

# Solucionário Curso de Física Básica III

GABRIEL O. ALVES

CONTATO: [ALVES.GO.CO \[ARROBA\] GMAIL.COM](mailto:ALVES.GO.CO@GMAIL.COM)

2017

# Conteúdo

<b>2</b>	<b>Capítulo 2</b>	<b>6</b>
2.1	Questão 1 . . . . .	6
2.2	Questão 2 . . . . .	6
2.3	Questão 3 . . . . .	7
2.4	Questão 4 . . . . .	7
2.5	Questão 5 . . . . .	8
2.6	Questão 6 . . . . .	8
2.7	Questão 7 . . . . .	9
2.8	Questão 8 . . . . .	10
2.9	Questão 9 . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Capítulo 3</b>	<b>12</b>
3.1	Questão 1 . . . . .	12
3.2	Questão 2 . . . . .	12
3.3	Questão 3 . . . . .	13
3.4	Questão 4 . . . . .	13
3.5	Questão 5 . . . . .	13
3.6	Questão 6 . . . . .	15
3.7	Questão 7 . . . . .	16
3.8	Questão 8 . . . . .	16
3.9	Questão 9 . . . . .	17
3.10	Questão 10 . . . . .	18
3.11	Questão 11 . . . . .	18
3.12	Questão 12 . . . . .	19
3.13	Questão 13 . . . . .	19
3.14	Questão 14 . . . . .	21
3.15	Questão 15 . . . . .	21
3.16	Questão 16 . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Capítulo 4</b>	<b>24</b>
4.1	Questão 1 . . . . .	24
4.2	Questão 2 . . . . .	25
4.3	Questão 3 . . . . .	27
4.4	Questão 4 . . . . .	27
4.5	Questão 5 . . . . .	28
4.6	Questão 6 . . . . .	30
4.7	Questão 7 . . . . .	30

4.8	Questão 8 . . . . .	30
4.9	Questão 9 . . . . .	31
4.10	Questão 10 . . . . .	32
4.11	Questão 11 . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Capítulo 5</b>	<b>34</b>
5.1	Questão 1 . . . . .	34
5.2	Questão 2 . . . . .	34
5.3	Questão 3 . . . . .	35
5.4	Questão 4 . . . . .	37
5.5	Questão 5 . . . . .	39
5.6	Questão 6 . . . . .	41
5.7	Questão 7 . . . . .	42
5.8	Questão 8 . . . . .	42
5.9	Questão 9 . . . . .	44
5.10	Questão 10 . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Capítulo 6</b>	<b>45</b>
6.1	Questão 1 . . . . .	45
6.2	Questão 2 . . . . .	46
6.3	Questão 3 . . . . .	46
6.4	Questão 4 . . . . .	47
6.5	Questão 5 . . . . .	47
6.6	Questão 6 . . . . .	47
6.7	Questão 7 . . . . .	47
6.8	Questão 8 . . . . .	48
6.9	Questão 9 . . . . .	48
6.10	Questão 10 . . . . .	49
<b>7</b>	<b>Capítulo 7</b>	<b>50</b>
7.1	Questão 1 . . . . .	50
7.2	Questão 2 . . . . .	50
7.3	Questão 3 . . . . .	50
7.4	Questão 4 . . . . .	50
7.5	Questão 5 . . . . .	51
<b>8</b>	<b>Capítulo 8</b>	<b>52</b>
8.1	Questão 1 . . . . .	52
8.2	Questão 2 . . . . .	52
8.3	Questão 3 . . . . .	54
8.4	Questão 4 . . . . .	54

8.5	Questão 5 - Ver . . . . .	54
8.6	Questão 6 . . . . .	55
8.7	Questão 7 . . . . .	55
8.8	Questão 8 . . . . .	56
8.9	Questão 9 . . . . .	56
8.10	Questão 10 . . . . .	59
8.11	Questão 11 . . . . .	61
<b>9</b>	<b>Capítulo 9</b>	<b>62</b>
9.1	Questão 1 . . . . .	62
9.2	Questão 2 . . . . .	62
9.3	Questão 3 . . . . .	63
9.4	Questão 4 . . . . .	63
9.5	Questão 5 . . . . .	63
9.6	Questão 6 . . . . .	63
9.7	Questão 7 . . . . .	64
9.8	Questão 8 . . . . .	67
9.9	Questão 9 . . . . .	68
9.10	Questão 10 . . . . .	70
9.11	Questão 11 . . . . .	70
9.12	Questão 12 . . . . .	70
<b>10</b>	<b>Capítulo 10</b>	<b>71</b>
10.1	Questão 1 . . . . .	71
10.2	Questão 2 . . . . .	72
10.3	Questão 3 . . . . .	72
10.4	Questão 4 . . . . .	72
10.5	Questão 5 . . . . .	74
10.6	Questão 6 . . . . .	74
10.7	Questão 7 . . . . .	75
10.8	Questão 8 . . . . .	76
10.9	Questão 9 . . . . .	77
10.10	Questão 10 . . . . .	77
10.11	Questão 11 . . . . .	77
10.12	Questão 12 . . . . .	77
10.13	Questão 13 . . . . .	78
<b>11</b>	<b>Capítulo 11</b>	<b>79</b>
11.1	Questão 1 . . . . .	79
11.2	Questão 2 . . . . .	79
11.3	Questão 3 . . . . .	79

11.4	Questão 4 . . . . .	80
11.5	Questão 5 . . . . .	81
11.6	Questão 6 . . . . .	81
11.7	Questão 7 . . . . .	83
11.8	Questão 8 . . . . .	83
<b>12</b>	<b>Capítulo 12</b>	<b>86</b>
12.1	Questão 1 . . . . .	86
12.2	Questão 2 . . . . .	86
12.3	Questão 3 . . . . .	87
12.4	Questão 4 . . . . .	88
12.5	Questão 5 . . . . .	88

## 2 Capítulo 2

### 2.1 Questão 1

Se o próton e o elétron estão a uma distância  $r$ , a razão entre as força elétrica e gravitacional é:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}}{\frac{GMm}{r^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{GMm}$$

Tomando a carga do elétron e do próton como  $e = 1.6 \times 10^{-19}C$ , a constante gravitacional como  $G = 6.6 \times 10^{-11}m^3kg^{-1}s^{-2}$  e as massas do próton e do elétron como  $M = 1.67 \times 10^{-27}kg$  e  $m = 9.11 \times 10^{-31}kg$ , respectivamente, a razão encontrada é:

$$\frac{F_e}{F_g} = 9 \times 10^9 \times \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{6.6 \times 10^{-11} \times 1.67 \times 10^{-27} \times 9.11 \times 10^{-31}}$$

$$\boxed{\frac{F_e}{F_g} = 2.3 \times 10^{39}}$$

### 2.2 Questão 2

a) Nas condições NTP temos que  $P = 1atm$  e  $T = 273K$ , logo podemos encontrar o número de mols de  $H_2$  contido em  $1l$  por meio da equação de Clapeyron:

$$PN = nRT \implies n = \frac{PV}{RT} = \frac{1 \times 1}{0.082 \times 273} \approx 0.45mol$$

Onde usamos  $R \approx 0.082 \frac{atm L}{mol K}$ , pois a pressão é dada em  $atm$  e o volume em litros. Como cada molécula de  $H_2$  contém 2 prótons, a carga positiva total vale,

$$\boxed{Q = (2n)e = (2 \times 0.45 \times 6 \times 10^{23}) \times (1.6 \times 10^{-19}) \approx 8.6 \times 10^3 C}$$

b) A força de atração é obtida através da Lei de Coulomb:

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{(8.6 \times 10^3)^2}{1^2} = 6.65 \times 10^{17} N$$

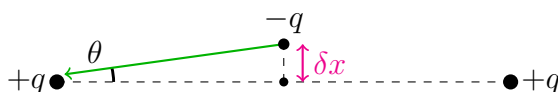
Como  $1kgf \approx 9.81N$ , obtemos após a conversão:

$$\boxed{F = -6.8 \times 10^{16} kgf}$$

**2.3 Questão 3****2.4 Questão 4**

Se a carga se desloca perpendicularmente à uma distância  $\delta x \ll d$ , sendo  $d$  a distância da carga positiva até o centro do segmento, a força que atua sobre ela vale:

$$F = -2 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \theta}{(d^2 + \delta x^2)}$$



**Figura 1:** Deslocamento perpendicular ao segmento

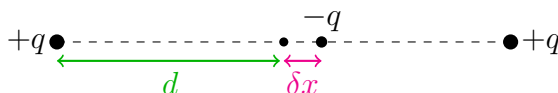
Calculamos sua componente vertical pois as componentes horizontais se anulam, devido ao fato das cargas  $+q$  se encontrarem horizontalmente opostas. Além disso, veja que  $d^2 + \delta x^2 \approx d^2$ , pois  $d \gg \delta x$  e que  $\sin \theta = \delta x/d$ . Portanto:

$$F = -2 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^3} \delta x$$

Se  $\delta x > 0$ , então  $F < 0$ . A força elétrica atuará como força restauradora, a carga negativa retornará à posição inicial mesmo sofrendo pequenas perturbações na posição.

Agora, consideraremos o caso em que o deslocamento ocorre ao longo do segmento. A força resultante sob a carga negativa é:

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\frac{q^2}{(d + \delta x)^2}}_{\text{Carga esquerda}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\frac{q^2}{(d - \delta x)^2}}_{\text{Carga direita}} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} [(d - \delta x)^{-2} - (d + \delta x)^{-2}] \quad (2.4.1)$$



**Figura 2:** Deslocamento ao longo do segmento

Agora, veja que,

$$\frac{1}{(d^2 + \delta x)^2} = \frac{1}{d^2(1 + \frac{\delta x}{d^2})^2}$$

Assim, podemos utilizar a aproximação  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ , pois  $\delta x \ll d$ , e a (2.4.1) fica:

$$F = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left( \frac{1}{d^2} \left( 1 - 2\frac{\delta x}{d} \right) \right) - \frac{1}{d^2} \left( 1 - 2\frac{\delta x}{d} \right) \right]$$

Simplificando:

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^3} \delta x$$

Portanto, se  $\delta x > 0$ , e teríamos  $F > 0$ . o que implica que a força não é restauradora. A partícula é atraída pela carga à direita com mais intensidade, e não retorna à posição inicial, portanto o equilíbrio é instável.

### 2.5 Questão 5

---

Considerando que a distribuição encontra-se em equilíbrio, equacionamos as forças em uma das partículas. Pelo equilíbrio na direção vertical, temos que a componente da tração na direção que une as duas partículas é  $mg \tan \theta$ . Pela geometria do problema, calculamos a distância entre as partículas sendo  $2l \sin \theta$ . Igualando a força elétrica com a componente da tração nesse sentido, temos:

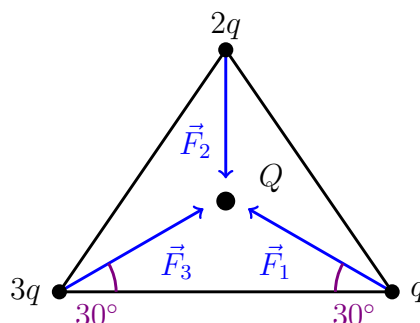
$$mg \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2l \sin \theta)^2}$$

Rearranjando, encontramos:

$$q^2 \cos \theta = 16\pi\epsilon_0 l^2 mg \sin^3 \theta$$

### 2.6 Questão 6

---

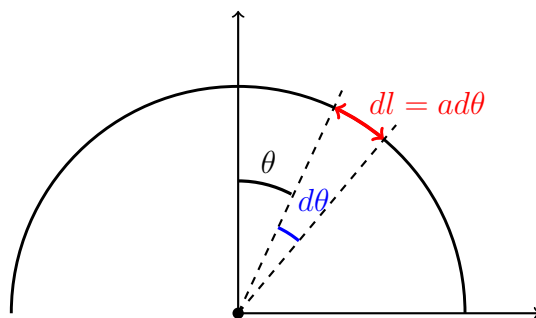




**2.7** Questão 7

Considere uma porção infinitesimal do fio semicircular, com carga  $dQ$ . O módulo da força que atua sobre a carga é:

$$dF = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{a^2}$$

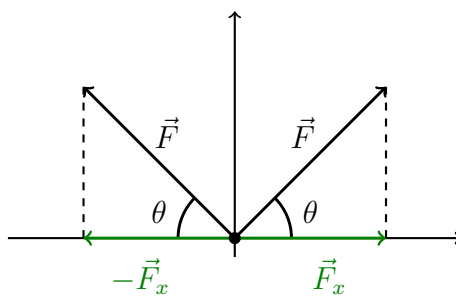


**Figura 3:** Aro semicircular, dividido em arcos compreendidos por um ângulo  $d\theta$ .

A carga da porção infinitesimal vale  $dQ = \lambda dl$ , onde  $\lambda$  representa a densidade linear de carga do fio e  $dl = a d\theta$ . Por conseguinte:

$$dF = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a\lambda d\theta}{a^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a} d\theta$$

Agora, veja que por simetria a componente horizontal da força resultante é nula:



**Figura 4:** Vetores  $\vec{F}$  da força de atração devido às duas porções horizontalmente opostas do aro circular. Veja que as componentes horizontais se cancelam.

Deste modo, a força resultante corresponde somente à soma das componentes horizontais de  $dF$ :

$$dF_R = dF \cos \theta \implies F_R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta$$

Como a densidade linear de carga corresponde à razão entre a carga total do anel e seu comprimento total do anel, temos que  $\lambda = Q/(\pi a)$ . Já a integral, por sua vez, é  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \sin(\pi/2) - \sin(-\pi/2) = 2$ . A força que atua na carga  $-q$  vale,

$$F_R = \frac{qQ}{2\pi^2\epsilon_0 a^2}$$

---

**2.8**    **Questão 8**

Vamos adotar as coordenadas sugeridas no exercício. Por simetria, as componentes do vetor campo elétrico paralelas ao fio infinito irão se cancelar, assim, calculamos apenas a componente perpendicular ao eixo do fio, que apontam radialmente para fora. Considerando um elemento de comprimento  $dz$  localizado à uma distância  $z$  da origem, por trigonometria, calculamos o elemento  $dE$  do campo elétrico:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos \theta = \frac{\lambda \rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Como o fio é muito longo (infinito),  $z$  varia de  $-\infty$  até  $+\infty$ . Assim:

$$E = \frac{\lambda \rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho}$$

Assim, a força que será exercida numa carga puntiforme  $q$ , apontando na direção radial para fora, terá módulo

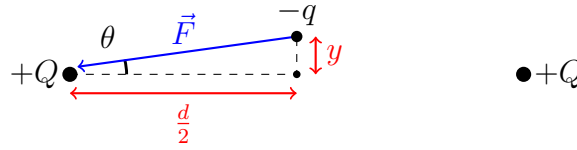
$$E = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho}$$

---

**2.9**    **Questão 9**

Claramente as componentes horizontais da força de atração se anulam, e resta somente a componente vertical, que vale:

$$F = -2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \sin \theta$$



Mas  $r = \sqrt{y^2 + \frac{d^2}{4}} \approx d/2$ , pois o termo  $y$  é desprezível em relação a  $d$ . E também vale que  $\sin \theta = y/(d/2) = 2y/d$ . Portanto:

$$F = -2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{\frac{d^2}{4}} \frac{2y}{d} = -\frac{4qQ}{\pi\epsilon_0 d^3} y$$

Escrevendo a equação do movimento para a partícula, obtemos:

$$m\ddot{y} = F \implies \ddot{y} + \frac{4qQ}{\pi\epsilon_0 m d^3} y = 0$$

E finalmente, identificamos:

$$\boxed{\omega = 2\sqrt{\frac{qQ}{\pi\epsilon_0 m d^3}}}$$

## 3 Capítulo 3

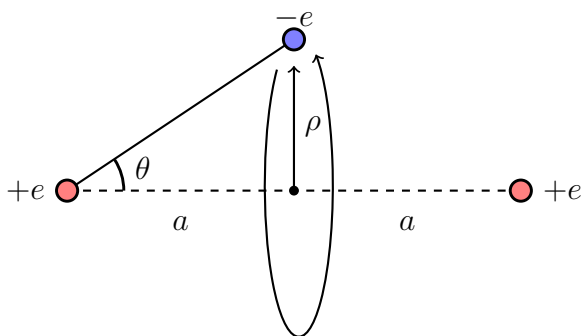
### 3.1 Questão 1

### 3.2 Questão 2

Por simetria, somente a componente vertical do campo elétrico das partículas contribui com o campo resultante, portanto:

$$\mathbf{E}_r = 2E \sin \theta \hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^2} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Veja que a direção do eixo é perpendicular ao eixo que liga as duas partículas de carga  $+e$ .



