Recuperación del 1^er^ Parcial de MDI del GII y ADE ✦ Enero 2022

Tiempo: 90 minutos Nº Matrícula: ______________ Grupo: __________

Apellidos: ________________________________ Nombre: __________

NOTA: NO SE PERMITE EL USO DE DISPOSITIVOS ELECTRÓNICOS

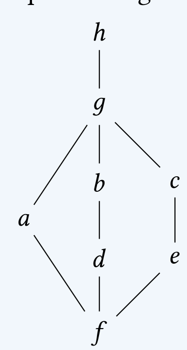
Resuelva cada ejercicio en hojas distintas.

1. Sobre el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros se considera la relación R definida del modo que sigue: aRb si (y solo si) $a - b$ es un número impar, para $a, b \in \mathbb{Z}$. Estudia si R es una relación de equivalencia.

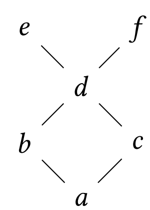
> **Solución:** Una relación de equivalencia debe ser reflexiva, simétrica y transitiva. Dado $a \in \mathbb{Z}$ arbitrario, se tiene que $a - a = 0$, siendo 0 un número no impar. Por tanto $a \not R a$, de lo que se deduce que R no es reflexiva y como consecuencia no es una relación de equivalencia.

2. Construye una relación de orden en el conjunto $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, mediante un diagrama de Hasse, de manera que el subconjunto $\{a, b, c, d, e\}$ tenga tres elementos minimales y tres elementos maximales con la relación de orden inducida.

> **Solución:** Un ejemplo de un orden sobre X que satisfaga estas propiedades viene dado por el siguiente diagrama de Hasse:



3. ¿Puede ser complementario el conjunto ordenado cuyo diagrama de Hasse es el siguiente? Justifica tu respuesta.

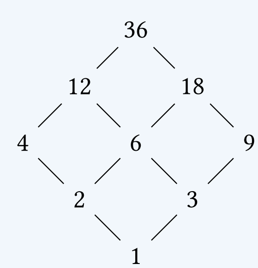


> **Solución:** No es complementario porque no es un retículo acotado: tiene dos maximales (e y f), y por tanto no existe máximo.

4. Sea $D_{36} = \{a \in \mathbb{N} \,:\, a \text{ divide a } 36\}$ dotado de la relación de orden $\leq$ definida del modo que sigue:

$$a \leq b \text{ si } a \text{ divide a } b.$$

a) Dibuja su diagrama de Hasse.

> **Solución:** El diagrama de Hasse de $D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ con el orden dado por $\leq$ es
>
> 
>

b) Halla los elementos notables del conjunto $X = \{4, 6, 12, 18, 36\}$.

> **Solución:** Tiene un único maximal (y que por tanto será máximo), que es 36. Sin embargo, tiene dos minimales, 4 y 6, y el conjunto X carece de mínimo.
> Sólo hay una cota superior (y que pertenece al conjunto X) que es 36, lo que hace que $\sup X = 36$. En cambio, las cotas inferiores de X son el 2 y el 1. La mayor de las dos cotas inferiores es 2, luego $\inf X = 2$.

c) ¿Es $(D_{36}, \leq)$ un retículo? ¿Es acotado? Halla los elementos que tienen complementario, y determina la razón por la que los demás no tienen complementario.

Solución: Claramente es un retículo, ya que para cualesquiera dos elementos $a, b \in D_{36}$ siempre existirá un supremo y un máximo, y las operaciones, de hecho, se definen como

$$a \wedge b = \text{mcd}(a, b), \quad a \vee b = \text{mcm}(a, b).$$

Es acotado, ya que tiene un máximo y un mínimo, que son $36 \in D_{36}$ y $1 \in D_{36}$, respectivamente.
Los elementos que tienen complementario son $\{1, 4, 9, 36\}$, el resto no tienen complementario. Para ver que 2 no tiene complementario, dicho complementario no puede ser comparable con 2, lo que reduce los candidatos al 3 y al 9, pero $2 \vee 3 = 6$ y $2 \vee 9 = 18$, por lo que no tiene complementario. Este argumento es válido para 3, 12 y 18. Para el caso de 6, de nuevo su complementario no debe ser comparable con 6, lo que hace que de existir, éste sea 4 ó 9, pero $4 \wedge 6 = 2$ y $4 \wedge 9 = 3$; por ello, 6 tampoco tiene complementario.

d) ¿Es $(D_{36}, \leq)$ un álgebra de Boole? Justifica tu respuesta.

Solución: No es álgebra de Boole ya que no todos los elementos tienen complementario.

