Tema 4. Técnicas de Contar

4.1. Algunos principios básicos

♦ Principio de Dirichlet (cajas o palormar)

Si se distribuyen k objetos en n cajas, con $k > n$, al menos una caja queda con más de un objeto.

→ En un grupo de 366 personas, siempre hay dos cuyo cumpleaños el mismo día del año.

→ En Madrid, hay dos personas con el mismo número de cabellos en la cabeza.

→ Si se tiran dos dados 12 veces, al menos dos de esas veces se repite se obtiene la misma suma.

♦ Principio de Dirichlet generalizado.

Sea $\lceil x \rceil = el\ menor\ número\ entero\ \geq x$

Y sea $\lfloor x \rfloor = el\ mayor\ número\ entero\ \leq x$

Si se distribuyen k objetos en n cajas, se tiene que:

i) al menos hay una caja con $\left\lceil \frac{k}{n} \right\rceil$ objetos o más.

ii) al menos hay una caja que tiene como máximo $\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor$ objetos.

→ Si se tienen 100 personas en una reunión, al menos $\left\lceil \frac{100}{12} \right\rceil = 9$ han nacido en el mismo mes, y al menos hay un mes en el que, como máximo, han nacido $\left\lfloor \frac{100}{12} \right\rfloor = 8$ de ellas.

→ Si las calificaciones en una materia sólo son números enteros del 0 al 10, en una clase de 40 alumnos, al menos $\left\lceil \frac{40}{11} \right\rceil = 4$ han obtenido la misma calificación, y al menos hay una calificación que la han obtenido, como máximo, $\left\lfloor \frac{40}{11} \right\rfloor = 3$ alumnos.

♦ Principio de la suma.

Si A y B son conjuntos finitos, disjuntos, entonces

$$card\ (A \cup B) = card(A) + card(B)$$

♦ Principio del producto.

Si A y B son conjuntos finitos, no vacíos, entonces

$$card\ (A \times B) = card(A) \cdot card(B)$$

→ Cuántos números naturales de 4 cifras, que no contienen el 0, existen.

→ Cuántos números naturales de 4 cifras, que tienen un único 7, existen.

→ Número de subconjuntos del conjunto $\{a, b, c\}$ y del conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

♦ Principio del complementario.

Si A y B son conjuntos finitos, tales que $A \subseteq B$, entonces

$$card\ (B - A) = card(B) - card(A)$$

→ En una baraja de 40 cartas, se eligen 4 con reemplazamiento.

a) ¿De cuántas formas se puede hacer la elección, con la condición de que se repita alguna carta?
b) ¿De cuántas formas se puede hacer la elección, con la condición de que se repita la cuarta carta, pero sin ser necesario que sea la primera repetición?

→ ¿Cuántos números naturales menores que 1000 contienen la cifra 0?

4. 2. Selecciones ordenadas o variaciones

¿De cuántas formas se pueden distribuir k objetos distintos en n cajas distintas, con $k \leq n$, de forma que en cada caja no haya más de un objeto?

$$V_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

→ Formas de sentarse 7 personas en 10 asientos numerados.

→ Cuántos números naturales mayores que 99 y menores que 1000 tienen las cifras distintas entre sí y distintas de 0.

→ De cuántas formas se puede elegir un presidente, un secretario y un vocal de entre 20 personas.

Permutaciones.

¿De cuántas formas se pueden distribuir n objetos distintos en n cajas distintas , de forma que en cada caja no haya más de un objeto?

$$V_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n! = P_n$$

→ Formas de sentarse 10 personas en 10 asientos numerados.

→ Formas de sentarse 10 personas alrededor de una mesa circular de 10 asientos.

→ Formas de colocar 8 torres iguales en un tablero de ajedrez, de forma que no se ataquen entre sí.

Selecciones con repetición.

¿De cuántas formas se pueden distribuir k objetos distintos en n cajas distintas?

$$VR_{n,k} = n \cdot n \cdot \ldots \cdot n \ (k \ veces) = n^k$$

→ Cuántos números naturales distintos de 7 cifras existen, formados con las cifras 1, 2, 3 y 5.

4. 3. Selecciones no ordenadas o Combinaciones

¿De cuántas formas se pueden distribuir k objetos iguales en n cajas distintas, con $k \leq n$, de forma que en cada caja no haya más de un objeto?

$$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{k! \cdot (n-k)!}$$
$$= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

→ De cuántas formas distintas se pueden elegir 5 representantes de una clase de 40 alumnos.

→ Cuántos colores distintos se pueden obtener mezclando tres botes de pintura, si se dispone de un total de 7 botes de pintura de distintos colores.

→ Cuántos resultados distintos se pueden obtener tomando 6 cartas de una baraja de 40 cartas.

→ Cuántos subconjuntos de 3 elementos tiene un conjunto de cardinal 20.

Números combinatorios.

Son los números de la forma $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, con $k \leq n$, y $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Propiedades:

i) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}$ Números complementarios

ii) Teorema del Binomio de Newton:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^0y^n + \binom{n}{1}x^1y^{n-1} + \binom{n}{2}x^2y^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}x^ny^0$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$

Consecuencia:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$
$$0^n = (1+(-1))^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$$

iii) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

→ Un niño reparte 45 cromos distintos entre 3 amigos, regalando 10 cromos a cada amigo. ¿De cuántas formas puede realizar el reparto?

$$\binom{45}{10}\cdot\binom{35}{10}\cdot\binom{25}{10} = \frac{45!}{10!\,10!\,10!\,15!}$$

→ De cuántas formas se pueden distribuir a cuatro jugadores manos de cinco cartas, utilizando una baraja de 52 cartas.

$$\binom{52}{5}\cdot\binom{47}{5}\cdot\binom{42}{5}\cdot\binom{37}{5} = \frac{52!}{5!\,5!\,5!\,32!}$$

Combinaciones con repetición.

