores de  $U$  en los bordes del intervalo espacial, pero ya sabíamos que cumple unas condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas, luego no tenemos más que pedir  $U_0^j = U_{N_x}^j = 0$  para cualquier  $j$ .

También podríamos tener problemas porque se anule el denominador. Sin embargo, el perfil inicial  $\phi_0$  es positivo pues es una exponencial, luego para un perfil  $u_0$  suficientemente bueno y un mallado suficientemente fino se tendrá que  $\Phi_i^j \neq 0$ .

## 5.4. Código de MATLAB

El código para el esquema que acabamos de discutir se puede encontrar en la sección *Anexos* [8]. Este calcula  $\Phi$ , recupera  $U$ , y dibuja una animación de cómo  $U$  avanza con el tiempo y representa en una misma figura estática los perfiles para ciertos valores de  $t$ .

## 5.5. Ejemplo

En la sección *Anexos* [8] se encuentra una animación con la evolución de una cierta perturbación inicial, en particular la primera con la que comparamos ambos métodos.

# 6. Estudio de los métodos

## 6.1. Comparación para distintos perfiles

Veamos ahora cómo se comportan ambos métodos para perfiles iniciales suficientemente buenos (muy derivables, poco oscilantes y mallados finos), y  $\nu = 0,05$ . Partamos del perfil inicial  $u_0(x) = \sin 4\pi x$  y dibujemos ambas soluciones en distintos tiempos, así como la diferencia entre ambas.

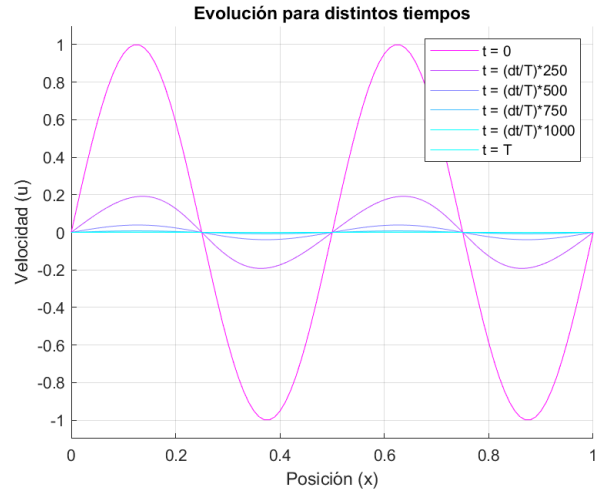


Figura 1: Solución obtenida a distintos tiempos para el perfil inicial  $u_0(x) = \sin 4\pi x$  mediante el esquema de Hopf-Cole

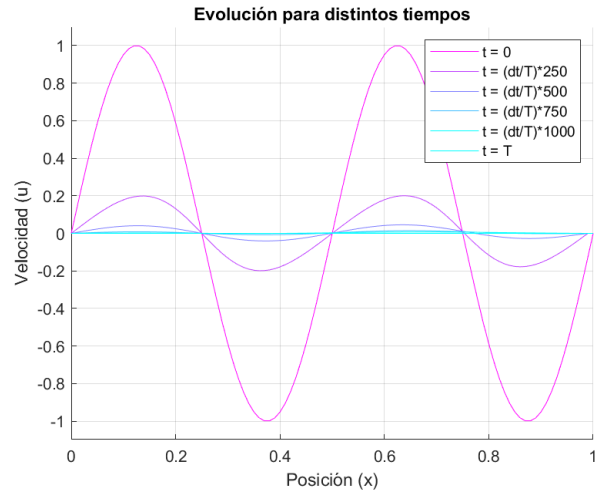


Figura 2: Solución obtenida a distintos tiempos para el perfil inicial  $u_0(x) = \sin 4\pi x$  mediante el esquema de Lax-Friedrichs

