Resolución del 2º Parcial

Matemática Discreta I

20 de enero de 2021

1. (12 points) **Ejercicio 1**

   (a) Calcula el conjunto de unidades (elementos que tienen inverso) de $\mathbb{Z}_{18}$.

   Solution: el conjunto de unidades de $\mathbb{Z}_{18}$ es igual a $\varphi(18)$, donde φ denota la función de Euler. Calculamos $\varphi(18)$ usando la propiedad de que $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ si a, b son relativamente primos, y que $\varphi(p^r) = p^r - p^{r-1}$. Puesto que $18 = 2 \cdot 3^2$, entonces $\varphi(18) = \varphi(2) \cdot \varphi(3^2) = (2-1)(3^2-3) = 6$. Luego el conjunto de unidades $\mathbb{Z}_{18}^{\times}$ tiene 6 elementos.
   Si quisiéramos calcular explícitamente el conjunto de unidades de $\mathbb{Z}_{18}$, tenemos que recordar que una clase $[a]_{18} \in \mathbb{Z}_{18}$ distinta de cero tiene inverso si y sólo si a y 18 son relativamente primos. Entonces

   $$\mathbb{Z}_{18} = \{[a]_{18} \in \mathbb{Z}_{18} \ : \ 1 \leq a \leq 17 \text{ con } \mathrm{mcd}(a, 18) = 1\} = \{[1]_{18}, [5]_{18}, [7]_{18}, [11]_{18}, [13]_{18}, [17]_{18}\}.$$

   (b) Calcula el inverso de $[5]_{18} \in \mathbb{Z}_{18}$.

   Solution: Puesto que $5 \cdot 11 = 55 = 3 \cdot 18 + 1$, entonces $5 \cdot 11 - 3 \cdot 18 = 1$ (observa que es una identidad de Bézout), y por tanto, el inverso de $[5]_{18}$ es $[11]_{18}$.

   (c) Utiliza el Teorema de Euler para resolver la ecuación $x \equiv 5^7 \pmod{18}$

   Solution: Usamos que $\varphi(18) = 6$ del apartado anterior para calcular la potencia 5^7 en $\mathbb{Z}_{18}$. Por el teorema de Euler, $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ si a y n son relativamente primos. En este caso, 5 y 18 son relativamente primos, luego $5^6 \equiv 1 \pmod{18}$, y deducir que

   $$5^7 = 5^6 \cdot 5 \equiv 5 \pmod{18}$$

   y por tanto $x = [5]_{18}$.

2. (12 points) Quisimos celebrar un evento en una sala cuyo aforo máximo es de 250. Teníamos un número de sillas igual al número de asistentes, y queríamos colocarlas de tal manera que formasen un rectángulo. Nuestro primer intento fue colocar filas de 30 sillas, pero la última fila consistiría en 6 sillas; el segundo intento fue colocar filas de 20 sillas, pero nos faltaban 4 sillas para completar la última fila; finalmente, colocando filas de 18 sillas, todas las filas tenían el mismo número de sillas. Sabiendo que el número de invitados era mayor que 50, ¿Cuántos invitados había en el evento? ¿Cuántas filas se formaron?

   Solution: Escribimos el sistema de ecuaciones que indica el problema:

   $$\begin{cases} n \equiv 6 \pmod{30} \\ n \equiv 16 \pmod{20} \\ n \equiv 0 \pmod{18} \end{cases}$$

Resolvemos el sistema. Para ello, reducimos el sistema a uno donde poder aplicar el teorema de los restos chinos. Para ello usamos que

$$n \equiv 16 \pmod{20} \iff \begin{cases} n \equiv 0 \pmod{4} \\ n \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$

$$n \equiv 6 \pmod{30} \iff \begin{cases} n \equiv 0 \pmod{2} \\ n \equiv 0 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$

$$n \equiv 0 \pmod{18} \iff \begin{cases} n \equiv 0 \pmod{2} \\ n \equiv 0 \pmod{9} \end{cases}$$

Por tanto, el sistema de congruencias original es equivalente a

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{4} \\ n \equiv 1 \pmod{5} \\ n \equiv 0 \pmod{2} \\ n \equiv 0 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{5} \\ n \equiv 0 \pmod{2} \\ n \equiv 0 \pmod{9} \end{cases}$$

Para cada primo $p = 2, 3, 5$, se discute la compatibilidad entre las diferentes ecuaciones, eliminando la redundante en el caso de que sean compatibles. Por ejemplo, para $p = 2$, tenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{4} \\ n \equiv 0 \pmod{2} \\ n \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

que son compatibles y que, entonces, es equivalente a $n \equiv 0 \pmod{4}$. De modo que el sistema se simplifica a

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{4} \\ n \equiv 1 \pmod{5} \\ n \equiv 0 \pmod{9} \end{cases}$$

Calculamos ahora la solución que en este caso es

$$n = 36 + 180t$$

Puesto que $50 < n \leq 250$, entonces $t = 1$ y el número de invitados fue de 216, y se formaron $216/18 = 12$ filas.

