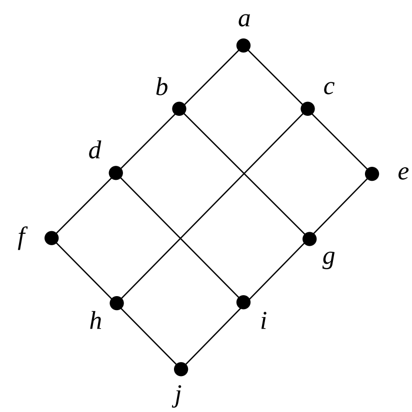
Matemática Discreta 1 Primer parcial	1$^{\text{er}}$ Apellido: ______________	22 de enero de 2016
Dpto. Matematica Aplicada TIC ETS Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	2$^{\text{o}}$ Apellido: ______________ Nombre: ______________ Número de matrícula:	Tiempo 1 h 30 min. **Nota:**

Ejercicio 1 (15 puntos)



a) Sea D_{63} el conjunto de todos los divisores de 63, y $|$ la relación de divisibilidad $a|b$ si y sólo si "a divide a b". Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(D_{63}, |)$.

b) Considera el conjunto ordenado A de la figura.

i. Obtén las cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo, maximales, minimales, si los hay, del subconjunto $B = \{b, c, d\}$. (Responde utilizando los huecos a continuación)

ii. ¿Es A un retículo?

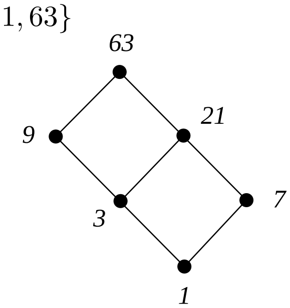
iii. Sea A' el conjunto ordenado cuyo diagrama de Hasse es el mismo de A suprimiendo las aristas que van de b a g y de d a i. ¿Es A' un retículo?

iv. ¿Es A' complementario? En caso de no serlo da un elemento que no tenga complementario y otro que sí lo tenga (indicando cual es su complementario).

v. ¿Es A' distributivo?

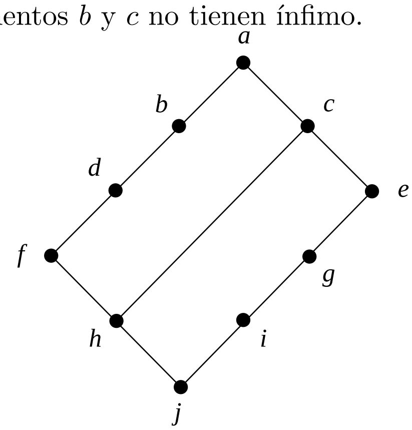
Solución:

a) $63 = 3^2 \cdot 7$, $\qquad D_{63} = \{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$



b) i. Cotas superiores: $\{a\}$ Cotas inferiores: $\{h, i, j\}$
Supremo: $\{a\}$ Ínfimo: $\emptyset$
Máximo: $\emptyset$ Minimo: $\emptyset$
Maximales: $\{b, c\}$ Minimales: $\{d, c\}$

ii. A no es retículo, e.g. los elementos b y c no tienen ínfimo.



iii. A' es retículo, dado que todo par de elementos en A tiene supremo e ínfimo.

iv. A' no es complementario, e.g. f y e son elementos complementarios (aunque el complementario de f no es único, g e i también son complementarios de f), pero c o h no tienen elementos complementarios.

v. A' no es distributivo.

Ejercicio 2 (10 puntos)

En el mapa de Karnaugh de la figura se han representado los valores de una tabla de verdad incompleta. Completa los huecos del mapa, de forma que la expresión booleana, en forma de suma de productos, que represente el contenido de la tabla de verdad, sea la más simple posible. Escribe a continuación dicha expresión booleana.

	y	y	y'	y'	
x	0		1		t'
x		0	0		t
x'	1	1	0		t
x'		1	1	0	t'
	z'	z	z	z'	

Solución: $\boxed{x'y + zt'}$

	y	y	y'	y'	
x	0	1	1	0	t'
x	0	0	0	0	t
x'	1	1	0	0	t
x'	1	1	1	0	t'
	z'	z	z	z'	

Ejercicio 3 (10 puntos)

Un grupo de estudiantes acuerdan comprar juntos los libros de texto de Cálculo y de Física y obtener así un precio más económico. Consiguen cada libro de Cálculo a 10 euros y cada libro de Física a 14. Gastan un total de 370 euros. Se sabe que compraron al menos 11 libros de cada asignatura. Plantea una ecuación diofántica para calcular exactamente cuantos libros compraron de cada tipo y resuélvela por el método de resolución de ecuaciones diofánticas.

Solución:

$$\begin{aligned} 10x + 14y &= 370 \\ 5x + 7y &= 185 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} \mathrm{mcd}(7,5) = & & 7 = 1 \cdot 5 + 2 \\ \mathrm{mcd}(5,2) = & 1 & 5 = 2 \cdot 2 + 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 2 \cdot 2 \\ &= 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 \end{aligned}$$

$$x_0 = 3 \cdot 185 = 555, \quad y_0 = -2 \cdot 185 = -370$$

$$x = x_0 - 7t, \quad y = y_0 + 5t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$\left.\begin{aligned} x = 555 - 7t \geq 11 \\ y = -370 + 5t \geq 11 \end{aligned}\right\} \qquad t = 77, \quad \boxed{x = 16, y = 15}$$

Ejercicio 4 (5 puntos)

Demuestra por inducción que para todo $n \geq 1$, $\quad n(n^2+2) \quad$ es múltiplo de 3.

Solución:

1) Comprobamos la condición inicial: para $n = 1$ tenemos $1(1^2+2) = 3$ que es múltiplo de 3.

2) Hipótesis de Inducción: suponemos el resultado cierto para $n = k$, es decir, $k(k^2+2)$ múltiplo de 3

3) Comprobemos que el resultado es cierto para $n = k+1$ (utilizando la hipótesis de inducción)

$$\begin{aligned}
(k+1)((k+1)^2+2) &= (k+1)(k^2+2k+1+2) \\
&= k(k^2+2k+1+2)+k^2+2k+3 \\
&= k(k^2+2)+k(2k+1)+k^2+2k+3 \\
&= k(k^2+2)+3k^2+3k+3
\end{aligned}$$

Así, el primer sumando $k(k^2+2)$ es múltiplo de 3 por hipótesis de inducción, y los otros sumandos también son múltiplos de 3. Por tanto, es un múltiplo de 3. Luego aplicando el teorema de Inducción el resultado es cierto para todo $n \geq 1$.