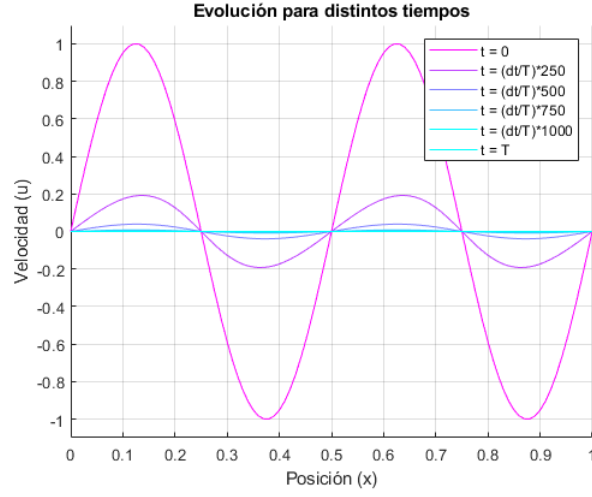


Figura 3: Diferencia entre ambos esquemas obtenida a distintos tiempos para el perfil inicial  $u_0(x) = \sin 4\pi x$

En efecto, ambos métodos son válidos y se comportan como esperaríamos para perfiles suficientemente buenos.

Tomemos ahora perfiles muy oscilantes, como podría ser  $u_0(x) = \sin 100\pi x$ .

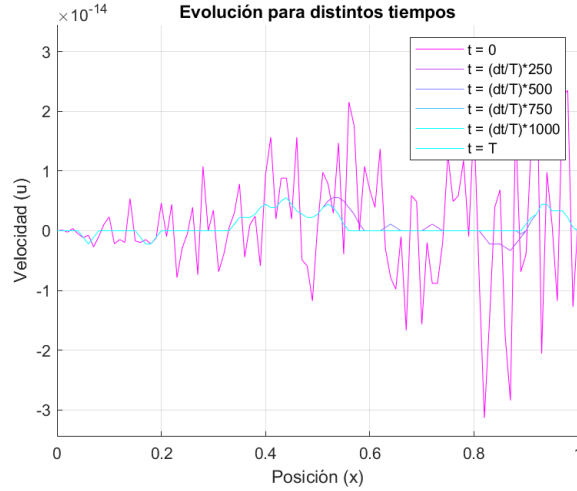


Figura 4: Solución obtenida a distintos tiempos para el perfil inicial  $u_0(x) = \sin 100\pi x$  mediante el esquema de Hopf-Cole

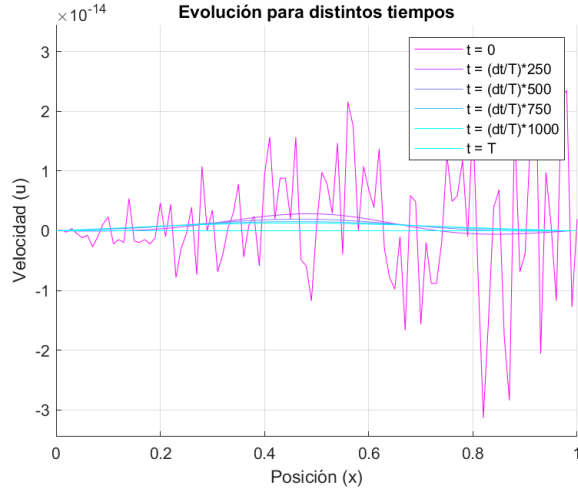


Figura 5: Solución obtenida a distintos tiempos para el perfil inicial  $u_0(x) = \sin 100\pi x$  mediante el esquema de Lax-Friedrichs

