Hoja 5. Aritmética Entera

Susana Cubillo (2021)

Ejercicios recopilados de los apuntes y Hojas de problemas de los profesores del Dpto. Matemática Aplicada a las TIC (Campus Montegancedo). UPM.

Principio de Inducción

1. Demuestra, por inducción, que para todo $n \in \mathbb{N}$

a) $3 + 7 + 11 + \cdots + (4n - 1) = n(2n + 1)$

b) $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n + 1) = n(n + 2)$

c) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n + 1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$

d) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n \cdot (n + 2) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+7)}{6}$

e) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4n-3) \cdot (4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$

f) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$

g) $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$

h) $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

i) $\sum_{k=1}^{n} 2k = n^2 + n$

j) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

k) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

l) $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$

m) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} = (n - 1) \cdot 2^n + 1$

Sol.: a) Para $n = 1$: $4 \cdot 1 - 1 = 1 \cdot (2 \cdot 1 + 1)$? SI

Si se verifica para n: $3 + 7 + 11 + \cdots + (4n - 1) = n(2n + 1)$

veamos que se verifica también para $n + 1$:

$$3 + 7 + 11 + \cdots + (4n - 1) + (4(n + 1) - 1) = (n + 1)(\,2(n + 1) + 1)$$

En efecto, $n(2n + 1) + (4(n + 1) - 1) = (n + 1)(\,2n + 3)$?

$$2n^2 + n + 4n + 3 = 2n^2 + 3n + 2n + 3 \quad ? \text{ SI}$$

b)

2. Demuestra, por inducción, que

a) $2^n > n+1, \ \forall\, n \geq 2$ c) $2n+1 < n^2, \ \forall\, n \geq 3$

b) $n! \geq 2^n, \ \forall\, n \geq 4$

Sol.: a) Para $n = 2$: $2^2 > 2+1$ SI

Si $2^n > n+1$, veamos que $2^{n+1} > (n+1)+1$

En efecto, $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > (n+1) \cdot 2 = 2n+2 > n+2$

b) Para $n = 4$: $4! = 24 \geq 2^4 = 16$ SI

Si $n! \geq 2^n$, veamos que $(n+1)! \geq 2^{n+1}$

En efecto, $(n+1)! = (n+1) \cdot n! \geq (n+1) \cdot 2^n \geq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$

c) Para $n = 3$: $2 \cdot 3 + 1 < 3^2$ SI

Si $2n+1 < n^2$, veamos que $2 \cdot (n+1) + 1 < (n+1)^2$

En efecto,

$$2 \cdot (n+1) + 1 = 2n+3 = 2n+1+3 < n^2+3 = (n+1)^2 - 2n + 2 < (n+1)^2$$

3. Se define la sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de la siguiente forma:

i) $t_1 = 1, \ t_2 = 2, \ t_3 = 3$

ii) $t_n = t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3}, \ \forall\, n \geq 4$.

Demuestra que $t_n < 2^n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Sol.: Para los tres primeros términos: $t_1 = 1 < 2^1, \ t_2 = 2 < 2^2, \ t_3 = 3 < 2^3$

Si se verifica para todo $k < n$, veamos que se verifica para n.

En efecto, $t_n = t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3} < 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} = 2^{n-3}(2^2+2+1) =$

$$= 2^{n-3} \cdot 7 < 2^{n-3} \cdot 8 = 2^n$$

4. Prueba, por inducción, que para todo $n \in \mathbb{N}$,

a) $n^3 - n$ es múltiplo de 3.

b) $n^2 + 3\text{n}$ es par.

c) $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+1)(n+2)$ es múltiplo de 6.

d) $4^{2n} - 1$ es divisible por 15.

