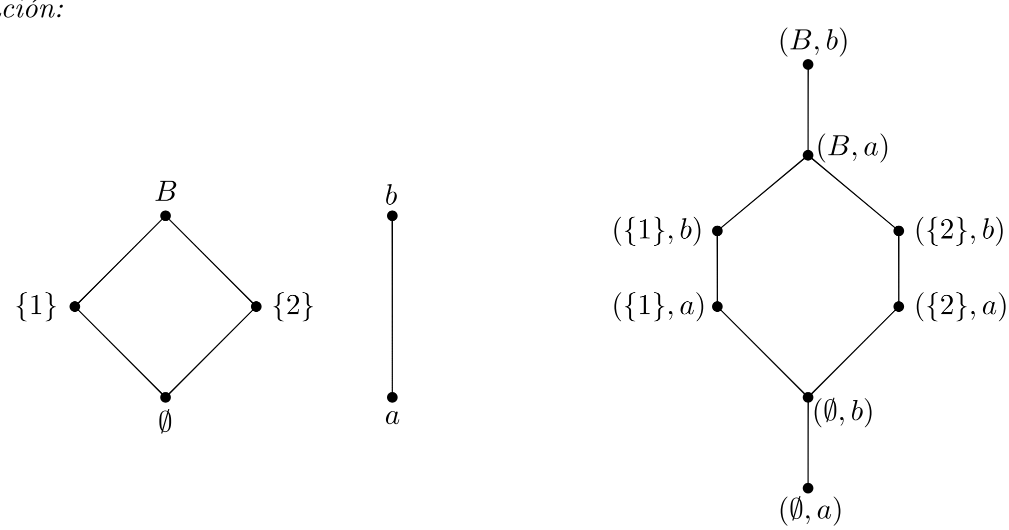
Matemática Discreta I Examen extraordinario	1^{er} Apellido: ____________	24 de junio de 2021
	2^{o} Apellido: ____________	Tiempo: 150 minutos
Dpto. Matematica Aplicada TIC ETS Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: ____________ Número de matrícula:	**Nota:**

1) (15 puntos) Sea el conjunto $A = \{a, b\}$ con la relación en A, $R = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$ y sea $B = \{1, 2\}$. Dibuja los siguientes diagramas de Hasse: $(\mathcal{P}(B), \subset)$, (A, R) y $(\mathcal{P}(B) \times A, \leq_{LEX})$, donde $\mathcal{P}(B)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de B, y $\leq_{LEX}$ la relación de orden lexicográfico.

Solución:



2) (15 puntos) Sea A el conjunto de los números naturales menores que 90, y sea $B = A \cap D_{1183}$, donde D_{1183} es el conjunto de divisores positivos de 1183. Obtén el máximo, mínimo, maximales y minimales de $D_{1183} - \{1\}$, y el supremo, ínfimo, cotas superiores e inferiores de B en D_{1183}, respecto a la relación de divisibilidad (aRb si y sólo si a divide a b).

Solución:

$1183 = 7 \cdot 13^2$. Por tanto, $card(D_{1183}) = 2 \cdot 3 = 6$.

$D_{1183} = \{1, 7, 13, 91, 169, 1183\}$; $B = A \cap D_{1183} = \{1, 7, 13\}$.

En $D_{1183} - \{1\}$, maximales $= \{1183\}$, máximo $= 1183$, minimales $= \{7, 13\}$, mínimo no existe.

Elementos notables de B en D_{1183}: cotas superiores $= \{91, 1183\}$, supremo $= 91$, cotas inferiores $= \{1\}$, ínfimo $= 1$

3) (10 puntos) Obtén la expresión booleana más simplificada que define el siguiente mapa de Karnaugh:

	y	y	y'	y'	
x	1	1	1	1	t'
x	1	0	0	0	t
x'	0	0	0	0	t
x'	1	1	0	1	t'
	z'	z	z	z'	

Solución: $z't' + xt' + yt' + xyz'$

4) (15 puntos) Razonar si se puede realizar la siguiente operación y en caso afirmativo, dar el resultado con el menor residuo (resto) no negativo: $187^{1778} - 11^{-1}$ en Z_{180}

Solución:

La potencia siempre existe, y el inverso de 11 existe en Z_{180}, por ser 11 y 180 primos entre sí.