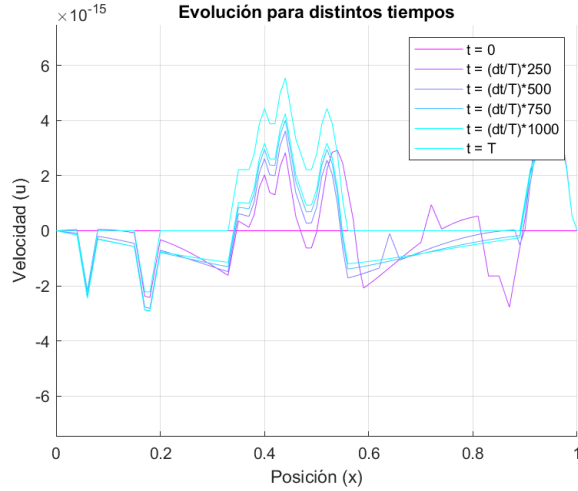


Figura 6: Diferencia entre ambos esquemas obtenida a distintos tiempos para el perfil inicial  $u_0(x) = \sin 100\pi x$

Para estos perfiles iniciales el extraño comportamiento no se debe a los esquemas, sino al grosor del mallado. Puesto que hay pocos puntos en el mallado para un perfil inicial que es muy oscilante, la probabilidad de que el perfil inicial tome un valor nulo en el punto del mallado es muy elevada. Es decir, sobre los puntos del mallado la función  $\sin 100\pi x$  toma valores muy pequeños. Por ello, los perfiles iniciales son tan pequeños.

El esquema de Hopf-Cole llega a una situación en la cuál alcanza un valor constante pero muy pequeño. De forma rigurosa en este caso no se converge a la solución real, que tiende a cero debido al término difusivo. Sin embargo, se observa que los valores constantes que se alcanzan son del orden de  $10^{-15}$  veces la norma infinito del perfil inicial, por lo que la aproximación sigue siendo buena.

El esquema de Lax-Friedrichs en cambio muestra un comportamiento más esperable. Las partes negativas se vuelven rápidamente positivas, recuperando un perfil más natural y, ahora sí, decayendo hasta



volverse nulo en todas partes.

Tomemos ahora perfiles iniciales que no cumplan las condiciones de contorno, por ejemplo  $u_0(x) = 1$ .

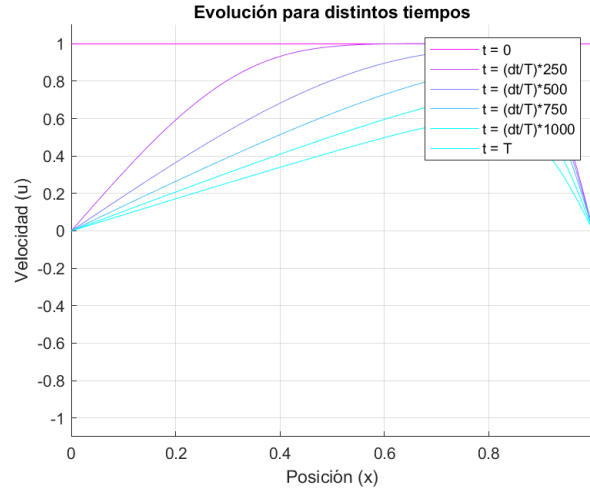


Figura 7: Solución obtenida a distintos tiempos para el perfil inicial  $u_0(x) = 1$  mediante el esquema de Hopf-Cole

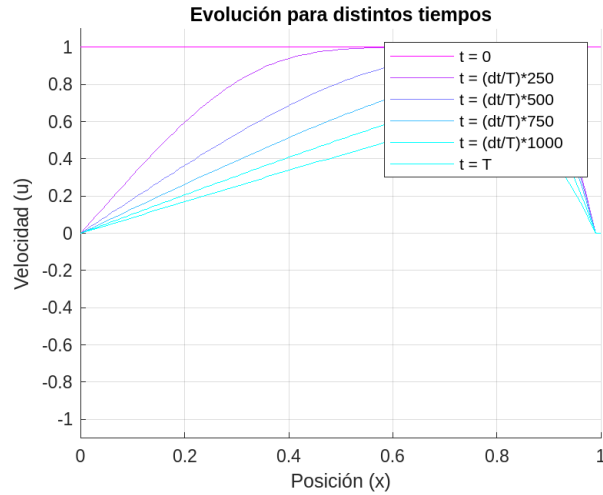


Figura 8: Solución obtenida a distintos tiempos para el perfil inicial  $u_0(x) = 1$  mediante el esquema de Lax-Friedrichs

