Matemática Discreta I Convocatoria extraordinaria	1^{er} Apellido: ______________	10 de noviembre de 2020
Dpto. Matematica Aplicada TIC ETS Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	2^{o} Apellido: ______________ Nombre: ______________ Número de matrícula:	Tiempo 2 horas **Nota:**

Ejercicio 1. (10 puntos)

Sea $A = \{a, b, c, d\}$ con la relación $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)\}$, y $B = \{1, 2, 3\}$ con el orden usual $\leq$.

a) (3 puntos) Demuestra que la relación R es una relación de orden en A.

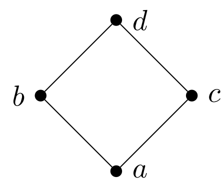
La relación R es reflexiva, ya que para todo elemento $x \in A$, se tiene que $(x, x) \in R$.

La relación R es antisimétrica, ya que los únicos pares tales que $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$ son aquellos donde $x = y$.

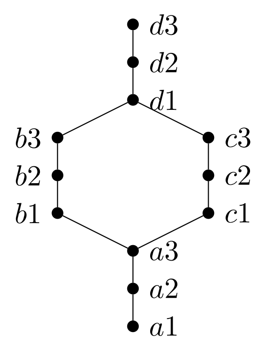
La relación es transitiva ya que para cualesquiera $x, y, z \in A$ tales que $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, (que, para x, y, z distintos solo se da con $(a, b) \in R$, $(b, d) \in R$, o con $(a, c) \in R$, $(c, d) \in R$) se tiene que $(x, z) \in R$ (es decir $(a, d) \in R$).

Por tanto, como R es reflexiva, antisimétrica y transitiva, es una relación de orden.

b) (3 puntos) Dibuja el diagrama de Hasse de la relación R en A.



c) (3 puntos) Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(A \times B, Lex)$, donde Lex representa el orden lexicográfico, y determina si es o no un orden total.



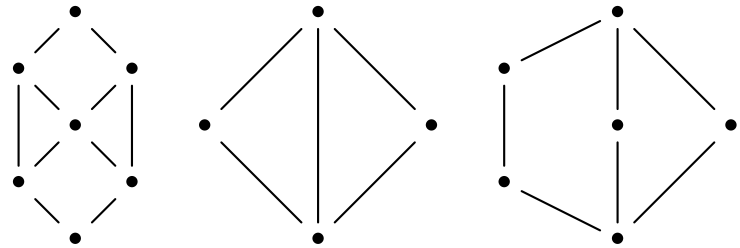
El orden lexicográfico $(A \times B, Lex)$ no es un orden total ya que, como se observa en el diagrama de Hasse, existen elementos no comparables (por ejemplo $b1$ y $c1$).

d) (1 punto) Obtén el cardinal del conjunto de las partes de $A \times B$.

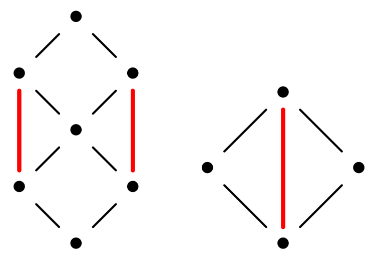
El cardinal de A es $|A| = 4$ y el de B es $|B| = 3$. Por tanto $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 4 \cdot 3 = 12$ y, el cardinal de las partes de $A \times B$ es $|\mathcal{P}(A \times B)| = 2^{|A \times B|} = 2^{12} = 4096$.

Ejercicio 2. (10 puntos)

a) (2 puntos) De los siguientes diagramas, ¿cuál se corresponde con un diagrama de Hasse? Justifica tu respuesta

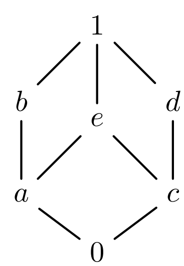


Solución: Los dos primeros no son diagramas de Hasse porque viola el principio de que si $a \leq b \leq c$, entonces a y c no están unidas por una línea. En particular, los trazos coloreados en rojo en los siguientes diagramas violan esta regla:



Sin embargo, el último de ellos sí es un diagrama de Hasse para algún conjunto ordenado.

Considera el siguiente diagrama de Hasse de un retículo:



b) (3 puntos) Halla las cotas superiores e inferiores del conjunto $\{b, e, d\}$. ¿Tiene supremo? ¿Tiene ínfimo?
Solución: La única cota superior es 1, y por lo tanto 1 es el supremo. El conjunto de cotas inferiores es el $\{0\}$ (ni a ni c lo pueden ser porque no se comparan con todos los elementos del conjunto), y por lo tanto 0 es el ínfimo.

c) (2 puntos) Halla el complementario de a, y el complementario de d.
Solución: El complementario de a es d, que satisface que $a \wedge d = 0$ y $a \vee d = 1$.
El complementario de d es a, pero también lo es b, ya que también satisface las identidades $b \wedge d = 0$ y $b \vee d = 1$.

d) (3 puntos) ¿Es un retículo distributivo? Razona la respuesta.
Solución: No es retículo distributivo porque no cumple la propiedad distributiva. En particular, no se cumple la identidad $b \wedge (a \vee d) = (b \wedge a) \vee (b \wedge d)$: en este caso $b \wedge (a \vee d) = b$, mientras que $b \wedge a = a$ y $b \wedge d = 0$ y $(b \wedge a) \vee (b \wedge d) = a$.

