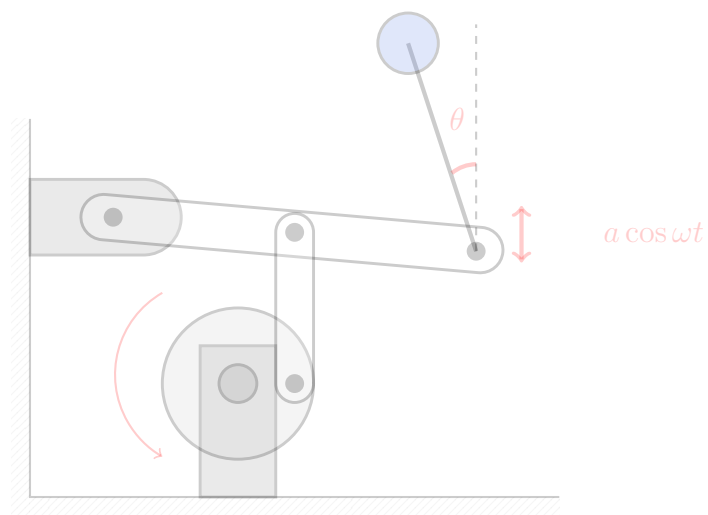


Mecânica Lagrangiana e Hamiltoniana



GABRIEL O. ALVES

Conteúdo

1	Cálculo das Variações	4
1.1	Contextualização	4
1.2	Funcionais	5
1.3	Condição necessária para extremizar um funcional: A equação de Euler - Lagrange	6
1.4	A equação de Euler-Lagrange	7
1.5	A equação de Euler-Lagrange para várias funções	12
1.6	Identidade de Beltrami	12
	Problemas	15
2	Dinâmica Lagrangiana	16
2.1	A equação de Lagrange	16
2.2	Definindo a Lagrangiana	20
2.3	Resolvendo problemas com a Lagrangiana	25
2.4	Multiplicadores de Lagrange	34
2.4.1	Vínculos holonômicos	35
2.4.2	Vínculos não-holonômicos	37
2.5	Leis da conservação	39
2.6	Teorema de Noether	45
	Problemas	51
3	Dinâmica Hamiltoniana	57
3.1	Equações de Hamilton	57
3.2	Transformações Canônicas	62
3.2.1	Colchetes de Poisson	62
3.2.2	Funções geradoras	65
3.3	Espaço de Fase	70
3.4	Teorema de Liouville	75
3.5	Variáveis de Ação e Ângulo	81
3.6	Invariantes Adiabáticos	85
	Problemas	92
4	Apêndice	99
4.1	A notação δ	99
4.2	Transformada de Legendre	100
4.3	Teorema de Euler para funções homogêneas	104
4.4	A Jacobiana	105

5	Soluções	110
5.1	Capítulo 1	110
5.2	Capítulo 2	115
5.3	Capítulo 3	128

1 Cálculo das Variações

1.1 Contextualização

Em 1696 foi proposto por Johann Bernoulli o problema da Braquistócrona, um dos primeiros problemas de cálculo das variações, que pode ser formulado como:

Encontre a trajetória de uma partícula entre dois pontos quaisquer, em um campo gravitacional constante e na ausência de qualquer força dissipativa, na qual o tempo necessário para completar o percurso seja mínimo.

Após sua formulação, Bernoulli desafiou outros cientistas a solucionarem o problema, tarefa na qual obtiveram sucesso: Leibniz, L'Hôpital, Newton ¹, o próprio Johann Bernoulli, e seu irmão Jakob Bernoulli.[2]. Surpreendentemente, a trajetória, ao contrário do que a intuição pode nos levar a pensar, é na realidade um **ciclóide**, e não uma reta.

O problema possui duas principais maneiras de ser solucionado: uma delas é criativa e relativamente elementar, que foi desenvolvida por Johann em 1696, que utilizou a lei de Snell de maneira sagaz para resolver o problema. A segunda maneira, apesar de mais trabalhosa, apresenta um bom grau de generalidade e foi também extremamente importante para o desenvolvimento da física e matemática, pois é considerada o pontapé inicial para o desenvolvimento do cálculo das variações. Os procedimentos adotados daqui em diante estarão de acordo com a segunda solução.

Problema da Braquistócrona

A formulação inicial da solução consiste encontrar o tempo que a partícula leva para percorrer o comprimento de arco de uma função arbitrária y , que corresponde ao formato da curva percorrida. Em coordenadas cartesianas, o tempo T que a partícula leva para fazer o percurso entre os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) é:

$$t = \int \frac{ds}{v} \quad (1.1.1)$$

Como $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ e pela conservação de energia $mv^2/2 = mg(y - y_0)$, segue que:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(y - y_0)}$$

¹De acordo com alguns relatos, acredita-se que Newton levou em torno de 12 horas para resolver o problema [2]

E a expressão inicial assume a forma:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y-y_0}} dx$$

Ou seja, o problema exige que encontremos uma curva $y = f(x)$ que *minimize* esta integral. Note que T é uma função de y , y' e x , isto é, uma função de uma função. Isto caracteriza uma motivação fundamental do cálculo de variações, que é lidar com máximos e mínimos de **funcionais**, que a grosso modo, são *funções de funções*.

Colocando o problema de maneira mais geral, buscam-se funções y que minimizam (ou maximizam) o funcional J :

$$J\{y\} = \int_{x_0}^{x_1} f(y(x), y'(x), x) dx \quad (1.1.2)$$

Os limites de integração são x_0 e x_1 são fixados. Apesar disso não ser estritamente necessário, limites de integração não fixos tornam o problema mais complexo, visto que seria necessário encontrar x_0 e x_1 , juntamente com $y(x)$, que conferissem um extremo a J .

1.2 Funcionais

Segue uma definição mais adequada para os termo utilizado:

■ **Definição 1.** *Um funcional é uma função que mapeia um conjunto \mathbb{X} de funções em um corpo \mathbb{F} :*

$$J : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{F}$$

■ **Exemplo 1:** Um exemplo simples de funcional, é o comprimento S do arco entre dois pontos $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$ de uma curva qualquer $y = f(x)$, cuja expressão é:

$$S\{y\} = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2} dx$$

Veja que o funcional associa uma função $y = f(x)$ a um número real S , que é o comprimento de arco (Ou seja, nesse caso o corpo é \mathbb{R} , que é o conjunto dos números reais). Foram usadas chaves em $S\{y\}$ para deixar claro que S se trata de um funcional e que seu argumento é a função y .

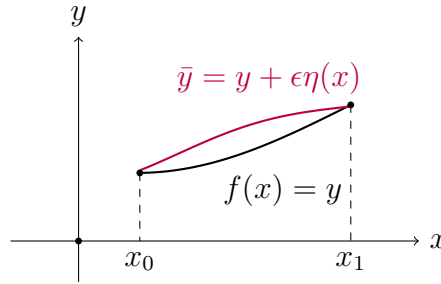
1.3 Condição necessária para extremizar um funcional: A equação de Euler - Lagrange

Suponha que $f(x) = y$ é uma função que minimiza o funcional J . Agora, considere a função:

$$\bar{y} = y + \varepsilon\eta(x) \quad (1.3.1)$$

Onde $\eta(x)$ é uma função arbitrária que é diferenciável no intervalo em questão e que se anula em seus extremos, isto é $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, sendo ε um novo parâmetro introduzido que pode ser tratado como variável independente.

O termo $\varepsilon\eta(x)$ adicionado é denominado **variação da função**. Portanto, estamos considerando uma nova curva \bar{y} , que resulta da variação da função original y . Como admitimos que y minimiza o funcional, a função variada \bar{y} deve fazer com que J *aumente*, para $\varepsilon \neq 0$ e $\eta(x) \neq 0$.



O argumento do funcional para a nova curva é \bar{y} , portanto é possível escrevê-lo como $J\{y + \varepsilon\eta\} = J\{\bar{y}\}$. Mas como as funções $y(x)$ e $\eta(x)$ podem ser tratadas como fixas, o funcional J pode ser escrito como uma nova função K cujo único argumento é ε :

$$J\{\bar{y}\} = K(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} f\{\bar{y}(x), \bar{y}'(x), x\} dx$$

E assim, uma condição necessária para que J contenha um extremo no intervalo considerado é:

$$\left. \frac{dK}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (1.3.2)$$

Pois conforme foi dito, quando $\varepsilon = 0$ a função variada \bar{y} é idêntica a y , que por hipótese é a função que confere um extremo ao funcional. A condição acima é necessária, mas não *suficiente* para ocorrência de um máximo ou mínimo. ²

²A solução pode ser um ponto de sela por exemplo, por isso há outras condições necessárias

1.4 A equação de Euler-Lagrange

Agora é necessário buscar uma condição para maximizar J que não dependa dos parâmetros ε e $\eta(x)$ anteriormente introduzidos.

A derivada de K , com respeito a ε é:

$$\frac{dK}{d\varepsilon} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} dx = 0 \quad (1.4.1)$$

Pela regra da cadeia, a integral se torna:

$$\frac{dK}{d\varepsilon} = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \frac{\partial \bar{y}'}{\partial \varepsilon} \right) dx = 0 \quad (1.4.2)$$

Como $\bar{y} = y + \varepsilon \eta(x)$, segue que $\partial \bar{y} / \partial \varepsilon = \eta(x)$ e $\partial \bar{y}' / \partial \varepsilon = d\eta/dx$ e a (1.4.2) passa a ser:

$$\frac{dK}{d\varepsilon} = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \frac{d\eta}{dx} \right) dx \quad (1.4.3)$$

Integrando o segundo termo por partes:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \implies f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \right) \\ g'(x) = \frac{d\eta}{dx} \implies g(x) = \eta(x) \end{cases}$$

Segue que:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \frac{d\eta}{dx} \right) dx &= f(x)g(x) \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} f'(x)g(x) dx \\ \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \frac{d\eta}{dx} \right) dx &= \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \eta(x) \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \right) \eta(x) dx \end{aligned}$$

O primeiro termo se anula, pois a função $\eta(x)$ é nula nos extremos, conforme a consideração feita na seção anterior.

E a (1.4.3) fica:

$$\frac{dK}{d\varepsilon} = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \eta(x) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \right) \eta(x) \right) dx$$

Ou, alternativamente:

para garantir que y minimize o funcional, contudo o assunto não será abordado aqui. Embora não sejamos capazes de determinar se J se trata de um máximo, mínimo ou ponto de sela, essa condição ao menos nos garante que o funcional em questão é *estacionário*, o que já é suficiente no nosso contexto.

$$\frac{dK}{d\varepsilon} = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \right) \right] \eta(x) dx = 0 \quad (1.4.4)$$

Como $\eta(x)$ é arbitrária, então o termo entre parentêses deve ser identicamente nulo, assim, a partir da expressão anterior, chegamos em:³

$$\left. \frac{dK}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right|_{\varepsilon=0} - \left. \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \right) \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

Mas como $dK/d\varepsilon$ é calculado em $\varepsilon = 0$, a função \bar{y} é y , e assim chegamos em uma equação que só depende da função original y , sua derivada y' e a variável independente x :

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (1.4.5)$$

Que é a equação de Euler-Lagrange, e expressa uma condição necessária para que $y(x)$ torne o funcional $J\{y\}$ estacionário. Em suma:

■ **Resultado 1. Equação de Euler-Lagrange**

Seja $J\{y\}$ um funcional com limite de integração x_0 e x_1 fixos, onde a função f é duplamente e continuamente diferenciável:

$$J\{y\} = \int_{x_0}^{x_1} f(y(x), y'(x), dx) dx$$

Uma condição necessária para que J seja máximo ou mínimo, é que f satisfaça a equação diferencial:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0} \quad (1.4.6)$$

Conhecida como equação de Euler-Lagrange.

Euler foi o primeiro a chegar neste resultado, publicando-o em 1744 em seu trabalho *Methodus Inveniendi*. O método aqui apresentado foi desenvolvido por Lagrange, por este motivo, a equação muitas vezes recebe o nome de equação de Euler-Lagrange. A equação de Euler, além de ser uma poderosa ferramenta matemática, apresenta grande importância histórica, visto que seu livro é considerado

³A passagem utiliza o resultado do lema fundamental do cálculo das variações. Intuitivamente, basta ver que caso a função entre colchetes não seja nula em todo o intervalo, é possível escolher um $\eta(x)$ de modo que a integral seja diferente de zero.

por muitos historiadores como a obra que marca o início da teoria do cálculo das variações.

■ **Exemplo 2:** Mostre que em um plano qualquer, a menor distância entre dois pontos é uma reta.

Em coordenadas cartesianas o comprimento de arco é dado por:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Como pretendemos minimizar S entre (x_0, y_0) e (x_1, y_1) , basta utilizar a equação de Euler-Lagrange. As derivadas parciais são:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

E por conseguinte,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0 \implies \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = k_0$$

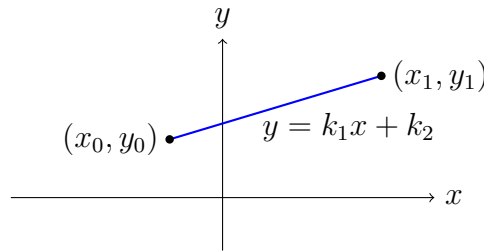
Onde k_0 é uma constante. Simplificando:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_0}{\sqrt{1 - k_0^2}} = k_1$$

Após resolver a EDO chegamos em:

$$y = k_1 x + k_2$$

Que é a equação de uma reta, com as constantes k_1 e k_2 determinadas a partir das condições iniciais, que são os dois pontos dados.



