Hoja 2. Relaciones, aplicaciones, relaciones de equivalencia

Susana Cubillo (2021)

Ejercicios recopilados de los apuntes y Hojas de problemas de los profesores del Dpto. Matemática Aplicada a las TIC (Campus Montegancedo). UPM.

1. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 3, 5\}$, y la relación R de A en B definida por $a\,R\,b \iff a < b$, describe los pares de la relación.

2. En el conjunto $\mathbb{Z}$ se define la relación aRb si y sólo si $a^2 = b^2$. Averigua si se trata de una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$ y, de ser cierto, encuentra la clase de equivalencia del elemento 5, es decir $[5]$.

3. Dados los conjuntos $A = \{2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{3, 6, 7, 10\}$ y la relación de divisibilidad R de A en B, $a\,R\,b \iff 'a'\ divide\ a\ 'b' \iff b\ es\ múltiplo\ de\ a$, describe los pares de la relación.

4. Sea el conjunto $\wp(S)$ de todos los subconjuntos de $S = \{a, b\}$, y la relación R definida en $\wp(S)$ por $A\,R\,B \iff |A \cap B| = 1$. Averiguar si es una relación reflexiva, simétrica y/o transitiva.

5. Estudiar si las relaciones en el conjunto $A = \{a, b, c\}$, dadas por las siguientes matrices, son reflexivas, simétricas, antisimétricas y transitivas.
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Dada la relación definida en $\mathbb{Z}$ por: $a\,R\,b \iff a - b = 5 \cdot k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$, estudiar si es una relación reflexiva, simétrica y transitiva, y encontrar tres números enteros no relacionados entre sí.

7. Halla el dominio y la imagen (o rango) de cada una de las siguientes relaciones:
   a) $R = \{(1,5)\ , (4,5), (1,4), (4,6), (3,7), (7,6)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
   b) S definida en $\mathbb{N}$ por $x\,S\,y \iff 2x + y = 16$.
   c) T definida en $\mathbb{N}$ por $x\,T\,y \iff 3x + y = 25$.

8. En $A = \{a, b, c, d\}$ se consideran las siguientes relaciones:
   a) $R = \{(a,b),(b,c),(c,d),(d,a)\}$ c) $S = \{(d,c),(c,b),(a,b),(d,d)\}$
   b) $T = \{(a,a),(b,a),(c,a),(d,d)\}$ d) $V = \{(b,a),(a,c),(d,d)\}$
   Averigua cuáles son aplicaciones y cuáles no lo son.

9. Comprueba que la función $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & si\ n\ es\ par \\ -\frac{n-1}{2}, & si\ n\ es\ impar \end{cases}$
   es una aplicación, y obtén si es inyectiva, suprayectiva o biyectiva.

10. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la relación dada por $R = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),(4,4),(5,1),(5,3),(5,5)\}$, obtén sus propiedades. ¿Es una relación de equivalencia? En caso afirmativo, determina el conjunto cociente.

11. Sea el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, y la partición dada por $P = \big\{\{a, d, e\}, \{c, f\}, \{b\}\big\}$, define una relación de equivalencia, cuyo conjunto cociente coincida con P.

12. En el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define la relación $(a,b) R\,(c,d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$. Averigua si es una relación de equivalencia, y en caso afirmativo, o)btén las clases $[(4,8)]$ y $[(8,4)]$.

13. En el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define la relación $(a,b) R\,(c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$. Averigua si es una relación de equivalencia, y en caso afirmativo, obtén la clase $[(2,5)]$ y $[(8,3)]$.

14. En $\mathbb{R}^2$ se define la relación $(x,y)\ R\ (z,t) \Leftrightarrow x \cdot y = z \cdot t$. Comprueba que es una relación de equivalencia, y obtén el conjunto cociente.

15. En $\mathbb{Z}$ se define la relación $x\ R\ y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$. Comprueba que es una relación de equivalencia, y obtén el conjunto cociente.

16. En $\mathbb{R}^2$ se define la relación $(x,y)\ R\ (z,t) \Leftrightarrow x + t = y + z$. Comprueba que es una relación de equivalencia, y obtén el conjunto cociente.

17. (Examen 2018) En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros se define la relación aRb si y sólo si $7/(b-a)$, donde / es la relación de divisibilidad ($x\,/\,y$ si existe $k \in \mathbb{Z}$ verificando $x \cdot$

$k = y$). Demuestra que se trata de una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$, y obtén las clases de equivalencia del 0, y del 3 ; es decir $[0]$ y $[3]$.

18. (Examen 2018) En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ definimos la siguiente relación: dados $a, b \in \mathbb{N}$, decimos que $aRb \; si \; a/b^2$ (a/b^2significa que "a divide a b^2 "). Razona qué propiedades (reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva) cumple la relación y cuáles no.

19. (Examen 2017) Sea $X = \{a, b, c\}$. En $\wp(X)$ definimos la siguiente relación: dados $M, N \subseteq X$, decimos que MRN si $|M| \leq |N|$. Razona qué propiedades (reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva) cumple la relación y cuáles no.

20. (Examen 2015) En el conjunto $\mathbb{Z}$ se define la relación $a \, R \, b \iff a^2 - b^2 = 3\,(a - b)$. Averigua si se trata de una relación de equivalencia y, de ser cierto, encuentra la clase de equivalencia del 2, y obtén el conjunto cociente.