Matemática Discreta I Examen final. Primer Parcial	1^{er} Apellido: ______________	20 de enero de 2021
Dpto. Matematica Aplicada TIC ETS Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	2^{o} Apellido: ______________ Nombre: ______________ Número de matrícula:	Tiempo : 1 h. 30 m. **Nota:**

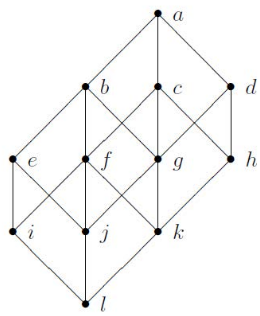
NOTA: NO SE PERMITE EL USO DE DISPOSITIVOS ELECTRÓNICOS

Ejercicio 1. **(14 puntos)**

a) **(3 puntos)** Dados los conjuntos, $A = \{7 \cdot n + 3 \ / \ n \in \mathbb{N} \text{ y } 2 \leq n < 140\}$ y $B = \{n \ / \ n \in \mathbb{N} \text{ y } 2 \leq 7 \cdot n + 3 < 140\}$. Obtener el conjunto $A \cap B$ y el cardinal de $A \cup B$.

b) **(5 puntos)** Sea el conjunto $A = \{a, b\}$ con la relación en A, $R = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$ y sea $B = \{1, 2\}$. Dibujar los siguientes diagramas de Hasse: (A, R), $(\mathcal{P}(B), \subset)$ y $(A \times \mathcal{P}(B), \leq_{PROD})$.

c) **(3 puntos)** Razonar si el siguiente Diagrama de Hasse corresponde a un retículo.



d) **(3 puntos)** En el conjunto de divisores positivos de 3887, con las operaciones mínimo común múltiplo (m.c.m.) y máximo común divisor (m.c.d.), encuentra todos los elementos que tienen complementario y calcula sus complementarios. Razona si dicho conjunto es un Álgebra de Boole.

Ejercicio 2. **(6 puntos)**

Demuestra por inducción que $n^3 - n$ es múltiplo de 6 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3. **(10 puntos)**

a) **(4 puntos)** Demuestra la siguiente igualdad, desarrollando el primer miembro y usando las propiedades del álgebra de Boole. Indica claramente la propiedad usada en cada paso. $(x + y)(x' + y')' = xy$.

b) **(6 puntos)**Encuentra la expresión booleana más sencilla en suma de productos que distinga los números $\{0, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 13, 15\}$ dentro del conjunto $S = \{0, 1, 2, \ldots, 15\}$.

Ejercicio 4. **(10 puntos)**

En un centro cultural hay dos tipos de salas, las que tienen un aforo de 45 personas, y las que tienen un aforo de 72 personas. Hemos comprado 441 sillas, ¿cuántas salas podemos habilitar completamente? IMPORTANTE: Es obligatorio utilizar el Algoritmo de Euclides. No se puntuará si se buscan soluciones tanteando.

Soluciones Ejercicios 1^{er} Parcial

(20 enero 2021)

1º a) $A = \{17, 24, 31, \ldots, 976\}$ $\quad$ $card(A) = 138$

$B = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 19\}$ $\quad$ $card(B) = 19$.

Por tanto, $A \cap B = \{17\}$ //

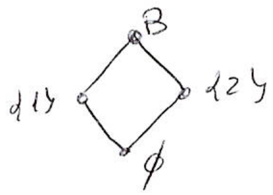
$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B) =$

$= 138 + 19 - 1 = 156$ //

b) $A = \{a, b\}$ $\quad$ $B = \{1, 2\}$, $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, B\}$

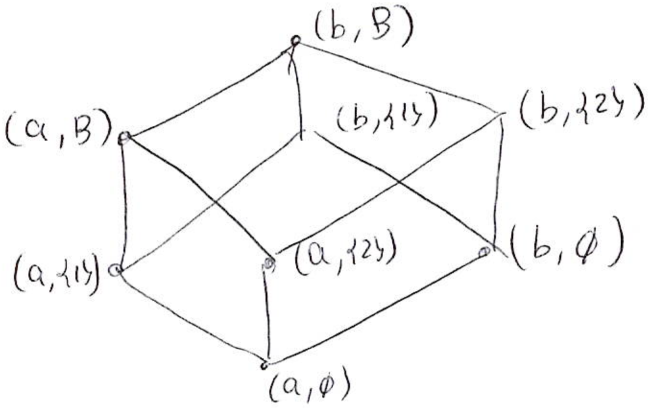
(A, R) :

$(\mathcal{P}(B), \subset)$



$(A \times \mathcal{P}(B), \leq_{PROD})$

$A \times \mathcal{P}(B) = \{(a,\emptyset), (a,\{1\}), (a,\{2\}), (a,B), (b,\emptyset), (b,\{1\}), (b,\{2\}), (b,B)\}$