**Figura 5:** Modelo da molécula ionizada. A carga  $-e$  descreve uma órbita circular de raio  $\rho$ .

Agora, consulte a figura e perceba que  $r = \sqrt{a^2 + \rho^2}$  e  $\sin \theta = \rho/r = \rho/\sqrt{a^2 + \rho^2}$ , portanto:

$$\mathbf{E}_r = \frac{e}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

b) A força de atração elétrica deve corresponder à força centrípeta (Considere o movimento circular em torno do eixo que liga as cargas positivas),

$$F_e = F_{cp} \implies eE_r = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = m\omega^2\rho$$

Assim, segue que:

$$\omega^2 = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 m (\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

**3.3 Questão 3****3.4 Questão 4**

a) A contribuição para o campo elétrico de um comprimento infinitesimal  $dx$  do fio é:

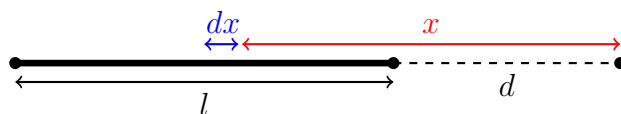
$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{x^2} \hat{\mathbf{x}} = \frac{\lambda}{4\pi r^2} \frac{dx}{x^2} \hat{\mathbf{x}}$$

Como o fio se estende de  $x = d$  até  $x = d + l$ , o campo elétrico total é:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{l+d} + \frac{1}{d} \right)$$

Simplificando:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda l}{4\pi\epsilon_0 d(l+d)} \hat{\mathbf{x}}$$



b) A densidade linear de carga do fio é  $\lambda = 6 \times 10^{-6} / 5 \times 10^{-2} = 6 \times 10^{-5} \text{ C/m}$ . Substituindo na expressão encontrada para o campo elétrico (Lembre-se de escrever todas as grandezas nas unidades apropriadas):

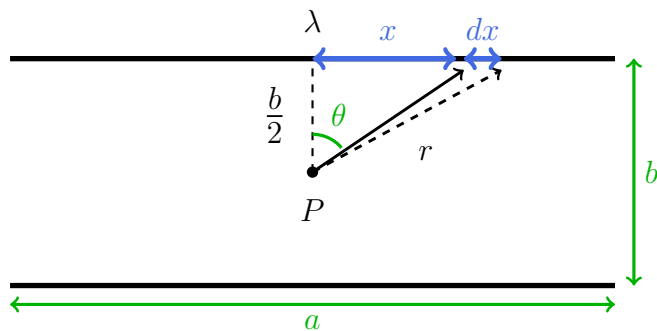
$$E = 9 \times 10^9 \frac{6 \times 10^{-5} \times 5 \times 10^{-2}}{5 \times 10^{-2} \times (5 + 5) \times 10^{-2}} = 5.4 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

**3.5 Questão 5**

Por simetria, as componentes horizontais do campo elétrico se cancelam, portanto a contribuição provém somente das componentes verticais. Assim, o campo elétrico no ponto  $P$  devido à uma porção de comprimento  $dx$  do fio vale:

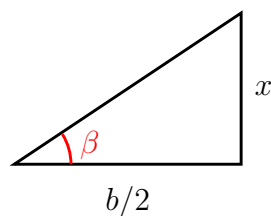
$$d\mathbf{E} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{dx}{r^2} \cos \theta \hat{\mathbf{y}}$$

Mas  $r^2 = (b/2)^2 + x^2$  e  $\cos \theta = b/(2x)$ , portanto:



$$\mathbf{E} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(\frac{b^2}{4} + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \hat{\mathbf{y}}$$

A integral acima pode ser resolvida através de uma substituição trigonométrica. Montando o triângulo:



Temos que  $x = \left(\frac{b}{2}\right) \tan \beta$ , e por conseguinte:

$$\frac{1}{\left(\frac{b^2}{4} + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\left[\frac{b^2}{4} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \tan^2 \beta\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{b^3} \frac{1}{\sec^3 \beta}$$

Pois  $\tan^2 \beta + 1 = \sec^2 \beta$ . Além disso, veja que:

$$x = \frac{b}{2} \tan \beta \implies dx = \frac{b}{2} \sec^2 \beta d\beta$$

Assim, a integral pode ser reescrita como:

$$\int \frac{dx}{\left(\frac{b^2}{4} + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{8}{b^3}\right) \left(\frac{b}{2}\right) \int \frac{\sec^2 \beta}{\sec^3 \beta} d\beta = \frac{4}{b^2} \int \cos \beta d\beta = \sin \beta + C$$

Mas,

$$\sin \beta = \frac{x}{\sqrt{\frac{b^2}{4} + x^2}}$$

Portanto, a integral na expressão do campo elétrico fica, após integrarmos de  $x = -a/2$  até  $x = a/2$ :

$$\int_{-a/2}^{a/2} \frac{dx}{\left(\frac{b^2}{4} + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4x}{b^2 \sqrt{\frac{b^2}{4} + x^2}} \Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{8a}{b^2 \sqrt{a^2 + b^2}}$$

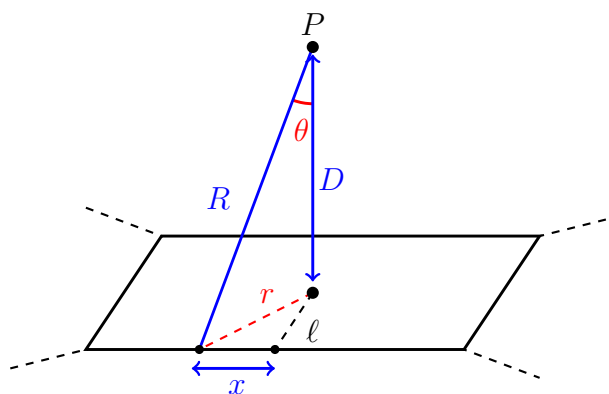
Substituindo na expressão para o campo elétrico:

$$\mathbf{E} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(\frac{b^2}{4} + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b}{2}\right) \frac{8a}{b^2 \sqrt{a^2 + b^2}} \hat{\mathbf{y}} = -\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{a}{b \sqrt{a^2 + b^2}} \hat{\mathbf{y}}$$

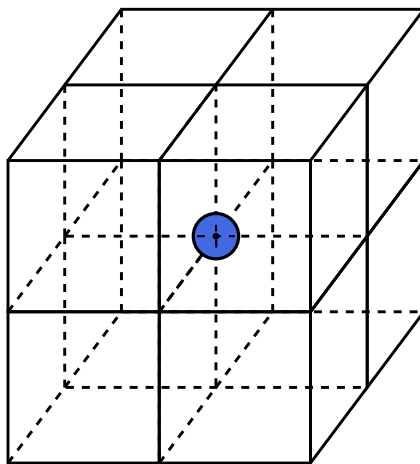
Além disso, o campo elétrico no ponto  $P$  devido ao fio interior é  $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$ , portanto, por superposição, o campo elétrico resultante é:

$$\mathbf{E}_r = -\frac{2\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{a}{b \sqrt{a^2 + b^2}} \hat{\mathbf{y}}$$

### 3.6 Questão 6



### 3.7 Questão 7

**3.8** Questão 8

---

Pela lei de Gauss consideraremos que o campo elétrico na superfície vale:

$$E_0 = \frac{Q_0}{4\pi R^2 \epsilon_0}$$

Onde  $R$  representa o raio da Terra. Num ponto à uma altura  $R$  em relação à superfície:

$$E \approx \frac{Q}{4\pi R^2 \epsilon_0}$$

Aqui utilizamos que  $(R + h)^2 \approx R^2$ , pois  $h$  é desprezível em relação à  $R$ . Subtraindo a primeira equação da segunda obtemos:

$$E - E_0 = \Delta E = \frac{1}{4\pi R^2 \epsilon_0} (Q - Q_0)$$

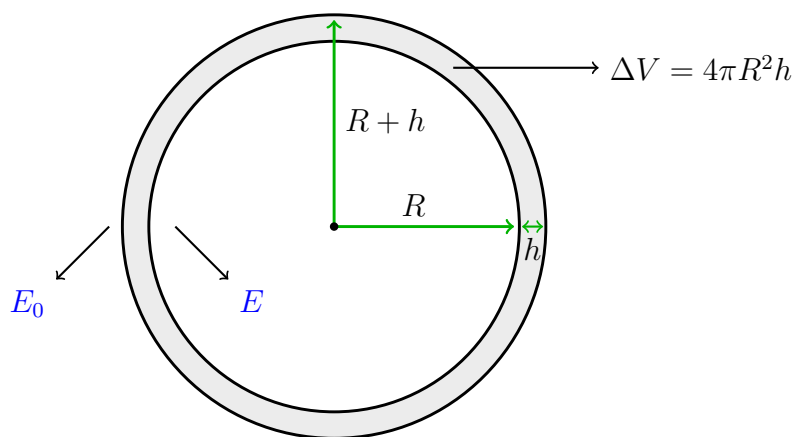
Se  $\rho$  é a densidade média de carga, então:

$$Q_0 = \frac{4\pi R^3}{3}$$

e,

$$Q = \frac{4\pi(R + h)^3}{3} = \frac{4\pi(R^3 + 3R^2h + 3Rh^2 + h^3)}{3} \approx \frac{4\pi R^2(R + 3h)}{3}$$





A expressão para a diferença da intensidade do campo elétrico fica:

$$\Delta E = \frac{\rho}{4\pi R^2 \varepsilon_0} \left( \frac{4\pi R^3}{3} - \frac{4\pi R^2(R+3h)}{3} \right)$$

Simplificando a expressão e isolando  $\rho$ , obtemos:

$$\rho = \frac{\Delta E \varepsilon_0}{h}$$

Como  $\Delta E = 300 - 20 = 280 \text{ N/C}$ ,  $h = 1400 \text{ m}$  e  $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2)$ , a densidade média de carga vale,

$$\rho = \frac{280}{1400 \times 9 \times 9 \times 10^9 \times 4\pi} \approx 1.8 \times 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$$

### 3.9 Questão 9

Como desenvolvido no texto usando a Lei de Gauss, temos que, no caso de uma densidade superficial positiva  $\sigma > 0$  do plano uniformemente carregado, o campo elétrico tem módulo  $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$  apontando para "fora" do plano. Assim, no caso da densidade superficial negativa  $-\sigma$ , o campo terá o mesmo módulo e apontará na direção do plano.

Dessa forma, na região entre os planos, os campos elétricos terão o mesmo sentido, com direção ao plano de carga negativa, e módulo total  $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$  (ou seja,  $-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ , onde o sinal negativo indica que o campo aponta para baixo, onde localiza-se o plano negativamente carregado). Pelo mesmo argumento, fora da região entre os planos, os campos irão se cancelar.

**3.10**    **Questão 10**

---

a) Pela Lei de Gauss, o campo elétrico no interior da esfera à uma distância  $r$  de seu centro é:

$$E = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Mas  $Q = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho$ , logo:

$$\mathbf{E} = E \hat{\mathbf{r}} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \hat{\mathbf{r}}$$

b) Se o elétron está a uma distância  $r = a$  do centro, a força de atração é (Tomando  $Q = e$ ):

$$F = eE = \frac{e^2}{4\pi a^2}$$

Igualando à força centrípeta:

$$F = eE \implies m_e a \omega^2 = \frac{e^2}{4\pi a^2}$$

Isolando  $\omega$ :

$$\omega = \frac{e}{(4\pi\varepsilon_0 m_e a^3)^{1/2}}$$

**3.11**    **Questão 11**

---

Escrevendo o vetor constante como  $\mathbf{c} = c_x \hat{\mathbf{x}} + c_y \hat{\mathbf{y}} + c_z \hat{\mathbf{z}}$  e o vetor  $\mathbf{r}$  como  $\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}$ , seu produto vetorial pode ser encontrado a partir do determinante:

$$\mathbf{c} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ c_x & c_y & c_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (yc_z - zc_y) \hat{\mathbf{x}} + (zc_x - xc_z) \hat{\mathbf{y}} + (xc_y - yc_x) \hat{\mathbf{z}}$$

O divergente é calculado como.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{c} \times \mathbf{r}) &= \nabla \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = \frac{\partial(\mathbf{c} \times \mathbf{r})_x}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{c} \times \mathbf{r})_y}{\partial y} + \frac{\partial(\mathbf{c} \times \mathbf{r})_z}{\partial z} \\ \operatorname{div}(\mathbf{c} \times \mathbf{r}) &= \frac{\partial(yc_z - zc_y)}{\partial x} + \frac{\partial(zc_x - xc_z)}{\partial y} + \frac{\partial(xc_y - yc_x)}{\partial z} \end{aligned}$$

Claramente todas as derivadas parciais se anulam, portanto:

$$\boxed{\operatorname{div}(\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = 0}$$

### 3.12 Questão 12

Vamos aqui aplicar a Lei de Gauss nas superfícies esféricas de raio  $r$  concêntricas à casca esférica de raio interno  $b$  e externo  $c$  (e portanto, concêntrica à esférica de raio  $a$ ). Por simetria, sabemos que o campo elétrico deve ser radial e esfericamente simétrico, assim, o fluxo nas superfícies descritas pode ser facilmente calculado por  $\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = E(4\pi r^2) = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon_0}$

Assim, na região  $0 \leq r \leq a$ , temos:

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{4\pi}{3} r^3 \implies \mathbf{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \hat{\mathbf{r}}$$

Analogamente, para a região  $a \leq r \leq b$ :

$$E(4\pi r^2) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{4\pi}{3} a^3 \implies \mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{a^3}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Em  $b \leq r \leq c$ :

$$E(4\pi r^2) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{4\pi}{3} (a^3 + r^3 - b^3) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{4\pi}{3} r^3 - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{4\pi}{3} (b^3 - a^3)$$

Dessa forma:

$$\mathbf{E} = \left( \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{(b^3 - a^3)}{r^2} \right) \hat{\mathbf{r}}$$

**Sugestão:** pense numa distribuição de carga que gera o mesmo vetor campo elétrico numa certa região do espaço.

Finalmente, para  $r \geq c$ :

$$E(4\pi r^2) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{4\pi}{3} (a^3 + c^3 - b^3) \implies \mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{(a^3 + c^3 - b^3)}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

### 3.13 Questão 13

a) O volume de uma casca esférica infinitesimal de espessura  $dr$  que dista  $r$  da origem é  $dV = 4\pi r^2 dr$ . Logo, podemos calcular a carga total da distribuição através de:

$$dQ = \rho dV \implies Q = 4\pi \int \rho r^2 dr$$

Como  $\rho = \rho_0 e^{-\frac{r}{a}}$ , temos:

$$Q = 4\pi\rho_0 \int r^2 e^{-\frac{r}{a}} dr \quad (3.13.1)$$

Com  $a$  constante. A integral acima pode ser resolvida após utilizarmos integração por partes duas vezes. Podemos escolher,

$$\begin{aligned} f(x) = r^2 &\implies f'(x) = 2r \\ g'(x) = e^{-\frac{r}{a}} &\implies g(x) = -ae^{-\frac{r}{a}} \end{aligned}$$

Pois como,

$$\int f(x)g'(x) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

A integral fica:

$$\int r^2 e^{-\frac{r}{a}} dr = -ae^{-\frac{r}{a}}r^2 + 2a \int re^{-\frac{r}{a}} dr \quad (3.13.2)$$

Podemos utilizar integração por partes novamente para resolver a segunda integral:

$$\begin{aligned} f(x) = r &\implies f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^{-\frac{r}{a}} &\implies g(x) = -ae^{-\frac{r}{a}} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\int re^{-\frac{r}{a}} dr = -ae^{-\frac{r}{a}}r + a \int e^{-\frac{r}{a}} dr = -ae^{-\frac{r}{a}}r - a^2 e^{-\frac{r}{a}} \quad (3.13.3)$$

Substituindo a (3.13.3) na (3.13.2) obtemos:

$$\begin{aligned} \int r^2 e^{-\frac{r}{a}} dr &= -ae^{-\frac{r}{a}}r^2 - a^2 e^{-\frac{r}{a}}r - a^3 e^{-\frac{r}{a}} \\ \int r^2 e^{-\frac{r}{a}} dr &= -ae^{-\frac{r}{a}}r^2(r^2 + 2ar + 2a^2) \end{aligned}$$

Como a distribuição de cargas se estende até o infinito, a carga total da distribuição vale:

$$Q = 4\pi\rho_0 \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r}{a}} dr = -4\pi a \left[ e^{-\frac{r}{a}} (r^2 + 2ar + 2a^2) \right] \Big|_0^\infty$$

Claramente todos os termos vão à zero quando  $r \rightarrow \infty$ , e quando  $r \rightarrow 0$  só resta o termo  $2a^2$ , portanto:

$$Q = 4\pi\rho_0 \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r}{a}} dr = 8\pi\rho_0 a^2$$

b) Pela Lei de Gauss:

$$E(R) = \frac{Q(R)}{4\pi R^2 \varepsilon_0} \quad (3.13.4)$$

Podemos encontrar a carga integrando a (3.13.1) de 0 até  $R$ , de maneira similar ao item anterior:

$$Q(R) = -4\pi a \left[ e^{-\frac{r}{a}} (r^2 + 2ar + 2a^2) \right] \Big|_0^R = 8\pi a^3 - 4\pi e^{-\frac{R}{a}} (R^2 a + 2a^2 R + 2a^3)$$

$$Q(R) = 8\pi a^3 \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{r^2}{a^2} + 2\frac{r}{a} + 2 \right) e^{-\frac{R}{a}} \right]$$

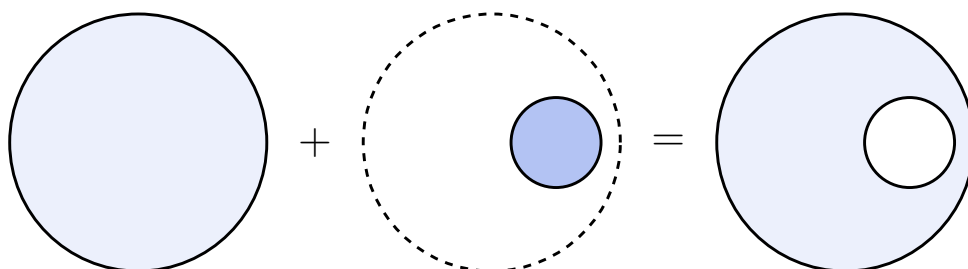
Substituindo na (3.13.4) finalmente obtemos:

$$E(r) = \frac{2\rho_0 a^3}{\varepsilon_0 R^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{r^2}{a^2} + 2\frac{r}{a} + 2 \right) e^{-\frac{R}{a}} \right]$$

### 3.14 Questão 14

### 3.15 Questão 15

Perceba que a esfera do enunciado é equivalente à um sistema constituído de uma esfera *sem cavidade* de mesmo raio e mesma densidade de carga  $\rho$ , **somada** à uma segunda esfera de densidade de carga  $-\rho$  que tem as mesmas dimensões da cavidade:



Através do princípio da superposição podemos encontrar o campo elétrico resultante na região da cavidade, basta calcular o campo elétrico das esferas de densidade  $\rho$  e  $-\rho$  separadamente e somá-los:

$$\mathbf{E}_{\text{Resultante}} = \mathbf{E}_{\text{Positivo}} + \mathbf{E}_{\text{Negativo}}$$

Como o ponto  $P$  se encontra em uma região interna à esfera de carga  $-\rho$ , o campo elétrico é dado, conforme visto em questões anteriores, por:

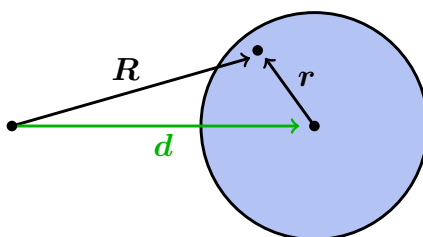
$$\mathbf{E}_{\text{Negativo}} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}$$

Onde  $\mathbf{r}$  representa a distância do centro da cavidade ao ponto  $P$ . Perceba que o ponto  $P$  também se encontra na região interna da esfera de carga positiva, o campo elétrico é obtido de maneira análoga:

$$\mathbf{E}_{\text{Positivo}} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{R}$$

Onde  $\mathbf{R}$  representa a distância do centro da esfera maior ao ponto  $P$ . Somando as duas expressões:

$$\mathbf{E}_{\text{Resultante}} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{R} - \mathbf{r})$$



Agora, perceba que ao analisar a figura acima podemos inferir que a diferença  $\mathbf{R} - \mathbf{r}$  corresponde ao vetor que liga o centro das esferas. Deste modo, o campo elétrico resultando é simplesmente,

$$\mathbf{E}_{\text{Resultante}} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{d}$$