■ **Exemplo 3:** Podemos agora resolver o problema da Baquistrócona. Foi visto anteriormente que o tempo T que partícula leva para percorrer o percurso é:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y-y_0}} dx$$

Contudo, se tratarmos a variável y como independente e considerarmos x função de y , a integral pode ser reescrita alternativamente como:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{y_0}^{y_1} \frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{y-y_0}} dy$$

Pois $\sqrt{1+(dy/dx)^2}dx = \sqrt{1+(dx/dy)^2}dy$. Tomando $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$, podemos identificar a função f como:

$$f(x, x', y) = \frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{y}} \quad (1.4.7)$$

Que deve satisfazer:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right) = 0$$

Calculando as derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{2x'}{\sqrt{y}\sqrt{1+x'^2}}$$

Temos, pela equação de Euler:

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{x'}{\sqrt{y(1+x'^2)}} \right) = 0 \implies \frac{x'}{\sqrt{y(1+x'^2)}} = k_0$$

É possível resolver as equações mais facilmente a partir da parametrização $dx/dy = x' = \tan t$:

$$\frac{\tan t}{\sqrt{y(1+\tan^2 t)}} = k_0 \implies \frac{\tan^2 t}{y \sec^2 t} = k_0^2$$

Fazendo $k_0^2 = k_1$:

$$y = k_1 \sin^2 t$$

Como $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t$, a parametrização para a coordenada y é:

$$y = \frac{k_1}{2}(1 - \cos 2t)$$

Derivando em relação a t :

$$\frac{dy}{dt} = 2 \sin t \cos t$$

Por fim, basta calcular x em função da variável t a partir da relação já estabelecida:

$$dx = \tan t dy = 2 \sin^2 t dt = k_1(1 - 2 \cos 2t) dt$$

Após a integração:

$$x = \frac{k_1}{2}(2t - \sin 2t) + k_2$$

As equações obtidas representam as equações paramétricas de um **ciclóide**, para deixar isto mais explícito faremos as substituições $\theta = 2t$ e $k = R$, e usaremos as condições iniciais $x(0) = 0$ e $y(0) = 0$ (O que implica $k_2 = 0$), a fim de obter:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= R(\theta - \sin \theta) \\ y(\theta) &= R(1 - \sin \theta) \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

A última constante R pode ser determinada a partir de uma segunda condição inicial, que é a de que o ciclóide deve passar pelo ponto x_1, y_1 .

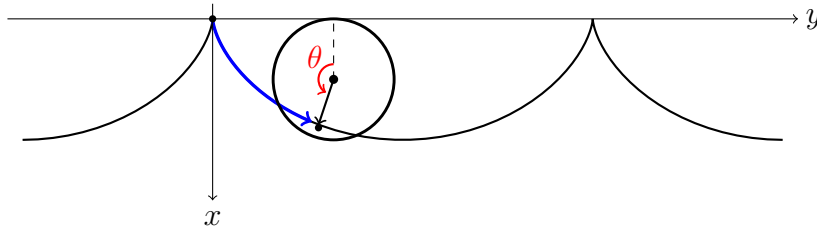


Figura 1: A constante R representa o raio do círculo representado na figura. A equação do ciclóide corresponde a parametrização da posição de um ponto de um círculo de raio R que se move na direção horizontal e gira com velocidade angular constante. Isso ficaria mais claro se escrevessemos o deslocamento angular θ da partícula no círculo como ωt , onde ω é a velocidade angular e t o tempo. Assim é possível ver que a distância horizontal percorrida pelo círculo é $x_c = R\theta = \omega R t$. Em seguida basta calcular a posição da partícula em relação ao centro da circunferência em função do ângulo θ .

1.5 A equação de Euler-Lagrange para várias funções

Considere agora a situação em que se deseja minimizar o funcional:

$$J\{y_1, \dots, y_n\} = \int_{x_0}^{x_1} f(y_1(x), \dots, y_n(x), y'_1(x), \dots, y'_n(x), x) dx \quad (1.5.1)$$

Desta vez, o funcional J depende de diversas funções, que são y_1, y_2, \dots, y_n . Usando passos análogos àqueles utilizados na seção anterior, é possível obter:

$$\frac{dK}{d\varepsilon} = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial y'_i} \frac{\partial \bar{y}'_i}{\partial \varepsilon} \right) dx = 0 \quad (1.5.2)$$

E pelos mesmos procedimentos:

$$\frac{dK}{d\varepsilon} = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \right] \eta_i(x) dx = 0 \quad (1.5.3)$$

Portanto, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.5.4)$$

Pois as variações são independentes, o que exige que cada um dos termos acima seja identicamente nulo. Ou seja, para um funcional que depende de n funções, n equações de Euler devem ser satisfeitas, sendo que cada uma delas corresponde a uma das funções, o que gera um sistema de n equações diferenciais de *segunda ordem* para $y_1(t), \dots, y_n(t)$.

1.6 Identidade de Beltrami

No caso em que f não depende explicitamente de x , podemos simplificar a equação de Euler-Lagrange, obtendo uma forma alternativa que se mostra útil na solução de alguns problemas, pois frequentemente nos leva a caminhos mais simples ou mais curtos.

Veja que a derivada total de f é dada por:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.6.1)$$

Por hipótese f não depende explicitamente de x , portanto $\partial f / \partial x = 0$, e pela equação de E-L vale a identidade:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right)$$

Assim, podemos reescrever a derivada total como:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' \quad (1.6.2)$$

Mas veja que, pela regra do produto:

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y''$$

Portanto, podemos reescrever a (1.6.2) da seguinte maneira:

$$\frac{d}{dx} \left(f(y, y') - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

O que nos leva à **identidade de Beltrami**, obtida em 1868 por Eugenio Beltrami:

$$f(y, y') - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = c \quad (1.6.3)$$

Onde c é uma constante.

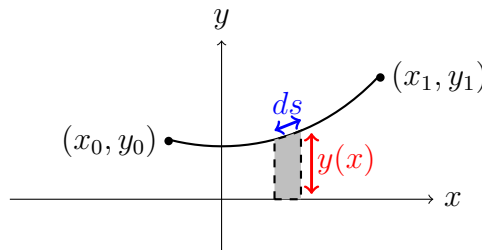
■ **Exemplo 4**: Encontre a superfície de revolução mínima ao redor do eixo x , entre dois pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) .

Vimos que o comprimento infinitesimal de arco é $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$. Assim, uma porção infinitesimal da área superficial do sólido de revolução é dada por:

$$dA = 2\pi y ds = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Pois a circunferência do trecho em questão vale $2\pi y$ e o comprimento vale ds . Portanto a área total é:

$$A\{y\} = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (1.6.4)$$



Sabemos que $f(y, y')$ não depende explicitamente de x , logo podemos utilizar a identidade de Beltrami para resolver o problema, com, $f(y, y') = y\sqrt{1 + y'^2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y'} = yy' / \sqrt{1 + y'^2}$, o que nos leva a:

$$y\sqrt{1 + y'^2} - y\frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = c_0$$

Simplificando chegamos em $y^2 = c_0^2 + y'^2$, portanto:

$$c_0 \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c_0^2}} = dx \implies c_0 \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c_0^2}} = x + c_1 \quad (1.6.5)$$

A integral pode ser resolvida a partir de uma substituição hiperbólica. Tomando $y = c_0 \cosh \theta$, temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{y^2 - c_0^2} &= c_0 \sqrt{\cosh^2 \theta - 1} = c_0 \sinh \theta \\ \frac{dy}{d\theta} &= c_0 \sinh \theta \end{aligned}$$

Portanto a integral fica simplesmente:

$$c_0 \int d\theta = c_0 \theta = c_0 \cosh^{-1} \left(\frac{y}{c_0} \right) = x + c_1 \quad (1.6.6)$$

Resolvendo para y chegamos em:

$$y(x) = c_0 \cosh \left(\frac{x + c_1}{c_0} \right) \quad (1.6.7)$$

Que é a equação de uma catenária, com as constantes c_0 e c_1 determinadas a partir das condições iniciais, no caso, os dois pontos dados.

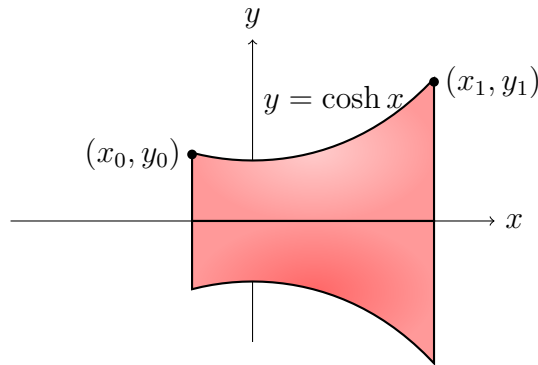
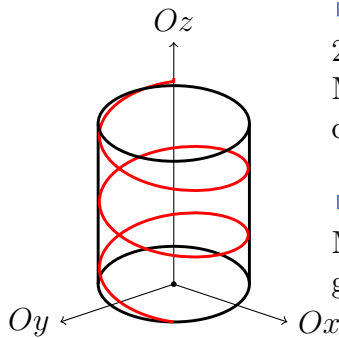


Figura 2: O catenóide, obtido a partir da rotação da catenária ao redor do eixo x , é o sólido de revolução com menor área superficial.

Problemas 1

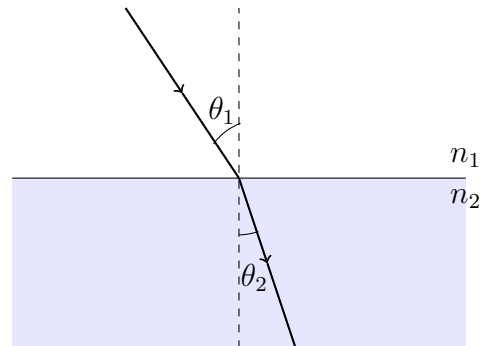
■ **Problema 1.1:** (Courant, R.; John, F.; 1989; Introduction to Calculus and Analysis II) Considere uma partícula se movendo no espaço tridimensional. Sendo $v = \frac{1}{f(r)}$ a velocidade de uma partícula em coordenadas esféricas (r, θ, φ) , qual é o tempo que a partícula leva para percorrer a porção de uma curva dada por um parâmetro σ [Sendo as coordenadas da curva $r(\sigma)$, $\theta(\sigma)$ e $\phi(\sigma)$] entre os pontos A e B ?



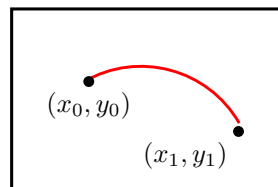
■ **Problema 1.2:** (Marion, J. B.; Thornton, S. T.; 2011; Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas) Mostre que a geodésica em uma superfície de um cilindro circular direito é um segmento de hélice.

■ **Problema 1.3:** (Mary L. Boas-Mathematical Methods in the Physical Sciences) Encontre as geodésicas do cone $x^2 + y^2 = z^2$.

■ **Problema 1.4:** (Marion, J. B.; Thornton, S. T.; 2011; Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas) Considere a luz passando de um meio com índice de refração n_1 para um outro meio com índice de refração n_2 . Utilize o princípio de Fermat para minimizar o tempo e derive a lei de refração: $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$.



■ **Problema 1.5:** (David Morin, 2004 - Introduction to Classical Mechanics) Suponha que a velocidade da luz em uma placa é proporcional à sua altura em relação a base da placa. Mostre a trajetória da luz no material consiste em arcos circulares. Você pode utilizar o princípio de Fermat, isto é, a trajetória do raio de luz entre dois pontos é aquela que minimiza o tempo do percurso.



2 Dinâmica Lagrangiana

Lagrange foi o responsável por dar início a uma formulação alternativa da mecânica clássica, a *Mecânica Lagrangiana*. Assim como a mecânica Newtoniana se baseia nas leis de Newton para sua formulação, ou a Óptica se baseia em princípios como o Princípio de Fermat ou o Princípio de Huygens, a Mecânica Lagrangiana pode ser inicialmente formulada a partir do *princípio da mínima ação* (Ou princípio de Hamilton, conforme encontrado em muitos textos).

A formulação Lagrangiana apresenta uma grande diferença em relação à Newtoniana: suas equações fundamentais se baseiam nos conceitos de *energia*, e não de força. Assim, é possível encontrar as equações do movimento de um sistema somente a partir da sua energia. Ela oferece a vantagem de, em geral, oferecer procedimentos simples para solucionar problemas, principalmente quando são postas restrições a um sistema. Não só isso, as equações que a governam são invariantes em relação a diferentes sistemas de coordenadas. Deste modo é possível escolhê-los conforme for conveniente ao problema.

Na sessão seguinte será introduzido o conceito de ação, e a partir dos conceitos do cálculo variacional será feita uma dedução de uma das equações fundamentais da teoria.

2.1 A equação de Lagrange

Para dar início a formulação da mecânica Lagrangiana, é introduzida uma quantidade cuja unidade é de *energia x tempo*, denominada **ação**. Tal grandeza pode ser representada por um funcional:

■ **Definição 2.** A ação de um sistema é representada pelo funcional:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2.1.1)$$

Onde L é a Lagrangiana do sistema.

Tomaremos como postulado, o *princípio da mínima ação* ou *princípio de Hamilton*, de acordo com o qual a ação S , que depende de uma função L denominada *Lagrangiana*, que caracteriza um sistema e depende de suas coordenadas, velocidades e do tempo, deve ser um extremo. Ou seja, a trajetória real de um conjunto de partículas é aquele que satisfaz esta condição dada.

Sabendo que o funcional S deve ser estacionário no intervalo de tempo $[t_0, t_1]$, pela equação de Euler-Lagrange, obtida na seção anterior, chega-se ao seguinte resultado:

■ **Resultado 2.** Para um sistema de um grau de liberdade, com coordenada generalizada q e Lagrangiana L , a seguinte equação diferencial deve ser satisfeita, de tal modo que o princípio de Hamilton seja obedecido:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (2.1.2)$$

Para um sistema de n graus de liberdade basta utilizar a equação de Euler para um funcional que depende de n funções. Assim, fica fácil ver que a Lagrangiana deve satisfazer o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.1.3)$$

Para uma partícula com dois graus de liberdade, se movendo nas direções x e y por exemplo, a Lagrangiana deve satisfazer as equações $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0$ e $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = 0$. Isso resultará em duas equações diferenciais de segunda ordem, para x e y , cujas soluções descrevem o movimento do sistema.

Propriedades da Lagrangiana

Considere a ação S' correspondente à Lagrangiana L' , que se relaciona com L por:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t) \quad (2.1.4)$$

Ou seja, elas diferem por uma derivada total no tempo. Ao calcular a ação para essa Lagrangiana, obtém-se:

$$S' = \int_{t_0}^{t_1} L'(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} f(q, t) dt$$

E portanto:

$$S' = S + f(q_1, t_1) - f(q_0, t_0)$$

Logo, a adição de uma derivada total no tempo de $f(q, t)$ na Lagrangiana L contribui com a adição de um termo constante na ação S' , e portanto um extremo de S também é um extremo de S' , o que implica que as lagrangianas L' e L são equivalentes, isto é, produzem as mesmas equações do movimento.⁴ Por argumen-

⁴Contudo, esta não é a única maneira de produzir Lagrangianas equivalentes. Há situações em que a diferença de duas Lagrangianas não pode ser representada por uma derivada total de

tos semelhantes é fácil ver que no caso em que a multiplicação da Lagrangiana por alguma constante arbitrária α não altera o movimento do sistema:

$$L'(q, \dot{q}, t) = \alpha L(q, \dot{q}, t) \quad (2.1.5)$$

Outra propriedade importante, é de que a lagrangiana é invariante sobre uma transformação de ponto. Uma transformação de ponto para um sistema de n graus de liberdade é uma transformação de coordenadas na qual um conjunto de coordenadas generalizadas independentes q_1, \dots, q_n são transformadas em outro conjunto de coordenadas (s_1, \dots, s_1) :

$$q_i = g_i(s_1, \dots, s_n, t) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.1.6)$$

E a lagrangiana para o sistema é agora escrita como:

$$L'(s, \dot{s}, t)$$

Contudo, ainda assim a equação de Lagrange ainda é válida:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{s}_i} \right) - \frac{\partial L'}{\partial s_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.1.7)$$

Isso significa que a Lagrangiana é invariante sobre uma **transformação de ponto** (Do inglês, *point transformation*).

