



---

# Teorema Fundamental de Superficies y Aplicaciones

---

Trabajo Fin de Master  
Modelización e Investigación Matemática,  
Estadística y Computación

Álvaro Pámpano Llarena

Trabajo dirigido por  
Óscar J. Garay Bengoechea

Bilbao, 15 de Septiembre de 2015



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>1. Ecuaciones Fundamentales</b>	<b>1</b>
1.1. Subvariedades de Riemann . . . . .	1
1.2. Formas de Cartan . . . . .	8
1.3. Superficies de $\mathbb{R}^3$ . . . . .	13
<b>2. Teorema Fundamental de Superficies</b>	<b>19</b>
2.1. Criterio de Frobenius . . . . .	19
2.2. Teorema Fundamental de Superficies . . . . .	22
2.3. Ecuación de Estructura de $SO(3)$ . . . . .	27
<b>3. Aplicaciones del Teorema Fundamental</b>	<b>35</b>
3.1. Ecuación de Sine-Gordon . . . . .	35
3.2. Superficies de Hasimoto . . . . .	41
3.3. Varillas Elásticas de Kirchhoff . . . . .	45
<b>A. Generalización del Teorema Fundamental</b>	<b>51</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>55</b>



# Introducción

El objetivo fundamental de este Trabajo Fin de Master sobre el "Teorema Fundamental de Superficies y Aplicaciones" es completar la formación en Geometría Diferencial y Geometría de Riemann recibida a lo largo del Grado de Matemáticas y del Master en Modelización e Investigación Matemática, Estadística y Computación, poniendo especial énfasis en la relación de éstas con otras disciplinas afines como Topología, Ecuaciones Diferenciales, Cálculo de Variaciones, Física e, incluso, Álgebra. Asimismo, pretende sentar una sólida base para la iniciación en investigación de cara a futuros estudios de doctorado.

El punto de partida es la formación adquirida, no sólo durante los estudios de Grado y Máster, sino también durante la realización de distintas actividades formativas que se detallan más adelante. La combinación de estos factores ha hecho posible enfocar el tema elegido de una forma "multidisciplinar" e incluso culminar el proceso con una incursión en la investigación [7].

Las actividades a las que hacíamos referencia previamente son el Trabajo Fin de Grado sobre "Geodésicas en Variedades de Riemann", [15], y diversos proyectos realizados a lo largo del Grado de Matemáticas y del Master en Modelización e Investigación Matemática, Estadística y Computación, como son el estudio en profundidad de la tesis doctoral [1], efectuado durante el disfrute de la Beca de Colaboración del Gobierno Vasco en el año 2014, sobre las "Curvas Elásticas"; la beca de la Unidad de Formación e Investigación en Matemáticas, UFI11/52 UPV/EHU, del año 2014, en la que se estudio el problema variacional asociado a un funcional energético de tipo cuadrático, muy usado en técnicas de reconstrucción de imágenes en los espacios modelos tri-dimensionales; y la beca de la Unidad de Formación e Investigación en Matemáticas, UFI11/52 UPV/EHU, del año 2015, en la que se culminó el artículo "Hypersurface Constrained Elasticae in Lorentzian Space Forms", [7] y que previamente necesitó el estudio de Geometría Pseudo-Riemanniana.

En las siguientes líneas analizaremos los objetivos y motivaciones para la elección de este tema, y a su vez indicaremos diversas relaciones con asignaturas del Grado de Matemáticas y del Master en Modelización e Investigación Matemática, Estadística y Computación.

Un resultado básico de la asignatura de Geometría Local de Curvas y

Superficies del Grado de Matemáticas es el Teorema Fundamental de Curvas en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$ , en el cual se demostraba la existencia y unicidad de curvas en  $\mathbb{R}^3$ , salvo movimientos rígidos, en términos de la curvatura y la torsión. Más concretamente, se veía que dadas dos funciones reales  $\kappa(s) > 0$  y  $\tau(s)$  y una 1-forma,  $ds$ , que es la que nos induce la parametrización por la longitud de arco, se conseguía determinar por completo una curva  $\gamma$  de  $\mathbb{R}^3$ , salvo movimientos rígidos. Es decir, esos 3 objetos determinaban las tres funciones necesarias para definir la curva  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ .

Este hecho nos lleva al primero de los objetivos primordiales de este Trabajo Fin de Master, que consiste en estudiar si existe un teorema análogo para superficies inmersas en  $\mathbb{R}^3$ . En otras palabras, queremos ver si existen una serie de invariantes euclídeos de la superficie  $S$ , que se obtengan mediante derivadas de la parametrización de  $S$  y diversas operaciones algebraicas que involucren a estas derivadas, que determinen unívocamente, salvo congruencias o movimientos rígidos, a la superficie.

En una primera aproximación a este problema cabe pensar en una combinación de tres invariantes geométricos, como pueden ser la curvatura de Gauss,  $K$ , la curvatura media,  $H$ , o las curvaturas principales, ya que la parametrización de la superficie viene dada por tres funciones  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ . Sin embargo, puede demostrarse, aunque la prueba no es sencilla, que no existen tres de estos invariantes que determinen completamente la superficie. Una vez desechada esta primera aproximación, podemos pensar en la idea del Teorema de Bonnet, donde en primer lugar se trata de buscar invariantes que aseguren la unicidad de la superficie, de nuevo la unicidad se entiende salvo congruencias o movimientos rígidos. En la búsqueda de estos invariantes, nos encontramos con dos formas cuadráticas simétricas asociadas a la inmersión, como son la primera forma fundamental, es decir, la métrica inducida en  $S$ , que es una forma cuadrática simétrica y definida positiva y de la segunda forma fundamental.

Por otra parte, el Teorema de Bonnet trata de buscar condiciones y conexiones entre dos formas cuadráticas simétricas cualesquiera (donde una debe de ser definida positiva) para asegurar la existencia de una superficie cuyas formas fundamentales sean precisamente esas dos formas cuadráticas. En este apartado es donde aparecen de forma esencial las ecuaciones de Gauss-Codazzi, a las que también se las llama ecuaciones fundamentales o ecuaciones de compatibilidad, ya que la verificación de estas relaciones es la que permite asegurar la existencia de una inmersión de  $S$  en  $\mathbb{R}^3$  de manera que las formas fundamentales de la superficie coinciden con las formas cuadráticas.

Acabamos de ver que para determinar una inmersión  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  de forma única salvo congruencias es necesario contar con dos formas cuadráticas simétricas, es decir, en un principio necesitamos de seis funciones. No obstante, deben verificarse las tres ecuaciones de Gauss-Codazzi, por lo que se recupera la naturalidad, en el sentido de que seis funciones con tres liga-

duras nos otorgan tres grados de libertad, que son justamente los tres grados de libertad que se tienen en  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ .

Al Teorema de Bonnet se le suele llamar Teorema Fundamental de Superficies, por su similitud con el caso de curvas, y a su enunciado y demostración está dedicada la primera parte (capítulos 1 y 2) de este Trabajo Fin de Master como indica su título. Para la demostración que ofrecemos de este teorema se necesita el criterio de Frobenius, el cual nos permite obtener un nexo entre este trabajo y el Grado de Matemáticas, especialmente con la asignatura de Variedades Diferenciables. En la elaboración de los capítulos 1 y 2 se han usado de forma sistemática las referencias [5], [11] y [17].

Tras haber enunciado y demostrado el Teorema Fundamental de Superficies en  $\mathbb{R}^3$ , podemos intentar extender nuestro primer objetivo y tratar de generalizar este teorema. Podemos pensar por ejemplo en el problema de la existencia y unicidad de inmersiones de hipersuperficies  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , donde los resultados son análogos a los del espacio tri-dimensional. También podemos ampliar la codimensión y estudiar el problema de la existencia y unicidad de subvariedades de un espacio euclídeo,  $M^n \subset \mathbb{R}^m$  para  $m > n$ . En este caso, además de las ya mencionadas ecuaciones de Gauss-Codazzi aparece otra ecuación fundamental, la ecuación de Ricci, que es trivial para el caso de hipersuperficies. Finalmente, el caso más general consistirá en estudiar condiciones que garanticen la existencia y unicidad de inmersiones de una variedad dada  $N^n$  en otra variedad de Riemann  $M^m$ ,  $m > n$ . Para obtener resultados similares a los anteriores, en este último caso es esencial imponer que la curvatura seccional de la variedad ambiente  $M^m(c)$  sea constante, ya que sin esta restricción se necesitaría aplicar condiciones geométricas sobre el tipo de inmersión para poder obtener resultados razonables.

En un primer momento la intención era incluir en este Trabajo Fin de Master la demostración del Teorema Fundamental de Subvariedades en el caso más general que acabamos de mencionar. No obstante, a pesar de que en un principio así se hizo, con objeto de no sobrepasar unas dimensiones razonables y primordialmente, de buscar aplicaciones a la Geometría Diferencial clásica que mostraran conexiones entre ésta y otros campos fundamentales como las Ecuaciones Diferenciales, Cálculo de Variaciones, Física,... se ha decidido limitar el trabajo al caso de superficies, aunque se ha reservado un apéndice donde se presenta lo necesario para adentrarse en la demostración general. Para poder entender el contenido de ese apéndice se necesita presentar las formas de conexión de Cartan que son un recurso muy útil para el estudio de la Geometría de Riemann mediante formas diferenciales. Nos aparece aquí una nueva conexión, en este caso del Master en Modelización e Investigación Matemática, Estadística y Computación con la asignatura de Geometría de Variedades, en la parte de Geometría de Riemann.

De hecho, las formas de Cartan que introduciremos en el primer capítulo, nos serán de gran utilidad también a la hora de establecer una equivalencia

entre el Teorema Fundamental de Superficies de  $\mathbb{R}^3$  y unos teoremas de estructura en Grupos de Lie, así, en el capítulo 2, utilizaremos estas formas diferenciales para enunciar las ecuaciones de estructura de  $SO(3)$ . Recordemos que las álgebras de Lie son estudiadas en la asignatura de Grupos y Representaciones del Master de Modelización e Investigación Matemática, Estadística y Computación, lo que nos muestra una vez más la relación entre el tema tratado en esta memoria y otras áreas cubiertas en el Máster.

Recapitulando, hemos visto que es posible obtener un resultado similar al Teorema Fundamental de Curvas en el espacio euclídeo, para el caso de superficies de  $\mathbb{R}^3$ . En este teorema aparecen las ecuaciones de Gauss-Codazzi, que son las ligaduras que deben verificar las formas cuadráticas para poder asegurar la existencia de superficie. Estas ecuaciones de Gauss-Codazzi son un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que suele ser difícil de manejar y de resolver. Para conseguirlo, muchas veces suelen imponerse requisitos o características geométricas sobre la superficie  $S$ , como, por ejemplo, que se trate de una superficie minimal,  $H = 0$ ; que la curvatura de Gauss,  $K$ , sea constante; que la curvatura media,  $H$ , sea constante; que sea una superficie de Hasimoto,... con el ánimo de que estas características nos permitan elegir localmente un sistema de coordenadas adecuado donde las ecuaciones de Gauss-Codazzi se simplifiquen o incluso se reduzcan en número.

En este proceso de simplificación de las ecuaciones de Gauss-Codazzi aparecen, a menudo importantísimas conexiones con otros temas clásicos. Por ejemplo, se pueden relacionar las superficies minimales,  $H = 0$ , con las funciones armónicas, que son solución de  $\Delta \mathbf{x} = 0$ , ya que el Laplaciano de la parametrización de cualquier subvariedad del espacio Euclídeo es un múltiplo de la curvatura media,  $H$ . Un segundo ejemplo, en el que estaremos especialmente interesados en el capítulo 3, muestra la relación entre las ecuaciones de Gauss-Codazzi y algunas ecuaciones de tipo solitón, es decir, ecuaciones en derivadas parciales que admiten soluciones de tipo solitón. Estas ecuaciones en derivadas parciales notables tienen gran interés en la Física y en la teoría de Ecuaciones Diferenciales, lo que nos permite relacionar este trabajo fin de master con la asignatura de Ecuaciones en Derivadas Parciales del Master de Modelización e Investigación Matemática, Estadística y Computación.

Por ejemplo, si consideramos una superficie de  $\mathbb{R}^3$  con curvatura de Gauss  $K = -1$ , las ecuaciones de Gauss-Codazzi asociadas a las coordenadas de líneas de curvatura se corresponden con la ecuación Sine-Gordon. Debemos aclarar aquí que la ecuación Sine-Gordon admite soluciones globales, sin embargo, estas soluciones globales dan lugar a superficies con singularidades, como es el caso de la pseudoesfera, ya que en caso contrario contradiría el Teorema de Hilbert, que asegura la inexistencia de superficies completas con curvatura de Gauss negativa y constante en  $\mathbb{R}^3$ , y que fue analizado en el Grado de Matemáticas en la asignatura de Geometría Global de Curvas y



Superficies.

Análogamente, si estudiamos las superficies con curvatura media constante,  $H = cte$ , obtendremos una relación con la ecuación Sinh-Gordon. Y como último ejemplo, si consideramos las superficies de Hasimoto, determinadas por su evolución bajo la ecuación de inducción localizada (LIE), se puede establecer una relación con la ecuación de Schrodinger no lineal.

En el tercer capítulo, se estudiarán con más profundidad dos de estos ejemplos, las superficies con curvatura de Gauss  $K = -1$  y las superficies de Hasimoto. En particular, se establecerá una correspondencia entre las soluciones de la ecuación de Sine-Gordon y las superficies pseudoesféricas ( $K = -1$ ). Además, se demostrará que las ecuaciones de Gauss-Codazzi de una superficie de Hasimoto, con respecto a un sistema de coordenadas geodésico, no son otra cosa que las ecuaciones de Da Rios [7], y se ve que mediante la curvatura compleja o transformación de Hasimoto introducida en [8], éstas se relacionan con la ecuación de Schrodinger no lineal. Por último, veremos que tanto las curvas elásticas [1] y [13], como las varillas elásticas de Kirchhoff [12] proporcionan soluciones de la ecuación de inducción localizada (LIE), por congruencia más deslizamiento, y permiten construir superficies de Hasimoto [7], [12] y [13].

Aunque las soluciones de tipo solitón no son objetivo de esta memoria, debemos añadir que a pesar de que han sido objeto de gran interés entre los matemáticos recientemente, desde el siglo XIX, los geómetras estudiaron ecuaciones de Gauss-Codazzi que dan lugar a ecuaciones solitón (aunque no eran reconocidas por este nombre) y contribuyeron a su desarrollo mediante el diseño de transformaciones para construir soluciones a las ecuaciones de Gauss-Codazzi a partir de otras soluciones. A estas transformaciones se las llama transformaciones de Backlund [16], [18] y [19].



# Capítulo 1

## Ecuaciones Fundamentales

La teoría de subvariedades es un campo dentro de la geometría diferencial tan amplio como ella misma, ya que ambas comienzan con la teoría de curvas y superficies en  $\mathbb{R}^3$ . En 1827, Gauss demostró que la geometría intrínseca de una superficie de  $\mathbb{R}^3$  depende solo de la métrica inducida. En 1854, Riemann introdujo las variedades n-dimensionales, las variedades de Riemann y el concepto de curvatura. En 1956, el famoso teorema de embebimiento de Nash, que dice que toda variedad de Riemann puede ser isométricamente embebida en un espacio euclídeo de dimensión suficientemente grande (para más detalles puede consultarse [5] o [14]), fue formulado con la esperanza de que el hecho de que toda variedad de Riemann se pueda considerar como una subvariedad de Riemann permitiría usar las propiedades extrínsecas como ayuda para el estudio de las propiedades intrínsecas.

En este primer capítulo vamos a introducir las superficies desde el punto de vista de teoría de subvariedades. Es decir, se van a considerar como inmersiones isométricas de una variedad de Riemann 2-dimensional en otra variedad de Riemann. Para ello definiremos los objetos básicos que aparecen al estudiar las subvariedades, y estudiaremos algunas propiedades esenciales haciendo especial hincapié en las ecuaciones fundamentales, ya que tendrán una importancia vital a lo largo de toda la memoria. La información de este capítulo esta sacada de [5] y de [17].

### 1.1. Subvariedades de Riemann

Como acabamos de decir, en primer lugar debemos estudiar los conceptos básicos sobre la teoría de subvariedades de Riemann. Con ese fin, en esta sección se pretenden presentar todos aquellos objetos que serán necesarios para poder desarrollar el trabajo.

**Definición 1.** Una *inmersión* es una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables cuya aplicación diferencial es inyectiva en todo punto. Sea

$(\tilde{M}, \tilde{g})$  una variedad de Riemann de dimensión  $m$ ,  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ , y  $\Phi: M \rightarrow \tilde{M}$  una inmersión, definimos la *métrica inducida* sobre  $M$  mediante,

$$g = \Phi^* \tilde{g}. \quad (1.1)$$

Sea  $(M, g)$  una subvariedad inmersa de  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ , si  $g$  es la métrica inducida por  $\tilde{g}$  diremos que la aplicación  $\Phi: M \rightarrow \tilde{M}$  es una *inmersión isométrica*. Si  $\Phi$  es una inmersión isométrica, entonces se dice que  $M$  es una *subvariedad inmersa de Riemann* de  $\tilde{M}$ . La variedad  $\tilde{M}$  se denominará en adelante *variedad ambiente*, o también *espacio ambiente*.

**Observación 1.** Como toda inmersión es localmente un embebimiento, y nuestros cálculos serán locales, podemos suponer que  $M$  es una subvariedad embebida de Riemann y, generalmente para aligerar la notación identificaremos  $M$  con  $\Phi(M)$ . También, denotaremos indistintamente a la métrica por,  $\tilde{g} = g = \langle, \rangle$ .

Sea  $(M, g)$  una subvariedad de Riemann de  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ . El conjunto,

$$T\tilde{M}|_M = \bigcup_{p \in M} T_p \tilde{M}$$

es un fibrado vectorial sobre  $M$ . Lo llamaremos *fibrado ambiente tangente* sobre  $M$ . Todo campo de vectores diferenciable en  $\tilde{M}$  se puede restringir a una sección diferenciable de  $T\tilde{M}|_M$ . Y recíprocamente, toda sección diferenciable  $X$  de  $T\tilde{M}|_M$  se puede extender localmente a una sección diferenciable de  $T\tilde{M}$ . Esta claro que usando  $\tilde{g}$  en cada  $p \in M$ , el espacio ambiente tangente  $T_p \tilde{M}$  se descompone como la suma directa ortogonal,

$$T_p \tilde{M} = T_p M \oplus N_p M. \quad (1.2)$$

Llamamos *espacio normal* en  $p$  con respecto a  $\tilde{g}$  a  $N_p M = (T_p M)^\perp$ .

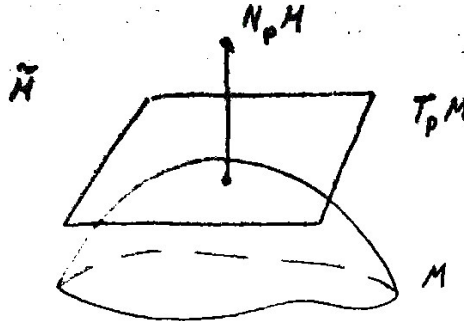


Figura 1.1: Espacio Normal.

Análogamente a la construcción del fibrado tangente, podemos construir el *fibrado normal* de  $M$ ,

$$NM = \bigcup_{p \in M} N_p M.$$

Una vez introducidos estos conceptos, nos proponemos relacionar la conexión de Levi-Civita de la variedad de Riemann  $(M, g), \nabla$  con la de  $(\tilde{M}, \tilde{g}), \tilde{\nabla}$ .

