Tema 5. Relaciones de Recurrencia

5.1 Relaciones de Recurrencia

→ Definición: Relación de recurrencia o recursiva para una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una expresión que relaciona el término general dicha sucesión, a_n, con uno o más de los término precedentes a_k , $k \leq n$.

→ Ejemplos de sucesiones de recurrencia.

→ Definición: Una relación de recurrencia lineal de orden k es una relación de la forma:

$$a_n = c_1(n)a_{n-1} + c_2(n)a_{n-2} + \cdots + c_k(n)a_{n-k} + g(n),$$

donde $g, c_i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Además, si $g(n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, se dice que es una relación de recurrencia homogénea.

→ Ejemplos de relaciones de recurrencia lineales.

5.2. Relaciones de Recurrencia lineales homogéneas

→ Definiciones: Relación de recurrencia lineal homogénea con coeficientes constates. Polinomio característico.

→ Teorema: α es raíz del polinomio característico

$$f(x) = x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \cdots - c_k$$

si y sólo si α^n es solución de la recurrencia $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k}$.

→ Teorema: Si α es raíz con multiplicidad $r > 1$ del polinomio característico

$$f(x) = x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \cdots - c_k$$

entonces $\{\alpha^n,\ n\,\alpha^n,\ n^2\alpha^n,\ \ldots, n^{r-1}\alpha^n\}$ son soluciones de la relación de recurrencia $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k}$.

→ Teorema: Si x_n, y_n son soluciones de la relación de recurrencia

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k},$$

entonces $\{A\, x_n + B\, y_n,\ \ A, B\ \in \mathbb{R}\}$ son soluciones de la misma relación de recurrencia.

→ Ejemplo: Sucesión de Fibonacci. Otras sucesiones.

5.3. Recurrencias lineales no homogéneas

→ Definición: Solución particular de la ecuación lineal de coeficientes constantes, no homogénea

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + \ c_k a_{n-k} + g(n),$$

→ Obtención de una solución particular de la completa $P(n)$:

Si $g(n) = R(n) \cdot b^n$, entonces existe una solución particular del tipo $Q(n) \cdot n^r \cdot b^n$, donde $Q(n)$ es un polinomio del mismo grado que $R(n)$ y r es la multiplicidad en que b es raíz del polinomio característico (en particular, si b no es raíz, nos quedaría $n^0 = 1$.

→ Obtención de la solución general de la completa :

1) Se obtiene la solución general de la homogénea asociada, $S(n)$.
2) Se obtiene una solución particular de la completa $P(n)$.
3) La solución general de la completa es $a_n = P(n) + S(n)$.
4) Si se tienen condiciones iniciales, se exigen, para obtener el término general de la sucesión.

→ Ejemplo: Torres de Hanoi

Hoja 8. Relaciones de Recurrencia.(2020)

1. Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia homogéneas, con sus condiciones iniciales:
   a) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, con $n \geq 2$, $a_0 = 6$, $a_1 = 8$.
   b) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$, con $n \geq 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$.
   c) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, con $n \geq 2$, $a_0 = 4$, $a_1 = 1$.
   d) $a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n$, con $n \geq 0$, $a_0 = 2$, $a_1 = 8$.
   e) $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, con $n \geq 3$, $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, $a_2 = 15$.
   f) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, con $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.
   g) $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, con $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = -6$.

2. Sea a_n el número de palabras de longitud n formadas con los dígitos $\{0,1\}$, que no tienen dos ceros consecutivos. Encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n y resuélvela.

3. Halla una relación de recurrencia para el número de formas en que una persona puede subir n escalones, si puede subir uno o dos peldaños en cada paso.

4. Sean n rectas trazadas en el plano de forma que cada recta corte a las restantes, pero que no haya tres coincidentes. Para cada $n \geq 0$, sea a_n el número de regiones en que las n rectas dividen al plano y sea b_n el número de regiones infinitas.
   a) Encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n y resuélvela.
   b) Encuentra una relación de recurrencia para calcular b_n y resuélvela.

5. Problema de las Torres de Hanoi (Ëdouard Lucas): Se tienen n discos y 3 estacas. Los discos están apilados en la estaca 1, ordenados de mayor a menor. El objetivo es pasar los discos uno por uno a otra estaca, colocados en el orden original. En el proceso no se permite que un disco mayor se coloque sobre otro menor. Si a_n es el número de movimientos que se requieren para hacer esto, encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n, y resuélvela.

6. Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia no homogéneas, con sus condiciones iniciales:

   a) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2n - 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 3n^2 \\ a_0 = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 7^n 5 \\ a_0 = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 3^n 5 \\ a_0 = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3} + n^2 \\ a_0 = 11,\ a_1 = 1\ ,\ a_2 = -1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n \\ a_0 = 1,\ a_1 = 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} - 5 \cdot 4^n \\ a_0 = 1,\ a_1 = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 1 \\ a_1 = 2,\ a_2 = 3 \end{cases}$

i) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 5 \cdot 2^n \\ a_0 = 2,\ a_1 = 4 \end{cases}$

7. Sea $M = \{A, B, C\}$ y sea S_n el conjunto de sucesiones de longitud n , formadas con las letras de M, en las que todas las cadenas de A-es son de longitud par. Encuentra una relación de recurrencia para calcular S_n y resuélvela.

8. Se pretende diseñar una bandera con n franjas horizontales, cada una de las cuales puede ser de color rojo, azul, verde o amarillo. Hallar cuántas son las banderas posibles en cada una de las siguientes situaciones:

   a) No hay restricciones sobre el color de cada franja.

   b) Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color.

   c) Sea a_n el número de banderas que se pueden formar con n franjas horizontales, con los cuatro colores dados y tales que dos franjas adyacentes no sean del mismo color ni tampoco sean del mismo color la primera y la última franja. Hallar una relación de recurrencia para a_n. (Indicación: Hacer $n = 4$ y generalizar para n , con $a_1 = 0$.)

   d) Resolver la ecuación de recurrencia obtenida en el apartado anterior

9. Halla, mediante una relación de recurrencia, la suma $a_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k$, en función de n.

10. Hallar una relación de recurrencia para el número de listas a_n de longitud n formadas con los elementos 0, 1 y 2, en las que el elemento 1 no aparece nunca en el lugar posterior a un 2.

11. Sea $g(n) = \binom{n}{k}$, donde ambos números son naturales, $n \geq k$, y k fijo. Sabiendo que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, obtener una relación de recurrencia para calcular $g(n)$.

12. Sea $A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad n \in \mathbb{N}$.

a) Halla una relación de recurrencia para la sucesión cuyo término general es $D_n = \det A_n$

b) Resuelve la relación de recurrencia $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2} + 1$, con las condiciones iniciales $D_1 = 2$, $D_2 = 3$.

13. Se tiene una cantidad ilimitada de cubos de lado 1cm., 2 cm. y 4 cm., y se quiere construir una torre apilando cubos. Encuentra una relación de recurrencia para hallar el número de formas distintas T_n de construir una torre de altura n cms.