Demonstração. As coordenadas generalizadas são:

$$q_j = g_j(s_1, \dots, s_n, t) \quad (2.1.8)$$

Calculando a derivada total de q_j em relação ao tempo:

$$\begin{aligned} \frac{dq_j}{dt} &= \sum_i \frac{\partial q_j}{\partial s_i} \frac{ds_i}{dt} + \frac{\partial q_j}{\partial t} \frac{dt}{dt} \\ \dot{q}_j &= \sum_i \frac{\partial q_j}{\partial s_i} \dot{s}_i + \frac{\partial q_j}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

E pela equação anterior, também segue que,

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{s}_i} = \frac{\partial q_j}{\partial s_i}$$

Primeiro calculamos a derivada da Lagrangiana com respeito a \dot{s} pela regra da cadeia:

$f(q, t)$ no tempo mas ainda assim as mesmas equações de movimento são geradas.

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{s}_i} = \sum_j \left(\frac{\partial L'}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{s}_i} + \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{s}_i} \right)$$

Mas o primeiro termo dentro do somatório desaparece pois q_j depende somente de s_1, \dots, s_n e t , portanto $\frac{\partial q_j}{\partial \dot{s}_i} = 0$, e a equação anterior se reduz a:

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{s}_i} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{s}_i} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial s_i}$$

Calculando a derivada em relação ao tempo da expressão anterior por meio da regra do produto:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{s}_i} \right) = \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial s_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_j}{\partial s_i} \right) \right] \quad (2.1.10)$$

Mas:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_j}{\partial s_i} \right) = \frac{\partial q_j}{\partial s_i} \frac{ds_i}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial q_j}{\partial s_i} \right) = \frac{\partial}{\partial s_i} \underbrace{\left(\frac{\partial q_j}{\partial s_i} \dot{s} + \frac{\partial q_j}{\partial t} \right)}_{=\dot{q}_j} = \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial s_i} \quad (2.1.11)$$

Substituindo a (2.1.11) no último termo da (2.1.10):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{s}_i} \right) = \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial s_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial s_i} \right] \quad (2.1.12)$$

agora calculamos:

$$\frac{\partial L'}{\partial s_i} = \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial s_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial s_i} \right] \quad (2.1.13)$$

Por fim, basta escrever a equação de Euler para a lagrangiana L' por meio das equações (2.1.12) e (2.1.13), pois assim os últimos termos de cada uma das equações se anulam, e o resultado obtido é:

$$\frac{\partial L'}{\partial s_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i} \right) = \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] = 0$$

O que nos permite concluir que a lagrangiana é de fato invariante sobre uma transformação de ponto. \square

É importante notar que a transformação deve ser unicamente invertível e o

número de graus de liberdade deve ser o mesmo, pois nenhuma informação pode ser perdida na transformação.

2.2 Definindo a Lagrangiana

O próximo passo consiste em buscar uma maneira de definir a função L , partindo de alguns pressupostos básicos. Também se espera que essa nova formulação seja equivalente a alguns conceitos já vistos na mecânica Newtoniana, como as próprias leis de Newton e o teorema da conservação de energia. Deste modo, as próximas seções serão dedicadas a esse desenvolvimento.

Coordenadas generalizadas

A primeira necessidade na formulação da Lagrangiana é determinar uma maneira geral de descrever o movimento de partículas. Para isso é conveniente introduzir os conceitos de graus de liberdade e coordenadas generalizadas, assim como suas respectivas derivadas temporais, que são as velocidades generalizadas. Tendo em mão tais informações, é possível, a princípio, determinar os estados posteriores do sistema. Ao longo dos capítulos subsequentes ficará claro que formular muitos dos conceitos da mecânica clássica a partir de coordenadas generalizadas é muitas vezes mais conveniente, e geral, do que trabalhar somente com coordenadas cartesianas, que na mecânica Newtoniana são mais usuais. Contudo, antes de ser introduzida a ideia de coordenadas generalizadas, surge a ideia de graus de liberdade de um sistema:

■ **Definição 3.** O número n de **graus de liberdade** de um sistema é definido como o número de quantidades necessárias para especificar completamente o estado de um sistema.

Se o sistema for constituído por k partículas, o número de graus de liberdade do sistema é $N = kn$.

■ **Exemplo 7:** O número de graus de liberdade de um sistema de duas partículas se movendo no espaço tridimensional é $n = 6$, pois são necessárias três coordenadas para descrever completamente a posição de cada uma das partículas.

No caso em que há restrições ou vínculos, o número de graus de liberdade em um sistema é *menor*. Se há m equações de restrição, o número de graus de liberdade é então $N - m$. Uma partícula cujo movimento é confinado a superfície de uma esfera por exemplo, tem $m = 1$ equação de restrição, pois $x^2 + y^2 + z^2 =$

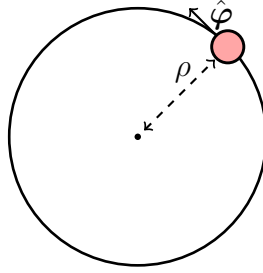
$R^2 \Rightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$, e o número de graus de liberdade é $N = 3.1 - 1 = 2$.

■ **Definição 4.** *Uma quantia que descreve a posição de um sistema de n graus de liberdade é chamada de **coordenada generalizada**, e é representada por:*

$$q_1, q_2, \dots, q_n \quad (2.2.1)$$

*Analogamente, suas derivadas no tempo $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ descrevem as **velocidades generalizadas**.*

■ **Exemplo 8:** Considere uma partícula em um plano cujo movimento está restrito à um aro circular de raio ρ . Como a partícula se move em um plano, e há um vínculo ($r = \rho = cte.$), há $n - 2 - 1 = 1$ grau de liberdade para o sistema. O movimento da partícula pode ser descrito pelo deslocamento angular φ por exemplo:



E a velocidade da partícula é dada pela velocidade angular $\dot{\varphi}$.

Lei da Inércia

Para encontrar a Lagrangiana do sistema serão estabelecidos alguns postulados que se mostram válidos na mecânica clássica:

■ **Definição 5.** *Um referencial é denominado **inercial** se satisfaz as seguintes propriedades:*

- (1) *O espaço é homogêneo*
- (2) *O espaço é isotrópico*
- (3) *O tempo é homogêneo*

A partir das considerações acima é possível inferir que pela propriedade (1) a Lagrangiana de uma partícula livre em um referencial inercial não pode depender explicitamente do vetor posição \mathbf{r} nem da direção da velocidade \mathbf{v} , e pela propriedade (3) L não pode depender explicitamente do tempo t . Deste modo, a Lagrangiana depende somente da magnitude da velocidade, e por conseguinte: ⁵

$$L = L(v^2) \quad (2.2.2)$$

Pela equação de Lagrange (Tomando $\dot{q} = \mathbf{v}$):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) = 0 \implies \frac{d(v)}{dt} = 0$$

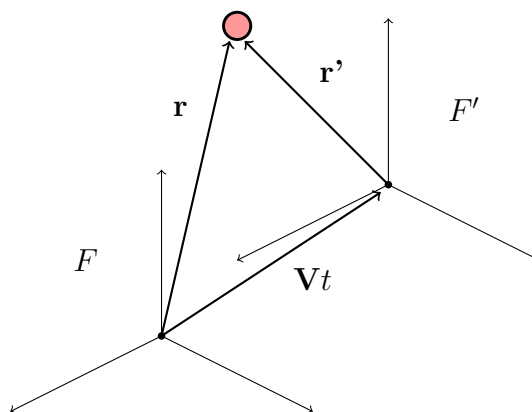
E portanto:

$$\mathbf{v} = cte. \quad (2.2.3)$$

Ou seja, esse resultado é equivalente a lei da inércia: *Uma partícula livre, em um referencial inercial, mantém sua velocidade constante em magnitude e direção.*

Transformação de Galileu

Considere dois referenciais inerciais F e F' , o referencial F' se move com velocidade \mathbf{V} em relação a F . Por meio de uma transformação é possível relacionar a posição de uma partícula entre os dois referenciais. Analisando geometricamente a figura:



e levando em conta as propriedades (1) e (2), chegamos ao resultado:

⁵Uma dependência biquadrática da velocidade, ou qualquer potência par, faria com que a Lagrangiana dependesse somente da magnitude, contudo uma dependência desse tipo não gera Lagrangianas equivalentes (que diferem somente por uma derivada total das coordenadas e do tempo em relação a t).

■ **Resultado 3.** *Se um referencial inercial F' se move com velocidade \mathbf{V} em relação a um outro referencial inercial F , a posição de uma partícula em cada um dos referenciais se relaciona por:*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t \quad (2.2.4)$$

E para o tempo:

$$t = t' \quad (2.2.5)$$

A interpretação que decorre da segunda transformada é de que o tempo é *absoluto*, isto é, ele independe do observador. Essa consideração é um dos princípios fundamentais da mecânica clássica, contudo sabe-se que ele perde sua validade na mecânica relativística.

Energia Cinética

Considere um referencial inercial F' se movendo em relação a outro referencial inercial F com velocidade infinitesimal $\boldsymbol{\epsilon}$. Deste modo, a velocidade de uma partícula que tem velocidade \mathbf{v} no referencial F , terá uma velocidade $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\epsilon}$ em F' . Como a Lagrangiana nessa situação depende do quadrado da velocidade:

$$L(v'^2) = L(v^2 + 2\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\epsilon} + \epsilon^2) \quad (2.2.6)$$

Expandindo a expressão do lado direito e desprezando termos maiores que os de primeira ordem:

$$L(v'^2) = L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2} 2\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.2.7)$$

O último termo da equação é uma derivada total de uma função de q e t se a Lagrangiana depender do quadrado da velocidade. Assim, podemos escrever que a Lagrangiana nesse caso é: ⁶

$$L = \frac{1}{2}mv^2 = T \quad (2.2.8)$$

O termo do lado direito da equação é a **energia cinética** da partícula, e na literatura é frequentemente representada pela letra T .

⁶Por exemplo, tomemos \mathbf{v} e $\boldsymbol{\epsilon}$ na mesma direção. Suponha que L depende de v^4 e não v^2 . Nesse caso a diferença entre as Lagrangianas seria $\Delta L \propto v^3$, que já não pode mais ser escrita como uma derivada total da posição e do tempo, o que mostra que elas deixariam de ser equivalentes.

A grandeza m é uma constante e representa a massa da partícula. É fácil ver que a constante é arbitrária, deste modo, multiplicar a massa de todas as partículas de um sistema por alguma constante arbitrária não nula não carrega significado físico (O que é equivalente a mudar o sistema de unidades por exemplo), somente a razão entre as massas tem importância.

Para um sistema constituído por duas partículas, de massas m_1 e m_2 , e velocidades v_1 e v_2 , a Lagrangiana é:

$$L = L_1 + L_2 = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)$$

Portanto, para um sistema de n partículas, tem-se que $T = T_1 + T_2 + \dots + T_n$, ou seja, na Lagrangiana deve-se computar a energia cinética de cada uma das partículas.

Energia Potencial

Considere agora um sistema constituído por n partículas interagentes entre si. É possível introduzir à Lagrangiana uma nova função $-U$ que está relacionada à natureza da interação entre as partículas. Assim, a Lagrangiana é escrita como:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) \quad (2.2.9)$$

A função U é chamada de **energia potencial** do sistema. A fim de obedecer as premissas anteriores, de que o tempo é absoluto e a relatividade Galileana, todas as partículas do sistema são *instantaneamente* afetadas pela variação do potencial decorrente da mudança da posição de uma das partículas.

Equivalência entre a Equação de Lagrange e a Segunda Lei de Newton

Os resultados das seções anteriores podem ser resumidos como:

■ **Resultado 4.** *Para uma partícula de n graus de liberdade, a seguinte equação é satisfeita:*

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.2.10)$$

Onde L é uma função denominada **Lagrangiana** da partícula, definida por:

$$L = T - U \quad (2.2.11)$$

Onde T representa a **energia cinética** das partículas do sistema e U representa sua **energia potencial**.

Agora, pelas duas equações anteriores, é possível escrever a equação de Lagrange para uma partícula com vetor posição \mathbf{r} como:

$$\frac{\partial(T - U)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (2.2.12)$$

De acordo com as considerações iniciais, a energia cinética independe da posição, e o potencial é independente da velocidade, portanto, a equação anterior fica:

$$-\frac{\partial(U)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(T)}{\partial \dot{q}} = 0$$

Simplificando, e substituindo T por $1/2mv^2$:

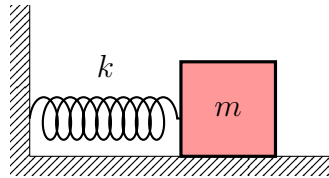
$$m\mathbf{a} = -\frac{\partial U}{\partial q} = F \quad (2.2.13)$$

Ou seja, foi possível ver que a equação de Lagrange é equivalente à segunda Lei de Newton!

Contudo, vale notar que esse resultado foi obtido porque a coordenada generalizada escolhida é $q = \mathbf{r}$, que tem dimensão de comprimento, isso faz com que $\frac{\partial(T)}{\partial \dot{q}}$ tenha dimensão de momento e que $-\frac{\partial U}{\partial q}$ tenha dimensão de força. Caso a coordenada generalizada fosse diferente, digamos um ângulo θ em coordenadas polares, os resultados obtidos seriam distintos.

2.3 Resolvendo problemas com a Lagrangiana

■ **Exemplo 9:** Encontre a equação do movimento de um sistema massa mola a partir da equação de Euler-Lagrange.



Primeiro devem ser identificadas as energias cinética e potencial do sistema em função das coordenadas escolhidas, que no caso desse problema será a coordenada cartesiana x . Portanto elas são simplesmente:

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}, \quad U = \frac{kx^2}{2}$$

Assim, a lagrangiana é:

$$L(x, \dot{x}) = T - U = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \quad (2.3.1)$$

E temos,

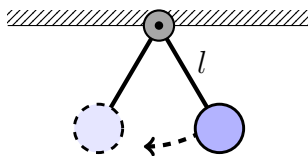
$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= -kx \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x} \end{aligned}$$

Utilizando a equação de E-L:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \implies m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.3.2)$$

Chegamos ao resultado já esperado de acordo com a mecânica Newtoniana.