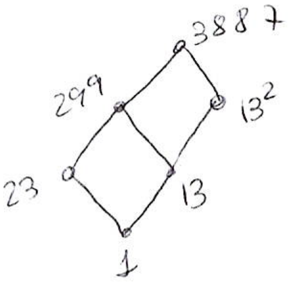
c) Para que sea un retículo, todos los pares de elementos tienen que tener supremo e ínfimo. En este caso, varios pares de elementos no cumplen esta condición. Por tanto, no es retículo. Por ejemplo $\nexists$ $sup\{g, h\}$, ya que el conjunto de sus cotas superiores es $\{c, d, a\}$, y ninguna está relacionada con las otras dos.

d) Descomponiendo 3887 en factores primos, queda

$3887 = 13^2 \cdot 23$

Por tanto, $D_{3887} = \{1, 13, 23, 169, 299, 3887\}$.

Diagrama de Hasse:



$1' = 3887$

$23' = 13^2 = 169$.

No tienen complementario $13 \cdot 23 = 299$ y 13

2º) Veamos que se cumplen las condiciones para utilizar el método de inducción.

1) si $n = 1 \rightarrow 1^3 - 1 = 0$, múltiplo de 6.

2) si $n^3 - n$ múltiplo de 6, ¿$(n+1)^3 - (n+1)$ múltiplo de 6?

$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + \cancel{1} - n - \cancel{1} = (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$.

El primer sumando es múltiplo de 6, por hipótesis de inducción.

Veamos si $3(n^2+n)$ es múltiplo de 6. Para ello, basta que $n^2 + n$ sea múltiplo de 2.

i) si n impar $\rightarrow n^2$ impar $\rightarrow n^2 + n$ par.

ii) si n par $\rightarrow n^2$ par $\rightarrow n^2 + n$ par.

Por tanto $3(n^2+n)$ es múltiplo de 3 y de 2 $\rightarrow$ múltiplo de 6.

Y, finalmente, ~~n^3~~ $(n+1)^3 - (n+1) = (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$ es la suma de dos múltiplos de 6, por lo que también es múltiplo de 6.

(3)

a) $(x+y)\cdot(x'+y')' \underset{\text{De Morgan}}{=} (x+y)\cdot(x''\cdot y'') \underset{\text{Involutiva.}}{=} (x+y)\cdot(x\cdot y) =$

$$= \underset{\text{Distributiva de } \cdot \text{ respecto } +}{x(xy) + y(xy)} \underset{\text{Asociativa}}{=} (xxy) + (yxy) \underset{\text{Idempotente}}{=} xy + xy \underset{\text{Idempotente}}{=} xy.$$

b) Escribimos los números del conjunto de verdad en binario:

$0 \to 0000$
$1 \to 0001$
$2 \to 0010$
$3 \to 0011$
$4 \to 0100$
$8 \to 1000$
$12 \to 1100$
$13 \to 1101$
$15 \to 1111$

Por Karnaugh.

	y	y	y'	y'	
x	X			X	t'
x	X	X			t
x'			X	X	t
x'	X		X	X	t'
	z'	z	z	z'	

$E(x,y,z,t) = x'y' + z't' + xyt$

Por McCluskey

0000 ✓	000– ✓	00––
	00–0 ✓	00––
0001 ✓	0–00 ✓	––00
0010 ✓	–000 ✓	––00
0100 ✓		
1000 ✓	00–1 ✓	
	001– ✓	
0011 ✓	–100 ✓	
1100 ✓	1–00 ✓	
1101 ✓	110–	
1111 ✓	11–1	

	0000	0001	0010	0100	1000	0011	1100	1101	1111
00––	X	X	X			X			
––00	X			X	X		X		
110–							X	X	
11–1								X	X

$E(x,y,z,t) = x'y' + z't' + xyt$

(4) Llamamos x = nº salas con aforo 45
y = nº salas con aforo 72.

$$45x + 72y = 441.$$

Dividiendo por 9: $5x + 8y = 49$.

Algoritmo de Euclides: $\begin{array}{r|l} 8 & 5 \\ \hline 3 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$

$$1 = 3 - 2 = 3 - (5-3) = 2\cdot 3 - 5 = 2(8-5) - 5 = 2\cdot 8 - 3\cdot 5$$

Por tanto, $5(-3) + 8(2) = 1 \longrightarrow 5(-147) + 8\cdot(98) = 49$.

solución gral. de la ecuación diofántica $\begin{cases} x = -147 + 8t \\ y = 98 - 5t \end{cases}$ $t \in \mathbb{Z}$

Como los valores no pueden ser negativos:

$$\left.\begin{array}{l} x = -147 + 8t \geq 0 \longrightarrow t \geq 18'\ldots \longrightarrow t \geq 19 \\ y = 98 - 5t \geq 0 \longrightarrow t \leq 19'\ldots \longrightarrow t \leq 19 \end{array}\right| \longrightarrow t = 19.$$

Finalmente, $x = -147 + 8(19) = 5$ salas de aforo 45
$y = 98 - 5(19) = 3$ salas de aforo 72.