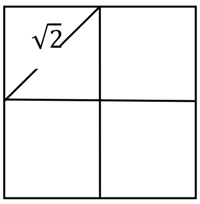
Hoja 7. Técnicas de Contar

Susana Cubillo (2021)

Ejercicios recopilados de los apuntes y Hojas de problemas de los profesores del Dpto. Matemática Aplicada a las TIC (Campus Montegancedo). UPM.

1. Demuestra que si se eligen 5 puntos cualesquiera en un cuadrado de lado 2, al menos dos de ellos se encuentran a una distancia no superior a $\sqrt{2}$.

Sol.:



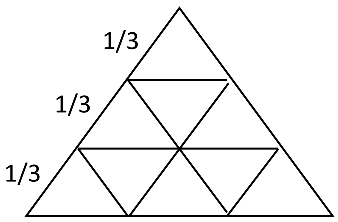
En cada cuadrado la distancia máxima es $\sqrt{2}$, y al menos dos de los puntos quedan en un mismo cuadrado.

2. ¿Cuántos puntos han de elegirse en un cuadrado de lado 2 para asegurar que al menos 2 de ellos estarán a una distancia no superior a $\frac{\sqrt{2}}{n}$?

Sol.: $4n^2$+1.

En efecto, si dividimos el cuadrado en $2n \times 2n = 4n^2$ cuadrados, cada uno medirá $1/n$ de lado, y la diagonal $\frac{\sqrt{2}}{n}$. Si se tienen $4n^2$+1 puntos, al menos dos de ellos quedarán dentro del mismo cuadrado.

3. Demuestra que si se eligen 10 puntos cualesquiera en un triángulo equilátero de lado 1, al menos dos de ellos se encuentran a una distancia no superior a $1/3$.



Sol: En cada triángulo pequeño la distancia máxima es 1/3, y al menos dos puntos quedan en el mismo triángulo

4. ¿Cuál es el mínimo número de estudiantes que debe tener la clase de Matemática Discreta para estar seguros de que al menos 6 estudiantes recibirán la misma nota? (Se supone que sólo hay puntuaciones enteras).

Sol.: Se busca el mínimo número entero x , tal que $\left\lceil \frac{x}{11} \right\rceil = 6$.

Dicho número es $x = 56$

5. Demuestra que en un conjunto de 12 enteros existen dos cuya diferencia es divisible por 11.

Sol.: $\mathbb{Z}_{11} = \{ [0]_{11} , [1]_{11}, \ldots, [10]_{11} \}$. Al menos existen dos números a , b que pertenecen a la misma clase (sólo hay 11 clases). $a \equiv b(mod 11)$, $11/(a - b)$

6. Se eligen $\mathrm{n} + 1$ enteros positivos en el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 3\mathrm{n}\}$. Demuestra que existen dos cuya diferencia es menor o igual que 2.

Sol.: Se forman los subconjuntos $\{1, 2, 3\}, \{4,5,6\}, \ldots \{3\mathrm{n} - 2, 3\mathrm{n} - 1, 3\mathrm{n}\}$. En total hay n subconjuntos, de forma que la diferencia de dos elementos del mismo conjuntos es menor o igual que 2. Al tomar n+1 enteros, al menos dos quedan dentro del mismo subconjunto.

7. Probar que si se eligen 9 números del conjunto $\{ 2, 3, 4,5, \ldots, 12\}$, entonces existirán al menos dos números cuya suma es 18.

Sol.: Los pares $\{8,10\}$, $\{7,11\}$ y $\{6,12\}$ suman 18. En el peor de los casos, en que se eligen los cinco restantes $\{ 2, 3, 4,5,9\}$, falta por elegir 4 entre las tres primeras cajas, por lo que necesariamente hay que elegir dos de alguna de ellas, que suman 18.

8. ¿Cuántos números naturales existen menores que 10^6, cuyas cifras sean todas distintas?