3. (6 points) Repartimos una bolsa de caramelos a 12 niños de modo que cada uno de ellos recibe el mismo número de caramelos: de esta forma, quedarían sin repartir 8 caramelos. ¿Cuántos podrían sobrar si repartiésemos a 6 niños? ¿Y a 24 niños? Justifica tu respuesta usando aritmética modular.

Solution: Sea x el número de caramelos que contiene la bolsa, entonces $x \equiv 8 \pmod{12}$. Sea a, con $0 \leq a < 6$, el número de caramelos que sobran al repartir los x caramelos entre los 6 niños. Entonces debe ser compatible el sistema

$$\begin{cases} x \equiv a & (\text{mód } 6), \\ x \equiv 8 & (\text{mód } 12). \end{cases}$$

Para que sea compatible este sistema, ha de ocurrir que $8 \equiv a \pmod{6}$, luego $a = 2$. Esto es, sobrarán 2 caramelos.

De igual manera, si b, con $0 \leq b < 24$, es el número de caramelos que sobran al repartir los x caramelos entre 24 niños, el sistema de congruencias

$$\begin{cases} x \equiv b & (\text{mód } 24), \\ x \equiv 8 & (\text{mód } 12), \end{cases}$$

ha de ser compatible. Por tanto, $b \equiv 8 \pmod{12}$, esto es, $b = 8 + 12t$. Como $0 \leq b < 24$, entonces $b = 8, 20$. Dicho de otra manera, sobrarán 8 ó 20 caramelos al repartirlos entre 24 niños.

Otra forma de verlo es la siguiente: que $x \equiv 8 \pmod{12}$ quiere decir que $x = 8 + 12k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Luego lo que sobrará cuando repartamos los mismos caramelos a 6 ó 24 niños se corresponderá con las clases que salgan de $[8 + 12k]_6$ y $[8 + 12k]_{24}$. En el primer caso, sólo hay una clase posible, $[2]_6$, luego sobrarán 2 caramelos; en el segundo caso hay dos clases posibles, $[8]_{24}$ y $[20]_{24}$, por lo que sobrarán 8 ó 20 caramelos al repartirlos a 24 niños.

Una tercera forma de resolverlo es la siguiente: el número sobrante de caramelos cuando lo repartimos a 6, 12 y 24 niños se corresponden con la clase de x en $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_{12}$ y $\mathbb{Z}_{24}$. Conocemos la clase de x en $\mathbb{Z}_{12}$: $[x]_{12} = [8]_{12}$. Además, esta clase ha de cumplir que $\varphi([x]_{12}) = [x]_6$ y $\psi([x]_{24}) = [x]_{12}$, donde $\varphi\colon \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_6$ y $\psi\colon \mathbb{Z}_{24} \to \mathbb{Z}_{12}$ son los homomorfismos naturales sobreyectivos. Dado que $[x]_{12} = [8]_{12}$, entonces $\varphi([x]_{12}) = [x]_6$ nos da la única posibilidad: $[x]_6 = [2]_6$; y de $\psi([x]_{24}) = [x]_{12}$ sólo tendremos dos posibilidades: $[x]_{24} = [8]_{24}$, o bien $[x]_{24} = [20]_{24}$. Esto nos da el mismo resultado que hemos obtenido por los dos anteriores métodos.

4. Se desea elegir una contraseña de 10 letras utilizando únicamente las letras P, X, Z, T, W. Se quiere saber:

   (a) (2 points) ¿De cuántas formas se puede elegir dicha contraseña?

   Solution: Es una variación (importa el orden) con repetición de 5 elementos tomados de 10 en 10, luego es $VR_{5,10} = 5^{10}$.

   (b) (2 points) ¿En cuántas de dichas formas no se repite la Z ?

   Solution: Se descompone en dos casos: no aparece la letra Z, lo cual es una variación con repetición de 4 elementos tomados de 10 en 10, y por tanto $VR_{4,10} = 4^{10}$; y aparece la letra Z una vez. En este último caso, hay 10 posibilidades para la letra Z, y luego colocamos las 4 letras en los 9 restantes huecos: queda $10 \cdot VR_{4,9} = 10 \cdot 4^9$. La solución es $4^9 \cdot (4 + 10) = 14 \cdot 4^9$.

