Hoja 8. Relaciones de Recurrencia

Susana Cubillo (2020)

Ejercicios recopilados de los apuntes y
Hojas de problemas de los profesores
del Dpto. Matemática Aplicada a las TIC
(Campus Montegancedo). UPM.

1. Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia homogéneas, con sus condiciones iniciales:
   a) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, con $n \geq 2$, $a_0 = 6$, $a_1 = 8$.
   b) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$, con $n \geq 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$.
   c) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, con $n \geq 2$, $a_0 = 4$, $a_1 = 1$.
   d) $a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n$, con $n \geq 0$, $a_0 = 2$, $a_1 = 8$.
   e) $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, con $n \geq 3$, $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, $a_2 = 15$.
   f) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, con $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.
   g) $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, con $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = -6$.

   Sol.:
   a) $a_n = (3-n) \cdot 2^{n+1}$
   b) $a_n = -5^n + 3 \cdot 2^n$
   c) $a_n = 4 - 3n$
   d) $a_n = 3 - (-5)^n$
   e) $a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$
   f) $a_n = -2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n$
   g) $a_n = (1+n)(-3)^n$

2. Sea a_n el número de palabras de longitud n formadas con los dígitos $\{0,1\}$, que no tienen dos ceros consecutivos. Encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n y resuélvela.

   Sol.: $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_1 = 2\,,\ a_2 = 3 \end{cases}$

   Fórmula explícita: $a_n = \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

3. Halla una relación de recurrencia para el número de formas en que una persona puede subir n escalones, si puede subir uno o dos peldaños en cada paso.

Sol.: $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_1 = 1\ ,\ a_2 = 2 \end{cases}$

Fórmula explícita: $a_n = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

4. Sean n rectas trazadas en el plano de forma que cada recta corte a las restantes, pero que no haya tres coincidentes en un mismo punto. Para cada $n \geq 0$, sea a_n el número de regiones en que las n rectas dividen al plano y sea b_n el número de regiones no acotadas.

a) Encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n y resuélvela.

b) Encuentra una relación de recurrencia para calcular b_n y resuélvela.

Sol.: a) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n \\ a_1 = 2 \end{cases}$

Sol. ecuación homogénea: $S(n) = A$

Sol. Particular de la completa: $P(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}\ n$

Sol. General de la completa: $a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}\ n + A$

Sol. Final con las condiciones iniciales: $a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}\ n + 1$

b) $\begin{cases} b_n = b_{n-1} + 2 \\ b_1 = 2 \end{cases}$

Sol. ecuación homogénea: $S(n) = A$

Sol. Particular de la completa: $P(n) = 2n$

Sol. General de la completa: $a_n = 2n + A$

Sol. Final con las condiciones iniciales: $a_n = 2n$

5. Problema de las Torres de Hanoi (Ëdouard Lucas): Se tienen n discos y 3 estacas. Los discos están apilados en la estaca 1, ordenados de mayor a menor. El objetivo es pasar los discos uno por uno a otra estaca, colocados en el orden original. En el proceso no se permite que un disco mayor se coloque sobre otro menor. Si a_n es el número de movimientos que se requieren para hacer esto, encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n, y resuélvela.

Sol.: $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

Sol. ecuación homogénea: $S(n) = A \cdot 2^n$

Sol. Particular de la completa: $P(n) = -1$

Sol. General de la completa: $a_n = -1 + A \cdot 2^n$

Sol. Final con las condiciones iniciales: $a_n = -1 + 2^n$

6. Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia no homogéneas, con sus condiciones iniciales:

a) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2n - 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 3n^2 \\ a_0 = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 7^n 5 \\ a_0 = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 3^n 5 \\ a_0 = 2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3} + n^2 \\ a_0 = 11,\ a_1 = 1,\ a_2 = -1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n \\ a_0 = 1,\ a_1 = 3 \end{cases}$ g) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} - 5 \cdot 4^n \\ a_0 = 1,\ a_1 = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 1 \\ a_1 = 2,\ a_2 = 3 \end{cases}$ i) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 5 \cdot 2^n \\ a_0 = 2,\ a_1 = 4 \end{cases}$

Sol.:

a) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2n - 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$ Sol. ecuación homogénea: $S(n) = C$

