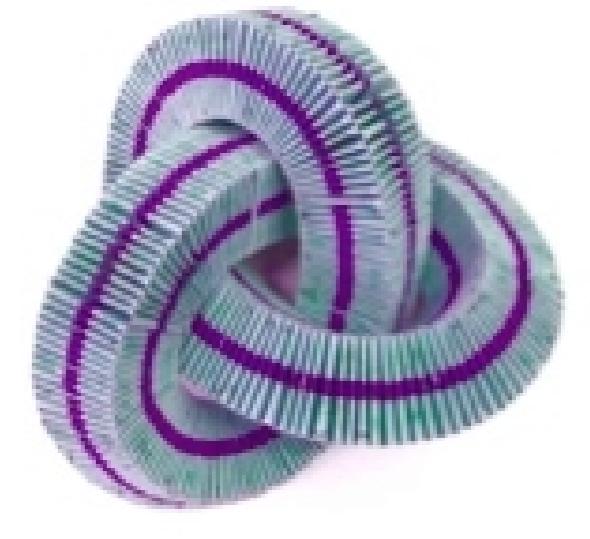


Toros de Curvatura Media Constante Embebidos en $\mathbb{S}^3(\rho)$



Álvaro Pámpano Llarena

Universidad del País Vasco UPV/EHU, Departamento de Matemáticas, Bilbao

alvaro.pampano@ehu.eus

Resumen

La conjetura de Pinkall-Sterling [7] (probada por Andrews y Li [1]) dice que todo toro de curvatura media constante (CMC) embebido en $\mathbb{S}^3(\rho)$ debe ser una superficie de revolución. Teniendo esto en cuenta, en este póster vamos a clasificar todos los toros de CMC embebidos en $\mathbb{S}^3(\rho)$ en términos de su curva perfil. Veremos que esta curva perfil es un punto crítico cerrado y simple del funcional energético $\Theta_H(\gamma) = \int_{\gamma} \sqrt{\kappa(s) + H} ds$ en la esfera de dimensión 2, $\mathbb{S}^2(\rho)$, [3]. Además, obtendremos que dichos toros serán o bien toros de Hopf o bien superficies de evolución binormal (BES), [3]. Este último caso solo aparecerá bajo ciertas condiciones para H .

1. Introducción

En el espacio euclídeo de dimensión 4, \mathbb{E}^4 , definimos la **3-esfera**, $\mathbb{S}^3(\rho)$ con $\rho > 0$ por

$$\mathbb{S}^3(\rho) = \{x \in \mathbb{E}^4 \mid \langle x, x \rangle = \frac{1}{\rho}\}.$$

Sea S una superficie inmersa en $\mathbb{S}^3(\rho)$, la **curvatura media** se define como la función H dada por

$$H = \frac{1}{2} \langle \text{tr } h, \eta \rangle,$$

donde h representa la segunda forma fundamental de S y η es un vector unitario normal a S . Una superficie S se dice que es una superficie de **curvatura media constante** (CMC para abreviar) si la función H es constante.

En 2015, Andrews y Li [1] probaron la conjetura enunciada por Pinkall y Sterling [7] en 1989:

Teorema 1 Todo toro con CMC embebido en $\mathbb{S}^3(\rho)$ es una superficie de revolución.

Decimos que una superficie $S \subset \mathbb{S}^3(\rho)$ es una **superficie de revolución** si existe un subespacio bi-dimensional V de \mathbb{E}^4 tal que S queda invariante por la acción del grupo uniparamétrico de rotaciones $\mathbb{S}^1 \cong \{\phi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ que fija V . En este caso, S admite una **parametrización natural** dada por

$$x(s, t) = \phi_t(\gamma(s)),$$

donde $\gamma(s)$ es una curva plana, es decir, $\gamma(s)$ está contenida en una esfera totalmente geodésica de $\mathbb{S}^3(\rho)$. Se dice que $\gamma(s)$ es la **curva perfil** de S .

En [3] hemos demostrado que

Teorema 2 Toda superficie de revolución $S \subset \mathbb{S}^3(\rho)$ con CMC H , está localmente caracterizada por tener una curva perfil $\gamma(s)$ crítica para el funcional de Blaschke generalizado $\Theta_H(\gamma) = \int_{\gamma} \sqrt{\kappa(s) + H} ds$ en $\mathbb{S}^2(\rho)$, donde $\kappa(s)$ es la curvatura de $\gamma(s)$.