Sol.: a) Para $n = 1$: $1^3 - 1 = 0$, que es múltiplo de 3

Si $n^3 - n$ es múltiplo de 3, veamos que $(n+1)^3 - (n+1)$ también es múltiplo de 3

En efecto, $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 =$

$(n^3 - n) + (3n^2 + 3n) = (n^3 - n) + 3\ (n^2 + n)$, que es la suma de dos múltiplos de 3.

b) Para $n = 1$: $1^2 + 3 \cdot 1 \ = 4$, que es par
Si $n^2 + 3\mathrm{n}$ es par, veamos que $(n+1)^2 + 3(\mathrm{n}+1)$ es par también.
En efecto, $(n+1)^2 + 3(\mathrm{n}+1) = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 = (n^2 + 3\mathrm{n}) + (2\mathrm{n}+4)$, que es la suma de dos números pares.

c) Para $n = 1$: $1 \cdot (1+1) \cdot (1+2) = 6$, que es múltiplo de 6.
Si $n\ (n+1)(n+2)$ es múltiplo de 6, veamos que $(n+1)\ (n+2)(n+3)$ también lo es. En efecto,
$(n+1)(n+2)(n+3) = n\ (n+1)(n+2) + 3\ (n+1)(n+2)$. El primer término es múltiplo de 6 por hipótesis de inducción. En el segundo, uno de los dos, $(n+1)$ ó $(n+2)$ es múltiplo de 2, con lo que, al multiplicar por 3, nos queda también múltiplo de 6.

d) Para $n = 1$: $4^{2\cdot 1} - 1 = 15$, que es múltiplo de 15.
Si $4^{2n} - 1$ es múltiplo de 15, veamos que $4^{2(n+1)} - 1$ es múltiplo de 15.
En efecto,
$4^{2(n+1)} - 1 = 4^{2n} \cdot 4^2 - 1 = (4^{2n} - 1) \cdot 4^2 + 4^2 - 1 = (4^{2n} - 1) \cdot 4^2 + 15$, donde el primer término es múltiplo de 15 por hipótesis de inducción, y el segundo también.

5. Prueba que si $n \geq 14$, entonces n se puede expresar como suma de treses y ochos.

Si $n = 14$, entonces $n = 3 + 3 + 8$
Supongamos para todo $k \leq n,\ k$ se puede expresar como suma de treses y ochos. Veamos que también $n+1$ se puede expresar de dicha forma.

- Si $n = (3 + 3 + \cdots 3) + (8 + \cdots 8 + 8)$, entonces $n+1$ se puede escribir como $n + 1 = (3 + 3 + \cdots 3) + (8 + \cdots + 8. +3 + 3 + 3)$. Es decir, al último 8 le sumamos 1, y se puede escribir como tres 3.
- Si $n = 3 + 3 + \cdots 3$, es decir , en la descomposición de n no hay 8, entonces como $n \geq 14$, por lo menos hay cinco 3: $n = (3 + 3 + 3 + 3 + 3) + \cdots$, y al sumar una unidad, nos quedaría $n + 1 = (8 + 8) + \cdots$

Sistemas de Numeración

6. Obtén 109_{10} en base 2, y 110110101_2 en base 10.

Sol.: $109_{10} = 1101101_2$ $\qquad 110110101_2 = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^5 + 2^7 + 2^8 = 437_{10}$

7. Obtén 367_8 en bases 2, 5 y 7.

Sol.: $367_8 = 7 + 6 \cdot 8 + 3 \cdot 8^2 = 419_{10}$

$419_{10} = 110100011_2$ $\quad$ $419_{10} = 3134_5$ $\quad$ $419_{10} = 1136_7$

8. Halla la representación en las bases 2, 7 y 11 de los siguientes números expresados en base decimal: 137, 6243, 762, 1995.

Sol.: $137_{10} = 10001001_2 = 254_7 = 115_{11}$

$6243_{10} = 1100001100011_2 = 24126_7 = 4766_{11}$

$762_{10} = 1011111010_2 = 2136_7 = 633_{11}$

$1995 = 11111001011_2 = 5550_7 = 1554_{11}$

9. Halla la representación en base 10 de 11011101_2 , 4165_7 , 1995_{11} , 1213_7 , 1213_5.

Sol.: $11011101_2 = 221_{10}$ $\quad$ $4165_7 = 1468_{10}$ $\quad$ $1995_{11} = 2524_{10}$