Hallamos primero 187^{1778}:

$187^{1778} \equiv 7^{1778} (mod 180)$. Al ser $mcd(7, 180) = 1$, podemos aplicar el teorema de Euler: $7^{\phi(180)} \equiv$

$1 (mod 180)$.

$\phi(180) = \phi(2^2 \cdot 3^2 \cdot 5) = \phi(2^2) \cdot \phi(3^2) \cdot \phi(5) = 2 \cdot 6 \cdot 4 = 48$. Así, $7^{48} \equiv 1 (mod 180)$.

$7^{1778} = (7^{48})^{37} \cdot 7^2 \equiv 7^2 (mod 180) \equiv 49 (mod 180)$.
Hallamos ahora 11^{-1}:
$11x \equiv 1 (mod 180)$; $11x + 180y = 1$.
Mediante el algorimo de Euclides obtenemos: $3 \cdot 180 - 49 \cdot 11 = 1$. Por tanto, $x = -49 \equiv 131 (mod 180)$.
Finalmente, $49 - 131 = -82 \equiv 98 (mod 180)$.

5) (15 puntos)
Una fábrica de coches en Valencia distribuye un pedido de un número de vehículos entre 1000 y 1500 a una empresa mayorista de Mallorca que se envía en barcos completos de capacidad para 68 vehículos cada uno. El mayorista los distribuye a los distintos concesionarios de la isla usando varios camiones completos con capacidad para 20 vehículos cada uno, quedando 32 coches sin distribuir en el almacén. ¿Cuál es el número exacto de vehículos distribuidos por la fábrica de Valencia?
Solución:
Si llamamos x al número de vehículos pedidos, x es un entero entre 1000 y 1500 tal que al dividir entre 68 da resto cero, ya que los envíos a Mallorca ocupan un cierto número de barcos completos sin sobrar ningún coche. Además, al dividir x entre 20 el resto es 32, ya que se completan varios camiones y quedan 32 vehículos sin repartir.
Por tanto el problema se puede modelizar como el sistema de ecuaciones en congruencias

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{68} \\ x \equiv 32 \pmod{20} \end{cases}$$

sujeto a la condición $1000 < x < 1500$.
Para resolver el sistema, primero descomponemos cada ecuación en ecuaciones con módulos primos entre sí, usando las descomposiciones $68 = 4 \cdot 17$ y $20 = 4 \cdot 5$:

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{4} \\ x \equiv 0 \pmod{17} \\ x \equiv 32 \pmod{4} \\ x \equiv 32 \pmod{5} \end{cases}$$

que podemos simplificar a

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{4} \\ x \equiv 0 \pmod{17} \\ x \equiv 0 \pmod{4} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$$

y, eliminando la tercera ecuación, que es idéntica a la primera:

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{4} \\ x \equiv 0 \pmod{17} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$$

Los tres módulos de las ecuaciones que quedan ya son primos entre sí, por lo cual el sistema es compatible por el Teorema chino del resto y existe una solución en $\mathbb{Z}_{340}$ donde $m = 340 = 4 \cdot 17 \cdot 5$. Una solución particular es:

$$x_0 = 0 \cdot \left(\frac{340}{4}\right)\left[\frac{340}{4}\right]_4^{-1} + 0 \cdot \left(\frac{340}{17}\right)\left[\frac{340}{17}\right]_{17}^{-1} + 2 \cdot \left(\frac{340}{5}\right)\left[\frac{340}{5}\right]_5^{-1} =$$

$$2 \cdot 68 \cdot [68]_5^{-1} = 2 \cdot 68 \cdot [3]_5^{-1} = 2 \cdot 68 \cdot 2 = 272$$

La solución general del sistema de ecuaciones en congruencias es $[272]_{340}$, pero buscamos una solución entre 1000 y 1500. Sumando repetidamente 340 a 272 obtenemos todos los enteros de la clase de congruencia:

$$[272]_{340} = \{\ldots, 272, 612, 952, 1292, 1632, \ldots\}$$

por lo que la solución, el número de vehículos del pedido, es 1292.