Sol.: $9 + 9 \cdot 9 + 9 \cdot 9 \cdot 8 + 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 + \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$

9. Las placas de matrícula de los vehículos de un cierto país constan de 4 letras seguidas de 3 números. ¿Cuántas placas distintas pueden formarse?

Sol.: $VR_{28,4} \cdot VR_{10,3} = 28^4 \cdot 10^3$

10. ¿Cuántos números naturales existen menores que 10^6 que no sean capicúas?

Sol.: $999.999 - 2 \cdot 9 \cdot (1 + 10 + 100)$

11. ¿Cuántos enteros del 1 al 1000 no son divisibles por 3?

Sol.: $1000 - 333 = 667$

12. Calcula el número de divisores de 112.000. ¿Cuántos son impares?

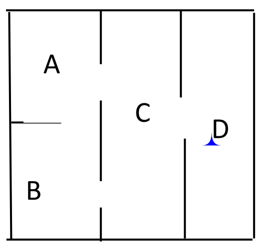
Sol.: Al ser $112.000 = 2^7 \cdot 5^3 \cdot 7$
Número de divisores es $8 \cdot 4 \cdot 2 = 64.$ Impares $4 \cdot 2 = 8$

13. ¿Cuántos divisores positivos tiene el número $2^8 3^5 5^3 7^3 11$? ¿Cuántos son múltiplos de 99? ¿Cuántos son múltiplos de 39?
Sol.: Número de divisores $9 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 1728.$
Múltiplos de 99 : $9 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 576$ Múltiplos d 39: Ninguno

14. ¿Cuántos números de tres cifras distintas tienen todas ellas impares? ¿Y pares?
Sol.: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$

15. Se extraen, con reemplazamiento y ordenadamente, cinco cartas de una baraja de cuarenta. ¿De cuántas formas se puede realizar dicha extracción, de forma que haya al menos un rey? ¿Y de forma que haya al menos un rey o un as?
Sol.: $40^5 - 36^5$; $40^5 - 32^5$

16. Se han de pintar las habitaciones de la casa que se muestra en la figura, de forma que las habitaciones que están conectadas por una puerta tengan colores distintos. ¿De cuántas formas puede pintarse si se dispone de n colores?



Sol.: $n \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdot (n-2)$

17. Lanzando un dado 5 veces ¿Cuántos resultados diferentes pueden obtenerse, si se tiene en cuenta el orden de lanzamiento?
Sol.: $VR_{6,5}$

18. Lanzando 5 dados indistinguibles entre sí ¿cuántos resultados diferentes pueden obtenerse?
Sol.: $CR_{6,5}$

19. Dadas 5 vocales y 4 consonantes, ¿cuántas palabras de 2 vocales y 2 consonantes distintas se pueden formar teniendo en cuenta que en cada palabra no figuran dos consonantes seguidas?
Sol.: $3 \cdot V_{5,2} \cdot V_{4,2} = 720$

20. ¿Cuántas sucesiones de ceros y unos, de longitud n, contienen exactamente tres veces el 0?
Sol.: $C_{n,3}$

21. Calcula cuántas cadenas de ceros y unos de longitud 7,
a) Contienen exactamente 3 unos y 4 ceros.
b) Contienen como máximo 3 unos.
c) Contienen exactamente 4 unos consecutivos.
d) No contienen 4 ó más unos consecutivos.

Sol.: a) $C_{7,3}$ b) $1 + C_{7,1} + C_{7,2} + C_{7,3}$ c) 4 d) $2^7 - (12 + 5 + 2 + 1)$

22. Se tienen siete libros azules, cinco negros y tres blancos, distintos entre sí. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden alinear en un estante si han de colocarse juntos los del mismo color?

Sol.: $P_3 \cdot P_7 \cdot P_5 \cdot P_3$

23. Un circuito eléctrico posee 10 interruptores. Teniendo en cuenta que cada interruptor tiene dos posiciones $\{1, 0\}$, ¿cuántos estados diferentes puede tener el circuito según la posición de los interruptores? ¿Cuántos estados tienen tres interruptores en posición 1 y el resto en posición 0?

