2º Parcial de Matemática Discreta I del GII y ADE ✦ Enero 2022

Tiempo: 2 horas   Nº Matrícula: ____________   Grupo: ____________

Apellidos: ______________________________   Nombre: ____________

NOTA: NO SE PERMITE EL USO DE DISPOSITIVOS ELECTRÓNICOS

Resuelva cada ejercicio en hojas distintas.

1. Sea $p > 1$ un número natural. Demuestra que $p - 1$ es inverso de sí mismo en $\mathbb{Z}_p$.

> **Solución:** El resultado quedará demostrado si vemos que $(p-1)^2$ es congruente con 1 módulo p. Pero $(p-1)^2 = p^2 - 2p + 1$, que puede escribirse como $(p-1)^2 = p(p-2) + 1$, donde $0 \leq 1 < p$. Por tanto, 1 es el resto de dividir $(p-1)^2$ entre p y el ejercicio queda demostrado.

2. Tenemos 100 alumnos repartidos en las aulas A y B, y no puede haber más de 60 alumnos por aula. Al hacer el reparto, hemos sentado a los alumnos asignados en el aula A en filas de 12 personas y ha quedado media fila vacía; al sentar a los alumnos asignados al aula B en filas de 15 personas, un alumno se ha quedado aislado en una fila. ¿Cuántos alumnos hay en el aula A y B?

> **Solución:** Si x son los alumnos asignados al aula A, e y al aula B, entonces se cumple que
>
> $$x + y = 100.$$
>
> Ambas condiciones sobre los alumnos se puede escribir como el sistema en congruencias
>
> $$\begin{cases} x \equiv 6 \text{ mód } 12, \\ y \equiv 1 \text{ mód } 15. \end{cases}$$
>
> Usando que $y = 100 - x$, entonces el sistema queda como
>
> $$\begin{cases} x \equiv 6 \text{ mód } 12, \\ 100 - x \equiv 1 \text{ mód } 15; \end{cases} \quad \text{equivalente a} \quad \begin{cases} x \equiv 6 \text{ mód } 12, \\ x \equiv 9 \text{ mód } 15. \end{cases}$$

Resolvemos el sistema: este sistema es equivalente a

$$\begin{cases} x \equiv 6 \text{ mód } 2^2, \\ x \equiv 6 \text{ mód } 3, \\ x \equiv 9 \text{ mód } 3, \\ x \equiv 9 \text{ mód } 5, \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 2 \text{ mód } 4, \\ x \equiv 0 \text{ mód } 3, \\ x \equiv 4 \text{ mód } 5. \end{cases}$$

Ahora estamos en las hipótesis del Teorema Chino de los Restos, por lo que tiene solución única módulo $m = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$, y su solución viene dada por

i	b_i	m_i	$\hat{m}_i$	$b_i \cdot m_i \cdot \hat{m}_i$
1	2	15	1	30
2	0	20	2	0
3	-1	12	3	-36

donde $m_i = \frac{m}{n_i}$ (aquí, $(n_1, n_2, n_3) = (4, 3, 5)$), y $\hat{m}_i \in \mathbb{Z}$ satisface que $\hat{m}_i \cdot m_i + n_i \cdot s_i = 1$ para algún $s_i \in \mathbb{Z}$. Luego $x \equiv 30 + 0 - 36$ mód 60, esto es, $x \equiv -6$ mód 60, o dicho de otro modo, $x = -6 + 60k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Como $0 \le x \le 60$, entonces $k = 1$, y $x = 54$ como única solución. Y finalmente $y = 100 - x = 46$.

