Hoja 3. Relaciones de Orden. Retículos

Susana Cubillo (2021)

Ejercicios recopilados de los apuntes y hojas de problemas de los profesores del Dpto. Matemática Aplicada a las TIC (Campus Montegancedo). UPM.

1. En el conjunto $(\mathbb{R}-\{0\}) \times \mathbb{R}$ se define la relación

$$(x,y)R\,(z,t) \iff x \leq z \;\;,\;\; \frac{y}{x}=\frac{t}{z}$$

a) Demuestra que es una relación de orden y estudia si es un orden total.

b) Representa el conjunto de los elementos comparables con el elemento $(1,1)$.

Sol.:

a) *Reflexiva*. $(x,y)R\,(x,y)$, para todo $(x,y) \in (\mathbb{R}-\{0\}) \times \mathbb{R}$, ya que $x \leq z$ y $\frac{y}{x}=\frac{y}{x}$

Antisimétrica. Si $(x,y)R\,(z,t)$ y $(z,t)R\,(x,y)$, entonces $x \leq z$, $\frac{y}{x}=\frac{t}{z}$, $z \leq x$, $\frac{t}{z}=\frac{y}{x}$. Por tanto, $x=z$, y también $t=y$.

Transitiva. Si $(x,y)R\,(z,t)$ y $(z,t)R\,(u,w)$, entonces $x \leq z$, $\frac{y}{x}=\frac{t}{z}$, $z \leq u$, $\frac{t}{z}=\frac{w}{u}$.

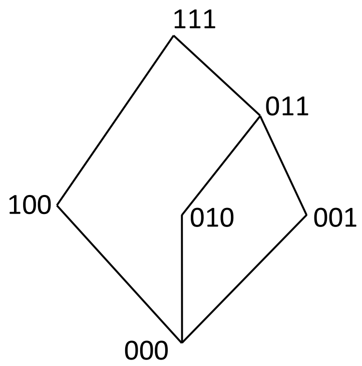
Se deduce que $x \leq u$, $\frac{y}{x}=\frac{w}{u}$, y finalmente $(x,y)R\,(u,w)$

No es un orden total; por ejemplo los pares $(1,1)$ y $(1,2)$ no son comparables

b) Conjunto de elementos comparables con $(1,1)$ es $\{\,(r,r)\,;\quad r \in \mathbb{R}-\{0\}\}$

2. Determina el orden lexicográfico de las siguientes cadenas de bits: 001, 111, 010, 011, 000,100 basado en el orden $0 \leq 1$. Dibuja el diagrama de Hasse de estas cadenas, con el orden producto.

Sol.: $000 \leq_{Lex} 001 \leq_{Lex} 010 \leq_{Lex} 011 \leq_{Lex} 100 \leq_{Lex} 111$



3. Sean (A, R) y (B, S) dos conjuntos ordenados, con $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b\}$

$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$

$S = \{ (a, a), (a, b), (b, b) \}$

Halla $(A \times B, Prod)$ y $(A \times B, Lex)$

Sol.: $A \times B = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b), (4, a), (4, b)\}$

$$Prod = \left\{ \begin{array}{c} ((1,a),(1,a)),((1,a),(1,b)),((1,a),(2,a)),((1,a),(2,b)),((1,a),(3,a)), \\ ((1,a),(3,b)),((1,a),(4,a)),((1,a),(4,b)),((1,b),(1,b)),((1,b),(2,b)), \\ ((1,b),(3,b)),((1,b),(4,b)),((2,a),(2,a)),((2,a),(2,b)), \\ ((2,a),(4,a)),((2,a),(4,b)),((2,b),(2,b)), \\ ((2,b),(4,b)),((3,a),(3,a)),((3,a),(3,b)),((3,a),(4,a)),((3,a),(4,b)), \\ ((3,b),(3,b)),((3,b),(4,b)),((4,a),(4,a)),((4,a),(4,b)),((4,b),(4,b)) \end{array} \right\}$$

$$Lex = \left\{ \begin{array}{c} ((1,a),(1,a)),((1,a),(1,b)),((1,a),(2,a)),((1,a),(2,b)),((1,a),(3,a)), \\ ((1,a),(3,b)),((1,a),(4,a)),((1,a),(4,b)),((1,b),(1,b)),((1,b),(2,a)), \\ ((1,b),(2,b)),((1,b),(3,a)),((1,b),(3,b)),((1,b),(4,a)),((1,b),(4,b)), \\ ((2,a),(2,a)),((2,a),(2,b)),((2,a),(4,a)),((2,a),(4,b)),((2,b),(2,b)), \\ ((2,b),(4,a)),((2,b),(4,b)),((3,a),(3,a)),((3,a),(3,b)),((3,a),(4,a)), \\ ((3,a),(4,b)),((3,b),(3,b)),((3,b),(4,a)),((3,b),(4,b)),((4,a),(4,a)), \\ ((4,a),(4,b)),((4,b),(4,b)) \end{array} \right\}$$