Sol. Particular de la completa: $P(n) = n^2$

Sol. General de la completa: $a_n = n^2 + C$

Sol. Final con las condiciones iniciales: $a_n = n^2$

b) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 3n^2 \\ a_0 = 7 \end{cases}$ Sol. ecuación homogénea: $S(n) = C$

Sol. Particular de la completa: $P(n) = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}\ n$

Sol. General de la completa: $a_n = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}\ n + C$

Sol. Final con las condiciones iniciales: $a_n = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}\ n + 7$

c) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 7^n 5 \\ a_0 = 2 \end{cases}$ Sol. ecuación homogénea: $S(n) = A \cdot 3^n$

Sol. Particular de la completa: $P(n) = \frac{35}{4} \cdot 7^n$

Sol. General de la completa: $a_n = \frac{35}{4} \cdot 7^n + A \cdot 3^n$

Sol. Final con las condiciones iniciales: $a_n = \frac{35}{4} \cdot 7^n - \frac{27}{4} \cdot 3^n$

d) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 3^n 5 \\ a_0 = 2 \end{cases}$ Sol. ecuación homogénea: $S(n) = A \cdot 3^n$

Sol. Particular de la completa: $P(n) = 5 \cdot n \cdot 3^n$

Sol. General de la completa: $a_n = 5 \cdot n \cdot 3^n + A \cdot 3^n$

Sol. Final con las condiciones iniciales: $a_n = 5 \cdot n \cdot 3^n + 2 \cdot 3^n = (5n + 2) \cdot 3^n$

e) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3} + n^2 \\ a_0 = 11,\ a_1 = 1\ ,\ a_2 = -1 \end{cases}$ Sol. Ec. homogén: $S(n) = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot (-1)^n$

Sol. Particular de la completa: $P(n) = \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{9}{2} \cdot n + 12$

Sol. General de la completa: $a_n = \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{9}{2} \cdot n + 12 + A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot (-1)^n$

Sol. Final con las cond. Inicial. : $a_n = \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{9}{2} \cdot n + 12 - 5 \cdot 2^n - n \cdot 2^n + 4 \cdot (-1)^n$

f) $\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n \\ a_0 = 1,\ a_1 = 3 \end{cases}$ Sol. ecuación homogénea: $S(n) = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n$

Sol. Particular de la completa: $P(n) = n + 4$

Sol. General de la completa: $a_n = n + 4 + A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n$

Sol. Final con cond. Inicial.: $a_n = n + 4 - 3 \cdot 2^n + 2 \cdot n \cdot 2^n = n + 4 + (-3 + 2n) \cdot 2^n$

g) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} - 5 \cdot 4^n \\ a_0 = 1,\ a_1 = 0 \end{cases}$ Sol. ecuación homogénea: $S(n) = A \cdot 4^n + B \cdot (-1)^n$

Sol. Particular de la completa: $P(n) = -n \cdot 4^{n+1}$

Sol. General de la completa: $a_n = -n \cdot 4^{n+1} + A \cdot 4^n + B \cdot (-1)^n$

Sol. Final con cond. Inicial.: $a_n = -n \cdot 4^{n+1} + \frac{17}{5} \cdot 4^n - \frac{12}{5} \cdot (-1)^n$

h) $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 1 \\ a_1 = 2,\ a_2 = 3 \end{cases}$ Sol. ecuación homogénea: $S(n) = A + Bn$

Sol. Particular de la completa: $P(n) = \frac{1}{2} \cdot n^2$

Sol. General de la completa: $a_n = \frac{1}{2} \cdot n^2 + A + Bn$

Sol. Final con cond. Inicial.: $a_n = \frac{1}{2} \cdot n^2 + 2 - \frac{1}{2} \cdot n$

i) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 5 \cdot 2^n \\ a_0 = 2,\ a_1 = 4 \end{cases}$ Sol. ecuación homogénea: $S(n) = A \cdot 2^n + B$

Sol. Particular de la completa: $P(n) = 10 \cdot n \cdot 2^n$

Sol. General de la completa: $a_n = 10 \cdot n \cdot 2^n + A \cdot 2^n + B$

Sol. Final con cond. Inicial.: $a_n = 10 \cdot n \cdot 2^n - 18 \cdot 2^n + 20$

7. Sea $M = \{A, B, C\}$ y sea S_n el número de sucesiones de longitud n, formadas con las letras de M, en las que todas las cadenas de A-es son de longitud par. Encuentra una relación de recurrencia para calcular S_n y resuélvela.