Usando (1.2) podemos descomponer el operador derivada covariante de  $\tilde{M}$  en los puntos de  $M$  en sus componentes tangencial y normal de la siguiente forma,

$$\tilde{\nabla}_X Y = (\tilde{\nabla}_X Y)^\top + (\tilde{\nabla}_X Y)^\perp,$$

donde  $X, Y \in \chi(M)$  (los campos de vectores tangentes a  $M$ ) y las extensiones locales de  $X, Y$  a campos de  $\tilde{M}$  se denotan por las mismas letras.

**Definición 2.** Definimos la *segunda forma fundamental* de  $M$  como la aplicación,  $II: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \mathcal{N}(M)$  dada por,

$$II(X, Y) = (\tilde{\nabla}_X Y)^\perp,$$

donde  $X, Y$  son extensiones arbitrarias a  $\tilde{M}$  y  $\mathcal{N}(M)$  representa el conjunto de los campos de vectores normales a  $M$ .

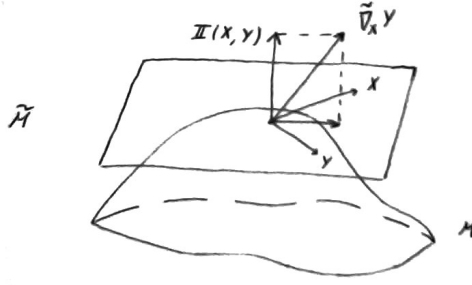


Figura 1.2: Segunda Forma Fundamental.

**Teorema 1.1.1.** La segunda forma fundamental verifica las siguientes propiedades,

- 1) Independencia de las extensiones de  $X$  e  $Y$ .
- 2) Bilinealidad sobre  $\mathcal{C}^\infty(M)$ .
- 3) Simetría en  $X$  e  $Y$ .

*Demostración.* Demostraremos primero que la simetría de  $II$  viene de la simetría de  $\tilde{\nabla}$ . Consideramos los campos  $X, Y$  que están extendidos arbitrariamente a  $M$ . Entonces,

$$II(X, Y) - II(Y, X) = (\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X)^\perp = [X, Y]^\perp.$$

Además, como  $X$  e  $Y$  son tangentes a  $M$  en todo punto de  $M$ , también lo es el corchete de Lie. Entonces,  $[X, Y]^\perp = 0$  y  $II$  es simétrica.

El hecho de que  $\tilde{\nabla}_X Y|_p$  dependa solo de  $X_p$ , induce inmediatamente la independencia de las extensiones.

De hecho, por ser local, también se concluye que  $II(X, Y)$  es lineal sobre  $\mathcal{C}^\infty(M)$  en  $X$ , y por tanto usando la simetría es bilineal.  $\square$

El siguiente resultado relaciona ambas conexiones de Levi-Civita,

**Teorema 1.1.2** (Fórmula de Gauss). *Si  $X, Y$  son extensiones arbitrarias a campos de vectores en  $\tilde{M}$ , la siguiente fórmula es cierta sobre  $M$ ,*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y). \quad (1.3)$$

*Demostración.* Por la definición de segunda forma fundamental y la observación previa, es suficiente ver que  $(\tilde{\nabla}_X Y)^\top = \nabla_X Y$  en todos los puntos de  $M$ .

Empezaremos definiendo la aplicación,  $\nabla^\top : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$  mediante,  $\nabla_X^\top Y = (\tilde{\nabla}_X Y)^\top$  donde  $X, Y$  están arbitrariamente extendidos a  $\tilde{M}$ .

Es fácil ver que  $\nabla^\top$  es una conexión en  $M$ . Por tanto, si conseguimos demostrar que es simétrica y compatible con la métrica  $g$ , por la unicidad de la conexión de Levi-Civita en  $M$ , tendremos la igualdad.

Para ver la simetría, utilizaremos el hecho de que  $\tilde{\nabla}$  es simétrica y que el corchete de Lie  $[X, Y]$  es tangente a  $M$ ,

$$\nabla_X^\top Y - \nabla_Y^\top X = (\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X)^\top = [X, Y]^\top = [X, Y].$$

Por último, para comprobar la compatibilidad con la métrica, sean  $X, Y, Z \in \chi(M)$  extendidos a  $\tilde{M}$  arbitrariamente. Utilizando la compatibilidad de  $\tilde{\nabla}$  con  $\tilde{g}$ , se sigue que,

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle &= \langle \tilde{\nabla}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \tilde{\nabla}_X Z \rangle = \langle (\tilde{\nabla}_X Y)^\top, Z \rangle + \langle Y, (\tilde{\nabla}_X Z)^\top \rangle = \\ &= \langle \nabla_X^\top Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X^\top Z \rangle. \end{aligned}$$

Luego,  $\nabla^\top$  es compatible con  $g$  y simétrica, es decir, por unicidad

$\nabla^\top = \nabla$ .  $\square$

A continuación, veremos que a pesar de que la segunda forma fundamental se haya definido en términos de la derivada covariante de campos de vectores tangentes a  $M$ , también se puede emplear para evaluar derivadas covariantes de campos de vectores normales.

Supongamos que  $X \in \chi(M)$  y  $N \in \mathcal{N}(M)$  se extienden arbitrariamente a  $\tilde{M}$ , entonces se verifica, la *Fórmula de Weingarten*,

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X + \mathcal{D}_X N \quad (1.4)$$

donde  $-A_N X = (\tilde{\nabla}_X N)^\top$  y  $\mathcal{D}_X N = (\tilde{\nabla}_X N)^\perp$ .

**Definición 3.** Llamamos *endomorfismo de Weingarten* a menos la parte tangencial en la fórmula de Weingarten,  $A_N$ . Y definimos la *conexión en el fibrado normal* como la aplicación  $\mathcal{D}: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \mathcal{N}(M)$  dada por,  $\mathcal{D}_X N = (\tilde{\nabla}_X N)^\perp$ .

**Observación 2.** La conexión en el fibrado normal es una conexión afín.

**Teorema 1.1.3** (Ecuación de Weingarten). *Supongamos que  $X, Y \in \chi(M)$  y  $N \in \mathcal{N}(M)$ . Cuando se extienden  $X, Y, N$  arbitrariamente a  $\tilde{M}$ , se verifica la siguiente igualdad en los puntos de  $M$ ,*

$$\langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle = -\langle N, II(X, Y) \rangle. \quad (1.5)$$

*Demostración.* Sabemos que  $\langle N, Y \rangle$  se anula en  $M$  y que  $X$  es tangente a  $M$ , por tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= X \langle N, Y \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, \tilde{\nabla}_X Y \rangle = \\ &= \langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, \nabla_X Y + II(X, Y) \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, II(X, Y) \rangle. \end{aligned}$$

Tal y como queríamos demostrar.  $\square$

Utilizando la fórmula de Weingarten (1.4), se puede simplificar la ecuación de Weingarten (1.5),

$$\langle N, II(X, Y) \rangle = -\langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle = \langle A_N X, Y \rangle.$$

Y de la simetría de  $II$  se deduce que el endomorfismo de Weingarten  $A_N$  es autoadjunto.

En lo que sigue, vamos a detallar las ecuaciones fundamentales de subvariedades, demostrando cada una de ellas. Empezaremos con una definición para poder simplificar la notación, esta definición cobrará más sentido cuando tratemos de generalizar el teorema fundamental, ya que necesitaremos definir una nueva conexión, que quedará definida por la siguiente propiedad,

**Definición 4.** Definimos la *conexión de Van Der Warden-Bortolotti* como,

$$\bar{\nabla}_X II(Y, Z) = \mathcal{D}_X II(Y, Z) - II(Y, \nabla_X Z) - II(\nabla_X Y, Z), \quad (1.6)$$

donde  $X, Y, Z \in \chi(M)$ .

**Observación 3.** Como todas las operaciones que vamos a realizar son locales, podemos extender los campos de vectores tangentes a la subvariedad de forma arbitraria, y los denotaremos por la misma letra.

**Observación 4.** Debemos recordar, que nuestro convenio para definir el homomorfismo de curvatura de Riemann es,

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Y entonces,  $Rm(X, Y, Z, T) = \langle R(X, Y)Z, T \rangle$ .

La ecuación de Gauss nos relaciona la curvatura de la subvariedad con la de la variedad ambiente, mediante las formas fundamentales.

**Teorema 1.1.4** (Ecuación de Gauss). *Sea  $M$  una subvariedad de Riemann de  $\tilde{M}$ . Entonces, para cualesquiera campos de vectores  $X, Y, Z, T$  tangentes a  $M$ , tenemos,*

$$\begin{aligned} \tilde{Rm}(X, Y, Z, T) &= Rm(X, Y, Z, T) - \\ &- \langle II(X, Z), II(Y, T) \rangle + \langle II(Y, Z), II(X, T) \rangle. \end{aligned} \quad (1.7)$$

*Demostración.* Consideramos que los campos  $X, Y, Z, T$  están extendidos arbitrariamente a campos de vectores en  $\tilde{M}$  tangentes a  $M$  en los puntos de  $M$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z + \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z = \\ &= \tilde{\nabla}_Y (\nabla_X Z + II(X, Z)) - \tilde{\nabla}_X (\nabla_Y Z + II(Y, Z)) + \nabla_{[X, Y]} Z + II([X, Y], Z), \end{aligned}$$

donde se ha aplicado la fórmula de Gauss. Ahora, por linealidad de la conexión de Levi-Civita,

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= \tilde{\nabla}_Y \nabla_X Z + \tilde{\nabla}_Y II(X, Z) - \tilde{\nabla}_X \nabla_Y Z - \tilde{\nabla}_X II(Y, Z) + \\ &+ \nabla_{[X, Y]} Z + II([X, Y], Z) = R(X, Y)Z + II(Y, \nabla_X Z) + \\ &+ \tilde{\nabla}_Y II(X, Z) - II(X, \nabla_Y Z) - \tilde{\nabla}_X II(Y, Z) + II([X, Y], Z). \end{aligned}$$

Entonces, teniendo en cuenta que  $T \in \chi(M)$ ,

$$\tilde{Rm}(X, Y, Z, T) = Rm(X, Y, Z, T) + \langle \tilde{\nabla}_Y II(X, Z), T \rangle - \langle \tilde{\nabla}_X II(Y, Z), T \rangle,$$

donde al aplicar la ecuación de Weingarten, demostramos el enunciado.  $\square$

La ecuación de Codazzi nos dice que es  $Rm(X, Y, Z, T)$  cuando uno de estos campos de vectores está en  $\mathcal{N}(M)$ . Cuál de todos no importa, por las simetrías de la curvatura.

**Teorema 1.1.5** (Ecuación de Codazzi). *Sea  $M$  una subvariedad de Riemann de  $\tilde{M}$ . Entonces, si  $X, Y, Z \in \chi(M)$ ,*

$$(\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp = (\tilde{\nabla}_Y II)(X, Z) - (\tilde{\nabla}_X II)(Y, Z), \quad (1.8)$$

donde  $\tilde{\nabla}$  representa la conexión de Van Der Warden-Bortolotti (1.6).

*Demostración.* Teniendo en cuenta la demostración anterior, es fácil ver que,

$$\begin{aligned} (\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp &= \mathcal{D}_Y II(X, Z) - \mathcal{D}_X II(Y, Z) + \\ &+ II(Y, \nabla_X Z) - II(X, \nabla_Y Z) + II([X, Y], Z). \end{aligned}$$



Entonces, aplicando la condición de simetría de la conexión de Levi-Civita al último sumando,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

tenemos que,

$$\begin{aligned} (\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp &= \mathcal{D}_Y II(X, Z) - II(X, \nabla_Y Z) - II(\nabla_Y X, Z) - \\ &\quad - \mathcal{D}_X II(Y, Z) + II(Y, \nabla_X Z) + II(\nabla_X Y, Z). \end{aligned}$$

Que utilizando la definición de la conexión de Van Der Warden-Bortolotti, es justamente lo que queríamos probar.  $\square$

De forma similar a la ecuación de Codazzi (1.8), la de Ricci nos da información sobre la curvatura al evaluarla sobre dos campos de vectores normales. Nuevamente, por las simetrías, no importa en que posición se evalúen.

**Teorema 1.1.6** (Ecuación de Ricci). *Sea  $M$  una subvariedad de Riemann de  $\tilde{M}$ . Sean  $X, Y \in \chi(M)$  y  $\xi, \nu \in \mathcal{N}(M)$ , entonces,*

$$\begin{aligned} \tilde{Rm}(X, Y, \xi, \nu) &= Rm^D(X, Y, \xi, \nu) + \\ &\quad + \langle II(X, A_\xi Y), \nu \rangle - \langle II(Y, A_\xi X), \nu \rangle, \end{aligned} \quad (1.9)$$

donde  $Rm^D$  denota la curvatura de Riemann del fibrado normal  $\mathcal{N}(M)$ .

*Demostración.* Supongamos que trabajamos con las extensiones arbitrarias a  $\tilde{M}$ . Si  $\xi, \nu \in \mathcal{N}(M)$ , entonces,

$$\begin{aligned} \tilde{Rm}(X, Y, \xi, \nu) &= \langle \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X \xi - \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y \xi + \tilde{\nabla}_{[X, Y]} \xi, \nu \rangle = \\ &= \langle \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X \xi, \nu \rangle - \langle \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y \xi, \nu \rangle + \langle \tilde{\nabla}_{[X, Y]} \xi, \nu \rangle. \end{aligned}$$

Y aplicando la fórmula de Weingarten (1.4),

$$\begin{aligned} \tilde{Rm}(X, Y, \xi, \nu) &= -\langle \tilde{\nabla}_Y (A_\xi X), \nu \rangle + \langle \tilde{\nabla}_X (A_\xi Y), \nu \rangle + \\ &\quad + \langle \tilde{\nabla}_Y \mathcal{D}_X \xi, \nu \rangle - \langle \tilde{\nabla}_X \mathcal{D}_Y \xi, \nu \rangle - \langle A_\xi [X, Y], \nu \rangle + \\ &\quad + \langle \mathcal{D}_{[X, Y]} \xi, \nu \rangle. \end{aligned}$$

Volviendo a aplicar las fórmulas de Gauss (1.3) y Weingarten (1.4), se llega a,

$$\begin{aligned} \tilde{Rm}(X, Y, \xi, \nu) &= -\langle II(Y, A_\xi X), \nu \rangle + \langle II(X, A_\xi Y), \nu \rangle + \\ &\quad + \langle \mathcal{D}_Y \mathcal{D}_X \xi, \nu \rangle - \langle A_{\mathcal{D}_Y \xi} Y, \nu \rangle - \langle \mathcal{D}_X \mathcal{D}_Y \xi, \nu \rangle + \\ &\quad + \langle A_{\mathcal{D}_Y \xi} X, \nu \rangle - \langle A_\xi [X, Y], \nu \rangle + \langle \mathcal{D}_{[X, Y]} \xi, \nu \rangle = \\ &= Rm^D(X, Y, \xi, \nu) + \langle II(X, A_\xi Y), \nu \rangle - \langle II(Y, A_\xi X), \nu \rangle - \\ &\quad - \langle A_{\mathcal{D}_X \xi} Y, \nu \rangle + \langle A_{\mathcal{D}_Y \xi} X, \nu \rangle - \langle A_\xi [X, Y], \nu \rangle, \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta la definición de  $Rm^D$  y que  $\nu \in \mathcal{N}(M)$ . Finalmente, observando que el endomorfismo de Weingarten es tangente a  $M$  se obtiene el resultado.  $\square$

Estas tres ecuaciones que acabamos de demostrar van a contener toda la información de la subvariedad, de ahí su nombre. Las tres ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci se conocen como las *ecuaciones fundamentales*.

## 1.2. Formas de Cartan

En esta sección vamos a introducir el simbolismo de Cartan para el estudio de variedades que nos proporciona una herramienta muy útil tanto para el estudio de la Geometría Diferencial como el de las Ecuaciones en Derivadas Parciales. Además, tendrá una importancia vital en la última sección del segundo capítulo, y en la generalización del teorema fundamental.

**Definición 5.** Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ , una *referencia local* es un conjunto de  $n$  campos de vectores diferenciables linealmente independientes  $\{X_1, \dots, X_n\}$ . Sea  $\{X_1, \dots, X_n\}$  una referencia local en  $M$ , definimos las *formas duales*  $\theta^i$  como las 1-formas,

$$\theta^i(X_j) = \delta_j^i, \quad (1.10)$$

donde  $\delta_j^i$  es la *delta de Kronecker*. Si  $\{X_1, \dots, X_n\}$  es una referencia local ortonormal en  $M$ , llamamos *1-formas de conexión* a las 1-formas  $\omega_j^i$ , dadas por,

$$\nabla_X X_j = \omega_j^i X_i. \quad (1.11)$$

Sea  $\nabla$  la conexión de Levi-Civita sobre una variedad de Riemann,  $(M, g)$  y sean  $\omega_j^i$  las 1-formas de conexión con respecto a una referencia local  $\{X_i\}$ . Obsérvese que de  $\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{ij}^k X_k$  (en este caso,  $\Gamma_{ij}^k$  no son los símbolos de Christoffel, es decir no son las componentes con respecto a un sistema coordenado, ya que  $\{X_1, \dots, X_n\}$  no necesariamente son los campos coordenados) junto con las 1-formas de conexión (1.11) obtenemos,

$$\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i \theta^k. \quad (1.12)$$

Además, si la expresión local del homomorfismo de Riemann es  $R(X_i, X_j)X_k = R_{kij}^l X_l$  (de nuevo  $R_{kij}^l$  no representa las componentes respecto a un sistema coordenado por la misma razón que antes) entonces, definimos las *2-formas de curvatura* mediante

$$\Omega_j^i = \frac{1}{2} R_{jkl}^i \theta^k \wedge \theta^l. \quad (1.13)$$

Con estas definiciones, el teorema fundamental de la geometría (que se puede encontrar en [5] o en [17]) y que dice que existe una única conexión afín simétrica y compatible con la métrica queda,

**Teorema 1.2.1.** *Sea  $M$  una variedad de Riemann, entonces las 1-formas de conexión (1.11) son las únicas 1-formas  $\omega_j^i$  que verifican,*

$$\begin{cases} \omega_j^i = -\omega_i^j \\ d\theta^i = \theta^k \wedge \omega_k^i \end{cases}.$$

El siguiente teorema nos demostrará las ecuaciones de estructura de una variedad de Riemann, y veremos que equivalen a la simetría de la conexión de Levi-Civita y a la definición del homomorfismo de curvatura de Riemann.

**Teorema 1.2.2** (Ecuaciones de Estructura). *Si  $\{X_1, \dots, X_n\}$  es una referencia local ortonormal en  $M$ , entonces,*

$$\begin{cases} d\theta^i = -\omega_k^i \wedge \theta^k \\ d\omega_j^i = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k - \Omega_j^i. \end{cases} \quad (1.14)$$

*Demostración.* Por la unicidad del teorema anterior, podemos probar la primera ecuación de estructura. Si definimos,

$$\omega_j^i = \Gamma_{kj}^i \theta^k,$$

entonces,  $\omega_j^i$  verifica las condiciones del teorema anterior.

Para la primera,

$$0 = X_k \langle X_i, X_j \rangle = \langle \nabla_{X_k} X_i, X_j \rangle + \langle X_i, \nabla_{X_k} X_j \rangle = \Gamma_{ki}^j + \Gamma_{kj}^i,$$

luego, evidentemente,  $\omega_j^i = -\omega_i^j$ .

Por otra parte, como ya hemos visto,

$$\theta^l \wedge \omega_l^i(X_j, X_k) = \omega_j^i(X_k) - \omega_k^i(X_j).$$

Y también,

$$\begin{aligned} d\theta^i(X_j, X_k) &= X_j(\theta^i(X_k)) - X_k(\theta^i(X_j)) - \theta^i([X_j, X_k]) = \\ &= -\theta^i(\nabla_{X_j} X_k - \nabla_{X_k} X_j) = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i = \omega_j^i(X_k) - \omega_k^i(X_j), \end{aligned}$$

lo que prueba la segunda condición. Por tanto, la primera ecuación de estructura queda probada aplicando el teorema anterior.

