

### ***Hoja 3. Relaciones de Orden. Retículos***

***Susana Cubillo (2020)***

***Ejercicios recopilados de los apuntes y  
Hojas de problemas de los profesores  
del Dpto. Matemática Aplicada a las TIC  
(Campus Montegancedo). UPM.***

1. En el conjunto  $(\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$  se define la relación

$$(x, y)R(z, t) \Leftrightarrow x \leq z, \quad \frac{y}{x} = \frac{t}{z}$$

- a) Demuestra que es una relación de orden y estudia si es un orden total.
- b) Representa el conjunto de los elementos comparables con el elemento  $(1, 1)$ .

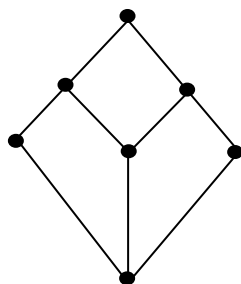
2. Determina el orden lexicográfico de las siguientes cadenas de bits: 001, 111, 010, 011, 000, 100 basado en el orden  $0 \leq 1$ . Dibuja el diagrama de Hasse de estas cadenas, con el orden producto.

3. Sean  $(A, R)$  y  $(B, S)$  dos conjuntos ordenados, con  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $B = \{a, b\}$   
 $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$   
 $S = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$   
Halla  $(A \times B, Prod)$  y  $(A \times B, Lex)$

4. Sean  $(A, R)$  y  $(B, S)$  dos conjuntos ordenados, con  $A = \{1, 2, 3\}$  y  $B = \{a, b\}$   
 $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$   
 $S = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$   
Halla  $(A \times B, Prod)$  y  $(A \times B, Lex)$

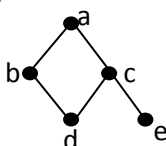
5. Sea  $S = \{1, 2, 3, 4\}$ .  
Respecto al orden lexicográfico en  $S \times S$ , basado en el orden usual " $\leq$ ",  
a) Encuentra todos los pares en  $S \times S$  relacionados con  $(2, 3)$ .  
b) Encuentra todos los pares en  $S \times S$  con los que está relacionado  $(3, 1)$ .  
c) Dibuja el diagrama de Hasse de  $(S \times S, \leq_{Lex})$

6. ¿Es un retículo distributivo el definido por el siguiente diagrama de Hasse?

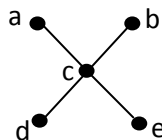


7. Halla los elementos maximales, minimales, máximo y mínimo (si los hay) para los siguientes conjuntos con el orden dado por el diagrama de Hasse:

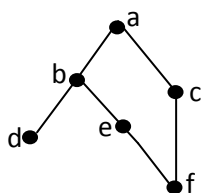
a)



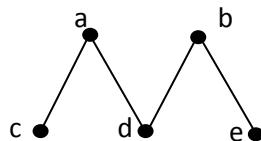
b)



c)

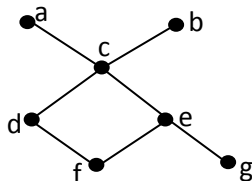


d)



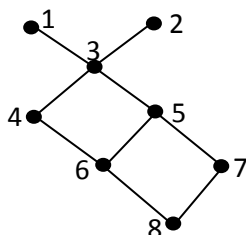
8. Halla cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo (si los hay) del conjunto  $B$  en cada uno de los siguientes casos:

a)