---

**3.16**    **Questão 16**

a) Como o cilindro é infinitamente longo, a descrição não pode depender da altura do cilindro em que colocamos a origem. Assim, essa simetria implica que o campo elétrico não depende de  $z$ . Analogamente, rotacionando, a descrição deve

se manter, e dessa forma, o campo elétrico não depende de  $\phi$ . Assim, por simetria, o campo elétrico deve ser radial para fora, dependendo apenas de  $\rho$ , a distância ao eixo do cilindro.

b) Vamos aplicar a Lei de Gauss a uma superfície cilíndrica de raio  $\rho$  e comprimento  $l$  com eixo alinhado ao do cilindro. Dessa forma, pela simetria do campo elétrico, calcula-se o fluxo de maneira simples:  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 2\pi\rho l E$ . Temos assim:

$$2\pi\rho l E = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon_0} = \frac{\delta}{\varepsilon_0} \pi \rho^2 l \implies \mathbf{E} = \frac{\delta}{2\varepsilon_0} \rho \hat{\rho}$$

na região  $0 \leq \rho \leq R$ . É claro que para  $\rho \geq R$  temos:

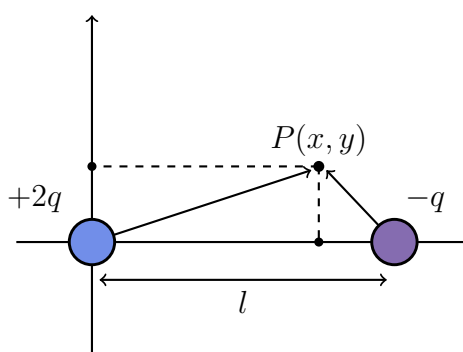
$$\mathbf{E} = \frac{\delta}{2\varepsilon_0} \frac{R^2}{\rho} \hat{\rho}$$

## 4 Capítulo 4

### 4.1 Questão 1

Tome a origem na posição da partícula de carga  $+2q$ . O potencial no ponto  $P$  devido a cada uma das partículas:

$$V_1 = \frac{2q}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad V_2 = -\frac{q}{\sqrt{(l-x)^2 + y^2}}$$



**Figura 6:** Representação do sistema no plano  $xy$ .

O potencial resultante corresponde à soma algébrica dos potenciais  $V_1$  e  $V_2$ , deste modo, a superfície equipotencial  $V_0$  é definida pelos pontos  $x$  e  $y$  que satisfazem:

$$V_1 + V_2 = \frac{2q}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{q}{\sqrt{(l-x)^2 + y^2}} = 0$$

Manipulando a equação acima, temos:

$$\frac{2q}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{q}{\sqrt{(l-x)^2 + y^2}} \implies 4[(l-x)^2 + y^2] = x^2 + y^2$$

$$4(l^2 - 2xl + x^2 + y^2) - x^2 - y^2 = 0$$

Expandindo e dividindo ambos os lados por três:

$$x^2 - \frac{8}{3}xl + \frac{4}{3}l^2 + y^2 = 0$$

Escrevendo de uma forma mais sugestiva:



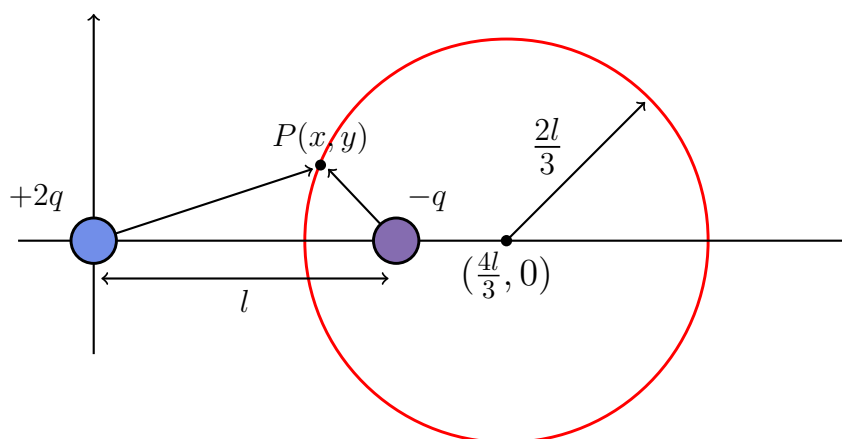
$$x^2 - 2 \cdot \frac{4}{3}xl + y^2 = -\frac{4}{3}l^2$$

Isso nos sugere que podemos transformar a expressão  $x^2 - 2 \cdot \frac{4}{3}xl$  em um termo da forma  $(x - a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ . Para fazer isto basta tomar  $a = \frac{4}{3}l$  e adicionar um termo  $(\frac{4}{3}l)^2 = \frac{16}{9}l^2$  em ambos os lados da equação, pois chegamos em:

$$x^2 - 2 \cdot \frac{4}{3}xl + \frac{16}{9}l^2 + y^2 = -\frac{4}{3}l^2 + \frac{16}{9}l^2$$

Agora, perceba que  $x^2 - 2 \cdot \frac{4}{3}xl + \frac{16}{9}l^2 = (x - \frac{4}{3}l)^2$ . Obtermos, ao reescrever a expressão anterior:

$$(x - \frac{4}{3}l)^2 + y^2 = \frac{4}{9}l^2$$



**Figura 7:** Superfície equipotencial

Como a equação de um círculo é da forma:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

A expressão para a superfície equipotencial corresponde à um círculo com centro  $(\frac{4}{3}l, 0)$  e raio  $r = \frac{2}{3}l$ .

## 4.2 Questão 2

Para uma distância  $r > R$  podemos considerar que toda a carga está concentrada na origem. Neste caso, o campo elétrico de um ponto que dista  $r'$  da origem é:

$$E(r') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2}$$

Tomando  $V(\infty) = 0$ , temos que o potencial vale:

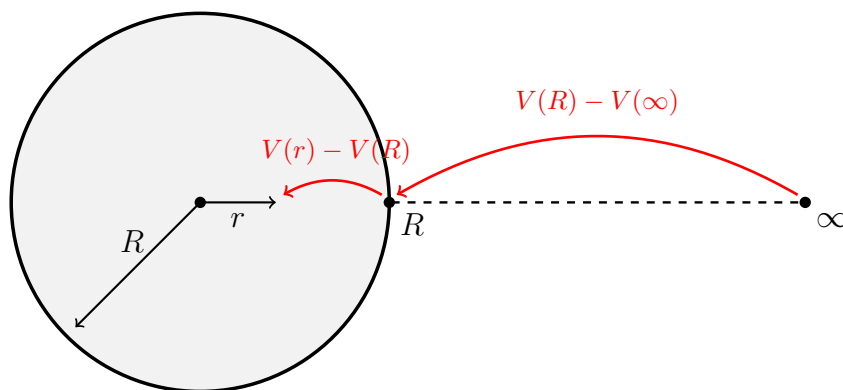
$$V(r) = - \int_{\infty}^r E(r') dr' = - \int_{\infty}^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r \geq R) \quad (4.2.1)$$

Já para um ponto no interior da esfera, o campo elétrico a uma distância  $r'$  é:

$$E(r') = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r'$$

Substituindo na expressão para o potencial:

$$V(r) - V(R) = - \int_R^r E(r') dr' = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_R^r r'^2 dr' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left( \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) \quad (4.2.2)$$



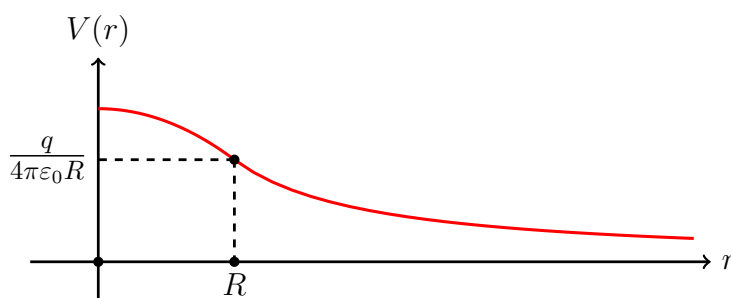
Mas podemos calcular  $V(R)$  a partir da (4.2.1) tomando  $r = R$  e substituir na (4.2.2), obtendo:

$$V(r) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left( \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right)$$

Simplificando:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left( \frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) \quad (0 \leq r \leq R)$$

O gráfico obtido a partir das duas equações é:



### 4.3 Questão 3

A energia  $U(\mathbf{r})$  da carga é dada por  $U(\mathbf{r}) = qV(\mathbf{r})$ , onde  $V(\mathbf{r})$  é o potencial ao qual ela está sujeita. No caso, esse potencial corresponde ao potencial de um campo elétrico uniforme, ou seja, o vetor  $\mathbf{E}$  é constante. Dessa forma, no cálculo do potencial podemos escolher um ponto arbitrário como referencial (o potencial é definido a menos de uma constante). Assim:

$$V(\mathbf{r}) = - \int_O^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E} \cdot \int_O^{\mathbf{r}} d\mathbf{l} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$$

Dessa forma, temos que:

$$V(\mathbf{r}) = -q\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$$

### 4.4 Questão 4

Vamos considerar um dipolo ideal, que tem dimensões desprezíveis, ou seja, caráter pontual.

a) A energia potencial da carga no campo do dipolo será simplesmente  $U(\mathbf{r}) = qV_{dip}(\mathbf{r})$ . Assim, temos:

$$U(\mathbf{r}) = q \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{qp}{4\pi\epsilon_0 z^2} = U(z)$$

b) A força que a carga exerce sobre o dipolo é o oposto da força que o dipolo irá exercer sobre a carga, ou seja:  $\mathbf{F}_{dip} = -\mathbf{F}_{carga}$ . Como sabemos a energia potencial da carga no campo do dipolo, temos que  $\mathbf{F}_{carga} = -\text{grad}U(\mathbf{r}) \implies \mathbf{F}_{dip} = \text{grad}U(\mathbf{r}) = \text{grad}U(z)$ . Assim:

$$\mathbf{F}_{dip} = \frac{dU}{dz} \hat{\mathbf{z}} = -\frac{qp}{2\pi\epsilon_0 z^3} \hat{\mathbf{z}}$$

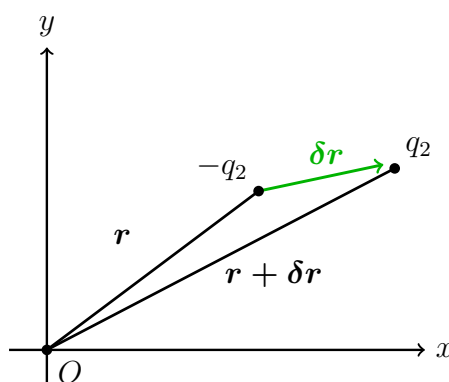
c)

## 4.5 Questão 5

a) Primeiramente tomaremos a origem na posição do dipolo  $\mathbf{p}_1$ . O vetor posição da carga  $-q_2$  é  $\mathbf{r}$ , e seu módulo é  $|\mathbf{r}|$ . Já para a carga  $q_2$  o vetor posição é  $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ , e seu módulo vale, desprezando o termo  $|\delta\mathbf{r}|^2$ :

$$|\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}| = \sqrt{|\mathbf{r}|^2 + 2|\mathbf{r}||\delta\mathbf{r}|\cos\theta} = |\mathbf{r}| \left(1 + \frac{|\delta\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|}\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}} \approx |\mathbf{r}| + |\delta\mathbf{r}|\cos\theta$$

Onde foi utilizada a aproximação  $(1+x)^n \approx 1+nx$ , pois  $x \ll 1$ .



A energia eletrostática de interação entre o dipolo e a carga  $-q_2$  é:

$$U_1 = -q_2 V(\mathbf{r}) = -\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

Já para a carga  $q_2$ :

$$U_2 = q_2 V(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) = -\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r})}{|\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}|^3}$$

Mas como  $|\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}| \approx |\mathbf{r}| + |\delta\mathbf{r}|\cos\theta$ ,

$$\frac{1}{|\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}|^3} = \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \left(1 + \frac{|\delta\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|}\cos\theta\right)^{-3} \approx \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \left(1 - 3\frac{|\delta\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|}\cos\theta\right)$$

Portanto:

$$U_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^3} (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r} + \mathbf{p}_1 \cdot \delta\mathbf{r}) \left(1 - 3\frac{|\delta\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|}\cos\theta\right)$$

Ignorando os termos de segunda ordem e fazendo a distributiva:

$$U_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}|^3} \left[ \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r} + \mathbf{p}_1 \cdot \delta\mathbf{r} - 3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}) \frac{|\delta\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|} \cos\theta \right]$$

A energia total vale, portanto:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}|^3} \left[ \mathbf{p}_1 \cdot \delta\mathbf{r} - 3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}) \frac{|\delta\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|} \cos\theta \right]$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}|^3} \left[ \mathbf{p}_1 \cdot (q_2\delta\mathbf{r}) - 3\mathbf{p}_1 \cdot \left( \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) (q_2|\delta\mathbf{r}| \cos\theta) \right]$$

Mas perceba que  $q_2\delta\mathbf{r} = \mathbf{p}_2$ , que  $\mathbf{r}/|\mathbf{r}| = \hat{\mathbf{r}}$  e que  $q_2|\delta\mathbf{r}| \cos\theta = \mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}$ , portanto a expressão anterior fica na forma desejada:

$$U = \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}|^3} - 3 \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}|^3}$$

b) Para o dipolo paralelo temos que  $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = p_1 p_2 \cos 0 = p_1 p_2$ ,  $\mathbf{p}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}} = 1$  e  $\mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}} = 1$ , portanto:

$$U = -2 \frac{p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0|\mathbf{r}|^3}$$

Já para o dipolo antiparalelo temos que  $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = p_1 p_2 \cos 180 = -p_1 p_2$ ,  $\mathbf{p}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}} = -1$  e  $\mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}} = 1$ , portanto:

$$U = 2 \frac{p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0|\mathbf{r}|^3}$$

Se os dipolos são perpendiculares à  $\mathbf{r}$ , então  $\mathbf{p}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0$  e  $\mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0$ . Se eles também são paralelos entre si, vale que:

$$U = \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}|^3}$$

c) O caso mais favorecido é o de dipolos paralelos e alinhados, pois assim a energia  $U$  é mínima. Deste modo, para a molécula de água, temos:

$$U = 2 \times (2 \times 9 \times 10^9) \times \frac{(6.2 \times 10^{-30})^2}{(5 \times 10^{-10})^3} = 5.53 \times 10^{-21} J$$

Convertendo para  $eV$  (Basta dividir pelo valor da carga do elétron):

$$U = 3.34 \times 10^{-2} eV$$

**4.6**    **Questão 6**

---

Tomaremos a carga da partícula  $\alpha$  como  $2e$  e da folha de ouro como  $79e$ . A separação entre a partícula  $\alpha$  e a folha de ouro é mínima quando toda a sua energia cinética inicial é convertida em energia potencial:

$$E_c = U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Resolvendo para  $R$ , obtemos (Não se esqueça de converter a energia cinética de  $eV$  para  $J$ ):

$$U = 9 \times 10^9 \times \frac{(2 \times 1.6 \times 10^{-19})(79 \times 1.6 \times 10^{-19})}{7.68 \times 10^6 \times (2 \times 1.6 \times 10^{-19})} \approx 3 \times 10^{-14} m$$

**4.7**    **Questão 7**

---

**4.8**    **Questão 8**

---

a) A energia inicial do sistema vale:

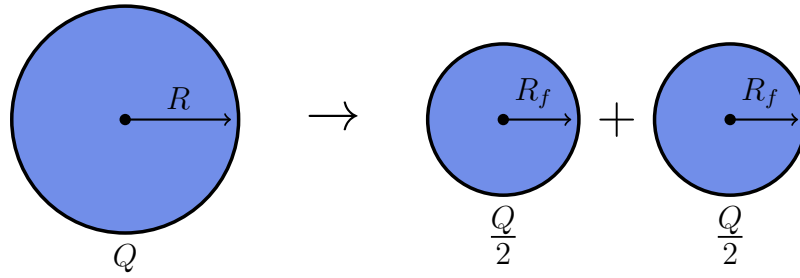
$$U_0 = \frac{3}{5} \left( \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right)$$

A bolha se divide em duas novas bolhas de mesmo raio  $R_f$  e carga  $Q' = Q/2$ . Assumindo que a densidade das bolhas é a mesma antes e após o processo, podemos encontrar o raio final das bolhas em termos do raio inicial  $R$  a partir da conservação de carga:

$$Q = 2Q' \implies \rho \frac{4\pi R^3}{3} = 2\rho \frac{4\pi R'^3}{3} \implies R' = 2^{-\frac{1}{3}} R$$

Deste modo, como  $Q' = Q/2$  e  $R' = 2^{-\frac{1}{3}} R$ , a energia potencial eletrostática do sistema na situação final é:

$$U = 2U' = 2 \left( \frac{3}{5} \right) \left( \frac{Q'^2}{4\pi\epsilon_0 R'} \right) = \frac{3}{5} \left( \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right) 2^{-\frac{2}{3}}$$



Calculando a variação de energia potencial entre os estados iniciais e finais:

$$\Delta U = -(U' - U) = \frac{3}{5} \left( \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right) (1 - 2^{-\frac{2}{3}})$$

b) Como  $A = 235$ , o raio atômico é dado por:

$$R = 1.3 \times 235^{\frac{1}{3}} \times 10^{-15} m \approx 8 \times 10^{-15} m$$

Como há 92 prótons no  $U_{235}$ , a carga do núcleo é  $Q = +92e$ , deste modo, pela resposta do item anterior temos que a energia liberada na fissão vale:

$$\Delta U = \frac{3}{5} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left( \frac{Q^2}{R} \right) (1 - 2^{-\frac{2}{3}}) = \frac{3}{5} \times 9 \times 10^9 \times \frac{(92 \times 1.6 \times 10^{-19})^2}{8 \times 10^{-15}} = 5.4 \times 10^{-11} J$$

Para realizar a conversão para  $MeV$  basta dividir o valor encontrado por  $e = 1.6 \times 10^{-19}$  e em seguida dividi-lo novamente por  $10^6$ :

$$\Delta U = \frac{5.4 \times 10^{-11}}{1.6 \times 10^{-19} \times 10^6} = 337 MeV$$

#### 4.9 Questão 9

a) Identidade 4.5.24:  $div(f\mathbf{v}) = fdiv(\mathbf{v}) + grad(f) \cdot \mathbf{v}$

Temos que  $div(f\mathbf{v}) = \partial_x(fv_x) + \partial_y(fv_y) + \partial_z(fv_z)$ . Usando a regra da cadeia em cada uma das derivadas parciais:

$$div(f\mathbf{v}) = (\partial_x f)v_x + (\partial_x v_x)f + (\partial_y f)v_y + (\partial_y v_y)f + (\partial_z f)v_z + (\partial_z v_z)f$$