Para la segunda ecuación de estructura, desarrollamos,

$$\begin{aligned} R_{jkl}^i X_i &= R(X_k, X_l)X_j = \nabla_{X_l} \nabla_{X_k} X_j - \nabla_{X_k} \nabla_{X_l} X_j + \nabla_{[X_k, X_l]} X_j = \\ &= \nabla_{X_k} (\Gamma_{lj}^\mu X_\mu) - \nabla_{X_l} (\Gamma_{kj}^\mu X_\mu) + \nabla_{[X_k, X_l]} X_j = \\ &= X_l \Gamma_{kj}^\mu X_\mu + \Gamma_{kj}^\mu \Gamma_{l\mu}^i X_i - \Gamma_{lj}^\mu \Gamma_{k\mu}^i X_i - X_k \Gamma_{lj}^\mu X_\mu + \nabla_{[X_k, X_l]} X_j. \end{aligned}$$

Es decir,

$$R_{jkl}^i = \Gamma_{kj}^\mu \Gamma_{l\mu}^i - \Gamma_{lj}^\mu \Gamma_{k\mu}^i + X_l \Gamma_{kj}^i - X_k \Gamma_{lj}^i + \theta^i(\nabla_{[X_k, X_l]} X_j).$$

Finalmente, comparandolo con,

$$\begin{aligned} (d\omega_j^i + \omega_\mu^i \wedge \omega_j^\mu)(X_k, X_l) &= X_k \omega_j^i(X_l) - X_l \omega_j^i(X_k) - \omega_j^i([X_k, X_l]) + \\ &+ \omega_\mu^i(X_k) \omega_j^\mu(X_l) - \omega_\mu^i(X_l) \omega_j^\mu(X_k) = -R_{jkl}^i = -\Omega_j^i(X_k, X_l), \end{aligned}$$

conseguiamos probar la segunda ecuación de estructura.  $\square$

Además, una de las ventajas de el análisis geométrico de las variedades de Riemann mediante el uso de formas diferenciales es la sencillez con la que se reducen las ecuaciones en la teoría de subvariedades.

**Definición 6.** Sea  $M^n \subset \tilde{M}^m$  una subvariedad de Riemann. Una referencia local  $\{X_1, \dots, X_m\}$  de  $\tilde{M}$  diremos que está *adaptada a  $M$*  si  $\{X_1, \dots, X_n\}$  es una referencia local de  $M$  y  $X_{n+1}, \dots, X_m$  son campos de vectores normales a  $M$ .

Sea  $\{X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_m\}$  una referencia local ortonormal adaptada a  $M^n \subset \tilde{M}^m$ , entonces representamos por,  $\phi^\alpha$  las formas duales (1.10),  $\psi_\beta^\alpha$  las 1-formas de conexión (1.11) y  $\Psi_\beta^\alpha$  las 2-formas de curvatura (1.13) asociadas a la referencia anterior con  $1 \leq \alpha, \beta \leq m$  en  $\tilde{M}$  y  $\theta^i$ ,  $\omega_j^i$  y  $\Omega_j^i$  con  $1 \leq i, j \leq n$  lo mismo en  $M$ . Además, es evidente que al restringirnos a  $TM$ ,

$$\begin{cases} \phi^i = \theta^i, i \leq n \\ \phi^r = 0, r > n \end{cases}.$$

Con la ayuda del siguiente lema (Lema de Cartan, cuya demostración puede consultarse en [17]) vamos a relacionar la anterior familia de formas y a expresar las ecuaciones fundamentales de subvariedades en términos de ellas.

**Lema 1.2.3** (Lema de Cartan). Sean  $\lambda^1, \dots, \lambda^n$  1-formas linealmente independientes en  $M$  con  $\dim M \geq n$ . Si  $\mu_1, \dots, \mu_n$  son 1-formas tales que,

$$\lambda^i \wedge \mu_i = 0,$$

entonces existen unas únicas funciones diferenciables  $f_{ij}$  en  $M$  que verifican,

$$\begin{cases} \mu_i = f_{ij} \lambda^j \\ f_{ij} = f_{ji} \end{cases}.$$

**Teorema 1.2.4.** Con la notación anterior, tenemos,

$$\begin{cases} \psi_j^i = \omega_j^i \\ \psi_j^r = h_{ij}^r \theta^i, \\ h_{ij}^r = h_{ji}^r \end{cases}$$

donde  $h_{ij}^r$  vienen dados por el lema anterior.

*Demostración.* Si restringimos a  $TM$  la ecuación,

$$d\phi^\alpha = -\psi_\gamma^\alpha \wedge \phi^\gamma,$$

obtenemos el siguiente sistema,

$$\begin{cases} d\theta^i = -\psi_k^i \wedge \theta^k, i \leq n \\ \theta^k \wedge \psi_k^r = 0, r > n \end{cases}.$$

Además, como  $\omega_j^i$  son únicos y se verifica,

$$\begin{cases} \psi_\beta^\alpha = -\psi_\alpha^\beta \\ d\theta^i = -\psi_k^i \wedge \theta^k \end{cases},$$

entonces, necesariamente,  $\psi_j^i = \omega_j^i$  cuando  $i, j \leq n$ .  
Para el resto se cumple que,

$$\begin{cases} \psi_k^r = -\psi_r^k, k \leq n < r \\ \theta^k \wedge \psi_k^r = 0 \end{cases},$$

y por el lema de Cartan existen unos únicos  $h_{ij}^r$  en  $M$  tales que,

$$\begin{cases} \psi_j^r = -\psi_r^j = h_{ij}^r \theta^i, r > n \\ h_{ij}^r = h_{ji}^r \end{cases}.$$

Precisamente, lo que queriamos demostrar.  $\square$

Obsérvese que la segunda forma fundamental  $II$  se expresa como,

$$II(X_j, X_k) = \psi_j^r(X_k)X_r = h_{kj}^r X_r.$$

Además, se tienen los siguientes resultados,

**Proposición 1.2.5.** *La fórmula de Gauss (1.3) es equivalente a,*

$$\begin{cases} \psi_j^i = \omega_j^i \\ \psi_j^r = h_{ij}^r \theta^i \end{cases}.$$

*Demostración.* Se tiene que, para todo  $X \in \chi(M)$ ,

$$\langle \nabla_X X_j, X_i \rangle = \omega_j^i(X) = \psi_j^i(X) = \langle \tilde{\nabla}_X X_j, X_i \rangle.$$

Y además,

$$\langle \tilde{\nabla}_{X_k} X_j, X_r \rangle = \psi_j^r(X_k) = h_{kj}^r, r > n.$$

Juntando ambas cosas se recupera la fórmula de Gauss.  $\square$

**Proposición 1.2.6.** *La ecuación de Weingarten (1.4) es equivalente a,*

$$\psi_r^j = -\psi_j^r.$$

*Demostración.* Es fácil observar que,

$$\langle \tilde{\nabla}_{X_k} X_r, X_j \rangle = \psi_r^j(X_k) = -\psi_j^r(X_k) = -\langle \tilde{\nabla}_{X_k} X_j, X_r \rangle = -\langle II(X_j, X_k), X_r \rangle.$$

Es decir, ambas expresiones son equivalentes.  $\square$

**Teorema 1.2.7.** *Restringiendo la segunda ecuación de estructura a  $TM$  se obtiene,*

$$\begin{cases} \Psi_j^i = \Omega_j^i - \psi_i^r \wedge \psi_r^j \\ d\psi_j^r = -\psi_i^r \wedge \omega_j^i - \psi_w^r \wedge \psi_j^w - \Psi_j^r, \\ d\psi_r^s = -\psi_i^s \wedge \psi_r^i - \psi_w^s \wedge \psi_r^w - \Psi_r^s \end{cases}$$

donde  $i, j \in 1, \dots, n$  y  $w, r \in n+1, \dots, m$ .

*Demostración.* Dada la segunda ecuación de estructura en  $\tilde{M}$ ,

$$d\psi_\beta^\alpha = -\psi_\gamma^\alpha \wedge \psi_\beta^\gamma - \Psi_\beta^\alpha,$$

procedemos a restringirla a  $TM$ . Para eso analizamos tres casos, el primero,  $\alpha = i$  y  $\beta = j$  con  $i, j \leq n$  donde obtenemos,

$$d\omega_j^i = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k - \psi_i^r \wedge \psi_r^j - \Psi_j^i,$$

y aplicando la segunda ecuación de estructura para  $M$ , se llega a,

$$\Psi_j^i = \Omega_j^i - \psi_i^r \wedge \psi_r^j.$$

En el segundo caso, tenemos  $\alpha = r > n$  y  $\beta = j \leq n$ , es decir,

$$d\psi_j^r = -\psi_i^r \wedge \psi_j^i - \psi_s^r \wedge \psi_j^s - \Psi_j^r,$$

y utilizando que  $\omega_j^i = \psi_j^i$ , se consigue la segunda ecuación.

Finalmente, en el tercer caso,  $\alpha = s$  y  $\beta = r$  con  $r, s > n$ , entonces,

$$d\psi_r^s = -\psi_i^s \wedge \psi_r^i - \psi_w^s \wedge \psi_r^w - \Psi_r^s.$$

Es decir, tenemos las tres ecuaciones del enunciado.  $\square$

Veamos que las ecuaciones anteriores son equivalentes a las ecuaciones fundamentales de la teoría de subvariedades (es decir, a las ecuaciones de Gauss-Codazzi-Ricci) vistas anteriormente.

**Proposición 1.2.8.** *La ecuación de Gauss (1.7) es equivalente a,*

$$\Psi_j^i = \Omega_j^i - \psi_i^r \wedge \psi_r^j. \quad (1.15)$$

*Demostración.* Tenemos que en  $TM$ ,

$$\Psi_j^i = \Omega_j^i - \psi_i^r \wedge \psi_r^j.$$

Además, se verifica,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{R}(X, Y)X_j, X_i \rangle &= \Psi_j^i(X, Y) = \langle R(X, Y)X_j, X_i \rangle + \\ &\quad - [\psi_i^r(X)\psi_r^j(Y) - \psi_i^r(Y)\psi_r^j(X)], \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} \psi_i^r(X)\psi_r^j(Y) &= -\psi_i^r(X)\psi_r^j(Y) = -\langle II(X_i, X), X_r \rangle \langle II(X_j, Y), X_r \rangle = \\ &= -\langle II(X_i, X), II(X_j, Y) \rangle. \end{aligned}$$

Y de forma análoga para el otro término.  $\square$

La demostración de las siguientes proposiciones es similar a la anterior, y una mera comprobación.

**Proposición 1.2.9.** *La ecuación de Codazzi (1.8) equivale a,*

$$d\psi_j^r = -\psi_i^r \wedge \omega_j^i - \psi_w^r \wedge \psi_j^w - \Psi_j^r. \quad (1.16)$$

**Proposición 1.2.10.** *La ecuación de Ricci (1.9) equivale a,*

$$d\psi_r^s = -\psi_i^s \wedge \psi_r^i - \psi_w^s \wedge \psi_r^w - \Psi_r^s. \quad (1.17)$$

### 1.3. Superficies de $\mathbb{R}^3$

Para finalizar con este capítulo introductorio, definiremos las superficies de  $\mathbb{R}^3$  como un caso particular de subvariedades de Riemann, que como ya se ha dicho es ligeramente diferente a como se definieron a lo largo del grado, en el sentido de que se presentan dentro de la teoría de subvariedades. Esto nos permitira trasladar todo lo que conocemos y de esta forma lidiar con fórmulas más simples.

**Definición 7.** Una *superficie*  $S$  es una subvariedad inmersa de Riemann de codimensión uno del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$ .

En esta situación, para cada punto de  $S$  existen exactamente dos posibles vectores normales unitarios. Podemos suponer que  $S$  es orientable, simplemente limitandonos a un subconjunto adecuado de  $S$ , y entonces consideramos el único vector normal unitario que define la orientación positiva. Esto es, si tenemos un sistema de coordenadas  $(u, v)$ , entonces,

$$N = \frac{\frac{\partial}{\partial u} \wedge \frac{\partial}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial}{\partial u} \wedge \frac{\partial}{\partial v} \right\|}, \quad (1.18)$$

donde  $\wedge$  denota el producto vectorial de  $\mathbb{R}^3$ . Consideremos sobre  $S$  la métrica inducida de  $\mathbb{R}^3$  y denotemos a sus coeficientes de la primera forma fundamental respecto de las coordenadas  $(u, v)$  por,

$$\begin{cases} E = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle \\ F = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle \\ G = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle \end{cases}, \quad (1.19)$$

con lo que la primera forma fundamental en este sistema de coordenadas queda,

$$I = Edu \otimes du + Fdu \otimes dv + Gdv \otimes dv.$$

Recordemos que la *segunda forma fundamental escalar* de la superficie  $S$  es el tensor 2-covariante simétrico,

$$h(X, Y) = \langle II(X, Y), N \rangle.$$

En nuestro caso como  $N$  genera  $\mathcal{NM}$  en cada punto, la definición anterior equivale a,

$$II(X, Y) = h(X, Y)N.$$

Llamamos *coeficientes de la segunda forma fundamental* a,

$$\begin{cases} e = h\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right) \\ f = h\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) \\ g = h\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right) \end{cases}. \quad (1.20)$$

Con lo que, en este sistema de coordenadas podemos escribir la segunda forma fundamental como,

$$h = edu \otimes du + fdu \otimes dv + gdv \otimes dv.$$

La fórmula de Gauss (1.3) se simplifica un tanto, quedando,

**Teorema 1.3.1** (Fórmula de Gauss para Superficies). *Si  $X, Y \in \chi(S)$  están extendidos arbitrariamente a  $\mathbb{R}^3$ , entonces tenemos la siguiente fórmula sobre  $S$ ,*

$$\nabla_X^{\mathbb{R}^3} Y = \nabla_X Y + h(X, Y)N. \quad (1.21)$$

Obteniendo como consecuencia la siguiente expresión de los coeficientes de la segunda forma fundamental (1.20),

$$\begin{cases} e = \langle \frac{\partial^2}{\partial u^2}, N \rangle \\ f = \langle \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}, N \rangle \\ g = \langle \frac{\partial^2}{\partial v^2}, N \rangle \end{cases},$$

que se obtiene de aplicar la fórmula de Gauss a  $\frac{\partial}{\partial u}$  y a  $\frac{\partial}{\partial v}$ .

A continuación, vamos a introducir el operador forma y veremos algunas de sus propiedades. Combinando la fórmula de Gauss anterior con la fórmula de Weingarten (1.4),

$$\langle X, A_N Y \rangle = h(X, Y), \quad (1.22)$$

para cualesquiera  $X, Y \in \chi(S)$ . A partir de ahora,  $A_N$  será denotado indistintamente por  $s$  y se llamará también *operador forma*, que como sabemos, es un endomorfismo autoadjunto de  $TS$ . Además de la ecuación de Weingarten (1.5) se obtiene fácilmente,

**Teorema 1.3.2** (Ecuación de Weingarten para Superficies). *Sea  $X \in \chi(S)$ , arbitrariamente extendido a  $\mathbb{R}^3$ , entonces,*

$$\nabla_X^{\mathbb{R}^3} N = -sX. \quad (1.23)$$



*Demostración.* Por la ecuación de Weingarten general,  $\forall Y \in \chi(S)$ ,

$$\langle \nabla_X^{\mathbb{R}^3} N, Y \rangle = -h(X, Y) = -\langle sX, Y \rangle.$$

Pero, además,

$$\langle \nabla_X^{\mathbb{R}^3} N, N \rangle = \frac{1}{2} X \langle N, N \rangle = 0,$$

es decir,  $\nabla_X^{\mathbb{R}^3} N$  es tangente a  $S$ , y se concluye el enunciado.  $\square$

En las siguientes líneas vamos a dar las expresiones locales de las ecuaciones fundamentales para el caso de superficies, para ello vamos a recordar primero que la curvatura de Gauss de una superficie (vista como variedad de Riemann de dimensión 2) es la curvatura seccional, es decir,

$$K(p) = K\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = \frac{Rm\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)}{\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle \langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle - \langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle^2}. \quad (1.24)$$

**Teorema 1.3.3** (Ecuación de Gauss para Superficies). *En coordenadas locales  $(u, v)$  tenemos,*

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \quad (1.25)$$

*Demostración.* De la ecuación de Gauss general (1.7) usando que,

$$Rm^{\mathbb{R}^3}\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = 0,$$

tenemos,

$$Rm\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = \langle II\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right), II\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right) \rangle - \langle II\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right), II\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) \rangle.$$

Finalmente, usando la definición de la curvatura seccional (1.24) y los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental (1.19) y (1.20),

$$K(p) = \frac{Rm\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)}{\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle \langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle - \langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle^2} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

para cualquier  $p \in S$ .  $\square$

**Observación 5.** La ecuación de Gauss para superficies (1.25) se usa como definición de curvatura de Gauss en la teoría clásica de superficies.

La siguiente proposición es el teorema *egregio de Gauss* en la teoría clásica de superficies.

**Proposición 1.3.4.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie y  $T_p S = \text{span}\{\frac{\partial}{\partial u}|_p, \frac{\partial}{\partial v}|_p\}$ , entonces, se tienen las ecuaciones,

$$\begin{cases} (\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 - FK \\ (\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u = \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^2 + EK \end{cases},$$

donde  $K$  es la curvatura seccional.

*Demostración.* De la definición de curvatura seccional (1.24),

$$K = K\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = \frac{Rm\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)}{\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \rangle \langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle - \langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle^2}.$$

Es decir, usando la definición de  $E, F$  y  $G$  (1.19), tenemos la igualdad,

$$[EG - F^2]K = \langle EK \frac{\partial}{\partial v} - FK \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle = \langle R\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle.$$

Y desarrollando se obtienen las ecuaciones deseadas.  $\square$

**Observación 6.** Por las simetrías del homomorfismo de curvatura de Riemann, también se obtiene,

$$\begin{cases} (\Gamma_{22}^2)_u - (\Gamma_{12}^2)_v = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 - FK \\ (\Gamma_{12}^1)_v - (\Gamma_{22}^1)_u = \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 - GK \end{cases}.$$

**Teorema 1.3.5** (Ecuaciones de Codazzi-Mainardi). En coordenadas locales las ecuaciones de Codazzi (1.8) para superficies son,

$$\begin{cases} e_v - f_u = e\Gamma_{21}^1 + f(\Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 \\ f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2 \end{cases}. \quad (1.26)$$

*Demostración.* La ecuación de Codazzi (1.8) nos dice que,

$$\begin{aligned} (R^{\mathbb{R}^3}(X, Y)Z)^\perp &= \mathcal{D}_Y II(X, Z) - II(X, \nabla_Y Z) - II(\nabla_Y X, Z) - \\ &\quad - \mathcal{D}_X II(Y, Z) + II(Y, \nabla_X Z) + II(\nabla_X Y, Z). \end{aligned}$$

Aplicandola sobre  $\frac{\partial}{\partial u}$  y  $\frac{\partial}{\partial v}$ , tenemos,

$$\begin{aligned} (R^{\mathbb{R}^3}\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial u})^\perp &= 0 = \mathcal{D}_{\frac{\partial}{\partial v}}(eN) - II\left(\frac{\partial}{\partial u}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial u}\right) - \\ &\quad - II\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u}\right) - \mathcal{D}_{\frac{\partial}{\partial u}}(fN) + II\left(\frac{\partial}{\partial v}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u}\right) + II\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u}\right). \end{aligned}$$

De donde se concluye que,

$$e_v - f_u = e\Gamma_{21}^1 + f(\Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2.$$

Análogamente, si tomamos  $Z = \frac{\partial}{\partial v}$ , se llega a,

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2,$$

que son las dos ecuaciones que buscábamos.  $\square$

**Teorema 1.3.6** (Ecuación de Ricci para Superficies). *La ecuación de Ricci (1.9) en el caso de superficies es trivial.*

*Demostración.* Como ya hemos visto, el hecho de que sea una superficie implica que hay una única dirección normal, y entonces por las simetrías del tensor de curvatura de Riemann,

$$Rm^D(X, Y, \xi, \xi) = -Rm^D(X, Y, \xi, \xi),$$

es decir,  $Rm^D(X, Y, \xi, \xi) = 0$ . Además, la ecuación de Ricci general (1.9) se reduce a,

$$\langle II(X, A_\xi Y), \xi \rangle = \langle II(Y, A_\xi X), \xi \rangle,$$

ya que,  $Rm^{\mathbb{R}^3}(X, Y, \xi, \xi) = 0$ .