5. Sobre el conjunto de números enteros $0 \leq n < 16$ que no son múltiplos de 5, se define la función booleana que vale 1 en los que no son múltiplos de 3, y 0 en los que son múltiplos de 3. Halla la expresión booleana en suma de productos más sencilla para esta función.

Solución: A un número $0 \leq n < 16$ escrito en binario requiere de cuatro cifras, que escribiremos como $xyzt$. Cada cifra se puede interpretar como una variable booleana. Los que son múltiplos de 5 son 0, 5, 10 y 15, que se corresponden con 0000, 0101, 1010 y 1111 (que son los elementos de la diagonal del mapa de Karnaugh): estos están fuera del dominio de la función booleana, y en el mapa de Karnaugh no le asignaremos ningún valor. Los múltiplos de 3 dentro del dominio son 3, 6, 9 y 12, que corresponden con 0011, 0110, 1100 y 1001, respectivamente. A las celdas correspondientes le daremos el valor 0, al resto de celdas le daremos el valor 1- Con esta información dibujamos el mapa de Karnaugh y agrupamos las celdas con valor 1 en calas maximales:

$xy \backslash zt$	00	01	11	10
00		1	0	1
01	1		1	0
11	0	1		1
10	1	0	1	

$xy \backslash zt$	00	01	11	10
00		1	0	1
01	1		1	0
11	0	1		1
10	1	0	1	

En el segundo mapa hemos agrupado las casillas con valor 1 usando las que están en blanco. Con ello, la expresión más sencilla de la función booleana es

$$x'z' + xz + yt + y't'.$$

6. Una empresa de transporte marítimo tiene dos tipos de barcos: un tipo que puede llevar hasta 15 contenedores y otro que puede llevar hasta 22. Estos barcos siempre siguen la misma ruta, en la cual el de menor capacidad gasta 1500 litros de gasolina, mientras que el de mayor capacidad gasta 2100 litros. La empresa dispone de 30000 litros de gasolina

   a) ¿De cuántas formas se pueden repartir los viajes entre los dos tipos de barco, gastando toda la gasolina? Escribe todas las soluciones posibles.

   b) ¿Cuántos barcos de cada capacidad usaremos para enviar el mayor número de contenedores gastando todos los litros de gasolina?

Solución:

1. Si denotamos por x el número de viajes que hacemos con el barco de menor capacidad, y por y el número de viajes con el de mayor capacidad, debe cumplirse que

$$15x + 21y = 300,$$

lo que simplificando se reduce a $5x + 7y = 100$, cuya solución, aplicando el algoritmo extendido de Euclides, es

$$\begin{cases} x = 300 - 7k, \\ y = -200 + 5k, \end{cases} \qquad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Puesto que $x \geq 0$ e $y \geq 0$, tiene que ocurrir que $40 \leq k \leq 42$. Por tanto, hay tres maneras de repartir los viajes. En primer lugar, enviar 20 barcos del primer tipo y ninguno del segundo tipo. En segundo lugar, enviar 13 barcos del primer tipo y 5 del segundo y, por último, enviar 6 barcos del primer tipo y 10 del segundo tipo.

2. Por otro lado, el número de contenedores que podremos llevar gastando toda la gasolina es $15x + 22y = 100 + 5k$, luego para $k = 42$ obtendremos el mayor número de contenedores que se pueden transportar, que es 310, y que se corresponde con enviar $x = 300 - 7 \cdot 42 = 6$ barcos del primer tipo e $y = -200 + 5 \cdot 42 = 10$ barcos del segundo tipo.

7. Demuestra por inducción que $(3n)! > 2^{6n-4}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (*Pista:* $3n + k \geq 2^2$, para todo $n, k \in \mathbb{N}$.)

Solución: Vamos a probar la desigualdad usando inducción. Para ello:

- Caso $n = 1$: Tendremos que comprobar que $3! > 2^{6-4}$, es decir, $6 > 4$, lo que es cierto.
- Paso de inducción: asumiendo que $(3n)! > 2^{6n-4}$ probaremos que $(3(n+1))! > 2^{6(n+1)-4}$.

Desarrollamos el factorial $(3(n+1))!$:

$$(3(n+1))! = (3n+3)(3n+2)(3n+1)((3n)!).$$

Como $n \geq 1$, $3n+3, 3n+2, 3n+1 \geq 4$, y podremos escribir,

$$(3(n+1))! = (3n+3)(3n+2)(3n+1)((3n)!) \geq 4^3 \cdot ((3n)!) = 2^6((3n)!).$$

Aplicamos la hipótesis de inducción, en este caso la desigualdad $(3n)! > 2^{6n-4}$, y continuando la cadena anterior de desigualdades llegamos a demostrar la desigualdad que buscábamos:

$$(3(n+1))! \geq 2^6((3n)!) > 2^6 \cdot 2^{6n-4} = 2^{6(n+1)-4}.$$