2. Problema de Blaschke en $\mathbb{S}^2(\rho)$

Para $H \in \mathbb{R}$ fijo consideramos el **funcional energético** dependiente de la curvatura

$$\Theta_H(\gamma) := \int_{\gamma} \sqrt{\kappa + H} = \int_0^L \sqrt{\kappa(s) + H} ds, \quad (1)$$

donde el parámetro longitud de arco está representado por $s \in [0, L]$, con L la longitud de γ . Este problema variacional en el espacio euclídeo \mathbb{E}^3 para $H = 0$ fué estudiado por Blaschke. Por este motivo, nos referimos a él como el **problema de Blaschke generalizado**. En [3], hemos estudiado esta generalización en cualquier forma de espacio de dimensión 3.

En primer lugar, observamos que cualquier curva con $\kappa = -H$ es un mínimo global entre las curvas con $\sqrt{\kappa + H} \in L^1(I)$. Ahora, consideramos $\Theta_H(\gamma) \geq 0$ actuando en el espacio de curvas

$$\Omega_{p_0 p_1} = \{\beta : I \rightarrow \mathbb{S}^2(\rho) \mid \beta(i) = p_i, i \in \{0, 1\}, \frac{d\beta}{dt}(t) \neq 0, \forall t \in I, \kappa > -H\},$$

donde $p_i \in \mathbb{S}^2(\rho)$, $i \in \{0, 1\}$ son puntos arbitrarios de $\mathbb{S}^2(\rho)$.

Entonces, una curva crítica $\gamma \in \Omega_{p_0 p_1}$ de $\Theta_H(\gamma) = \int_{\gamma} \sqrt{\kappa + H} ds$ deberá verificar la **ecuación de Euler-Lagrange**

$$\frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa + H}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\kappa + H}} (\kappa^2 + \rho) - 2\kappa\sqrt{\kappa + H} = 0.$$

Proposición 3 Sea γ un extremo para $\Theta_H(\gamma) = \int_{\gamma} \sqrt{\kappa + H} ds$, (1), actuando en $\Omega_{p_0 p_1}$. Si γ tiene curvatura constante $\kappa(s) = \kappa_o$, entonces tiene que verificar

$$\kappa_o = -H + \sqrt{H^2 + \rho}.$$

Si, por el contrario, la curvatura de γ , $\kappa(s)$, es no constante, para cada $d > \frac{H + \sqrt{H^2 + \rho}}{2}$ existe una curva crítica con $\kappa(s) = \kappa_d(s)$ dada por

$$\kappa_d(s) = \frac{H^2 + \rho}{2d - H - \sqrt{4d^2 - 4dH - \rho \sin 2\sqrt{H^2 + \rho}}} - H. \quad (2)$$

Recordemos que en [3] se ha visto que toda superficie de revolución con CMC H se construye localmente como la **evolución binormal** de extremos de $\Theta_H(\gamma) = \int_{\gamma} \sqrt{\kappa + H} ds$, (1). Además, topológicamente se tiene que si $\kappa = -H$, se generan esferas \mathbb{S}^2 ; si $\kappa = -H + \sqrt{H^2 + \rho}$, se generan toros $\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$; y si $\kappa(s) = \kappa_d(s)$, se generan productos $U \times \mathbb{S}^1$.

3. Curvas Críticas Cerradas y Simples

En este póster estamos interesados en clasificar los toros de CMC embebidos en $\mathbb{S}^3(\rho)$. Teniendo en cuenta el comentario anterior, será suficiente estudiar las curvas críticas, $\gamma \in \Omega_{p_0 p_1}$, de (1) que sean cerradas y simples.

En el caso de que la curvatura de γ sea constante, $\kappa = -H + \sqrt{H^2 + \rho}$, γ será un círculo y por tanto cerrado y simple. Por otro lado, si la curvatura de γ no es constante, tenemos que $\kappa(s) = \kappa_d(s)$ es una función periódica de periodo $\frac{\pi}{\sqrt{H^2 + \rho}}$ y entonces debemos analizar la **condición de cierre y simplicidad** [2].

Proposición 4 La curva crítica, $\gamma \in \Omega_{p_0 p_1}$, de (1) será cerrada si y solo si

$$\Lambda(d) = 2\sqrt{d\rho} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{H^2 + \rho}}} \frac{(\kappa_d(u) + 2H)\sqrt{\kappa_d(u) + H}}{4d(\kappa_d(u) + H)} du$$

es un múltiplo racional de 2π . Además, γ será simple si y solo si se verifica $m\Lambda(d) = 2\pi$, con $m \in \mathbb{Z}$.