$1213_7 = 451_{10}$ $\quad$ $1213_5 = 183_{10}$

10. Obtén 367_8 , 657_8 en bases 2, 7.

Sol.: $367_8 = 247_{10} = 11110111_2 = 502_7$

$657_8 = 431_{10} = 110101111_2 = 1154_7$

11. Obtén 6243_{10} , 1995_{10} en base hexadecimal (base 16).

Sol.: $6243_{10} = 1863_{16}$ $\quad$ $1995_{10} = 7CB_{16}$

12. Opera a) $(132_5 \times 24_5)$ $\quad$ b) $(132_5 + 310_5 + 12_5)$

Sol.: $(132_5 \times 24_5) = 4323_5$ $\quad$ $(132_5 + 310_5 + 12_5) = 1004_5$

13. Sabiendo que x_m significa que el número natural x está escrito en base m,

a) Demuestra que $121_m = (m+1)^2{}_{10}$ para $m \geq 3$.

b) Expresa 169_m en base 10 para $m \geq 10$.

Sol.: a) $121_m = (1 + 2m + m^2)_{10} = (m+1)^2{}_{10}$

$b)$ $169_m = (9 + 6m + m^2)_{10} = (m+3)^2{}_{10}$

14. Halla x en las expresiones $331_x = 56_{11}$, $274_8 = x_2$.

Sol.: $331_x = 56_{11}$; $\quad 1 + 3x + x^2 = 61$; $\quad x^2 + 3x - 60 = 0$; $\quad x = 4, -5$ $\quad$; $x = 4$

$274_8 = x_2$; $4 + 56 + 128 = x_2$; $188 = x_2$; $x = 10111100$

Aritmética Entera

15. Halla el mcd (8184,756), aplicando el Algoritmo de Euclides.
Sol.: $mcd\ (8184{,}756) = 12$

16. Usa el algoritmo de Euclides para calcular $d = mcd(a, b)$, y encuentra x e y tales que $d = ax + by$.

a) $a = 1312,\ b = 800$ b) $a = 322,\ b = 406$

Sol.: a) $mcd(1312, 800) = 32$ $32 = 11 \cdot 1312 + (-18) \cdot 800$

b) $mcd(322{,}406) = 14$ $14 = 4 \cdot 406 + (-5) \cdot 322$

17. Halla las soluciones enteras de la ecuación

a) $150\,x + 100\,y = 200$ b) $84\,x - 30\,y = 60$

Sol.: a) $150\,x + 100\,y = 200$; $3x + 2y = 4$; solución particular: $x = 2, y = -1$

Solución general $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - 3t \end{cases}$ $t \in \mathbb{Z}$

b) $84\,x - 30y = 60$; $14x - 5y = 10$; solución particular: $x = 5, y = 12$

Solución general: $\begin{cases} x = 5 + 5t \\ y = 12 + 14t \end{cases}$ $t \in \mathbb{Z}$

18. Se dispone de un suministro ilimitado de agua, un gran cubo con un desagüe y dos garrafas que contienen 7 y 9 litros respectivamente, ¿cómo podría ponerse un litro de agua en el cubo?

Sol.: $9x + 7y = 1$. Resolviendo la ecuación diofántica: $9 \cdot (-3) + 7 \cdot 4 = 1$. Por lo tanto, se obtendría un litro echando 4 veces la garrafa de 7 libros, y sacando tres veces el agua de la garrafa de 9 litros.

19. Una comitiva de 12 personas acarrea 12 panes: cada hombre lleva dos panes; cada mujer, medio pan, y cada niño un cuarto de pan. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños componen la comitiva?

Sol.: $x = nº\ de\ hombres$ $y = nº\ de\ mujeres$ $12 - x - y = nº\ de\ niños$

$2 \cdot x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\,(12 - x - y) = 12$; $8 \cdot x + 2 \cdot y + 12 - x - y = 48$;

$7x - y = 36$; solución particular: $x = 5,\ y = 1$

Solución general: $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 - 7t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$

Además, ha de ser $x \geq 0$, por lo que $t \geq -5$; $y \geq 0$, por lo que $t \leq 0$;
y $12 - x - y \geq 0$, por lo que $t \geq -1$. Por lo tanto, los posibles valores para t son 0 y -1.

