Hoja 2. Relaciones, aplicaciones, relaciones de equivalencia

Susana Cubillo (2020)

Ejercicios recopilados de los apuntes y Hojas de problemas de los profesores del Dpto. Matemática Aplicada a las TIC (Campus Montegancedo). UPM.

1. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 3, 5\}$, y la relación R de A en B definida por $a\ R\ b \iff a < b$, describe los pares de la relación.

   Sol.: $R = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5), (4,5)\}$

2. En el conjunto $\mathbb{Z}$ se define la relación aRb si y sólo si $a^2 = b^2$. Averigua si se trata de una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$ y, de ser cierto, encuentra la clase de equivalencia del elemento 5, es decir $[5]$.

   Sol.: *Reflexiva*. SI . Para todo $a \in \mathbb{Z}$, aRa , ya que $a^2 = a^2$
   Simétrica. SI. Para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, si aRb , entonces $a^2 = b^2, b^2 = a^2$ y bRa
   Transitiva. SI. Para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, si aRb y bRc , entonces $a^2 = b^2$ y $b^2 = c^2$.
   Por tanto $a^2 = c^2$ y aRc . Finalmente, SI es relación de equivalencia.

   $[5] = \{5, -5\}$

3. Dados los conjuntos $A = \{2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{3, 6, 7, 10\}$ y la relación de divisibilidad R de A en B, $a\ R\ b \iff 'a'\ divide\ a\ 'b' \iff b\ es\ múltiplo\ de\ a$, describe los pares de la relación.

   Sol.: $R = \{(2, 6), (2, 10), (3, 3), (3, 6), (5, 10)\}$

4. Sea el conjunto $\wp(S)$ de todos los subconjuntos de $S = \{a, b\}$, y la relación R definida en $\wp(S)$ por $A\ R\ B \iff |A \cap B| = 1$. Averiguar si es una relación reflexiva, simétrica y/o transitiva.

   Sol.: *Reflexiva*. No. Por ejemplo, dado $\{a, b\} \in \wp(S)$,
   $$|\{a, b\} \cap \{a, b\}| = |\{a, b\}| = 2$$

Simétrica. Si. Para todo $M, N \in \wp(S)$, si $M\;R\;N$, entonces $|M \cap N| = 1$, $|N \cap M| = 1$, y finalmente, $N\;R\;M$.

Transitiva. No. $\{a\}\;R\;\{a,b\}$ y $\{a,b\}\;R\;\{b\}$, pero NO es cierto $\{a\}\;R\;\{b\}$.

5. Estudiar si las relaciones en el conjunto $A = \{a,b,c\}$, dadas por las siguientes matrices, son reflexivas, antisimétricas y transitivas.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.: M no reflexiva, no simétrica, no transitiva (a R c, c R b , pero no es cierto a R b)

N no reflexiva, no simétrica, sí transitiva

6. Dada la relación definida en $\mathbb{Z}$ por: $a\;R\;b \;\Leftrightarrow\; a - b = 5 \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$, estudiar si es una relación reflexiva, simétrica y transitiva, y encontrar tres números enteros no relacionados entre sí.

Sol.: Reflexiva. SI. Para todo $a \in \mathbb{Z}$, $a - a = 5 \cdot 0$, para todo $0 \in \mathbb{Z}$.

Simétrica. SI. Para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, si $a\;R\;b$ entonces $a - b = 5k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Entonces, $b - a = 5(-k)$, con $(-k) \in \mathbb{Z}$. Luego $b\;R\;a$.

Transitiva. SI. Para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, si $a\;R\;b$ y $b\;R\;c$, se tiene que $a - b = 5k_1$, y $b - c = 5k_2$, con k_1 , $k_2 \in \mathbb{Z}$. Sumando las dos ecuaciones, queda $a - c = 5(k_1 + k_2)$, con $(k_1 + k_2) \in \mathbb{Z}$. Luego $a\;R\;c$.

Los números 1, 2 y 3 no están relacionados entre sí.

7. Halla el dominio y la imagen (o rango) de cada una de las siguientes relaciones:

a) $R = \{(1,5), (4,5), (1,4), (4,6), (3,7), (7,6)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

b) S definida en $\mathbb{N}$ por $x\;S\;y \;\Leftrightarrow\; 2x + y = 16$.

c) T definida en $\mathbb{N}$ por $x\;T\;y \;\Leftrightarrow\; 3x + y = 25$.

Sol.: a) Dominio= $\{1, 3, 4, 7\}$ Imagen = $\{4, 5, 6, 7\}$

b) $S = \{(1,14), (2,12), (3,10), (4,8), (5,6), (6,4), (7,2)\}$

Dominio (S) = $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ Imagen (S) = $\{2,4,6,8,10,12,14\}$

c) $T = \{(1,22), (2,19), (3,16), (4,13), (5,10), (6,7), (7,4), (8,1)\}$

Dominio (T) = $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ Imagen (T) = $\{1,4,7,10,13,16,19,22\}$

8. En $A = \{a,b,c,d\}$ se consideran las siguientes relaciones:

a) $R = \{(a,b), (b,c), (c,d), (d,a)\}$ c) $S = \{(d,c), (c,b), (a,b), (d,d)\}$

b) $T = \{(a,a), (b,a), (c,a), (d,d)\}$ d) $R = \{(b,a), (a,c), (d,d)\}$

Averigua cuáles son aplicaciones y cuáles no lo son.