Sol.: $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_1 = 2,\ a_2 = 5 \end{cases}$ $a_n = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right)^n + \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right) \cdot \left(1 - \sqrt{2}\right)^n$

8. Se pretende diseñar una bandera con n franjas horizontales, cada una de las cuales puede ser de color rojo, azul, verde o amarillo. Hallar cuántas son las banderas posibles en cada una de las siguientes situaciones:

a) No hay restricciones sobre el color de cada franja. Sol.: 4^n

b) Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color.

Sol.: $4 \cdot 3 \cdot \cdots 3 = 4 \cdot 3^{n-1}$

c) Sea $\mathrm{a_n}$ el número de banderas que se pueden formar con n franjas horizontales, con los cuatro colores dados y tales que dos franjas adyacentes no sean del mismo color ni tampoco sean del mismo color la primera y la última franja. Hallar una relación de recurrencia para $\mathrm{a_n}$. (Indicación: Hacer $\mathrm{n} = 4$ y generalizar para n, con $\mathrm{a_1} = 0$.)

Sol.: $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \\ a_1 = 0\,,\ a_2 = 12 \end{cases}$

d) Resolver la ecuación de recurrencia obtenida en el apartado anterior

Sol.: $a_n = 3^n + 3(-1)^n$

9. Halla, mediante una relación de recurrencia, la suma $\mathrm{a_n} = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n}} 2^{\mathrm{k}}$, en función de n.

Sol.: $\mathrm{a_n} = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n}} 2^{\mathrm{k}} = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n-1}} 2^{\mathrm{k}} + 2^n = a_{n-1} + 2^n$

$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2^n \\ a_1 = 3 \end{cases}$ Sol. ecuación homogénea: $S(n) = A$

Sol. Particular de la completa: $P(n) = 2 \cdot 2^n$

Sol. General de la completa: $a_n = 2 \cdot 2^n + A$

Sol. Final con cond. Inicial.: $a_n = 2^{n+1} - 1$

10. Hallar una relación de recurrencia para el número de listas $\mathrm{a_n}$ de longitud n formadas con los elementos 0, 1 y 2, en las que el elemento 1 no aparece nunca en el lugar posterior a un 2. Resolver dicha relación.

Sol.: $\begin{cases} \mathrm{a_n} = 3\mathrm{a_{n-1}} - \mathrm{a}_{n-2} \\ \mathrm{a_1} = 3,\ \mathrm{a_2} = 8 \end{cases}$

11. Sea $g(n) = \binom{n}{k}$, donde ambos números son naturales, $n \geq k$, y k fijo. Obtener una relación de recurrencia para calcular $g(n)$.

Sol.: $\begin{cases} g(n) = \frac{n}{n-k}\, g(n-1) \\ g(k) = \binom{k}{k} = 1 \end{cases}$

12. Sea $A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad n \in \mathbb{N}$.

a) Halla una relación de recurrencia para la sucesión cuyo término general es $D_n = \det A_n$

Sol.: $\begin{cases} D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2} \\ D_1 = 2\,,\ D_2 = 3 \end{cases}$

b) Resuelve la relación de recurrencia $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2} + 1$, con las condiciones iniciales $D_1 = 2$, $D_2 = 3$.

Sol.: $D_n = 2 - \frac{1}{2}\,n + \frac{1}{2}\,n^2$

13. Se tiene una cantidad ilimitada de cubos de lado 1cm., 2 cm. y 4 cm., y se quiere construir una torre apilando cubos. Encuentra una relación de recurrencia para hallar el número de formas distintas T_n de construir una torre de altura n cms.

Sol.: $\begin{cases} \mathrm{T_n} = \mathrm{T_{n-1}} + \mathrm{T}_{n-2} + \mathrm{T_{n-4}} \\ \mathrm{T_1} = 1,\ T_2 = 2\ ,\ \mathrm{T_3} = 3,\ T_4 = 6 \end{cases}$