MATEMÁTICA DISCRETA I

PRIMER CONTROL (Soluciones)

Apellidos..**Nombre**....................**nº mat.**......................

Ejercicio 1 (4 puntos)

En el conjunto Z se define la relación $a\ R\ b$ con $a,\ b \in Z$ sí y sólo si $a^2=b^2$. Averigua si se trata de una relación de equivalencia en Z y, de ser cierto, encuentra la clase de equivalencia del elemento 5, es decir [5].

Solución: $[5] = \{-5, 5\}$.

Ejercicio 2 (10 puntos)

Sea D_{72} el conjunto de todos los divisores de 72, y | la relación de divisibilidad $a|b$ sí y sólo si "*a* divide a *b*".

a) Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(D_{72}, |)$.

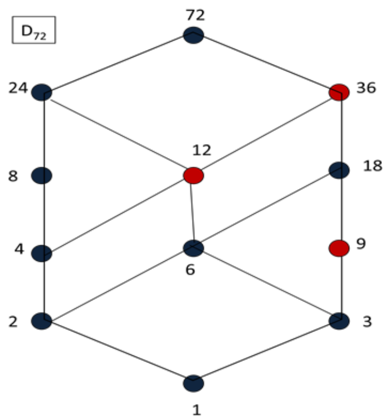
b) Sea B = {9, 12, 36}, encuentra cotas superiores, inferiores, supremo, ínfimo, maximales, minimales, máximo y mínimo, si existen, de B.

c) Encuentra, si existe, el complementario de 9 y el de 18 en $(D_{72}, |)$.

d) Razona si $(D_{72},|)$ es un Álgebra de Boole.

Solución:

a) $n= 72 = 2^3.3^2$ card $D_{72} = 12$



b) Cotas superiores = {36, 72}, Supremo = 36, Cotas inferiores = {3, 1}, Ínfimo = 3

Maximales = {36}, Máximo = 36, Minimales = {9, 12}, Mínimo no $\exists$.

c) el complementario de 9 es 8 y el complementario de 18 no $\exists$.

d) $(D_{72},|)$ no es un Álgebra de Boole porque tiene 12 elementos, su cardinal no es potencia de 2.

Ejercicio 3 (10 puntos)

a) Define, mediante la tabla de verdad, una función booleana que detecte los números primos del conjunto $N_{15} = \{n \in N \text{ tal que } n \leq 15\}$.

b) Obtén una expresión booleana en forma de "mínima suma de productos", utilizando el método de Quine–McCluskey, para la función booleana cuyo conjunto de verdad es

S(f) = {0000, 0001, 0010, 0110, 1000, 1001, 1010, 1011, 1110, 1111}.

Solución:

a)

n	***x y z t w***	***f* (*x*, *y*, *z*, *t*)**
0	0000	0
1	0001	0
2	0010	1
3	0011	1
4	0100	0
5	0101	1
6	0110	0
7	0111	1
8	1000	0
9	1001	0
10	1010	0
11	1011	1
12	1100	0
13	1101	1
14	1110	0
15	1111	0

b)

1111	111–	1–1–
1110	1–11	– –10
1011	1–10	10– –
1010	–110	–0–0
1001	101–	–00–
0110	10–1	
1000	10–0	
0010	–010	
0001	100–	
0000	–001	
	0–10	
	–000	
	00–0	
	000–	

	1111	1110	1011	1010	1001	0110	1000	0010	0001	0000
1–1–	√	√	√	√						
– –10		√		√		√		√		
10– –			√	√	√		√			
–0–0				√			√	√		√
–00–					√		√		√	√

$$f\,(x, y, z, t, w) = x\,z + y'z' + z\,t'$$

Ejercicio 4 (8 puntos)

En Universilandia, a los estudiantes que copian un examen se les condena a 133 años de cárcel, y a los estudiantes que copian una práctica se les condena a 84 años. En el caso de que se les encuentre culpables de más de una copia se les condena a 133 años. En la cárcel de Universilandia hay 15 guardias y un número indeterminado de estudiantes condenados por copiar. Se sabe que el número total de años de condena de estos últimos es de 3605 años. ¿Cuántos estudiantes hay presos?

Solución:

Probamos que existen *x, y* tales que $133x + 84y = 3605$ aplicando el A. de Euclides,

$$\begin{aligned} 133 &= 84.1 + 49 \\ 84 &= 49.1 + 35 \quad \Rightarrow \quad 7 = mcd\,(133, 84) \mid 3605 \\ 49 &= 35.1 + 14 \\ 35 &= 14.2 + 7 \end{aligned}$$

$$7 = 35 - 14.2 = 35 - 2(49 - 35) = -2.49 + 3.35 = -2.49 + 3(84 - 49) = 3.84 - 5.49$$

$$= 3.84 - 5(133 - 84) = -5.133 + 8.84 \;\Rightarrow\; 3605 = -2575.133 + 4120.84$$

$$\begin{cases} x = -2575 + 12t \geq 0 \\ y = 4120 - 19t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 214{,}5\ldots = \frac{2575}{12} \leq t \leq \frac{4120}{19} = 216{,}8\ldots \Rightarrow \quad t = 215 \;\; o \;\; 216$$

$\begin{cases} x = 5 \\ y = 35 \end{cases}$ o $\begin{cases} x = 17 \\ y = 16 \end{cases}$. Hay presos 40 o 33 estudiantes.

Ejercicio 5 (8 puntos)

a) Calcula razonadamente $\Phi(3500)$ donde Φ es la función de Euler.

b) Calcula el resultado de las siguientes operaciones en Z_{289}: $[20]\cdot[3]^{2722} + [26]^{-1}$

Solución:

a) $n = 3500 = 2^2.\,5^3.\,7$ y como mcd (2, 5) = mcd (2, 7) = mcd (5, 7) = 1 entonces

$\Phi(3500) = \Phi(2^2.\,5^3.\,7) = \Phi(2^2)\,\Phi(5^3)\,\Phi(7) = (2^2-2)\,(5^3-5^2)\,6 = 1200.$

b) Como mcd (3, 289) = 1, entonces $3^{\Phi(289)} \equiv 1 \; mod\; 289$

$\Phi(289) = \Phi(17^2) = 17^2 - 17 = 272 \Rightarrow 3^{\Phi(289)} = 3^{272} \equiv 1 \; mod\; 289 \Rightarrow$

$3^{2722} = (3^{272})^{10}\, 3^2 \equiv 9 \; mod\; 289$

Como mcd (26, 289) = 1, existe $x = 26^{-1}$ mod 289.

Por tanto, existen *x, y* tales que $26x - 289y = 1$ Aplicando el A. de Euclides,

$$\begin{aligned} 289 &= 26.11 + 3 \\ 26 &= 3.8 + 2 \quad \Rightarrow \\ 3 &= 2.1 + 1 \end{aligned}$$

$$1 = 3 - 2 = 3 - (26 - 8.3) = -26 + 9.3 = -26 + 9(289 - 26.11) = 9.289 - 100.26$$

$\Rightarrow x \equiv -100 \; mod\; 289 \;\Rightarrow\; [20]\cdot[3]^{2722} + [26]^{-1} = [20]\cdot[9] + [-100] = [80]$ en Z_{289}