**MATEMÁTICA DISCRETA I**

**PRIMER CONTROL (SOLUCIONES)**

**Observaciones:**

- Sólo se valorarán aquellas respuestas que justificadamente utilicen los métodos desarrollados en esta asignatura.
- No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.

***************************************************************************************************

**Ejercicio 1 (10 ptos.)**

a) En el conjunto de los números enteros se define la relación de equivalencia: a R b ⇔ 7 | (b-a).
Dados los subconjuntos de números enteros

| | | | |
|---|---|---|---|
| {...–19,–12,–5,5,12,19...} | {0, 7, 14, 21...} | {...–16, –9, –2, 5, 12, 19...} | {5, 12, 19...} |
| {...–18,–11,–4,4,11,18,...} | {4, 11, 18,...} | {...,–21, –14, –7, 0, 7, 14, 21...} | {...–17, –10, –3, 4, 11, 18,...} |

selecciona el subconjunto asociado a cada una de las clases [5], [4] y [0].

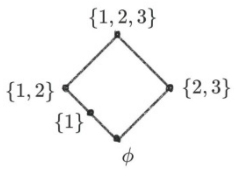
b) Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto $C$ = {∅, {1}, {1, 2}, {2, 3} {1, 2, 3}} con el orden de contenido o igual $\subseteq$. Razona si el conjunto $C$ es un retículo.

c) Demuestra por inducción que $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n = 2^{n+1} - 1$

SOLUCIÓN:

a) [5] = {...-16, -9, -2, 5, 12, 19...}, [4] = {...-17, -10, -3, 4, 11, 18,...}, [0] = {..., -21, -14, -7, 0, 7, 14, 21...}.

b) Es retículo.




c) Si n = 1,

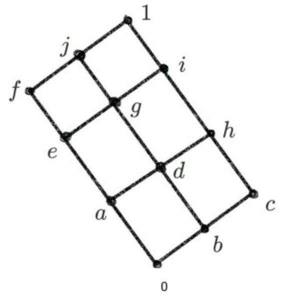
$$\sum_{k=0}^{1} 2^k = 2^2 - 1$$

Supongamos cierto para k = n y sea

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$$

**Ejercicio 2 (10 ptos.)**

Sea $C$ = {0, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, 1} con la relación dada por el siguiente diagrama de Hasse.




Se pide:

a) Halla cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, si los hay, del subconjunto B = {c, g, i} en $C$.

b) Halla los elementos maximales y minimales, máximo y mínimo, si los hay, de B.

c) Calcula el complementario de f en $C$ y encuentra un elemento en $C$ que no tenga complementario.

d) Razona si $C$ es un Álgebra de Boole.

SOLUCIÓN:

a) Cotas superiores B = {1, i}, cotas inferiores B = {b, 0}, supremo B = i , ínfimo B = b en $C$.

b) Elementos maximales B = {i}, minimales B = {c, g}, máximo B = i, mínimo B no existe.

c) Complementario de f = c. Los elementos en $C$ que no tienen complementario son $C$ – {0, 1, c, f}.

d) $C$ no es un Álgebra de Boole porque no es complementario.

**Ejercicio 3 (8 ptos.)**

a) Dibuja el mapa de Karnaugh asociado a la función booleana f que toma valor 1 en el conjunto numérico C = { 1, 3, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 15 } y valor 0 en el conjunto numérico C´ = { 0, 2, 4, 5, 8, 12, 14}.

b) Halla una expresión booleana mínima, en forma de suma de productos, mediante el método de Quine-McCluskey, para la función g que toma el valor 1 en el subconjunto S(g) = {(0001), (0011), (0101), (0111), (1100), (1101), (1110), (1111)} de $B^4$ y 0 en su complementario