Ejercicio 3. (8 puntos)

a) (3 puntos) Simplifica, utilizando las propiedades del Álgebra de Boole, la expresión booleana: $(a \cdot b' \cdot c)' \cdot (b + d) \cdot (a \cdot b + c')$

b) (3 puntos) Queremos desarrollar un dispositivo para detectar personas contagiadas de una nueva mutación del virus COVID-19. El dispositivo consta de 3 sensores: un sensor que detecta si la temperatura es superior a 37,2°C, y dos sensores que se activan ante la presencia de anticuerpos IgM e IgG. El dispositivo detecta un posible contagio cuanto se activa el sensor de temperatura y la persona no posee anticuerpos IgG, o si la persona posee anticuerpos IgM. Describe una función booleana que reproduzca el funcionamiento del dispositivo.

c) (2 puntos) Se diseñan unos sensores IgM e IgG más precisos de forma que nunca ocurre el caso en el que ambos sensores se activan al mismo tiempo. ¿Es posible mejorar el diseño de nuestro dispositivo? Razona tu respuesta.

Solución:

a) (3 puntos)

$$(ab'c)'(b+d)(ab+c') = (a'+(b'c)')(b+d)(ab+c') = (a'+b+c')(abb+bc'+abd+c'd) =$$
$$(a'+b+c')(ab+bc'+abd+c'd) = (a'+b+c')(ab(1+d)+bc'+c'd) = (a'+b+c')(ab+bc'+c'd) =$$
$$aa'c+a'bc'+a'c'd+ab+bc'+bc'd+abc'+bc'+c'd = ab+bc'+c'd = \begin{cases} ab+(b+d)c' \\ a(b+c')+c'd \end{cases}$$

Podemos comprobar el resultado comparando las tablas de verdad de la expresión inicial y la simplificada:

a	b	c	d	$(ab'c)'$	$(b+d)$	$ab+c'$	$(ab'c)'(b+d)(ab+c')$	$ab+bc'+c'd$
0	0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

b) (3 puntos)

- Sensor de temperatura: $x=0$ si la temperatura es igual o inferior a 37,2°C, y $x=1$ si la temperatura es superior.
- Sensor de anticuerpos IgM: $y=0$ no detectan anticuerpos, $y=1$ se detectan anticuerpos IgM.
- Sensor de anticuerpos IgG: $z=0$ no detectan anticuerpos, $z=1$ se detectan anticuerpos IgG.

La tabla de verdad que representa el funcionamiento del dispositivo es:

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

y una expresión de la función sería $f(x,y,z) = xz' + y$.

c) (2 puntos) Como vemos en el mapa de Karnaugh, no es posible simplificar la expresión anterior.

	y	y	y'	y'
x	1	?	0	1
x'	1	?	0	0
	z'	z	z	z'

Ejercicio 4. (4 puntos)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Demuestra por inducción que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{1}{2}n(n+1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Solución:

Por una parte, la fórmula claramente es cierta para n=1.

Hipótesis de inducción:

Supongamos que la igualdad es cierta para $n = k$.

Comprobemos que en ese caso también lo es si $n = k + 1$,

$$A^{k+1} = AA^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{1}{2}k(k+1) \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & \frac{1}{2}k(k+1)+k+1 \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & k+1 & (k+1)(\frac{1}{2}k+1) \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Por tanto, se cumple la igualdad para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 5. (8 puntos)

En la Escuela de Ingenieros Informáticos se reciben 200 ordenadores, que serán instalados en un total de 20 aulas de distinto tipo. En las Aulas de Informática se instalan 20 ordenadores en cada una, en las Aulas docentes se instalan 16 ordenadores en cada una, y en los Hemiciclos 5 ordenadores en cada uno. ¿En cuántas aulas de cada tipo hay se instalan ordenadores? Da todas las soluciones posibles.

Solución:

Llamamos x al número de aulas informáticas, y al número de aulas docentes, y z al número de hemiciclos. Por tanto, $z = 20 - x - y$.

$20x + 16y + 5(20 - x - y) = 200$

$15x + 11y = 100$. Se trata de una ecuación diofántica.

Usando el algoritmo de Euclides, se llega a $1 = 15 \cdot 3 - 11 \cdot 4$, y multiplicando por 100 , queda la ecuación

$100 = 15 \cdot 300 - 11 \cdot 400$

Por tanto, la solución general de la ecuación es:

$\left\{ \begin{array}{l} x = 300 + 11t \\ y = -400 - 15t \end{array} \right.$ con $t \in Z$

Por otra parte, como el número de aulas de cada tipo no puede ser negativo,

$x = 300 + 11t \geq 0 \ \rightarrow \ t \geq -\frac{300}{11} = -27, \ldots$

$y = -400 - 15t \geq 0 \;\rightarrow\; t \leq -\frac{400}{15} = -26\ ,\ \ldots$

Por tanto, $t = -27$, y sustituyendo, $X = 300+11(-27) = 3$, $Y = -400-15(-27) = 5$ y $Z = 20-3-5 = 12$