4. Sean (A, R) y (B, S) dos conjuntos ordenados, con $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$

$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$

$S = \{ (a, a), (a, b), (b, b) \}$

Halla $(A \times B, Prod)$ y $(A \times B, Lex)$

Sol.: $A \times B = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

$$Prod = \left\{ \begin{array}{c} \big((1,a),(1,a)\big),\big((1,a),(1,b)\big),\big((1,a),(2,a)\big),\big((1,a),(2,b)\big),\big((1,a),(3,a)\big), \\ \big((1,a),(3,b)\big),\big((1,b),(1,b)\big),\big((1,b),(2,b)\big),\big((1,b),(3,b)\big),\big((2,a),(2,a)\big), \\ \big((2,a),(2,b)\big),\big((2,a),(3,a)\big),\big((2,a),(3,b)\big),\big((2,b),(2,b)\big), \\ \big((2,b),(3,b)\big),\big((3,a),(3,a)\big),\big((3,a),(3,b)\big),\big((3,b),(3,b)\big), \end{array} \right\}$$

$(1,a)\ Lex\ (1,b)\ Lex\ (2,a)\ Lex\ (2,b) Lex\ (3,a) Lex\ (3,b)$

5. Sea $S = \{1,2,3,4\}$. Respecto al orden lexicográfico basado en el orden usual " $\leq$ ",
   a) Encuentra todos los pares en $S \times S$ relacionados con (2,3).
   b) Encuentra todos los pares en $S \times S$ con los que está relacionado (3,1).
   c) Dibuja el diagrama de Hasse de $(S \times S\ ,\ \leq_{Lex})$

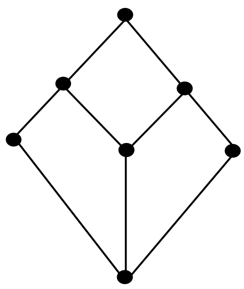
Sol.: a) Pares relacionados con (2,3): $\{\,(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3)\}$

b) Pares con los que está relacionado (3,1):
$\{\,(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

$c)$ $(1,1)\ Lex\ \ (1,2)\ Lex\ (1,3)\ Lex\ (1,4)\ Lex\ (2,1), Lex\ (2,2)\ Lex\ (2,3) Lex\ (2,4) Lex$
$(3,1)\ Lex\ \ (3,2)\ Lex\ (3,3)\ Lex\ (3,4)\ Lex\ (4,1), Lex\ (4,2)\ Lex\ (4,3) Lex\ (4,4)$

Es un orden total, por lo que el diagrama de Hasse es una cuerda vertical

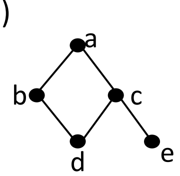
6. ¿Es un retículo distributivo el definido por el siguiente diagrama de Hasse?



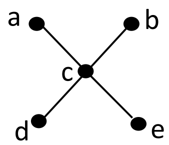
Sol.: NO, ya que contiene un subretículo de una de las dos formas estándar de retículos que no son distributivos

7. Halla los elementos maximales, minimales, máximo y mínimo (si los hay) para los siguientes conjuntos con el orden dado por el diagrama de Hasse:

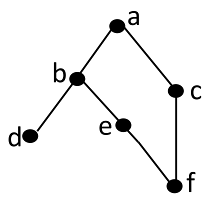
a)



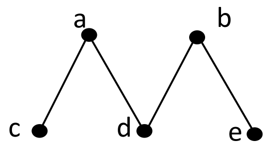
b)



c)



d)



Sol.: a) Maximales= { a} Minimales= {d, e} Máximo= a Mínimo no existe

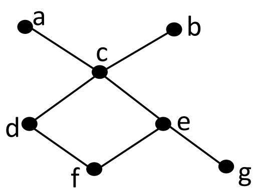
b) Maximales= { a, b} Minimales= {d, e} Máximo no existe Mínimo no existe

c) Maximales= { a } Minimales= {d, f} Máximo = a Mínimo no existe

d) Maximales= { a, b} Minimales= {c, d, e} Máximo no existe Mínimo no existe

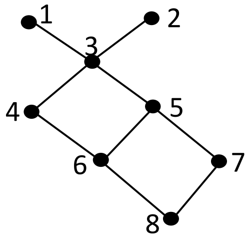
8. Halla cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo (si los hay) del conjunto B en cada uno de los siguientes casos:

a)



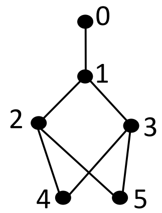
$B = \{c, d, e\}$

b)



$B = \{4, 5, 6\}$

c)



$B = \{2, 3, 4\}$

Sol.: a) C. superiores={a,b,c} C. inferiores={f} Supremo=c Infimo=f

b) C. superiores={1, 2, 3} C. inferiores={6,8} Supremo=3 Infimo = 6

c) C. superiores={0, 1} C. inferiores={4} Supremo=1 Infimo=4

9. Representa el diagrama de Hasse de los siguientes conjuntos ordenados, y halla los elementos notables de los subconjuntos señalados:

a) $(D_{60}\ ,\ /\ )$, $A = \{2, 5, 6, 10, 12, 30\}$ y $B = \{2, 3, 6, 10, 15, 30\}$