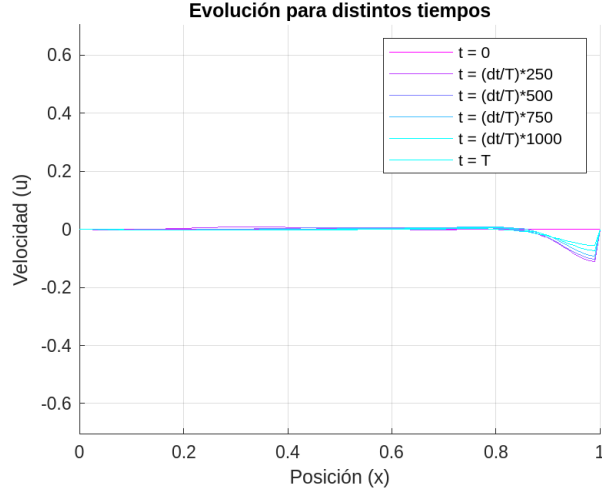


Figura 9: Diferencia entre ambos esquemas obtenida a distintos tiempos para el perfil inicial  $u_0(x) = 1$

Se observa claramente cómo el término difusivo suaviza muy rápidamente las soluciones en torno a los bordes del intervalo. De hecho, para cualquier  $t > 0$  ya se cumplen las condiciones mientras que para  $t = 0$  no, con lo que la solución solo es continua en tiempo para  $t \in (0, T]$ . Este resultado no obstante no es una cuestión numérica, sino teórica, sobre el comportamiento de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales cuyas condiciones iniciales no cumplen las condiciones de contorno.

También se ve cómo el método de Hopf-Cole tarda más en suavizar el extremo derecho del intervalo que el método de Lax-Friedrichs, probablemente debido a cómo se resuelve la ecuación del calor para  $\phi$ .

## 6.2. Comparación para varias viscosidades

Variemos ahora el valor de la viscosidad a  $\nu = 1$ .

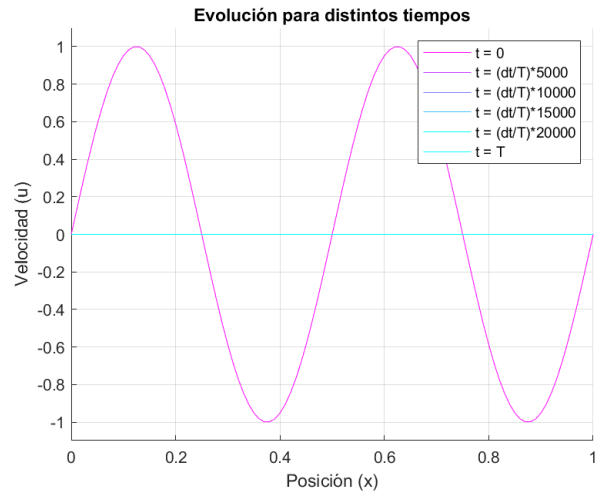


Figura 10: Solución obtenida a distintos tiempos para un valor de la viscosidad de  $\nu = 1$  mediante el esquema de Hopf-Cole

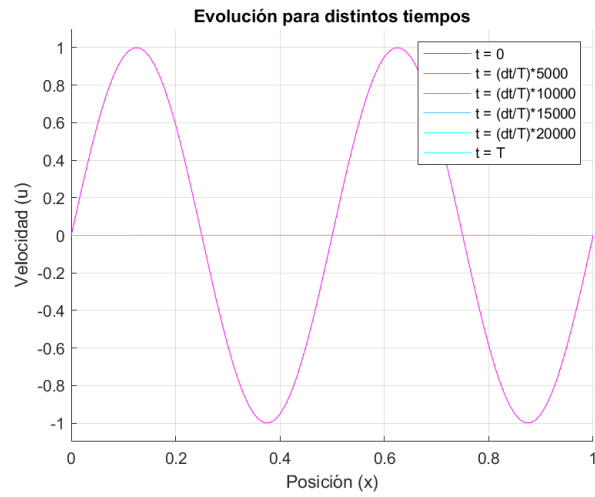


Figura 11: Solución obtenida a distintos tiempos para un valor de la viscosidad de  $\nu = 1$  mediante el esquema de Lax-Friedrichs