Sol.: $VR_{2,10}$; $C_{10,3}$

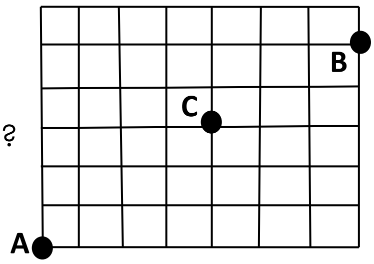
24. ¿De cuántas formas diferentes puede repartirse 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 negras en 10 urnas distintas (etiquetadas) de forma que cada urna contenga una bola?

Sol.: $C_{10,5} \cdot C_{5,3}$

25. La cuadrícula de la figura representa calles de una ciudad. Si las únicas direcciones permitidas de viaje son hacia el este y hacia el norte,

a) ¿Cuántos caminos distintos conducen de A hasta B?

b) ¿Cuántos de ellos pasan por C?



Sol.: $a)\ C_{12,7}$ $\quad b)\ C_{7,3} \cdot C_{5,2}$

26. Extrayendo 5 cartas de una baraja de 40 ¿cuántos resultados diferentes pueden obtenerse: a) con reemplazamiento, b) sin reemplazamiento (el orden de aparición es irrelevante).

Sol.: $a)\ CR_{40,5}$ $\quad b)\ C_{40,5}$

27. Un banco tiene que elegir 5 cargos: director, subdirector, interventor, cajero y cobrador, entre 8 personas, de las cuales 3 son hombres $\{A, E, O\}$ y 5 mujeres $\{X, Y, Z, V, W\}$ ¿De cuántas formas puede hacerse la elección si:

a) Los hombres A y E no pueden estar juntos en la misma elección.

b) Se eligen los tres hombres.

c) Se eligen tres mujeres y dos hombres.

d) Se eligen tres mujeres al menos?

Sol.: a) $V_{8,5} - C_{6,3} \cdot P_5$ b) $C_{5,2} \cdot P_5$ c) $C_{5,3} \cdot C_{3,2} \cdot P_5$

d) $C_{5,3} \cdot C_{3,2} \cdot P_5 + C_{5,4} \cdot C_{3,1} \cdot P_5 + P_5$

28. El consejo de administración de una empresa está compuesto por 5 personas $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$. Se somete a votación secreta la aprobación de un proyecto y nadie puede abstenerse, pero sí votar en blanco. ¿Cuántos resultados distintos se pueden extraer de la urna una vez efectuada la votación? Considerando que se aprueba el proyecto con al menos 3 votos favorables, ¿cuántos resultados de los anteriores aprueban el proyecto?

Sol.: $CR_{3,5} = 21$; $\quad CR_{2,2} + CR_{2,1} + 1 = 6 = CR_{3,2}$

29. De una baraja de 52 cartas, ¿cuántas manos de 5 cartas contienen exactamente 3 reyes?

Sol.: $C_{4,3} \cdot C_{48,2}$

30. Se tienen 5 sobres con sus correspondientes 5 cartas, y se distribuyen al azar las cartas en los sobres. ¿De cuántas formas se pueden distribuir para que ninguna carta quede en su sobre? ¿Y para que sólo una carta quede en su

sobre? ¿Y para que sólo dos cartas queden en su sobre?... ¿Y para que cada carta quede en su sobre?

Sol.: $ninguna\ coincidencia$: D_5 ; $una\ coincidencia$: $5 \cdot D_4$; $dos\ coincidencias$: $C_{5,2} \cdot D_3$; $tres\ coincidencias$: $C_{5,3} \cdot D_2$
$cuatro\ coincidencias$: 0 ; $cinco\ coincidencias$: 1

31. En un tablero de ajedrez de 8×8 casillas, ¿de cuántas formas distintas se pueden colocar 8 torres iguales de forma que ninguna esté en la diagonal principal ni se puedan comer entre ellas?