Tomando límites se puede ver que la imagen de $\Delta(d)$ es un intervalo abierto, y por tanto, habrá valores de d para los cuales la condición de cierre se verifique. Es decir, obtenemos

Teorema 5 Existen curvas críticas de (1) cerradas con curvatura no constante para cualquier valor de $H \in \mathbb{R}$.

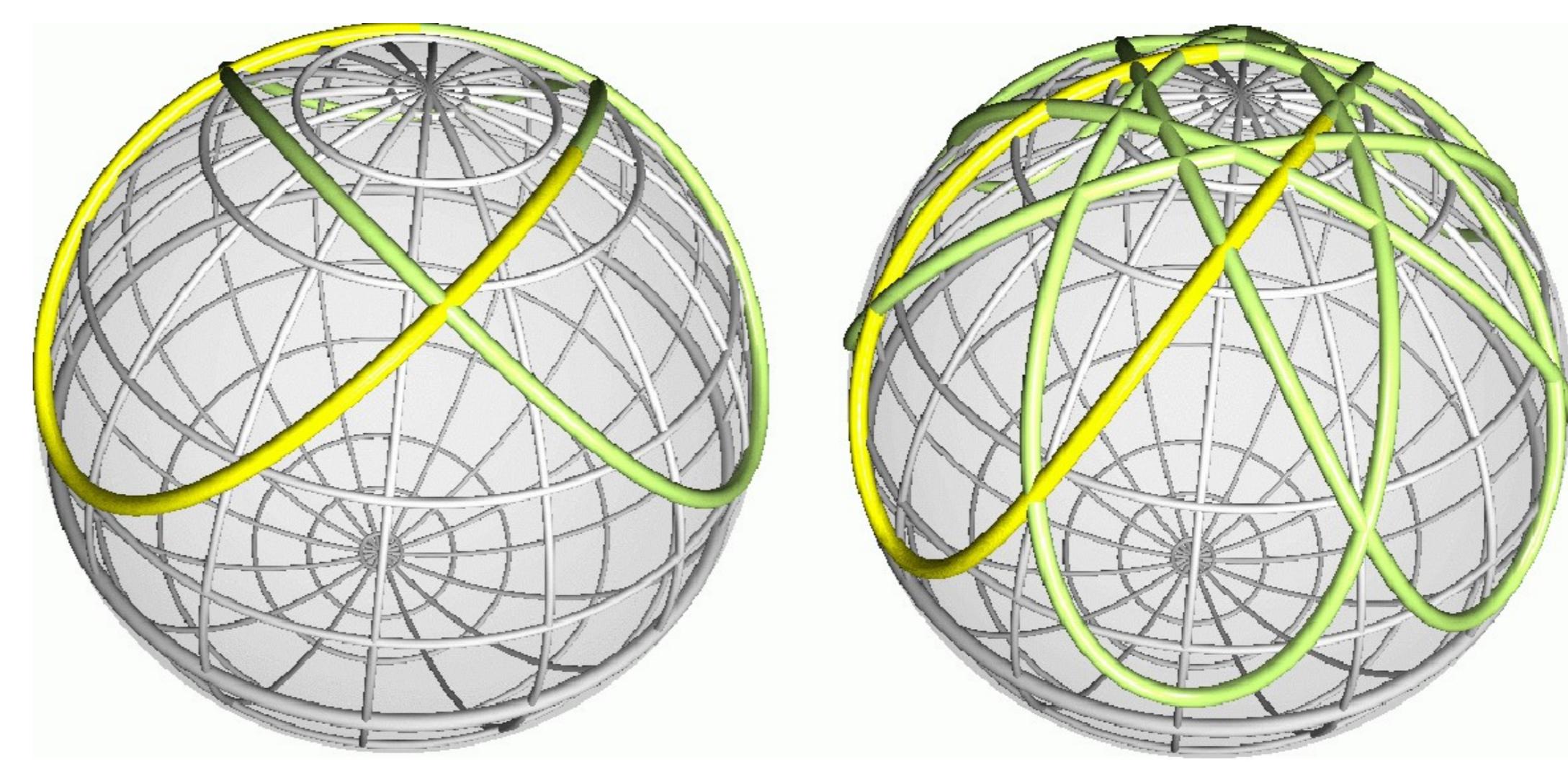


Figura: Curvas Críticas Cerradas para $H = 0$, [2].