Sol.: Son aplicaciones la a) y la b)

9. Demuestra que la función $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & si\ n\ es\ par \\ -\frac{n-1}{2}, & si\ n\ es\ impar \end{cases}$

es una aplicación, y obtén si es inyectiva, suprayectiva o biyectiva.

Sol.: Es una aplicación, ya que cada elemento de $\mathbb{N}$ tiene una única imagen en $\mathbb{Z}$. En efecto, si n es par, $\frac{n}{2} \in \mathbb{Z}$ y si n es impar, $-\frac{n-1}{2} \in \mathbb{Z}$.

<u>Es inyectiva</u>:

Si n y m son pares, y $f(n) = f(m)$, se tiene que $\frac{n}{2} = \frac{m}{2}$, y $n = m$.

Si n y m son impares, y $f(n) = f(m)$, se tiene que $-\frac{n-1}{2} = -\frac{m-1}{2}$, y $n = m$.

Si n es par, m es impar y $f(n) = f(m)$, se tiene $\frac{n}{2} = -\frac{m-1}{2}$, simplificando y despejando se tiene que $n + m = -1$, lo que es imposible.

<u>Es suprayectiva</u>:

Si $p \in \mathbb{Z}$, con $p > 0$, $p = f(2p)$, donde $2p$ es un natural par

Si $p \in \mathbb{Z}$, con $p < 0$, $p = f(1 - 2p)$, donde $1 - 2p$ es un natural impar

Por último, $0 = f(1)$

<u>Por tanto, es biyectiva</u>

10. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la relación dada por $R = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (5,1), (5,3), (5,5)\}$, obtén sus propiedades. ¿Es una relación de equivalencia? En caso afirmativo, determina el conjunto cociente.

Sol.: Es reflexiva, simétrica y transitiva. Por tanto, es una relación de equivalencia.

$$A/_R = \{\ \{1, 3, 5\},\ \{2, 4\}\ \} = \{\ [1]\ ,\ [2]\}$$

11. Sea el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, y la partición dada por $P = \{\{a, d, e\}, \{c, f\}, \{b\}\}$, define una relación de equivalencia, cuyo conjunto cociente coincida con P.

Sol.: $R = \{(a,a), (a,d), (a,e), (d,a), (d,d), (d,e), (e,a)(e,d), (e,e), (c,c), (c,f), (f,c)$
$(f,f), (b,b)\}$

12. En el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define la relación $(a,b)R\,(c,d) \iff a \cdot d = b \cdot c$. Averigua si es una relación de equivalencia, y en caso afirmativo, obtén la clase $[(4,8)]$.

Sol.: *Reflexiva*. SI. Para todo $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, es $(a,b)R\,(a,b)$, ya que $a \cdot b = b \cdot a$
Simétrica. SI. Para todo $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, si $(a,b)\,R\,(c,d)$ es $a \cdot d = b \cdot c$, y por tanto $c \cdot b = d \cdot a$ y $(c,d)\,R\,(a,b)$.
Transitiva. SI. Para todo $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, si $(a,b)\,R\,(c,d)$ y $(c,d)\,R\,(e,f)$, entonces $a \cdot d = b \cdot c$ y $c \cdot f = d \cdot e$. Multiplicando las dos ecuaciones, resulta $a \cdot d \cdot c \cdot f = b \cdot c \cdot d \cdot e$, y simplificando, $a \cdot f = b \cdot e$, por lo que $(a,b)\,R\,(e,f)$

$$[(4,8)] = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ ;\ (4,8)\,R\,(a,b)\} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ ;\ 4 \cdot b = 8 \cdot a\}$$
$$= \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ ;\ b = 2 \cdot a\} = \{(1,2),(2,4),(3,6),\ldots\}$$

13. En el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define la relación $(a,b)R\,(c,d) \iff a + d = b + c$. Averigua si es una relación de equivalencia, y en caso afirmativo, obtén la clase $[(2,5)]$.

Sol.: *Reflexiva*. SI. Para todo $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, es $(a,b)R\,(a,b)$, ya que $a + b = b + a$
Simétrica. SI. Para todo $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, si $(a,b)\ R\,(c,d)$ es $a + d = b + c$, y por tanto $c + b = d + a$ y $(c,d)\ R\,(a,b)$.
Transitiva. SI. Para todo $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, si $(a,b)\ R\,(c,d)$ y $(c,d)\ R\,(e,f)$, entonces $a + d = b + c$ y $c + f = d + e$. Sumando las dos ecuaciones, resulta $a + d + c + f = b + c + d + e$, y simplificando, $a + f = b + e$, por lo que $(a,b)\ R\,(e,f)$

$$[(2,5)] = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ ;\ (2,5)\ R\,(a,b)\} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ ;\ 2 + b = 5 + a\}$$
$$= \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ ;\ b = a + 3\} = \{(1,4),(2,5),(3,6),\ldots\}$$

14. En $\mathbb{R}^2$ se define la relación $(x,y)\,R\,(z,t) \iff x \cdot y = z \cdot t$. Comprueba que es una relación de equivalencia, y obtén el conjunto cociente.