   (c) (2 points) ¿En cuántas de dichas formas se repite al menos una vez la W?

Solution: Tomamos el complementario y aplicamos el mismo razonamiento que en el apartado anterior. El complementario es "W aparece como mucho una vez", lo que da $VR_{4,10} + 10 \cdot VR_{4,9} = 4^{10} + 10 \cdot 4^9$; por el primer apartado, los casos totales son 5^{10}; y por tanto, el número de contraseñas es de $5^{10} - 4^{10} - 10 \cdot 4^9$.

(d) (2 points) ¿Cuántas están formadas por tres X, cinco W y dos P ?

Solution: El número de contraseñas se calcula a través de la multinomial:

$$\binom{10}{5\ 3\ 2} = \frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!}.$$

También puede hallarse de otro modo: elegimos los lugares para las tres X (esto es, $C_{10,3}$), los lugares (restantes) para las cinco T (esto es, $C_{7,5}$), y luego los lugares que quedan para los dos P ($C_{2,2}$). De este modo, todas las posibilidades son

$$C_{10,3} \cdot C_{7,5} \cdot C_{2,2} = \binom{10}{3} \cdot \binom{7}{5} \cdot \binom{2}{2},$$

que mediante una sencilla manipulación algebraica se puede comprobar que el resultado es el mismo que el anterior.

(e) (2 points) ¿En cuántas aparece exactamente cuatro veces la letra T?

Solution: Como en el segundo apartado, esta vez colocamos primero las 4 letras T. Es una combinación sin repetición de 10 elementos tomados de 4 en 4 (aquí el orden no es importante de cómo tomamos los lugares que ocuparán la letra T): habrá entonces $\binom{10}{4}$ posibilidades. Por otro lado, colocamos el resto de letras en los 6 lugares restantes, esto nos da $VR_{4,6} = 4^6$. Así habrá

$$\binom{10}{4} \cdot 4^6$$

posibles contraseñas con 4 veces la letra T.

5. Para la Lotería Nacional de Navidad de este año, en 'Doña Manolita' sólo quedan décimos de cinco números distintos, quedando 25 de cada uno. Paco desea comprar 12 décimos.

(a) (4 points) ¿De cuántas formas puede elegir los 12 décimos?

Solution: Son combinaciones con repetición de 5 elementos tomados de 12 en 12, esto es, habrá

$$CR_{5,12} = \binom{16}{4}$$

posibilidades.

(b) (6 points) ¿De cuántas formas puede elegirlos si desea comprar al menos uno de cada número y como máximo 3 de cada número?

Solution: Esto es equivalente a calcular los $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}^5$ tales que

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12, \\ 1 \le x_i \le 3. \end{cases}$$

Sea X el conjunto de dichas 5-uplas de números enteros que satisfacen las restricciones anteriores, y sea $\bar{X}$ el conjunto de $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}^5$ tales que

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12, \\ 1 \le x_i. \end{cases}$$

Es obvio que $X \subseteq \bar{X}$, y que además $|\bar{X}| = CR_{5,7} = \binom{11}{4}$.
Calculamos ahora el complementario $\bar{X} \setminus X$, que consisten en aquellas soluciones tales que para algún $i = 1, \ldots 5$, $x_i > 3$, esto es, $x_i \ge 4$. Sea el conjunto A_i de $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}^5$ tales que

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12, \\ 1 \le x_j, \text{ para } j \ne i \\ 4 \le x_i \end{cases}$$

Entonces $\bar{X} \setminus X = A_1 \cup \cdots \cup A_5$, y además $|A_i| = CR_{5,4}$. Calculamos las intersecciones:

- los elementos de $A_i \cap A_j$, con $1 \le i < j \le 5$, satisfacen que

  $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12, \\ 1 \le x_s, \text{ para } s \ne i, j \\ 4 \le x_i, x_j \end{cases}$$

  luego habrá $|A_i \cap A_j| = CR_{5,1}$;

- los elementos de $A_i \cap A_j \cap A_k$ con $1 \le i < j < k \le 5$ satisfacen que

  $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12, \\ 1 \le x_s, \text{ para } s \ne i, j, k \\ 4 \le x_i, x_j, x_k. \end{cases}$$

  Aquí se puede ver que no tiene solución: la suma de los x_i como mínimo es 14, y por tanto $A_i \cap A_j \cap A_k = \varnothing$

- las intersecciones sucesivas, las de 4 ó 5 de ellos, es el conjunto vacío, por lo que tiene 0 elementos.

