Matemática Discreta I Primer parcial	1^{er} Apellido: ______	21 de enero de 2020
Dpto. Matematica Aplicada TIC ETS Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	2^{o} Apellido: ______ Nombre: ______	Tiempo 75 minutos **Nota:**

Ejercicio 1

Sea D_{105} el conjunto de todos los divisores positivos de 105, y sea $|$ la relación de orden de divisibilidad, es decir, $a|b$ significa que "a divide a b".

a) (3 puntos) Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(D_{105}, |)$.

b) (3 puntos) Sea $B = \{3, 5, 21\}$ un subconjunto de D_{105}. Obtén, si existen, las cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo de B en $(D_{105}, |)$. Obtén, si existen, máximo y mínimo, maximales y minimales de B.

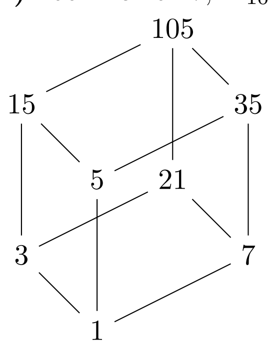
c) (3 puntos) ¿Es B con la relación de divisibilidad un retículo? Razona la respuesta.

d) (3 puntos) Obtén, si existen, los elementos complementarios de 5 y 15 en $(D_{105}, |)$.

e) (3 puntos) Razona si $(D_{105}, |)$ es un Álgebra de Boole.

Soluciones

a) $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, $D_{105} = \{1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105\}$



b) Cotas superiores: $\{105\}$, cotas inferiores: $\{1\}$, supremo: 105, ínfimo: 1, máximo: $\nexists$, mínimo: $\nexists$, maximales: $\{5, 21\}$, minimales: $\{3, 5\}$.

c) $(B, |)$ no es retículo, puesto que no todo par de elementos en B tienen supremo e ínfimo.

d) El complementario de 5 es 21, y el complementario de 15 es 7.

e) Sí es álgebra de Boole puesto que $(D_{105}, |)$ es retículo, y es un retículo acotado, complementario y distributivo.

Ejercicio 2 (10 puntos)

Obtén una expresión booleana en forma de "mínima suma de productos" para la función booleana cuyo conjunto de verdad es $S = \{1100, 1110, 1111, 1011, 1000, 0100, 0000\}$. Resuelve utilizando uno de los dos métodos estudiados: Quine McCluskey o mapa de Karnaugh.

Solución:

* 0000		* 0-00		
* 0100		* -000		
* 1000		* -100		--00
* 1100	$\Rightarrow$	* 1-00	$\Rightarrow$	~~--00~~
* 1011		11-0		
* 1110		1-11		
* 1111		111-		

	1100	1110	1111	1011	1000	0100	0000
11-0	X	X					
1-11			X	X			
111-		X	X				
--00	X				X	X	X

$$\begin{aligned} f(x,y,z,t) &= z't' + xzt + xyt' \\ &= z't' + xzt + xyz \end{aligned}$$

Ejercicio 3

a) **(5 puntos)** Demuestra por inducción que 3 divide a $(n^3 - n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución:

La fórmula es cierta si k = 1, puesto que $1|(1^3 - 1) = 0$.

Hipótesis de inducción:

Supongamos que la fórmula es cierta para $k = n$.

Entonces si $k = n+1$, $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n - n = (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$.

3 divide a cada uno de los dos sumandos, por tanto 3 divide a la suma de ambos y la afirmación es cierta. Luego, se cumple la igualdad para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) **(10 puntos)** Una determinada empresa tiene que transportar 910 paquetes de su producto, para ello dispone de dos transportistas T_1 y T_2. Se sabe que cada envío de T_1 transporta 325 paquetes, mientras que cada envío de T_2 sólo transporta 26. ¿Cuántos envíos debe hacer la empresa con T_1 y T_2 para cumplir el objetivo previsto de enviar exactamente 910 paquetes? Teniendo en cuenta que T_1 cobra 10.000 €por envío y T_2 sólo 1000 €, ¿cuál de las soluciones anteriores es de coste mínimo?

Solución:

Sean x el número de envíos con T_1 e y el número de envíos con T_2.

Hay que resolver la ecuación diofántica $325x + 26y = 910$

$$325 = 26 \cdot 12 + 13$$

$$26 = 13 \cdot 2$$

Puesto que $mcd(325, 26) = 13$ y $13|910 = 13 \cdot 70$, la ecuación tiene soluciones enteras.

$$13 = 325 - 26 \cdot 12 \rightarrow 910 = 13 \cdot 70 = 325 \cdot 70 - 26 \cdot 840$$

La solución general de la ecuación diofántica es

$$\begin{cases} x = 70 + 2t \\ y = -840 - 25t \end{cases} , \forall t \in \mathbb{Z}$$

Puesto que debe ser

$$\begin{cases} x = 70 + 2t \geq 0 \\ y = -840 - 25t \geq 0 \end{cases} \rightarrow t = \begin{cases} -34 \\ -35 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2, y = 10 \\ x = 0, y = 35 \end{cases}$$

Por tanto si calculamos el coste de cada solución resulta ser:

$$\begin{cases} x = 2, y = 10 \rightarrow 2 \cdot 10{,}000 + 10 \cdot 1{,}000 = 30{,}000 \text{ euros} \\ x = 0, y = 35 \rightarrow 35 \cdot 1{,}000 = 35{,}000 \text{ euros} \end{cases}$$

Siendo la solución más barata $x = 2, y = 10$.