Para $t = 0$: $x = 5,\ y = 1,\ 12 - x - y = 6$

Para $t = -1$: $x = 4,\ y = 8,\ 12 - x - y = 0$

20. En un colegio se quieren equipar las aulas con ordenadores y pizarras digitales. Suponiendo que se tiene un presupuesto de 6750 €, que cada ordenador cuesta 450 € y cada pizarra digital 825€, ¿cuántos ordenadores y pizarras se pueden comprar como máximo agotando el presupuesto?

Sol.: $x = nº\ de\ ordenadores \qquad y = nº\ de\ pizarras$

$450 \cdot x + 825 \cdot y = 6750$; $\qquad 6 \cdot x + 11 \cdot y = 90$; $\quad 6 \cdot (2) + 11 \cdot (-1) = 1$

$6 \cdot (180) + 11 \cdot (-90) = 90$; solución particular : $x = 180, y = -90$

Solución general: Solución general: $\begin{cases} x = 180 + 11t \\ y = -90 - 6t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$

Además, ha de ser $x \geq 0$, por lo que $t \geq -16, \cdots$; $y \geq 0$, por lo que $t \leq -15$;

Por lo tanto, los posibles valores para t son -15 y -16.

Para $t = -15$: $x = 15, y = 0$

Para $t = -16$: $x = 4, y = 6$

21. Calcula las soluciones enteras de las siguientes ecuaciones diofánticas:

$a)\ 28x + 36y = 44 \qquad b)\ 66x + 550y = 88 \qquad c)\ 966x + 686y = 70$

$d)\ 343x + 140y = 70 \qquad e)\ 21x + 9y = 114$

Sol.: a) $7x + 9y = 11$; $7 \cdot (8) + 9 \cdot (-5) = 11$; $\begin{cases} x = 8 + 9t \\ y = -5 - 7t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$

b) $6x + 50y = 8$; $6 \cdot (-7) + 50 \cdot 1 = 8$; $\begin{cases} x = -7 + 50t \\ y = 1 - 6t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$

c) $69x + 49y = 5$; $69 \cdot (-110) + 49 \cdot (155) = 5$;

$\begin{cases} x = -110 + 49t \\ y = 155 - 69t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z} \qquad \begin{cases} x = -12 + 49t \\ y = 17 - 69t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$

d)

e)

22. Determina los valores de $c \in \mathbb{Z}^+$, $10 < c < 20$, para los que la ecuación diofántica $84x + 990y = c$ tiene solución y determínala, en su caso.

Sol.: Para que tenga solución c ha de ser múltiplo del $mcd(84{,}990) = 6$. Por tanto, ha de ser $c = 12$ o $c = 18$.

Si $c = 12$: $14x + 165y = 2$; $14 \cdot (118) + 165 \cdot (-10) = 2$; $\begin{cases} x = 118 + 165t \\ y = -10 - 14t \end{cases}$ $t \in \mathbb{Z}$

Si $c = 18$: $14x + 165y = 3$; $14 \cdot (177) + 165 \cdot (-15) = 3$; $\begin{cases} x = 177 + 165t \\ y = -15 - 14t \end{cases}$ $t \in \mathbb{Z}$

23. Determina los valores de $c \in \mathbb{Z}^+$, $c < 50$, para los que la ecuación diofántica $912x + 168y = c$ tiene solución y determínala, en su caso.

Sol.: Para que tenga solución c ha de ser múltiplo del $mcd(912, 168) = 24$. Por tanto, ha de ser $c = 24$ o $c = 48$.

