Tema 2. Aritmética Entera

2.1. Los números enteros

→ Definiciones: Números enteros. $\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$

→ Operaciones en $\mathbb{Z}$: Suma y Producto.

→ Propiedades de las operaciones: asociativa, conmutativa, existencia de elemento neutro, existencia de elementos opuestos, distributiva, cancelativa.

→ Definición de la relación de orden total $\leq$ en $\mathbb{Z}$. Compatibilidad del orden total con las operaciones.

→ Axioma de buena ordenación.

2.2. Principio de Inducción

→ Principio de Inducción.

→ Principio de Inducción fuerte.

2.3. Divisibilidad

→ Definición de la relación de divisibilidad " / " . Propiedades.

→ Consecuencia del axioma de buena ordenación.

→ Teorema de la División Entera: Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, existen unos únicos $q, r \in \mathbb{Z}$, tales que $a = b \cdot q + r$, con $0 \leq r < b$.

2.4. Sistemas de numeración

→ Teorema: Dado $b \in \mathbb{N}$, con $b \geq 2$, cualquier $n \in \mathbb{N}$ se escribe de forma única como $n = \sum_{j=0}^{k} r_j\, b^j$, con $0 \leq r_j < b$, para todo $j \in \{0, 1, \dots, k\}$ y $r_k \neq 0$. En este caso se dice que n está expresado en base b , y se escribe $n = (r_k r_{k-1} \dots r_0 r_1)_b$.

→ Representación de enteros en el computador

2.5. Algoritmo de Euclides

→ Definición de máximo común divisor de dos números enteros.

→ Teorema: Sean $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$, tales que $a = b \cdot q + r$.
Entonces $mcd(a, b) = mcd(b, r)$.

→ Algoritmo de Euclides para la obtención del máximo común divisor de dos números enteros.

→ Teorema de Bézout.

→ Definición de números enteros primos entre sí.

→ Lema de Euclides: Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tales que $a\ /\ b \cdot c$ y $mcd(a, b) = 1$.
Entonces $a\ /\ c$.

→ Proposición: Si se dividen dos números enteros por su mcd , resultan dos números primos entre sí.

2.6. Ecuaciones Diofánticas

→ Definición de ecuación diofántica.

→ Teorema: La ecuación diofántica $a \cdot x + b \cdot y = c$ tiene solución en $\mathbb{Z}$ si y sólo si $d = mcd(a, b)/c$.
→ Obtención de todas las soluciones de una ecuación diofántica.

2.7. Números Primos

→ Definición de número primo.

→ Proposición: Si p es un número primo y $p/a \cdot b$, entonces p/a o p/b.

→ Teorema fundamental de la aritmética (Euclides): Todo $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ es primo o se puede expresar de forma única como producto de números primos, salvo el orden de los factores.

→ Teorema de Euclides: Existen infinitos números primos.

→ Proposición de Fermat: Si n es un número compuesto, entonces tiene un divisor primo $p \leq \sqrt{n}$.

→ Consecuencia: Sea $n \in \mathbb{N} - \{1\}$. Si para cualquier número primo $p \leq \sqrt{n}$ se cumple que p no divide a n, entonces n es primo.

→ Método de la "criba de Eratóstenes", para obtener los números primos menores que n.

Hoja 5. Aritmética Entera

Principio de Inducción

1. Demuestra, por inducción, que para todo $n \in \mathbb{N}$

   a) $3 + 7 + 11 + \cdots + (4n - 1) = n(2n + 1)$

   b) $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n + 1) = n(n + 2)$

   c) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n + 1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$

   d) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n \cdot (n + 2) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+7)}{6}$

   e) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4n-3) \cdot (4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$

   f) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$

   g) $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$ g) $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

   h) $\sum_{k=1}^{n} 2k = n^2 + n$ i) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   j) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ k) $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$

   l) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} = (n - 1) \cdot 2^n + 1$

2. Demuestra, por inducción, que

   a) $2^n > n + 1, \ \forall\, n \geq 2$ c) $2n + 1 < n^2, \ \forall\, n \geq 3$

   b) $n! \geq 2^n, \ \forall\, n \geq 4$

3. Se define la sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de la siguiente forma:

   i) $t_1 = 1, \ t_2 = 2, \ t_3 = 3$

   ii) $t_n = t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3}, \ \forall\, n \geq 4.$

   Demuestra que $t_n < 2^n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

4. Prueba que para todo $n \in \mathbb{N}$,

   a) $n^3 - n$ es múltiplo de 3.

   b) $n^2 + 3\mathrm{n}$ es par.

   c) $n^3 + 3n^2 + 2n = n\,(n + 1)(n + 2)$ es múltiplo de 6.

   d) $4^{2n} - 1$ es divisible por 15.