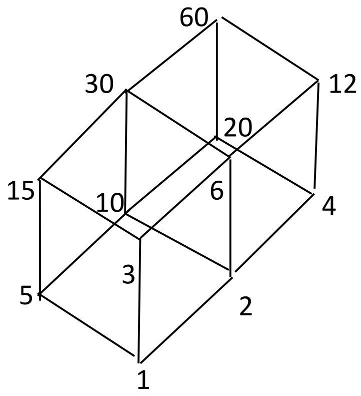
b) $(D_{48}\ ,\ /\ )$, $A = \{2, 4, 6, 12\}$ y $B = \{3, 6, 8, 16\}$

c) $(D_{40}\ ,\ /\ )$, $A = \{4, 5, 10\}$ y $B = \{2, 4, 8, 20\}$

Sol.: a) $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ Por tanto, $|D_{60}| = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$

$D_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\ \}$

M

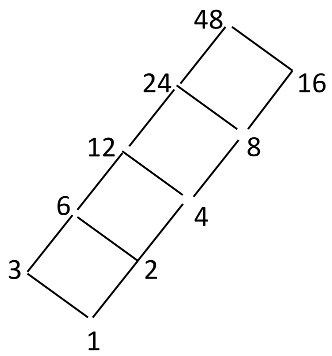


Maximales (A)={ 12, 30} Máximo(A) no existe
Minimales (A)= { 2, 5} Mínimo (A) no existe
C. Superiores (A)={60} Supremo (A) = 60
C. Inferiores (A)= {1} Infimo (A)=1

Maximales (B)={30} Máximo(B)=30
Minimales (B)= { 2, 3} Mínimo (B) no existe
C. Superiores (B)={30, 60} Supremo (B) = 30
C. Inferiores (B)= {1} Infimo (B)=1

b) $48 = 2^4 \cdot 3$ Por tanto, $|D_{48}| = 5 \cdot 2 = 10$

$D_{48} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$ $A = \{2, 4, 6, 12\}$ $B = \{3, 6, 8, 16\}$

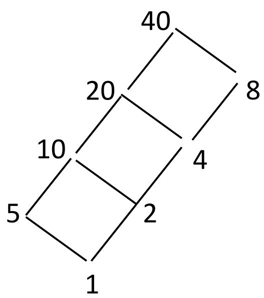


Maximales (A)= {12} Máximo(A) = 12
Minimales (A)= { 2 } Mínimo (A) = 2
C. Superiores (A)={12, 24, 48} Supremo (A) = 12
C. Inferiores (A)= {1, 2} Infimo (A)=2

Maximales (B)={6, 16} Máximo(B) no existe
Minimales (B)= { 3, 8 } Mínimo (B) no existe
C. Superiores (B)={48} Supremo (B) = 48
C. Inferiores (B)= {1} Infimo (B)=1

c) $40 = 2^3 \cdot 5$ Por tanto, $|D_{40}| = 4 \cdot 2 = 8$

$D_{40} = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$ $A = \{4, 5, 10\}$ y $B = \{2, 4, 8, 20\}$

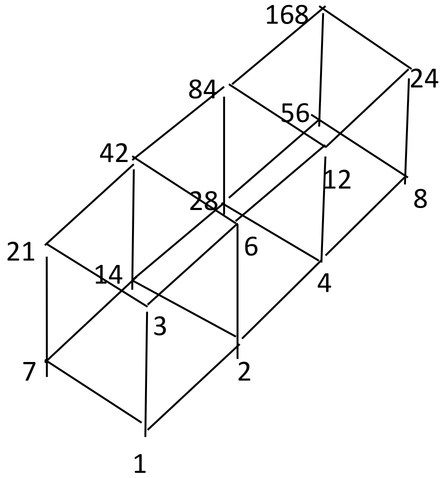


Maximales (A) = {4, 10 } Máximo(A) no existe
Minimales (A)= { 4, 5 } Mínimo (A) no existe
C. Superiores (A)={20, 40} Supremo (A) = 20
C. Inferiores (A)= {1} Infimo (A)=1

Maximales (B)={8, 20} Máximo(B) no existe
Minimales (B)= { 2 } Mínimo (B) = 2
C. Superiores (B)={40} Supremo (B) = 40
C. Inferiores (B)= {1, 2} Infimo (B)=2

10. Representa el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(D_{168}, /)$. Si $A = \{4, 6, 12\}$, halla los elementos maximales de A, y las cotas superiores e inferiores, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo de A en D_{168}.

