Matemática Discreta I Segundo parcial	1^{er} Apellido: ____________	21 de enero de 2020
Dpto. Matematica Aplicada TIC ETS Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	2^{o} Apellido: ____________ Nombre: ____________	Tiempo 105 minutos **Nota:**

Ejercicio 1

a) **(14 puntos)** Simplifica la siguiente ecuación en congruencia para obtener una ecuación de la forma $ax \equiv b \pmod{361}$. Razona si la ecuación tiene solución, y en su caso, obtén todas las soluciones distintas en módulo 361.

$$19x + 17^{-1} \cdot\ 1085^{1712} \equiv 17 \pmod{361}$$

Solución:

$361 = 19^2$, luego $mcd(17, 361) = 1$ y por tanto, existe el inverso de 17 en Z_{361}. Para calcularlo debemos resolver la ecuación diofántica:

$$17x + 361y = 1$$

$$\begin{aligned} 361 = 17 \cdot 21 + 4 \quad &\rightarrow \quad 4 = 361 - 17 \cdot 21 \\ 17 = 4 \cdot 4 + 1 \quad &\rightarrow \quad 1 = 17 - 4(361 - 17 \cdot 21) = 17 \cdot 85 + 361 \cdot (-4) \end{aligned}$$

con lo que $17^{-1} \equiv 85 (\text{mod } 361)$.

$1085 \equiv 2 \pmod{361}$ y $mcd(2, 361) = 1$, luego por el Teorema de Euler

$$2^{\phi(361)} \equiv 1 \pmod{361}, \text{ y } \phi(361) = 19^2 - 19 = 342, \text{ luego } \quad 2^{342} \equiv 1 \pmod{361},$$

por tanto, $1085^{1712} \equiv 2^{1712} = (2^{342})^5 \cdot 2^2 \equiv 4 \pmod{361}$.

Luego, $17^{-1} \cdot\ 1085^{1712} \equiv 85 \cdot 4 = 340 \equiv -21 \pmod{361}$, y la ecuación simplificada queda,

$$19x \equiv 38 \pmod{361}$$

y como $mcd(19, 361) = 19$ que divide a 38, entonces la ecuación tiene 19 soluciones distintas en Z_{361}. Aplicando la propiedad cancelativa obtenemos que las soluciones son:

$$x = 2 + 19t \quad \forall t \in \{0, 1, \ldots, 18\}.$$

b) **(6 puntos)** Estudia para qué valores de c tiene solución el siguiente sistema de congruencias, y resuélvelo en dichos casos.

$$\begin{cases} x \equiv 4 & \pmod{5} \\ 2x \equiv c & \pmod{14} \\ x \equiv 3 & \pmod{7} \end{cases}$$

Solución:

La ecuación $2x \equiv c \pmod{14}$ tiene solución si y solo sí $mcd(2, 14) = 2|c$. Luego, $c = 2k$ con $k \in Z$. Por tanto, la segunda ecuación nos queda $2x \equiv 2k \pmod{14}$, que simplificando es $x \equiv k \pmod{7}$. Así, el sistema $\begin{cases} x \equiv 4 & \pmod{5} \\ x \equiv k & \pmod{7} \\ x \equiv 3 & \pmod{7} \end{cases}$ tendrá solución si $k \equiv 3 (\text{mod } 7)$.

Luego, el sistema tiene solución para todo c de la forma $c = 2k = 2(3+7t) = 6+14t$ con $t \in Z$.

Ahora, resolvemos el sistema $\begin{cases} x \equiv 4 \equiv -1 & \pmod 5 \\ x \equiv 3 & \pmod 7 \end{cases}$, aplicando el Teorema Chino del Resto, ya que 5 y 7 son primos entre sí.

$$x = (-1)7[7]_{Z_5}^{-1} + 3 \cdot 5[5]_{Z_7}^{-1} + 35m = -7 \cdot 3 + 15 \cdot 3 + 35m = 24 + 35m$$

Ejercicio 2

La profesora de biotecnología prepara el examen de los cinco primeros temas de su asignatura. Responde razonadamente las siguientes preguntas desarrollando las fórmulas utilizadas y simplificando en la medida de lo posible.

a) **(7 puntos)** Si el examen es un cuestionario de 25 preguntas en las que cada una de ellas corresponde a uno de los cinco temas, ¿de cuántas formas distintas se podrán distribuir las 25 preguntas entre los 5 temas, si el examen debe tener un mínimo de tres y un máximo de siete preguntas de cada tema?

