

# Enero-2019.pdf



**DonExamen**



**Matemática Discreta I**



**1º Grado en Ingeniería Informática**

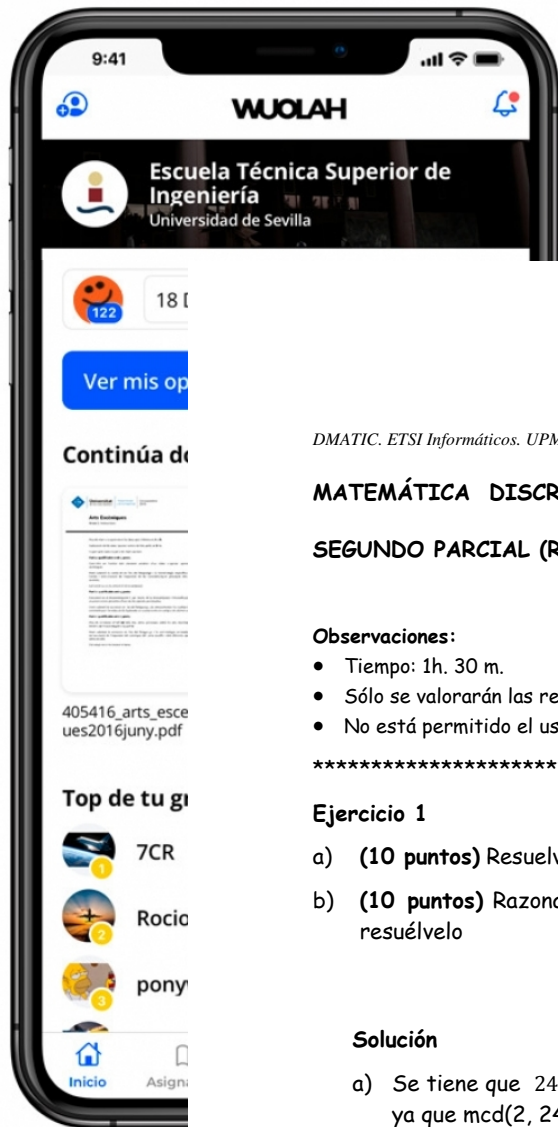


**Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos  
Universidad Politécnica de Madrid**



**Descarga la APP de Wuolah.**  
Ya disponible para el móvil y la tablet.





**Descarga la APP de Wuolah.**  
Ya disponible para el móvil y la tablet.



DMATIC. ETSI Informáticos. UPM.

8 de enero de 2019

## MATEMÁTICA DISCRETA I

### SEGUNDO PARCIAL (Recuperación) (Soluciones)

#### Observaciones:

- Tiempo: 1h. 30 m.
- Sólo se valorarán las respuestas que estén justificadas correctamente.
- No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.

\*\*\*\*\*

#### Ejercicio 1

- a) **(10 puntos)** Resuelve la ecuación  $2x = 4^{1919}$  en  $\mathbb{Z}_{2431}$  con  $0 \leq x \leq 2431$ .
- b) **(10 puntos)** Razona si el siguiente sistema de congruencias tiene solución, y en caso afirmativo, resuélvelo

$$\begin{cases} 63x \equiv 45 \pmod{90} \\ 30x \equiv 25 \pmod{125} \end{cases}$$

#### Solución

- a) Se tiene que  $2431 = 11 \cdot 13 \cdot 17$  entonces  $2x = 4^{1919} \Leftrightarrow x = 2^{-1} \cdot 4^{1919}$  en  $\mathbb{Z}_{2431}$  con  $0 \leq x \leq 2431$ , ya que  $\text{mcd}(2, 2431) = 1$ .

Puesto que  $\Phi(2431) = \Phi(11) \cdot \Phi(13) \cdot \Phi(17) = 10 \cdot 12 \cdot 16 = 1920$ , como  $\text{mcd}(4, 2431) = 1$ , entonces

$$[x]_{2431} = [2]_{2431}^{-1} [4]_{2431}^{1919} = [2]_{2431}^{-1} [4]_{2431}^{1920-1} = [8]_{2431}^{-1}$$

Si  $[x]_{2431} = [8]_{2431}^{-1}$  entonces  $8x \equiv 1 \pmod{2431} \Rightarrow 8x - 2431y = 1$

$$\begin{cases} 2431 = 8 \cdot 303 + 7 \\ 8 = 7 \cdot 1 + 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = 8 - 7 = 8 - (2431 - 8 \cdot 303) = -2431 + 304 \cdot 8 \Rightarrow x = 304 \text{ en } \mathbb{Z}_{2431}$$