$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$, $|D_{168}| = 16$ $D_{168} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 14, 12, 21, 24, 28, 42, 56, 84, 168\}$



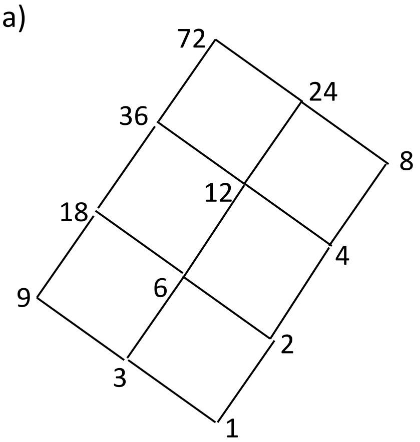
Maximales (A)={ 12} Máximo(A) = 12
Minimales (A)= { 4, 6} Mínimo (A) no existe
C. Superiores (A)={12, 24, 84, 168} Supremo (A) = 12
C. Inferiores (A)= {2,1} Infimo (A)=2

11. Sea D_{72} el conjunto de todos los divisores de 72, y $/$ la relación de divisibilidad a/b si y sólo si 'a divide a b' .

a) Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(D_{72}\ ,\ /)$.
b) Sea $B = \{9, 12, 36\}$. Encuentra cotas superiores, inferiores, supremo, ínfimo, maximales, minimales, máximo y mínimo, si existen, en B.
c) Encuentra, si existe, el complementario de 9 y el de 18 en $(D_{72}\ ,\ /)$.
d) Razona si $(D_{72}\ ,\ /)$ es un álgebra de Boole.

Sol.: $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $|D_{72}| = 12$ $D_{72} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$

a)



b) $B = \{9, 12, 36\}$

C. Superiores={ 36,72} Supremo = 36

C. Inferiores ={ 3, 1} Infimo =3

Maximales= { 36 } Máximo = 36

Minimales = {9, 12} Mínimo no existe

c) 9' = 8 18' no existe
d) No es un álgebra de Boole porque no es un retículo complementario

12. Halla, si los hay, los elementos maximales, minimales, máximo y mínimo para los siguientes conjuntos ordenados:

$(\mathcal{P}(X),\ \subseteq)$; $\big((0,1),\ \leq\big)$; $\big((0,1),\ \geq\big)$; $(\mathbb{N}\ ,\ /\ )$; $(\mathbb{N}-\{1\}\ ,\ /\ )$.

Sol.: $(\mathcal{P}(X),\ \subseteq)$: Maximales ={X} Máximo = X Minimales = { ∅ } Mínimo = ∅

$\big((0,1),\ \leq\big)$: Maximales =∅ ; Máximo no existe; Minimales = ∅ ; Mínimo no existe

$\big((0,1),\ \leq\big)$: Maximales =∅ ; Máximo no existe; Minimales = ∅ ; Mínimo no existe

$(\mathbb{N}\ ,\ /\ )$: Maximales =∅ ; Máximo no existe; Minimales = $\{\ 1\ \}$; Mínimo = 1

$(\mathbb{N}-\{1\}\ ,\ /\ )$: Maximales =∅ ; Máximo no existe;

Minimales = $\{números\ primos\ \}$; Mínimo no existe

13. En cada uno de los casos siguientes señala si el conjunto X tiene o no una cota inferior en $\mathbb{Z}$, y si tiene alguna halla su ínfimo si existe.

    a) $X = \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ \ x^2 \leq 16\}$

    b) $X = \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ \ x = 2y\ \ \ para\ algún\ \ y \in \mathbb{Z}\}$

    c) $X = \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ \ x^2 \leq 100x\}$

Sol.: a) C. Inferiores = $\{x \in \mathbb{Z};\ \ \ x \leq\ -4\}$ Ínfimo = -4

b) C. Inferiores = ∅

c) $X = \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ \ \ x = 0\ \text{ ó }\ (\ x > 0\ \ y\, x\ \leq 100\ )\ \text{ ó }\ (x\ < 0\ \ \ y\ \ \ x \geq 100)\ \} =$
$\{x \in \mathbb{Z}\ ;\ \ 0\ \leq x \leq 100\}$

C. Inferior: $\{x \in \mathbb{Z}\ ;\ \ \ x \leq 0\ \ \}$ Ínfimo = 0

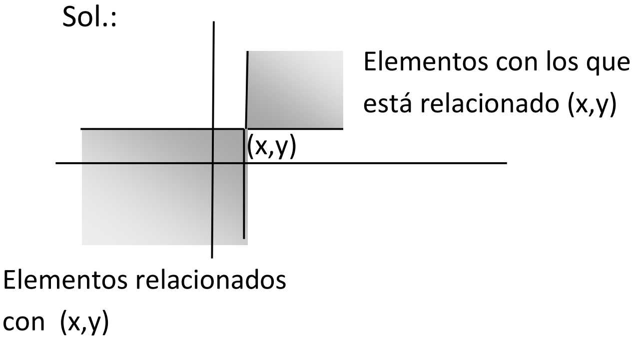
14. En $(\mathbb{N}\ ,\ /\ ) \times (\mathbb{N}\ ,\ /\ )$ se considera el orden lexicográfico. Determina, si existen, las cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo del conjunto $A = \{(2,1), (3,4)\}$.