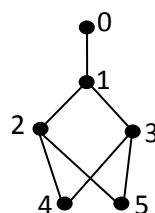
$$B = \{c, d, e\}$$

b)



$$B = \{4, 5, 6\}$$

c)



$$B = \{2, 3, 4\}$$

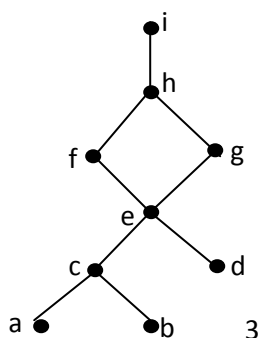
9. Representa el diagrama de Hasse de los siguientes conjuntos ordenados, y halla los elementos notables de los subconjuntos señalados:

a)  $(D_{60}, /)$ ,  $A = \{2, 5, 6, 10, 12, 30\}$  y  $B = \{2, 3, 6, 10, 15, 30\}$

b)  $(D_{48}, /)$ ,  $A = \{2, 4, 6, 12\}$  y  $B = \{3, 6, 8, 16\}$

c)  $(D_{40}, /)$ ,  $A = \{4, 5, 10\}$  y  $B = \{2, 4, 8, 20\}$

10. Representa el diagrama de Hasse del conjunto ordenado  $(D_{168}, /)$ . Si  $A = \{4, 6, 12\}$ , halla los elementos maximales de  $A$ , y las cotas superiores e inferiores, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo de  $A$  en  $D_{168}$ .
11. Sea  $D_{72}$  el conjunto de todos los divisores de 72, y  $/$  la relación de divisibilidad  $a/b$  si y sólo si ' $a$  divide a  $b$ '.  
 a) Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado  $(D_{72}, /)$ .  
 b) Sea  $B = \{9, 12, 36\}$ . Encuentra cotas superiores, inferiores, supremo, ínfimo, maximales, minimales, máximo y mínimo, si existen, en  $B$ .  
 c) Encuentra, si existe, el complementario de 9 y el de 18 en  $(D_{72}, /)$ .  
 d) Razona si  $(D_{72}, /)$  es un álgebra de Boole.
12. Halla, si los hay, los elementos maximales, minimales, máximo y mínimo para los siguientes conjuntos ordenados:  
 $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ ;  $((0,1), \leq)$ ;  $((0,1), \geq)$ ;  $(\mathbb{N}, /)$ ;  $(\mathbb{N} - \{1\}, /)$ .
13. En cada uno de los casos siguientes señala si el conjunto  $X$  tiene o no una cota inferior en  $\mathbb{Z}$ , y si tiene alguna halla su ínfimo si existe.  
 a)  $X = \{x \in \mathbb{Z}; x^2 \leq 16\}$   
 b)  $X = \{x \in \mathbb{Z}; x = 2y \text{ para algún } y \in \mathbb{Z}\}$   
 c)  $X = \{x \in \mathbb{Z}; x^2 \leq 100x\}$
14. En  $(\mathbb{N}, /) \times (\mathbb{N}, /)$  se considera el orden lexicográfico. Determina, si existen, las cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo del conjunto  $A = \{(2,1), (3,4)\}$ .
15. En  $\mathcal{R}^2$  se considera la relación de orden  $(x,y) < (x',y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ e } y \leq y'$ . Halla los elementos maximales y minimales, supremo e ínfimo de  $C = \{(x,y); x^2 + y^2 = 1\}$ .
16. Se considera en  $D_{48} \times \mathbb{N}$  el orden lexicográfico correspondiente a tomar el orden divisibilidad en el primer factor y el orden usual en el segundo factor. Sea  $S = \{(2,2), (2,3), (3,2), (6,3), (6,1), (4,2)\}$ . Halla, si existen, las cotas superiores e inferiores, elementos maximales y minimales, máximo, mínimo, supremo e ínfimo de  $S$ .
17. Dado el orden parcial del siguiente diagrama de Hasse, obtén un orden total que lo contenga. ¿Cuántos pueden obtenerse?



18. Sea  $T = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  la lista de tareas para realizar un trabajo, de las que se sabe que unas preceden a otras de la siguiente forma:

$$f \leq a, \quad f \leq d, \quad e \leq b, \quad c \leq f, \quad e \leq c, \quad b \leq f, \quad e \leq g, \quad g \leq f$$

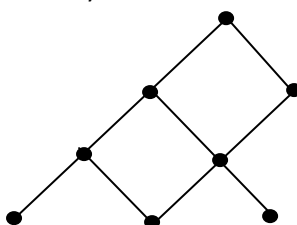
Halla el orden parcial. ¿Qué tareas pueden realizarse independientemente? Construye un orden si el trabajo lo realizad sólo una persona.