Agrupando os termos que multiplicam  $f$  e aqueles que multiplicam componentes de  $\mathbf{v}$ , temos:

$$\operatorname{div}(f\mathbf{v}) = f(\partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z) + (\partial_x f)v_x + (\partial_y f)v_y + (\partial_z f)v_z = f\operatorname{div}(\mathbf{v}) + \operatorname{grad}(f) \cdot \mathbf{v}$$

b) Identidade 5.4.26

---

**4.10**    **Questão 10**

---

a) Como  $V(\infty) = 0$ , podemos considerar que cada elemento de carga  $dQ$  da casca esférica contribui para o potencial no ponto  $O$  com  $dV = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R}$ . Assim, basta integrar sobre toda a carga da esfera para conseguir o potencial total no ponto  $O$ , uma vez que o potencial de cada uma dos elementos de carga se somam. Assim:

$$dV = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} R d\Omega$$

onde  $d\Omega = \frac{dS}{R^2}$  é o elemento de ângulo sólido subtendido pela área  $dS$  no ponto  $O$ . Portanto:

$$V(O) = \frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Casca}} d\Omega = \frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0} 2\pi = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$$

b) Como temos o potencial  $V(O)$ , podemos calcular a energia potencial que a partícula de carga  $q$  terá naquele ponto e, que por estar em repouso, será sua energia total:

$$E_0 = qV(O) = \frac{q\sigma R}{2\epsilon_0}$$

O campo elétrico apontará para longe da casca com direção sobre seu eixo de simetria. Por conservação de energia, podemos calcular a velocidade da partícula no infinito, onde o potencial, por hipótese, é zero. Assim:

$$E_{\text{cin}}^\infty = E_0 \implies \frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{q\sigma R}{2\epsilon_0} \implies v_\infty = \left( \frac{q\sigma R}{m\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

---

**4.11**    **Questão 11**

---

a) É fácil ver que o potencial na superfície da esfera  $V(R)$  é simplesmente  $V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ . Assim, a energia de um elemento de carga na superfície da esfera  $dU = \frac{1}{2}dQV(R)$ . Dessa forma:

$$U = \frac{1}{2}V(R) \int dQ = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$



b) Variando o raio em  $dR$ , a energia eletrostática da configuração varia em  $dU = \frac{dU}{dR}dR$ . Essa variação de energia corresponde ao trabalho exercido pela força radial  $F$  nesse deslocamento:  $FdR$ . Assim,  $FdR = -dU$  (por conservação de energia). Assim,  $F = -\frac{dU}{dR}$ . Portanto:

$$F = -\frac{dU}{dR} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R^2}$$

Dessa forma, encontramos a densidade de força radial:

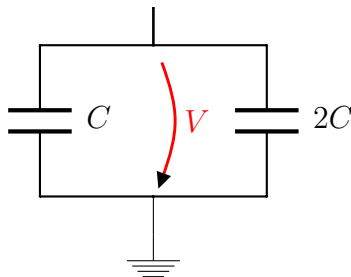
$$f = \frac{F}{4\pi R^2} = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4}$$

## 5 Capítulo 5

### 5.1 Questão 1

### 5.2 Questão 2

a) Podemos montar o seguinte circuito a partir da situação descrita no enunciado:



Vemos que os capacitores se encontram em paralelo, deste modo a capacitância equivalente vale:

$$C_{eq} = C + 2C = 3C$$

Além disso a carga total é  $Q_{eq} = Q + Q = 2Q$ . Pela relação  $Q = CV$  concluímos que:

$$V = \frac{Q_{eq}}{C_{eq}} = \frac{2Q}{3C}$$

b) Como  $U = q^2/2c$ , na situação em que os capacitores estão isolados suas energias são:

$$U_C = \frac{Q^2}{2C}$$

e,

$$U_{2C} = \frac{Q^2}{4C}$$

Já na situação final, em que a capacitância equivalente é  $C_{eq} = 3C$  e a carga total vale  $2Q$ , a energia armazenada é:

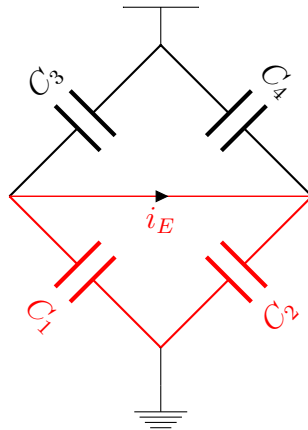
$$U_{eq} = \frac{Q_{eq}^2}{2C_{eq}} = \frac{(2Q)^2}{2(3C)} = \frac{2Q^2}{3C}$$

O decréscimo de energia é:

$$\Delta U = U_C + U_{2C} - U_{eq} = \frac{Q^2}{12C}$$

### 5.3 Questão 3

Para resolver esta questão precisamos utilizar as leis de Kirchhoff, tanto para tensões quanto para correntes - o que nos dará quatro equações. Veja que é possível identificar a seguinte malha triangular, formada pelos capacitores  $C_1$  e  $C_3$ , e pela queda de tensão  $E$  ( que foi simplesmente substituída por um curto no desenho, já que  $E = 0$  ):



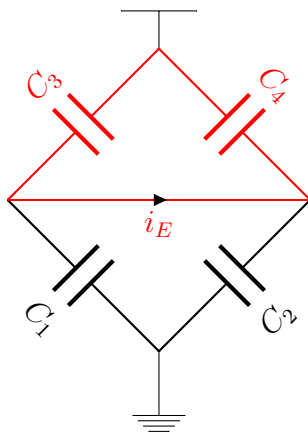
Ou seja, se aplicarmos Kirchhoff nesta malha veremos que:

$$V_1 - V_2 + \underbrace{E}_{=0} = 0 \implies V_1 = V_2$$

mas esta relação pode ser reescrita em termos das cargas e das capacitâncias, o que dá:

$$Q_1 C_1 = Q_2 C_2 \quad (5.3.1)$$

Analogamente, podemos identificar uma segunda malha:



Que gera:

$$Q_3 C_3 = Q_4 C_4 \quad (5.3.2)$$

Por último podemos usar a lei de Kirchhoff para as correntes, temos que a corrente que passa pelo eletrômetro vale:

$$i_E = i_1 - i_3 = i_4 - i_2 = 0$$

Como  $i = dQ/dt$  essa relação se traduz, em termos das tensões e capacitâncias, tanto em:

$$Q_1 = Q_3 \quad (5.3.3)$$

quanto em

$$Q_2 = Q_4 \quad (5.3.4)$$

Se dividirmos as duas primeiras equações enumeradas pela outra obteremos:

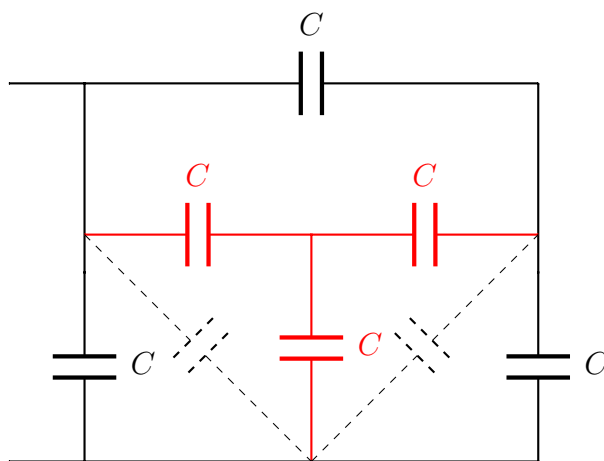
$$\frac{Q_1 C_1}{Q_3 C_3} = \frac{Q_2 C_2}{Q_4 C_4}$$

Mas as cargas se cancelam, como acabos de ver, e obtemos:

$$\boxed{\frac{C_1}{C_3} = \frac{C_2}{C_4}} \quad (5.3.5)$$

## 5.4 Questão 4

A solução deste exercício se torna bem simples se forem utilizadas transformações  $Y - \Delta$  (Ou transformações triângulo - estrela).<sup>1</sup> Veja que os três capacitores em vermelho a seguir estão em uma configuração  $Y$ :



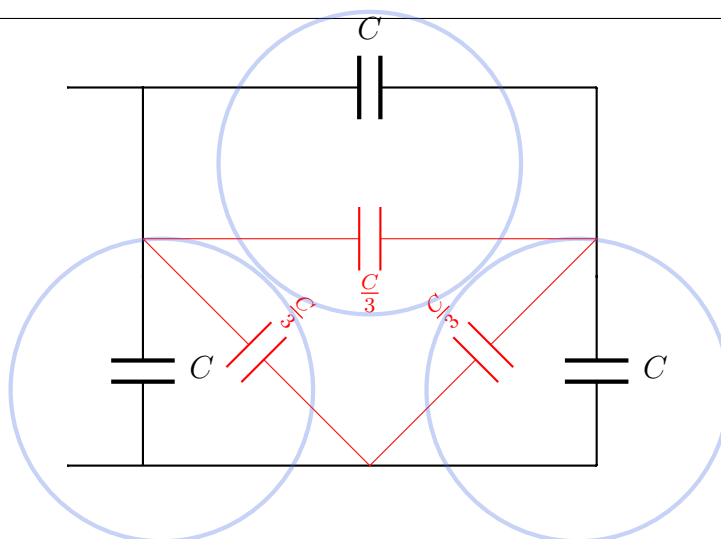
**Figura 8:** A associação  $Y$  foi substituída por uma associação  $\Delta$ .

Como todos os capacitores são idênticos, os novos capacitores, agora em configuração  $\Delta$ , tem capacitância:

$$C' = \frac{C \cdot C}{C + C + C} = \frac{C}{3}$$

Podemos então redesenhar o circuito como:

<sup>1</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Y-%CE%94\\_transform](https://en.wikipedia.org/wiki/Y-%CE%94_transform). Perceba que aqui usaremos as fórmulas contrários para a conversão de  $\Delta$  para  $Y$  e de  $Y$  para  $\Delta$ .

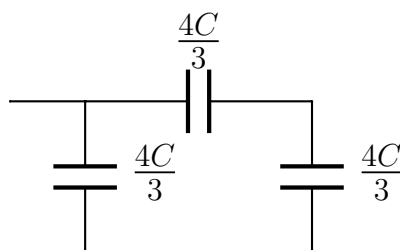


**Figura 9:** Capacitores em paralelo circulos em azul.

Onde os capacitores em vermelho correspondem a transformação resultante. Veja agora que os capacitores circulos estão em paralelo. A capacitância equivalente de um capacitor  $C$  com um capacitor  $C/3$  em série é:

$$C' = C + \frac{C}{3} = \frac{4C}{3}$$

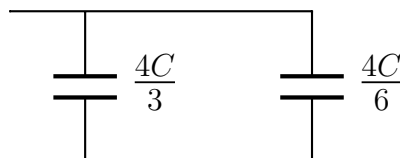
O circuito é redesenhado como:



Para os capacitores  $4C/3$  em série temos:

$$\frac{1}{C'} = \frac{3}{4C} + \frac{3}{4C} \Rightarrow C = \frac{4C}{6}$$

Portanto, temos:

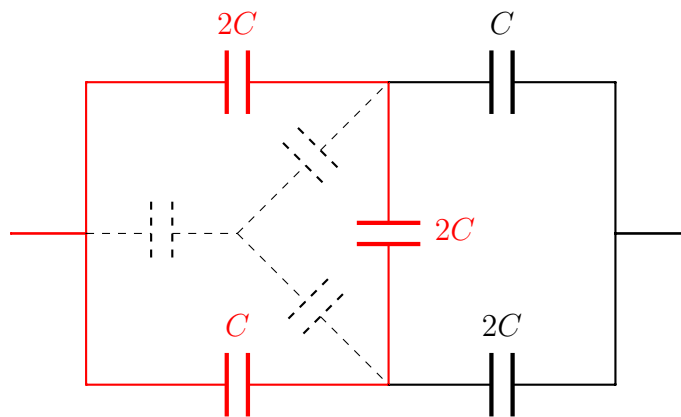


A capacitância equivalente do circuito vale, então:

$$C_{eq} = \frac{4C}{3} + \frac{4C}{6} = 2C$$

### 5.5 Questão 5

Neste exercício, a estratégia de resolução consiste em realizar uma transformação da configuração  $\Delta$  para a configuração  $Y$ . Os capacitores que serão convertidos estão em vermelho:



**Figura 10:** A região em vermelho corresponde a uma associação  $\Delta$ .

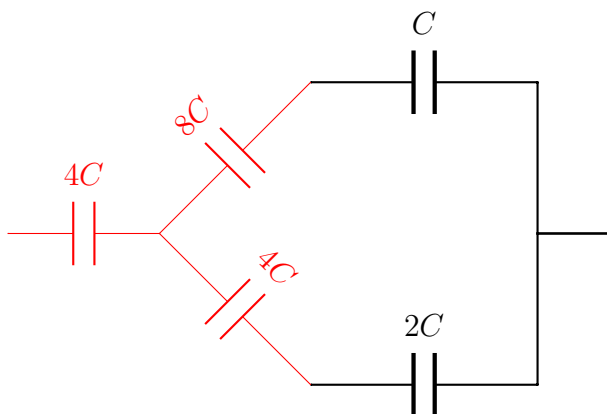
Utilizando a fórmula para a conversão (Consulte o link fornecido), encontramos que a capacitância do capacitor superior, adjacente aos capacitores  $2C$  é:

$$C' = \frac{C \cdot (2C) + (2C) \cdot C + (2C)(2C)}{C} = 8C$$

Para os outros dois capacitores temos:

$$C' = \frac{C \cdot (2C) + (2C) \cdot C + (2C)(2C)}{2C} = 4C$$

Agora podemos redesenhar o circuito, que se torna razoavelmente mais simples:



**Figura 11:** A associação  $\Delta$  foi substituída por uma associação  $Y$ .

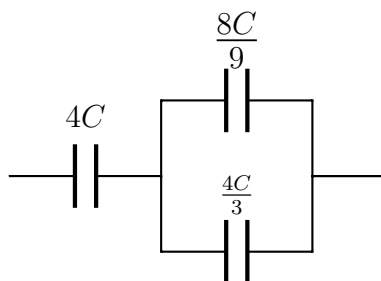
Resolvendo para os capacitores em série na parte superior:

$$C'^{-1} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{8C}{9}$$

e para os capacitores em série na parte inferior:

$$C'^{-1} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{4C}{3}$$

Portanto, finalmente podemos reescrever o circuito como:



Para os capacitores em paralelo temos que:

$$C' = \frac{8C}{9} + \frac{4C}{3} = \frac{20C}{9}$$

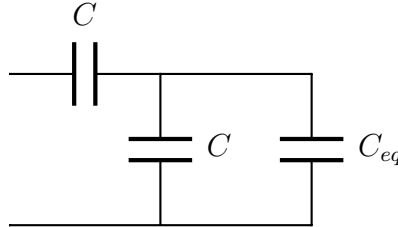
Resultado que em série com  $4C$  resulta em uma capacitância equivalente:

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{9}{20C} + \frac{1}{4C} \Rightarrow C_{eq} = \frac{10}{7}C}$$



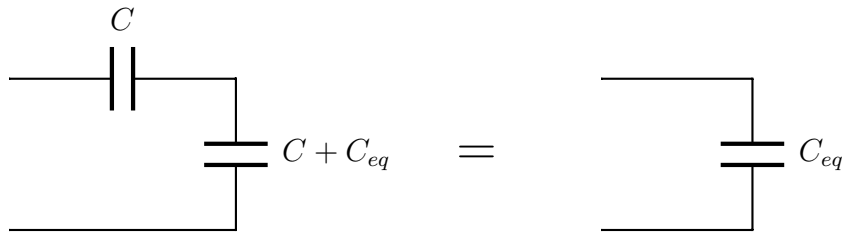
**5.6** Questão 6

Perceba que como foi dito na sugestão do enunciado, a porção circuito à direita da linha tracejada tem a mesma capacitância  $C_{eq}$  do circuito completo. Isto é, a porção à direita é idêntica ao circuito completo. Deste modo, podemos redesenhá-lo:



A capacitância equivalente dos capacitores  $C$  e  $C_{eq}$  em paralelo é:

$$C // C_{eq} = C + C_{eq}$$



Que fica em série com o capacitor  $C$ , portanto a capacitância equivalente final do circuito é:

$$C_{eq} = \frac{C(C_{eq} + C)}{C + (C + C_{eq})} \implies C_{eq}^2 + C_{eq}C - C^2 = 0$$

Que é uma equação de segundo grau. Resolvendo para  $C_{eq}$  obtemos:

$$C_{eq} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 + 4C^2}}{2}$$

Mas como  $C > 0$ , prevalece a raiz:

$$C_{eq} = \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) C$$

**5.7 Questão 7**

Vamos, primeiramente, calcular a capacitância do capacitor de placas paralelas de área  $A$  a uma distância  $D$  preenchido por uma lâmina dielétrica de constante  $\kappa$  e espessura  $d$ , tal que  $d < D$ . Assim sendo, para calcular a capacitância, definida por  $C = \frac{Q}{V}$ , basta calcular  $V$ . Calculando a integral de linha do campo elétrico entre as placas, percebemos que, independente da colocação da lâmina, temos a seguinte expressão para  $V$ :

$$V = E(D - d) + \frac{E}{\kappa}d = E\left(D - d\left(\frac{\kappa - 1}{\kappa}\right)\right)$$

Isso pois, na região com ar entre as placas (de espessura  $D - d$ ), o campo elétrico tem módulo  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{QA}{\varepsilon_0}$ , e, no dielétrico (de espessura  $d$ ), vale em módulo  $\frac{E}{\kappa}$ .

Assim, a capacitância será:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(D - d\left(\frac{\kappa - 1}{\kappa}\right)\right)} = \frac{\varepsilon_0 A}{\left(D - d\left(\frac{\kappa - 1}{\kappa}\right)\right)}$$

Agora, vamos considerar um capacitor de espessura  $D - d$  com ar entre as placas em série com um capacitor de espessura  $d$  preenchido de material dielétrico de constante  $\kappa$ . O primeiro apresenta capacitância  $C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{D - d}$ , enquanto o segundo apresentará  $C_2 = \kappa \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ . Portanto, em série, teremos a seguinte capacitância equivalente:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\varepsilon_0 A} \left(D - d + \frac{d}{\kappa}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0 A} \left(D - d\left(\frac{\kappa - 1}{\kappa}\right)\right)$$

Assim:

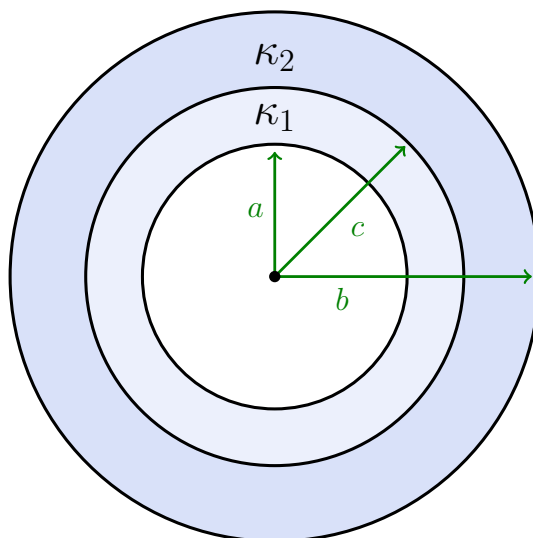
$$C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 A}{\left(D - d\left(\frac{\kappa - 1}{\kappa}\right)\right)}$$

E portanto, os dois sistemas descritos terão a mesma capacitância.