Sol.: D_8

32. ¿De cuántas formas distintas se pueden escoger cinco cartas de una baraja de 52 cartas, de modo que se tenga al menos una carta de cada palo?

Sol.: $4 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \binom{13}{2}$

33. ¿Cuántas palabras de 13 letras pueden formarse con las letras de la palabra CLASIFICACION?

Sol.: $\binom{13}{3} \cdot \binom{10}{3} \cdot \binom{7}{2} \cdot P_5$

34. Un ascensor de un centro comercial parte del sótano con 5 pasajeros y se detiene en 7 pisos ¿De cuántas maneras distintas pueden descender los pasajeros? ¿Y con la condición de que dos pasajeros no bajen en el mismo piso?

Sol.: $VR_{7,5} = 7^5$; $V_{7,5} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$

35. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 10 canicas idénticas entre 6 niños? ¿Y si las canicas son todas de distintos colores?

Sol.: $CR_{6,10} = \binom{15}{5}$; $VR_{6,10} = 6^{10}$

36. Determina el número de soluciones enteras de la ecuación

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$, donde:

a) $x_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq 4$ b) $x_i > 0, \quad 1 \leq i \leq 4$ c) $x_1, x_2 \geq 5, \quad x_3, x_4 \geq 7$

d) $x_i \geq 8, \quad 1 \leq i \leq 4$ e) $x_i \geq -2, \quad 1 \leq i \leq 4$ f) $x_1, x_2, x_3 > 0, \quad 0 < x_4 \leq 25$

Sol.: a) $CR_{4,32}$ b) $CR_{4,28}$ c) $CR_{4,8}$ d) 1 e) $CR_{4,40}$ f) $CR_{4,28} - CR_{4,3}$

37. ¿Cuántos números hay en el conjunto $\{1, 2, \dots, 1000\}$ tales que la suma de sus dígitos sea 5?

Sol.: $CR_{3,5}$

38. a) ¿Cuántos números enteros entre 1000 y 9999 satisfacen que la suma de sus dígitos es 9?

b) ¿Cuántos números enteros de los hallados en a) tienen todos sus dígitos distintos de cero?

Sol.: a) $\begin{cases} \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 + \mathrm{x}_4 = 9 \\ x_1 \geq 1,\ x_2, x_3,\ x_4 \geq 0 \end{cases}$ $CR_{4,8}$

b) $\begin{cases} \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 + \mathrm{x}_4 = 9 \\ x_i \geq 1 \end{cases}$ $CR_{4,5}$

39. Para vigilar los ocho distritos diferentes de una ciudad, hay un total de 72 policías.

a) ¿De cuántas formas se pueden distribuir los 72 policías entre los ocho distritos, teniendo en cuenta sólo el número de policías que queda en cada distrito, y que en cada distrito debe haber al menos un policía?

b) Sabiendo que el balance total de atracos en el mes de mayo ha sido de 15, y que los distritos tres, cuatro y cinco no han tenido más de cuatro atracos cada uno, halla de cuántas maneras ha podido distribuirse el número de atracos en los distritos.

Sol.: a) $\begin{cases} \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{x}_7 + \mathrm{x}_8 = 72 \\ x_i \geq 1 \end{cases}$ $CR_{8,64}$

b) $\begin{cases} \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{x}_7 + \mathrm{x}_8 = 15 \\ x_3\,,\ x_4\,, x_5 \leq 4 \end{cases}$ $CR_{8,15} - \left[3 \cdot CR_{8,10} - 3 \cdot CR_{8,5} + 1\right]$

40. Calcula el cardinal del conjunto de las listas de ceros y unos de longitud 9 que tienen un número par de ceros.

Sol.: $1 + C_{9,2} + C_{9,4} + C_{9,6} + C_{9,8} = 256$

41. Se considera el código, sobre el alfabeto $\mathrm{B} = \{0, 1\}$, formado por las palabras de 16 dígitos en las que el número de unos es múltiplo de 4. ¿Cuántas palabras distintas puede haber?