19. En  $(D_{10}, /) \times (D_{18}, /)$  se considera el orden lexicográfico. Halla las cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo, si existen, del subconjunto  $S = \{(2, 2), (2, 3)\}$ . Dibuja el diagrama de Hasse.

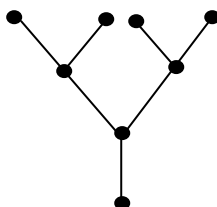
Se define la aplicación  $f: D_{10} \times D_{18} \rightarrow D_{180}$  por  $f(a, b) = ab$ . ¿Es  $f$  inyectiva? ¿Es  $f$  suprayectiva?

20. Estudia cuáles de los siguientes conjuntos ordenados son retículos.

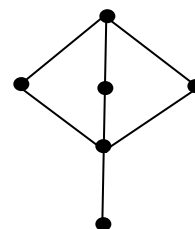
a)



b)



c)

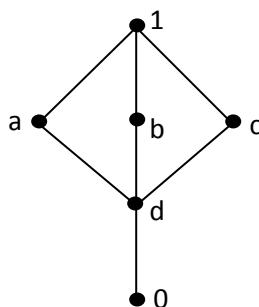


21. Obtén los diagramas de Hasse de todos los retículos, salvo isomorfismos, de uno, dos, tres, cuatro y cinco elementos.

22. Sea  $\mathcal{F}(\mathbb{N})$  la colección de todos los subconjuntos finitos de  $\mathbb{N}$ . ¿Tiene  $(\mathcal{F}(\mathbb{N}), \subseteq)$  algún elemento maximal? ¿Tiene algún elemento minimal? ¿Es  $(\mathcal{F}(\mathbb{N}), \subseteq)$  un retículo?

23. Sea  $E(\mathbb{N})$  la colección de todos los subconjuntos finitos de  $\mathbb{N}$  que tienen un número par de elementos. En  $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$  se consideran los elementos  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1, 3\}$ . Encontrar cuatro cotas superiores para  $\{A, B\}$ . ¿Tiene  $\{A, B\}$  supremo en  $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$ ? ¿Es  $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$  un retículo?

24. Estudia si en el siguiente retículo se verifica la igualdad  $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ .



25. Encuentra el complementario de cada elemento en  $(D_{42}, /)$ ,  $(D_{45}, /)$  y  $(D_{105}, /)$ .  
¿Son álgebras de Boole estos retículos?

26. Se considera el conjunto  $A = \{2, 3, 4, 6, 12, 15, 24, 90, 180, 360\}$  y la relación de orden de divisibilidad.

- Representa el diagrama de Hasse del conjunto ordenado  $(A, /)$ .
- ¿Es  $(A, /)$  un retículo?
- Obtén, si existen, las cotas inferiores, cotas superiores, ínfimo, supremo, mínimo, máximo, elementos minimales y maximales del subconjunto  $B = \{2, 3, 4, 6, 12, 180\}$ .

27. (Examen enero 2016)

- Sea  $D_{63}$  el conjunto de todos los divisores de 63, y  $/$  la relación de divisibilidad dada por  $a / b$  si y sólo si "a divide a b". Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado  $(D_{63}, /)$ .

- Considera el conjunto ordenado A de la figura.