Si $c = 24$: $38x + 7y = 1$; $38 \cdot (-2) + 7 \cdot (11) = 1$; $\begin{cases} x = -2 + 7t \\ y = 11 - 38\,t \end{cases}$ $t \in \mathbb{Z}$

Si $c = 48$: $38x + 7y = 2$; $38 \cdot (-4) + 7 \cdot (22) = 2$; $\begin{cases} x = -4 + 7\,t \\ y = 22 - 38t \end{cases}$ $t \in \mathbb{Z}$

24. Se necesita cubrir una pared que mide 3,5 m^2 con baldosas enteras de dos tamaños diferentes, unas miden $19 \times 70\ cm^2$ y otras miden $17 \times 35\ cm^2$. ¿Cuántas baldosas de cada tipo serán necesarias como mínimo?

Sol.: $3{,}5\ m^2 = 35.000\ cm^2$; $19 \times 70\ cm^2 = 1.330 cm^2$; $17 \times 35\ cm^2 = 595\ cm^2$

$1.330\ x + 595\ y = 35.000$; $38\ x + 17\ y = 1.000$;

$38 \cdot (-4) + 17 \cdot 9 = 1$; $38 \cdot (-4.000) + 17 \cdot 9.000 = 1.000$

$\begin{cases} x = -4.000 + 17t \\ y = 9.000 - 38\,t \end{cases}$ $t \in \mathbb{Z}$

Como ha de ser $-4.000 + 17t \geq 0$; $t \geq \frac{4.000}{17} = 235, \ldots$

$9.000 - 38\,t \geq 0$; $t \leq \frac{9.000}{38} = 236, \ldots$

Por tanto, $t = 236$; $x = 12$; $y = 32$

25. Un agente de Cambio y Bolsa tiene invertido dinero en acciones de Azucarera y Repsol. Las acciones de Azucarera se cotizan a 89 euros y las de Repsol a 614 euros cada una. Necesita hacer una transacción para disponer exactamente de 1.000 euros en efectivo. ¿Puede hacerlo comprando acciones de Repsol y vendiendo acciones de Azucarera solamente? En caso afirmativo, decir cuántas acciones de cada tipo, como mínimo, comprará y venderá.

Sol.: Llamamos x= número acciones Azucarera , y= número acciones Repsol

$$89\,x + 614\,y = 1.000 \;;\quad mcd\,(89, 614) = 1$$

$$89 \cdot (69) + 614 \cdot (-10) = 1\;;\quad 89 \cdot (69.000) + 614 \cdot (-10.000) = 1.000$$

$$\begin{cases} x = 69.000 + 614\,t \\ y = -10.000 - 89\,t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$$

Como ha de ser $69.000 + 614\,t < 0\;;\; t < \frac{-69.000}{614} = -112, \dots$

$$-10.000 - 89\,t > 0\;;\quad t < \frac{-10.000}{89} = -112, \dots$$

Por tanto, $t = -113\;;\quad x = -382\;;\quad y = 57$

(con otros $t < -113$) las cantidades salen mayores en valor absoluto.

26. Un alumno quiere renovar su vestuario comprando camisetas y pantalones. Las camisetas valen 18 € cada una y los pantalones 33 €. Si quiere gastar exactamente 639 € ¿cuántas camisetas y pantalones puede comprar? Describe todas las formas distintas en que puede hacerlo.

Sol.: Llamamos x= número camisetas , y= número pantalones

$$18\,x + 33\,y = 639 \;;\quad 6\,x + 11\,y = 213$$

$$6 \cdot (2) + 11 \cdot (-1) = 1\;;\quad 6 \cdot (426) + 11 \cdot (-213) = 213$$

$$\begin{cases} x = 426 + 11\,t \\ y = -213 - 6\,t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$$

Como ha de ser $426 + 11\,t \geq 0\;;\; t \geq \frac{426}{11} = -38, \dots$

$-213 - 6\,t \geq 0\;;\quad t \leq \frac{-213}{6} = -35, \dots$ Por tanto, $t = -36, -37, -38$

Para $t = -36\;;\quad x = 30\;;\quad y = 3$

Para $t = -37\;;\quad x = 19\;;\quad y = 9$

Para $t = -38$; $x = 8$; $y = 15$

27. En Universilandia, a los estudiantes que copian un examen se les condena a 133 años de cárcel, y a los que copian una práctica se les condena a 84 años. En el caso de que se les encuentre culpables de más de una copia se les condena a 133 años. En la cárcel de Universilandia hay 15 guardias y un número indeterminado de estudiantes condenados por copiar. Se sabe que el número total de años de condena de estos últimos es de 3605 años. ¿Cuántos estudiantes hay presos?