Sol.: $1 + C_{16,4} + C_{16,8} + C_{16,12} + 1$

42. El número de manos de 5 cartas de una baraja de 52 cartas que contienen al menos tres picas, no es $C_{13,3} \times C_{49,2}$. ¿Cuál es la respuesta correcta?

Sol.: $C_{13,3} \cdot C_{39,2} + C_{13,4} \cdot C_{39,1} + C_{13,5}$

43. ¿Cuál es el número de cuaternas (a, b, c, d) de números enteros que satisfacen $0 < a < b < c < d < 20$?

Sol.: $C_{19,4}$

44. ¿De cuántas formas se pueden elegir 4 parejas entre 30 personas?

Sol.: $C_{30,8} \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3$

45. Calcular el número de sucesiones que se pueden formar con 3 A, 5 B y 8 C. ¿Y si no puede haber dos B consecutivas? ¿Y si no hay dos letras iguales consecutivas?

Sol.: $C_{16,3} \cdot C_{13,5}$;

$CR_{6,7} \cdot C_{11,3}$;

Entre las 8 C, tenemos 7 lugares para A y B. Además, nos falta otro lugar.

Si el lugar que añadimos está al comienzo o al final, tenemos $C_{8,3}$ posibilidades de colocar las A y las B.

Si el lugar lo añadimos entre dos C, las posibilidades para colocar las A y las B serán $2 \cdot C_{6,2}$.

Por tanto, el número de sucesiones será $2 \cdot C_{8,3} + 7 \cdot 2 \cdot C_{6,2}$.

46. ¿Cuántas sucesiones de 10 símbolos pueden formarse con 4 A, 4 B, 4 C y 4 D, si cada símbolo debe aparecer, al menos, dos veces?

Sol.: $4 \cdot C_{10,4} \cdot C_{6,2} \cdot C_{4,2} + C_{4,2} \cdot C_{10,3} \cdot C_{7,3} \cdot C_{4,2}$

47. a) Una caravana publicitaria consta de 6 coches y 6 furgonetas, siendo todos los vehículos de diferente color. ¿De cuántas formas diferentes puede organizarse la fila de la caravana, con la condición de que no circulen dos furgonetas juntas?

b) Si se suprimen dos furgonetas, ¿cuántas caravanas diferentes se pueden formar con la condición anterior?

Sol.: a) $7 \cdot P_6 \cdot P_6$ b) $CR_{5,3} \cdot P_6 \cdot P_4$

48. La suma de las edades de los 102 alumnos matriculados en una asignatura es 2002.

a) Demuestra que existe un conjunto de seis alumnos cuyas edades suman al menos 118.

b) Los seis alumnos anteriores se reúnen para estudiar y disponen de dos mesas circulares iguales. ¿De cuántas formas diferentes pueden sentarse ocupando ambas mesas?

Sol.: a) Se tienen 17 grupos de 6 alumnos , y $\left\lceil\frac{2002}{17}\right\rceil = 18$

b) $6 \cdot P_4 + C_{6,2} \cdot P_3 + C_{6,3} \cdot P_2 \cdot P_2$

49. En un centro de enseñanza se reciben solicitudes de ingreso, que se atienden según las calificaciones de las siguientes asignaturas: Matemáticas, Física, Química e Inglés. Cada asignatura tiene una puntuación entera entre 5 y 10.

a) ¿Cuántos expedientes académicos diferentes se pueden recibir?

b) ¿Cuántos de ellos tienen de nota media 7?