Ahora bien, $X = \bar{X} \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_5)$ y

$$\begin{aligned} |X| &= |\bar{X}| - |A_1 \cup \cdots \cup A_5| \\ &= |\bar{X}| - \left(\sum_{i=1}^{5} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le 5} |A_i \cap A_j| \right) \\ &= CR_{5,7} - \left(\binom{5}{1} CR_{5,4} - \binom{5}{2} CR_{5,1} \right) \\ &= \binom{11}{4} - \binom{5}{1} \cdot \binom{8}{4} + \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos omitido las intersecciones de 3 o más subconjuntos A_i por ser vacías.

6. Ejercicio 6

(a) (2 points) Dada la siguiente relación de recurrencia, con sus condiciones iniciales,

$$\begin{cases} a_n = n \cdot a_{n-1} - n^3 + 2 \cdot n^2 + n, \forall n \geq 2, \\ a_1 = 2, \end{cases}$$

comprueba que la función $F(n) = n^2 + n$ es solución de la recurrencia.

Solution: Sólo hay que ver que $F(n)$ satisface las igualdades: Una simple cuenta nos dice que $F(1) = 2$, luego cumple que $a_1 = 2$. Por otro lado, sustituimos

$$n^2 + n = n \cdot ((n-1)^2 + (n-1)) - n^3 + 2n^2 + n.$$

Una manipulación algebraica en el segundo miembro permite comprobar que son iguales:

$$\begin{aligned} n \cdot ((n-1)^2 + (n-1)) - n^3 + 2n^2 + n &= n \cdot \left(n^2 - 2n + 1 + n - 1\right) - n^3 + 2n^2 + n \\ &= n \cdot \left(n^2 - n\right) - n^3 + 2n^2 + n \\ &= n^3 - n^2 - n^3 + 2n^2 + n \\ &= n^2 + n. \end{aligned}$$

(b) (5 points) Resuelve la siguiente relación de recurrencia con sus condiciones iniciales

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2} - 2^n, \forall n \geq 3 \\ a_1 = 1, a_2 = 5 \end{cases}$$

Solution: Calculamos la solución de la recurrencia homogénea $a_n^* = -a_{n-1}^* + 2a_{n-2}^*$. Su polinomio característico es $P(x) = x^2 + x - 2$, cuyas raíces —las raíces características— son -2 y 1. Luego la solución general homogénea es

$$a_n^* = C_1 1^n + C_2(-2)^n = C_1 + C_2(-2)^n,$$

donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Calculamos una solución particular. Puesto que el término independiente es 2^n, una solución particular podría ser $a_n = \alpha \cdot 2^n$, para un cierto $\alpha \in \mathbb{R}$. Sustituimos en la ecuación no homogénea para hallar un valor de α:

$$\alpha 2^n = -\alpha 2^{n-1} + 2 \cdot \alpha 2^{n-2} - 2^n.$$

Dividiendo por 2^{n-1} llegamos a la ecuación $4\alpha = -2\alpha + 2\alpha - 4$, luego $\alpha = -1$, y una solución particular sería

$$a_n = -2^n.$$

Entonces, la solución general de la ecuación no homogénea es

$$a_n = -2^n + a_n^* = -2^n + C_1 + C_2(-2)^n, \text{ con } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Calculamos los parámetros C_1, C_2 de modo que a_n satisfaga las condiciones iniciales $a_1 = 1$ y $a_2 = 5$. Imponiendo estas dos condiciones, los parámetros C_1, C_2 satisfacen

$$\begin{cases} 1 = -2 + C_1 - 2C_2, \\ 5 = -4 + C_1 + 4C_2 \end{cases}$$

Restando ambas ecuaciones es fácil llegar a que $C_2 = 1$, y de ahí deducir que $C_1 = 5$. Por tanto, la solución es

$$a_n = -2^n + 5 + (-2)^n = 5 - 2^n(1 + (-1)^n).$$

(c) (3 points) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Plantea (sin resolver) la relación de recurrencia lineal, con sus correspondientes condiciones iniciales, que permita calcular el elemento de la primera fila y tercera columna de A^n.

Solution: Puesto que A es una matriz triangular superior con unos en la diagonal, podemos asumir que sus sucesivas potencias serán de la forma

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hallamos las relaciones de recurrencia de a_n, b_n, c_n a partir de la expresión $A^n = A \cdot A^{n-1}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 1 & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 + a_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} \\ 0 & 1 & 1 + c_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deducimos entonces que $a_n = 1 + a_{n-1}$ con $a_1 = 1$, luego $a_n = n$. Lo mismo para c_n. Y $b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$, esto es,

$$\begin{cases} b_n = b_{n-1} + n - 1, \\ b_1 = 0. \end{cases}$$