**5.8 Questão 8**

Foi visto no capítulo que a capacitância de um capacitor esférico de raio interno  $R_1$  e raio externo  $R_2$  é:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\right) = 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^{-1}$$



Para porção do capacitor de constante dielétrica  $\kappa_1$ , de raio interno  $a$  e raio externo  $c$ , temos então que:

$$C_1 = 4\pi\epsilon_0\kappa_1 \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right)^{-1}$$

Já para a segunda porção:

$$C_2 = 4\pi\epsilon_0\kappa_2 \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right)^{-1}$$

Como as porções são concêntricas, podemos considerar que o capacitor consiste dos dois capacitores  $C_1$  e  $C_2$  em série, deste modo temos que:

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\kappa_1} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{\kappa_2} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \right]}$$

*Outra solução possível:* Podemos também tentar calcular a capacitância pela definição  $C = \frac{Q}{V}$ . Como já calculado no texto, a diferença de potencial  $V$  entre um par de esferas condutoras concêntricas de raios  $R_1 < R_2$  com ar entre elas, como  $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$ , é  $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ . Como, em cada meio dielétrico, o campo elétrico vale  $\frac{\mathbf{E}}{\kappa}$ , a diferença de potencial entre as duas esféricas preenchidas de dielétrico vale:

$$V = \frac{Q}{\kappa_1 4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) + \frac{Q}{\kappa_2 4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right)$$

Dessa forma, calculando a capacitância por  $C = \frac{Q}{V}$ , temos:

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \left[ \frac{1}{\kappa_1} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{\kappa_2} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \right]^{-1}$$

---

**5.9**    **Questão 9**

---

---

**5.10**    **Questão 10**

---

a) Vamos aqui aplicar a Lei de Gauss. Fora da esfera, não há material dielétrico, assim, vale a aplicação normal da Lei de Gauss, que, junto com a simetria esférica, para  $r > a$  implica em:

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4\pi}{3} a^3 \implies \mathbf{E} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Agora, para o interior do dielétrico usaremos o campo  $\mathbf{D}$ . Como  $\text{div} \mathbf{D} = \frac{\rho_l}{\epsilon_0}$ , onde  $\rho_l$  é a densidade de carga livre, vale, pelo Teorema de Gauss, a equação global  $\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_f^{tot}}{\epsilon_0}$ . Assim, novamente pela simetria esférica:

$$D4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4\pi}{3} r^3 \implies \mathbf{D} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{\mathbf{r}}$$

Finalmente, como  $\mathbf{D} = \kappa \mathbf{E}$ , temos: <sup>2</sup>

$$\mathbf{E} = \frac{\rho r}{3\kappa\epsilon_0} \hat{\mathbf{r}}$$

Perceba a descontinuidade do campo elétrico em  $r = a$ . Isso era esperado, uma vez que sabemos que a componente perpendicular do campo elétrico à superfície de material dielétrico é descontínua, e, no caso, pelo campo ser radial, ele consiste justamente apenas na componente perpendicular à superfície da esfera.

b) Como temos as expressões para o campo elétrico em todo espaço, basta integrá-lo para encontrar o potencial.

---

<sup>2</sup> Alguns autores definem o campo no interior do dielétrico como  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , onde  $\epsilon = \epsilon_0 \kappa$ , e assim o  $\epsilon_0$  não aparece dividindo a densidade de carga livre e nem a carga total contida no volume nas expressões para as Leis de Maxwell no interior de dielétricos.

## 6 Capítulo 6

### 6.1 Questão 1

a) O potencial  $V(x)$  de um elétron a uma distância  $x$  do cátodo é:

$$V(x) = - \left( \frac{x}{d} \right) V$$

A energia potencial eletrostática associada é, portanto:

$$U(x) = eV(x) = - \left( \frac{x}{d} \right) eV$$

Por conservação de energia:

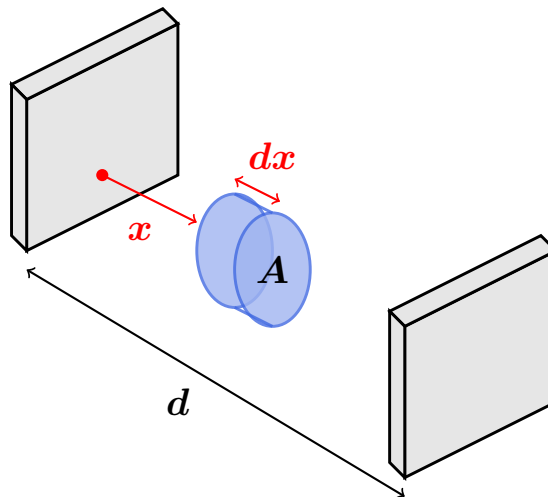
$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \left( \frac{x}{d} \right) eV$$

Resolvendo para  $v$ , encontramos:

$$v(x) = v_0 \sqrt{1 + \frac{2eVx}{mv_0^2 d}}$$

b) A corrente pode ser escrita como:

$$i(x) = \frac{dq}{dt} = e \frac{dN}{dt}$$



Onde  $N$  representa o número de elétrons em  $x$ . O número de elétrons passando por um cilindro de espessura  $dx$  em  $x$  e seção transversal  $A$  é:

$$N(x) = n(x) \underbrace{A dx}_{\text{Volume}}$$

Substituindo na expressão para a corrente:

$$i = eA \frac{dx}{dt}$$

Mas  $dx/dt$  é simplesmente a velocidade dos elétrons no ponto  $x$ , logo podemos substituir na expressão acima e resolver para  $n(x)$ :

$$n(x) = \frac{i}{eAv_0} \left[ 1 + \frac{2eVx}{mv_0^2 d} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

---

**6.2**    **Questão 2**

---

**6.3**    **Questão 3**

Temos que  $P = VI$ , e como  $V = RI$ , podemos relacionar a potência com a tensão e a resistência. No caso da lâmpada,  $P = 1.5W$  e  $V = 9V$ , deste modo, sua resistência quando acesa é:

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{9^2}{1.5} = 54\Omega$$

Além disso sabemos que a resistividade varia de acordo com a temperatura através de,

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha\Delta T]$$

Pela segunda lei de Ohm sabemos que  $R = \rho l/A$ , deste modo a expressão acima pode ser reescrita como:

$$R = R_0[1 + \alpha\Delta T]$$

Temos que  $R_0 = 4.5\Omega$ , que é a resistência do filamento a  $20^\circ C$ . Temos então que:

$$T = T_0 + \frac{1}{\alpha} \left( \frac{R}{R_0} - 1 \right) = 20 + \frac{1}{4.5 \times 10^{-3}} \left( \frac{54}{4.5} - 1 \right) \approx 2.4 \times 10^3 C$$

**6.4** Questão 4**6.5** Questão 5**6.6** Questão 6

Como a condutividade varia linearmente como a distância, podemos escrevê-la na forma:

$$\sigma(x) = Ax + B$$

Sendo  $A$  e  $B$  constantes. Pelos dados do enunciado podemos contruir o sistema:

$$\begin{aligned}\sigma(0) &= B = \sigma_0 \\ \sigma(l) &= Al + B = \sigma_1\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema encontramos:

$$\sigma(x) = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{l} \right) x + \sigma_0$$

A segunda lei de Ohm nos diz que  $R = \rho l / S = l / (\sigma S)$ , ou para uma porção infinitesimal do cilindro em questão:

$$dR = \frac{1}{S} \frac{dx}{\sigma(x)}$$

Substituindo pela expressão encontrada para a condutividade e integrando:

$$R = \frac{1}{S} \int_0^l \frac{dx}{\left( \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{l} \right) x + \sigma_0}$$

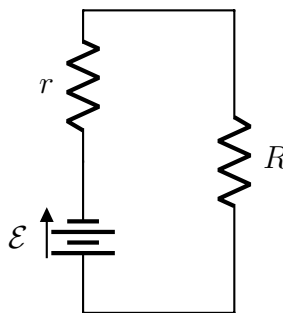
Resolvendo a integral obtemos (Isso pode ser feito por substituição, tomando  $u = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{l} \right) x + \sigma_0$  e  $du = \frac{(\sigma_1 - \sigma_0)}{l} dx$ ):

$$R = \frac{l}{S(\sigma_1 - \sigma_0)} \ln \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)$$

**6.7** Questão 7

A corrente no circuito é:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$$



Deste modo, a potência fornecida ao resistor  $R$  é, em função de sua resistência:

$$P(R) = Vi = Ri^2 = \mathcal{E}^2 \left[ \frac{R}{(r + R)^2} \right]$$

Derivando e igualando à 0, a fim de encontrar para qual valor  $R_{max}$  a potência dissipada é máxima:

$$\frac{dP}{dR} = \mathcal{E}^2 \left[ \frac{1}{(r + R)^2} - 2 \frac{R}{(r + R)^3} \right] = 0$$

Resolvendo para  $R$  encontramos que:

$$\boxed{R_{max} = r}$$

b) Como  $R = r$ , a potência dissipada pelo resistor é:

$$P = \mathcal{E}^2 \left[ \frac{R}{(r + R)^2} \right] = \frac{\mathcal{E}^2}{4}$$

Que é a mesma potência dissipada pela bateria, pois  $r = R$ .

---

**6.8 Questão 8**

---

**6.9 Questão 9**

---

A energia utilizada para aquecer a água é:

$$Q = mc\Delta T = 500 \times 1 \times (100 - 20) = 40.000 \text{ cal} \approx 1.7 \times 10^5 J$$

A potência associada é:

$$P_{H_2O} = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{1.7 \times 10^5}{6 \times 60} \approx 472 W$$

Como o aquecedor opera a 110V e 5A, sua potência total é:



$$P = VI = 110 \times 5 = 550W$$

A eficiência do aquecedor vale, portanto:

$$\eta = \frac{472}{550} \approx 85\%$$

---

**6.10**    **Questão 10**

## 7 Capítulo 7

### 7.1 Questão 1

---

O torque sob a espira é dado por:

$$\tau = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_0 = |\mathbf{m}||\mathbf{B}_0| \sin \theta$$

Assumindo que  $\sin \theta \approx \theta$ , a equação do movimento para a bússola é:

$$\tau = I\ddot{\theta} = -|\mathbf{m}||\mathbf{B}_0|\theta$$

que corresponde à equação do MHS, portanto:

$$\omega = \sqrt{\frac{|\mathbf{m}||\mathbf{B}_0|}{I}}$$

### 7.2 Questão 2

---

### 7.3 Questão 3

---

### 7.4 Questão 4

---

Na região do filtro de velocidades o campo elétrico  $\mathbf{E}$  é balanceado pelo campo magnético  $\mathbf{B}$ , portanto podemos descobrir qual é a velocidade de entrada do íon na região semicircular através da relação entre dos dois campos:

$$|\mathbf{E}| = v|\mathbf{B}| \implies v = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}|}$$

Como na região circular não há campo elétrico, a força magnética (devido ao campo  $|\mathbf{B}'|$ ) é igual à força centrípeta, portanto podemos obter o raio da órbita a partir de:

$$F_{cp} = F_B \implies \frac{mv^2}{R} = ev|\mathbf{B}'|$$

Resolvendo para  $R$  e substituindo  $v$  pela velocidade encontrada, obtemos:

$$R = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}||\mathbf{B}'|} \frac{m}{e}$$

**7.5** Questão 5

O módulo do torque do momento de dipolo da espira é dado por:

$$|\mathbf{m}| = iS = i(\pi a^2)$$

O Torque exercido, por sua vez, vale:

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{B}||\mathbf{m}| \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = |\mathbf{B}|(\pi a^2)i$$

Pois como torque é exercido sob um curtíssimo período de tempo o campo magnético permanece perpendicular ao vetor do dipolo magnético da espira. Devido ao torque a espira inicialmente adquire uma velocidade angular  $\omega$ , e gira até um ângulo máximo  $\theta_0$ . Como o torque exerce uma mudança no momento angular, podemos encontrar a velocidade angular adquirida através de:

$$|\boldsymbol{\tau}|\Delta t = \Delta L = I\Delta\omega = I\omega$$

Pois  $\omega_0 = 0$ . Resolvendo para  $\omega$  obtemos:

$$\omega = \frac{|\mathbf{B}|(\pi a^2)i\Delta t}{I} = \frac{|\mathbf{B}|(\pi a^2)q}{I}$$

A força restauradora do fio de torção vale:

$$F = -k\theta$$

Como  $F = -dU/d\theta$ , a energia potencial associada a um ângulo de torção  $\theta$  é:

$$U = \frac{k}{2}\theta^2$$

Podemos então obter o ângulo máximo de deflexão a partir da conservação de energia, pois toda a energia cinética de rotação é convertida em energia potencial  $U$ :

$$\frac{I\omega^2}{2} = \frac{k}{2}\theta_0^2$$

Substituindo  $\omega$  pelo valor encontrado:

$$\frac{|\mathbf{B}|^2(\pi a^2)^2 q^2}{I} = k\theta_0^2$$

Resolvendo para  $\theta_0$  obtemos:

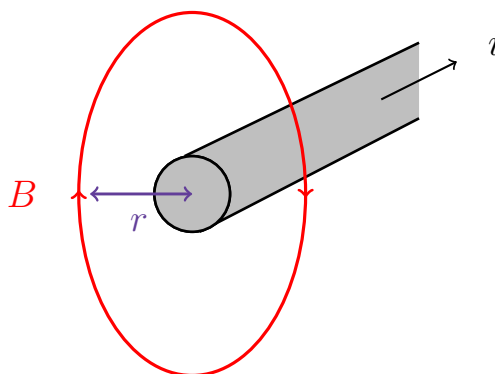
$$\theta_0 = \frac{\pi a^2 |\mathbf{B}|}{\sqrt{Ik}} q$$

## 8 Capítulo 8

### 8.1 Questão 1

### 8.2 Questão 2

As linhas de campo magnético são círculos concêntricos ao fio, conforme representado na figura (Confira também o exemplo da seção 8.1 do livro):



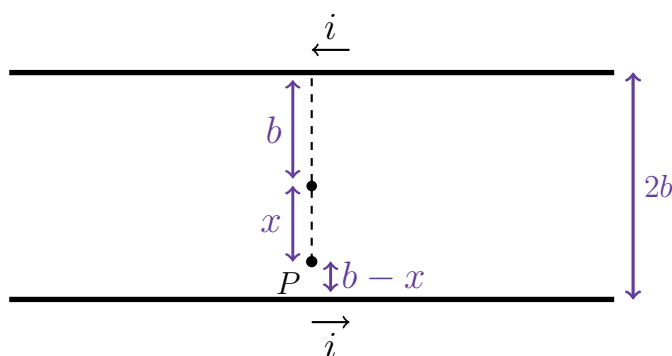
Pela lei de Ampère, vale para um ponto que dista  $r$  do fio a relação:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \implies B 2\pi r = \mu_0 i$$

Ou seja,

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

Tendo obtido a fórmula, consideremos agora o sistema da figura:



A contribuição do fio superior na figura com o campo elétrico é, pela regra da mão direita:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi(b+x)} \hat{\mathbf{z}}$$

E para o fio inferior:

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi(b-x)} \hat{\mathbf{z}}$$

Somando ambas as contribuições:

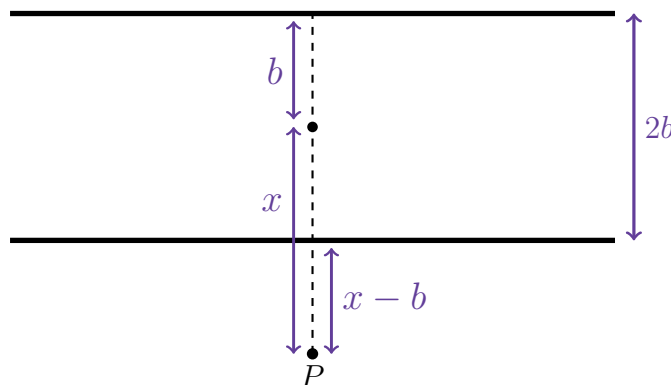
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left( \frac{1}{b+x} + \frac{1}{b-x} \right) \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0 i b}{\pi(b^2 - x^2)} \hat{\mathbf{z}}$$

Agora, no segundo caso, temos que o campo devido ao fio superior vale:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi(b+x)} \hat{\mathbf{z}}$$

E para o fio inferior (Veja que desta vez o sinal é contrário):

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi(x-b)} \hat{\mathbf{z}}$$



Ao somar os campos obtemos, novamente:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left( \frac{1}{b+x} + \frac{1}{b-x} \right) \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0 i b}{\pi(b^2 - x^2)} \hat{\mathbf{z}}$$

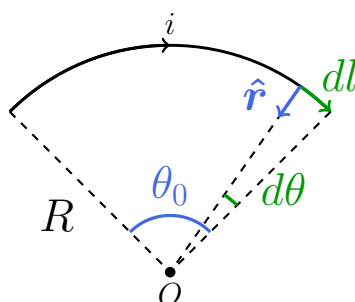
## 8.3 Questão 3

## 8.4 Questão 4

## 8.5 Questão 5 - Ver

a) Podemos rapidamente calcular o campo magnético gerado por uma espira circular a partir de Biot-Savart. Para um fio que consiste de um arco circular de raio  $R$  e abertura  $\theta$ , conforme a figura, o campo magnético no ponto  $O$  fica:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{R^2}$$



Mas  $d\mathbf{l}$  e  $\hat{\mathbf{r}}$  são perpendiculares<sup>3</sup>, e também sabemos que  $dl = R d\theta$ . Portanto:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_0^{\theta_0} d\theta \hat{\mathbf{z}} = -\frac{\mu_0 i \theta_0}{4\pi R} \hat{\mathbf{z}}$$

No caso do exercício, temos que  $\theta_0 = \pi$ , portanto:

$$\boxed{\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 i}{4R} \hat{\mathbf{z}}}$$

Os fios retilíneos muito longos não contribuem com o campo magnético pois os elementos de corrente  $i d\mathbf{l}$  estão na mesma direção do vetor  $\hat{\mathbf{r}}$ , que corresponde ao vetor unitário da direção do ponto  $P$  a um ponto qualquer no fio.

b) Assim como foi calculado no exercício anterior, o campo magnético gerado pela parte circular do fio é (Considerando que o sentido da corrente é horário):

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{\mu_0 i}{4R} \hat{\mathbf{z}}$$

<sup>3</sup>Se trabalharmos com coordenadas cilíndricas podemos escrever  $d\mathbf{l} = -dl \hat{\boldsymbol{\theta}}$  (O sinal é negativo pois a corrente flui em sentido horário), pois assim  $d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}} = -dl \hat{\mathbf{z}}$ , isto é, o campo magnético resultante tem direção ortogonal aos versores  $\hat{\mathbf{r}}$  e  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , no sentido "saindo da página".