■ **Exemplo 10:** Encontre a equação do movimento de um pêndulo a partir da equação de Euler-Lagrange.



Este exemplo, assim como o anterior, apesar de simples é útil para ilustrar que a equação de E-L de fato funciona para outros sistemas de coordenadas além do cartesiano. No caso do pêndulo, escolheremos como coordenada o ângulo θ entre o fio do pêndulo e a normal ao teto (linha pontilhada). As energias serão: $U = -mgl \cos \theta$ e $T = \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}^2$.

Desse modo, a Lagrangiana do sistema será:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta \quad (2.3.3)$$

Através da equação de E-L da aproximação para pequenos ângulos ($\sin \theta \approx \theta$), chega-se em:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (2.3.4)$$

■ **Exemplo 11:** Um bloco de massa m desliza sem atrito sob uma rampa de massa M , que forma um ângulo θ com a horizontal. A rampa é livre para se mover horizontalmente. Encontre as equações de movimento do sistema.

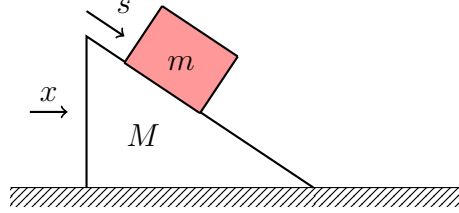
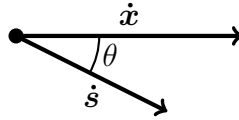


Figura 3: Bloco deslizando sob uma rampa.

Em muitos problemas do tipo, a maneira mais simples de resolvê-los é escrever a energia em termo das coordenadas cartesianas e em seguida escolher o conjunto de coordenadas generalizadas apropriado, levando em conta os vínculos presentes. No caso deste problema, há dois corpos. A princípio a descrição do sistema exigiria 4 coordenadas, mas há a restrição $y = 0$ para a rampa e a restrição $\tan \theta = y'/x'$ para o bloco, portanto só precisamos de duas coordenadas generalizadas para resolver o problema.

Portanto, escolheremos como coordenadas generalizadas o deslocamento s do bloco de massa m , com direção paralela à superfície da rampa, e sentido conforme mostrado na figura, e o deslocamento horizontal x da rampa.

A velocidade da rampa vale \dot{x} , assim energia cinética da rampa é simplesmente $T_1 = \frac{M}{2} \dot{x}^2$. Já a velocidade resultante do bloco pode ser encontrada vetorialmente, conforme a figura:



O que resulta em $\dot{r}^2 = \dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{x}\dot{s}\cos\theta$, ou também pode ser obtida a partir das coordenadas cartesianas. O deslocamento horizontal e vertical do bloco são, respectivamente:

$$\begin{aligned} x' &= x + s \cos \theta \\ y' &= -s \sin \theta \end{aligned}$$

O que leva à $\dot{x}' = \dot{x} + \dot{s} \cos \theta$ e $\dot{y}' = -\dot{s} \sin \theta$, e portanto $\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 = \dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{x}\dot{s}\cos\theta$, que é o mesmo resultado. Assim a energia cinética do bloco é:

$$T_2 = \frac{m}{2}(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{x}\dot{s}\cos\theta)$$

E a energia potencial do bloco é:

$$U = mgy = -mgs\sin\theta$$

Portanto, a lagrangiana vale:

$$L = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{x}\dot{s}\cos\theta) + mgs\sin\theta \quad (2.3.5)$$

Logo, temos que $\partial L/\partial x = 0$, $\partial L/\partial s = mg\sin\theta$ e:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) &= (m+M)\ddot{x} + m\ddot{s}\cos\theta \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) &= m(\ddot{s} + \ddot{x}\cos\theta) \end{aligned}$$

Assim, as equações de movimento são:

$$\begin{aligned} (m+M)\ddot{x} + m\ddot{s}\cos\theta &= 0 \\ \ddot{s} + \ddot{x}\cos\theta - g\sin\theta &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Resolvendo, encontramos as acelerações:

$$\begin{aligned} \ddot{s} &= \frac{g\sin\theta}{1 - \frac{m}{m+M}\cos^2\theta} \\ \ddot{x} &= -\frac{mg\sin\theta\cos\theta}{m(1 - \cos^2\theta) + M} \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

■ **Exemplo 12:** Considere agora um sistema constituído de um suporte móvel de massa m , e um pêndulo de comprimento l e massa M conectado ao suporte. Encontre as equações de movimento do sistema.

As coordenadas do pêndulo podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} x &= x + l\sin\theta \\ y &= l\cos\theta \end{aligned}$$

Temos então $\dot{r}_x = \dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta$ e $\dot{r}_y = -l\dot{\theta} \sin \theta$. Assim:

$$\dot{r}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2)$$

A energia cinética do sistema é então:

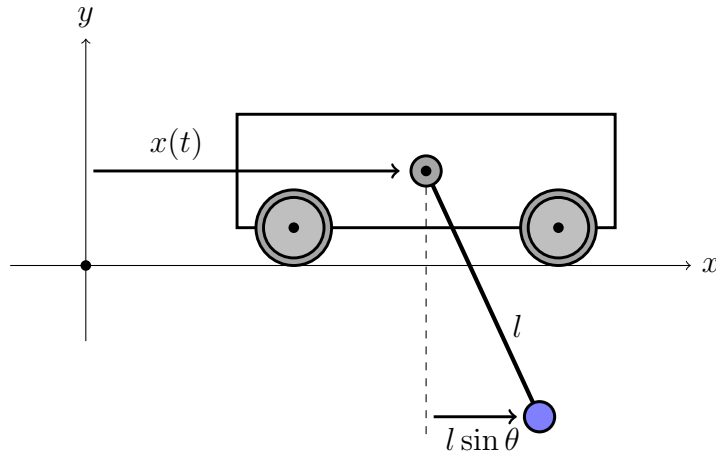
$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2) \quad (2.3.8)$$

E a energia potencial é:

$$U = -Mgl \cos \theta \quad (2.3.9)$$

E a Lagrangiana:

$$L = T - U = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2) + Mgl \cos \theta \quad (2.3.10)$$



Calculando as derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= Ml \sin \theta (\dot{x}\dot{\theta} - g) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= (m + M)\ddot{x} + Ml(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= Ml^2\ddot{\theta} + Ml(\ddot{x} \cos \theta - \dot{x}\dot{\theta} \sin \theta) + Ml \sin \theta \dot{x}\dot{\theta} \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

As equações de movimento são, portanto:

$$(m + M)\ddot{x} + Ml(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = 0 \quad (2.3.12)$$

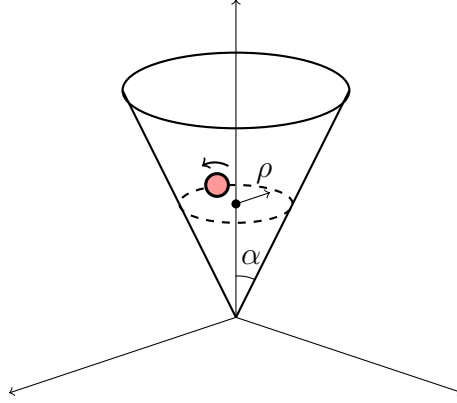
e,

$$Ml^2\ddot{\theta} + Ml(\ddot{x} \cos \theta - \dot{x}\dot{\theta} \sin \theta) + Ml \sin \theta(\dot{x}\dot{\theta} - g) = 0 \quad (2.3.13)$$

■ **Exemplo 13:** Encontre as equações de movimento de uma partícula de massa m sob a ação da gravidade, cujo movimento está restrito a um cone que forma um ângulo α com o eixo z .

Escolhendo as coordenadas cilíndricas como coordenadas generalizadas, temos que:

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2$$



Contudo, como o movimento está restrito a superfície do cone, temos o vínculo:

$$\tan \alpha = \frac{\rho}{z} \implies z = \rho \cot \alpha$$

Portanto, usando a identidade $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$ podemos escrever,

$$v^2 = \dot{\rho}^2 \csc^2 \alpha + \rho^2 \dot{\theta}^2$$

Como $U = mg\rho \cot \alpha$, a Lagrangiana é:

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 \csc^2 \alpha + \rho^2 \dot{\theta}^2) - mg\rho \cot \alpha \quad (2.3.14)$$

Para θ , temos que $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$, portanto a equação do movimento fica simples:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m\rho^2 \dot{\theta} = cte. = l \quad (2.3.15)$$

O que simplesmente expressa a conservação do momento angular l em torno do eixo Oz . Para ρ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \rho} &= m\rho\dot{\theta}^2 - mg \cot \alpha \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) &= m\ddot{\rho} \csc^2 \alpha\end{aligned}\tag{2.3.16}$$

Portanto, a equação do movimento fica:

$$\ddot{\rho} \csc^2 \alpha - \rho\dot{\theta}^2 + g \cot \alpha = 0\tag{2.3.17}$$

Se escrevermos $\theta = l/(m\rho^2)$, simplificarmos a expressão multiplicando todos os termos por $\sin^2 \alpha$ e usarmos a identidade $\sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha$, a expressão é simplificada para:

$$\ddot{\rho} - \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{m^2} \frac{1}{\rho^3} + \frac{g}{2} \sin 2\alpha = 0$$

Supondo que a partícula descreve uma órbita circular de raio ρ_0 , se aplicarmos uma pequena perturbação $\delta\rho$, o raio passa a ser $\rho_0 + \delta\rho$. Substituindo na equação de movimento anterior:

$$\delta\ddot{\rho} - \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{m^2} \frac{1}{(\rho_0 + \delta\rho)^3} + \frac{g}{2} \sin 2\alpha = 0$$

Utilizando a aproximação $(1+x)^n \approx 1+nx$:

$$\frac{1}{(\rho_0 + \delta\rho)^3} \approx \frac{1}{\rho_0^3} \left(1 - 3\frac{\delta\rho}{\rho_0} \right)$$

Podemos substituir na equação de movimento:

$$\delta\ddot{\rho} - \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{m^2} \frac{1}{\rho_0^3} \left(1 - 3\frac{\delta\rho}{\rho_0} \right) + \frac{g}{2} \sin 2\alpha = 0$$

Escrevendo os termos constantes que restam na equação como C (Elas não influenciam a frequência do MHS), a equação anterior pode ser reescrita como:

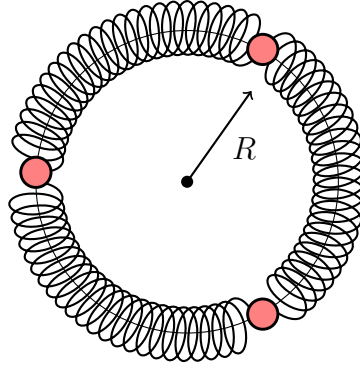
$$\delta\ddot{\rho} + \frac{3l^2 \sin^2 \alpha}{m^2 \rho_0^4} \delta\rho = C\tag{2.3.18}$$

Que é a equação de movimento harmônico simples, de frequência:

$$\omega = \sqrt{3} \frac{l}{m\rho_0^2} \sin \alpha = \sqrt{3} \dot{\theta}_0 \sin \alpha \quad (2.3.19)$$

Onde $\dot{\theta}_0$ representa a velocidade angular da partícula. Obviamente a existência de uma órbita estável de raio ρ_0 , conforme consideramos no desenvolvimento do problema, dependerá das condições iniciais do problema.

■ **Exemplo 14:** (David Morin, 2004 - Introduction to Classical Mechanics) Três partículas de massa m confinadas em um aro de raio R e livres para se mover ao longo dele. As molas que as ligam possuem constante elástica k . Monte a lagrangiana para o sistema e encontre a frequência dos modos normais de vibração.



Chamaremos o deslocamento de cada uma das partículas ao longo do círculo de x_1, x_2 e x_3 (Também é possível trabalhar com o deslocamento angular θ e chamar a distância percorrida de $R\theta$, mas no fim o fator R acaba sendo cancelado, pois a ideia é a mesma). A distensão das molas 1 – 3 é $x_1 - x_2$, $x_2 - x_3$ e $x_3 - x_1$, respectivamente. Assim, a Lagrangiana do sistema fica:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{k}{2}[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2] \quad (2.3.20)$$

Utilizando a equação de Lagrange para cada uma das coordenadas:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -k(x_1 - x_2) - k(x_1 - x_3) \\ m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_3) - k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_3 &= -k(x_3 - x_1) - k(x_3 - x_2) \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Escrevendo em notação matricial:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (2.3.22)$$

Supondo que a solução é da forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (2.3.23)$$

Onde \mathbf{v} representa um auto-vetor, o sistema de EDOs fica:

$$\omega^2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (2.3.24)$$

Pois a expressão entre parênteses contendo as funções trigonométricas se anula. Veja que isso é equivalente à:

$$X - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} Y = 0 \quad (2.3.25)$$

Onde X e Y são matrizes 3×3 . Portanto, para encontrar a frequência ω dos modos normais de oscilação basta encontrar os autovalores da matriz, pois $\lambda = \omega^2/\omega_0^2$:

$$\det \left[\begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (2.3.26)$$

Pelo cálculo da determinante, a equação encontrada é:

$$(\lambda - 2)^3 - 3(\lambda - 2) + 2 = 0$$

Cujas soluções são $\lambda = 3$ e $\lambda = 0$, isso implica que as as frequências são: $\omega_1 = 0$, e $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_0$. A primeira frequência corresponde a situação em que $\ddot{x} = 0$, o cenário no qual as partículas deslizam com velocidade constante ao longo do círculo. Calculando os autovetores para o segundo autovalor, considerando que $v_1 = 1$:

$$3 \begin{pmatrix} 1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (2.3.27)$$

Encontramos $v_2 = -1$ e $v_3 = 0$. Isso significa que uma das partículas se encon-

tram paradas e as outras duas oscilam de maneira antisimétrica, isto é, em sentidos opostos.

■ **Exemplo 15:** Considere agora um circuito composto por um indutor de indutância L e um capacitor de capacitância C .

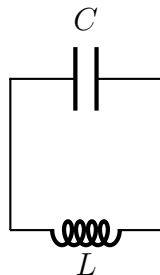


Figura 4: Circuito LC

Podemos descrever o estado do sistema de acordo com a carga $q(t)$ do circuito. Podemos definir o potencial como a energia proveniente do capacitor, portanto $U = \frac{1}{C}q^2$. Já para o indutor temos $T = \frac{L}{2}\dot{q}^2$. Aplicando a equação de E-L para q , chegamos na EDO:

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \quad (2.3.28)$$

Que é a equação de um oscilador harmônico com frequência $\omega = 1/\sqrt{LC}$. É interessante notar que é possível chegar no mesmo resultado estabelecendo um paralelo com o oscilador massa-mola, através das substituições $x(t) \rightarrow q(t)$, $k \rightarrow \frac{1}{C}$ e $L \rightarrow m$.