Sol.: Llamamos x= nº alumnos que copian un examen, y= nº que copian una práctica

$133\,x + 84\,y = 3605$; $19\,x + 12\,y = 515$

$19 \cdot (-5) + 12 \cdot (8) = 1$; $19 \cdot (-2.575) + 12 \cdot (4.120) = 515$

$$\begin{cases} x = -2.575 + 12\,t \\ y = 4.120 - 19\,t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$$

Como ha de ser $-2.575 + 12\,t \geq 0$; $t \geq \frac{2.575}{12} = 214, \ldots$

$4.120 - 19\,t \geq 0$; $t \leq \frac{4.120}{19} = 216, \ldots$ Por tanto, $t = 215, 216$

Para $t = 215$; $x = 5$; $y = 35$

Para $t = 216$; $x = 17$; $y = 16$

28. Un tren de largo recorrido formado por menos de 10 vagones cuya capacidad es de 343 plazas cada uno, realiza un viaje lleno de pasajeros. Por una avería en las vías debe parar su marcha hasta que se subsane el problema. Se les ofrece a los pasajeros la posibilidad de continuar el viaje en autobús hasta su destino. Sabiendo que 84 personas rechazan esta posibilidad y prefieren esperar, y que el resto completan algunos autobuses de 70 plazas, ¿cuántos autobuses se completan? ¿cuántas personas viajaban en el tren?

Sol.: Llamamos x= nº vagones, y= nº autobuses

nº viajeros = $343\,x = 70y + 84$ $343\,x - 70\,y = 84$; $49\,x - 10\,y = 12$

$49 \cdot (-1) - 10 \cdot (-5) = 1$; $49 \cdot (-12) - 10 \cdot (-60) = 12$

$$\begin{cases} x = -12 - 10\,t \\ y = -60 - 49\,t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$$

Como ha de ser $-12 - 10\,t < 10$; $t > \frac{-22}{10} = -2, \ldots$

$-60 - 49\,t > 0$; $t < \frac{-60}{49} = -1, \ldots$

Por tanto, $t=-2$; $x=8$; $y=38$; nº de viajeros= $343\,x=2.744$

29. Un turista tiene 1000 coronas checas y quiere cambiar ese dinero en una cantidad exacta de libras chipriotas y zlotys polacos. El cambio que le ofrece una cierta Oficina de Cambio es el siguiente: un zloty polaco=13 coronas checas y una libra chipriota=18 coronas checas. La oficina no proporciona fracciones de ninguna moneda, ¿de cuántas formas diferentes puede hacerlo?

Sol.: Llamamos x= nº libras, y= nº zlotys; $18\,x+13y=1000$;

$18\cdot(-5)+13\cdot(7)=1$; $18\cdot(-5.000)+13\cdot(7.000)=1.000$

$\begin{cases} x=-5.000+13\,t \\ y=7.000-18\,t \end{cases} \quad t\in\mathbb{Z}$

Ha de ser $-5.000+13\,t\geq 0$; $t\geq\frac{5.000}{13}=384,,\ldots$

$7.000-18\,t\geq 0$; $t\leq\frac{7.000}{18}=388,\ldots$ Por tanto $t=385,386,387,388$

Para $t=385$; $x=5$; $y=70$; Para $t=386$; $x=18$; $y=52$

Para $t=387$; $x=31$; $y=34$; Para $t=388$; $x=44$; $y=16$

30. Halla todos los múltiplos de 28 cuyas dos últimas cifras sean 16.

Sol.: Todos los números positivos cumpliendo las condiciones son de la forma $28x=100y+16$; $7x-25y=4$

Resolvemos la ecuación diofántica: $7\cdot(-3)-25\cdot(-1)=4$

$\begin{cases} x=-3-25\,t \\ y=-1-7\,t \end{cases} \quad t\in\mathbb{Z}$; $\begin{cases} x=22+25\,t \\ y=6+7\,t \end{cases} \quad t\in\mathbb{Z}$

Por tanto , los números positivos pedidos serán de la forma

$28x=28\cdot(22+25\,t)=616+700\,t$, $t\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

Y los negativos: $-616-700\,t$, $t\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

Números primos

31. Estudia si son o no primos los números 811, 493 y 911.

Sol.: 811 y 911 son primos. 493 es múltiplo de 17.