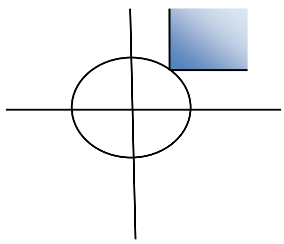
Sol.: C. Superiores = $\{\ (6n, m);\ \ n, m\ \in\ \mathbb{N}\ \}$ Supremo=$(6,1)$

C. Inferiores = $\{(1,\ n);\ \ \ \ \ n \in\ \mathbb{N}\ \}$ Infimo no existe

15. En $\mathcal{R}^2$ se considera la relación de orden $(x, y) < (x', y') \Leftrightarrow x \leq x'\ e\ \ y \leq y'$. Halla los elementos maximales y minimales, supremo e ínfimo de $C = \{(x, y)\ ;\ \ x^2 + y^2\ = 1\}$.

Sol.:





Maximales de (C) $= \{(x, y)\ \in C\ \ ;\ \ x \geq 0\ ,\ \ y \geq 0\}$ Máximo no existe

Minimales de (C) $= \{(x, y)\ \in C\ \ ;\ \ x \leq 0\ ,\ \ y \leq 0\}$ Mínimo no existe

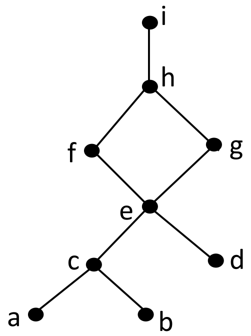
Cotas superiores de (C) $= \{(x, y)\ \in \mathbb{R}^2\ \ ;\ \ x \geq 1\ ,\ \ y \geq 1\}$ Supremo =(1,1)

Cotas inferiores de (C) $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x \leq -1 \, , \; y \leq -1\}$ Ínfimo=(-1,-1)

16. Se considera en $D_{48} \times \mathbb{N}$ el orden lexicográfico correspondiente a tomar el orden divisibilidad en el primer factor y el orden usual en el segundo factor. Sea $S = \{(2,2),(2,3),(3,2),(6,3),(6,1),(4,2)\}$. Halla, si existen, las cotas superiores e inferiores, elementos maximales y minimales, máximo, mínimo, supremo e ínfimo de S.

Sol.: Cotas superiores= $\{(12,k),(24,n),(48,m); \; k,n,m \in \mathbb{N}\}$ Supremo =$(12,1)$
Cotas inferiores=$\{(1,n) \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ Infimo no existe
Maximales=$\{(6,3)\,,(4,2)\}$ Máximo no existe
Minimales = $\{(2,2)\,,(3,2)\}$ Mínimo no existe

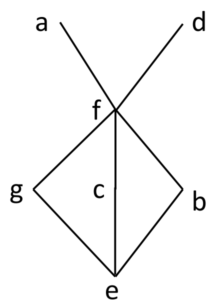
17. Dado el orden parcial del siguiente diagrama de Hasse, obtén un orden total que lo contenga. ¿Cuántos pueden obtenerse?



Sol.: $a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq g \leq f \leq h \leq i$
Número de formas = 16

18. Sea $T = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ la lista de tareas para realizar un trabajo, de las que se sabe que unas preceden a otras de la siguiente forma:
$f \leq a, \quad f \leq d, \quad e \leq b, \quad c \leq f, \quad e \leq c, \quad b \leq f, \quad e \leq g, \quad g \leq f$
Halla el orden parcial. ¿Qué tareas pueden realizarse independientemente? Construye un orden si el trabajo lo realizad sólo una persona.

Sol.:



Se pueden realizar independientemente la 'a' y la 'd'
Y también la 'g', la 'c', y la 'b'

$e \leq g \leq b \leq c \leq f \leq a \leq d$

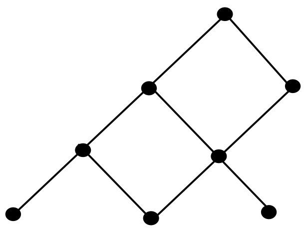
19. En $(D_{10}\,,\ /\ ) \times (D_{18}\,,\ /\ )$ se considera el orden lexicográfico. Halla las cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo, si existen, del subconjunto $S = \{(2,2),(2,3)\}$. Dibuja el diagrama de Hasse.
Se define la aplicación $f: D_{10} \times D_{18} \longrightarrow D_{180}$ por $f(a,b) = ab$. ¿Es f inyectiva? ¿Es f suprayectiva?