¿De cuántas formas se pueden distribuir k objetos iguales en n cajas distintas?

Se consideran las cajas separadas por $n-1$ tabiques. Entre los tabiques distribuimos los k objetos. Por tanto, nos quedan $n-1+k$ lugares, de los que tenemos que elegir k para introducir los objetos, o $n-1$ para colocar los tabiques. Por lo tanto,

$$CR_{n,k} = \binom{n-1+k}{n-1} = \binom{n-1+k}{k}$$

→ Se tienen 12 clases de pasteles. ¿De cuantas formas se pueden elegir 24 pasteles?

$$CR_{12,24} = \binom{35}{11} = \binom{35}{24} = \frac{35!}{24!\,11!}$$

→¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener al lanzar tres dados iguales a la vez?.

$$CR_{6,3} = \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{5!\,3!} = 56$$

→Número de soluciones enteras, no negativas, de la ecuación

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$$

$$CR_{n,k} = \binom{n-1+k}{n-1} = \binom{n-1+k}{k}$$

→ Número de soluciones enteras, no negativas, de la ecuación

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30 \\ 0 \le x_i\,, \quad i = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

$$CR_{5,30} = \binom{34}{4} = \binom{34}{30}$$

→ De cuántas formas se pueden seleccionar 8 piezas de fruta de una cesta que contiene manzanas, naranjas y peras, si el orden en que se seleccionan las piezas no se tiene en cuenta.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 0 \le x_i\,, \quad i = 1,2,3, \end{cases}$$

$$CR_{3,8} = \binom{10}{2}$$

→ Obtener el número de soluciones enteras de la ecuación

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30 \\ 1 \leq x_i\ , \quad i = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

$$CR_{5,25} = \binom{29}{4}$$

$\rightarrow$ De cuántas formas se pueden repartir 15 caramelos idénticos entre 4 niños, si cada uno recibe al menos un caramelo.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 1 \leq x_i\ , \quad i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

$$CR_{4,11} = \binom{14}{3}$$

Permutaciones con repetición. (Se reducen a combinaciones reiteradas)

$\rightarrow$ Cuántas palabras distintas se pueden formar con las letras de la palabra ABRACADABRA .

$$\binom{11}{5} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} = \frac{11!}{5!\,6!} \cdot \frac{6!}{2!\,4!} \cdot \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \frac{2!}{1!\,1!} = \frac{11!}{5!\,2!\,2!}$$

$\rightarrow$ Cuántas sucesiones de longitud 15 se pueden formar con las siguientes letras: 7a, 3b, 2c, 2d y 1e.

$$\binom{15}{7} \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{2}{1} = \frac{15!}{7!\,3!\,2!\,2!}$$

4. 4. Principio de la Criba (de inclusión-exclusión).

$\rightarrow$ Si A y B son dos conjuntos finitos, entonces

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$$

$\rightarrow$ Ejemplos

$\rightarrow$ Si A, B y C son conjuntos finitos, no vacíos, entonces

$$card(A \cup B \cup C) = card(A) + card(B) + card(C)$$

$$- card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C)$$

$\rightarrow$ Ejemplos

$\rightarrow$ Si $A_1,\ A_2, \dots,\ A_n$ son conjuntos finitos, no vacíos, entonces

$$card\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = card(A_1) + \cdots + card(A_n)$$

$$- card(A_1 \cap A_2) - card(A_1 \cap A_3) - \cdots card(A_{n-1} \cap A_n)$$

$$+card(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + card(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \cdots + card(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)$$

$$- \ \dots \ (-1)^{n-1} card(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap \ A_n)$$

Combinaciones con repetición limitada

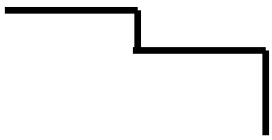
→ Ejemplos.

1) ¿Cuántos números naturales, menores que 10^4, cumplen que la suma de sus cifras es 25?

2) ¿Cuántas soluciones enteras tiene la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 17$, teniendo en cuenta que $2 \leq x_1 \leq 5$, $3 \leq x_2 \leq 6$, $4 \leq x_3 \leq 7$ ¿

3) Al lanzar 3 dados distintos a la vez, ¿en cuántos resultados posibles la suma es 10?

4) Un niño dispone de un juego de 30 palos y los dispone en forma de escalera con 4 tramos, según indica la figura.
   a) ¿Cuántas escaleras diferentes puede construir?
   b) ¿Y si en cada uno de los tres primeros tramos debe haber a lo sumo 7 palos?



Desórdenes

→ Definición. Desorden de n elementos es una permutación de los elementos ordenados de un conjunto, de forma que ninguno permanece en su posición inicial. El número de desórdenes de un conjunto de n elementos es:

$$D_n = card\ (S_n - \cup_{k=1}^{n} A_k)$$

donde S_n son las permutaciones del conjunto de n elementos, y A_k son las permutaciones de dicho conjunto, que mantienen en la misma posición al elemento k-ésimo. Por tanto,

$$D_n = card\left(S_n - \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = card\ (S_n) - card\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) =$$

$$n! - \left(n \cdot card\,(A_1) - \binom{n}{2}\, card\,(A_1 \cap\ A_2) + \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n}\, card(A_1\ \cap\ A_2\ \cap \ldots \cap A_n) \right)$$
$$= n! - \left(n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1} \right) = \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n = n!\, \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$