32. Halla todos los números primos p entre 100 y 300.

33. Utiliza la identidad $2^{rs} - 1 = (2^r - 1)(2^{(s-1)r} + 2^{(s-2)r} + \cdots + 2^r + 1)$ para demostrar que si $2^n - 1$ es primo, entonces n es primo.

Sol.: Por reducción al absurdo. Si n no es primo, $n = r \cdot s$, con $r, s \in \mathbb{Z}$, $r, s > 1$. Entonces, $2^r - 1 > 1$ y $2^{(s-1)r} \geq 2^r > 2$, y $2^n - 1 = 2^{r \cdot s} - 1$ es producto de dos números enteros mayores que 1, por tanto no es primo.

34. Halla el valor de un entero positivo n con las siguientes propiedades:
   i) n no contiene cuadrados (es decir, no hay factores repetidos en la factorización de n en números primos).
   ii) Para cada primo p se tiene que $p/n \Leftrightarrow (p-1)/n$.

35. Estudia si son ciertas las siguientes afirmaciones:
   a) $\forall\, m \in \mathbb{Z}$, $2m$ y $4m + 3$ son primos entre sí.

   FALSO. Para $m = 3$, $2m = 6$ y $4m + 3 = 15$, que no son primos entre sí

   b) $\forall\, m \in \mathbb{Z}$, $2m + 1$ y $3m + 2$ son primos entre sí.

   VERDADERO. Si $c/(2m+1)$ y $c/(3m+2)$, entonces $c/[2(3m+2) - 3(2m+1)]$, es decir $c/1$, y ha de ser $c = 1$

36. Demuestra que si n es un entero positivo, ninguno de los n enteros consecutivos empezando por $(n+1)! + 2$ es primo.

Sol.: $(n+1)! + k$, con $k = 2, 3, \ldots\ldots, (n+1)$ es múltiplo de k.

37. Demuestra que si p es primo distinto de 2 y de 5, entonces $p^2 - 1$, ó $p^2 + 1$ es divisible por 10.

Sol.: Si p es primo, termina en 1, en 3, en 7 ó en 9.

Si termina en 1, p^2 termina en 1 y p^2-1 termina en 0, y es múltiplo de 10.
Si termina en 3, p^2 termina en 9 y p^2+1 termina en 0, y es múltiplo de 10.
Si termina en 7, p^2 termina en 9 y p^2+1 termina en 0, y es múltiplo de 10.
Si termina en 9, p^2 termina en 1 y p^2-1 termina en 0, y es múltiplo de 10

Otros Ejercicios

38. Si a y b son enteros tales que $mcd(a,b)=1$, demuestra que

a) $mcd(a+b,a-b)=1$ ó 2 b) $mcd(2a+b,a+2b)=1$ ó 3

Sol.: a) Sea $d=mcd(a+b,a-b)$. Entonces $d/(a+b)$, $d/(a-b)$, y sumando y restando los términos de la derecha, $d/(2a)$ y $d/(2b)$. Por tanto, d divide a $mcd(2a,2b)=2mcd(a,b)=2$, y así $d=1$ o $d=2$.

b) Sea $d=mcd(2a+b,a+2b)$. Entonces $d/(2a+b)$ y $d/(a+2b)$ y d divide a $2(2a+b)-(a+2b)=3a$, y divide a $2(a+2b)-(2a+b)=3b$. Por tanto d divide a $mcd(3a,3b)=3mcd(a,b)=3$, y así $d=1$ o $d=3$.