2.4 Multiplicadores de Lagrange

Alguns sistemas possuem vínculos cujas equações nem sempre podem ser integradas ou resolvidas algebricamente, deste modo, é de grande conveniência introduzir o conceito de **multiplicadores indeterminados de Lagrange** para esta classe de problemas. Na realidade, esse tipo de técnica não se mostra útil somente na mecânica clássica, mas também na física estatística, engenharia e outras áreas.

Anteriormente, como no problema do pêndulo simples, as quantidades relevantes eram expressas em coordenadas cartesianas, e em seguida, através de manipulações algébricas e do uso dos vínculos estabelecidos, tais quantidades eram expressas em coordenadas generalizadas mais apropriadas à situação. Através dos métodos dos multiplicadores é possível levar os vínculos do sistema em consideração sem necessariamente passar por estas etapas. Um segundo ponto, que pode ser útil

de acordo com o contexto do problema, é a possibilidade de estudar a natureza e o comportamento das forças de restrição através da análise dos multiplicadores e seu significado físico, como veremos mais adiante.

2.4.1 Vínculos holonômicos

O tipo mais simples de vínculo é aquele que estabelece uma relação somente entre as coordenadas generalizadas de um sistema e o tempo t , conforme a definição:

■ **Definição 6.** *Um sistema de n graus de liberdade e conjunto de coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_n tem um **vínculo holonômico** (ou **holonômo**) se ele pode ser escrito somente em função das coordenadas e do tempo, isto é, tem a forma:*

$$f(q_1, \dots, q_n, t) = 0 \quad (2.4.1)$$

Encontramos diversos vínculos holonômicos anteriormente, como $f(x, y) = x^2 + y^2 - l^2 = 0$ para o pêndulo simples ou $f(z, \rho) = z \tan \alpha - \rho = 0$ para a partícula que se movimentava dentro do cone. Veja que em todos estes problemas foi utilizado o vínculo e em seguida, ou foi escolhido um outro conjunto de coordenadas, como as substituições $x = l \sin \theta$ e $y = l \cos \theta$, tornando θ a nova coordenada, para o pêndulo, ou uma coordenada foi isolada e em seguida foi feita uma substituição na Lagrangiana, como no segundo caso, através da relação $z = \rho \cot \alpha$.

Porém, também há situações em que é possível obter vínculos na forma holonômica através de equações de restrição que dependem das velocidades. Em geral, vínculos da forma $f(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$ são holonômicos se as equações de restrição podem ser integradas, reduzindo-os à forma holonômica $f(q_1, \dots, q_n, t) = 0$.

Vejamos agora como utilizar essas informações para obter as equações de movimento de um sistema. Se o sistema possui um conjunto (q_1, \dots, q_n) de coordenadas generalizadas e m equações de restrição holonômicas f_1, \dots, f_m , é possível introduzir um conjunto de funções $\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t)$ denominadas **multiplicadores indeterminados de Lagrange** que devem satisfazer ao conjunto de equações:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_j^m \lambda_j(t) \frac{\partial f_j}{\partial q_i} = 0 \quad (2.4.2)$$

Para $i = 1, \dots, n$. Ou seja, há n equações de Euler-Lagrange e m equações de restrição, resultando em um total de $n + m$ equações. Deste modo, a utilidade do método reside no fato de que ao introduzir novas funções, evita-se a manipulação das equações de vínculo, mas ao custo do aumento do número total de equações

que devem ser resolvidas.

■ **Exemplo 16:** Podemos utilizar o métodos dos multiplicadores indeterminados no problema do pêndulo simples de comprimento l . A equação de vínculo do sistema em coordenadas polares é:

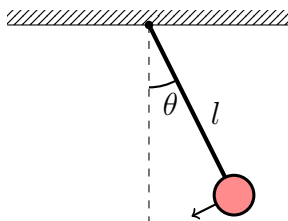
$$f(r) = r - l = 0$$

Portanto temos:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$$

E devemos resolver as equações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \lambda \frac{\partial f}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$



Assim, as equações do movimento ficam:

$$\begin{aligned} r - l &= 0 \\ m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta - \lambda &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{r} \sin \theta &= 0 \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Fica claro que a terceira equação é simplesmente a EDO para θ de um MHS, e a primeira e segunda equações levam à:

$$\lambda = -(mr\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta) \tag{2.4.4}$$

Ou seja, neste caso podemos simplesmente interpretar λ como a tensão no fio.

2.4.2 Vínculos não-holonômicos

Vínculos que não podem ser expressos na forma apresentada na seção anterior são denominados não-holonômicos. Exemplos de vínculo não-holonômicos são desigualdades, por exemplo $x^2 + y^2 \leq r^2$, ou vínculos que dependem das velocidades mas não são integráveis, como veremos a seguir.

Digamos que o vínculo escrito na forma,

$$g(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \sum_i f_i(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i = 0 \quad (2.4.5)$$

é integrável (com $i = 1, \dots, n$). Então existe uma função $F(q_1, \dots, q_n)$ tal que:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i f_i(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i \quad (2.4.6)$$

Mas a derivada total de F é:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

Comparando termo a termo das duas equações anteriores, fica claro que para a primeira expressão ser integrável, deve valer a relação:

$$f_i(q_1, \dots, q_n) = \frac{\partial F}{\partial q_i}$$

Mas as operações de diferenciação parcial para F devem ser intercambiáveis, isto é:

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \right)$$

Mas, $\frac{\partial F}{\partial q_i} = f_i$ e $\frac{\partial F}{\partial q_j} = f_j$, portanto a equação anterior nos leva à condição:

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_j} = \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \quad (2.4.7)$$

Para $i \neq j$, $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n$.

■ **Exemplo 17:** Veremos uma situação agora na qual um corpo está sujeito à um vínculo não-holonômico. Considere uma moeda de raio R rolando sem deslizar no plano xy , conforme a figura, sem se inclinar em relação à vertical, ou seja, a altura z do centro de massa é constante.

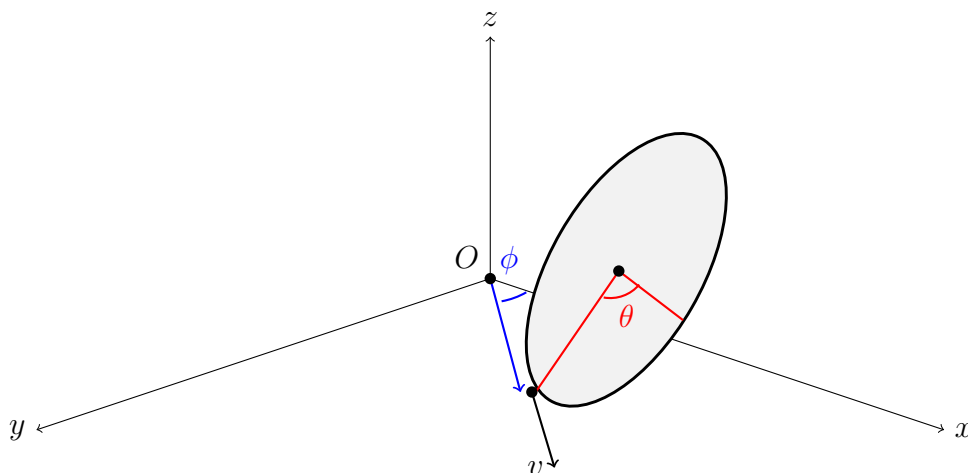


Figura 5: Disco girando no plano xy . Por simplicidade, consideraremos que o disco não se inclina em relação à vertical, apesar da figura.

Temos os vínculos:

- $z = cte.$, pois a moeda não se inclina, e
- $\dot{x} - R\dot{\theta} \sin \phi = 0$
- $\dot{y} + R\dot{\theta} \cos \phi = 0$, pois a moeda rola sem deslizar.

O vínculo para x de acordo com a nossa notação anterior é:

$$f(\dot{x}, \dot{\theta}, \phi) = f_x \dot{x} + f_\theta \dot{\theta} + f_\phi \dot{\phi} = \dot{x} - R\dot{\theta} \sin \phi = 0$$

Logo, podemos identificar:

$$f_x = 1, \quad f_\theta = R \sin \phi, \quad f_\phi = 0$$

Comparemos agora as derivadas parciais. Fica claro que para o par x, θ a condição necessária é satisfeita, pois:

$$\frac{\partial f_x}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial f_\theta}{\partial x} = 0$$

Contudo, tal condição não é satisfeita para θ e ϕ , pois:

$$\frac{\partial f_\theta}{\partial \phi} = -R \cos \phi, \quad \frac{\partial f_\phi}{\partial \theta} = 0$$

Como $\frac{\partial f_\theta}{\partial \phi} \neq \frac{\partial f_\phi}{\partial \theta}$ para θ arbitrário, o vínculo é não-holonômico. Os procedimentos para y são análogos.

■ **Exemplo 18:** (Classical Mechanics - Herbert Goldstein, Charles P. Poole, John L. Safko) Uma partícula se move no plano xy sob a restrição de que o vetor velocidade sempre aponta para um ponto no eixo x cuja abscissa é uma função do tempo $f(t)$. Mostre que para $f(t)$ diferenciável, mas arbitrário, o vínculo é não-holonômico.

Podemos desenhar os vetores relevantes conforme a figura, onde a o vetor em azul representa o ponto na abscissa para o qual o vetor velocidade $\dot{\mathbf{r}}$ aponta:

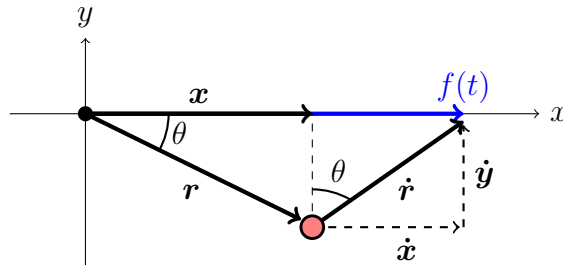


Figura 6: Vetor posição e vetor velocidade da partícula. O segmento em azul vale $f(t) - x$.

Veja que geometricamente temos:

$$\tan \theta = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{f(t) - x}{-y}$$

Portanto podemos escrever o vínculo como:

$$y\dot{x} + (f(t) - x)\dot{y} = 0$$

De acordo com nossa notação, segue que $f_x = y$ e $f_y = f(t) - x$, portanto, para $f(t)$ arbitrário temos que $\partial f_x / \partial y \neq \partial f_y / \partial x$, a equação não é integrável.

2.5 Leis da conservação

Na mecânica, há um especial interesse no estudo de quantias conservadas. Por meio delas é possível estudar o comportamento de um sistema e extrair importantes informações a seu respeito, conforme as conservações conhecidas e o que se busca obter. Por meio da conservação de energia por exemplo, é possível extrair informações relevantes de uma partícula a partir de estados anteriores, tais como sua velocidade, mesmo que obter suas equações de movimento seja uma tarefa extremamente complicada. Além disso, as leis de conservação e simetrias, nos auxiliam a obter um entendimento mais profundo não só da mecânica clássica, mas também da física em geral.

Constantes de movimento

■ **Definição 7.** As constantes de movimento são funções f cujos argumentos são as coordenadas e velocidades generalizadas de um sistema e o tempo, cujo valor se mantém constante ao longo do tempo, isto é, a derivada total de $f(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$ é nula :

$$\frac{df(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)}{dt} = 0 \quad (2.5.1)$$

Momento conjugado e coordenadas cíclicas

Na mecânica Lagrangiana existe uma ideia mais geral de momento, que é o conceito de momento conjugado:

■ **Definição 8.** O momento conjugado relacionado a velocidade generalizada \dot{q}_i de um sistema de Lagrangiana L é:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.5.2)$$

■ **Exemplo 19:** A Lagrangiana de uma partícula girando com velocidade angular constante $\omega = \dot{\theta}$ a uma distância r um eixo, é $L = \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2}$. Calculando o momento conjugado a coordenada θ , encontramos:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad (2.5.3)$$

Que é o momento angular da partícula. Para uma partícula livre com Lagrangiana $\frac{m\dot{x}^2}{2}$ o momento conjugado associado a coordenada x é $p_x = m\dot{x}$, que é simplesmente seu momento linear.

■ **Exemplo 20:** A lagrangiana de uma partícula carregada sob a influência de campos elétricos e magnéticos é (em CGS):

$$L = \frac{mv^2}{2} - e\Phi + \frac{e}{c}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \quad (2.5.4)$$

Assim, cada componente do momento conjugado da partícula é:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i + \frac{e}{c}A_i \quad (2.5.5)$$

Veja que nesta situação o momento conjugado não é somente $m\dot{q}_i$, há um termo extra envolvendo o potencial vetor.

Energia

A hipótese da homogeneidade do tempo implica:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (2.5.6)$$

E a derivada total da Lagrangiana fica (o termo $\partial L/\partial t$ adicional desaparece, em decorrência da consideração anterior):

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} \quad (2.5.7)$$

Mas como $\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$:

$$\frac{dL}{dt} = \dot{q} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} \implies \frac{dL}{dt} - \frac{d}{dt} \left(\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

E portanto:

$$\frac{d}{dt} \left(L - \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

Ou seja, os termos entre parênteses são constantes em relação ao tempo, portanto:

$$L - \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = cte. \quad (2.5.8)$$

Mas em coordenadas retangulares, a energia potencial U não depende explicitamente do tempo, conforme nossas considerações, portanto, é válido que $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$, e como $L = T - U$:

$$(T - U) - \dot{q} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = cte. \quad (2.5.9)$$

E pelo teorema de Euler para funções homogêneas (Cheque o apêndice), temos que:

$$\dot{q} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = 2T \quad (2.5.10)$$

Pois T é uma função de \dot{q}^2 . Finalmente, chegamos ao seguinte resultado:

■ **Resultado 5. Conservação de Energia**

Se a Lagrangiana de um sistema não depende explicitamente do tempo, é válida a **lei da conservação de energia**:

$$T + U = E \quad (2.5.11)$$

Onde E é uma constante, chamada de **energia** do sistema.

Essa resultado é equivalente à:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad (2.5.12)$$

Para um sistema fechado.