Sol.: $D_{10} \times D_{18} = \left\{ \begin{array}{c} (1,1),(1,2),(1,3),(1,6),(1,9),(1,18), \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,6),(2,9),(2,18), \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,6),(5,9),(5,18), \\ (10,1),(10,2),(10,3),(10,6),(10,9),(10,18) \end{array} \right\}$

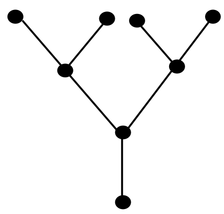
Cotas superiores (S)= $\{(2,6),(2,18),(10,m);\ ,m \in\ D_{18}\}$ Supremo= (2,6)
Cotas inferiores (S)= $\{(1,n),(2,1);\ \ n \in\ D_{18}\}$ Infimo = (2,1)
No inyectiva, $f(1{,}18) = f(2{,}9)$
SI suprayectiva

20. Estudia cuáles de los siguientes conjuntos ordenados son retículos.

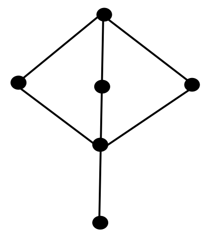
a)



b)



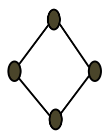
c)



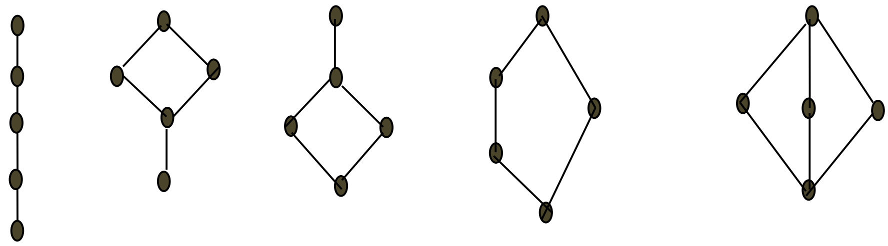
Sol.: Sólo es retículo el c)

21. Obtén los diagramas de Hasse de todos los retículos, salvo isomorfismos, de uno, dos, tres, cuatro y cinco elementos.

Sol.: De un elemento y de dos elementos, trivial, sólo hay uno.
De tres elementos, sólo hay uno, que es una cadena
De cuatro elementos, existen dos:



De cinco elementos



22. Sea $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ la colección de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. ¿Tiene $(\mathcal{F}(\mathbb{N}), \subseteq)$ algún elemento maximal? ¿Tiene algún elemento minimal? ¿Es $(\mathcal{F}(\mathbb{N}), \subseteq)$ un retículo?

Sol.: $(\mathcal{F}(\mathbb{N}), \subseteq)$ no tiene elemento maximal, pero sí tiene minimal que es el conjunto $\emptyset$

Sí es un retículo, porque para cada par de elementos $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$,

$$Supremo(A,B) = A \cup B \quad \text{e} \quad Infimo(A,B) = A \cap B$$

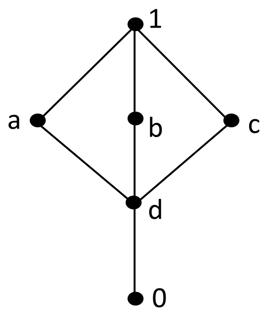
23. Sea $E(\mathbb{N})$ la colección de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ que tienen un número par de elementos. En $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$ se consideran los elementos $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$. Encontrar cuatro cotas superiores para $\{A,B\}$. ¿Tiene $\{A,B\}$ supremo en $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$? ¿Es $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$ un retículo?

Sol.: Cotas superiores para $\{A,B\}$ son

$C = \{1,2,3,4\}$, $D = \{1,2,3,8\}$, $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,\}$, $F = \{1,2,3,5,9,20\}$

$\{A,B\}$ no tiene supremo en $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$, y por tanto, $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$ no es un retículo

24. Estudia si en el siguiente retículo se verifica la igualdad $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.



No se verifica, ya que $a \vee (b \wedge c) = a \vee d = a$, pero $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = 1 \wedge 1 = 1$.

25. Encuentra el complementario de cada elemento en $(D_{42}, /)$, $(D_{45}, /)$ y $(D_{105}, /)$. ¿Son álgebras de Boole estos retículos?

Sol.: $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$; SI es un álgebra de Boole; $|D_{42}| = 8$; $D_{42} = \{1,2,3,6,7,14,21,42\}$

$1' = 42$, $2' = 21$; $3' = 14$; $6' = 7$

$45 = 3^2 \cdot 5$; NO es un álgebra de Boole; $|D_{45}| = 6$; $D_{45} = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

$1' = 45$, $3' = \nexists$; $5' = 9$; $15' = \nexists$

$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$; SI es álgebra de Boole; $|D_{105}|$=8 ; $D_{105} = \{1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 42\}$

$1' = 105$, $3' = 35$; $5' = 21$; $7' = 15$

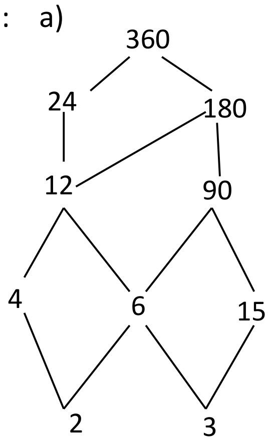
26. Se considera el conjunto $A = \{2, 3, 4, 6, 12, 15, 24, 90, 180, 360\}$ y la relación de orden de divisibilidad.

a) Representa el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(A, \ /\ )$.

b) ¿Es $(A, \ /\ )$ un retículo?

c) Obtén, si existen, las cotas inferiores, cotas superiores, ínfimo, supremo, mínimo, máximo, elementos minimales y maximales del subconjunto $B = \{2, 3, 4, 6, 12, 180\}$.