- b)  $\begin{cases} 63x \equiv 45 \pmod{90} \\ 30x \equiv 25 \pmod{125} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x \equiv 5 \pmod{10} \\ 6x \equiv 5 \pmod{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 3.5 \pmod{10} = 5 \pmod{10} \\ x \equiv -4.5 \pmod{25} = 5 \pmod{25} \end{cases}$

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{10} \\ x \equiv 5 \pmod{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 10y = 5 \\ x - 25z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 10y = 5 \\ 10y = 25z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5t \\ z = 2t \\ x = 5 + 50t \end{cases}, \forall t \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x]_{50} = [5]_{50}$$

#### Ejercicio 2

La Asamblea Regional de Cantabria está constituida por 35 diputados. Se quiere elegir una comisión de 8 diputados para ir al Parlamento Europeo a solicitar la denominación de origen de la anchoa cántabra.

- a) **(5 puntos)** ¿De cuántas formas puede hacerse la elección?
- b) **(5 puntos)** Una vez elegida la comisión se elige de entre los miembros de la comisión un Presidente, un Vicepresidente y un Portavoz, ¿de cuántas formas distintas puede hacerse la elección?
- c) **(5 puntos)** Para estudiar las distintas variedades de anchoa que hay en Cantabria, se elige de entre los miembros de la comisión anterior a 4 diputados de manera que el Presidente y el Vicepresidente no estén juntos a la vez, ¿de cuántas maneras distintas se puede hacer la elección?

#### Solución

- a)  $C_{35,8} = \binom{35}{8}$
- b)  $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$
- c)  $2C_{6,3} + C_{6,4} = 2\binom{6}{3} + \binom{6}{4} = 55$

**MATEMÁTICA DISCRETA I****SEGUNDO PARCIAL (Recuperación) (Soluciones)****Ejercicio 3****(10 puntos)** Halla el número de soluciones enteras de la ecuación

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 30 \\ 3 \leq x_1 \leq 10, 3 \leq x_2 \leq 10, 3 \leq x_3 \leq 10 \end{cases}$$

**Solución**

El número de soluciones enteras de la ecuación

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 30 \\ 3 \leq x_1 \leq 10, 3 \leq x_2 \leq 10, 3 \leq x_3 \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 21 \\ 0 \leq x_1 \leq 7, 0 \leq x_2 \leq 7, 0 \leq x_3 \leq 7 \end{cases}$$

es el número de soluciones enteras de la ecuación  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 21 \\ 0 \leq x_1 \leq 7, 0 \leq x_2 \leq 7, 0 \leq x_3 \leq 7 \end{cases}$ menos el número de soluciones enteras de la ecuación  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 21 \\ 8 \leq x_1 \leq 10, 8 \leq x_2 \leq 10, 8 \leq x_3 \leq 10 \end{cases}$ Es decir,  $CR_{n=3,k=21} - 3CR_{n=3,k=13} + 3CR_{n=3,k=5} = \binom{23}{2} - 3\binom{15}{2} + 3\binom{7}{2} = 1$ **Ejercicio 4****a) (10 puntos)** Resuelve la siguiente relación de recurrencia con sus condiciones iniciales

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - 3^n, & \forall n \geq 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

**b) (5 puntos)** Un agricultor aficionado decide fundar la bodega Tío Emilio. El primer año la bodega cosecha 3 toneladas de uva, el segundo año cosecha 8 toneladas de uva y los siguientes años la bodega cosecha el doble de lo cosechado el año anterior.Sea  $a_n$  el número total de toneladas cosechadas en los  $n$  primeros años, encuentra una relación de recurrencia para  $a_n$ .**Solución****a)** La ecuación característica es  $C(x) = x - 2 = 0$ , con solución  $x = 2$ .Solución general de la relación de recurrencia:  $a_n = A 2^n + P(n)$ Solución particular:  $P(n) = K 3^n$ , que verifica la relación  $P(n) = 2P(n-1) - 3^n$ Resolviendo resulta  $K = -3$ , por tanto, la solución general es  $a_n = A 2^n - 3 \cdot 3^n$ Sustituyendo las condiciones iniciales, se tiene que  $A = 5$ Entonces, la solución general es:  $a_n = 5 \cdot 2^n - 3^{n+1}$ **b)** Algunas de las posibles soluciones son:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \\ a_1 = 3, a_2 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2^{n+1} \\ a_1 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 5 \\ a_1 = 3 \end{cases}$$