Momento Linear

Considere uma Lagrangiana para uma partícula em coordenadas cartesianas:

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r}) \quad (2.5.13)$$

Com: $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$. Considere agora que ocorre uma translação em todo o sistema, de modo que o $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$, onde $\delta\mathbf{r}$ representa um deslocamento infinitesimal. A variação da Lagrangiana é:

$$\delta L = L(\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}', t) - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \delta\dot{\mathbf{r}}$$

Porém, conforme foi visto, o espaço é homogêneo, e portanto a Lagrangiana de um sistema fechado não deve ser afetada por uma translação arbitrária, e assim, sua variação deve ser nula:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \delta\dot{\mathbf{r}} = 0 \quad (2.5.14)$$

E como:

$$\delta\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' - \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \frac{d}{dt}\delta\mathbf{r} = 0$$

A (2.5.14) se reduz a:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r} = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (2.5.15)$$

Pois o deslocamento é arbitrário. Agora, pela equação de lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}}_{=0} = 0 \quad (2.5.16)$$

E portanto:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p} = cte. \quad (2.5.17)$$

Ou seja, o momento linear do sistema, sob essas condições, é conservado. As componentes do momento só serão conservadas caso a co componente em questão seja cíclica, isto é, não apareça na Lagrangiana. Para uma partícula na superfície sobre a ação da gravidade por exemplo, somente o momento na direção vertical é alterado, as componentes horizontais se conservam. No caso em que uma das coordenadas depende de um dos potenciais, o termo $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$, que corresponde a força, da (2.5.16) deixa de ser nulo. Uma segunda propriedade importante é a de que o momento linear *total* do sistema é aditivo para as partículas que o compõe, isto é: $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_n$.

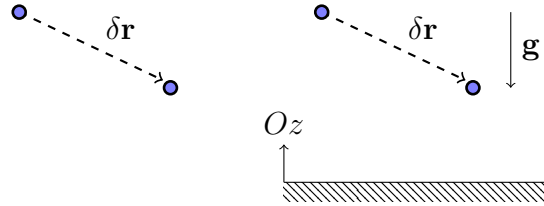


Figura 7: Translação de uma partícula livre, com $\frac{\partial L}{\partial z} = 0$, no lado esquerdo, e translação de uma partícula sob a ação da gravidade no lado direito. Veja que nessa situação a lagrangiana pode ser escrita como $L = T(\dot{x}, \dot{z}) - V(z)$, portanto $\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial V(z)}{\partial z}$ e $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, portanto somente a componente horizontal do momento é conservada.

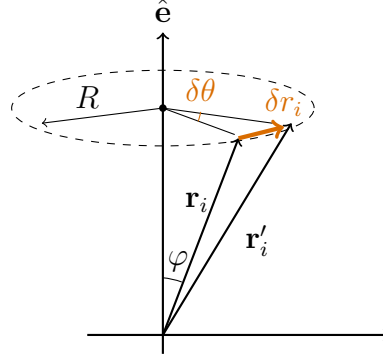
Momento Angular

Considere agora uma rotação infinitesimal, onde o sistema é rotacionado em torno do eixo por um ângulo $\delta\theta$. A variação do vetor posição \mathbf{r}_i é $\delta\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}_i$. Analisando a situação geometricamente, podemos ver que é possível escrever:

$$\delta\mathbf{r}_i = R\delta\theta \quad (2.5.18)$$

Mas, é possível relacionar o vetor posição com o raio R de rotação por $R = r_i \sin \phi$, e assim segue que: $|\delta\mathbf{r}_i| = r_i \sin \phi \delta\theta$. Se definirmos a direção do vetor $\delta\boldsymbol{\theta}$ como sendo a mesma do eixo instantâneo de rotação, isto é $\delta\boldsymbol{\theta} = \delta\theta \hat{\mathbf{e}}$, a relação anterior pode ser escrita como um produto vetorial:

$$\delta \mathbf{r} = \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r} \quad (2.5.19)$$



Porém, ao contrário do caso da translação, nessa situação a velocidade passa a ser diferente, pois:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r}_i &= \frac{d}{dt} (\delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}) = \underbrace{\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \times \mathbf{r}}_{=0} + \delta \boldsymbol{\theta} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ \delta \mathbf{v} &= \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.5.20)$$

Pela propriedade de isotropia do espaço a variação da Lagrangiana deve ser nula, portanto:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}} = 0 \quad (2.5.21)$$

E pelas definições de momento generalizado, podemos substituir as derivadas parciais por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} &= \mathbf{p} \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) = \dot{\mathbf{p}} \end{aligned}$$

Substituindo na (2.5.20):

$$\dot{\mathbf{p}} \cdot (\delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}) + \mathbf{p} \cdot (\delta \boldsymbol{\theta} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0 \quad (2.5.22)$$

Mas pela identidade de álgebra vetorial $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$, podemos rearranjar a equação anterior como:

$$\delta\boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) = 0$$

Como $\delta\boldsymbol{\theta}$ é arbitrário o termo entre parênteses deve ser nulo, ademais, salta aos olhos que $(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$, assim:

$$(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0$$

E finalmente chegamos na relação:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = cte. \quad (2.5.23)$$

Que expressa a conservação do momento angular de um sistema fechado. Também é importante notar que o momento angular depende da origem quando $\mathbf{p} \neq 0$, contudo ainda assim o momento é conservado. Além disso, o momento angular *total* de um sistema, assim como o momento linear, é aditivo para todas as partículas do sistema.

O resultados obtidos nesta seção estão resumidos nos seguintes itens:

- Homogeneidade do tempo \rightarrow Conservação de energia
- Homogeneidade do espaço \rightarrow Conservação de momento linear
- Isotropia do espaço \rightarrow Conservação de momento angular

2.6 Teorema de Noether

Através de algumas propriedades particulares de invarância da Lagrangiana, fomos capazes de deduzir certas leis de conservação. Na realidade existe um teorema mais geral, através do qual é possível relacionar simetrias contínuas de um sistema com leis de conservação, tal contribuição se deve à matemática alemã Emmy Noether (1882-1935).

Este teorema, também conhecido como primeiro teorema de Noether, foi provado em 1915 e publicado em 1918 em seu artigo “*Invariante Variationsprobleme*”, e juntamente com seus outros trabalhos, foi fundamental para o desenvolvimento da física teórica nos anos subsequentes. Noether lecionou na universidade de Göttingen, tendo sido convidada por David Hilbert and Felix Klein. Inicialmente diversos membros do corpo docente da época se mostraram contrários a sua presença na universidade, e Noether não possuía cargo oficial nem recebia pagamentos por seus serviços. Ela recebeu permissão para lecionar oficialmente somente em 1919, e só a partir de 1922 que passou a ser paga por seus serviços prestados, contudo com um pequeno salário. Mesmo sob tais circunstâncias, Noether adquiriu o respeito

de grandes cientistas contemporâneos, como Albert Einstein, devido ao seu trabalho, e trouxe diversas contribuições à vários campos da física e matemática, sendo considerada hoje como uma das maiores matemáticas do século XX [11].

É de nosso interesse seu primeiro teorema, que relaciona a invariância da ação sob transformações infinitesimais das coordenadas e do tempo com quantidades conservadas, podendo ser expresso da seguinte maneira:

■ **Resultado 6. Teorema de Noether**

Considere um sistema de n graus de liberdade sujeito as transformações infinitesimais:

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t^* = t + \epsilon \Psi(q(t), t) \\ q_i(t) &\rightarrow q_i^*(t^*) = q_i(t) + \epsilon \Phi_i(q(t), t) \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Se a ação é invariante sob estas transformações, isto é, se $\delta S = 0$, a quantidade

$$C = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Phi_i + \Psi \left(L - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \quad (2.6.2)$$

é conservada.

Demonstração. Por hipótese, a ação é invariante, portanto devemos ter:

$$\int_{t_0^*}^{t_1^*} L(q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^*) dt^* = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2.6.3)$$

É importante se atentar ao fato de que a variável de integração do lado esquerdo é t^* , e não t . Veja que:

$$t^* = t + \epsilon \Psi \implies \frac{dt^*}{dt} = 1 + \epsilon \dot{\Psi}$$

Mas a derivada da inversa é:

$$\frac{dt}{dt^*} = \left(\frac{dt^*}{dt} \right)^{-1} = (1 + \epsilon \dot{\Psi})^{-1} \approx 1 - \epsilon \dot{\Psi}$$

Tendo sido utilizada a aproximação binomial $(1+x)^n \approx 1+nx$ no último passo. Agora, note que:

$$\frac{dq_i^*}{dt^*} = \frac{dq_i^*}{dt} \frac{dt}{dt^*} = (\dot{q}_i + \epsilon \dot{\Phi}_i)(1 - \epsilon \dot{\Psi})$$

Ignorando termos de segunda ordem:

$$\frac{dq_i^*}{dt^*} \approx \dot{q}_i + \epsilon(\dot{\Phi} - \dot{q}_i \dot{\Psi})$$

Assim, podemos escrever a nova ação em função dos termos originais.

$$\int_{t_0}^{t_1} L(q + \epsilon\Phi, \dot{q} + \epsilon(\dot{\Phi} - \dot{q}\dot{\Psi}), t + \epsilon\Psi)(1 + \epsilon\dot{\Psi}) dt \quad (2.6.4)$$

Fazendo uma expansão de Taylor até os termos de primeira ordem:

$$L(q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^*) = L(q, \dot{q}, t) + \sum \frac{\partial L}{\partial q_i}(\epsilon\Phi) + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon(\dot{\Phi} - \dot{q}_i \dot{\Psi}) + \frac{\partial L}{\partial t}(\epsilon\Psi) \quad (2.6.5)$$

Chega-se em (Através da (2.6.3), ignorando os termos de segunda ordem):

$$\epsilon \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \Phi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{\Phi} \right) + \dot{\Psi} \left(L - \sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \Psi \right] dt = 0 \quad (2.6.6)$$

Mas como ϵ é arbitrário, o integrando deve ser nulo.

$$\sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \Phi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{\Phi} \right) + \dot{\Psi} \left(L - \sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \Psi = 0 \quad (2.6.7)$$

Além disso, simplificaremos a (2.6.7) através de mais duas identidades. Primeiro, pela equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

Portanto o termo no primeiro somatório se torna:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} \Phi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{\Phi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \Phi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{\Phi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Phi \right) \quad (2.6.8)$$

E a segunda identidade é obtida através da derivada total da Lagrangiana:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d\dot{q}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Utilizando a primeira identidade novamente no termo $\partial L / \partial q$,

$$\frac{dL}{dt} = \sum \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

podemos escrever $\partial L/\partial t$ como:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(L - \sum^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (2.6.9)$$

Que é a derivada parcial do último termo na (2.6.7). Portanto a (2.6.7) nos leva à:

$$\sum^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Phi \right) + \dot{\Psi} \left(L - \sum^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{d}{dt} \left(L - \sum^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \Psi = 0$$

Fica fácil ver que pela regra do produto de derivadas o segundo e terceiro termos podem ser escritos como:

$$\dot{\Psi} \left(L - \sum^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{d}{dt} \left(L - \sum^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \Psi = \frac{d}{dt} \left(\Psi \left(L - \sum^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right)$$

Por fim, chegamos em:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum^n \Phi \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \Psi \left(L - \sum^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) = 0 \quad (2.6.10)$$

O que completa a demonstração. □

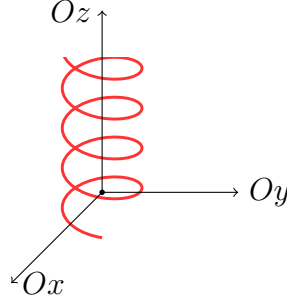
■ **Exemplo 21:** (Classical Mechanics - R. Douglas Gregory) Uma partícula se move em um campo conservativo de energia potencial V com simetria helicoidal. Isso significa que V é invariante sobre operações *simultâneas* (i) de rotação por um ângulo ϵ em torno do eixo Oz , e (ii) e de uma translação $c\epsilon$ na direção z . Qual a quantidade conservada correspondente a essa simetria?

Podemos escrever a lagrangiana do sistema como:

$$L(q_r, q_\theta, q_z) = \frac{m}{2} (\dot{q}_r^2 + r^2 \dot{q}_\theta^2 + \dot{q}_z^2) + V(q_r, q_\theta, q_z) \quad (2.6.11)$$

Portanto:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = m\dot{q}_r, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\theta} = mr^2\dot{q}_\theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_z} = m\dot{q}_z \quad (2.6.12)$$



Conforme o enunciado do problema, o potencial (e por conseguinte, a Lagrangiana e Ação, neste caso), são invariantes sob as transformações:

$$t \rightarrow t, \quad q_r \rightarrow q_r, \quad q_\theta \rightarrow q_\theta + \epsilon, \quad q_z \rightarrow q_z + c\epsilon \quad (2.6.13)$$

Assim, pela (2.6.1) podemos identificar:

$$\Psi = 0, \quad \Phi_r = 0, \quad \Phi_\theta = 1, \quad \Phi_z = c \quad (2.6.14)$$

Portanto, pela equação (2.6.2), do Teorema de Noether, vemos que a quantidade conservada é:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\theta} \Phi_\theta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_z} \Phi_z = mr^2 \dot{q}_\theta + cm \dot{q}_z = L_z + cp_z \quad (2.6.15)$$

Onde L_z representa o momento angular em torno de O_z e p_z representa a componente z do momento linear.

Há situações em que a Lagrangiana não se mantém invariante mas a ação sim, então o teorema continua válido. Veja que se as Lagrangianas $L(q^*, \dot{q}^*, t)$ e $L(q, \dot{q}, t)$ diferem por um fator $\epsilon \frac{d\Lambda}{dt}$,

$$\int_{t_0^*}^{t_1^*} L(q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^*) dt^* + \epsilon \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\Lambda}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2.6.16)$$

isto é, uma derivada total no tempo, a quantidade conservada passa a ser:

$$\sum^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Phi_i + \Psi \left(L - \sum^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) + \Lambda(t_1) - \Lambda(t_0) \quad (2.6.17)$$

■ **Exemplo 22:** Considere a lagrangiana de um corpo em queda livre:

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} + mgq$$

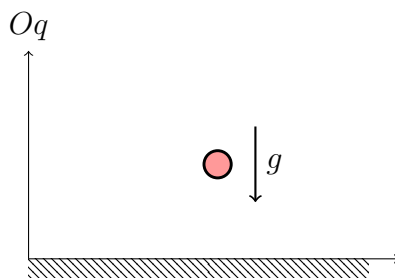


Figura 8: Corpo em queda livre.