SOLUCIÓN:

a) Mapa de Karnaugh asociado a la función f:

| | y | y | y' | y' | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | | | 1 | | t' |
| x | 1 | 1 | 1 | 1 | t |
| x' | | 1 | 1 | 1 | t |
| x' | | 1 | | | t' |
| | z' | z | z | z' | |

b) Método de Quine-McCluskey:

| xyzt | xyzt | xyzt |
|---|---|---|
| 1111 * | 111–* | 11–– |
| ------ | 11–1 * | –1–1 |
| 1110 * | –111 * | ----- |
| 1101 * | ------ | 0––1 |
| 0111 * | 11–0 * | |
| ------ | 110–* | |
| 1100 * | –101 * | |
| 0101 * | 01–1 * | |
| 0011 | 0–11 * | |
| ------ | ------ | |
| 0001 * | 0-01 * | |
| | 00-1 * | |

| | 1111 | 1110 | 1101 | 0111 | 1100 | 0101 | 0011 | 0001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11–– | √ | √ | √ | | √ | | | |
| –1–1 | √ | | √ | √ | | √ | | |
| 0––1 | | | | √ | | √ | √ | √ |

El término correspondiente a –1–1 es redundante. La expresión booleana mínima, en forma de suma de productos, para la función g es: g (x, y, z, t) = x y + x´t

**Ejercicio 4 (12 ptos.)**

a) Felipe, dueño de una pequeña tienda de comunicaciones, empleó 4043 euros en la compra de móviles de dos modelos A y B cuyos precios respectivos eran de 260 y 169 euros unidad. Utilizando el algoritmo de Euclides, averigua cuántos móviles compró de cada modelo.

b) Calcula en $\mathbb{Z}_{507}$ la operación $(1017 + 2^{3123} + 5^{-1})$.

SOLUCIÓN:

a) Si compró $x$ móviles del modelo A, e $y$ móviles del modelo B, se ha de cumplir que:

$$260x + 169y = 4043$$

Se calcula el máximo común divisor de los coeficientes y se comprueba que la ecuación tiene solución: 260 = 169 · 1 + 91, 169 = 91 · 1 + 78, 91 = 78 · 1 + 13, 78 = 13 · 6 + 0. Por tanto, $mcd(260,169) = 13|4043$ ya que $4043 = 13 \cdot 311$, luego la ecuación tiene solución. Se halla una solución particular a partir del algoritmo de Euclides:

$$260 \cdot 2 + 169 \cdot (-3) = 13 \underset{x311}{\Longrightarrow} 260 \cdot 622 + 169 \cdot (-933) = 4043 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 622 \\ y_0 = -933 \end{cases}$$

La solución general es:

$$(x, y) = (622, -933) + \frac{(169, -260)}{13} t \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 622 + 13t \\ y = -933 - 20t \end{cases} \;\forall t \in Z$$

Los valores de $x$ e $y$ deben ser enteros y positivos:

$$\begin{cases} x = 622 + 13t & \geq 0 \\ y = -933 - 20t & \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq -\dfrac{622}{13} \approx -47{,}8 \\ t \leq -\dfrac{933}{20} \approx -46{,}6 \end{cases} \Rightarrow \ t = -47 \ \Rightarrow \ \begin{cases} x = 622 + 13 \cdot (-47) = 11 \\ y = -933 - 20 \cdot (-47) = 7 \end{cases}$$

Por tanto, compró 11 móviles del modelo A y 7 móviles del modelo B.

b) $1017 + 2^{3123} + 5^{-1}$ en $\mathbb{Z}_{507}$

- n = 507 = 3. $13^2$ y $\Phi(507) = \Phi(3.\ 13^2) = \Phi(3)\ \Phi(13^2) = 2\ (13^2 - 13) = 312$.

  Como mcd (2, 507) = 1 entonces,

  $2^{\Phi(507)} \equiv 1\ mod\ 507 \Rightarrow 2^{312} \equiv 1\ mod\ 507 \Rightarrow 2^{3123} = (2^{312})^{10}\ 2^3 \equiv 8\ mod\ 507.$

- Como mcd (5, 507) = 1, existe $x = 5^{-1}$ *mod* 507.

  Por tanto, existen $x, y$ tales que $5x + 507y = 1$ . Aplicando el A. de Euclides,

  $$\begin{array}{r} 507 = 5.101 + 2 \\ 5 = 2.2 + 1 \\ 2 = 2.1 \end{array} \Rightarrow 1 = 5 - 2.2 = 5 - 2(507 - 101.5) = -2.507 + 203.5 \Rightarrow x \equiv 203\ mod\ 507$$

- $1017 \equiv 3\ mod\ 507$
- $(1017 + 2^{3123} + 5^{-1})\ mod\ 507 = (3 + 8 + 203) mod\ 507 = 214\ mod\ 507$