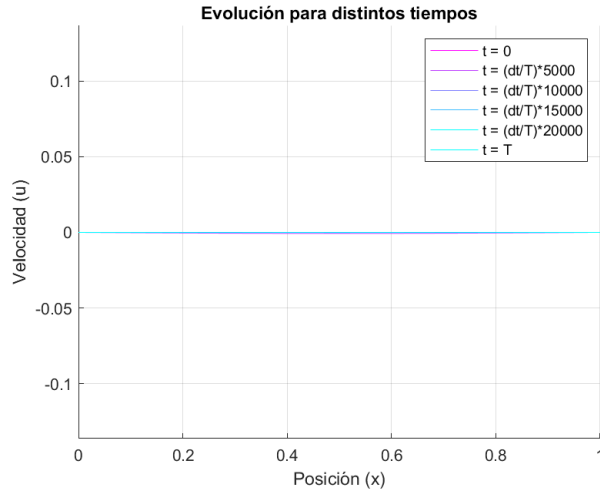


Figura 12: Diferencia entre ambos esquemas obtenida a distintos tiempos para un valor de la viscosidad de  $\nu = 1$

En ambos casos las soluciones tienen buenos comportamientos, cosa que no ocurrirá en el límite  $\nu \rightarrow 0$ . De todos modos, se observa que cuando crece la viscosidad el perfil se suaviza extremadamente rápido. Tomemos ahora  $\nu = 0,005$ .

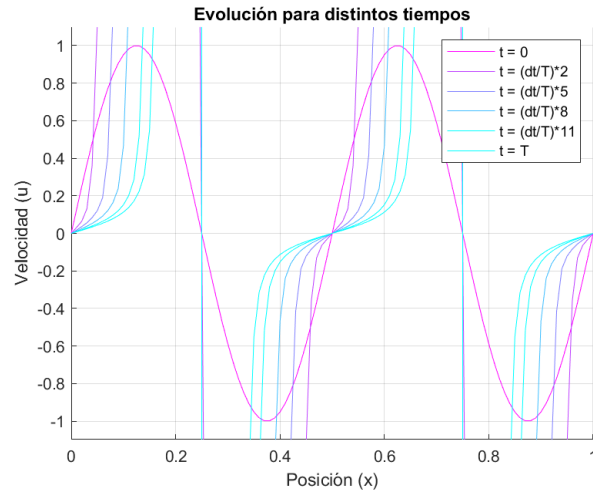


Figura 13: Solución obtenida a distintos tiempos para un valor de la viscosidad de  $\nu = 0,005$  mediante el esquema de Hopf-Cole

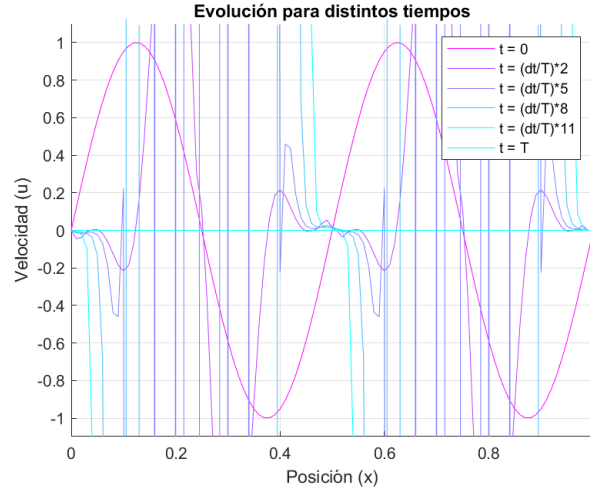


Figura 14: Solución obtenida a distintos tiempos para un valor de la viscosidad de  $\nu = 0,0005$  mediante el esquema de Lax-Friedrichs

