1ER PARCIAL DE MATEMÁTICA DISCRETA I DEL GII Y ADE ✦ OCTUBRE 2021

TIEMPO: 2 HORAS   Nº MATRÍCULA: ____________   GRUPO: __________

APELLIDOS: ______________________________   NOMBRE: __________

NOTA: NO SE PERMITE EL USO DE DISPOSITIVOS ELECTRÓNICOS

Resuelva cada ejercicio en hojas distintas.

1. (a) [2 puntos] Sea la relación en el conjunto $\{a, b, c\}$ dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

razone si se trata de una relación de equivalencia.

Solución: No es relación de equivalencia ya que no cumple la propiedad transitiva: $a\,R\,b$, y $b\,R\,c$ pero $a \not R\, c$.

(b) [2 puntos] Sea A un conjunto no vacío y considere el conjunto ordenado $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, donde $\mathcal{P}(A)$ denota el conjunto de las partes de A. Discuta cuándo el orden $\subseteq$ es total o parcial en función del cardinal de A.

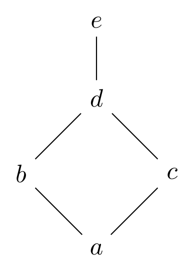
Solución: Dado que el conjunto A es no vacío tendrá cardinal estrictamente positivo.

Supongamos en primer lugar que el conjunto A tiene cardinal uno. En ese caso, se tiene que $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, A\}$ y por tanto cualquier par de elementos de $\mathcal{P}(A)$ son comparables. Esto se sigue de que una relación de orden es en particular reflexiva ($\varnothing \subseteq \varnothing$ y $A \subseteq A$) y de que $\varnothing \subseteq A$. Por tanto, si el cardinal de A es uno se trataría de un orden total.

Supongamos ahora que el cardinal de A es mayor o igual que dos. Escojamos entonces dos elementos diferentes x, y en A. Se tiene entonces que $\{x\}$, $\{y\} \in \mathcal{P}(A)$, pero sin embargo ni $\{x\}$ está contenido en $\{y\}$ ni viceversa (nótese que x e y fueron escogidos diferentes). Por tanto, los elementos $\{x\}$, $\{y\} \in \mathcal{P}(A)$ no son comparables y el orden no sería total.

En conclusión, si el cardinal de A fuese uno, el orden sería total, mientras que si el cardinal fuese estrictamente mayor que uno, el orden sería parcial.

(c) [2 puntos] Del siguiente diagrama de Hasse correspondiente a un conjunto ordenado, indique cuáles de sus elementos tienen complementario.



Solución: Los únicos que tienen complementario son a y e, que son el máximo y el mínimo del conjunto ordenado, y que son complementario uno del otro.

(d) [2 puntos] ¿Existe un retículo acotado, complementario y distributivo de 6 elementos? Justifique su respuesta, y si existe, muestre uno.

Solución: No, ya que sería un álgebra de Boole, y en este caso el número de elementos es una potencia de 2, y en este caso, 6 no es una potencia de 2.

(e) [2 puntos] Calcule el cardinal del conjunto de divisores de 1173, D_{1173}.

Solución: Como $1173 = 3 \cdot 391 = 3 \cdot 17 \cdot 23$,

$$D_{1173} = \{1, 3, 17, 23, 3 \cdot 17, 3 \cdot 23, 17 \cdot 23, 1173\},$$

y su cardinal es 8.

2. Sea R una relación en $\mathbb{Z}$ definida por: $x\,R\,y$ si $|x| = |y|$, donde $|a|$ denota el valor absoluto de a.

(a) [2 puntos] Demuestre que R es una relación de equivalencia.

Solución: Para cualquier entero x se tiene que $|x| = |x|$. Por tanto $x\,R\,x$ para cada entero x y la relación R es reflexiva. Sean x, $y \in \mathbb{Z}$ tales que $x\,R\,y$. Entonces $|x| = |y|$, por tanto $|y| = |x|$, lo que implica que $y\,R\,x$ y la relación R es simétrica. Finalmente, sean x, y, $z \in \mathbb{Z}$ tales que $x\,R\,y$ e $y\,R\,z$. De ahí se deduce que $|x| = |y|$ y que $|y| = |z|$, de donde $|x| = |y| = |z|$, con lo que xSz y R es una relación transitiva. Dado que R es reflexiva, simétrica y transitiva, es una relación de equivalencia.