Sol.: a) $VR_{6,4}$ b)) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 28 \\ 5 \leq x_i \leq 10 \end{cases}$ $CR_{4,8} - 4 \cdot CR_{4,2}$

50. a) En las aulas 1, 2, 3 y 4 de la Escuela de Caminos se van a examinar 192 alumnos de la asignatura de Matemáticas. Suponiendo que no hay limitación en la capacidad de las aulas, ¿de cuántas formas se puede efectuar la distribución de los alumnos en las aulas, teniendo en cuenta no sólo cuántos alumnos entran en cada una, sino también cuáles?

b) Como la capacidad de las aulas sí es limitada, se introducen, entre todas las aulas, un total de 54 sillas auxiliares para la realización del examen. Si en cada aula no caben más de 20 sillas, ¿de cuántas formas se puede efectuar el reparto de sillas en las aulas?

Sol.: a) $VR_{4,192}$ b) $CR_{4,54} - (4 \cdot CR_{4,33} - C_{4,2} \cdot CR_{4,12})$

51. a) ¿Cuántos enteros positivos podemos expresar como un producto de nueve números primos, si los números primos deben elegirse del conjunto $\{2, 3, 5, 7, 11\}$?

b) ¿Cuántos de estos resultados anteriores son divisibles entre cuatro?

Sol.: a) $CR_{5,9}$ b) $CR_{5,7}$

52. Se considera el conjunto $\{p_1, p_2, p_3, p_4, -p_5, -p_6, -p_7, -p_8, -p_9, -p_{10}\}$, con p_i primos distintos entre sí.

a) ¿Cuántos productos diferentes pueden obtenerse con 6 números distintos?¿Y si los factores pueden repetirse?

b) En cada uno de los dos casos del apartado anterior, ¿cuántos serán positivos?

Sol.: a) $C_{10,6}$; $CR_{10,6}$

b) $C_{6,2} + C_{4,2} \cdot C_{6,4} + 1$; $CR_{4,6} + CR_{4,4} \cdot CR_{6,2} + CR_{4,2} \cdot CR_{6,4} + CR_{6,6}$

53. ¿De cuántas formas distintas se pueden repartir 18 galletas idénticas entre 4 niños, teniendo en cuenta que cada niño debe tener al menos tres galletas?

Sol.: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18 \\ 3 \leq x_i \end{cases}$ $CR_{4,6}$

54. El profesor McBrain ha enseñado la misma asignatura durante los últimos 12 años, y cada año cuenta 3 chistes distintos sin repetir los mismos tres chistes nunca.

a) ¿Cuántos chistes como mínimo ha de saber, si no importa el orden en que los cuenta?

b) ¿Cuántos años podrá seguir contándolos sin tener que repetir los mismos tres chistes?

Sol.: a) $C_{x,3} \geq 12$, y por tanto, $x = 6$ b) $C_{6,3} = 20$. Por tanto 8 años más

55. Por un canal de comunicación, se va a transmitir un mensaje usando 12 símbolos diferentes y 45 espacios en blanco entre los símbolos, con 3 espacios como mínimo entre cada par de símbolos consecutivos. ¿De cuántas formas se puede mandar el mensaje?

Sol.: $P_{12} \cdot CR_{11,12}$

56. Una persona tiene 12 libros en una fila de una estantería. ¿De cuántas formas puede escoger 5 libros de modo que no elija dos de ellos consecutivos?

Sol.: $CR_{6,3}$

57. En el juego del dominó, cada ficha se puede representar como $[x, y]$, con $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, no necesariamente distintos. Explicar matemáticamente por qué el total de fichas es 28 y no $7^2 = 49$.

Sol.: $CR_{7,2}$

58. Cada uno de los 52 estados de EEUU tiene 2 senadores. Se elige un Comité formado por 25 senadores.

a) ¿De cuántas formas puede hacerse la elección?

b) ¿En cuántos casos de los anteriores hay al menos un representante del estado de Florida?

c) Una vez elegido el Comité de 25 senadores hay que elegir Presidente, Vicepresidente y Secretario del Comité ¿De cuántas formas distintas puede hacerse la elección?

d) Para hacer un estudio de un problema determinado, se elige de entre los miembros del Comité una Comisión formada por 10 personas. Si deben estar en dicha Comisión, al menos el Presidente, o el Vicepresidente, o el Secretario del Comité, ¿de cuántas formas distintas se puede elegir la Comisión?