5. Prueba que si $n \geq 14$, entonces n se puede expresar como suma de treses y ochos.

Sistemas de Numeración

6. Obtén 109_{10} en base 2, y 110110101_2 en base 10.
7. Obtén 367_8 en bases 2, 5 y 7.
8. Halla la representación en las bases 2, 7 y 11 de los siguientes números expresados en base decimal: 137, 6243, 762, 1995.
9. Halla la representación en base 10 de 11011101_2 , 4165_7 , 1995_{11} , 1213_7 , 1213_5.
10. Obtén 367_8 , 657_8 en bases 2, 7.
11. Obtén 6243_{10} , 1995_{10} en base hexadecimal (base 16).
12. Opera a) $(132_5 \times 24_5)$ b) $(132_5 + 310_5 + 12_5)$
13. Sabiendo que x_m significa que el número natural x está escrito en base m,
    a) Demuestra que $121_m = (m+1)^2{}_{10}$ para $m \geq 3$.
    b) Expresa 169_m en base 10 para $m \geq 10$.
14. Halla x en las expresiones $331_x = 56_{11}$, $274_8 = x_2$.

Aritmética Entera

15. Halla el mcd (8184,756), aplicando el Algoritmo de Euclides.

16. Usa el algoritmo de Euclides para calcular $d = mcd(a, b)$, y encuentra x e y tales que $d = ax + by$.
    a) $a = 1312,\ b = 800$ b) $a = 322,\ b = 406$

17. Halla las soluciones enteras de la ecuación
    a) $150\,x + 100\,y = 200$ b) $84\,x - 30\,y = 60$

18. Se dispone de un suministro ilimitado de agua, un gran cubo con un desagüe y dos garrafas que contienen 7 y 9 litros respectivamente, ¿cómo podría ponerse un litro de agua en el cubo?

19. Una comitiva de 12 personas acarrea 12 panes: cada hombre lleva dos panes; cada mujer, medio pan, y cada niño un cuarto de pan. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños componen la comitiva?

20. En un colegio se quieren equipar las aulas con un ordenador y una pizarra digital por aula. Suponiendo que se tiene un presupuesto de 6750 €, que cada ordenador cuesta 450 € y cada pizarra digital 825€, ¿cuántos ordenadores y pizarras se pueden comprar como máximo agotando el presupuesto?

21. Calcula las soluciones enteras de las siguientes ecuaciones diofánticas:
$a)\ 28x + 36y = 44$ $b)\ 66x + 550y = 88$ $c)\ 966x + 686y = 70$
$d)\ 343x + 140y = 70$ $e\ )\ 21x + 9y = 114$

22. Determina los valores de $c \in \mathbb{Z}^+$, $10 < c < 20$, para los que la ecuación diofántica $84x + 990y = c$ tiene solución y determínala, en su caso.

23. Determina los valores de $c \in \mathbb{Z}^+$, $c < 50$, para los que la ecuación diofántica $912x + 168y = c$ tiene solución y determínala, en su caso.

24. Se necesita cubrir una pared que mide 3,5 m^2 con baldosas enteras de dos tamaños diferentes, unas mide $19 \times 70\ cm^2$ y otras miden $17 \times 35\ cm^2$. ¿Cuántas baldosas de cada tipo serán necesarias como mínimo?

25. Un agente de Cambio y Bolsa tiene invertido dinero en acciones de Azucarera y Repsol. Las acciones d Azucarera se cotizan a 89 euros y las de Repsol a 614 euros cada una. Necesita hacer una transacción para disponer exactamente de 1.000 euros en efectivo. ¿Puede hacerlo comprando acciones de Repsol y vendiendo acciones de Azucarera solamente? En caso afirmativo, decir cuántas acciones de cada tipo, como mínimo, comprará y venderá.

26. Un alumno quiere renovar su vestuario comprando camisetas y pantalones. Las camisetas valen 18 € cada una y los pantalones 33 €. Si quiere gastar exactamente 639 € ¿cuántas camisetas y pantalones puede comprar? Describe todas las formas distintas en que puede hacerlo.