Já para calcular a contribuição dos fios retilíneos podemos usar o resultando do exercício 2 com  $x = 0$  e  $b = R$ , dividindo-o por dois, pois os fios só possuem metade da extensão:

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_0 i}{2R} \hat{\mathbf{z}}$$

Somando os dois campos obtemos:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_0 i}{4R} \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \hat{\mathbf{z}}$$

### 8.6 Questão 6

A partir do resultado do exercício anterior podemos encontrar o campo magnético devido às porções circulares do fio. Para o arco de raio  $a$ :

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{\mu_0 i \theta}{4\pi a} \hat{\mathbf{z}}$$

E para o arco de raio  $b$ :

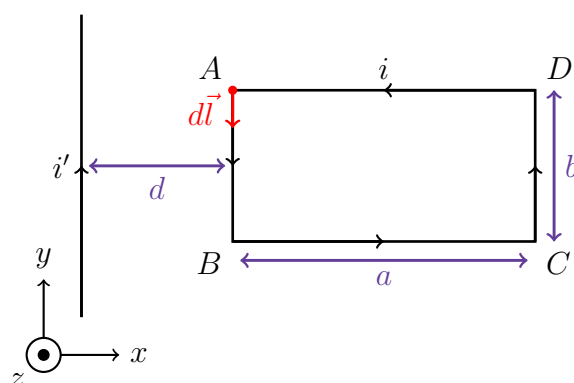
$$\mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_0 i \theta}{4\pi b} \hat{\mathbf{z}}$$

As porções retilíneas não contribuem com o campo magnético, portanto, o campo resultante no ponto  $P$  fica:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{(a - b)\theta}{ab} \hat{\mathbf{z}}$$

### 8.7 Questão 7

Considere um ponto no segmento  $AB$  do circuito:



O campo magnético para um ponto no segmento é dado por :

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 i'}{2\pi d} \hat{\mathbf{z}}$$

Deste modo, a força exercida sob um trecho infinitesimal  $d\mathbf{l}$  do segmento é:

$$d\mathbf{F} = -i d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Com o sinal negativo devido à direção do vetor  $d\mathbf{l}$ . Como o campo magnético "entra" na página,  $d\mathbf{l}$  e  $\mathbf{B}$  são perpendiculares. Também podemos escrever  $d\mathbf{l} = dl \hat{\mathbf{y}}$ . Deste modo, a expressão para a força fica:

$$d\mathbf{F} = +\frac{\mu_0 i i'}{2\pi d} (\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}}) dl$$

Sabemos que  $\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}$ , além disso, podemos integrar  $dl$  de 0 até  $b$ , obtendo:

$$\mathbf{F}_1 = +\frac{\mu_0 i i'}{2\pi} \frac{b}{d} \hat{\mathbf{x}}$$

Podemos obter a força para o segmento  $CD$  da mesma maneira, o que resulta em:

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{\mu_0 i i'}{2\pi} \frac{b}{d+a} \hat{\mathbf{x}}$$

Veja que para este segmento a direção da corrente é oposta, portanto a força tem sinal contrário. Por simetria, as forças sob os segmentos  $BC$  e  $AD$  se anulam, e por conseguinte, a força resultante é:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = +\frac{\mu_0 i i'}{2\pi} \frac{ab}{d(d+a)} \hat{\mathbf{x}}$$

---

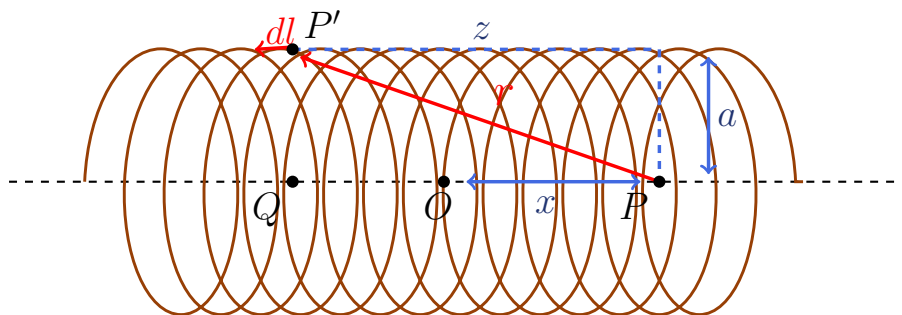
### 8.8 Questão 8

### 8.9 Questão 9

---

a) Imaginando o Solenóide como na seguinte figura, podemos calcular a contribuição de uma porção de comprimento  $dl$  da espira, a uma distância  $z$  do ponto  $P$ , que é o ponto no qual desejamos obter o campo magnético resultante.



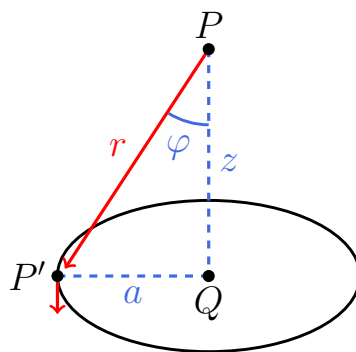


Por Biot-Savart, podemos escrever:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Como  $|d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}| = dl$ , o módulo da expressão acima fica:

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl}{r^2}$$



Mas por simetria, as componentes não verticais do campo magnético de pontos diametralmente opostos se anulam (Veja o exemplo 2 da seção 8.3, pg. 151). Deste modo, devemos levar em conta somente a componente vertical, dada por:

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \sin \varphi \implies B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{dl}{r^2} \sin \varphi = \frac{\mu_0 i a}{4\pi} \int \frac{dl}{r^3}$$

Como  $r = \sqrt{a^2 + z^2}$  e  $dl = 2\pi a dz$ , a integral fica:

$$B = \frac{\mu_0 i n a^2}{2} \int \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Esta integral já foi resolvida em exercícios anteriores, e vale:

$$\int \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z}{a^2 \sqrt{a^2 + z^2}} + C$$

Substituindo na expressão do campo magnético e utilizando os limites de integração apropriados:

$$B(x) = \frac{\mu_0 i n a^2}{2} \left[ \frac{z}{a^2 \sqrt{a^2 + z^2}} \right] \Big|_{-(\frac{L}{2}+x)}^{\frac{L}{2}-x}$$

Obtemos:

$$B(x) = \frac{\mu_0 n i}{2} \left[ \frac{\frac{L}{2} - x}{\sqrt{a^2 + (\frac{L}{2} - x)^2}} + \frac{\frac{L}{2} + x}{\sqrt{a^2 + (\frac{L}{2} + x)^2}} \right]$$

Tomando  $x = 0$ , obtemos:

$$B(0) = \frac{\mu_0 i n}{2} \left[ \frac{L}{\sqrt{a^2 + L^2/4}} \right]$$

Se  $L \gg a$ , então,

$$B(0) = \frac{\mu_0 i n}{2}$$

b) A integral que obtemos para calcular o campo do solenóide é:

$$B = \frac{\mu_0 i n a^2}{2} \int_{-L/2-x}^{L/2-x} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Podemos reescrever como:

$$B = \frac{\mu_0 i n a^2}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz}{(a^2 + (z-x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Como  $x \gg a$  e  $x \gg z$ , então:

$$B = \frac{\mu_0 i n a^2}{2x^3} \int_{-L/2}^{L/2} dz = \frac{\mu_0 i n a^2 L}{2x^3}$$

Ou,

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi x^3} (n L i \pi a^2)$$

Como  $m = iS$ , então o momento de dipolo associado ao solenóide é  $m = nLi\pi a^2$ , portanto:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi x^3} m$$

c) A razão entre  $B(x)$  e  $B(0)$  elimina algumas das constantes:

$$\frac{B(x)}{B(0)} = \frac{\frac{L}{2} - x}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{L}{2} - x\right)^2}} + \frac{\frac{L}{2} + x}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{L}{2} + x\right)^2}}$$

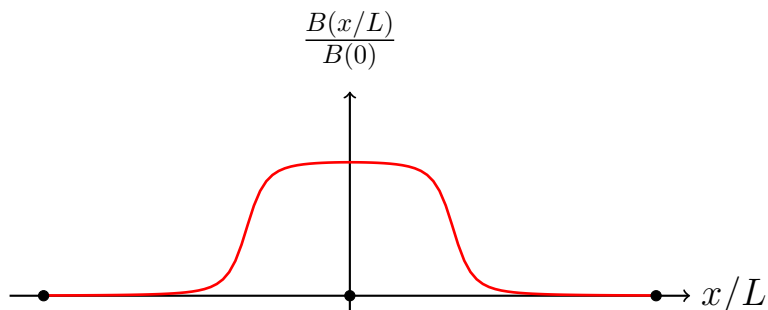
Podemos reescrever a equação anterior de tal modo que ela se torne função de  $x/L$ :

$$\frac{B(x/L)}{B(0)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{x}{L}}{\sqrt{\frac{a^2}{L^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L}\right)^2}} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{x}{L}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{L}\right)^2}}$$

Mas  $L = 10a$ , portanto, após algumas manipulações, a equação anterior fica:

$$\frac{B(x/L)}{B(0)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{x}{L}}{\sqrt{0.01 + \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L}\right)^2}} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{x}{L}}{\sqrt{0.01 + \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{L}\right)^2}}$$

Plotando o gráfico obtemos:



### 8.10 Questão 10

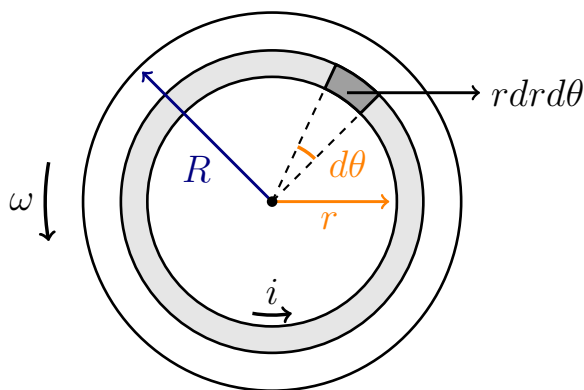
a) Trabalhando com coordenadas polares podemos escrever um elemento de área no disco como:

$$dS = r dr d\theta$$

Deste modo, a corrente  $dq$  presente nesta porção vale  $dq = \sigma dS = \sigma r dr d\theta$ . Além disso, temos que,

$$i = \frac{dq}{dt} = \sigma r \frac{d\theta}{dt} dr = \sigma \omega r dr$$

O que corresponde à corrente  $i(r)$  associada à uma faixa de espessura  $dr$  a uma distância  $r$  do centro do disco.



Vimos também que o campo magnético no centro de um fio circular, no qual o sentido da corrente é anti-horário, é:

$$\mathbf{B}_0(r) = \frac{\mu_0 i}{2r} \hat{\mathbf{z}}$$

Deste modo, a contribuição de cada faixa para o campo magnético total vale,

$$\mathbf{B}_0(r) = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} dr \hat{\mathbf{z}}$$

Integrando de 0 até  $R$  obtemos o campo resultante no centro do disco:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2} \hat{\mathbf{z}}$$

b) Vimos que a corrente de uma faixa que dista  $r$  da origem é:

$$i(r) = \sigma \omega r dr$$

Como a área  $S$  da superfície definida pela faixa circular é  $\mathbf{S} = \pi r^2 \hat{\mathbf{z}}$ , a contribuição para o momento de dipolo de cada faixa é:

$$d\mathbf{m} = i\mathbf{S} = \pi \sigma \omega r^3 dr \hat{\mathbf{z}}$$

Integrando de 0 até  $R$  obtemos a contribuição de todas as faixas, o que nos leva à:

$$\mathbf{m} = \frac{\pi \sigma \omega R^4}{4} \hat{\mathbf{z}}$$

**8.11** Questão 11

---

## 9 Capítulo 9

### 9.1 Questão 1

---

Pela Lei de Lenz, temos que:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \implies \mathcal{E} = NA \frac{B}{\Delta t}$$

Pela primeira Lei de Ohm podemos relacionar a força eletromotriz com a resistência e a corrente gerada. Como a duração do pulso é  $\Delta t$ , temos que:

$$\mathcal{E} = Ri = R \frac{Q}{\Delta t}$$

Podemos então resolver as equações para  $B$ , obtendo:

$$B = \frac{QR}{NS}$$

### 9.2 Questão 2

---

a) O campo magnético está "entrando na página", portanto podemos escrevê-lo como  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ , onde  $\hat{\mathbf{z}}$  representa o vetor unitário ortogonal à página. Assumindo que a área englobada pelo circuito tem normal  $\hat{\mathbf{n}}$ , de mesma orientação que o versor  $\hat{\mathbf{z}}$ , isto é, "saindo" da página, então  $\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} < 0$  e  $\mathcal{E} = -d\Phi/dt > 0$ , pois conforme a haste cai a área definida pelo circuito aumenta. Como  $\mathcal{E} > 0$ , a corrente terá a mesma orientação do circuito, anti-horária. (Pois como definimos a normal do circuito como "saindo" da página, isto é  $\hat{\mathbf{n}} > 0$ , pela regra da mão direita, a orientação do circuito é anti-horária).

b) Para encontrar a força agindo sob a barra devido à indução devemos primeiro encontrar a corrente induzida e depois a força, através de  $dF = i(d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$ .

A área englobada pelo circuito é  $A = ly$ , onde  $y$  representa o deslocamento vertical da barra. Como o campo magnético  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$  é constante, temos que:

$$\varepsilon = -\frac{d(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})}{dt} = B \frac{dA}{dt} = Bl \frac{dy}{dt} = Blv$$

A corrente induzida vale, então:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Blv}{R}$$

A força agindo sob um elemento de corrente  $i d\mathbf{l}$  pertencente à haste de comprimento  $l$  é, portanto:

$$d\mathbf{F} = i(d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

Como o campo magnético é constante ao longo da barra e perpendicular ao elemento de corrente:

$$\mathbf{F} = ilB\hat{\mathbf{y}} = \frac{B^2 l^2 v}{R} \hat{\mathbf{y}}$$

Como a força resultante corresponde à força peso menos a força magnética, temos que:

$$a = g - \frac{B^2 l^2 v}{mR}$$

c) Para encontrar a velocidade terminal basta utilizar o resultando do item anterior, tomando  $a = 0$  e resolver para  $v = v_0$ :

$$v_0 = \frac{mgR}{B^2 l^2}$$

d) Pelo item b) , temos que  $i = Blv$ . Deste modo:

$$i_0 = \frac{Blv_0}{R} = \frac{mgR}{Bl}$$

e) A variação de energia potencial da haste, após ter percorrido uma distância  $y = v_0 \Delta t$  é:

$$U = mgv_0 \Delta t = \left( \frac{mg}{Bl} \right)^2 R \Delta t$$

Agora, a energia dissipada no resistor é:

$$E = P \Delta t = \frac{\epsilon^2}{R} \delta t = \frac{(Bl)^2}{R} v^2 R \delta t = \left( \frac{mg}{Bl} \right)^2 R \Delta t$$

Assim, podemos ver que as energia são iguais, e a energia total é conservada.

---

### 9.3 Questão 3

---

### 9.4 Questão 4

---

### 9.5 Questão 5

---

### 9.6 Questão 6

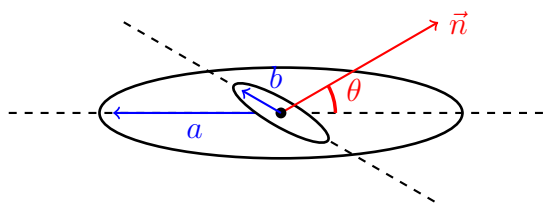
---

Vimos que o campo magnético no centro de uma espira de raio  $a$  é:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2a} \hat{\mathbf{z}}$$

Assim, como  $a \gg b$  podemos aproximar que o campo magnético é aproximadamente  $\mathbf{B}$  através da espira de raio  $b$ . Como a área da espira menor vale  $\mathbf{S} = \pi b^2 \hat{\mathbf{n}}$ , então o fluxo é:

$$\Phi_{(1)2} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BS \cos \theta = \frac{\mu_0 i \pi b^2}{2a} \cos \theta$$



Mas o fluxo também é dado pelo produto entre a indutância mútua  $L_{(1)2}$  e a corrente  $i$ , portanto::

$$\Phi_{(1)2} = L_{(1)2} i$$

Por conseguinte,

$$L_{(1)2} = \frac{\mu_0 \pi b^2}{2a} \cos \theta$$

### 9.7 Questão 7

---

Vimos que módulo do campo magnético de um ponto a uma distância  $x$  do fio é:

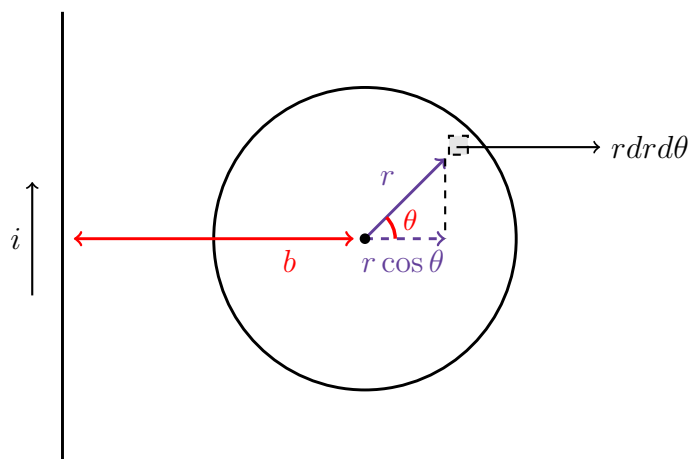
$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}$$

Trabalhando com coordenadas polares, o campo magnético em um ponto interno a espira circular é:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi(b + r \cos \theta)}$$

Onde  $r$  representa a distância radial do ponto em relação a centro da espira, conforme a figura.