Solución:

El número de formas distintas se corresponde con el número de soluciones enteras de la ecuación

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25 \\ 3 \leq x_i \leq 7, i \in \{1, 2, \ldots, 5\} \end{cases}$$

Suponemos por tanto que se asignan 3 ejercicios por tema y el resto (10) se reparten entre los cinco temas haciendo que ningún tema tenga 8 o más preguntas. Serán invalidas por tanto las soluciones en las que un tema tiene 8 preguntas, cuatro temas tienen 3 preguntas y repartimos 5 preguntas entre todos. También serán invalidas aquellas en las que dos temas tienen 8 preguntas y los otros tres tiene 3 preguntas (no quedarán preguntas para repartir).

$$CR_{5,10} - C_{5,1} \cdot CR_{5,5} + C_{5,2} \cdot 1 = \frac{14!}{4!10!} - 5\frac{9!}{4!5!} - 10$$

b) **(4 puntos)** Finalmente la profesora ha decidido poner cinco preguntas de cada tema, y para elegirlas dispone de un fichero con 40 preguntas de cada tema ¿cuántos exámenes distintos se pueden generar si no tenemos en cuenta el orden de las preguntas?

Solución:

En cada tema se eligen cinco preguntas de entre cuarenta, sin repetición ni orden. Por tanto tenemos $V_{40,5}$ opciones para cada tema. En total el número de soluciones será:

$$C_{40,5} \cdot C_{40,5} \cdot C_{40,5} \cdot C_{40,5} \cdot C_{40,5} = (C_{40,5})^5 = \left(\frac{40!}{35!5!}\right)^5.$$

c) **(4 puntos)** Una vez seleccionadas las 25 preguntas la profesora decide reordenarlas para generar múltiples versiones del examen ¿de cuántas formas distintas se puede reordenar las 25 preguntas?

Solución:

Las formas posibles de reordenar un conjunto de 25 preguntas se corresponden con las permutaciones de 25.

$$P_{25} = 25!$$

d) **(4 puntos)** Si cada una de las 25 preguntas admite tres posibles respuestas: "verdadero", "falso", "sin contestar", ¿de cuántas formas distintas se puede responder el examen?

Solución:

Tenemos 25 preguntas con tres posibles valores cada una, por tanto debemos elegir entre esos tres valores, un total de veinticinco veces.

$$VR_{3,25} = 3^{25}.$$

e) **(6 puntos)** Si cada respuesta correcta suma cuatro puntos, cada respuesta incorrecta resta cuatro puntos, y las respuestas sin contestar no suman ni restan puntos, ¿cuántas de las distintas formas de responder el examen generarán una calificación de 90 puntos o más?

Solución:

Para obtener un mínimo de 90 puntos tenemos tres opciones: acertar 23 preguntas sin fallar ninguna $(23 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 92)$, acertar 24 preguntas (fallando una o ninguna) y acertar las 25 preguntas.

Las opcones para obtener 23 aciertos (con dos preguntas en blanco) son: $C_{25,23} = \frac{25 \cdot 24}{2} = 300$.

Las opciones para obtener 24 aciertos son: $C_{25,24} \cdot 2 = 50$.

Las opciones para obtener 25 aciertos son: $C_{25,25} = 1$.

Por tanto el número total de opciones para obtener una calificación superior a 90 es de 351.

Ejercicio 3

a) **(5 puntos)** En la ceremonia de Graduación de la ETSI Informáticos, al pasar los alumnos a recibir su diploma por la mesa de la Presidencia, deben hacerlo por orden alfabético, y en grupos de 2, 3 o 4 alumnos. Halla una relación de recurrencia para el número de formas a_n en que puede organizarse esta recepción, si se gradúan exactamente n estudiantes. Explica cómo la has obtenido.

Solución:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4} \\ a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 2 \end{cases}$$

b) **(10 puntos)** Resuelve la siguiente relación de recurrencia con sus condiciones iniciales

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + 2 \cdot (-1)^n, \forall n \geq 2 \\ a_0 = 2, a_1 = -1 \end{cases}$$

Solución:

Solución general de la homogénea asociada: $S(n) = A \cdot 1^n + B \cdot (-1)^n = A + B \cdot (-1)^n$

Solución particular de la completa: $P(n) = n(-1)^n$

Solución general de la completa: $a_n = A + (B + n) \cdot (-1)^n$

Imponiendo las condiciones iniciales: $a_n = 1 + (1 + n) \cdot (-1)^n$