Finalmente, por la ecuación de Weingarten (1.23) y la simetría de la primera forma fundamental,

$$\langle II(X, A_\xi Y), \xi \rangle = \langle A_\xi X, A_\xi Y \rangle = \langle II(Y, A_\xi X), \xi \rangle.$$

Es decir, la ecuación de Ricci es trivial.  $\square$

**Observación 7.** En la teoría clásica de superficies, las ecuaciones de Gauss-Codazzi se obtienen a partir de las igualdades,

$$\begin{cases} (\frac{\partial^2}{\partial u^2})_v - (\frac{\partial^2}{\partial u \partial v})_u = 0 \\ (\frac{\partial^2}{\partial v^2})_u - (\frac{\partial^2}{\partial u \partial v})_v = 0 \\ N_{uv} - N_{vu} = 0 \end{cases}.$$

Por último, con el ánimo de facilitar ciertas equivalencias en los capítulos siguientes, vamos a expresar las ecuaciones fundamentales para superficies de  $\mathbb{R}^3$  con la terminología de Cartan (recuérdese lo introducido en la sección anterior). Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie y consideramos una referencia local ortonormal positivamente orientada en  $S$ ,  $\{X_1, X_2\}$ . Entonces, si  $X_3 = N$ , (1.18) tenemos que  $\{X_1, X_2, X_3\}$  es una referencia local ortonormal positivamente orientada adaptada a  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Además, podemos escribir,

$$\begin{cases} I = \theta^1 \otimes \theta^1 + \theta^2 \otimes \theta^2 \\ h = \psi_1^3 \otimes \theta^1 + \psi_2^3 \otimes \theta^2, \\ dA = \theta^1 \wedge \theta^2 \end{cases}$$

donde  $dA$  es el elemento de volumen de la variedad (que en el caso de superficies es el elemento de área).

**Teorema 1.3.7.** *En las condiciones anteriores, la ecuación de Gauss para superficies (1.25) es,*

$$d\omega_1^2 = -\psi_1^3 \wedge \psi_2^3 = -K\theta^1 \wedge \theta^2. \quad (1.27)$$

*Demostración.* Consideramos la ecuación de Gauss general (1.7),

$$\Psi_j^i = \Omega_j^i - \psi_i^r \wedge \psi_r^j,$$

y aplicando la segunda ecuación de estructura (1.14) sobre la subvariedad, tenemos,

$$\Psi_j^i = -d\omega_j^i - \omega_k^i \wedge \omega_j^k - \psi_i^r \wedge \psi_r^j.$$

En el caso de superficies, se tiene que  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $r = 3$  y  $\Psi_j^i = 0$ , es decir, nos queda,

$$d\omega_1^2 = -\psi_1^3 \wedge \psi_2^3,$$

ya que, utilizamos que  $\omega_i^i = 0$ .

Por otra parte, sabemos que,

$$\begin{aligned} K &= K\theta^1 \wedge \theta^2(X_1, X_2) = h(X_1, X_1)h(X_2, X_2) - h(X_1, X_2)^2 = \\ &= \psi_1^3(X_1)\psi_2^3(X_2) - \psi_2^3(X_1)\psi_1^3(X_2) = \psi_1^3 \wedge \psi_2^3(X_1, X_2), \end{aligned}$$

es decir,  $K\theta^1 \wedge \theta^2 = \psi_1^3 \wedge \psi_2^3$ .  $\square$

**Teorema 1.3.8.** *Las ecuaciones de Codazzi-Mainardi (1.26) respecto de la referencia local anterior son,*

$$\begin{cases} d\psi_1^3 = \omega_1^2 \wedge \psi_2^3 \\ d\psi_2^3 = -\omega_1^2 \wedge \psi_1^3 \end{cases}. \quad (1.28)$$

*Demostración.* Basta considerar la ecuación de Codazzi general (1.16) y las restricciones sobre superficies, es decir,  $r = w = 3$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$  y  $\Psi_j^r = 0$  por tratarse de  $\mathbb{R}^3$ .  $\square$

**Teorema 1.3.9.** *La ecuación de Ricci para superficies es trivial.*

*Demostración.* El resultado se obtiene a partir de la ecuación de Ricci general (1.17) bajo las condiciones de  $r = s = w = 3$ ,  $\Psi_r^s = 0$ ,  $i \in \{1, 2\}$  que se deducen de trabajar en una superficie.  $\square$

## Capítulo 2

# Teorema Fundamental de Superficies

En este segundo capítulo, nuestro objetivo será enunciar y demostrar el teorema fundamental para superficies de  $\mathbb{R}^3$ . Este teorema nos va a garantizar la existencia y unicidad de superficies, salvo movimientos rígidos, bajo unas condiciones. Estas condiciones resultan ser las ecuaciones fundamentales o, también llamadas de compatibilidad. La herramienta fundamental que usamos en la prueba que se ofrece es una versión del conocido teorema de Frobenius que se extrae de [2], aunque también es posible encontrarlo en [17].

### 2.1. Criterio de Frobenius

Para poder atacar la demostración, vamos a recurrir al criterio de Frobenius para la integrabilidad de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales. Este criterio nos garantiza la existencia de solución siempre y cuando se verifiquen unas condiciones adicionales, que se deducen de la igualdad de las derivadas parciales cruzadas.

**Teorema 2.1.1** (Criterio de Frobenius). *Sean  $\Phi, \Psi: U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^n$  campos de vectores diferenciables donde  $U \subset \mathbb{R}^2$  y  $V \subset \mathbb{R}^n$  son abiertos. Sea  $(u_0, v_0) \in U$  un punto fijo, entonces, para cada punto  $p \in V$  el sistema de ecuaciones,*

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} = \Phi(s, t, \mathbf{x}(s, t)) \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \Psi(s, t, \mathbf{x}(s, t)) \\ \mathbf{x}(s_0, t_0) = p \end{cases}$$

*tiene una única solución diferenciable  $\mathbf{x}: U_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$  definida en un entorno  $U_0$  de  $(s_0, t_0)$  en  $U$  si y sólo si se satisface la condición de compatibilidad,*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{D\Phi}{D\mathbf{x}}\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{D\Psi}{D\mathbf{x}}\Phi, \quad (2.1)$$

donde  $\frac{D\Phi}{D\mathbf{x}}$  y  $\frac{D\Psi}{D\mathbf{x}}$  son las matrices asociadas a las diferenciales de  $\Phi$  y  $\Psi$  respecto de  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ , es decir, se trata de las matrices Jacobianas.

*Demostración.* Para la necesidad, si  $\mathbf{x}(s, t)$  es una solución diferenciable se tiene que,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right),$$

lo que implica la condición de compatibilidad.

Para ver la suficiencia, supongamos que  $\Phi, \Psi$  satisfacen la condición de compatibilidad y vamos a resolver el sistema.

Para ello tomamos la primera ecuación sujeta a la condición inicial. Si fijamos  $t = t_0$ , existen  $\delta > 0$  y una función diferenciable  $\alpha: (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  que satisfacen,

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{ds} = \Phi(s, t_0, \alpha(s)) \\ \alpha(s_0) = p \end{cases}.$$

Para cada  $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ , definimos  $\beta^s(t) = \beta(s, t)$  como la única solución del problema de Cauchy,

$$\begin{cases} \frac{d\beta^s(t)}{dt} = \Psi(s, t, \beta^s(t)) \\ \beta^s(t_0) = \alpha(s) \end{cases}.$$

Sea  $\mathbf{x}(s, t) = \beta^s(t)$ . Por construcción,  $\mathbf{x}$  satisface la segunda ecuación y  $\mathbf{x}(s_0, t_0) = p$ . Falta ver que también verifica la primera ecuación. Para esto, definimos la función,

$$z(s, t) = \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x}(s, t) - \Phi(s, t, \mathbf{x}),$$

y entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} - \Phi \right) = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t \partial s} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{D\Phi}{D\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{D\Phi}{D\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \Psi - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{D\Phi}{D\mathbf{x}} \Psi \right) = \\ &= \frac{\partial \Psi}{\partial s} + \left( \frac{D\Psi}{D\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \right) - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{D\Phi}{D\mathbf{x}} \Psi \right) = \frac{D\Psi}{D\mathbf{x}} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} - \Phi \right) = \frac{D\Psi}{D\mathbf{x}} z. \end{aligned}$$

De esto, se sigue que  $z$  satisface,

$$\frac{\partial z}{\partial t}(s, t) = \frac{D\Psi}{D\mathbf{x}}(s, t, z)z(s, t).$$

Por otro lado, si  $t = t_0$ ,

$$z(s, t_0) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}(s, t_0) - \Phi(s, t_0, \mathbf{x}(s, t_0)) = \frac{d}{ds} \alpha(s) - \Phi(s, t_0, \alpha(s)) = 0,$$

para todo  $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ . Luego, la condición inicial para  $z$  es,

$$z(s_0, t_0) = 0.$$

Y por la unicidad de solución al problema de Cauchy,  $z(s, t) = 0$ . Es decir,  $\mathbf{x}(s, t)$  satisface la primera ecuación.  $\square$

Vamos a intentar dar una interpretación geométrica del criterio de Frobenius, que nos será útil al tratar de generalizar esta versión a subvariedades.

Sean  $\Phi, \Psi: \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  campos de vectores diferenciables con,

$$\begin{cases} \Phi = \Phi(s, t, \mathbf{x}) \\ \Psi = \Psi(s, t, \mathbf{x}) \end{cases},$$

donde  $\Omega$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Usando  $\Phi, \Psi$  definimos los campos de vectores  $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2: \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$  como,

$$\begin{cases} \mathbb{E}_1(s, t, \mathbf{x}) = (1, 0, \Phi) \\ \mathbb{E}_2(s, t, \mathbf{x}) = (0, 1, \Psi) \end{cases}.$$

**Proposición 2.1.2.** Sean  $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2: \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$  campos de vectores diferenciables definidos como antes. Si para cada  $(s_0, t_0) \in \Omega$  y  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  se cumple que,

$$[\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2](s_0, t_0, \mathbf{x}) \in \text{span}\{\mathbb{E}_1(s_0, t_0, \mathbf{x}), \mathbb{E}_2(s_0, t_0, \mathbf{x})\}, \quad (2.2)$$

entonces existe un entorno  $N(s_0, t_0, \mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^{n+2}$  y una subvariedad  $M \subset N(s_0, t_0, \mathbf{x})$  tal que si  $(s, t, \mathbf{x}) \in M$ , se tiene que,

$$T_{(s,t,\mathbf{x})}M = \text{span}\{\mathbb{E}_1(s_0, t_0, \mathbf{x}), \mathbb{E}_2(s_0, t_0, \mathbf{x})\}.$$

*Demostración.* La demostración es consecuencia directa del criterio de Frobenius ya que en el caso de  $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$  la condición (2.2) equivale a,

$$[\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2] = 0,$$

que se cumple si y sólo si los campos  $\Phi, \Psi$  satisfacen,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{D\Phi}{D\mathbf{x}}\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{D\Psi}{D\mathbf{x}}\Phi,$$

la condición de compatibilidad (2.1).  $\square$

Para el caso  $n = 1$ , conseguimos una superficie de  $\mathbb{R}^3$ . Se dice que dos campos de vectores linealmente independientes que cumplen la condición de la proposición anterior forman una *distribución involutiva* de rango dos.

Nuestra demostración del teorema fundamental utilizará matrices y relaciones entre ellas, por lo que la siguiente versión del criterio de Frobenius nos será de gran utilidad.

**Teorema 2.1.3.** Denotemos por  $gl(n)$  el álgebra de Lie del conjunto de matrices reales de orden  $n$ . Sean  $S, T: U \rightarrow gl(n)$  funciones diferenciables, donde  $U$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Para cada punto fijo  $(s_0, t_0) \in U$ , el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial s} = SG \\ \frac{\partial G}{\partial t} = TG \\ G(s_0, t_0) = I_n \end{cases},$$

tiene una única solución diferenciable  $G: U_0 \rightarrow gl(n)$  definida en un entorno  $U_0$  de  $(s_0, t_0)$  en  $U$  si y sólo si,

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial s} + [S, T] = 0. \quad (2.3)$$

*Demostración.* La demostración es análoga al Criterio de Frobenius.  $\square$

## 2.2. Teorema Fundamental de Superficies

Haciendo uso del criterio de Frobenius, estamos en condiciones de enunciar y demostrar el teorema principal de este trabajo fin de master. Empezaremos por demostrar cada parte del teorema completo por separado.

**Teorema 2.2.1.** Sea  $S$  una superficie regular orientable con una parametrización  $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ . Si definimos las matrices,

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \frac{fF - eG}{EG - F^2} \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 & \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 & \frac{fF - gE}{EG - F^2} \\ f & g & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, la ecuación de compatibilidad (2.3),

$$\mathbb{P}_v - \mathbb{Q}_u = [\mathbb{P}, \mathbb{Q}],$$

es equivalente a las ecuaciones de Gauss-Codazzi (1.25) y (1.26).

*Demostración.* Basta con desarrollar la ecuación de compatibilidad y ver que se obtienen las ecuaciones de Gauss-Codazzi, junto con otras ecuaciones que son trivialmente ciertas.  $\square$

En particular, dada una superficie orientable siempre se satisface la ecuación de compatibilidad.



**Teorema 2.2.2.** Sean  $E, F, G$  y  $e, f, g$  funciones diferenciables definidas en un dominio abierto  $V \subset \mathbb{R}^2$ , tales que  $E > 0$ ,  $G > 0$  y  $EG - F^2 > 0$ . Usando estas funciones definimos las funciones matriciales  $\mathbb{P}, \mathbb{Q}: V \rightarrow gl(3)$  y

$$M = \begin{pmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Supongamos que  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  satisfacen la ecuación de compatibilidad. Entonces existe un abierto  $U \subset V$  y una única función diferenciable  $\mathbf{x}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $S = x(U)$  es una superficie y los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales para la superficie  $S$  están dados por las funciones  $E, F, G, e, f$  y  $g$ .

*Demostración.* Sean  $(u_0, v_0) \in V$  y  $p \in \mathbb{R}^3$  dos puntos fijos. Supongamos que  $\{e_1, e_2, e_3\}$  es una base para  $\mathbb{R}^3$ , tal que,

$$M = (g_{ij}(u_0, v_0)),$$

con  $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ .

Como  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  satisfacen (2.3),

$$\mathbb{P}_v - \mathbb{Q}_u = [\mathbb{P}, \mathbb{Q}],$$

por el criterio de Frobenius para funciones matriciales (Teorema 2.1.3), existe un entorno abierto  $U \subset V$  del punto  $(u_0, v_0)$  y una función matricial diferenciable,  $\mathbb{V}: U \rightarrow gl(3)$  definida por,

$$\mathbb{V} = (w_1, w_2, w_3),$$

donde cada  $w_i: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un vector columna y una función diferenciable para  $i = 1, 2, 3$ , que es solución del sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} \mathbb{V}_u = \mathbb{V}\mathbb{P} \\ \mathbb{V}_v = \mathbb{V}\mathbb{Q} \\ \mathbb{V}|_{(u_0, v_0)} = (e_1, e_2, e_3) = I_3 \end{cases}.$$

Para estas funciones vectoriales se verifica,

- 1)  $(w_2)_u = (\mathbb{V}\mathbb{P})_2 = \mathbb{V}\mathbb{P}_2 = \mathbb{V}\mathbb{Q}_1 = (\mathbb{V}\mathbb{Q})_1 = (w_1)_v$ .
- 2)  $M = \mathbb{V}^t \mathbb{V}$ , ya que definimos  $Z = \mathbb{V}^t \mathbb{V} = (\langle w_i, w_j \rangle)$  matriz simétrica y vamos a probar que  $Z = M$ . De las ecuaciones que cumple  $\mathbb{V}$  se tiene,

$$\begin{cases} \mathbb{V}^t \mathbb{V}_u = \mathbb{V}^t \mathbb{V}\mathbb{P} \\ \mathbb{V}^t \mathbb{V}_v = \mathbb{V}^t \mathbb{V}\mathbb{Q} \end{cases},$$

y trasponiendo,

$$\begin{cases} \mathbb{V}_u^t \mathbb{V} = \mathbb{P}^t \mathbb{V}^t \mathbb{V} \\ \mathbb{V}_v^t \mathbb{V} = \mathbb{Q}^t \mathbb{V}^t \mathbb{V} \end{cases},$$

de donde sumando y teniendo en cuenta que  $Z = \mathbb{V}^t \mathbb{V}$ ,

$$\begin{cases} Z_u = Z\mathbb{P} + \mathbb{P}^t Z \\ Z_v = Z\mathbb{Q} + \mathbb{Q}^t Z \\ Z(u_0, v_0) = M(u_0, v_0) \end{cases}.$$

Además, por ser  $Z$  diferenciable,  $Z_{uv} = Z_{vu}$ , es decir,

$$\begin{aligned} Z_{uv} &= Z_v \mathbb{P} + Z \mathbb{P}_v + \mathbb{P}_v^t Z + \mathbb{P}^t Z_v = \\ &= Z \mathbb{Q} \mathbb{P} + \mathbb{Q}^t Z \mathbb{P} + Z \mathbb{P}_v + \mathbb{P}_v^t Z + \mathbb{P}^t Z \mathbb{Q} + \mathbb{P}^t \mathbb{Q}^t Z. \end{aligned}$$

Y por otro lado,

$$Z_{vu} = Z \mathbb{P} \mathbb{Q} + \mathbb{P}^t Z \mathbb{Q} + Z \mathbb{Q}_u + \mathbb{Q}_u^t Z + \mathbb{Q}^t Z \mathbb{P} + \mathbb{Q}^t \mathbb{P}^t Z.$$

De donde igualando,

$$[Z, \mathbb{P}_v - \mathbb{Q}_u] = [Z, [\mathbb{P}, \mathbb{Q}]],$$

que es equivalente a que  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  verifiquen las ecuaciones de Gauss-Codazzi. Por tanto, localmente existe una única solución. Además, se verifica,

$$\begin{cases} M_u = M\mathbb{P} + \mathbb{P}^t M \\ M_v = M\mathbb{Q} + \mathbb{Q}^t M \end{cases},$$

luego,  $M$  también es solución y por lo tanto,

$$Z = M = \mathbb{V}^t \mathbb{V} = (\langle w_i, w_j \rangle).$$

Y en particular,  $g_{i3} = 0$ ,  $\forall i = 1, 2$ .