Considere agora a transformação infinitesimal:

$$q(t) \rightarrow q(t) + \epsilon$$

A nova lagrangiana se torna:

$$L' = \frac{m\dot{q}^2}{2} + mg(q + \epsilon)$$

Portanto, definindo Λ como $\epsilon(mgt)$

$$L' - L = mg = \frac{d\Lambda}{dt}$$

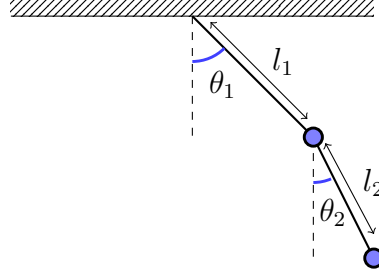
Elas irão diferir por uma derivada total no tempo, o que mantém a ação invariante, conforme vimos, e a quantia conservada será:

$$\frac{\partial L}{\partial q} \Phi + \Lambda = m(\dot{q} + gt) = cte. \quad (2.6.18)$$

Que é a velocidade inicial do corpo.

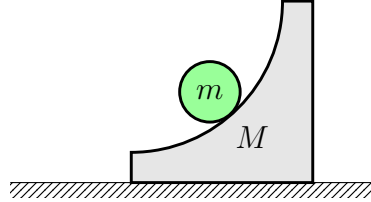
Problemas 2

■ **Problema 2.1:** a) Encontre a Lagrangiana e as equações de movimento de um pêndulo duplo, e assuma que ambos os corpos têm massa m , conforme o arranjo da figura:

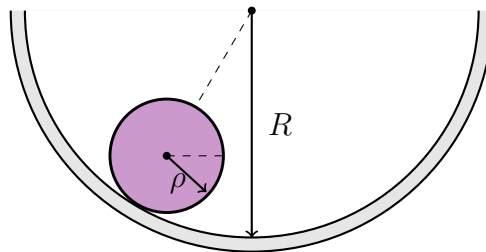


b) Faça uma aproximação para pequenos ângulos e resolva as equações de movimento. Por simplicidade, também assuma que $l_1 = l_2$.

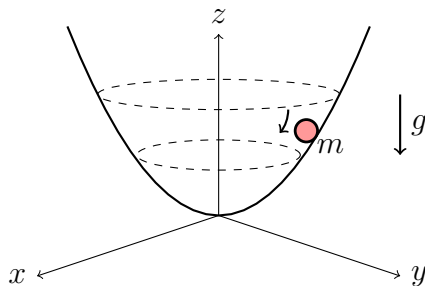
■ **Problema 2.2:** (Marion, J. B.; Thornton; S. T.; 2011; Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas) Uma partícula de massa m desliza para baixo de uma cunha circular de massa M como mostra a figura. A cunha repousa em uma mesa horizontal lisa. Encontre a equação de movimento de m e M .



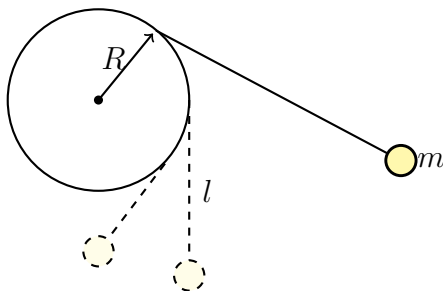
■ **Problema 2.3:** (Marion, J. B.; Thornton; S. T.; 2011; Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas) Uma esfera de raio ρ é restrita a rodar sem deslizamento na parte inferior da superfície interna de um cilindro oco de raio interno R . Determine a função de Lagrange e as equações de movimento de Lagrange. Encontre a frequência de pequenas oscilações.



■ **Problema 2.4:** Considere uma partícula de massa m cujo movimento está restrito a um parabolóide de revolução $z = r^2$. Encontre as equações de movimento.

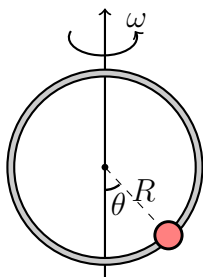


■ **Problema 2.5:** (Mary L. Boas-Mathematical Methods in the Physical Sciences) Considere o pêndulo mostrado na figura, conectado à um suporte em formato de disco que se mantém fixo:



O comprimento total do fio vale l quando o pêndulo se encontra na posição vertical, além disso o fio pode se enrolar em torno do disco conforme ele oscila. Sabendo que o fio sempre se mantém tangente ao suporte, encontre a equação de movimento do pêndulo.

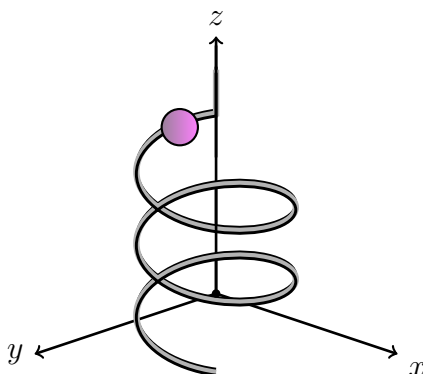
■ **Problema 2.6:** (EUF) Uma partícula de massa m pode se mover sem atrito num aro de raio R . O aro gira com velocidade angular constante ω em torno do eixo vertical. Considere a aceleração da gravidade como g .



- a) Determine a Lagrangiana e a equação de movimento da partícula.
- b) Determine os pontos de equilíbrio.

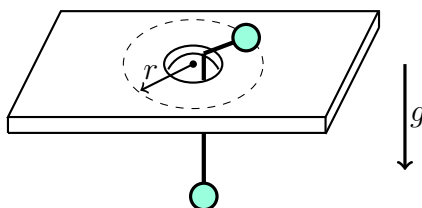
■ **Problema 2.7:** Encontre as forças de restrição do problema anterior.

■ **Problema 2.8:** Uma partícula sob a ação da gravidade desliza ao longo de uma hélice de raio R , definida por $z = \alpha\theta$, com α constante. Encontre as equações de movimento e as forças de restrição, através dos multiplicadores de lagrange.



■ **Problema 2.9:** (EUF) Duas partículas de massas iguais a m estão ligadas por uma corda inextensível de comprimento ℓ e massa desprezível, que passa por um pequeno furo sobre uma mesa horizontal. Uma das partículas se move na superfície da mesa horizontal e a outra ao longo da direção vertical.

- a) Encontre a Lagrangiana e as equações de movimento do sistema
- b) Mostre que o momento angular em relação ao furo da mesa é uma constante de movimento
- c) Mostre que é possível haver movimento circular no plano da mesa. Calcule o momento angular e a energia do sistema, se a partícula no plano da mesa se move numa órbita circular de raio R .



■ **Problema 2.10:** Na presença de coordenadas cíclicas, pode ser conveniente utilizar uma função denominada **Routhiana**. Suponha que as coordenadas generalizadas de um sistema são p e ξ , e que p é a coordenada cíclica. Podemos definir a Routhiana desse sistema como:

$$R(p, q, \xi, \dot{\xi}) = p\dot{q} - L \quad (2.6.19)$$

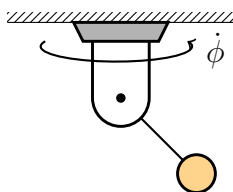
Sendo L a Lagrangiana do sistema e $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$. A Routhiana, assim como a Lagrangiana, satisfaz:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial R}{\partial \xi} = 0 \quad (2.6.20)$$

Essa construção é realizada através de uma *transformada de Legendre* (Cheque o apêndice). Portanto também valem as relações:

$$\frac{\partial R}{\partial p} = \dot{q}, \quad \frac{\partial R}{\partial q} = -\dot{p} = 0 \quad (2.6.21)$$

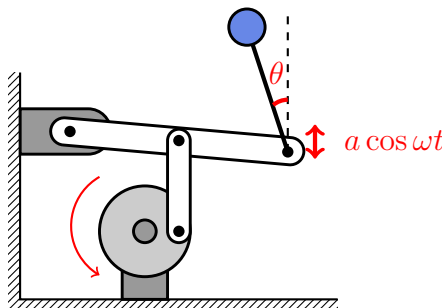
Considere agora um pêndulo esférico, conectado à um suporte que gira com velocidade angular constante $\dot{\phi}$ através de uma barra rígida e sem massa.



a) Encontre a Lagrangiana para o sistema e o momento conjugado associado à coordenada ϕ .

b) Encontre agora a Routhiana $R(\phi, p_\phi, \theta, \dot{\theta})$ do pêndulo esférico e a equação diferencial para θ .

■ **Problema 2.11:** Descrito por A. Stephenson em 1908, o pêndulo de Kapitza é constituído por um pêndulo invertido ligado à uma base que oscila verticalmente. É possível mostrar que se a frequência de oscilação do suporte é rápida suficiente, o pêndulo é capaz de atingir equilíbrio estável.



a) Se o comprimento do pêndulo vale l e a frequência de oscilações do suporte vale ω , encontre a Lagrangiana do sistema e a equação de movimento.

Veremos agora, como obter um potencial efetivo U_{eff} que leva em conta a influência do movimento oscilatório do suporte no sistema, com base nas informações que temos em mãos. A EDO obtida no item anterior é da forma:⁷

$$\ddot{\theta} = -\frac{dU}{d\theta} + f \quad (2.6.22)$$

Onde U é simplesmente o potencial gravitacional e f é um termo adicional que leva em conta a movimentação do suporte, na forma $f = f_1 \cos \omega t$. Vamos representar a função θ como:

$$\theta(t) = \Theta(t) + \xi(t) \quad (2.6.23)$$

Onde $\ddot{\xi}$ corresponde ao movimento "rápido", relacionado ao movimento oscilatório, no caso, proveniente do suporte, e $\ddot{\Theta}$ corresponde ao movimento "lento", relacionado a trajetória não-perturbada, no caso, o movimento devido à ação da gravidade. Aqui, consideramos que a amplitude do suporte é muito menor do que o comprimento do pêndulo $a \ll l$, e entedemos a oscilação do suporte como "rápida", se $\omega \gg \sqrt{\frac{g}{l}}$.

A média da função θ ao longo do período T é $\bar{\theta} = \bar{\Theta} + \bar{\xi}$, mas $\bar{\theta} = \bar{\Theta}$, pois $\bar{\xi} = 0$. Se expandirmos os termos do lado direito da equação (2.6.22) e considerarmos somente o termos até a primeira potência de ξ e utilizarmos a relação (2.6.23), obtemos:

$$m(\ddot{\Theta} + \ddot{\xi}) = -\frac{dU}{d\theta} - \xi \frac{d^2U}{d^2\theta} + f + \xi \frac{\partial f}{\partial \Theta} \quad (2.6.24)$$

A equação agora possui termos oscilatórios e não perturbados. Para o movimento oscilatório:

$$m\ddot{\xi} = f \implies \xi = -\frac{f}{m\omega^2} \quad (2.6.25)$$

Calculando a média com respeito ao tempo ao longo de um ciclo da (2.6.24), obtemos:

$$m\ddot{\Theta} = -\frac{dU}{d\Theta} - \frac{1}{m\omega^2} \overline{f \frac{\partial f}{\partial \Theta}} \quad (2.6.26)$$

⁷Este desenvolvimento se deve à P. L. Kapitza (1951), para mais detalhes cheque Landau L. D. & Lifshitz E. M., Mechanics, (Terceira Edição, 1960) pp 93-95. Motion in a rapidly oscillating field

Pois os termos contendo f e ϵ são nulos, devido à dependência senoidal do tempo. Mas como:

$$m\ddot{\Theta} = -\frac{dU_{eff}}{d\Theta} \quad (2.6.27)$$

Então podemos definir o potencial efetivo como:

$$U_{eff} = U + \frac{\bar{f}^2}{2m\omega^2} \quad (2.6.28)$$

Como $\overline{f_1^2 \cos^2(\omega t)} = \frac{f_1^2}{2}$, o potencial efetivo vale então:

$$U_{eff} = U + \frac{f_1^2}{4m\omega^2} \quad (2.6.29)$$

b) Tendo esta informação, mostre que $\theta_0 = \pi$ é uma posição de equilíbrio estável e mostre sob quais condições isto ocorre. Qual é a frequência de oscilação?

■ **Problema 2.12:** (M. G. Calkin; Introduction to Lagrangian and Hamiltonian Mechanics; 1996) Uma partícula de massa m tem Lagrangiana na forma:

$$L = e^{\alpha t}(T - U) \quad (2.6.30)$$

Onde α é constante e $U(x, y, z)$ é o potencial. Escreva as equações de movimento e interprete o resultado.

■ **Problema 2.13:** Deduza as leis de conservação obtidas anteriormente a partir do teorema de Noether.

3 Dinâmica Hamiltoniana

Na seção anterior, os resultados mais básicos da mecânica clássica, que já eram bem conhecidos devido à Mecânica Newtoniana, foram obtidos a partir da formulação Lagrangiana. Veremos agora uma construção equivalente, a dinâmica Hamiltoniana.

A formulação Hamiltoniana gera equações de movimento equivalentes, mas usualmente não mais simples do que a Lagrangiana. Contudo, é possível de chegar em resultados poderosos, que fornecem novas interpretações e métodos de trabalhar com princípios já bem estabelecidos, sendo esta então uma de suas principais utilidades. Além disso, esses resultados não se restringem somente a mecânica clássica, na realidade o formalismo Hamiltoniano é abrangente e tem papel fundamental em diversos campos, como a mecânica quântica e a física estatística, constituindo um de seus alicerces.

3.1 Equações de Hamilton

Anteriormente foi feita uma descrição física de sistemas a partir da Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$, uma função que depende do conjunto de coordenadas generalizadas q e suas respectivas velocidades \dot{q} . Contudo, a descrição deste sistema não precisa ser feita através deste único conjunto de variáveis, é possível construir uma nova função escalar $H(p, q, t)$ denominada **Hamiltoniana** a partir da Lagrangiana, através uma *transformada de Legendre*:

■ **Definição 9.** A Hamiltoniana de um sistema de n graus de liberdade é definida como:

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \quad (3.1.1)$$

Sendo L a Lagrangiana, q_1, \dots, q_n as coordenadas generalizadas, e p_1, \dots, p_n os momentos generalizados.

Vejamos agora como obter equações de movimento através desta nova função. O diferencial total da Lagrangiana pode ser escrito como:

$$dL = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (3.1.2)$$

Mas veja que pela definição de momento generalizado:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \implies \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \dot{p}_i$$

Ou seja, podemos reescrever dL :

$$dL = \sum^n \dot{p}_i dq_i + \sum^n p_i \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (3.1.3)$$

Já para a Hamiltoniana, pela sua definição, seu diferencial total é:

$$dH = d\left(\sum^n p_i \dot{q}_i - L\right) \quad (3.1.4)$$

Como já calculamos dL , o diferencial da Hamiltoniana fica:

$$dH = \sum^n \dot{q}_i dp_i - \sum^n \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (3.1.5)$$

Mas o diferencial total da Hamiltoniana também pode ser escrito como:

$$dH = \sum^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (3.1.6)$$

Comparando agora as duas equações anteriores podemos estabelecer uma relação entre a Hamiltoniana e as variáveis, pois os coeficientes de dq_i , dp_i e dt devem ser iguais em ambas as expressões:

■ **Resultado 7. Equações de Hamilton**

Para um sistema de n graus de liberdade e Hamiltoniana H , vale:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (3.1.7)$$

Com $i = 1, \dots, n$. Estas equações também são chamadas de equações canônicas.