Sol.: a) $C_{104,25}$ b) $C_{104,25} - C_{102,25}$ c) $V_{25,3}$ d) $C_{25,10} - C_{22,10}$

59. ¿Cuántas veces, como mínimo, debe lanzarse un par de dados iguales para asegurar que alguna suma aparezca cuatro veces?

Sol.: $\left\lceil \frac{x}{11} \right\rceil = 4.$ Por tanto, $x = 34$

60. Se tiene un conjunto de cinco libros distintos de computación, tres libros distintos de matemáticas y dos libros distintos de arte. ¿De cuántas formas distintas se pueden ordenar estos libros en un estante, si los tres libros de matemáticas deben colocarse juntos, y los dos libros de arte no deben colocarse juntos?

Sol.: Formas en las que los tres de matemáticas están juntos: $P_8 \cdot P_3$ Formas en las que los tres de matemáticas juntos y dos de arte juntos: $P_7 \cdot P_3 \cdot P_2$. Por tanto, $P_8 \cdot P_3 - P_7 \cdot P_3 \cdot P_2 = P_7 \cdot P_3 \cdot (8-2) = P_7 \cdot P_3 \cdot 6$

61. Un chico tiene una asignación mensual de 60 euros y gasta cada sábado al menos 12 euros ¿de cuántas formas distintas puede hacer el gasto de toda su asignación, en los cuatro sábados de un mes?

Sol.: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 60 \\ 12 \leq x_i \end{cases}$ $CR_{4,12}$

62. De una baraja de 52 cartas, ¿cuántas cartas es preciso sacar, como mínimo, para tener la seguridad de obtener al menos 7 del mismo palo?

Sol.: $\left\lceil \frac{x}{4} \right\rceil = 7.$ Por tanto $x = 25$

63. Un grupo de 6 amigos se reúne para cenar en un restaurante que tiene capacidad para 110 personas en total, y que dispone de 19 mesas. ¿Habrá alguna mesa en la que pueden acomodarse juntos los 6 amigos?

Sol.: $\left\lceil \frac{110}{11} \right\rceil = \lceil 5,. \rceil = 6$ SI

64. En un lote de 100 ordenadores se sabe que 10 de ellos contienen circuitos integrados dañados. Se selecciona una muestra de 7 ordenadores de forma aleatoria para realizar un chequeo. Calcular el número de muestras que contienen

a) Exactamente 3 ordenadores con circuitos defectuosos.

b) Al menos un ordenador con circuitos defectuosos.

Sol.: a) $C_{10,3} \cdot C_{90,4}$ b) $C_{100,7} - C_{90,7}$

65. A partir de un grupo de 25 personas, de las que 15 son alemanes y 10 son franceses, debe formarse una delegación constituida por 8 personas. ¿De cuántas formas puede elegirse dicha delegación si deben pertenecer a ella más alemanes que franceses?

Sol.: $C_{15,8} + C_{15,7} \cdot C_{10,1} + C_{15,6} \cdot C_{10,2} + C_{15,5} \cdot C_{10,3}$

66. ¿Cuántos enteros positivos menores que 10^6 tienen un único dígito igual a 9 y la suma de todos sus dígitos igual a 19?

Sol.: Si el 9 está en el primer lugar:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \\ x_i \leq 8 \end{cases} \qquad CR_{5,10} - 5 \cdot CR_{5,1}$$

Por tanto, $6 \cdot (CR_{5,10} - 5 \cdot CR_{5,1})$

67. En un examen tipo test hay diez preguntas, y para cada respuesta hay dos posibilidades: Acertar o Fallar. Si se aprueba con 5 o más respuestas acertadas,

a) ¿Cuántas soluciones distintas dan aprobado?

b) El número de soluciones que dan aprobado ¿es mayor, menor o igual que el número de soluciones que dan suspenso?