3)  $\mathbb{V}$  es invertible. Para ver esto como  $M = \mathbb{V}^t \mathbb{V}$ , entonces,

$$\det M = (\det \mathbb{V})^2.$$

Y sabemos que,  $\det M = EG - F^2 > 0$ , por lo que,  $\det \mathbb{V} \neq 0$ . Es decir, las columnas de  $\mathbb{V} = (w_1, w_2, w_3)$  forman una base de  $\mathbb{R}^3$ .

Debido a estas tres propiedades tenemos el posible triedro móvil  $\{w_1, w_2, w_3\}$  de una superficie. Veamos que efectivamente existe esa superficie, es decir, queremos encontrar una función diferenciable,

$$\mathbf{x}: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

que satisfaga,

$$\begin{cases} \mathbf{x}_u = w_1 \\ \mathbf{x}_v = w_2 \\ \mathbf{x}(u_0, v_0) = p_0 \end{cases}.$$

Por el criterio de Frobenius, la condición de compatibilidad (2.1) es  $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$  que equivale a  $(w_2)_u = (w_1)_v$  que es cierto. Entonces, el sistema anterior tiene solución única.  $\square$

Además se tiene la unicidad en el siguiente sentido,

**Teorema 2.2.3.** Sean  $S$  y  $\tilde{S}$  dos superficies con parametrizaciones  $\mathbf{x}: V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  y  $\tilde{\mathbf{x}}: V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \tilde{S}$ . Si existe un entorno abierto  $U \subset V$  tal que los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental (1.19) y (1.20) asociados a las parametrizaciones  $\mathbf{x}$  y  $\tilde{\mathbf{x}}$  coinciden en todo  $U$ , entonces existe un movimiento rígido  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,

$$F(\tilde{S}) = S,$$

en todo  $U$ .

*Demostración.* Para esta demostración tendremos en cuenta que si tenemos dos superficies  $S$  y  $\tilde{S}$  siempre podemos encontrar dos parametrizaciones  $\mathbf{x}$  e  $\tilde{\mathbf{x}}$  cuyo dominio de definición sea el mismo conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ .

Supongamos entonces que tenemos dos parametrizaciones  $\mathbf{x}: U \rightarrow S$  e  $\tilde{\mathbf{x}}: U \rightarrow \tilde{S}$ , tales que los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamentales asociados a estas parametrizaciones son idénticos. Entonces, para un punto fijo  $(u_0, v_0) \in U$ , existe un movimiento rígido  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$F(u) = Au + v,$$

donde  $A \in SO(3)$  y  $v \in \mathbb{R}^3$ , tal que,

$$\begin{cases} F(\tilde{\mathbf{x}}(u_0, v_0)) = \mathbf{x}(u_0, v_0) \\ F(\tilde{\mathbf{x}}_u(u_0, v_0)) = \mathbf{x}_u(u_0, v_0) \\ F(\tilde{\mathbf{x}}_v(u_0, v_0)) = \mathbf{x}_v(u_0, v_0) \\ F(\tilde{N}(u_0, v_0)) = N(u_0, v_0) \end{cases}.$$

En efecto, si definimos el vector  $v \in \mathbb{R}^3$  por,

$$v = \mathbf{x}(u_0, v_0) - \tilde{\mathbf{x}}(u_0, v_0),$$

como los conjuntos de vectores  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$  y  $\{\tilde{\mathbf{x}}_u, \tilde{\mathbf{x}}_v, \tilde{N}\}$  forman una base para  $\mathbb{R}^3$ , podemos definir una transformación lineal  $T$  de  $\mathbb{R}^3$ , como,

$$\begin{cases} T\tilde{\mathbf{x}}_u(u_0, v_0) = \mathbf{x}_u(u_0, v_0) \\ T\tilde{\mathbf{x}}_v(u_0, v_0) = \mathbf{x}_v(u_0, v_0) \\ T\tilde{N}(u_0, v_0) = N(u_0, v_0) \end{cases}.$$

Finalmente, sean  $S$  y  $S'$  dos superficies regulares con parametrizaciones  $\mathbf{x}(u, v)$  e  $\tilde{\mathbf{x}}(u, v)$  definidas sobre el mismo dominio abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Supongamos que ambas superficies  $S$  y  $\tilde{S}$  tienen a las funciones diferenciables  $E, F, G$  y  $e, f, g$  como los coeficientes de sus respectivas formas fundamentales en todo  $U$ . Supongamos además que existe un punto  $(u_0, v_0) \in U$  en el cual,

$$\begin{cases} \mathbf{x}(u_0, v_0) = \tilde{\mathbf{x}}(u_0, v_0) \\ \mathbf{x}_u(u_0, v_0) = \tilde{\mathbf{x}}_u(u_0, v_0) \\ \mathbf{x}_v(u_0, v_0) = \tilde{\mathbf{x}}_v(u_0, v_0) \end{cases}.$$

Entonces,

$$\tilde{\mathbf{x}}(u, v) = \mathbf{x}(u, v),$$

para todo  $(u, v) \in U$ . En efecto, consideremos una curva regular  $\gamma: I \rightarrow U$  dada por  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$  definida en el abierto  $U$  que pase por el punto  $(u_0, v_0)$ . La imagen de la curva en  $\mathbf{x}(u, v)$  satisface las ecuaciones,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \dot{u}\mathbf{x}_u + \dot{v}\mathbf{x}_v \\ \dot{\mathbf{x}}_u = \dot{u}\mathbf{x}_{uu} + \dot{v}\mathbf{x}_{uv} \\ \dot{\mathbf{x}}_v = \dot{u}\mathbf{x}_{vu} + \dot{v}\mathbf{x}_{vv} \end{cases}$$

Sustituyendo  $\mathbf{x}_u$  y  $\mathbf{x}_v$  por las ecuaciones de Gauss-Codazzi y  $N$  por  $\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v$  tenemos,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f_1(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, t) \\ \dot{\mathbf{x}}_u = f_2(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, t) \\ \dot{\mathbf{x}}_v = f_3(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, t) \end{cases}$$

Análogamente, podemos hacer lo mismo para  $\tilde{\mathbf{x}}(u, v)$ .

Por coincidencia en el punto  $(u_0, v_0)$  y por el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias tenemos que  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{x}_u(t)$  y  $\mathbf{x}_v(t)$  son iguales a  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_u(t)$  y  $\tilde{\mathbf{x}}_v(t)$ . Y finalmente, como esto es para cualquier curva regular, deben ser iguales en todo  $U$ .  $\square$

Con los teoremas anteriores, hemos completado la demostración del teorema fundamental que resumimos aquí.

**Teorema 2.2.4** (Teorema Fundamental de Superficies). *Sean  $E, F, G$  y  $e, f, g$  funciones diferenciables definidas en un abierto  $V \subset \mathbb{R}^2$  con  $E > 0$  y  $G > 0$ . Supongamos que se cumplen las ecuaciones de compatibilidad de Gauss-Codazzi y que  $EG - F^2 > 0$ , entonces,  $\forall q \in V$ , existe un entorno abierto  $U \subset V$  de  $q$  y un difeomorfismo  $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$  tal que  $\mathbf{x}(U)$  es una superficie que tiene a  $E, F, G$  y  $e, f, g$  como coeficientes de las formas fundamentales.*

*Además, si  $U$  es conexo y  $\tilde{\mathbf{x}}: U \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}(U)$  es otro difeomorfismo verificando las mismas condiciones, existe un movimiento eculídeo  $\Phi$  tal que  $\tilde{\mathbf{x}} = \Phi \circ \mathbf{x}$ .*

**Observación 8.** Este es un resultado de naturaleza local. Así, por ejemplo, aunque existen infinidad de superficies distintas (no congruentes) con curvatura de Gauss constante negativa embebidas en  $\mathbb{R}^3$  (véase el capítulo siguiente), sabemos por un resultado famoso de Hilbert [4] que no existe ninguna superficie completa con curvatura de Gauss constante negativa embebida en  $\mathbb{R}^3$ .

Surge entonces la siguiente pregunta; dada una superficie Riemanniana  $(S, g)$ , ¿cuándo podemos garantizar la existencia de una inmersión isométrica  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ? Una respuesta parcial, sería la siguiente,

**Teorema 2.2.5.** *Sobre cualquier inmersión isométrica de una superficie orientada en  $\mathbb{R}^3$ ,  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ , se pueden definir dos formas cuadráticas, la primera y segunda formas fundamentales  $I_f$  y  $II_f$ , dadas por,*

$$I_f = \langle df, df \rangle,$$

$$II_f = -\langle df, dN \rangle,$$

donde  $N$  es el normal unitario asociado a la inmersión (1.18).

Entonces, el teorema de unicidad dice que  $f$  está unívocamente determinado, salvo movimientos rígidos, por el par  $(I_f, II_f)$ , mientras que el teorema de existencia dice que si tenemos dos formas cuadráticas  $(I, II)$  definidas sobre  $S$ , una superficie conexa orientada y simplemente conexa, que satisfacen las ecuaciones de Gauss y Codazzi, entonces existe una inmersión  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,  $(I_f, II_f) = (I, II)$ .

*Demostración.* La demostración es similar a la que hemos ofrecido anteriormente, y se puede consultar en [17], pero hay que usar la conexión simple para obtener el resultado global.  $\square$

La respuesta es parcial porque traslada el problema de la existencia de una inmersión de una superficie  $(S, g)$  en  $\mathbb{R}^3$  al de la existencia de una pareja de formas cuadráticas sobre  $S$  verificando ciertas condiciones. Pero, dada una superficie  $(S, g)$ , ¿cómo puedo saber si existe dicha pareja o no? El teorema de Nash (podemos encontrarlo en [5]) nos dice que toda superficie compacta la podemos embeber isométricamente en  $\mathbb{R}^{17}$ , mientras que si no es compacta lo podemos hacer en  $\mathbb{R}^{51}$ . Sin embargo, sabemos que no toda superficie se puede meter isométricamente en  $\mathbb{R}^3$ , por ejemplo,

- 1) No existen embebimientos isométricos de una superficie completa con  $K = -1$ , por el teorema de Hilbert [4]. Este hecho nos dice, por ejemplo, que el plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2(-1)$  no se puede meter isométricamente en  $\mathbb{R}^3$ .
- 2) No existen embebimientos isométricos de un toro llano en  $\mathbb{R}^3$ , pues toda superficie regular compacta debe de tener puntos elípticos. (Este es un resultado bien conocido de la teoría clásica de superficies que puede encontrarse en [4]).
- 3) No existen embebimientos isométricos del plano proyectivo, que tiene curvatura constante positiva, en  $\mathbb{R}^3$ , porque no es orientable.

### 2.3. Ecuación de Estructura de $SO(3)$

En esta sección relacionaremos el teorema fundamental de superficies con dos teoremas de la teoría de grupos de Lie, y analizaremos la equivalencia entre las ecuaciones de Gauss-Codazzi de una superficie regular expresadas respecto de una referencia local y la ecuación de estructura del grupo de Lie  $SO(3)$ .

Con este objetivo en mente, necesitamos introducir en primer lugar algunos objetos y propiedades de los grupos de Lie, que no han podido ser estudiados ni durante el grado ni durante el master. Como se indicará donde corresponda esta teoría esta estudiada de [17].

**Definición 8.** Una forma diferencial  $\omega$  diremos que es *invariante a izquierda* si  $L_g^* \omega = \omega$ , para todo  $g \in G$ . Es decir,

$$\omega_h = L_g^*(\omega_{gh}).$$

**Proposición 2.3.1.** Sea  $\omega$  una forma invariante a izquierda, entonces, la diferencial  $d\omega$  también es invariante a izquierda.

*Demostración.* Sea  $g \in G$ , entonces tenemos,

$$L_g^* d\omega = d(L_g^* \omega) = d\omega.$$

Es decir,  $d\omega$  es una forma invariante a izquierda.  $\square$

Sean  $X, Y$  dos campos de vectores invariantes a izquierda, entonces,

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]) = -\omega([X, Y]),$$

es decir, restringiendonos al álgebra de Lie,

$$d\omega_e(X_e, Y_e) = -\omega_e([X_e, Y_e]).$$

Sean  $X_1, \dots, X_n \in T_e G$  vectores duales a  $\omega_e^1, \dots, \omega_e^n$ . Entonces, existen constantes  $C_{ij}^k$  tales que,

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k. \quad (2.4)$$

Llamamos *constantes de estructura de  $G$*  respecto a  $X_1, \dots, X_n$  a las constantes  $C_{ij}^k$ .

**Proposición 2.3.2.** Sea  $\omega$  una forma diferencial invariante a izquierda, entonces tenemos,

$$d\omega^k = -\frac{1}{2} C_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j. \quad (2.5)$$

*Demostración.* A partir de la igualdad,

$$d\omega_e(X_e, Y_e) = -\omega_e([X_e, Y_e]),$$

y de la notación anterior, es fácil obtener el resultado deseado.  $\square$

Una vez analizados estos conceptos, vamos a enunciar dos teoremas sobre grupos de Lie, que más adelante nos permitirán alcanzar el objetivo de esta sección, y cuyas demostraciones se omitirán porque necesitan una versión diferente del criterio de Frobenius (véase el Apéndice A, para esta nueva versión). Estas demostraciones pueden ser consultadas en [17].

**Teorema 2.3.3.** Sea  $G$  un grupo de Lie con base de 1-formas invariantes a izquierda,  $\omega^1, \dots, \omega^n$  y constantes de estructura  $C_{ij}^k$ . Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $\theta^1, \dots, \theta^n$  1-formas linealmente independientes en  $M$  tales que,

$$d\theta^k = -\frac{1}{2}C_{ij}^k\theta^i \wedge \theta^j.$$

Entonces, para todo  $p \in M$  existe un entorno  $U$  de  $M$  y un difeomorfismo  $f: U \rightarrow G$  tal que,

$$\theta^i = f^*\omega^i.$$

**Teorema 2.3.4.** Sea  $M$  una variedad diferenciable conexa,  $G$  un grupo de Lie y  $f_1, f_2: M \rightarrow G$  dos aplicaciones diferenciables tales que,

$$f_1^*\omega = f_2^*\omega,$$

para toda 1-forma  $\omega$  invariante a izquierda. Entonces,  $f_1$  y  $f_2$  difieren por una traslación a izquierdas, es decir, existe un único  $g \in G$  tal que,

$$f_2 = L_g \circ f_1.$$

La siguiente definición supondrá una generalización de las formas diferenciales usuales. Gracias a estas nuevas formas, podremos introducir la forma de Maurer-Cartan de un grupo de Lie.

**Definición 9.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $d$ , definimos una  $k$ -forma con valores en  $V$  como la función  $\omega$  tal que  $\omega_p$  es la aplicación alternada,  $\omega_p: T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow V$ . Si  $v_1, \dots, v_d$  es una base de  $V$ , entonces existen  $k$ -formas usuales  $\omega^1, \dots, \omega^d$  tales que para  $X_1, \dots, X_k \in T_p M$ ,

$$\omega_p(X_1, \dots, X_k) = \omega_p^i(X_1, \dots, X_k)v_i,$$

o simplemente,

$$\omega = \omega^i v_i.$$

Definimos la *diferencial de una forma con valores en  $V$*  como,

$$d\omega = d\omega^i v_i.$$

La definición anterior es independiente de la base de  $V$ . Sea  $\rho: U \times V \rightarrow W$  una aplicación bilineal, y sean  $\omega$  y  $\nu$  dos formas diferenciales con valores en  $U$  y  $V$  respectivamente y de orden  $k$  y  $l$ . Entonces, podemos escribir,

$$\begin{cases} \omega = \omega^i u_i \\ \nu = \nu^j v_j \end{cases}.$$

Definimos una  $(k+l)$ -forma con valores en  $W$  como,

$$\rho(\omega \wedge \nu) = \omega^i \wedge \nu^j \rho(u_i, v_j).$$

La forma de Maurer-Cartan es la 1-forma con valores en  $\mathfrak{g}$ ,

$$\omega_g(X_g) = (L_g)_*^{-1} X_g, \quad (2.6)$$

donde  $X \in \chi(G)$  y para todo  $g \in G$ . Si  $X$  es invariante a izquierdas, esto es,  $X_g = (L_g)_* X_e$ , entonces,

$$\omega_g(X_g) = (L_g)_*^{-1} (L_g)_* X_e = X_e.$$

Sobre el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  tenemos la operación corchete, respecto de la cuál, dadas dos formas,  $\nu$ ,  $\lambda$  con valores en  $\mathfrak{g}$  de orden  $k$  y  $l$ , respectivamente, podemos generar una  $(k+l)$ -forma con valores en  $\mathfrak{g}$  dada por,  $[\nu \wedge \lambda]$ . Sea  $X_1, \dots, X_n$  una base de  $T_e G = \mathfrak{g}$ , y sea  $\omega^1, \dots, \omega^n$  la base dual de 1-formas invariantes a izquierda, entonces, la forma de Maurer-Cartan (2.6)  $\omega$  se puede escribir como,

$$\omega = \omega^k X_k.$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior, es fácil ver que la diferencial de la forma de Maurer-Cartan es,

$$d\omega = d\omega^k X_k = -\frac{1}{2} C_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j X_k.$$

Finalmente podemos demostrar la ecuación de estructura de los grupos de Lie, sin necesidad de involucrar a las constantes de estructura.

**Teorema 2.3.5** (Ecuación de Estructura de Maurer-Cartan). *Sea  $G$  un grupo de Lie y  $\omega$  la forma de Maurer-Cartan, entonces tenemos la ecuación de estructura de Maurer-Cartan de  $G$ ,*

$$d\omega = -\frac{1}{2} [\omega \wedge \omega]. \quad (2.7)$$

*Demostración.* Por un lado, a partir de la definición, tenemos,

$$[\omega \wedge \omega] = \omega^i \wedge \omega^j [X_i, X_j] = C_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j X_k.$$

Finalmente, comparando con la expresión anterior de  $d\omega$  llegamos a la ecuación del enunciado.  $\square$

**Proposición 2.3.6.** *Sea  $G$  un subgrupo de  $GL(n, \mathbb{R})$  y sea  $i: G \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  la aplicación inclusión, entonces, la forma de Maurer-Cartan de  $G$  es,  $i^{-1} di$ .*

*Demostración.* Sea  $A \in G$  una matriz cualquiera, entonces, tenemos la aplicación  $i \circ L_A: G \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  dada por,

$$(i \circ L_A)(B) = AB.$$



Entonces, es fácil ver que,  $d(i \circ L_A) = Adi$ .