En la figura anterior se pueden ver dos curvas críticas cerradas para el funcional Θ_o , (1), donde hemos dibujado en color amarillo la traza de la curva a lo largo de un periodo de la curvatura. Es fácil ver que como la curvatura es la misma en cada periodo, nuestras curvas críticas se construyen pegando adecuadamente copias congruentes de la parte amarilla. Por este motivo, en este caso, las curvas críticas no pueden ser simples. No obstante,

Teorema 6 Si $H \neq 0, \pm \sqrt{\frac{\rho}{3}}$, entonces existen curvas críticas de (1) cerradas y simples.

Corolario 7 Para cualquier valor de $H \in \left(\sqrt{\rho} \cot \frac{\pi}{m}, \sqrt{\rho} \frac{m^2 - 2}{2\sqrt{m^2 - 1}}\right)$, existen curvas críticas cerradas y simples para el funcional de Blaschke generalizado, (1).

Este Corolario verifica el resultado introducido por Perdomo en [6] sobre la existencia de superficies de revolución compactas embebidas en $\mathbb{S}^3(\rho)$.

4. Clasificación y Aplicaciones

La construcción de superficies de revolución de CMC mediante la evolución binormal de curvas críticas de (1), [3], nos permite hallar la siguiente clasificación

Teorema 8 Sea S un toro de CMC embebido en $\mathbb{S}^3(\rho)$. Entonces, S es congruente a una de los siguientes superficies,

1. Un **toro de Hopf** (superficie isoparamétrica y llana) de la forma

$$\mathbb{S}^1 \left(\sqrt{\rho + \kappa^2} \right) \times \mathbb{S}^1 \left(\frac{\sqrt{\rho}}{\kappa} \sqrt{\rho + \kappa^2} \right), \quad (3)$$

con $\kappa = -H + \sqrt{H^2 + \rho}$.

2. **Superficie de evolución binormal no isoparamétrica** generada por una curva perfil con curvatura $\kappa_d(s)$, (2), para algún valor $d > \frac{H + \sqrt{H^2 + \rho}}{2}$ que verifique la condición de cierre y de simplicidad (Proposición 4).

Como consecuencia de esta clasificación se verifican los siguientes resultados,

- **Conjetura de Lawson**, [5]. Sea S un toro minimal ($H = 0$) embebido en $\mathbb{S}^3(\rho)$, entonces S es congruente al **toro de Clifford**, (3) con $H = 0$.
- **Teorema de Ripoll**, [8]. Existe una superficie de revolución embebida en $\mathbb{S}^3(\rho)$ no isoparamétrica con CMC (dada por el punto 2 del Teorema 8) para $H \neq 0, \pm \sqrt{\frac{\rho}{3}}$.

5. Agradecimientos

Investigación subvencionada por la ayuda del MINECO-FEDER, MTM2014-54804-P y la del Gobierno Vasco IT1094-16. El autor también agradece al Programa Predoctoral de Formación de Personal Investigador No Doctor del Gobierno Vasco su apoyo.

Referencias

- [1] B. Andrews y H. Li, Embedded Constant Mean Curvature Tori in the Three-Sphere, *J. Diff. Geom.*, vol. 99 (2015).
- [2] J. Arroyo, Presión Calibrada Total: Estudio Variacional y Aplicaciones al Problema de Willmore-Chen, PhD Thesis UPV/EHU (2001).
- [3] J. Arroyo, O. J. Garay y A. Pámpano, Constant Mean Curvature Invariant Surfaces and Extremals of Curvature Energies, preprint.
- [4] S. Brendle, Embedded Minimal Tori in S^3 and the Lawson Conjecture, *Acta Math.*, vol. 211 (2013).
- [5] H. B. Lawson, The Unknottedness of Minimal Embeddings, *Invent. Math.*, vol. 11 (1970).
- [6] O. M. Perdomo, Rotational Surfaces in S^3 with Constant Mean Curvature, *J. Geom. Anal.*, vol. 26 (2016).
- [7] U. Pinkall y I. Sterling, On the Classification of Constant Mean Curvature Tori, *Ann. of Math.*, vol. 130 (1989).
- [8] J. B. Ripoll, Superficies Invariantes de Curvatura Media Constante, PhD Thesis IMPA (1986).