27. En Universilandia, a los estudiantes que copian un examen se les condena a 133 años de cárcel, y a los que copian una práctica se les condena a 84 años. En el caso de que se les encuentre culpables de más de una copia se les condena a 133 años. En la cárcel de Universilandia hay 15 guardias y un número indeterminado de estudiantes condenados por copiar. Se sabe que el número total de años de condena de estos últimos es de 3605 años. ¿Cuántos estudiantes hay presos?

28. Un tren de largo recorrido formado por menos de 10 vagones cuya capacidad es de 343 plazas cada uno, realiza un viaje lleno de pasajeros. Por una avería en las vías debe parar su marcha hasta que se subsane el problema. Se les ofrece a los pasajeros la posibilidad de continuar el viaje en autobús hasta su destino. Sabiendo que 84 personas rechazan esta

posibilidad y prefieren esperar, y que el resto completan algunos autobuses de 70 plazas, ¿cuántos autobuses se completan? ¿cuántas personas viajaban en el tren?

29. Un turista tiene 1000 coronas checas y quiere cambiar ese dinero en una cantidad exacta de libras chipriotas y zlotys polacos. El cambio que le ofrece una cierta Oficina de Cambio es el siguiente: un zloty polaco=13 coronas checas y una libra chipriota=18 coronas checas. La oficina no proporciona fracciones de ninguna moneda, ¿de cuántas formas diferentes puede hacerlo?

30. Halla todos los múltiplos de 28 cuyas dos últimas cifras sean 16.

Números primos

31. Estudia si son o no primos los números 811, 493 y 911.

32. Halla todos los números primos p entre 100 y 300.

33. Utiliza la identidad $2^{rs} - 1 = (2^r - 1)(2^{(s-1)r} + 2^{(s-2)r} + \cdots + 2^r + 1)$ para demostrar que si $2^n - 1$ es primo, entonces n es primo.

34. Halla el valor de un entero positivo n con las siguientes propiedades:
    i) n no contiene cuadrados (es decir, no hay factores repetidos en la factorización de n en números primos).
    ii) Para cada primo p se tiene que $p/n \Leftrightarrow (p-1)/n$.

35. Estudia si son ciertas las siguientes afirmaciones:
    a) $\forall\, m \in \mathbb{Z}$, $2m$ y $4m+3$ son primos entre sí.
    b) $\forall\, m \in \mathbb{Z}$, $2m+1$ y $3m+2$ son primos entre sí.

36. Demuestra que si n es un entero positivo, ninguno de los n enteros consecutivos empezando por $(n+1)!\, + 2$ es primo.

37. Demuestra que si p es primo distinto de 2 y de 5, entonces $p^2 - 1$, ó $p^2 + 1$ es divisible por 10.

Otros Ejercicios

38. Si a y b son enteros tales que $mcd(a, b) = 1$, demuestra que

a) $mcd(a+b, a-b) = 1$ ó 2 b) $mcd(2a+b, a+2b) = 1$ ó 3

39. Demuestra que el cuadrado de todo número entero es de la forma $4k$ ó $4k+1$. Demuestra que el cubo de todo número entero es de la forma $9k$ ó $9k+1$ ó $9k+8$.

40. Si $a \in \mathbb{Z}$ y no es múltiplo de 2 ni de 3, demuestra que $24/(a^2-1)$.

41. Demuestra que si 5 no divide a n, entonces 5 divide a $n^8 - 1$.

42. Halla el valor de un entero positivo n con las siguientes propiedades:

    $i)$ n no contiene cuadrados (es decir, no hay factores repetidos en la factorización de n en números primos)

    $ii)$ Para cada primo p se tiene que $p/n \Leftrightarrow (p-1)/n$

43. Demuestra que si $a, b \in \mathbb{Z}^+$, entonces se tiene que $2^a - 1$ y $2^{a(mod\ b)} - 1$ son congruentes $mód\ 2^b - 1$.
    Usa este resultado para comprobar que $mcd(2^a-1, 2^b-1) = 2^{mcd(a,b)} - 1$.

44. Demuestra que todo número primo $p > 3$ se puede escribir de la forma
    a) $4n+1$ ó $4n+3$, para algún $n \in \mathbb{N}$ b) $6n+1$ ó $6n+5$, para algún $n \in \mathbb{N}$

45. Demuestra que si n es un entero positivo, ninguno de los n enteros consecutivos empezando por $(n+1)!+2$ es primo.