Sol.: a)



b) NO, {2,3} no tiene infimo

c) Cotas superiores (B)= $\{180, 360\}$

Supremo(b)=180

Cotas Inferiores (B)= no existen

Ínfimo no existe

Maximales (B) $= \{\ 180\}$

Máximo (B)= 180

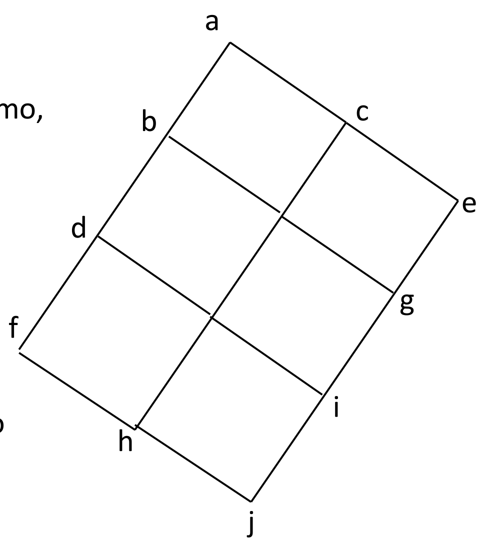
Minimales (B) $= \{2, 3\}$

Mínimo (B) no existe

27. (Examen enero 2016)

a) Sea D_{63} el conjunto de todos los divisores de 63, y $\ /\ $ la relación de divisibilidad dada por $a\ /\ b$ si y sólo si "a divide a b". Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(D_{63}, \ /)$.

b) Considera el conjunto ordenado A de la figura.



i) Obtén las cotas superiores e inferiores, supremo, Ínfimo, maximales, minimales, máximo y mínimo del conjunto $B = \{b, c, d\}$.

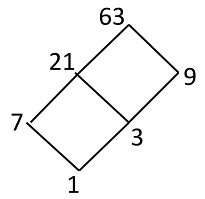
ii) ¿Es A un retículo?

iii) Sea A' el conjunto ordenado cuyo diagramaa de Hasse es el mismo que el de A, pero eliminando las aristas que van de *b* a *g* y de *d* a *i* . ¿Es A' un retículo?

iv) ¿Es A' complementario? En caso de que no lo sea, da un elemento que no tenga complementario y otro que sí lo tenga, indicando un complementario.

v) ¿Es A' distributivo?

Sol.: a) $63 = 3^2 \cdot 7$; $|D_{63}| = 6$; $D_{63} = \{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$

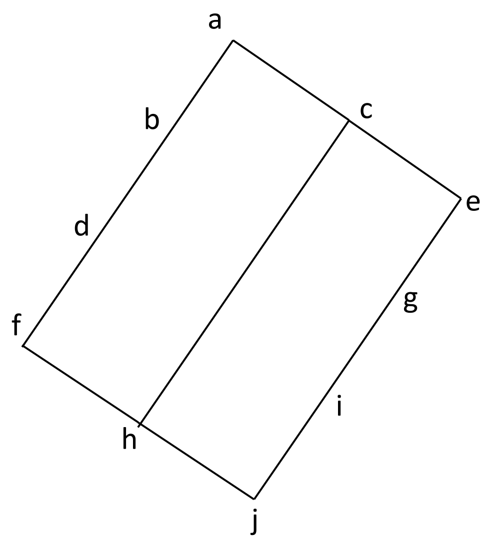


b)

i) C. Superiores $(B) = \{a\}$ Supremo $(B) = a$
C. Inferiores $(B) = \{h, i, j\}$ Infimo no existe
Maximales $(B) = \{b, c\}$ Máximo no existe
Minimales $(B) = \{c, d\}$ Mínimo no existe

ii) No es un retículo, ya que, por ejemplo, el conjunto de dos elementos $\{h, i\}$ tienen como cotas superiores $\{a, b, c, d\}$, pero no tiene supremo

iii) A' SI es un retículo, ya que todo par de elementos tienen supremo e ínfimo.



iv) No es un retículo complementario.
Los elementos h y c no tienen complementario.
El elemento f tiene varios complementarios: e, g, i

v) No es distributivo. Por ejemplo, el subretículo formado por los elementos { j, h ,c, i, g } no es distributivo. En particular
$$g \wedge (h \vee i) \neq (g \wedge h) \vee (g \wedge i)$$

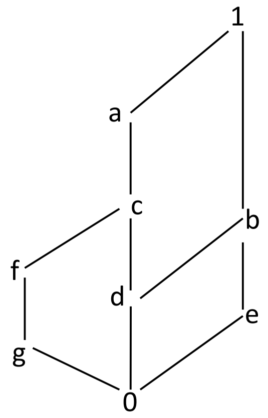
28. (Examen noviembre 2016)

Considera el conjunto ordenado A del dibujo.

a) Sea $B = \{a, d, f\}$, encuentra todos los elementos notables de B (cotas superiores e inferiores, supremo, ínfimo, máximo y mínimo, maximales y minimales, si los hay).