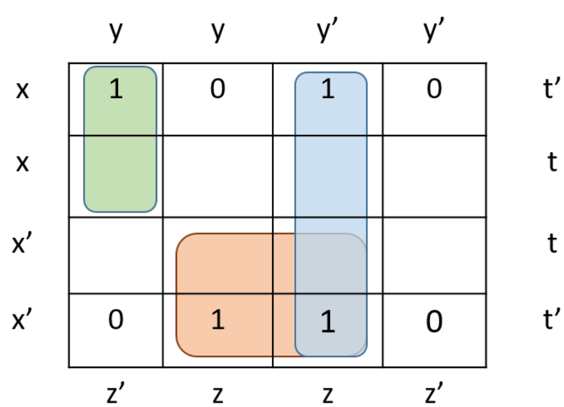
(b) [2 puntos] Halle las clases de equivalencia $[a]_R$, donde $a \neq 0$, y $[0]_R$.

Solución: Sea a un entero no nulo. Entonces un entero b pertenecerá al conjunto clase de a, que denotamos por $[a]$, si y solo si $|a| = |b|$. Esto sucederá si y solo si $b \in \{a, -a\}$, dado que a y $-a$ son los únicos enteros cuyo valor absoluto es a. Por tanto, $[a] = \{a, -a\}$ para cada entero a no nulo.

Para $[0]$, es claro que el único elemento que está relacionado consigo mismo es el 0, luego $[0] = \{0\}$.

3. [6 puntos] Defina una expresión booleana mínima en suma de productos que detecte los números $\{2, 6, 10, 12\}$ dentro del conjunto de los números pares menores estrictamente que 16: $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$.

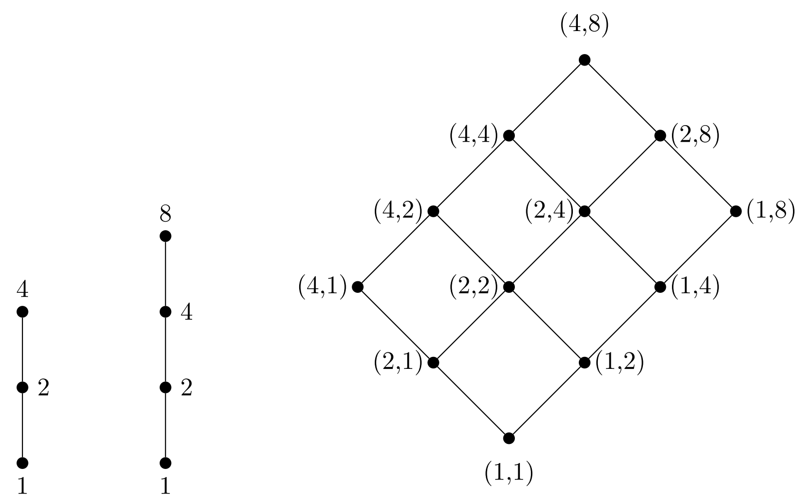
Solución: Escribimos el mapa de Karnaugh correspondiente a esta función booleana.



En el mapa de Karnaugh hemos agrupado las celdas con 1 en bloques maximales, cubriendo dichas celdas. Cada uno de los bloques representa un producto: verde, xyz'; rojo, $x'z$; y amarillo, $y'z$. Se observa que no podemos prescindir de ningún bloque, por lo que la expresión booleana mínima en suma de productos es $xyz' + x'z + y'z$.

4. (a) [3 puntos] Dibuje el diagrama de Hasse de los retículos $(D_4, |)$, $(D_8, |)$ y $(D_4 \times D_8, \leq_{\text{PROD}})$. Aquí, $a \mid b$ denota que a divide a b.

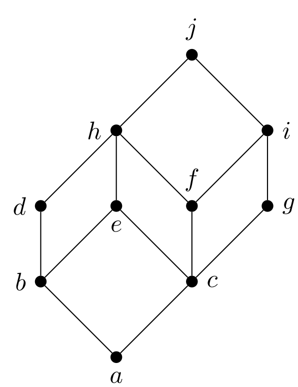
Solución: Los diagramas de Hasse de $(D_4, |)$, $(D_8, |)$ y $(D_4 \times D_8, \leq_{PROD})$ son, respectivamente:



(b) [2 puntos] Encuentre un número natural n tal que $(D_n, |)$ tenga el mismo diagrama de Hasse que $(D_4 \times D_8, \leq_{\text{PROD}})$.

> **Solución:** Vale cualquier número natural de la forma $n = p_1^2 \cdot p_2^3$ con p_1 y p_2 dos números primos distintos, por ejemplo, $n = 2^3 \cdot 3^2 = 72$.