6) (20 puntos) En los siguientes apartados, desarrollar el resultado lo más posible.

a) Con las cifras $1, 3, 4, 7$, y 8, ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas se pueden formar? ¿Cuántos de ellos son pares?

b) Con las mismas cifras del apartado anterior, ¿cuántos números de cuatro cifras se pueden formar? (se pueden repetir las cifras) ¿Cuántos de ellos son pares?

c) ¿Cuántos números de diez cifras existen en los que aparece seis veces el 1, tres veces el 5 y una vez el 9?

d) ¿Cuántos números existen mayores que 4000 y menores que 9000, tales que la suma de sus cifras es 18?

Solución:

a) $V_{5,4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

$2 \cdot V_{4,3} = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 48$

b) $VR_{5,4} = 5^4 = 625$

$2 \cdot VR_{5,3} = 2 \cdot 5^3 = 2 \cdot 125 = 250$

c) $C_{10,6} \cdot C_{4,3} = \frac{10!}{6!4!}\frac{4!}{3!} = \frac{10!}{6!3!} = 840.$

También se puede obtener con permutaciones con repetición, $PR_{10}^{6,3,1} = \frac{10!}{6!3!} = 840$

d) Existirán tantos números con esas condiciones como soluciones enteras de la siguiente ecuación con las correspondientes limitaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18 \\ 4 \leq x_1 \leq 8 \\ 0 \leq x_2, x_3, x_4 \leq 9 \end{cases}$$

que es el mismo número de soluciones enteras de:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14 \\ 0 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2, x_3, x_4 \leq 9 \end{cases}$$

Sea X el conjunto de todas las soluciones enteras no negativas de la ecuación.

$A_1 = \{$ soluciones de la ecuación en las que $x_1 \geq 5\}$
Y para $i = 2, 3, 4$ $A_i = \{$ soluciones de la ecuación en las que $x_i \geq 10\}$.

El número total de soluciones será:

$Card(X) - Card(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = CR_{4,14} - (CR_{4,9} + 3CR_{4,4} - 0) = C_{17,3} - C_{12,3} - 3C_{7,3} = \frac{17!}{3!14!} - \frac{12!}{3!9!} - 3\frac{7!}{3!4!}$

7) (10 puntos)

Halla la expresión explícita (es decir, resuelve) de a_n dada por la ley de recurrencia

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2} + 6, \\ a_0 = -1, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

Solución:

Hallamos la expresión general de la expresión explícita para la ley de recurrencia homogénea $\hat{a}_n = -\hat{a}_{n-1} + 2\hat{a}_{n-2}$ (sin valores iniciales). Dado que el polinomio característico es $x^2 + x - 2$ cuyas raíces son 1 y -2, la expresión explícita para dicha ley de recurrencia homogénea es

$$\hat{a}_n = C_1 1^n + C_2(-2)^n = C_1 + C_2(-2)^n, \tag{1}$$

donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ son parámetros.

Calculamos ahora una solución particular a la ley de recurrencia propuesta por el ejercicio. En este caso, usaremos que la expresión explícita será de la forma

$$a_n = pn + q$$

donde $p, q \in \mathbb{R}$ serán dos números reales por determinar. Forzamos a que esta expresión cumpla la ley de recurrencia, y obtenemos que $p = 2$, mientras que q no tienen ninguna restricción: esto último se debe a que $a_n = q$ es, de por sí, una solución homogénea (ver (1) cuando $C_2 = 0$). Luego una solución particular es $a_n = 2n$, y la expresión explícita de la ley de recurrencia $a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2} + 6$ es $a_n = C_1 + C_2(-1)^n + 2n$ con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ parámetros.

Ahora buscamos las que satisfacen que $a_0 = -1$ y $a_1 = 1$, lo que nos lleva a determinar los posibles valores de los parámetros C_1 y C_2. Ambas condiciones iniciales se traducen en el sistema

$$\begin{cases} -1 = a_0 = C_1 + C_2, \\ 1 = a_1 = C_1 - 2C_2 + 2 \end{cases}$$

Que si resolvemos obtenemos $C_2 = 0$ y $C_1 = -1$. Luego la solución es

$$a_n = 2n - 1.$$