Sol.: *Reflexiva*. SI. Para todo $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es $(a,b)R\,(a,b)$, ya que $a \cdot b = a \cdot b$
Simétrica. SI. Para todo $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, si $(a,b)\,R\,(c,d)$ es $a \cdot b = c \cdot d$, y por tanto $c \cdot d = a \cdot b$ y $(c,d)\,R\,(a,b)$.
Transitiva. SI. Para todo $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, si $(a,b)\,R\,(c,d)$ y $(c,d)\,R\,(e,f)$, entonces $a \cdot b = c \cdot d$ y $c \cdot d = e \cdot f$. Por tanto, $a \cdot b = e \cdot f$, por lo que $(a,b)\,R\,(e,f)$

$$[(a,b)] = \{(c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ ;\ (a,b)\,R\,(c,d)\} = \{(c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ ;\ a \cdot b = c \cdot d\}$$
$$= [(1, a \cdot b)]$$

Por tanto, el conjunto cociente es $\mathbb{R}^2/_R = \{ \ [(1,r)] \ ; \ r \in \mathbb{R} \ \}$

15. En $\mathbb{Z}$ se define la relación $x \, R \, y \iff x^2 - y^2 = x - y$. Comprueba que es una relación de equivalencia, y obtén el conjunto cociente.

Sol.: *Reflexiva*. SI. Para todo $x \in \mathbb{Z}$, es $x \, R \, x$, ya que $x^2 - x^2 = x - x = 0$

Simétrica. SI $x \, R \, y$, es $x^2 - y^2 = x - y$, y $y^2 - x^2 = y - x$; por tanto $y \, R \, x$

Transitiva. SI. Para todo $x, y, z \in \mathbb{Z}$, si $x \, R \, y$ y $y \, R \, z$, se tiene que $x^2 - y^2 = x - y$ y $y^2 - z^2 = y - z$. Sumando las dos ecuaciones, y simplificando, se obtiene $x^2 - z^2 = x - z$. Por tanto $x \, R \, z$

$$[x] = \{y \in \mathbb{Z} \, ; \ x \, R \, y \ \} = \{y \in \mathbb{Z} \, ; \, x^2 - y^2 = x - y \, \} =$$
$$= \{y \in \mathbb{Z} \, ; (x+y) \cdot (x-y) = x - y \, \} = \{y \in \mathbb{Z} \, ; \ y = x \ \text{ó} \ x + y = 1 \, \} = \{x, 1-x\}$$

Por tanto, el conjunto cociente es $\mathbb{Z}/_R = \{ \{1,0\} \, , \, \{2,-1\} \, , \{3,-2\} \, , \ldots \} = \left\{\{x, 1-x\}; \quad x \in \mathbb{Z} \, , \ x \ \geq 1\right\} = \{[x] \, ; \, x \in \mathbb{Z} \, , \ x \ \geq 1 \, \}$

16. En $\mathbb{R}^2$ se define la relación $(x,y) \, R \, (z,t) \iff x + t = y + z$. Comprueba que es una relación de equivalencia, y obtén el conjunto cociente.

Sol.: *Reflexiva*. SI. Para todo $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es $(x,y) R \, (x,y)$, ya que $x + y = y + x$

Simétrica. SI. Para todo $(x,y), (z,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, si $(x,y) \ R \, (z,t)$ es $x + t = y + z$, y por tanto $z + y = t + x$ y $(z,t) \ R \, (x,y)$.

Transitiva. SI. Para todo $(x,y), (z,t), (u,w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, si $(x,y) \ R \, (z,t)$ y $(z,t) \ R \, (u,w)$, entonces $x + t = y + z$ y $z + w = t + u$. Sumando las dos ecuaciones, resulta $x + t + z + w = \ y + z + t + u$, y simplificando, $x + w = y + u$, por lo que $(x,y) \ R \, (u,w)$

$$[(x,y)] = \ \{(z,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ ; \ (x,y) \, R \, (z,t)\} = \{(z,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ ; \ x + t = y + z\}$$
$$\{(z,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ ; \ t = (y - x) + z\}$$
$$= \{(0, y-x), (1, y-x+1), (2, y-x+2), \ldots . \} = [\ (0, y-x)]$$

Por tanto, el conjunto cociente es

$\mathbb{R}/_R = \{[(0,r)]; \ \ r \in \mathbb{R}\} = \{ \, \{(0,r), \ (1, r+1), (2, r+2), \ldots\}; \ \ r \in \mathbb{R}\}$