Como o elemento de área em coordenadas polares é  $dS = r dr d\theta$ , o fluxo na espira é:

$$\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 i}{\pi} \int_0^a \int_0^\pi \frac{r dr d\theta}{b + r \cos \theta} \quad (9.7.1)$$

Começaremos integrando em relação à  $\theta$ , isto é, devemos calcular, tomando  $r = \text{cte.}$ :

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{b + r \cos \theta}$$

O cálculo deste integral é um pouco extenso. Primeiro realizaremos a substituição:

$$t = \tan \frac{\theta}{2}$$

Pois assim,

$$t = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\theta}{2}}}{\cos \frac{\theta}{2}}$$

Ao rearranjar a equação obtemos:

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{1 + t^2}$$

Mas pela fórmula do meio ângulo, temos que:

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

Assim, pelas fórmulas anteriores encontramos que:

$$\cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Ao derivar ambos os lados podemos encontrar a relação entre os diferenciais:

$$-\sin \theta d\theta = -\frac{4t}{(1 + t^2)^2} dt$$

Mas,

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{(1 - t^2)^2}{(1 + t^2)^2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Assim,

$$d\theta = \frac{2}{1 + t^2} dt$$

Finalmente, podemos reescrever a integral como:

$$\int \frac{d\theta}{b + r \cos \theta} = \int \frac{1}{b + r \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \left(\frac{2}{1+t^2}\right) dt$$

Simplificando,

$$2 \int \frac{1}{(b - r)t^2 + (b + r)} dt$$

Fazendo uma segunda substituição, da forma:

$$t = \sqrt{\frac{b+r}{b-r}} \tan \varphi$$

Temos que,

$$dt = \sqrt{\frac{b+r}{b-r}} \sec^2 \varphi d\varphi$$

Assim, podemos reescrever a integral anterior como:

$$\frac{2}{\sqrt{b^2 - r^2}} \int d\varphi = \frac{2}{\sqrt{b^2 - r^2}} \arctan \left( \sqrt{\frac{b-r}{b+r}} t \right) = \frac{2}{\sqrt{b^2 - r^2}} \arctan \left( \sqrt{\frac{b-r}{b+r}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \quad \blacksquare$$

Aplicando os limites de integração apropriados, obtemos:

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{r + b \cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{b^2 - r^2}} \arctan \left( \sqrt{\frac{b-r}{b+r}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{\sqrt{b^2 - r^2}}$$

Assim, a integral na (9.7.2) fica:

$$\Phi = \frac{\mu_0 i}{\pi} \int_0^a \int_0^\pi \frac{r dr d\theta}{b + r \cos \theta} = \mu_0 i \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{b^2 - r^2}} \quad (9.7.2)$$

Através de uma substituição trigonométrica do tipo  $r = b \sin \varphi$  é possível resolver a integral acima, o que nos leva a:

$$\Phi = \mu_0 i \left[ -\sqrt{b^2 - r^2} \right]_0^a = \mu_0 i (b - \sqrt{b^2 - r^2})$$

Mas  $\Phi = L_{12}i$ , portanto:

$$L_{12} = \mu_0 i (b - \sqrt{b^2 - r^2}) = \mu_0 i b \left[ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{b}\right)^2} \right]$$

### 9.8 Questão 8

Assim como no caso da Bobina toroide, o campo magnético no centro do Toróide, a uma distância  $r$  do seu centro pode ser encontrado a partir da Lei de Ampère:

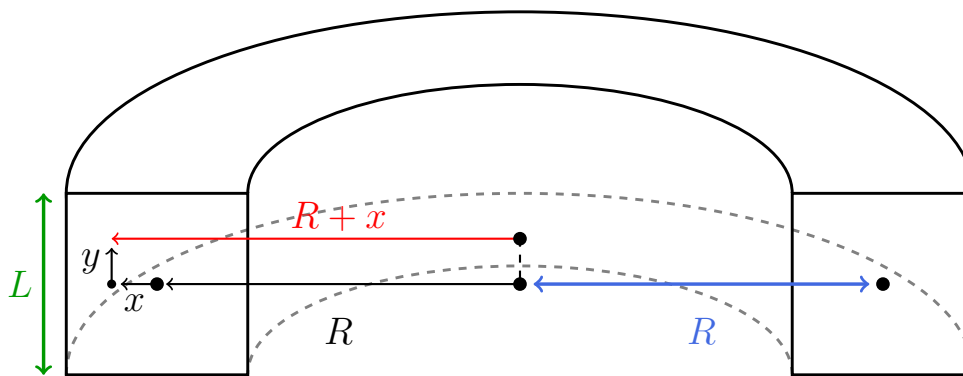
$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B = N\mu_0 i$$

O que resulta em:

$$\mathbf{B} = \frac{N\mu_0 i}{2\pi r} \hat{\mathbf{n}}$$

Onde  $\hat{\mathbf{n}}$  representa o vetor unitário ortogonal à seção transversal do toróide. Se tomarmos a origem como o centro da seção quadrada do Toróide, o campo magnético para um ponto no plano  $x, y$  fica:

$$\mathbf{B}(x, y) = \frac{N\mu_0 i}{2\pi(R+x)} \hat{\mathbf{n}}$$



Além disso, um elemento de área na seção transversal do Toróide é  $dS = dxdy$ , com tanto  $x$  quanto  $y$  variando de  $-L/2$  até  $L/2$ . Deste modo, o fluxo resultante sobre o Toróide é:

$$\Phi = N \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} N^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dxdy}{R+x}$$

Integrando primeiro em relação a  $y$  encontramos:

$$\Phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} N^2 L \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dx}{R+x}$$

E agora em relação a  $x$ , obtemos:

$$\Phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} N^2 L \ln \left( \frac{2R+L}{2R-L} \right)$$

Como  $\Phi = L_{11}i$ , então:

$$L_{11} = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 L \ln \left( \frac{2R+L}{2R-L} \right)$$

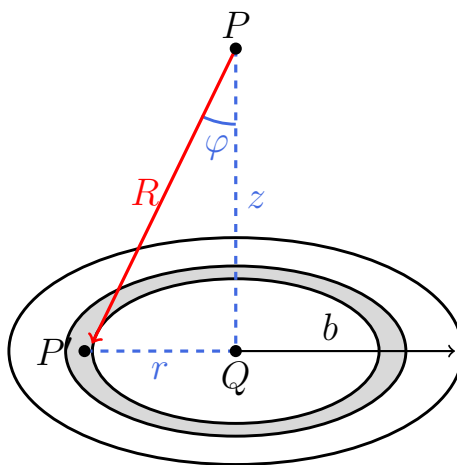
### 9.9 Questão 9

No contexto do problema podemos tratar a pequena espira de raio  $a$  como um dipolo magnético  $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{z}}$ . Sabemos que o campo magnético devido a um dipolo magnético é dado por (Conferir seção 8.3, eq. 8.3.16, pg 153 do livro texto):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{R})}{R^5} \mathbf{R} - \frac{\mathbf{m}}{R^3} \right]$$

Como  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{R} = mR \cos \varphi = mR(z/R) = mz$  e  $\mathbf{R}/R = \hat{\mathbf{R}}$ , podemos reescrever a expressão anterior como:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3mz}{R^4} \hat{\mathbf{R}} - \frac{m}{R^3} \hat{\mathbf{z}} \right]$$



Agora, veja que para uma faixa circular de espessura  $dr$ , a uma distância  $R$  do dipolo, podemos escrever sua área como  $d\mathbf{S} = 2\pi r dr \hat{\mathbf{z}}$ . Deste modo, podemos escrever o fluxo como:

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^a \left[ \frac{3mz}{R^4} \hat{\mathbf{R}} - \frac{m}{R^3} \hat{\mathbf{z}} \right] \cdot [2\pi r dr \hat{\mathbf{z}}]$$

Como  $\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \cos \varphi = z/R$  e  $\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 1$ , ficamos com:

$$\Phi = \frac{\mu_0 m}{2} \int_0^b \left[ \frac{3z^2 r}{R^5} - \frac{r}{R^3} \right] dr$$

Mas,  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ , por conseguinte:

$$\Phi = \frac{\mu_0 m}{2} \int_0^b \left[ \frac{3z^2 r}{(z^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{r}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \right] dr$$

O resultado da primeira integral é:

$$\int_0^b \frac{3z^2 r}{(z^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}} dr = -\frac{z^2}{(b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e da segunda,

$$-\int_0^b \frac{r}{(z^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}} dr = \frac{1}{(b^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Logo:

$$\Phi = \frac{\mu_0 m}{2} \left[ \frac{1}{(b^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{z^2}{(b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = -\frac{\mu_0 m}{2} \frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

A variação do fluxo em relação ao tempo é, pela regra da cadeia:

$$\frac{d\Phi(z(t))}{dt} = \frac{d\Phi}{dz} \frac{dz}{dt}$$

Mas  $dz/dt = -v$  e  $\frac{d\Phi}{dz} = \frac{3b^2}{2} \frac{(2z)}{(z^2 + b^2)^{\frac{5}{2}}}$ , logo:

$$\frac{d\Phi(z(t))}{dt} = -\frac{3}{2} \mu_0 \frac{mb^2 v z}{(z^2 + b^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Pela lei de Lenz, temos que  $\mathbf{E} = -d\Phi/dt = Ri$  e  $m = I\pi a^2$ , a resposta fica:

$$i = \frac{3}{2} \mu_0 \frac{\pi a^2 b^2 v I z}{Ri(z^2 + b^2)^{\frac{5}{2}}}$$

---

**9.10**    Questão 10

---

**9.11**    Questão 11

---

**9.12**    Questão 12

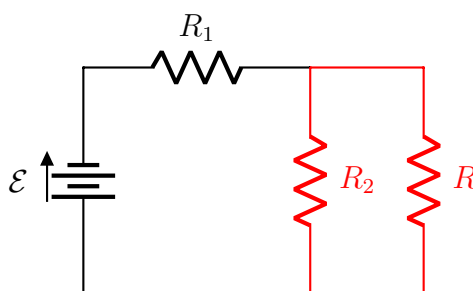
---

# 10 Capítulo 10

## 10.1 Questão 1

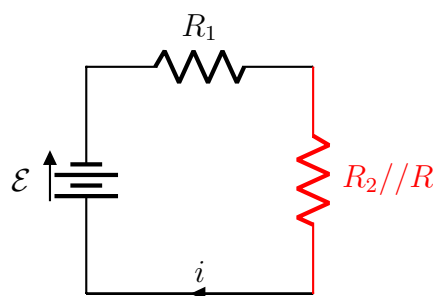
A o valor de  $R$  para o qual a potência dissipada é afetada o mínimo possível por pequenas variações é o valor que minimiza ou maximiza a potência. Deste modo, devemos procurar um  $R$  tal que  $dP/dR = 0$ . A resistência equivalente do circuito é:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 // R$$



Onde  $R_2 // R$  representa a associação em paralelo entre  $R_2$  e  $R$ . Deste modo, temos que a corrente  $i$  que passa pela resistência  $R_1$  e a resistência equivalente  $R_2 // R$  vale:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}}$$



E a tensão sob a resistência equivalente  $R_2 // R$ , que é a tensão sob resistores  $R_2$  e  $R$ , vale:

$$V = (R_2 // R)i = \frac{(R_2 // R)}{R_{eq}} \mathcal{E}$$

Como a potência dissipada no resistor  $R$  é  $P = Vi_R$ , e a corrente  $i_R$  que passa pelo resistor  $R$  pode ser escrita como  $i_R = V/R$ , então a potência pode ser calculada como  $P = \frac{V^2}{R}$ . Deste modo:

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{1}{R} \left[ \frac{(R_2 // R)}{R_{eq}} \mathcal{E} \right]^2 = \frac{1}{R} \left[ \frac{\frac{RR_2}{R+R_2}}{R_1 + \frac{RR_2}{R+R_2}} \right]^2 \mathcal{E}^2$$

Substituindo pelos valores numéricos  $R_1 = 20$  e  $R_2 = 60$  obtemos, após algumas simplificações:

$$P = \frac{1}{R} \left[ \frac{\frac{R60}{R+60}}{20 + \frac{R60}{R+60}} \right]^2 \mathcal{E}^2 = \frac{60R}{(1200 + 80R)^2} \mathcal{E}^2$$

Derivando e igualando a zero:

$$\frac{dP}{dR} = 0 \implies \frac{d}{dR} \left[ \frac{R}{(1200 + 80R)^2} \right] = \left[ \frac{1}{(1200 + 80R)^2} - \frac{2(80)R}{(1200 + 80R)^3} \right] = 0$$

Resolvendo para  $R$ , encontramos:

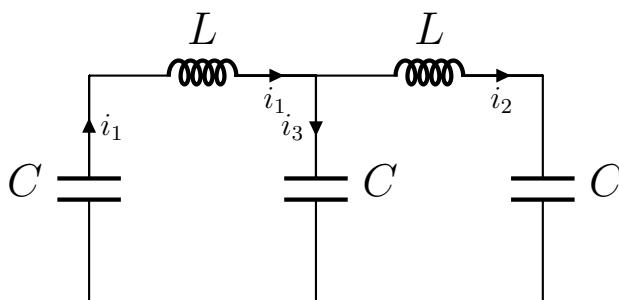
$$\boxed{R = 15\Omega}$$

## 10.2 Questão 2

## 10.3 Questão 3

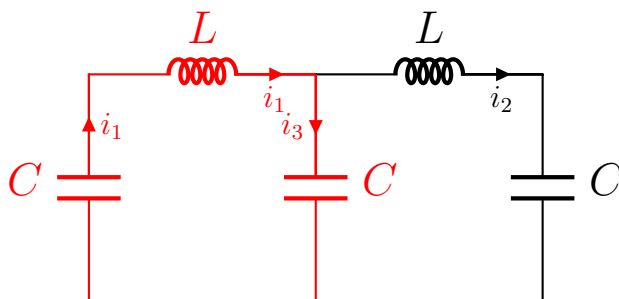
## 10.4 Questão 4

Podemos resolver este exercício simplesmente através das leis de Kirchoff. A lei de Kirchoff para malhas nos permite extrair duas equações. Primeiro, considere as correntes  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  conforme mostradas na figura:



Agora, considere a malha destacada:





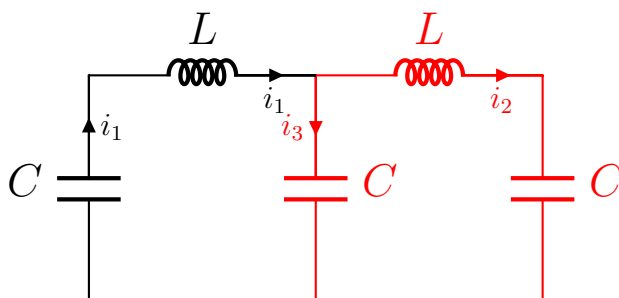
Como a soma das tensões deve ser nula, e a queda de tensão para todos os componentes está no mesmo sentido, então:

$$L \frac{di_1}{dt} + \frac{q_1}{C} + \frac{q_3}{C} = 0$$

Mas como  $i = dq/dt$ , então podemos reescrever a expressão anterior como uma EDO de segunda ordem:

$$i) \quad \ddot{q}_1 + \frac{1}{LC}(q_1 + q_3) = 0$$

Agora, considere a segunda malha:



Veja que a queda de tensão no resistor pelo qual passa a corrente  $i_3$  é contrária a queda de tensão do indutor e capacitor pelo qual passa a corrente  $i_2$ , portanto, a EDO fica:

$$ii) \quad \ddot{q}_2 + \frac{1}{LC}(q_2 - q_3) = 0$$

Agora, a lei de Kirchoff para nós nos permite extrair uma última informação. Como as correntes se relacionam por  $i_1 = i_2 + i_3$ , portanto podemos reescrever a EDO  $i)$  como:

$$iii) \quad (\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) + \frac{1}{LC}(q_2 + 2q_3) = 0$$

O circuito funciona como um sistema acoplado com dois graus de liberdade, pois há 3 correntes distintas mas 1 "vínculo", estabelecido pela relação  $i_1 = i_2 + i_3$ . A primeira frequência de oscilação pode ser obtida se fizermos  $i) + ii)$ , pois o termo contendo  $q_3$  desaparece, e obtemos:

$$(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + \frac{1}{LC}(q_1 + q_2) = 0$$

Podemos introduzir uma nova variável  $\eta = q_1 + q_2$ , pois assim a EDO acima fica:

$$\ddot{\eta} + \frac{1}{LC}\eta = 0$$

E claramente:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Por fim, veja que pela equação  $ii)$  temos:

$$\ddot{q}_2 + \frac{1}{LC}q_2 = \frac{1}{LC}q_3$$

Portanto, podemos substituir na expressão  $iii)$ , obtendo:

$$\ddot{q}_3 + \frac{3}{LC}q_3 = 0$$

Assim, a segunda frequência é:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3}{LC}}$$

---

**10.5**    **Questão 5**

---

**10.6**    **Questão 6**

---

A impedância do trecho contendo o indutor é:

$$Z_1 = R + iX_L = R + i\omega L$$

E para o trecho contendo o capacitor,

$$Z_1 = R - iX_C = R - \frac{i}{\omega C}$$

Deste modo, a impedância equivalente é dada por:

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R + i\omega L} + \frac{1}{R - \frac{i}{\omega C}}$$

Após tirar o MMC e algumas manipulações obtemos:

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{2R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + iR\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + \frac{L}{C}}$$

Mas se  $\tau_C = \tau_L$  então  $RC = L/R$ , o que implica que  $R^2 = L/C$ . Logo, podemos substituir o termo  $L/C$  no denominador por  $R^2$ , obtendo:

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{2R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{2R^2 + iR\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Veja que os termos no numerador e denominador diferem somente por um termo  $R$  sendo multiplicado, portanto as explicações se cancelam após colocarmos  $R$  em evidência no denominador. Como  $R^2 = L/C$ , obtemos então:

$$\boxed{\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{R} = \sqrt{\frac{C}{L}}}$$

### 10.7 Questão 7

Sendo  $i_1$  a corrente que passa pelo capacitor e pelo indutor  $L_1$  e  $i_2$  a corrente que passa pelo indutor  $L_2$ , a queda de tensão nos resistores  $L_1$  e  $L_2$  é dada por (Conferir equação 9.5.19, da seção 9.5, pg 179),

$$\begin{aligned} V_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \\ V_2 &= L_2 \frac{di_2}{dt} + L_{12} \frac{di_1}{dt} \end{aligned}$$

respectivamente. Mas pela lei de Kirchoff para malhas devemos ter, para a malha na qual está contido o resistor  $L_2$ :

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + L_{12} \frac{di_1}{dt} = 0 \implies \frac{di_2}{dt} = -\frac{L_{12}}{L_2} \frac{di_1}{dt}$$

Já para a malha contendo o capacititor e o indutor, devemos ter:

$$\frac{q_1}{C} + L_2 \frac{di_2}{dt} + L_{12} \frac{di_1}{dt} = 0$$

Substituindo o termo  $di_2/dt$  em termos de  $di_1/dt$ :

$$\frac{q_1}{C} + L_1 \frac{di_1}{dt} - \frac{L_{12}^2}{L_2} \frac{di_1}{dt} = 0$$