Sol.: a) $C_{10,5} + C_{10,6} + C_{10,7} + C_{10,8} + C_{10,9} + 1$

b) Núm. de sol en las que no aprueba: $1 + C_{10,1} + C_{10,2} + C_{10,3} + C_{10,4}$
Es mayor el número de soluciones que dan aprobado

68. En una bolsa hay caramelos de varios sabores: fresa, naranja, limón y menta, 30 de cada sabor. Extraemos 15 caramelos de la bolsa.

a) ¿Cuántas extracciones diferentes se pueden realizar de forma que al menos haya dos caramelos de fresa?

b) ¿Y de forma que haya a lo más 5 de cada sabor?

Sol.: a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ x_i \geq 2 \end{cases}$ $\quad CR_{4,13}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ x_i \leq 5 \end{cases}$ $\quad CR_{4,15} - (4 \cdot CR_{4,9} - C_{4,2} \cdot CR_{4,3})$

69. a) En una liga de baloncesto participan 8 equipos. ¿De cuántas maneras se puede planificar los partidos de la primera jornada?

Cada partido consta de 4 tiempos. Si en cada tiempo participan 5 jugadores y cada componente del equipo ha de jugar al menos 1 tiempo y no más de 3, contestar a las siguientes preguntas:

b) En un equipo con 10 integrantes, el entrenador decide que ninguno de ellos participe dos tiempos consecutivos. ¿De cuántas maneras puede elegir los componentes de los cuatro tiempos?

c) En un equipo con 8 componentes, ¿de cuántas maneras se puede elegir el número de tiempos que intervendrá cada jugador del equipo?

Sol.: a) $7 \cdot 5 \cdot 3$ b) $C_{10,5}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_7 + x_8 = 20 \\ 1 \leq x_i \leq 3 \end{cases}$

$$CR_{8,12} - [8 \cdot CR_{8,3} - C_{8,2} \cdot CR_{8,6} + C_{8,3} \cdot CR_{8,3} - C_{8,4} \cdot CR_{8,0}]$$

70. Una pandilla de 8 chicos y 5 chicas va al cine y se sientan todos juntos en una fila. Si ningún par de chicas quiere sentarse juntas, ¿de cuántas formas pueden sentarse?

Sol.: $CR_{6,4} \cdot P_8 \cdot P_5$

71. En el plan de estudios de una carrera hay 20 asignaturas optativas de 3º curso y 30 de 4º, de las cuales el alumno debe elegir 4 en 3º y 6 en 4º.

a) Si no hay ninguna restricción, ¿de cuántas maneras se puede cursar la carrera?

b) Hay dos asignaturas de 4º (A y B) y otras dos de 3º (C y D) que tienen los siguientes requisitos:

- Si se escoge A es necesario escoger B
- Para escoger B es necesario haber cursado C
- Si se escoge C es necesario escoger D

¿De cuántas maneras se puede cursar la carrera?

c) En Jefatura de Estudios se agrupan las asignaturas optativas de 4º curso de dos en dos con el mismo horario. Si suponemos que se realizan todas las asignaturas de un curso en un solo año académico, ¿de cuántas formas se puede cursar la carrera?

Sol.: a) $C_{20,4} \cdot C_{30,6}$

b) Si escoge A : $C_{18,2} \cdot C_{28,4}$

Si No escoge A y Sí escoge B: $C_{18,2} \cdot C_{28,5}$

Si No escoge A, No escoge B, y Sí escoge C: $C_{18,2} \cdot C_{28,6}$

Si No escoge A, No escoge B, No escoge C: $C_{19,4} \cdot C_{28,6}$

En total: $C_{18,2} \cdot C_{28,4} + C_{18,2} \cdot C_{28,5} + C_{18,2} \cdot C_{28,6} + C_{19,4} \cdot C_{28,6}$

c) $C_{20,4} \cdot C_{15,6} \cdot 2^6$