Por otra parte denotamos por  $i^{-1}$  a la aplicación,  $i^{-1}: G \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  que a cada  $B$  le hace corresponder  $B^{-1}$ . Entonces,

$$i^{-1} \circ L_A(B) = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = (i^{-1}A^{-1})(B).$$

Finalmente, consideramos  $i^{-1}di$  como una 1-forma con valores en  $\mathbb{R}^{n^2}$  y observamos que,

$$\begin{aligned} L_A^*(i^{-1}di) &= (i^{-1} \circ L_A)L_A^*(di) = (i^{-1} \circ L_A)d(L_A^*i) = (i^{-1} \circ L_A)d(i \circ L_A) = \\ &= (i^{-1}A^{-1})Adi = i^{-1}di, \end{aligned}$$

por lo que es invariante a izquierdas. Además, para toda  $M \in T_I G$ ,

$$(i^{-1}di)_I(M) = I^{-1}di_I(M) = M.$$

Es decir,  $i^{-1}di$  es la forma de Maurer-Cartan de  $G$ . □

Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión y consideramos la aplicación auxiliar  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow SO(3)$ . Consideremos la referencia local ortonormal  $\{X_1, X_2, X_3\}$  adaptada a  $\mathbb{R}^2$  que se consigue aplicando Gram-Schmidt sobre  $f_x, f_y$  y  $N$ , el normal a  $f$ , (1.18). Entonces, se tiene,

**Teorema 2.3.7.** *Las formas diferenciales  $\omega_1^2, \psi_1^3$  y  $\psi_2^3$  son exactamente las  $g^*(\omega^i)$  para  $\omega^i$  base de 1-formas invariantes a izquierda de  $SO(3)$ .*

*Demostración.* Para hallar  $g^*(\omega^i)$  donde  $\omega^i$  es una base de 1-formas invariantes a izquierda en  $SO(3)$ , miramos a,

$$g^*(i^{-1}di) = g^{-1}dg = a,$$

es decir,

$$dg = ga,$$

donde,  $g = (X_1, X_2, X_3): \mathbb{R}^2 \rightarrow SO(3)$  y  $a$  son las formas usuales de la superficie. Entonces, la ecuación anterior equivale a,

$$(dX_1, dX_2, dX_3) = (X_1, X_2, X_3) \begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & -a_{31} \\ a_{21} & 0 & -a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

que si lo expresamos en sistema de ecuaciones es,

$$\begin{cases} dX_1 = a_{21}X_2 + a_{31}X_3 \\ dX_2 = -a_{21}X_1 + a_{32}X_3 \\ dX_3 = -a_{31}X_1 - a_{32}X_2 \end{cases}.$$

Además, teniendo en cuenta la derivada covariante de  $\mathbb{R}^3$ , podemos escribir,

$$\begin{cases} \nabla_X^{\mathbb{R}^3} X_1 = dX_1(X) = a_{21}(X)X_2 + a_{31}(X)X_3 \\ \nabla_X^{\mathbb{R}^3} X_2 = dX_2(X) = -a_{21}(X)X_1 + a_{32}(X)X_3 \\ \nabla_X^{\mathbb{R}^3} X_3 = dX_3(X) = -a_{31}(X)X_1 - a_{32}(X)X_2 \end{cases}$$

Sin embargo, teniendo en cuenta las ecuaciones de estructura,

$$\begin{cases} \nabla_X^{\mathbb{R}^3} X_1 = \omega_1^2(X)X_2 + \psi_1^3(X)X_3 \\ \nabla_X^{\mathbb{R}^3} X_2 = -\omega_1^2(X)X_1 + \psi_2^3(X)X_3 \\ \nabla_X^{\mathbb{R}^3} X_3 = -\psi_1^3(X)X_1 - \psi_2^3(X)X_2 \end{cases}$$

Es decir, observamos que,

$$\begin{cases} g^*(\omega^1) = \omega_1^2 \\ g^*(\omega^2) = \psi_1^3, \\ g^*(\omega^3) = \psi_2^3 \end{cases}$$

que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

**Observación 9.** No debemos confundir las formas diferenciales  $\omega_i^j$ , las formas de conexión con las 1-formas invariantes a izquierda sobre un grupo de Lie  $G$ ,  $\omega^i$ .

**Teorema 2.3.8.** *Las ecuaciones de Gauss-Codazzi de una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  equivalen a la ecuación de estructura del grupo de Lie  $SO(3)$ .*

*Demostración.* Consideramos el álgebra de Lie,  $\mathfrak{so}(3) = T_I SO(3)$ . Entonces, tenemos la base,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además, sabemos que el corchete de Lie, es el conmutador, por lo que,

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = X_3 \\ [X_1, X_3] = -X_2, \\ [X_2, X_3] = X_1 \end{cases}$$

es decir, obtenemos las siguientes constantes de estructura (2.4),

$$C_{12}^1 = C_{12}^2 = C_{13}^1 = C_{13}^3 = C_{23}^2 = C_{23}^3 = 0 \text{ y } C_{12}^3 = -C_{13}^2 = C_{23}^1 = 1.$$

Finalmente, si tomamos  $\omega^i$  las 1-formas invariantes a izquierdas en  $\mathfrak{so}(3)$  con  $\omega_I^i$  dual a  $X_i$ , tenemos las siguientes ecuaciones de estructura de Maurer-Cartan (2.7),

$$\begin{cases} d\omega^1 = -\omega^2 \wedge \omega^3 \\ d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega^3 \\ d\omega^3 = -\omega^1 \wedge \omega^2 \end{cases}$$

Por otra parte, si  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una inmersión, teniendo en cuenta el teorema anterior se consigue,

$$\begin{cases} d\omega_1^2 = g^*(d\omega^1) = -g^*(\omega^2 \wedge \omega^3) = -\psi_1^3 \wedge \psi_2^3 \\ d\psi_1^3 = g^*(d\omega^2) = g^*(\omega^1 \wedge \omega^3) = \omega_1^2 \wedge \psi_2^3 \\ d\psi_2^3 = g^*(d\omega^3) = -g^*(\omega^1 \wedge \omega^2) = -\omega_1^2 \wedge \psi_1^3 \end{cases},$$

que son las ecuaciones de Gauss-Codazzi de una superficie (1.15) y (1.16) desde el punto de vista de formas diferenciales.  $\square$

Con estos dos últimos teoremas y los dos teoremas sobre grupos de Lie (Teoremas 2.3.3 y 2.3.4), hemos conseguido dos cosas, en primer lugar relacionar las ecuaciones de Gauss-Codazzi con la ecuación de estructura de  $SO(3)$ , y en segundo lugar hallar una equivalencia entre el teorema fundamental de superficies y esos dos teoremas (Teoremas 2.3.3 y 2.3.4) que en principio solo influían en la teoría de grupos de Lie.



## Capítulo 3

# Aplicaciones del Teorema Fundamental

Las ecuaciones de Gauss-Codazzi para inmersiones de superficies en  $\mathbb{R}^3$ , forman un sistema de tres ecuaciones en derivadas parciales que involucran a seis funciones. Como sistema de ecuaciones en derivadas parciales, en principio, no parece muy interesante en si mismo, sin embargo, como ya se mencionó en la introducción, a menudo ocurre que al trabajar con superficies con ciertas características geométricas, el sistema de Gauss-Codazzi se transforma en un sistema determinado que involucra a menos funciones. La clave reside en elegir un sistema de coordenadas "adaptado" a la condición geométrica impuesta, donde la primera y segunda formas fundamentales se simplifiquen enormemente. Además, lo que resulta más sorprendente, es que muchos de estos sistemas de Gauss-Codazzi simplificados resultan ser equivalentes a ecuaciones de tipo solitón. Para completar esta memoria, en este último capítulo, se pretende relacionar, mediante el teorema fundamental de superficies, algunas familias notables de superficies regulares con ciertas ecuaciones en derivadas parciales muy significativas. De esta forma se pueden relacionar propiedades geométricas de superficies con propiedades analíticas de las soluciones. Además el hecho de que gran parte de los procesos físicos de la naturaleza se modelicen mediante ecuaciones en derivadas parciales, nos permite también relacionar estos procesos físicos con la geometría de superficies. Nos limitaremos a estudiar las superficies de curvatura constante negativa y las superficies de Hasimoto, aunque hay multitud de ejemplos adicionales en la literatura, consúltense para más ejemplos [16],[18] y [19].

### 3.1. Ecuación de Sine-Gordon

En esta sección vamos a ver que las ecuaciones de Gauss-Codazzi de una superficie asociadas a una parametrización de líneas de curvatura se reducen a una única ecuación de tipo Sine-Gordon. De hecho, demostraremos que exis-

te una biyección entre las soluciones locales de la ecuación de Sine-Gordon cuya imagen este contenida en  $(0, \pi)$  y las superficies de  $\mathbb{R}^3$  con  $K = -1$ , salvo movimientos rígidos. El desarrollo de este epígrafe sigue de cerca [2]. Comenzaremos recordando los siguientes conceptos,

**Definición 10.** Sea  $S$  una superficie regular y  $\gamma: (a, b) \rightarrow S$  una curva diferenciable, se dice que  $\gamma$  es una *línea de curvatura* si  $\dot{\gamma}(t)$  es una dirección principal para todo  $t \in (a, b)$ . Las *coordenadas de líneas de curvatura* son aquellas coordenadas paralelas a las direcciones principales de la superficie. Un punto  $p \in S$  diremos que es un *punto umbílico* si las curvaturas principales en  $p$  son iguales. Es decir, si,

$$k_1(p) = k_2(p).$$

Los siguientes resultados son bien conocidos en la teoría local de superficies, y sus demostraciones pueden ser consultadas en [4],

**Proposición 3.1.1.** *La condición necesaria y suficiente para que las curvas coordenadas sean líneas de curvatura en un entorno de un punto no umbílico es que,*

$$f = F = 0.$$

**Proposición 3.1.2.** *Si  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie y  $p_0 \in S$  es un punto no umbilical, entonces existe  $\mathbf{x}: U \rightarrow S$  cerca de  $p_0$  de líneas de curvatura. Es decir,*

$$\begin{cases} F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0 \\ f = \langle \mathbf{x}_{uv}, N \rangle = 0 \end{cases},$$

lo que equivale a que en este sistema de coordenadas,

$$\begin{cases} I = Edu^2 + Gdv^2 \\ II = edu^2 + gdv^2 \end{cases}.$$

Una vez recordados los conceptos y propiedades necesarias, empezaremos simplificando las ecuaciones de Gauss-Codazzi.

**Teorema 3.1.3.** *Supongamos que  $\mathbf{x}(u, v)$  es una parametrización de líneas de curvatura de una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  con sus formas fundamentales dadas por,*

$$\begin{cases} I = Edu^2 + Gdv^2 \\ II = edu^2 + gdv^2 \end{cases}.$$

Entonces, las ecuaciones de Gauss-Codazzi son,

$$\begin{cases} \left( \frac{E_v}{2E} \right)_v + \left( \frac{G_u}{2E} \right)_u = \frac{G_u^2 + E_v G_v}{4EG} - \frac{E_v^2 + E_u G_u}{4E^2} - \frac{eg}{E} \\ e_v = \left( \frac{eG + gE}{2EG} \right) E_v \\ g_u = \left( \frac{eG + gE}{2EG} \right) G_u \end{cases}.$$

*Demostración.* Si  $F = f = 0$ , entonces tenemos los símbolos de Christoffel,

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E} & \Gamma_{11}^2 = \frac{-E_v}{2G} \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E} & \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G} \\ \Gamma_{22}^1 = \frac{-G_u}{2E} & \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G} \end{cases}.$$

Entonces, si usamos la ecuación de Gauss (1.25),

$$(\Gamma_{12}^1)_v - (\Gamma_{22}^1)_u = \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 - GK,$$

y las ecuaciones de Codazzi (1.26), obtenemos el resultado.  $\square$

Introducimos ahora la ecuación de Sine-Gordon,

**Definición 11.** Llamamos *ecuación de Sine-Gordon* a la ecuación en derivadas parciales,

$$\theta_{uu} - \theta_{vv} = \sin \theta \cos \theta. \quad (3.1)$$

La ecuación de Sine-Gordon es la generalización de la ecuación de ondas al caso no lineal. Además, puede simplificarse haciendo el cambio,

$$\begin{cases} x = \frac{u-v}{2} \\ y = \frac{u+v}{2} \end{cases},$$

y nos queda,

$$\theta_{xy} = \sin \theta \cos \theta.$$

Finalmente, enunciaremos y demostraremos el teorema sobre la biyección entre las superficies con  $K = -1$  y las soluciones locales de la ecuación de Sine-Gordon.

**Teorema 3.1.4.** *Sea  $S$  una superficie de  $\mathbb{R}^3$  con  $K = -1$ . Entonces existe una parametrización local de coordenadas de líneas de curvatura  $(u, v)$  tal que,*

$$\begin{cases} I = \cos^2 \phi du^2 + \sin^2 \phi dv^2 \\ II = \sin \phi \cos \phi (du^2 - dv^2) \end{cases},$$

donde  $2\phi$  es el ángulo entre dos direcciones asintóticas.

Además, las ecuaciones de Gauss-Codazzi son equivalentes a la ecuación de Sine-Gordon,

$$\phi_{uu} - \phi_{vv} = \sin \phi \cos \phi.$$

*Demostración.* Sean  $k_1, k_2$  las curvaturas principales, entonces, como  $K = k_1 k_2 = -1$ , necesariamente  $k_1 \neq k_2$ , luego no existen puntos umbilicales en  $S$ . Por lo tanto, según la Proposición 3.1.2, existe  $\mathbf{x}(u, v)$  parametrización de líneas de curvatura en  $S$ , con respecto a la cual,

$$\begin{cases} I = Edu^2 + Gdv^2 \\ II = edu^2 + gdv^2 \end{cases}.$$

Entonces, se sigue que

$$\begin{cases} k_1 = \frac{e}{E} \\ k_2 = \frac{g}{G} \end{cases},$$

y puesta que  $k_1 k_2 = -1$  existe una función diferenciable  $\phi$  tal que,

$$\begin{cases} k_1 = \frac{e}{E} = \tan \phi \\ k_2 = \frac{g}{G} = -\cot \phi \end{cases}.$$

Es decir,

$$\begin{cases} e = E \tan \phi \\ g = -G \cot \phi \end{cases}.$$

Y por las ecuaciones de Codazzi que verifican (Proposición 3.1.3),

$$\begin{cases} e_v = (E \tan \phi)_v = \frac{1}{2} E_v (\tan \phi - \cot \phi) \\ g_u = (-G \cot \phi)_u = \frac{1}{2} G_u (\tan \phi - \cot \phi) \end{cases},$$

se tiene,

$$\begin{cases} \frac{E_v}{2E} = -\frac{\sin \phi}{\cos \phi} \phi_v \\ \frac{G_u}{2G} = \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \phi_u \end{cases},$$

es decir,

$$\begin{cases} \frac{1}{2} (\log E)_v = (\log \cos \phi)_v \\ \frac{1}{2} (\log G)_u = (\log \sin \phi)_u \end{cases}.$$

Por tanto, existen funciones diferenciables  $c_1(u)$  y  $c_2(v)$  tales que,

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \log E = \log \cos \phi + c_1(u) \\ \frac{1}{2} \log G = \log \sin \phi + c_2(v) \end{cases},$$

o equivalentemente,

$$\begin{cases} \sqrt{E} = e^{c_1(u)} \cos \phi \\ \sqrt{G} = e^{c_2(v)} \sin \phi \end{cases}.$$

Además, como  $I$  es definida positiva,  $\sqrt{E}, \sqrt{G}$  no se anulan y entonces  $\sin \phi$  y  $\cos \phi$  son positivos, esto es,  $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

Si hacemos el cambio de coordenadas,  $(w(u), z(v))$  tal que,

$$\begin{cases} \frac{dw}{du} = e^{c_1(u)} \\ \frac{dz}{dv} = e^{c_2(v)} \end{cases},$$

obtenemos, por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial w} = \mathbf{x}_u e^{-c_1(u)},$$

y entonces,

$$\|\mathbf{x}_w\| = \cos \phi.$$



Y análogamente,

$$\|\mathbf{x}_z\| = \sin \phi.$$

Por otra parte, como  $w$  solo depende de  $u$  y  $z$  de  $v$ , se tiene que,

$$\begin{cases} \mathbf{x}_w \|\mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_z \|\mathbf{x}_v \end{cases},$$

es decir,  $\mathbf{x}(w, z)$  es una parametrización de líneas de curvatura y se tiene que,

$$\begin{cases} I = \cos^2 \phi dw^2 + \sin^2 \phi dz^2 \\ II = \sin \phi \cos \phi (dw^2 - dz^2) \end{cases},$$

ya que,  $e = E \tan \phi$  y  $g = -G \cot \phi$ .

Para demostrar que las ecuaciones de Gauss-Codazzi equivalen a la ecuación de Sine-Gordon,

$$\phi_{ww} - \phi_{zz} = \sin \phi \cos \phi,$$

empezaremos, teniendo en cuenta que,

$$\begin{cases} E = \cos^2 \phi \\ F = 0 \\ G = \sin^2 \phi \end{cases},$$

y,

$$\begin{cases} e = \sin \phi \cos \phi \\ f = 0 \\ g = -\sin \phi \cos \phi \end{cases}.$$

Finalmente, sustituyendo en las ecuaciones de Gauss-Codazzi del teorema anterior obtenemos el resultado, ya que las ecuaciones de Codazzi son triviales y la ecuación de Gauss es exactamente la de Sine-Gordon.

Por último, veremos que el ángulo entre dos direcciones asintóticas es  $2\phi$ . Como,

$$II = \sin \phi \cos \phi (dw^2 - dz^2),$$

tenemos que  $\mathbf{x}_w + \mathbf{x}_z$  y  $\mathbf{x}_w - \mathbf{x}_z$  son direcciones asintóticas y vectores unitarios, entonces,

$$\langle \mathbf{x}_w + \mathbf{x}_z, \mathbf{x}_w - \mathbf{x}_z \rangle = \cos 2\phi,$$

luego, el ángulo es  $2\phi$ . □

Este teorema junto con el teorema fundamental de superficies nos demuestra que existe una biyección entre las soluciones  $\phi$  de la ecuación de Sine-Gordon y una superficie con  $K = -1$ , salvo movimientos rígidos.

Es fácil a partir de aquí generalizar ligeramente este resultado.

**Teorema 3.1.5.** *Sea  $\phi$  una solución de la ecuación de Sine-Gordon. Entonces existe una superficie  $S$  en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura constante y negativa tal que,*

$$\phi_{uv} = -K \sin \phi \cos \phi$$

*para alguna parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$  de  $S$ . Además, el ángulo entre las dos direcciones asintóticas es  $2\phi$ .*

*Demostración.* La demostración de este teorema es idéntica a la del Teorema 3.1.4, teniendo en cuenta que ahora la curvatura de Gauss es  $K$ .  $\square$

Consideramos la ecuación de Sine-Gordon,

$$\phi_{uu} - \phi_{vv} = \sin \phi \cos \phi,$$

y tomamos la solución  $\phi = \arcsin(\operatorname{sech} u)$ . A partir de esta solución, tenemos,

$$\sin \phi = \operatorname{sech} u,$$

y por tanto,

$$\cos^2 \phi = 1 - \sin^2 \phi = 1 - \operatorname{sech}^2 u = \frac{\cosh^2 u - 1}{\cosh^2 u} = \tanh^2 u.$$

De donde,  $\cos \phi = \tanh u$  y se obtienen las formas cuadráticas,

$$I = \tanh^2 u du^2 + \operatorname{sech}^2 u dv^2$$

$$II = -\operatorname{sech} u \tanh u (du^2 - dv^2),$$

que definen, salvo movimientos rígidos a la pseudo-esfera.

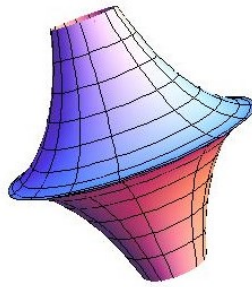
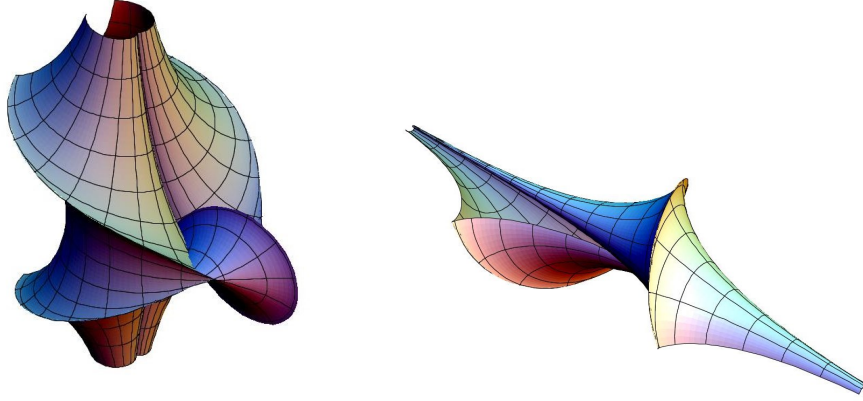


Figura 3.1: Pseudo-Esfera (Mathematica).