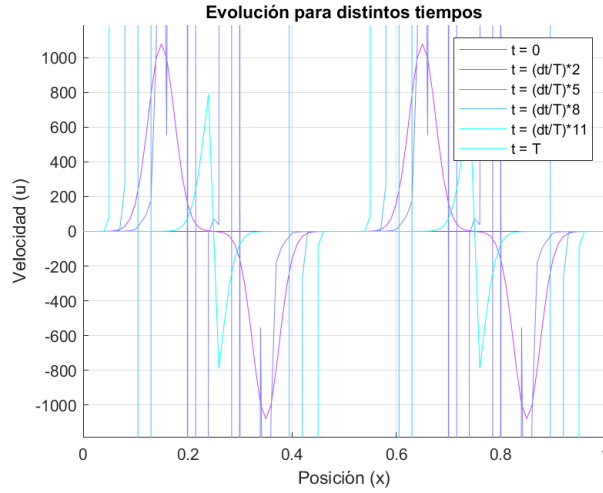


Figura 15: Diferencia entre ambos esquemas obtenida a distintos tiempos para un valor de la viscosidad de  $\nu = 0,0005$

Como se puede observar, los esquemas empiezan a fallar en el caso de que la viscosidad tiende a cero, es decir, en el límite de fluido no viscoso. Parece evidente que los esquemas no funcionan puesto que las condiciones que hemos impuesto para obtener estabilidad y convergencia dependen en muchos casos del inverso de la viscosidad. Además, en el caso no viscoso aparece el concepto de onda de choque.

En teoría de curvas características y ecuación de transporte, soluciones iniciales infinitamente derivables evolucionan en tiempo finito a soluciones que dejan de ser ni siquiera derivables, en un fenómeno conocido como ondas de choque. Para ambos esquemas se observa un comportamiento similar, aunque para valores demasiado pequeños de la viscosidad las soluciones explotan.

## 7. Ejemplo: Evolución del tráfico

Podemos interpretar  $u$  en vez de como un campo de velocidades como una perturbación en un campo de velocidades, de forma análoga a cómo funcionaría un atasco. Veamos qué queremos decir con esto.

Supongamos que tenemos la sección lateral de una cierta carretera, donde los coches entran con una cierta velocidad y salen con otra cierta velocidad (supondremos por comodidad que ambas velocidades coinciden y valen 1). Sin embargo, en un momento dado del tiempo, la velocidad en el interior de ese tramo no es constante porque se ha formado un atasco. Esa disminución en el campo de velocidades será nuestra función  $u_0$  (que por la condición anterior tomaremos positiva, nula en los extremos y en todo momento inferior a 1). Queremos ver cómo evoluciona esta congestión.

Para ello, resolvemos la ecuación de Burgers viscosa para  $u_0$  y vemos cómo evoluciona la función  $1 - u(x, t)$ . El código dibuja la curva de velocidades con el tiempo junto con una representación de la posición de una serie de coches que se encuentran en medio del atasco, y cómo esta evoluciona junto con el campo de velocidades. Esta es una de las interpretaciones que se le puede dar a la ecuación de Burgers.

En la sección *Anexos* [8] se encuentra una animación con la evolución de una perturbación gaussiana centrada en el intervalo.

## 8. Anexos

[Aquí](#) se adjuntan los códigos y videos mencionados a lo largo del texto. Se incluyen también animaciones de la evolución de los distintos perfiles iniciales para ambos métodos. Los códigos para hacer las animaciones se encuentran comentadas en los propios códigos.

## Bibliografía

- [1] Gabriel Mauricio Vergara Ríos Julio Cesar Romero Pabón Cielo Esther Romero Pabón. “Solución de las ecuaciones de Navier–Stokes.” En: *Revista de Ciencias Humanas y Sociales, Universidad del Zulia* n° 90 (2019), pág. 715.