b) Encuentra, si existen, todos los elementos complementarios de b y c.

c) Razona si A es un álgebra de Boole



Sol.: a) C. superiores= $\{a, 1\}$ Supremo= a C. Inferiores = $\{ 0 \}$ Ínfimo = 0

Maximales= $\{a\}$ Máximo= a Minimales= $\{d, f\}$ Mínimo no existe

b) $b' = \{f, g\}$ $c' = e$

c) No es un álgebra de Boole: no es distributivo, y b tiene más de un complementario

29. (Examen noviembre 2016)

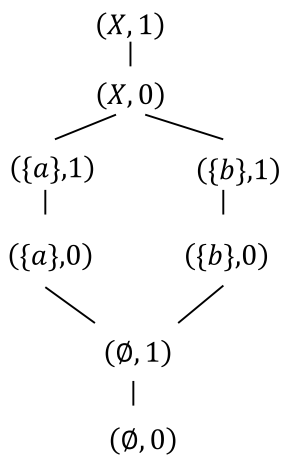
Sean $(\wp(X), \subseteq)$ y $(Y, \leq)$ dos conjuntos ordenados, con $X = \{a, b\}$, $Y = \{0,1\}$, y donde $\wp(X)$ es el subconjunto de las partes de X .

a) Calcula el cardinal del producto cartesiano $\wp(X) \times Y$.

b) Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(\wp(X) \times Y\,, \leq_{Lex})$, donde $\leq_{Lex}$ es la relación "orden lexicográfico".

Sol.: a) $Card\big(\wp(X)\big) = 2^2$, y por tanto $Card(\wp(X) \times Y\ ) = 8$

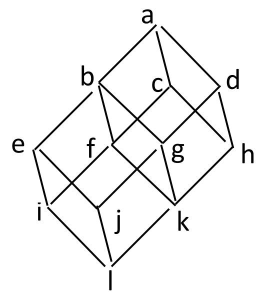
b) $\wp(X) \times Y = \{ (\emptyset, 0), (\emptyset, 1), (\{a\}, 0), (\{a\}, 1), (\{b\}, 0), (\{b\}, 1), (X, 0), (X, 1)\}$



30. (Examen noviembre 2012)

Dado el conjunto ordenado $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$

Cuyo diagrama de Hasse es el de la figura y el subconjunto $B = \{ b, e, f, k\}$



a) Hallar las cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo de B en A

b) Hallar los elementos maximales y minimales, máximo y mínimo de B.

c) Hallar $\inf\{f, g\}$ y $\sup\{f, g\}$. ¿Es A un retículo?

Sol.: a) C. Superiores= $\{b, a\}$; Supremo $= b$; C. Inferiores= $\{l\}$; Infimo $= l$

b) Maximales= $\{b\}$; Máximo $= b$; Minimales= $\{e, k\}$; Mínimo no tiene

c) $\inf\{f, g\} = k$; $\sup\{f, g\} = b$. SI es un retículo, porque todo par de elementos tienen supremo e ínfimo.

31. (Examen enero 2017)

Sea D_{270} el conjunto de los divisores positivos de 270. Se pide:

a) Sabiendo que una relación en D_{270} es un subconjunto del producto cartesiano D_{270} x D_{270} , ¿cuál es el cardinal del conjunto de todas las relaciones distintas en D_{270} ?

b) Dibuja el diagrama de Hasse de D_{270} con la relación de orden de divisibilidad.

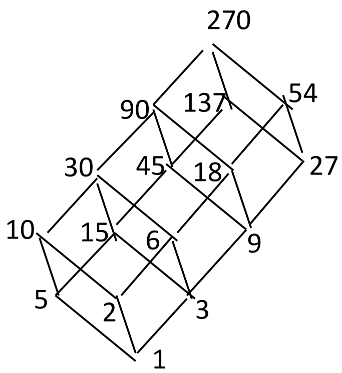
c) Encuentra todos los elementos de D_{270} que tienen complementario. Razona si D_{270} es Álgebra de Boole.

d) Sea el conjunto C = D_{270} – {45, 54} con la relación de orden de divisibilidad. Calcula si existe el sup {6,27} en C. Razona si C es un retículo.

Sol.: a) $270 = 2 \cdot 5 \cdot 3^3$; $|D_{270}| = 16$; $|D_{270} \times D_{270}| = 16^2$

Número de subconjuntos de $D_{270} \times D_{270}$, es $2^{|D_{270} \times D_{270}|} = 2^{(16^2)}$

b)



c) $1' = 270$; $2' = 137$; $5' = 54$; $27' = 10$; No es un álgebra de Boole: No todos los elementos tienen complementario; por ejemplo el 9 no tiene complementario.

d) En C = D_{270} – {45, 54} el Sup {6,27} = 270

No es un retículo, porque no existe Sup {9, 15}. En efecto las cotas superiores de este par de elementos son {90, 137, 270} , pero ninguna de ellas es menor que las otras dos.