Matemï¿½tica Discreta I Segundo parcial	1er Apellido: __________	18 de diciembre de 2019
Dpto. Matematica Aplicada TIC ETS Ingenieros Informï¿½ticos Universidad Politï¿½cnica de Madrid	2º Apellido: __________ Nombre: __________	Tiempo 2 horas **Nota:**

Ejercicio 1 (10 puntos)

Calcula $[7]^{1982} + [23]^{-1} \cdot [2]$ en $\mathbb{Z}_{297}$.

Solución:

$\phi(297) = \phi(3^3 \cdot 11) = \phi(3^3) \cdot \phi(11) = (3^3 - 3^2) \cdot 10 = 180$

$[7]^{1982} = [7]^{180\cdot 11+2} = ([7]^{180})^{11} \cdot [7]^2 = [1] \cdot [49] = [49]_{297}$

$[23]^{-1} = [-142] = [155]_{297}$

$[7]^{1982} + [23]^{-1} \cdot [2] = [49] + [155] \cdot [2] = [49 + 310] = [359] = [62]_{297}$

Ejercicio 2 (10 puntos)

Razona si el siguiente sistema de congruencias tiene solución, y en caso afirmativo, resuélvelo.

$$\begin{cases} 13x \equiv 3 & \pmod{144} \\ 10x \equiv 30 & \pmod{216} \end{cases}$$

Solución:

Sabiendo que $144 = 2^4 \cdot 3^2$ y $216 = 2^3 \cdot 3^3$ estudiamos si cada una de las ecuaciones del sistema tiene solución.

$$mcd(13, 144) = 1|3 \quad \Rightarrow \quad 13x \equiv 3 \pmod{144} \text{ tiene solución.}$$
$$mcd(10, 216) = 2|30 \quad \Rightarrow \quad 10x \equiv 30 \pmod{216} \text{ tiene solución.}$$

- $13x \equiv 3 \pmod{144} \to \begin{cases} 13x \equiv 3 & \pmod{2^4} \to x \equiv 13^{-1} \cdot 3 \pmod{2^4} \\ 13x \equiv 3 & \pmod{3^2} \to x \equiv 13^{-1} \cdot 3 \pmod{3^2} \end{cases} \to \begin{cases} x \equiv -1 & \pmod{2^4} \\ x \equiv 3 & \pmod{3^2} \end{cases}$

  $13^{-1} \equiv (-3)^{-1} \pmod{2^4} \equiv 5 \pmod{2^4}$ ya que, $(-3) \cdot 5 = -15 \equiv 1 \pmod{2^4}$.
  $13^{-1} \equiv 4^{-1} \pmod{3^2} \equiv -2 \pmod{3^2}$ ya que, $(-2) \cdot 4 = -8 \equiv 1 \pmod{3^2}$.

- $10x \equiv 30 \pmod{216} \Rightarrow x \equiv 3 \pmod{108}$ (aplicando propiedad cancelativa) $\to \begin{cases} x \equiv 3 & \pmod{2^2} \\ x \equiv 3 & \pmod{3^3} \end{cases}$

Luego nos ha quedado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x \equiv -1 & \pmod{2^4} \\ x \equiv 3 & \pmod{3^2} \\ x \equiv 3 & \pmod{2^2} \\ x \equiv 3 & \pmod{3^3} \end{cases}$$

que tiene solución ya que, $mcd(2^4, 2^2) = 2^2|(-1-3)$ y $mcd(3^3, 3^2) = 3^2|(3-3)$. La solución será única en $Z_{2^4 3^3}$, y el sistema que hay que resolver, eliminando las ecuaciones que sobra, es

$$\begin{cases} x \equiv -1 & \pmod{2^4} \\ x \equiv 3 & \pmod{3^3} \end{cases}$$

$$x = (-1)3^3[3^3]^{-1}_{Z_{2^4}} + 3 \cdot 2^4[2^4]^{-1}_{Z_{3^3}} + 2^4 3^3 t = -27 \cdot 3 + 48 \cdot 22 + 2^4 3^3 t = 975 + 2^4 3^3 t = 111 + 432k$$

- $27 \equiv 11 \pmod{2^4}$ y $11^{-1} \equiv 3 \pmod{16}$.
- $16^{-1} \equiv (4^2)^{-1} \pmod{3^3} \equiv (4^{-1})^2 \pmod{3^3} \equiv 7^2 \pmod{3^3} \equiv 22 \pmod{3^3}$.