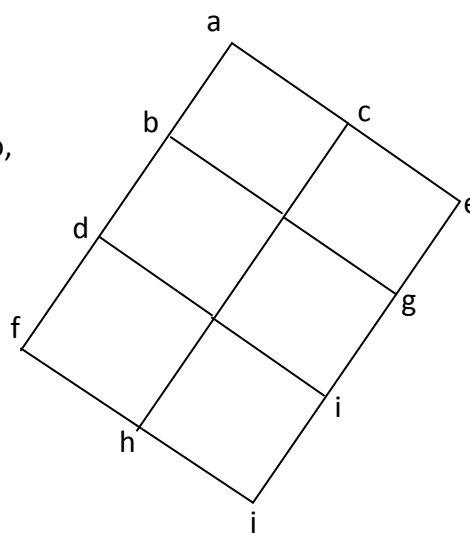
- Obtén las cotas superiores e inferiores, supremo, ínfimo, maximales, minimales, máximo y mínimo del conjunto  $B = \{b, c, d\}$ .

- ¿Es A un retículo?

- Sea  $A'$  el conjunto ordenado cuyo diagrama de Hasse es el mismo que el de A, pero eliminando las aristas que van de  $b$  a  $g$  y de  $d$  a  $i$ . ¿Es  $A'$  un retículo?

- ¿Es  $A'$  complementario? En caso de que no lo sea, da un elemento que no tenga complementario y otro que sí lo tenga, indicando un complementario.

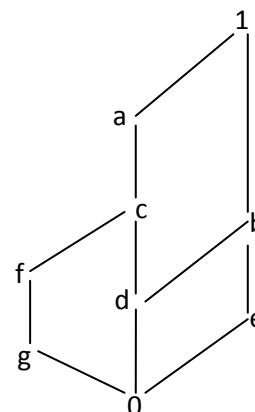
- ¿Es  $A'$  distributivo?



28. (Examen noviembre 2016)

Considera el conjunto ordenado A del dibujo.

- Sea  $B = \{a, d, f\}$ , encuentra todos los elementos notables de  $B$  (cotas superiores e inferiores, supremo, ínfimo, máximo y mínimo, maximales y minimales, si los hay).
- Encuentra, si existen, todos los elementos complementarios de  $b$  y  $c$ .
- Razona si A es un álgebra de Boole



29. (Examen noviembre 2016)

Sean  $(\wp(X), \subseteq)$  y  $(Y, \leq)$  dos conjuntos ordenados, con  $X = \{a, b\}$ ,  $Y = \{0, 1\}$ , y donde  $\wp(X)$  es el subconjunto de las partes de  $X$ .

- Calcula el cardinal del producto cartesiano  $\wp(X) \times Y$ .
- Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado  $(\wp(X) \times Y, \leq_{Lex})$ , donde  $\leq_{Lex}$  es la relación "orden lexicográfico".

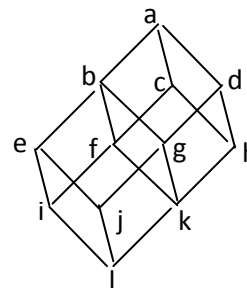
30. (Examen noviembre 2012)

Dado el conjunto ordenado  $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$

Cuyo diagrama de Hasse es el de la figura y el

subconjunto  $B = \{b, e, f, k\}$

- Hallar las cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo de  $B$  en  $A$
- Hallar los elementos maximales y minimales, máximo y mínimo de  $B$ .
- Hallar  $\inf\{f, g\}$  y  $\sup\{f, g\}$ . ¿Es  $A$  un retículo?



31. (Examen enero 2017)

Sea  $D_{270}$  el conjunto de los divisores positivos de 270. Se pide:

- Sabiendo que una relación en  $D_{270}$  es un subconjunto del producto cartesiano  $D_{270} \times D_{270}$ , ¿cuál es el cardinal del conjunto de todas las relaciones distintas en  $D_{270}$ ?
- Dibuja el diagrama de Hasse de  $D_{270}$  con la relación de orden de divisibilidad.
- Encuentra todos los elementos de  $D_{270}$  que tienen complementario. Razona si  $D_{270}$  es Álgebra de Boole.
- Sea el conjunto  $C = D_{270} - \{45, 54\}$  con la relación de orden de divisibilidad. Calcula si existe el  $\sup\{6, 27\}$  en  $C$ . Razona si  $C$  es un retículo.