Mas  $di_1/dt = \ddot{q}_1$ , portanto a equação anterior fica:

$$\ddot{q}_1 + \frac{L_2}{(L_1 L_2 - L_{12}^2)C} q_1 = 0$$

A frequência angular de oscilação vale, portanto:

$$\omega = \sqrt{\frac{L_2}{(L_1 L_2 - L_{12}^2)C}}$$

---

**10.8**   **Questão 8**

A impedância do capacitor é dada por:

$$Z_1 = -iX_c = -\frac{i}{\omega C}$$

E para o indutor e resistor:

$$Z_2 = R + iX_L = R + i\omega L$$

A impedância equivalente do circuito vale, então:

$$Z_{eq} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = -\frac{i}{\omega C} \left[ \frac{R + i\omega L}{R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \right] = -\left[ \frac{Ri - \omega L}{\omega RC - i(\omega^2 LC + 1)} \right]$$

Multiplicando o numerador e o denominador pelo complexo conjugado da expressão  $R\omega C + i(\omega^2 LC + 1)$  no denominador obtemos:

$$Z_{eq} = -\left[ \frac{(Ri - \omega L)(\omega RC - i(\omega^2 LC - 1))}{K} \right]$$

Onde  $K$  um número real, resultante da multiplicação do denominador pelo seu conjugado. Deste modo, para encontrar o valor de  $\omega$  para o qual a reatância se anula, basta encontrar  $\omega$  que deixa a parte imaginária na expressão no numerador nula. Obtemos, após realizar a distributiva:

$$(Ri - \omega L)(\omega RC - i(\omega^2 LC - 1)) = R + i\omega(\omega^2 L^2 C - L + R^2 C)$$

Igualando a parte imaginária a zero, temos:

$$\omega^2 L^2 C - L + R^2 C = 0$$

Cuja solução é:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

### 10.9 Questão 9

### 10.10 Questão 10

### 10.11 Questão 11

### 10.12 Questão 12

a) Podemos escrever o versor normal a espira como:

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}} = \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \hat{\mathbf{y}} = \cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}} + \sin(\omega t) \hat{\mathbf{y}}$$

Onde  $\theta$  representa o ângulo percorrido pelo vetor ao longo do plano  $xy$ . Como  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{x}}$  e  $\mathbf{S} = S\hat{\mathbf{n}}$  fluxo sob a espira é dado por:

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BS(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) = BS \cos(\omega t)$$

E pela Lei de Lenz, a f.e.m. induzida é:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega BS \sin(\omega t)$$

A impedância da espira é dada por  $Z = R + iX_L = R + i\omega L$ , deste modo, seu módulo vale:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

E a fase correspondente é:

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{\omega L}{R} \right)$$

Como na forma polar temos que  $Z = |Z|e^{i\varphi}$ , a corrente correspondente é:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{Z} = \frac{\omega BS \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

b) Como  $\mathbf{m} = I\mathbf{S} = IS\hat{\mathbf{n}}$ , ficamos com:

$$\boxed{\mathbf{m} = I\mathbf{S} = IS[\cos(\omega t)\hat{\mathbf{x}} + \sin(\omega t)\hat{\mathbf{y}}]}$$

c) O torque sob a espira é dado por:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

Portanto basta calcular o produto vetorial:

$$\mathbf{m} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ IS \cos(\omega t) & IS \sin(\omega t) & 0 \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = BIS \sin(\omega t) \hat{\mathbf{z}}$$

Portanto:

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = BIS \sin(\omega t) \hat{\mathbf{z}}}$$

---

**10.13**    **Questão 13**

---

# 11 Capítulo 11

## 11.1 Questão 1

## 11.2 Questão 2

## 11.3 Questão 3

a) Pela equação 11.8.8 da seção 11.8, pág. 254, temos que a *densidade* de energia magnética vale:

$$\mu_M = \frac{B^2}{2\mu}$$

Pois  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ . Como o volume compreendido pelo toróide é  $V = lS$ , a energia armazenada no anel de Rowland é:

$$U_M = \mu_M V = \frac{B^2}{2\mu} lS$$

Podemos agora escrever o campo magnético em termos do fluxo, pois:

$$\Phi = \frac{B}{S}$$

Assim, a energia fica,

$$U_M = \frac{1}{2} \left( \frac{l}{\mu S} \right) \Phi^2$$

Mas a relutância magnética é dada por:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S}$$

Assim, a expressão para a energia se torna:

$$U = \frac{\mathcal{R}\Phi^2}{2}$$

b) A auto-indutância é:

$$L = \frac{\Phi}{i}$$

E temos,

$$\Phi = NBS$$

e,

$$Bl = \mu Ni \implies i = \frac{Bl}{N\mu}$$

Substituindo na expressão para  $L$ :

$$L = NBS \left( \frac{N\mu}{Bl} \right)$$

Como  $\mathcal{R} = l/\mu S$ , a expressão para a auto-indutância fica:

$$\boxed{L = \frac{N^2}{\mathcal{R}}}$$

---

**11.4**    **Questão 4**

A relutância da porção de ferro é dada por:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S}$$

Onde  $l$  representa o comprimento do toróide,  $\mu$  a permeabilidade no seu interior e  $S$  a área da seção transversal. Já para o entreferro:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{l_0}{\mu_0 S}$$

Sendo  $l_0$  o comprimento do entreferro. Deste modo, a força magnetomotriz  $\mathcal{M} = Ni$  é dada por:

$$Ni = \mathcal{R} + \mathcal{R}_0 = \left( \frac{l}{\mu S} + \frac{l_0}{\mu_0 S} \right) \Phi$$

Resolvendo para a permeabilidade relativa, dada por  $\mu_R = \mu/\mu_0$ :

$$\mu_R = \frac{Bl}{\mu_0 Ni - Bl_0}$$

Como  $l = 2\pi r$ , obtemos, ao utilizar os valores do enunciado:

$$\boxed{\mu_R = \frac{1 \times 2\pi \times 5 \times 10^{-2}}{4\pi \times 10^3 \times 1 - 1 \times 10^{-3}} \approx 1.22 \times 10^3}$$



**11.5** Questão 5

a) A relutância da porção de ferro é dada por:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S}$$

De acordo com o resultado do exercício 3, a energia armazenada é  $U = \mathcal{R}\Phi^2/2$ , portanto:

$$U = \frac{1}{2} \left( \frac{l}{\mu S} \right) B^2 S^2 = \frac{B^2 l S}{2\mu}$$

Como  $\mu = \mu_R \mu_0 = 1220\mu_0$ , botemos:

$$U = \frac{1^2 \times (2\pi \times 5 \times 10^{-2}) \times 10^{-4}}{2 \times 1220 \times 4\pi \times 10^{-7}} = 0.01 J$$

b) Adotando o mesmo procedimento do item anterior, obtemos:

$$U = \frac{1^2 \times 10^{-3} \times 10^{-4}}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}} = 0.04 J$$

c) Novamente pelo resultado do problema 3, temos que  $L = N^2/\mathcal{R}_{eq}$ . A relutância equivalente do sistema corresponde a relutância do entreferro mais a relutância do anel de ferro:

$$\mathcal{R}_{eq} = \frac{l_0}{\mu_0 S} + \frac{l}{\mu_R \mu S} = \frac{1}{S\mu_0} \left( l_0 + \frac{l}{\mu_R} \right)$$

Substituindo na expressão para a indutância:

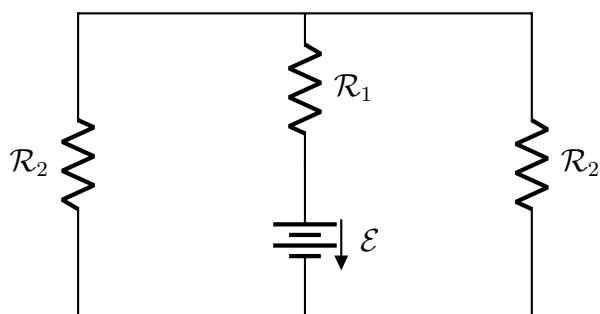
$$L = \frac{\mu_0 S N^2}{\left( l_0 + \frac{l}{\mu_R} \right)}$$

Obtemos, ao utilizar os valores numéricos:

$$L = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10^{-4} \times (1000)^2}{\left( 10^{-3} + \frac{2\pi \times 5 \times 10^{-2}}{1220} \right)} = 0.1 H$$

**11.6** Questão 6

Podemos imaginar o circuito magnético da seguinte maneira:



Com a relutância  $\mathcal{R}_1$  dada por:

$$\mathcal{R}_1 = \frac{l_1}{\mu S} = \frac{b}{\mu S}$$

E com,

$$\mathcal{R}_2 = \frac{l_2}{\mu S} = \frac{2a + b}{\mu S}$$

Se escolhermos uma malha do circuito, devemos ter que:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$$

Onde  $\mathcal{M}_1$  e  $\mathcal{M}_2$  representa a força magnetomotriz no braço externo e no braço central, respectivamente. Além disso, se o fluxo no braço central é  $\Phi_1$ , então devemos ter:

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_2 \implies \Phi_2 = \frac{\Phi_1}{2}$$

Por fim, lembre-se que podemos escrever a força magnetomotriz como  $\mathcal{M} = \mathcal{R}\Phi = \mathcal{R}BS$ , assim, temos que:

$$\mathcal{M} = \mathcal{R}_1 \Phi_1 + \mathcal{M}_2 \Phi_2 = B_1 \left( \frac{b}{\mu} + \frac{b + 2a}{2\mu} \right)$$

Resolvendo para  $B_1$  obtemos:

$$B_1 = \frac{2\mu Ni}{2a + 3b}$$

e por conseguinte,

$$B_2 = \frac{\mu Ni}{2a + 3b}$$

**11.7** Questão 7

O campo  $H$  é, por definição:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

Como  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , temos:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$$

Se  $\mathbf{H} = -\nabla \xi$ , então a expressão acima fica:

$$\nabla \cdot \nabla \xi = \Delta \xi = \nabla \cdot \mathbf{M}$$

A densidade volumétrica de carga de polarização se relaciona com o vetor de polarização dielétrica através de:

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

Portanto, pela analogia entre  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{M}$ , temos que:

$$\Delta \xi = \nabla \cdot \mathbf{M} = -\rho_m$$

**11.8** Questão 8

Se considerarmos que a magnetização tem a forma:

$$\mathbf{M} = M \hat{\mathbf{z}}$$

E que o versor normal à superfície do cilindro é  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$ , temos, pela relação  $\mathbf{J}_m = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$  entre densidade de corrente e magnetização, que  $\mathbf{J}_M$  tem direção  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ , pois  $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}$ . Ou seja, a densidade de corrente é tangencial à superfície do cilindro, e assume a forma de espiras circulares ao longo de sua superfície. Assim, temos que:

$$dm = (di)S = J_M \overbrace{S dz}^{dV} \implies di = M dz$$

Onde  $dm$  representa o momento de dipolo magnético de uma espira de corrente  $di$ .

Foi visto no capítulo 8 que o campo magnético em um ponto no eixo de uma espira, a uma distância  $z$  do centro seu centro, sendo  $a$  o raio da espira e  $di$  a corrente pela qual ela é percorrida, é:

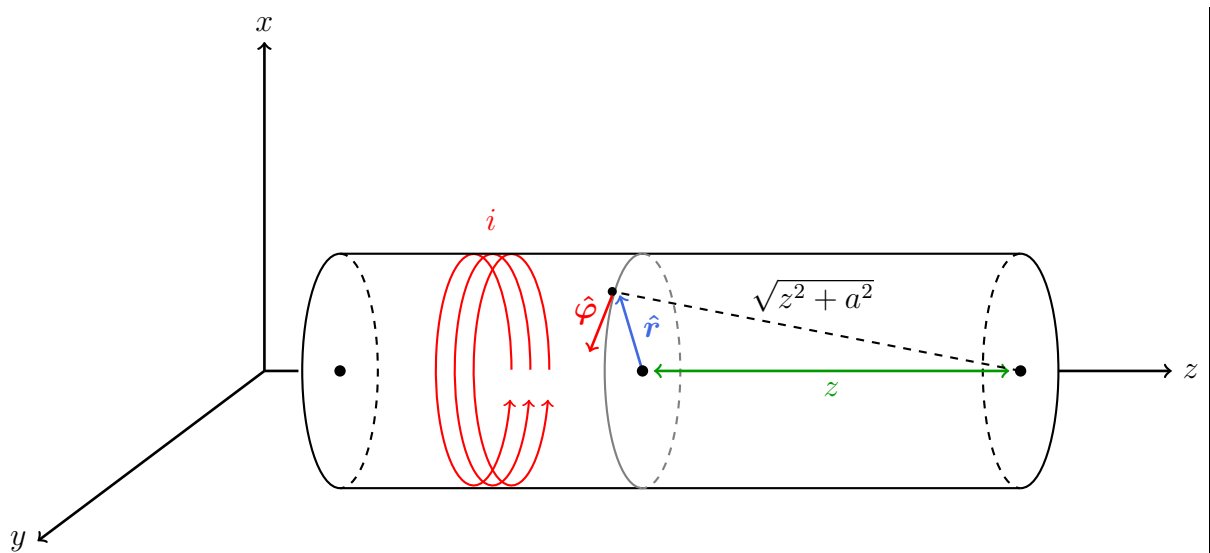
$$\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0 a^2 di}{2(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{\mathbf{z}}$$

Assim, o campo total corresponde a soma da contribuição de cada espira:

$$\mathbf{B} = \int B_0 = \int \frac{\mu_0 a^2}{2(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \underbrace{di \hat{\mathbf{z}}}_{M dz \hat{\mathbf{z}}} = \int \frac{\mu_0 a^2}{2(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{M} dz$$

Integrando em relação a  $z$ , a fim de obter a contribuição total do campo magnético, obtemos:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \mathbf{M}$$



Se  $z \gg a$ , podemos reescrever a expressão anterior e utilizar a aproximação  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ , obtendo:

$$B = \frac{\mu_0}{2} \left( 1 + \frac{a^2}{z^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{M} \approx \frac{\mu_0}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{2z^2} \right) \mathbf{M}$$

Assim, se  $z = L/2$ , que é a posição correspondente ao centro do cilindro, temos que:

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu_0 i \left( 1 - \frac{2a^2}{z^2} \right) \mathbf{M}}$$

E se  $z = L$ , que corresponde ao norte do cilindro, temos:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2} \left(1 - \frac{a^2}{2z^2}\right) \mathbf{M}$$

## 12 Capítulo 12

### 12.1 Questão 1

---

### 12.2 Questão 2

---

a) Pelo resultado do exemplo da seção 8.1, temos que:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \hat{\varphi}$$

Mas como  $i = j\pi a^2$ :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 j a}{2} \hat{\varphi}$$

b) Como  $\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} = \frac{j}{\sigma} \hat{\mathbf{z}}$  e,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

Temos,

$$\mathbf{S} = -\frac{j^2}{2\sigma} a \hat{\rho}$$

c) A potência dissipada pelo efeito Joule é:

$$P = Vi = Ri^2 = \frac{l}{\sigma S} (jS)^2 = \frac{j^2 \pi a^2 l}{\sigma}$$

Onde usamos a segunda lei de Ohm para calcular a resistência de um trecho de comprimento  $l$  do fio. Agora, como o vetor de Poynting atravessa a área,

$$\mathbf{A} = 2\pi a l \hat{\rho}$$

que corresponde a área compreendida pela superfície de um trecho de comprimento  $l$  do fio, o fluxo resultante é:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} = -\left(\frac{j^2}{2\sigma} a\right) (2\pi a l) = \frac{j^2 \pi a^2 l}{\sigma}$$

Ou seja, o fluxo do vetor de Poynting através da superfície e a potência dissipada pelo efeito Joule são iguais.

**12.3** Questão 3

Podemos relacionar a potência da lâmpada com o vetor de Poynting, que por sua vez está relacionado à intensidade do campo elétrico e do campo magnético. Para a onda plana, que tem densidade de energia elétrica e magnética iguais, vale a relação:

$$S = cU = c(2U_E) = c(2U_M)$$

Mas o vetor de Poynting também é igual à potência irradiada por área, ou seja, vale que:

$$S = \frac{P}{A}$$

No caso do campo elétrico, sabemos que densidade de energia vale:

$$U_E = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$$

Relacionando com o vetor de Poynting, temos:

$$U_E = \frac{S}{2c} \implies E = \sqrt{\frac{P}{Ac} \left( \frac{1}{\varepsilon_0} \right)}$$

Substituindo pelos valores numéricos, temos:

$$E = \sqrt{\frac{100}{4\pi \times 1^2 \times 3 \times 10^8} \times 4\pi \times 9 \times 10^9} \approx 54.7 \text{ V/m}$$

Também podemos fazer o mesmo para o campo magnético, pois sabemos que:

$$U_M = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

O que nos leva a:

$$B = \sqrt{\frac{P\mu_0}{Ac}}$$

Que resulta em,

$$B = \sqrt{\frac{100}{4\pi \times 1^2 \times 3 \times 10^8} \times 4\pi \times 10^{-7}} \approx 1.83 \times 10^{-7} \text{ T}$$

**12.4**    **Questão 4**

---

a) Para resolver esta questão, podemos utilizar a equação 12.5.18 da seção 12.5, que relaciona a intensidade da onda com sua amplitude:

$$I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_{max}^2$$

O que nos leva a:

$$E_{max} = \sqrt{\frac{2I}{c\varepsilon_0}}$$

A intensidade da radiação vale, no SI:

$$I = \frac{2cal}{cm^2min} = \frac{1393J}{m^2s}$$

Assim, substituindo pelos valores numéricos na expressão para  $E_{max}$  obtemos,

$$E_{max} = \sqrt{\frac{2 \times 1393}{3 \times 10^8}} \times 3 \times 10^9 \approx 1.02 \times 10^3 V/m$$

Agora, para o campo magnético, temos que (Verifique a 12.5.14):

$$B_{max} = \frac{E_{max}}{c}$$

Portanto:

$$B_{max} = \frac{1.02 \times 10^3}{3 \times 10^8} = 3.4 \times 10^{-6} T$$

b) Como a energia deve ser conservada, devemos ter que:

$$I_0(4\pi R^2) = I(4\pi L^2)$$

Onde  $I_0$  e  $R$  representam a intensidade da radiação na superfície do Sol e seu raio, respectivamente, e  $I$ , a intensidade da radiação que atinge a Terra e  $L$  a distância Terra-Sol. Substituindo pelos dados do enunciado o valor obtido para  $I_0$  é:

$$I_0 = \left(\frac{L}{R}\right)^2 I = \left(\frac{1.5 \times 10^{11}}{6.9 \times 10^8}\right)^2 \times 1393 \approx 6.58 \times 10^7 \frac{W}{m^2}$$

**12.5**    **Questão 5**

---