De forma inversa, mediante una parametrización de líneas de curvatura de una superficie con curvatura de Gauss  $K = -1$ , se pueden hallar soluciones a la ecuación de Sine-Gordon. En las siguientes figuras, podemos observar las superficie de Kuen, y de Dini, extraídas del programa 3D-XplorMath-J.

Figura 3.2: Superficies con  $K = -1$ .

También se puede obtener la superficie pseudoesférica siguiente (que de nuevo se ha extraído de 3D-XplorMath-J),

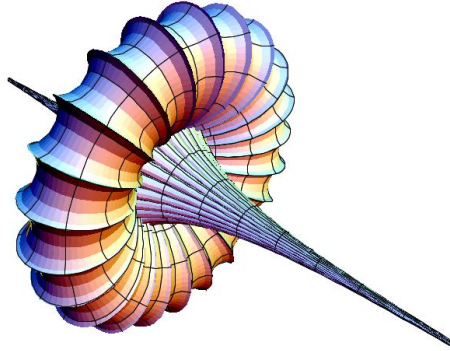


Figura 3.3: Pulsante Paramétrica.

### 3.2. Superficies de Hasimoto

A lo largo de este apartado vamos a relacionar las soluciones a la ecuación de Schrodinger no lineal con las superficies de Hasimoto. Para describir estas superficies empezaremos introduciendo la *ecuación de inducción localizada*

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_{ss}, \quad (3.2)$$

donde  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s, t)$  representa la evolución del filamento y el tiempo y  $\wedge$  representa el producto vectorial de  $\mathbb{R}^3$ . Esta ecuación (3.2) describe el movimiento de un vórtice diferenciable en un fluido perfecto tri-dimensional que se deriva por aproximaciones de la Ley de Biot-Savart. En 1906, Da Rios, un

estudiante graduado de Levi-Civita, escribió un Trabajo de Fin de Master en el que modelaba el movimiento de una curva de  $\mathbb{R}^3$  que se propagaba de acuerdo con la ecuación de inducción localizada. Obsérvese que si  $\mathbf{x}(s, 0)$ , la condición inicial, está parametrizada por el arco, entonces también lo están todas las copias del filamento. Es decir, si  $\|\mathbf{x}(s, 0)\| = 1$ , entonces,  $\|\mathbf{x}(s, t)\| = 1$  para todo tiempo  $t$ . En efecto, usando (3.2) obtenemos,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x}(s, t), \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x}(s, t) \right\rangle = 2 \det \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial s^2}, \frac{\partial^3 \mathbf{x}}{\partial s^3} \right) = 0, \quad (3.3)$$

esto es  $\left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \right\rangle$  no depende del tiempo "t", entonces como,

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}(s, 0), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}(s, 0) \right\rangle = 1,$$

lo mismo se cumple para todo  $t$ .

**Proposición 3.2.1.** *Si la condición inicial está parametrizada por el arco, la ecuación de inducción localizada es equivalente al flujo binormal del vórtice.*

*Demostración.* Consideramos el vórtice para un  $t$  fijo,  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(s, t)$  parametrizado por la longitud de arco. Entonces, por las fórmulas de Frenet-Serret,

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_{ss} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{t}_s = \mathbf{t} \wedge k\mathbf{n} = k\mathbf{b}.$$

Y con esto demostramos la equivalencia.  $\square$

**Definición 12.** Las superficies generadas por el flujo binormal se llaman *superficies de Hasimoto*.

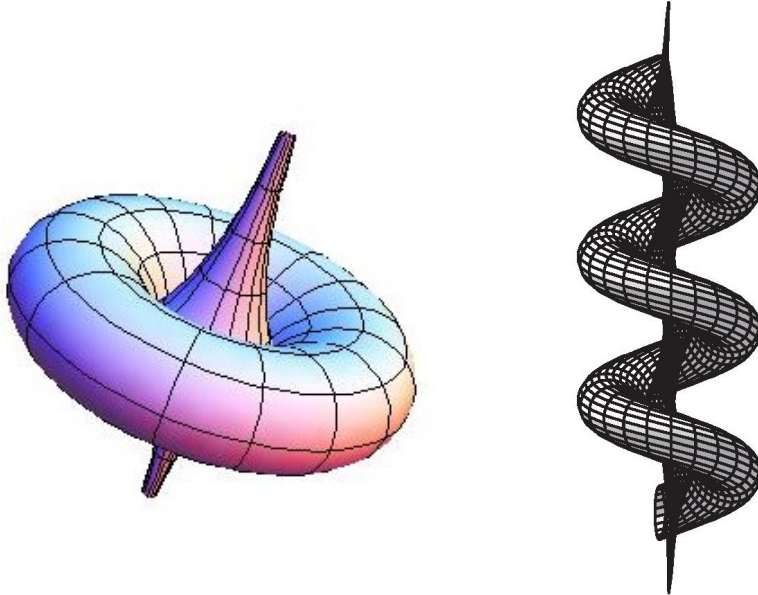


Figura 3.4: Superficies de Hasimoto.

En las figuras anteriores podemos observar dos superficies de Hasimoto, el vórtice inicial de la primera (obtenida mediante Mathematica) es plano, mientras que el de la segunda (extraída de [16]) tiene torsión no nula.

Por otra parte en el citado trabajo Da Rios dedujo las ecuaciones en derivadas parciales que relacionan la torsión y la curvatura de un filamento,

$$\begin{cases} k_t = -2\tau k_s - k\tau_s \\ \tau_t = (\frac{1}{2}k^2 + \frac{k_{ss}}{k} - \tau^2)_s \end{cases} . \quad (3.4)$$

En el siguiente teorema caracterizamos geoméricamente estas ecuaciones de Da Rios [7],

**Teorema 3.2.2.** *Las ecuaciones de Gauss-Codazzi (1.25) y (1.26) de una superficie de Hasimoto son equivalentes a las ecuaciones de Da Rios (3.4).*

*Demostración.* Dada una superficie de Hasimoto se tiene que,

$$\begin{cases} \mathbf{x}_s = \mathbf{t} \\ \mathbf{x}_t = k\mathbf{b} \end{cases} , \quad (3.5)$$

de donde, usando las fórmulas de Frenet-Serret, obtenemos,

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{ss} = k\mathbf{n} \\ \mathbf{x}_{st} = \mathbf{x}_{ts} = -k\tau\mathbf{n} + k_s\mathbf{b} \\ \mathbf{x}_{tt} = -kk_s\mathbf{t} + (k\tau^2 - k_{ss})\mathbf{n} + (-2k_s\tau - k\tau_s)\mathbf{b} \end{cases} .$$

Es decir,

$$\begin{cases} E = \langle \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_s \rangle = 1 \\ F = \langle \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_t \rangle = 0 \\ G = \langle \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t \rangle = k^2 \end{cases} ,$$

y también,

$$\begin{cases} e = \langle \mathbf{x}_{ss}, N \rangle = -k \\ f = \langle \mathbf{x}_{st}, N \rangle = k\tau \\ g = \langle \mathbf{x}_{tt}, N \rangle = k_{ss} - k\tau^2 \end{cases} ,$$

donde,

$$N = \frac{\mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_t}{\|\mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_t\|} = -\mathbf{n}.$$

También deducimos que los símbolos de Christoffel se pueden expresar como,

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = 0 & \Gamma_{11}^2 = 0 \\ \Gamma_{12}^1 = 0 & \Gamma_{12}^2 = \frac{k_s}{k} \\ \Gamma_{22}^1 = -kk_s & \Gamma_{22}^2 = \frac{-2k_s\tau}{k} - \tau_s \end{cases} .$$

Por tanto, sustituyendo en las ecuaciones de Gauss-Codazzi (1.25), (1.26),

$$\begin{cases} (\Gamma_{12}^2)_t - (\Gamma_{12}^2)_s = \Gamma_{11}^2\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^2\Gamma_{11}^2 + EK \\ e_t - f_s = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 \\ f_t - g_s = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{21}^1) - g\Gamma_{21}^2 \end{cases} ,$$

se obtienen las ecuaciones de Da Rios, que son exactamente las de Codazzi, ya que la de Gauss es trivial.  $\square$

Finalmente, relacionaremos estas ecuaciones con la ecuación de Schrodinger no lineal mediante la transformación de Hasimoto, o también llamada curvatura compleja, que fue introducida por Hasimoto en 1971 [8].

**Definición 13.** Definimos la *transformación de Hasimoto* o también *curvatura compleja* como,

$$\Psi = ke^{i \int_{s_0}^s \tau ds^*}, \quad (3.6)$$

de donde

$$\begin{cases} k = \|\Psi\| \\ \tau = \text{Im}\left(\frac{\Psi_s}{\Psi}\right) \end{cases}.$$

Por otra parte la *ecuación de Schrodinger no lineal* es la ecuación en derivadas parciales no lineal, dada por,

$$\Psi_{ss} + i\Psi_t + \frac{1}{2}\|\Psi\|^2\Psi = 0. \quad (3.7)$$

**Teorema 3.2.3.** Las ecuaciones de Da Rios (3.4) asociadas a la ecuación de inducción localizada (3.2) son equivalentes a la ecuación de Schrodinger no lineal (3.7), vía la transformación de Hasimoto (3.6).

*Demostración.* Derivando la curvatura compleja (3.6) obtenemos,

$$\begin{cases} \Psi_t = k_t e^{i \int_{s_0}^s \tau ds^*} + ik \left( \int_{s_0}^s \tau_t ds^* \right) e^{i \int_{s_0}^s \tau ds^*} \\ \Psi_s = k_s e^{i \int_{s_0}^s \tau ds^*} + ik \tau e^{i \int_{s_0}^s \tau ds^*} \\ \Psi_{ss} = k_{ss} e^{i \int_{s_0}^s \tau ds^*} + 2ik_s \tau e^{i \int_{s_0}^s \tau ds^*} + ik \tau_s e^{i \int_{s_0}^s \tau ds^*} - k \tau^2 e^{i \int_{s_0}^s \tau ds^*} \end{cases}.$$

Es decir, si  $k \neq 0$ ,

$$\Psi_{ss} + i\Psi_t + \frac{1}{2}\|\Psi\|^2\Psi = 0,$$

equivale a,

$$\begin{cases} k_t = -2\tau k_s - k \tau_s \\ \int_{s_0}^s \tau_t ds^* = \frac{1}{2}k^2 + \frac{k_{ss}}{k} - \tau^2 \end{cases}.$$

Y esto último equivale a las ecuaciones de Da Rios, donde para el recíproco se utiliza el cambio,

$$\Psi^* = \Psi e^{i \int_0^t T(t^*) dt^*},$$

con  $T(t) = (-\tau^2 + \frac{k_{ss}}{k} + \frac{1}{2}k^2)_{s_0}$ .  $\square$

Gracias a estos resultados y al teorema fundamental de superficies tenemos fuertes relaciones entre la ecuación de inducción localizada (3.2), el flujo binormal, las superficies de Hasimoto, las ecuaciones de Da Rios (3.4) y la ecuación de Schrodinger no lineal (3.7), salvo movimientos rígidos. En particular, a partir de una solución de la ecuación de Schrodinger no lineal se puede obtener una superficie de Hasimoto.

### 3.3. Varillas Elásticas de Kirchhoff

En esta sección vamos a obtener, geoméricamente, soluciones a la ecuación de inducción localizada (3.2), es decir, mostraremos como obtener superficies de Hasimoto usando las líneas centrales de varillas elásticas. Estas superficies se corresponden con las soluciones 1-soliton de la ecuación de Schrodinger no lineal (3.7). Comenzamos con la definición de varilla elástica. Para más detalles, véase [12].

**Definición 14.** Una *varilla* o *curva referencial* es una aplicación  $\tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$  definida por,

$$\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), \mathbf{t}(t), \mathbf{m}_1(t), \mathbf{m}_2(t)),$$

donde  $\gamma$  es una curva en  $\mathbb{R}^3$  parametrizada por la longitud de arco y  $\mathbf{t}(t)$  es el tangente unitario a  $\gamma$ . A la curva  $\gamma$  la llamaremos *línea de centros de la varilla*. Y a la referencia ortonormal positivamente orientada  $(\mathbf{t}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)$  la llamaremos *referencia material de la varilla*.

En definitiva una varilla es una curva en el fibrado de referencias ortonormales tal que el primer campo de vectores de la referencia material es el tangente unitario a la línea de centros.

**Proposición 3.3.1.** Dada una referencia material se tienen las siguientes ecuaciones,

$$\begin{cases} D_t \mathbf{t} = m_1 \mathbf{m}_1 + m_2 \mathbf{m}_2 \\ D_t \mathbf{m}_1 = -m_1 \mathbf{t} + m \mathbf{m}_2 \\ D_t \mathbf{m}_2 = -m_2 \mathbf{t} - m \mathbf{m}_1 \end{cases}$$

*Demostración.* Es análoga a la demostración de las ecuaciones de Frenet-Serret para el triedro de Frenet  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ .  $\square$

De acuerdo con el modelo de Kirchhoff, podemos definir la energía elástica que controla la forma de la varilla de la siguiente manera,

**Definición 15.** Definimos la *energía elástica total* de una curva referencial  $\tilde{\gamma}$  por,

$$\tilde{E}(\tilde{\gamma}) = \int_{\gamma} \alpha_1 m_1^2 + \alpha_2 m_2^2 + \beta m^2 dt,$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\beta \geq 0$ .

Obsérvese que los términos de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  nos dan información sobre la energía de flexión, y el término de  $\beta$  nos da la energía de torsión. Lo más habitual es trabajar con tubos circulares, por lo que analizaremos este caso simétrico, es decir, el caso en que  $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ , con lo que, usando que  $k = \|D_t \mathbf{t}\|$  tenemos que la energía de flexión viene dada por,

$$\frac{\alpha}{2} \int_{\gamma} k^2 dt.$$

**Definición 16.** Diremos que una varilla  $\Gamma$  es una *varilla elástica de Kirchhoff* si es un punto crítico del funcional,

$$E(\tilde{\gamma}) = \int_{\gamma} \alpha k^2 + \beta m^2 dt.$$

Si  $\beta = 0$ , no tenemos energía de torsión y entonces una varilla elástica se conoce como curva elástica. Para una demostración de los dos resultados siguientes véase [12].

**Teorema 3.3.2.** Sea  $k \neq 0$ . Una curva  $\gamma$  es la línea de centros de una varilla elástica si y sólo si  $\gamma$  es un punto crítico de,

$$\mathcal{F}(\gamma) = \lambda_1 \int_{\gamma} dt + \lambda_2 \int_{\gamma} \tau dt + \lambda_3 \int_{\gamma} k^2 dt.$$

**Observación 10.** Podemos simplificar  $\mathcal{F}(\gamma)$  a,

$$\mathcal{F}(\gamma) = \lambda \int_{\gamma} (k^2 + \mu) dt + \lambda_2 \int_{\gamma} \tau dt.$$

**Corolario 3.3.3.** La primera fórmula de variación para el funcional,

$$\mathcal{F}(\gamma) = \lambda_1 \int_{\gamma} dt + \lambda_2 \int_{\gamma} \tau dt + \lambda_3 \int_{\gamma} k^2 dt,$$

es,

$$\dot{\mathcal{F}}(0) = \frac{d}{ds} \mathcal{F}(\Gamma_s)|_{s=0} = \int_a^b \langle \mathcal{E}, V \rangle dt + \mathcal{B}(V, \gamma)|_a^b,$$

donde,

$$\mathcal{E} = (\lambda_3 k_{tt} + \frac{1}{2}k(\lambda_3 k^2 - 2\lambda_1) + k\tau(\lambda_2 - \lambda_3\tau))\mathbf{n} + (k_t(2\lambda_3\tau - \lambda_2) + \lambda_3 k\tau_t)\mathbf{b},$$

y

$$\mathcal{B}(V, \gamma) = \frac{\lambda_2}{k} \langle \mathbf{b}, D_t D_t V \rangle + \lambda_3 k \langle \mathbf{n}, D_t V \rangle - \langle J, V \rangle,$$

con,

$$J = \frac{\lambda_3 k^2 - 2\lambda_1}{2} \mathbf{t} + \lambda_3 k_t \mathbf{n} + k(\lambda_3 \tau - \lambda_2) \mathbf{b},$$

y  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  representa el triedro de Frenet de  $\gamma$ .

El siguiente resultado es fundamental para nosotros,

**Teorema 3.3.4.** Si  $\gamma$  es la línea de centros de una varilla elástica de Kirchhoff, entonces,

$$\mathcal{I} = \lambda_2 \mathbf{t} + \lambda_3 k \mathbf{b}, \tag{3.8}$$

es la restricción a  $\gamma$  de un campo de Killing de  $\mathbb{R}^3$ .



*Demostración.* Como acabamos de ver la primera fórmula de variación de  $\mathcal{F}$  en  $\gamma$  en la dirección del campo variacional  $V$  es,

$$\dot{\mathcal{F}}(0) = \int_a^b \langle \mathcal{E}(\gamma), V \rangle dt + \mathcal{B}(V, \gamma)|_a^b.$$

Además, si  $\gamma$  es la línea de centros de una varilla elástica de Kirchhoff, entonces  $\gamma$  es un punto crítico de  $\mathcal{F}$ , es decir,  $\mathcal{E}(\gamma) = 0$ , y por tanto,

$$\dot{\mathcal{F}}(0) = \mathcal{B}(V, \gamma)|_a^b.$$

Sea  $J$  el campo de vectores del corolario anterior, vamos a ver que se trata de un campo de vectores constante a lo largo de cualquier varilla elástica de Kirchhoff.

Para eso consideramos un campo variacional constante  $V$ , que deja invariante a  $\mathcal{F}$ , y entonces,

$$0 = \dot{\mathcal{F}}(0) = \langle J(a), V(a) \rangle - \langle J(b), V(b) \rangle.$$

Además, sirve para cualquier punto intermedio  $c \in (a, b)$ , es decir,  $\langle J, V \rangle$  es constante en  $[a, b]$  y por ser  $V$  constante y arbitrario,  $J$  es constante.

Ahora, sabiendo que las rotaciones de  $\mathbb{R}^3$  también dejan fijo  $\mathcal{F}$ , consideramos el único tipo de campos de vectores de  $\mathbb{R}^3$  que generan una familia uniparamétrica de rotaciones, es decir, los que son de la forma  $\rho \wedge Z$  con  $\rho$  vector de posición y  $Z$  constante.

