MATEMÁTICA DISCRETA I

Ejercicio 1 (7 puntos)

a) Encontrar la expresión más sencilla, en forma de suma de productos, para la función que detecta los números de un solo dígito que son primos o múltiplos de tres, pero no pares.

b) Simplificar, utilizando el método de Quine – McCluskey, la función booleana cuyo conjunto de verdad es S(f) = {11011, 11101, 10111, 01011, 11001, 11100, 10101, 01001, 00110}.

Solución

a) f(x, y, z, t) = xt + yt + zt

	y		y'		
x	12	14	10	8	t'
	13	15	11	9	t
x'	5	7	3	1	
	4	6	2	0	t'
	z'	z		z'	

	y		y'		
x	-	-	-	0	t'
	-	-	-	1	t
x'	1	1	1	0	
	0	0	0	0	t'
	z'	z		z'	

b)

11101	11-01	-10-1
10111	1110-	-10-1
11011	1-101	
01011	101-1	
11001	-1011	
11100	110-1	
10101	010-1	
01001	-1001	
00110		

	11101	10111	11011	01011	11001	11100	10101	01001	00110
-10-1			√	√	√			√	
11-01	√				√				
1110-	√					√			
1-101	√						√		
101-1		√					√		
00110									√

f(x, y, z, t, w) = y z' w + x y z t' + x y' z w + x' y' z t w'

MATEMÁTICA DISCRETA I

Ejercicio 2 (3,5 puntos)

Demostrar por inducción que $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $4^{2n} - 1$ es divisible por 15.

Solución

Si n = 1, $4^{2n} - 1 = 15$ es divisible por 15. Si $4^{2n} - 1$ es divisible por 15, entonces $4^{2(n+1)} - 1 = 4^2 4^{2n} - 1 = 16\,.\,4^{2n} - 1 = 15\,.\,4^{2n} + 4^{2n} - 1$ es divisible por 15.

Ejercicio 3 (8,5 puntos)

Una empresa quiere renovar parte del material informático comprando ordenadores e impresoras. Los ordenadores valen 750 € cada uno y las impresoras 300 € cada una. Si quiere gastar exactamente 3000 €, ¿cuántos ordenadores e impresoras puede comprar?
Describir todas las formas distintas en que puede hacerlo.

Solución

750 x + 300 y = 3000 $\Leftrightarrow$ 5 x + 2 y = 20
Las soluciones de la ecuación diofántica son: x = 20 +2k $\geq$ 0, y = –40 – 5k $\geq$ 0 $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ –8 $\geq$ k $\geq$ –10 por tanto, las soluciones válidas para el problema son:
4 ordenadores y 0 impresoras (k = –8)
2 ordenadores y 5 impresoras (k = –9)
0 ordenadores y 10 impresoras (k = –10)

Ejercicio 4 (9 puntos)

a) Calcular $8!\,(mod\ 11)\ y\ 21^{18}(mod\ 11)$.
b) Comprobar si 299 es primo.
c) Calcular 28^{527} en Z_{299}.

Solución

a) Puesto que p = 11 es primo, entonces 10! $\equiv$ 10 (mód 11) $\Leftrightarrow$ 8!.9.10 $\equiv$ 10 (mód 11) $\Rightarrow$
   8! $\equiv$ 9^{-1} (mód 11) = 5 (mód 11)
   Se tiene que $[21]_{11}^{18} = [-1]_{11}^{18} = [1]_{11}$
b) Se tiene que $17 < \sqrt{299}$, probamos con los primos hasta 17 y resulta que $299 = 13.23$
c) 299 = 13.23 $\Rightarrow$ Φ(299) = Φ(13)·Φ(23) = 12·22 = 264
   mcd (28, 299) = 1 $\Rightarrow$ $28^{\Phi(299)}$ = 1 en Z_{299} $\Rightarrow$ $28^{527} = (28^{264})^2\, 28^{-1} = 28^{-1}$
   el inverso de 28 en Z_{299} es la solución de la ecuación diofántica
   28 x + 299 y = 1 por el algoritmo de Euclides:

   299 = 28.10 + 19
   28 = 19 + 9
   19 = 9.2 + 1

   1 = 19 – 9.2 = 19 – (28–19)·2 =
   19.3 – 28.2 = (299 – 28.10)·3 – 28.2 =
   299.3 + 28·(–32)

   Luego el inverso de 28 en Z_{299} es –32 y 28^{527} = –32 = 267

MATEMÁTICA DISCRETA I

Ejercicio 5 (7 puntos)

Resolver la ecuación $56\,x \equiv 40\ (mod\ 68)$.

Solución

La ecuación en congruencias $56\,x \equiv 40\ (mod\ 68)$ tiene solución si y sólo si mcd(56,68)|40 en cuyo caso hay que resolver la ecuación diofántica 56 x + 68 y = 40.
Por el algoritmo de Euclides:

68 = 56 + 12
56 = 12.4 + 8
12 = 8 + 4
mcd(56,68)=4|40

4 = 12 – 8 = 12 – (56 – 12.4) = 12.5 – 56 =
= (68 – 56). 5 – 56 = 56.(–6) + 68.5
40 = 56.(–60) + 68.50

Las soluciones de la ecuación diofántica son: x = –60 +17k, y = 50 – 14k y la ecuación en congruencias tiene cuatro soluciones distintas en Z_{68} que son: $x_1 = -60 = 8$, $x_2 = -43 = 25$, $x_3 = -26 = 42$, $x_4 = -9 = 59$.