39. Demuestra que el cuadrado de todo número entero es de la forma $4k$ ó $4k+1$. Demuestra que el cubo de todo número entero es de la forma $9k$ ó $9k+1$ ó $9k+8$.

Sol.: Todo número entero es de la forma $2m$ ó $2m+1$. Al elevarlo al cuadrado, nos queda:

$(2m)^2 = 4m^2 = 4(m^2)$
$(2m+1)^2 = 4m^2+4m+1 = 4(m^2+1)+1$

Todo número entero es de la forma $3m$, $3m+1$ ó $3m+2$
$(3m)^3 = 27m^3 = 9\ (\ 3m^3)$
$(3m+1)^3 = 27m^3+3\cdot 9m^2+3\cdot 3m+1 = 9\ (\ 3m^3+3m^2+m)+1$
$(3m+2)^3 = 27m^3+3\cdot 9m^2\cdot 2+3\cdot 3m\cdot 4+8 = 9\ (\ 3m^3+3m^2+4m)+8$

40. Si $a\in\mathbb{Z}$ y no es múltiplo de 2 ni de 3, demuestra que $24/(a^2-1)$.

Sol.: Si a no es múltiplo de 2 , $(a-1)$ y $(a+1)$ sí lo son.

Entre los valores $(a-1)$, a , $(a+1)$, $(a+2)$ haber un múltiplo de 4. Pero a, a+2 no lo son. Por tanto, o bien $(a-1)$ o bien $(a+1)$ es múltiplo de 4.

Entre los valores $(a-1)$, a , $(a+1)$ debe haber un múltiplo de 3. a no es múltiplo de 3, por lo que o bien $(a-1)$ o bien $(a+1)$ es múltiplo de 3.

Por tanto, $(a^2-1)=(a+1)\cdot(a+1)$ es múltiplo de $4\cdot 2\cdot 3=24$

41. Demuestra que si 5 no divide a n, entonces 5 divide a n^8-1.

Sol.: $n^8-1=(n^4-1)\cdot(n^4+1)=(n^2-1)\cdot(n^2+1)\cdot(n^4+1)=$

$$(n-1)\cdot(n+1)\cdot(n^2+1)\cdot(n^4+1)$$

Entre los números $(n-2)$, $(n-1)$, n , $(n+1)$, $(n+2)$, alguno es múltiplo de 5.

Si $(n-1)$ ó $(n+1)$ es múltiplo de 5 , entonces n^8-1 es múltiplo de 5 .

Si $(n-2)$ es múltiplo de 5 , $n=5k+2$,

$(n^2+1)=(5k+2)^2+1=5k^2+20k+4+1$, que es múltiplo de 5

Si $(n+2)$ es múltiplo de 5 , $n=5k-2$,

$(n^2+1)=(5k-2)^2+1=5k^2-20k+4+1$, que es múltiplo de 5

42. Demuestra que si $a,b\in\mathbb{Z}^+$, entonces se tiene que 2^a-1 y $2^{a(mod\ b)}-1$ son congruentes $mód\ 2^b-1$.
Usa este resultado para comprobar que $mcd(2^a-1,2^b-1)=2^{mcd(a,b)}-1$.

43. Demuestra que todo número primo $p>3$ se puede escribir de la forma
a) $4n+1$ ó $4n+3$, para algún $n\in\mathbb{N}$ b) $6n+1$ ó $6n+5$, para algún $n\in\mathbb{N}$

Sol.: a) Todo número natural sólo puede ser de la forma
$4n$, $4n+1$, $4n+2$ ó $4n+3$
Pero $4n$ y $4n+2$ son múltiplos de 2 y por tanto no son primos. Luego si p es primo sólo puede ser de la forma $4n+1$ ó $4n+3$.

b) Todo número natural es de la forma
$6n$, $6n+1$, $6n+2$, $6n+3$, $6\mathrm{n}+4$ ó $6n+5$
Pero $6n$, $6n+2$, y $6\mathrm{n}+4$ son múltiplos de 2, y $6n+3$ es múltiplo de 3.
Por tanto si p es primo sólo puede ser de la forma $6n+1$ ó $6n+5$.