3. Halla la última cifra del número 7^{7^5}. (*Pista:* no es necesario calcular 7^5).

Solución: La última cifra de cualquier número coincide con el resto de dividir dicho número entre 10. Por tanto, resolver el ejercicio equivale a calcular $[7^{7^5}]_{10} = [7]_{10}^{7^5}$ (igualdad que se sigue de la buena definción del producto en $\mathbb{Z}_{10}$). Teniendo en cuenta que el máximo común divisor de siete y diez es uno, el teorema de Euler nos permite afirmar que $[7]_{10}^{\Phi(10)} = [1]_{10}$. Dado que podemos descomponer $10 = 2 \cdot 5$ en factores primos, deducimos que $\Phi(10) = \Phi(5 \cdot 2) = \Phi(5)\Phi(2) = 4 \cdot 1 = 4$. Así, se tiene que $[7]_{10}^{4k} = [1]_{10}$ para cualquier natural k.
Por tanto, lo que único que necesitamos determinar es el resto de dividir 7^5 entre 4, esto es, necesitamos calcular $[7^5]_4 = [7]_4^5$. Puesto que 7 y 4 son coprimos y $\Phi(4) = \Phi(2^2) = 2^2 - 2 = 2$, deducimos que $[7]_4^2 = [1]_4$. Por tanto, se tiene que $[7]_4^5 = [7]_4^{2\cdot 2}[7]_4 = [1]_4[3]_4 = [3]_4$. En otros términos, tenemos que el resto de dividir 7^5 entre 4 será 3. Equivalentemente, debe existir un natural q tal que $7^5 = 4q + 3$.
Teniendo esto en cuenta y recordando que $[7]_{10}^{4k} = [1]_{10}$ para cualquier natural k, tenemos que $[7]_{10}^{7^5} = [7]_{10}^{4q+3} = [7]_{10}^{4q}[7]_{10}^3 = [1]_{10}[7^3]_{10}$. Por último, tenemos que $7^3 = 343$ y que $[343]_{10} = [3]_{10}$. Por tanto, la última cifra de 7^{7^5} resulta ser 3.

4. El señor Smith quiere hacer una gira por algunas de las ciudades españolas: Madrid, León, Pamplona, Barcelona, Valencia, Sevilla y Cáceres.

a) ¿De cuántas formas distintas puede ordenar la visita a las distintas ciudades?

> **Solución:** Cada visita es una selección tomadas de 7 en 7 del conjunto de las mencionadas siete ciudades españolas, donde importa el orden y no hay repetición. Luego es una variación sin repetición $V_{7,7}$, o también una permutación P_7, lo que da 7! posibilidades.

b) Antes de comenzar el viaje, le comunican que la vía que une Barcelona con Valencia está cortada, por lo que no puede visitar esas dos ciudades seguidas. ¿De cuántas formas distintas puede ordenar su viaje?

> **Solución:** Las ciudades Barcelona y Valencia dividen en tres bloques cualquier secuencia válida de viaje, donde entre ambas ciudades hay al menos otra ciudad intermedia. Por lo tanto, sean x_0, x_1, x_2 la longitud de estos tres bloques, que deben cumplir:
>
> $$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 5, \\ x_0, x_2 \geq 0, \ x_1 \geq 1 \end{cases}$$
>
> El número de soluciones es $CR_{3,4}$. Con ello tenemos los tres bloques en los que separan la secuencia de viaje las ciudades Barcelona y Valencia. Colocamos en nuestra secuencia estas dos mencionadas ciudades entre los bloques: habrá dos posibilidades; luego colocamos las demás cinco ciudades en la secuencia, lo que será equivalente a colocarlas en orden, luego habrá $P_5 = 5!$ posibilidades.
> En suma, el número posible de rutas de viaje que se pueden formar son
>
> $$CR_{3,4} \cdot 2 \cdot 5! = \frac{6!}{2! \cdot 4!} 2 \cdot 5! = 3600.$$

5. Obtén el número de soluciones enteras de la siguiente ecuación con restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 2 \leq x_1 \leq 5, \\ 3 \leq x_2 \leq 7, \\ 0 \leq x_3, x_4 \end{cases}$$

Solución: Esta ecuación con restricciones es equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ 0 \leq x_1 \leq 3, \\ 0 \leq x_2 \leq 4, \\ 0 \leq x_3, x_4 \end{cases}$$

Sea X el conjunto de soluciones de esta ecuación, y sea $\bar{X}$ el conjunto de soluciones

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ 0 \leq x_1, \\ 0 \leq x_2, \\ 0 \leq x_3, x_4 \end{cases}$$

cuyo cardinal es $CR_{4,10}$. Ahora $\bar{X} \setminus X = A_1 \cup A_2$ donde A_1 viene dado por las ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ 3 < x_1, \\ 0 \leq x_2, \\ 0 \leq x_3, x_4 \end{cases} \quad \text{equivalente a} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 0 \leq x_1, \\ 0 \leq x_2, \\ 0 \leq x_3, x_4 \end{cases}$$

y A_2 es

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ 0 \leq x_1, \\ 4 < x_2, \\ 0 \leq x_3, x_4 \end{cases} \quad \text{equivalente a} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 0 \leq x_1, \\ 0 \leq x_2, \\ 0 \leq x_3, x_4 \end{cases}.$$