Restringiéndonos sobre  $\gamma$ , tenemos,  $V = \gamma \wedge Z$  para los cuales,  $\dot{\mathcal{F}}(0)$  es cero. Y por tanto,

$$\mathcal{B}(V, \gamma) = \frac{\lambda_2}{k} \langle \mathbf{b}, D_t D_t V \rangle + \lambda_3 k \langle \mathbf{n}, D_t V \rangle - \langle J, D_t V \rangle = cte.$$

Sustituyendo,  $V = \gamma \wedge Z$ , y agrupando adecuadamente,

$$\frac{\lambda_2}{k} \langle \mathbf{b}, k \mathbf{n} \wedge Z \rangle + \lambda_3 k \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \wedge Z \rangle - \langle J, \gamma \wedge Z \rangle = \langle -\lambda_2 \mathbf{t} - \lambda_3 k \mathbf{b} - J \wedge \gamma, Z \rangle = cte,$$

para todo  $Z \in \chi(\mathbb{R}^3)$  constante. Luego, si  $\mathcal{I} = \lambda_2 \mathbf{t} + \lambda_3 k \mathbf{b}$ , se tiene que,

$$\mathcal{I} = \gamma \wedge J + W, \tag{3.9}$$

con  $W$  constante, es decir,  $I$  es un campo de Killing sobre  $\gamma$ .  $\square$

Como consecuencia de lo cual obtenemos los siguientes corolarios,

**Corolario 3.3.5.** *La línea de centros de una varilla de Kirchhoff evoluciona según la ecuación de inducción localizada (3.2).*

*Demostración.* De las ecuaciones (3.8), (3.9) de la demostración anterior obtenemos que el campo,

$$\mathcal{I} = \lambda_2 \mathbf{t} + \lambda_3 k \mathbf{b} = \gamma \wedge J + W, \quad (3.10)$$

definido sobre  $\gamma$  se puede extender a un campo de Killing de  $\mathbb{R}^3$ . El primer sumando del miembro de la derecha de (3.10) corresponde a una rotación mientras que el segundo determina una traslación. La composición de ambos da lugar a un movimiento de  $\mathbb{R}^3$  helicoidal con lo que después de un cambio de coordenadas podemos suponer que  $W = aJ$ , con  $a \in \mathbb{R}^3$ . Así,

$$k \mathbf{b} = \frac{1}{\lambda_3} (-\lambda_2 \mathbf{t} + \gamma \wedge J + aJ), \quad (3.11)$$

lo que concluye la prueba.  $\square$

Como consecuencia,

**Corolario 3.3.6.** *La evolución de las líneas de centro de elásticas de Kirchhoff generan superficies de Hasimoto.*

Además, se puede ver que éstas se corresponden con las soluciones 1-soliton de la ecuación de Schrodinger no lineal [10]. Obsérvese que el primer sumando del término de la derecha de (3.11) se induce un "deslizamiento" de la curva sobre su trayectoria, mientras que el resto está asociado a un movimiento rígido. Así, las líneas de centros de las elásticas de Kirchhoff, evolucionan bajo la ecuación de inducción localizada (3.2) cambiando de posición, pero no de forma. Además aquellas que evolucionan sin "deslizamiento", puramente por movimientos rígidos, es decir,  $\lambda_2 = 0$ , son precisamente, las curvas elásticas de  $\mathbb{R}^3$ . En otras palabras, las curvas elásticas de  $\mathbb{R}^3$  evolucionan bajo la ecuación de inducción localizada (3.2) mediante movimientos rígidos puros (sin deslizamiento). De este modo, tomando como condición inicial una línea de centros de una elástica de Kirchhoff, se tiene un procedimiento geométrico para construir superficies de Hasimoto.

Otra cuestión diferente sería encontrar parametrizaciones explícitas de tales superficies. En la línea de lo tratado en este trabajo, una posibilidad para buscar tales parametrizaciones sería encontrar un entorno coordenado "adaptado" a las características geométricas del problema donde se simplifiquen las ecuaciones de Gauss-Codazzi y, a partir de ahí, intentar integrar el sistema cuya integrabilidad está garantizada por dichas ecuaciones.

El proceso es, en general, bastante complicado de realizar, aunque en algunos casos, como el que estudiaremos a continuación, éste se puede simplificar con alguna hipótesis geométrica adicional.

Por ejemplo, intentaremos determinar las superficies de Hasimoto con filamentos planos. Puesto que  $\tau = 0$ , las ecuaciones de Gauss-Codazzi-Darwin (3.4) se reducen a,

$$\begin{cases} k_t = 0 \\ \frac{1}{2}k^3 + k_{ss} = \nu k \end{cases} \quad (3.12)$$

con  $\nu \in \mathbb{R}$ .

La segunda ecuación nos dice que los distintos filamentos son elásticas planas, mientras que la primera indica que la curvatura de todos los filamentos es la misma, cosa que ya sabemos pues las elásticas evolucionan por movimientos rígidos bajo la ecuación de inducción localizada (3.2), según hemos mencionado anteriormente.

Parametricemos la superficie de forma natural, es decir,  $\mathbf{x}(s, t)$  donde para cada  $t$  fijo obtenemos una copia del filamento  $\mathbf{x}(s, \cdot)$ . De la primera ecuación de (3.5) se deduce claramente que las diferentes copias del filamento son geodésicas de la superficie de Hasimoto. Además, como los filamentos son planos ( $\tau = 0$ ) y evolucionan por movimientos rígidos, el binormal de la segunda ecuación de (3.5) no depende de  $s$ , en otras palabras,

$$\begin{cases} \mathbf{x}_t(s, t) = k(s)\mathbf{b}(t) \\ \mathbf{x}_s(s, t) = \mathbf{t}(s, t) \end{cases} \quad (3.13)$$

Usando ahora los cálculos de la demostración del Teorema 3.2.2 tenemos,

$$\begin{cases} \mathbf{x}_s = \mathbf{t}(s, t) \\ \mathbf{x}_t = k(s)\mathbf{b}(t) = k(s)\mathbf{t}_\delta(t) \end{cases} \quad (3.14)$$

y

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{ss} = k(s)\mathbf{n}(s, t) \\ \mathbf{x}_{st} = k_s\mathbf{b}(t) \\ \mathbf{x}_{tt} = -kk_s\mathbf{t}(s, t) - k_{ss}\mathbf{n}(s, t) \end{cases} \quad (3.15)$$

Si  $k(s)$  es constante entonces el filamento inicial (y todas las copias) son círculos y  $\mathbf{b}(0) = (0, 0, 1)$  (podemos suponerlo tras un cambio de coordenadas, pues  $\mathbf{b}(0)$  es constante) y como el círculo elástico se mueve por los movimientos rígidos asociados al campo de Killing que extiende a  $\mathbf{b}$ , que en este caso son traslaciones, la superficie de Hasimoto sería un cilindro circular recto.

Luego, podemos suponer que  $k(s)$  no es constante, y entonces de (3.14) y (3.15) obtenemos,

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{tt} = k(s)\mathbf{t}'_\delta(t) = k(s)k_\delta(t)\mathbf{n}_\delta(t) \\ \mathbf{x}_{tt} = -kk_s\mathbf{x}_s - \frac{k_{ss}}{k}\mathbf{x}_{ss} \end{cases} \quad (3.16)$$

Igualando y derivando respecto de  $t$  se sigue que,  $\delta$  es un círculo y  $\mathbf{b}_\delta = (0, 0, 1)$ . Además,

$$kk_\delta^2 = kk_s^2 + \frac{k_{ss}^2}{k}, \quad (3.17)$$

es compatible con el hecho de que el filamento es elástico.

Podemos suponer que el círculo  $\delta$  está centrado en el origen del plano  $xy$  perpendicular a  $\mathbf{b}_\delta = (0, 0, 1)$ . Entonces, imitando los cálculos de [6] y [7] para el caso Riemanniano obtenemos la siguiente proposición [8], [10],

**Proposición 3.3.7.** *Una superficie de Hasimoto con filamentos planos es o un cilindro circular recto o una superficie de revolución generada por una elástica plana.*

Como la parametrización de una superficie de revolución es estándar y las elásticas planas se pueden también parametrizar explícitamente [3], de la proposición anterior se puede obtener la parametrización explícita de la superficie de Hasimoto con filamentos planos.

## Apéndice A

# Generalización del Teorema Fundamental

Como ya habíamos mencionado en la introducción, en un primer momento, el objetivo del Trabajo Fin de Master era presentar y demostrar el teorema fundamental de subvariedades, sin embargo necesita de una gran base previa por lo que con el ánimo de reducir las dimensiones y hacer más amena la lectura de esta memoria se decidió simplificar. No obstante, dicho teorema ya había sido estudiado y es por eso que en este apéndice, se darán las ideas, omitiendo las demostraciones, para poder comprender la demostración que puede ser estudiada de [17].

Empezaremos por presentar un tipo de fibrado especial sobre una variedad diferenciable.

**Definición 17.** Un  $G$ -fibrado principal sobre una variedad diferenciable  $M$  y con grupo de Lie  $G$  es una tupa  $(P, \pi, \cdot)$  donde,

- 1)  $P$  es una variedad diferenciable.
- 2) La aplicación  $\pi: P \longrightarrow M$  satisface,  $\pi(u \cdot g) = \pi(g)$ , para todo  $u \in P$  y  $g \in G$ .
- 3) La aplicación  $\cdot: P \times G \longrightarrow P$  dada por  $\cdot(u, a) = u \cdot a$  es diferenciable y verifica,  $u \cdot (ab) = (u \cdot a) \cdot b$  para todo  $u \in P$ ,  $a, b \in G$ .

Además se debe cumplir que para todo  $p \in M$ , existe  $U \subset M$  abierto de  $p$  y un difeomorfismo  $\Phi: \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$  que a cada  $u \in \pi^{-1}(U)$  le asocia el par  $(\pi(u), \phi(u))$  donde,  $\phi(u \cdot g) = \phi(u) \cdot g$ .

Con estas condiciones, se tiene que la aplicación  $\cdot$  es una acción a derechas de  $G$  en  $P$ , que actúa sin puntos fijos.

A continuación debemos profundizar más en este tema, por lo que en el siguiente ejemplo se introduce el fibrado principal con el que se va a trabajar para demostrar el teorema fundamental.

**Ejemplo 1.** Sea  $F(M)$  el conjunto de las bases del espacio tangente  $T_p M$  para cada  $p \in M$ . Consideramos la aplicación,  $\pi: F(M) \longrightarrow M$  que a cada

base le asocia el punto base  $p \in M$ . Además, si tomamos la siguiente aplicación  $\cdot: F(M) \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow F(M)$ , definida de forma obvia, se tiene que  $(F(M), \pi, \cdot)$  es un fibrado principal, llamado *fibrado de referencias*.

Nuestro siguiente objetivo es trasladar una curva del grupo de Lie  $G$ , en una curva en  $M$ , en este proceso nos aparecerá un campo de vectores cuya importancia será fundamental como indica su nombre.

Sea  $\mathfrak{g}$  el álgebra de Lie de  $G$ . Para todo  $X \in \mathfrak{g}$ , tenemos la curva parametrizada  $\exp(tX)$  en  $G$ . Además, para cada  $p \in M$ , podemos definir la curva en  $M$ ,  $c_p(t) = p \cdot (\exp(tX))$ . Entonces, llamamos *campo de vectores fundamental* al campo de vectores que en cada punto se define por,

$$\sigma(X)(p) = \dot{c}_p(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [p \cdot (\exp(tX))].$$

Con todo lo anterior en mente, estamos en condiciones de definir un tipo de conexión que será equivalente a las ya estudiadas de Cartan (para una definición de conexión de Cartan independiente del operador derivada covariante, consultese [17]) y la generada por el operador  $\nabla$ , también conocida como conexión de Koszul.

**Definición 18.** Una *conexión de Ehresmann* en un fibrado principal  $\pi: P \rightarrow M$  sobre  $M$  con grupo  $G$  es una 1-forma diferenciable en  $P$  con valores en  $\mathfrak{g}$ ,  $\omega$ , tal que,

- 1) Para todo  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $\omega(\sigma(X)) = X$ .
- 2) Para todo  $g \in G$  y todo campo de vectores  $Y$  de  $P$ ,  $\omega(R_{g*}Y) = \text{Ad}(g^{-1})\omega(Y)$ .

Antes de estudiar la equivalencia entre estos tres tipos de conexiones conviene observar que toda conexión de Ehresmann da lugar a una distribución, y reciprocamente.

Sea  $\omega$  una conexión de Ehresmann, es decir, tenemos la aplicación lineal  $\omega(u): T_u P \rightarrow \mathfrak{g}$  para todo  $u \in P$ . Entonces, definimos el *subespacio horizontal en  $u$*  como el subespacio vectorial  $T_u H$  de  $T_u P$ ,

$$T_u H = \text{Ker} \omega(u),$$

donde  $\dim T_u H = \dim M$ .

Toda conexión de Ehresmann  $\omega$  en  $P$  da lugar a una distribución  $H$  en  $P$ .

**Proposición A.0.8.** Sea  $H$  la distribución en  $P$  determinada por  $\omega$ , entonces se verifica,

- 1)  $T_u P = T_u H \oplus T_u V$ ,
- 2)  $T_{u \cdot g} H = (R_g)_* T_u H$ , y
- 3)  $H$  es una distribución diferenciable.

Recíprocamente, si  $H$  es una distribución en  $P$  que verifica los tres puntos anteriores, entonces,  $H$  es la distribución determinada por una única conexión de Ehresmann  $\omega$ .

El siguiente teorema estudia la equivalencia entre las conexiones, para consultar la demostración se puede consultar [17].

**Teorema A.0.9.** *Toda conexión de Ehresmann viene de una única conexión de Cartan, y reciprocamente.*

Además, ya hemos visto que todo operador  $\nabla$  (conexión de Koszul) determina unívocamente una conexión de Cartan (véase el capítulo 1, sección 2), y reciprocamente. Por tanto, hablar de conexiones de Koszul, Cartan o Ehresmann es equivalente.

Por último enunciaremos el teorema de Frobenius, que como ya hemos visto es la base para la demostración del teorema fundamental de superficies, y ahora será de gran utilidad para el caso de subvariedades de Riemann.

**Teorema A.0.10** (Teorema de Frobenius). *Para toda distribución  $E$  de rango  $k$  en  $M$ , los siguientes puntos son equivalentes,*

- 1)  *$E$  es completamente integrable.*
- 2)  *$E$  es involutiva.*
- 3) *Existe una atlas diferenciable foliado en  $M$  de codimensión  $q = n - k$ , del cual toda placa es una variedad integral de  $E$ .*

En la demostración del teorema fundamental de subvariedades se utilizará la versión diferencial de este teorema, que enunciamos en la siguiente proposición.

**Proposición A.0.11.** *Una distribución  $E$  en  $M$  es integrable si y solo si  $d(\mathcal{L}(E)) \subset \mathcal{L}(E)$ .*

Finalmente, aquí tenemos el enunciado del teorema fundamental en el caso más general. Debemos recordar que este teorema puede extenderse a variedades pseudo-riemannianas, cuya versión puede consultarse en [5], esta versión para métricas no degeneradas es la que se usa en el artículo [7].

**Teorema A.0.12** (Teorema Fundamental de Subvariedades). *Sea  $M$  una subvariedad conexa de una variedad de Riemann conexa y completa  $(\tilde{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  de curvatura seccional constante  $K_0$  con fibrado normal  $\pi: M^\perp \rightarrow M$  cuya segunda forma fundamental correspondiente es  $II$  y la conexión normal  $\mathcal{D}$ . De forma similar, consideremos una subvariedad conexa  $N$  con fibrado normal  $\bar{\pi}: N^\perp \rightarrow N$  y con las correspondientes  $\bar{II}$  y  $\bar{\mathcal{D}}$ . Sea  $\Phi: M \rightarrow N$  una isometría y supongamos que existe un isomorfismo fibrado  $\tilde{\Phi}: M^\perp \rightarrow N^\perp$  que cubre  $\Phi$  y que preserva los productos interiores, las segundas formas fundamentales y las conexiones normales, es decir, que verifica,*

- 1) *Para todo  $\xi, \nu \in T_p^\perp M$ ,  $\langle \tilde{\Phi}(\xi), \tilde{\Phi}(\nu) \rangle = \langle \xi, \nu \rangle$ ,*
- 2) *Para todo  $X, Y \in T_p M$ ,  $\tilde{\Phi}(II(X, Y)) = \bar{II}(\Phi_* X, \Phi_* Y)$  y*
- 3) *Para todo  $X \in T_p M$  y todo  $\xi \in T_p^\perp M$ ,  $\tilde{\Phi}(\mathcal{D}_X \xi) = \bar{\mathcal{D}}_{\Phi_* X}(\tilde{\Phi}(\xi))$ .*

*Entonces, existe una isometría  $F: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$  tal que  $\Phi = F|_M$  y  $\tilde{\Phi} = F_*|_{M^\perp}$ .*

Recíprocamente, sea  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  una variedad de Riemann de dimensión  $n$  simplemente conexa con derivada covariante  $\nabla$  y tensor de curvatura  $Rm$ . Sea  $\pi: E \rightarrow M$  un fibrado vectorial sobre  $M$  de dimensión  $m - n$  con métrica de Riemann  $\{, \}$ . Tomemos  $\delta$  una conexión en  $E$  compatible con la métrica, un tensor de curvatura  $Rm_\delta$ , sea  $\sigma$  una sección del fibrado  $\text{Hom}(TM \times TM, E)$  determinada por  $\nabla$  y  $\delta$  y para cada  $X \in T_p M$  y cada  $\xi \in \pi^{-1}(p)$  sea  $A_\xi(X) \in T_p M$  el único vector que satisface,

$$\langle A_\xi(X), Y \rangle = \{ \xi, \sigma(X, Y) \},$$

para todo  $Y \in T_p M$ . Supongamos además que  $\sigma$  y  $\delta$  satisfacen las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci. Entonces existe una inmersión isométrica  $f: M \rightarrow \tilde{M}$  y un isomorfismo fibrado  $\tilde{f}$  de  $E$  en el fibrado normal de  $f(M)$  que cubre  $f$  y tal que preserva los productos interiores, las segundas formas fundamentales y las conexiones normales.

Para cerrar este apéndice, debemos recalcar que este teorema generaliza al estudiado en el segundo capítulo, puesto que el caso de superficies es un caso particular de este, ya que se verifican todas las condiciones.



# Bibliografía

- [1] J. Arroyo, Presión Calibrada Total: Estudio Variacional y Aplicaciones al Problema de Willmore-Chen, Tesis Doctoral UPV/EHU, 2001.
- [2] M. Avendaño, Teorema Fundamental de Superficies y Criterio de Frobenius, Tesis de Grado.
- [3] M. Barros, A. Ferrández y O. J. Garay, Equivariant Willmore Surfaces in Conformal Homogeneous Three Spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 409, (2014), 459-477.
- [4] M .P. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [5] B.-Y. Chen, *Pseudo-Riemannian Geometry,  $\delta$ -invariants and Applications*, World Scientific, 2011.
- [6] O. J. Garay y M. Pauley, Critical Curves for a Santaló Problem in 3-Space Forms, *J. Math. Anal. Appl.* 398, (2013), 80-99.
- [7] O. J. Garay, A. Pámpano y C. Woo, Hypersurface Constrained Elasticae in Lorentzian Space Forms, Invited contribution to *Advances in Mathematical Physics*.
- [8] H. Hasimoto, A Soliton On A Vortex Filament, *J. Fluid Mech.* 51, (1972), 477-485.
- [9] H. Hasimoto, Motion of a Vortex Filament and its Relation to Elastica, *J. Phy. Soc. Japan* 31 (1971), 293-294.
- [10] S. Kida, A Vortex Filament Moving Without Change of Form, *J. Fluid Mech.* 112, (1981), 397-409.
- [11] S. Kobayashi y K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience Publishers, London, 1963.
- [12] J. Langer and D. A. Singer, Lagrangian Aspects of The Kirchhoff Elastic Rod, *S.I.A.M. Review* 38, (1996), 1-17.

- [13] J. Langer and D. A. Singer, The Total Squared Curvature of Closed Curves, *J. Diff. Geom.* 20 (1984), 1-22.
- [14] J. F. Nash, The Imbedding Problem for Riemannian Manifolds, *Ann. Math.* 63 (1956), 20-63.
- [15] A. Pámpano, Geodésicas en Variedades de Riemann, Trabajo Fin de Grado, UPV/EHU, Bilbao, 2014.
- [16] C. Rogers y W. K. Schief, *Backlund And Darboux Transformations, Geometry And Modern Applications in Soliton Theory*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, 2002.
- [17] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* Vol. I-V, Houston, 1999.
- [18] K. Tenenblat, *Transformations of Manifolds and Applications to Differential Equations*, Longman, Harlow Essex, England, 1998.
- [19] C. Terng and K. Uhlenbeck, Geometry of Solitons, *Notices A.M.S.* 47, (2000), 17-25.