Ejercicio 3

El profesor de logística prepara el examen de los temas 1 y 2 de su asignatura.

a) **(5 puntos)** Si el examen es un cuestionario de 10 preguntas seleccionadas de entre 25 del tema 1 y 40 del tema 2, eligiendo al menos cuatro preguntas de cada tema, ¿cuántos exámenes distintos pueden generarse?

b) **(5 puntos)** El examen se realiza en un aula especial con filas de 17 asientos cada una. Si en cada fila se sitúan cinco alumnos, y dos alumnos consecutivos deben estar separados por al menos dos asientos vacios, ¿de cuantas formas distintas podemos colocar a Susana, Victoria, Carmen, JesÃºs y Luis en una determinada fila?

c) **(3 puntos)** Cada ejercicio se califica con 0 o 1 puntos, siendo la nota final un entero entre 0 y 10. Si la suma de notas de los 95 alumnos es 580, razone cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   i) Al menos un alumno ha obtenido una calificación de 7.
   ii) Al menos un alumno ha obtenido una calificación superior a 7.
   iii) Al menos un alumno ha obtenido una calificación inferior a 7.

Solución:

a) Como debe haber al menos cuatro preguntas de cada tema, las opciones son: 4 - 6, 5 - 5 y 6 - 4. Por tanto el número de opciones será: $C_{25,4} \cdot C_{40,6} + C_{25,5} \cdot C_{40,5} + C_{25,6} \cdot C_{40,4}$

b) Determinamos en primer lugar quí cinco asientos se van a ocupar. Para ello partimos de considerar que hay 5 asientos ocupados con dos asientos libres entre cada dos de ellos, con lo que tenemos asignados $5 + 4 \times 2$ asientos, quedándonos $17 - 13 = 4$ asientos libres para repartir entre seis posibles ubicaciones. Por último distribuimos los cinco alumnos en los cinco asientos ocupados. En definitiva el número de opciones se corresponde con:
$CR_{6,4} \cdot P_5 = \binom{9}{4} 5! = \frac{9!5!}{5!4!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$

c) De acuerdo con el teorema de las cajas generalizado, considerando que $580/95 = 6,11$, deberá haber al menos un alumno con una calificación mayor o igual a siete, y al menos un alumno con una calificación menor o igual a 6.

   i) No podemos afirmar que al menos un alumno haya obtenido una calificación de 7, ya que el teorema solo nos indica que al menos uno la habrá obtenido mayor o igual a 7, pero no necesariamente igual.
   ii) No podemos afirmar que al menos un alumno haya obtenido una calificación superior a 7, ya que el teorema solo nos indica que al menos uno la habrá obtenido mayor o igual a 7, pero no necesariamente mayor.
   iii) En cambio, si es verdadero que al menos un alumno ha obtenido una calificación inferior a 7 (que se corresponde con menor o igual a 6).

Ejercicio 4

Un fabricante produce bombones de 5 sabores distintos y los comercializa en cajas de 24 bombones. Razona las siguientes opciones, y desarrolla las fármulas utilizadas.

a) **(3 puntos)** ¿Cuántas cajas diferentes podría comercializar el fabricante?

b) **(4 puntos)** ¿Cuántas cajas diferentes podría comercializar el fabricante si hubiera a lo sumo 9 bombones de un mismo sabor en cada caja?

Solución:

a) El número de soluciones enteras de la ecuación

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 24 \\ 0 \leq x_i, i \in \{1, 2, \ldots, 5\} \end{cases}$$

es $CR_{5,24} = \binom{28}{4} = \dfrac{28!}{24!4!}$.

b) El número de soluciones enteras de la ecuación

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 24 \\ 0 \leq x_i \leq 9, i \in \{1, 2, \ldots, 5\} \end{cases}$$

es $card\left(X - \cup_{i=1}^{5} A_i\right)$ siendo X={soluciones enteras no negativas}, A_i={soluciones de X con $x_i \geq 10$}, $i \in \{1, 2, \ldots, 5\}$.

Por tanto, el número de cajas es

$$card\left(X - \cup_{i=1}^{5} A_i\right) = CR_{5,24} - (C_{5,1} \cdot CR_{5,14} - C_{5,2} \cdot CR_{5,4}) = \binom{28}{4} - 5\binom{18}{4} + 10\binom{8}{4}$$

Ejercicio 5

a) **(4 puntos)** Halla una relación de recurrencia para el número de listas a_n de longitud $n \geq 1$), formadas con los elementos A, B, C, y D, en las que el elemento B no aparece en la posición inmediatamente posterior a una A.

b) **(6 puntos)** Resuelve la siguiente relación de recurrencia con condiciones iniciales.

$$\begin{cases} a_n = 6 \cdot a_{n-1} - 9 \cdot a_{n-2} + 4 \cdot 5^n, \forall n \geq 2 \\ a_0 = 25, a_1 = 47 \end{cases}$$

Solución:

a)

$$\begin{cases} a_n = 4 \cdot a_{n-1} - a_{n-2} \\ a_1 = 4, a_2 = 15 \end{cases}$$

b) Solución general de la homogénea asociada: $S(n) = A \cdot 3^n + B \cdot n \cdot 3^n$

Solución particular de la completa: $P(n) = 25 \cdot 5^n = 5^{n+2}$

Solución general de la completa: $a_n = A \cdot 3^n + B \cdot n \cdot 3^n + 5^{n+2}$

Imponiendo las condiciones iniciales: $a_n = -26 \cdot n \cdot 3^n + 5^{n+2}$