La intersección $A_1 \cap A_2$ es

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ 3 < x_1, \\ 4 < x_2, 0 \leq x_3, x_4. \end{cases} \quad \text{equivalente a} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 0 \leq x_1, \\ 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, x_4. \end{cases}$$

Sus cardinales son $|A_1| = CR_{4,6}$ y $|A_2| = CR_{4,5}$ y $|A_1 \cap A_2| = CR_{4,1}$. Y finalmente de $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = CR_{4,6} + CR_{4,5} - CR_{4,1}$. Así,

$$|X| = |\bar{X} \setminus (A_1 \cup A_2)| = |\bar{X}| - |A_1 \cup A_2| = CR_{4,10} - (CR_{4,6} + CR_{4,5} - CR_{4,1}).$$

6. Halla la expresión explícita (o solución) de la ley de recurrencia

$$\begin{cases} a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2} + 4^n, \\ a_0 = 2, \\ a_1 = 23. \end{cases}$$

Solución: Lo resolvemos por pasos:

1. El polinomio característico es $x^2 - 7x + 12$, por lo que las raíces características son 3 y 4, ambas de multiplicidad 1.
2. Por lo anterior, la solución general a la homogeneizada es $a_n^* = C_0 3^n + C_1 4^n$ con $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$.
3. Hallamos una solución particular usando el método de los coeficientes indeterminados. Dado que 4 es raíz característica, nuestra propuesta a solución particular será $a_n = \lambda n 4^n$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ por determinar. Sustituimos en la ley de recurrencia $a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2} + 4^n$ para determinar el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ y obtenemos:

$$\lambda n 4^n = 7\lambda(n-1)4^{n-1} - 12\lambda(n-2)4^{n-2} + 4^n.$$

Dividiendo ambos miembros por 4^{n-1} y simplificando, se llega a que $\lambda = 4$. Por tanto, una solución particular es $a_n = n4^{n+1}$.

4. La solución general es por tanto $a_n = C_0 3^n + C_1 4^n + n4^{n+1}$.
5. Determinamos los valores de los parámetros $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$ de modo que $a_0 = 2$ y $a_1 = 23$. Estas dos últimas igualdades nos dan las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2 &= a_0 = C_0 + C_1, \\ 23 &= a_1 = 3C_0 + 4C_1 + 16. \end{aligned}$$

Deducimos que $C_0 = 1$ y $C_1 = 1$. Por tanto, la expresión explícita es $a_n = 3^n + 4^n(1 + 4n)$.

7. Sea T_n el número de secuencias de n ceros y unos de modo que tanto los bloques de ceros como los bloques de unos sean de longitud impar. Halla la fórmula recursiva.

Solución: Sea $\tilde{T}_n$ el conjunto de secuencias de n ceros y unos válidas, es decir, que estén formadas por bloques de ceros o bloques de unos de longitud impar. Dada una secuencia $\sigma = (s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n) \in \tilde{T}_n$ ocurren dos cosas:

- o bien $s_n \neq s_{n-1}$, por lo que la secuencia $(s_1, \ldots, s_{n-1}) \in \tilde{T}_{n-1}$;
- o bien $s_n = s_{n-1}$, por lo que para que el bloque tenga longitud impar $s_{n-2} = s_{n-1} = s_n$, y $(s_1, \ldots, s_{n-2}) \in \tilde{T}_{n-1}$.

Por lo tanto, el conjunto $\tilde{T}_{n-1}$ se puede escribir como unión disjunta de dos

$$\tilde{T}_n = \{(\sigma = (s_1, \ldots, s_n) \in \tilde{T}_n \,:\, s_n = s_{n-1}\} \sqcup \{(\sigma = (s_1, \ldots, s_n) \in \tilde{T}_n \,:\, s_n \neq s_{n-1}\}$$

y por lo anterior, el cardinal de cada uno de los dos conjuntos es $|\tilde{T}_{n-2}| = T_{n-2}$ y $|\tilde{T}_{n-1}| = T_{n-1}$. Luego,

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2}.$$

Fácilmente se comprueba que para los primeros valores, $T_1 = 2$ y $T_2 = 2$.