(c) [3 puntos] Sea el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ con el orden dado por el siguiente diagrama de Hasse:



Dado $B = \{b, c, e, f\} \subset A$, encuentre cotas inferiores, superiores, ínfimo y supremo, si existen, de B en A, y minimales, maximales, mínimo y máximo, si existen, de B.

Solución: Cotas Inferiores de $B = \{a\}$, y por tanto $\inf B = a$.
Cotas Superiores de $B = \{h, j\}$ y $\sup B = h$.
Minimales de $B = \{b, c\}$, y por tanto no existe $\min B$.
Maximales de $B = \{e, f\}$, luego no existe $\max B$.

5. [4 puntos] Demuestre por inducción que $9^n + 3$ es divisible por 4 para $n \geq 0$.

Solución: Vamos a probar la igualdad usando el principio de inducción. Para ello debemos ver que

- (caso $n = 0$) 4 divide a $9^0 + 3 = 4$, lo que es obvio.
- (paso de inducción) Si 4 divide a $9^n + 3$, entonces también divide a $9^{n+1} + 3$.

Para el paso de inducción, aplicamos la siguiente cadena de igualdades

$$9^{n+1} + 3 = 9 \cdot 9^n + 3 = (9^n + 3) \cdot 9 - 3 \cdot 9 + 3 = (9^n + 3) \cdot 9 - 24$$

Por hipótesis de inducción, 4 divide a $9^n + 3$. Como también divide a 24, entonces divide a su diferencia $(9^n + 3) \cdot 9 - 24$, que es $9^{n+1} + 3$. Con esto se demuestra el paso de inducción.

Con estos dos pasos, se demuestra por inducción que 4 divide a $9^n + 1$.

6. Un transportista lleva mercancías desde ciudad Celeste hasta pueblo Paleta y pueblo Lavanda que cada uno está, respectivamente, a 25 y 40 kilómetros de distancia de la ciudad. El depósito del camión que usa para el reparto tiene gasolina para 600 km.

   (a) [2 puntos] Asumiendo que en cada reparto tiene que volver a ciudad Celeste, plantea la ecuación diofántica que modela el número de viajes que puede realizar a los dos destinos gastando todo el depósito.

   (b) [6 puntos] Asumiendo además que tiene que hacer al menos un reparto a cada pueblo, use el algoritmo de Euclides para hallar cuántos repartos puede realizar a cada pueblo usando todo el depósito.

Solución: La ecuación diofántica es

$$50x + 80y = 600,$$

(50 kilómetros ida y vuelta a pueblo Paleta, y 80 kilómetros ida y vuelta a pueblo Lavanda). Esta ecuación es equivalente a

$$5x + 8y = 60.$$

Calculamos los coeficientes de Bézout para el par $(5, 8)$:

$$\begin{aligned}
8 &= 5 \cdot 1 + 3, & \qquad 3 &= 8 - 5 \cdot 1,\\
5 &= 3 \cdot 1 + 2, & \qquad 2 &= 5 - 3 \cdot 1,\\
3 &= 2 \cdot 1 + 1, & \qquad 1 &= 3 - 2 \cdot 1,\\
2 &= 1 \cdot 2 + 0, & &
\end{aligned}$$

de donde deducimos que

$$1 = 3 - 2 \cdot 1 = 3 - (5 - 3 \cdot 1) \cdot 1 = 2 \cdot 3 - 5 = 2 \cdot (8 - 5 \cdot 1) - 5 = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5.$$

Por tanto $5x + 8y = 1$ tiene una solución particular $(x, y) = (-3, 2)$, y de ahí que $(x, y) = (-180, 120)$ sea una solución particular de $5x + 8y = 60$.

Las soluciones a la ecuación diofántica homogénea $5x + 8y = 0$ son $(x_h, y_h) = (8k, -5k)$ para $k \in \mathbb{Z}$, luego la solución general es

$$(x, y) = (8k - 180, 120 - 5k)\,.$$

Como al menos tiene que hacer un viaje a cada destino, debe ocurrir que $x, y \geq 1$, por lo que

$$\begin{cases} 8k - 180 \geq 1, \\ 120 - 5k \geq 1, \end{cases}$$

de donde se deduce que $22 < k < 24$: de ahí que la única solución sea $k = 23$. Para ese valor de k, $(x, y) = (4, 5)$, luego el transportista hace 4 viajes a pueblo Paleta, y 5 a pueblo Lavanda.