Podemos também fazer as substituições anteriores na expressão da derivada total de H :

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{\frac{\partial H}{\partial q}}_{=-\dot{p}} \dot{q} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p}}_{=\dot{q}} \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

Assim, chegamos em:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (3.1.8)$$

Portanto, fica claro que se $\partial H/\partial t = 0$, H é uma quantidade conservada:

■ **Resultado 8.** *Se a Hamiltoniana de um sistema não depende explicitamente do tempo, então H é uma constante de movimento.*

Por fim, podemos obter a seguinte relação entre a Lagrangiana e a Hamiltoniana, do mesmo modo que obtivemos as equações de Hamilton:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (3.1.9)$$

Veja também que pela definição da Hamiltoniana:

$$H = \sum^n \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L$$

Se a T é homogênea de grau 2 e o potencial U não depende das velocidades, então $\sum^n \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 2T$, então:

$$H = T + U = E \quad (3.1.10)$$

A Hamiltoniana é simplesmente a energia total do sistema. Vale ressaltar que há situações em que a Hamiltoniana é a energia total E , mas não é constante de movimento, e também há sistemas nos quais H é conservada mas não é a energia total. Ou seja, a conservação da Hamiltoniana depende do fato dela ser ou não a energia do sistema.

São notáveis algumas diferenças entre as duas abordagens utilizadas: a Lagrangiana trabalha com o conjunto de coordenadas e *velocidades* generalizadas, já a Hamiltoniana, com coordenadas e *momentos* generalizados. Além disso, outra diferença mais imediata entre as duas formulações é o fato que a Lagrangiana (sob a ausência de vínculos) gera n equações diferenciais de *segunda ordem*, a Hamiltoniana por sua vez gera $2n$ equações diferenciais de *primeira ordem*.

■ **Exemplo 22:** (Landau, L. D.; Lifshitz, E.; Mechanics; 1960.) Encontre a Hamiltoniana de uma partícula de massa m em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas.

Em coordenadas cartesianas os momentos generalizados são:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

Portanto a Hamiltoniana fica:

$$H = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - \left[\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z) \right]$$

Escrevendo os velocidades \dot{x} , \dot{y} e \dot{z} em termos dos momentos, obtemos:

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z) \quad (3.1.11)$$

Já em coordenadas cilíndricas, os momentos generalizados são:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}, p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

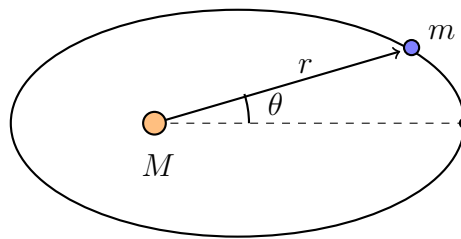
Portanto a Hamiltoniana fica:

$$H(r, \phi, z, \dot{r}, \dot{\phi}, \dot{z}) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + p_z^2 \right) + U(r, \phi, z) \quad (3.1.12)$$

Por fim, a Hamiltoniana em coordenadas esféricas pode ser obtida através do mesmos passos, levando à:

$$H(r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \phi) \quad (3.1.13)$$

■ **Exemplo 23:** Considere um planeta de massa m orbitando uma estrela de massa M . Encontre a Hamiltoniana e as equações de Hamilton em coordenadas polares.



A Lagrangiana é:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{GMm}{r} \quad (3.1.14)$$

Os momentos generalizados são então:

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta}$$

Portanto a Hamiltoniana é:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{GMm}{r} \quad (3.1.15)$$

As equações canônicas para θ são:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \quad (3.1.16)$$

Mas veja que H não depende de θ , então a solução da segunda equação é $p_\theta = l$, sendo l uma constante, que no caso representa o momento angular. Portanto a EDO para θ fica:

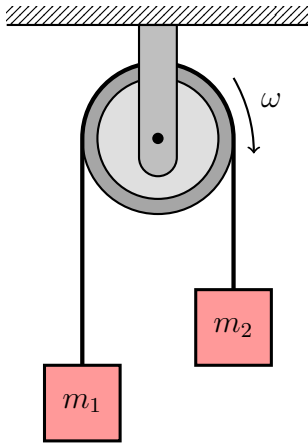
$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} = \frac{l}{mr^2} \quad (3.1.17)$$

Já para r , as equações de Hamilton são:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} \quad (3.1.18)$$

O que nos leva à:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{GMm}{r^2} \quad (3.1.19)$$



■ **Exemplo 24:** Considere uma máquina de Atwood, conforme a figura ao lado. Sendo R o raio da polia e I seu momento de inércia, encontre a Hamiltoniana e as equações de movimento.

Escolhendo como coordenadas generalizadas o deslocamento vertical y e o ângulo θ , a Lagrangiana do sistema fica:

$$L = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \dot{y}^2 + \frac{I}{2} \dot{\theta}^2 + m_1 g y + m_2 g (\ell - y) \quad (3.1.20)$$

Sendo ℓ o comprimento do fio. Os momentos são simplesmente:

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = (m_1 + m_2) \dot{y}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I \dot{\theta} \quad (3.1.21)$$

Se o fio não desliza em relação à polia então vale o vínculo $\dot{y} = R\dot{\theta}$. Portanto, a Hamiltoniana do sistema é:

$$H = p_y \dot{y} + p_\theta \dot{\theta} - L$$

Fazendo as devidas substituições:

$$H = \frac{p_y^2}{(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2})} - m_1 g y - m_2 g (\ell - y) \quad (3.1.22)$$

3.2 Transformações Canônicas

Vimos anteriormente que a equação de Lagrange é invariante sob a transformação de ponto, e por conseguinte as equações de Hamilton também o são. Porém, o formalismo Hamiltoniano permite uma classe mais abrangente de transformações, denominadas *transformações canônicas*.

A formulação Hamiltoniana apresenta a vantagem de tratar as coordenadas p e q como sendo equivalentes, isto é, elas são independentes e podem ser tratadas em pé de igualdade, propriedade ausente na formulação Lagrangiana. Um exemplo prático e simples dessa liberdade de escolha de coordenadas são as transformações $q_i \rightarrow p_i$ e $p_i \rightarrow -q_i$, que levam a equações de movimento equivalentes. Assim, é particularmente útil obter um método geral através do qual possamos determinar que classe de transformações preservam as equações de Hamilton.

3.2.1 Colchetes de Poisson

No contexto da mecânica clássica, é útil introduzir os *parênteses de poisson*, que apresentam especial utilidade no tratamento Hamiltoniano. Em razão de sua invariância sob transformações canônicas, os parênteses de Poisson são especialmente úteis nessa aplicação em especial, mas claro, sua aplicabilidade não se restringe somente a tais situações, eles podem ser úteis no tratamento de constantes de movimentos, por exemplo.⁸

■ **Definição 10.** *Sejam f e g funções de q_1, \dots, q_k e p_1, \dots, p_k . Os parênteses de Poisson são definidos como a operação binária:*

$$[f, g] = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right) \quad (3.2.1)$$

⁸A definição utilizada aqui é a mesma adotada por Landau[3], contudo outros autores adotam sinal contrário (Veja por exemplo Lemos [20]).

Valem as seguintes propriedades:

$$[f, g] = -[g, f] \quad (3.2.2)$$

$$[f, c] = 0 \quad (3.2.3)$$

$$[f + h, g] = [f, g] + [h, g] \quad (3.2.4)$$

$$[fh, g] = f[h, g] + h[f, g] \quad (3.2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[f, g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] \quad (3.2.6)$$

E uma última relação, denominada *identidade de Jacobi*:⁹

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0 \quad (3.2.7)$$

Se a função f depender do tempo, das coordenadas e momentos generalizados, pode-se relacionar sua derivada total com os colchetes por meio de sua derivada total:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) \quad (3.2.8)$$

Mas pelas equações canônicas, temos:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Portanto o somatório é simplesmente um colchete de Poisson,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] \quad (3.2.9)$$

Se f é constante de movimento, isto é, se sua derivada total é nula, então vale a relação:

⁹É interessante notar que essas mesmas propriedades são satisfeitas pela operação do produto vetorial entre dois vetores A e B e também pelo comutador de duas matrizes A e B , definido como $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$. Essa relação tem inclusive um importante papel histórico. Em outro de 1925, durante uma de suas caminhadas que costumava fazer aos domingos, Paul M. Dirac teve a ideia de relacionar os colchetes de Poisson com o comutador da mecânica quântica, o que se traduz na correspondência $[x, y] = i\hbar(xy - yx)$. Dirac escreveu logo em seguida seu artigo "The Fundamental Equations of Quantum Mechanics", ainda no mesmo ano.[23]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] = 0 \quad (3.2.10)$$

Em uma situação ainda mais específica, na qual f não depende explicitamente de t , vale que:

$$[H, f] = 0$$

Portanto, é possível determinar se f é constante de movimento simplesmente verificando se f comuta com a Hamiltoniana. Além disso, por meio dessa nova notação surge um resultado importante:

▣ **Resultado 9. Teorema de Poisson**

Se f e g são constante de movimento e não dependem explicitamente do tempo, então é válida a relação:

$$[f, g] = cte. \quad (3.2.11)$$

Ou seja, $[f, g]$ também é constante de movimento.

Demonstração: De acordo com a equação (3.2.9),

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + [H, h]$$

Fazendo $h \rightarrow [f, g]$:

$$\frac{d}{dt}[f, g] = \frac{\partial}{\partial t}[f, g] + [H, [f, g]] \quad (3.2.12)$$

Pela identidade de Jacobi e pela propriedade apresentada para a derivada parcial do colchete:

$$\frac{d}{dt}[f, g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] - [f, [g, H]] - [g, [H, f]]$$

Rearranjando através das propriedades de adição e anticomutatividade:

$$\frac{d}{dt}[f, g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + [H, f], g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} + [H, g] \right]$$

Como $[H, f] = [H, g] = 0$ e $df/dt = dg/dt = 0$, segue que:

$$\frac{d}{dt}[f, g] = \left[\frac{df}{dt}, g \right] + \left[f, \frac{dg}{dt} \right] = 0 \quad (3.2.13)$$

O que completa a demonstração.

■ **Exemplo 25:** Mostre que valem as relações (Sendo δ o delta de kronecker):

$$[q_i, q_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0 \quad [p_i, q_j] = \delta_{ij} \quad (3.2.14)$$

Como p_i e q_j são tratadas como variáveis independentes, então $\partial p_i / \partial q_j = 0$, para todo i e j , assim a prova das duas primeiras relações é trivial. Agora, veja que:

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_k} = \delta_{ik} \quad \frac{\partial q_j}{\partial q_k} = \delta_{jk}$$

Portanto:

$$[p_i, q_j] = \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_k}}_{=\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_k}}_{=\delta_{jk}} - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}_{=0} \frac{\partial q_j}{\partial p_k} \right) = \sum_k \delta_{ik} \delta_{jk}$$

Mas $\delta_{ik} \delta_{jk} = 1$ se $i = j = k$, portanto:

$$[p_i, q_j] = \delta_{ij} \quad (3.2.15)$$

3.2.2 Funções geradoras

Embora as transformações de ponto mantenham as equações de Hamilton em sua forma canônica, o mesmo não é válido para todas as transformações simultâneas do tipo $q \rightarrow Q$ e $p \rightarrow P$. Vejamos agora então como obter condições necessárias para determinar que tipo de transformação é canônica, conforme a definição:

■ **Definição 11.** Uma transformação de coordenadas inversível e diferenciável do tipo:

$$\begin{aligned} q_i &\rightarrow Q_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \\ p_i &\rightarrow P_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

é dita **canônica** se preserva a forma das equações de Hamilton:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} \quad (3.2.17)$$

Sendo $H'(Q, P, t)$ a nova Hamiltoniana.

Dada as considerações anteriores, pelo princípio de Hamilton a ação deve se manter estacionária sob ambos os conjuntos de coordenadas, deste modo:

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} (\sum^n p_i dq_i - H dt) = 0 \quad (3.2.18)$$

e,

$$\delta S' = \delta \int_{t_0}^{t_1} (\sum^n P_i dQ_i - H' dt) = 0 \quad (3.2.19)$$

Se os integrandos diferem pelo diferencial total de uma função f das coordenadas, momentos e tempo, então:

$$S' - S = \int_{t_0}^{t_1} \frac{df}{dt} dt = F(t_1) - F(t_0)$$

Deste modo, a diferença entre as integrais é um termo constante, o que não afeta a variação. Portanto os integrandos se relacionam por:

$$df = \sum^n (p_i dq_i - P_i dQ_i) + (H' - H) dt \quad (3.2.20)$$

Sendo esta uma condição suficiente para que a transformação seja canônica. A função f é denominada **função geradora**. Perceba agora que os diferenciais na expressão acima são diferenciais das antigas e novas coordenadas generalizadas, o que nos sugere que a função toma as mesmas variáveis como argumento. Deste modo $f = f_1(q, Q, t)$, e seu diferencial total é:

$$df_1 = \sum^n \frac{\partial f_1}{\partial q_i} dq_i + \sum^n \frac{\partial f_1}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial f_1}{\partial t} dt \quad (3.2.21)$$

A comparação dos coeficientes de dq_i , dQ_i e dt nas duas equações anteriores resulta em:

$$p_i = \frac{\partial f_1}{\partial q_i}, \quad p_i = -\frac{\partial f_1}{\partial Q_i}, \quad H' = \frac{\partial f_1}{\partial t} + H \quad (3.2.22)$$

Portanto, se a função geradora f_1 é conhecida, então é possível obter os momentos generalizados e a nova Hamiltoniana.

Se não for de interesse, ou mesmo necessário, escrever a função geradoras em termos do conjunto de coordenadas (q, Q) , como a própria transformação identidade. É possível escrever uma nova função geradora f_2 através do conjunto de coordenadas (q, P) por meio da transformada de Legendre (Com o sinal trocado em relação à definição convencional). Podemos expressar f_2 como:

$$f_2(q, P, t) = f_1(q, Q, t) - \sum^n \frac{\partial f_1}{\partial Q_i} Q_i = f_1(q, Q, t) + \sum^n P_i Q_i \quad (3.2.23)$$

Tomando o diferencial total da equação anterior:

$$df_2 = \sum^n p_i dq_i + \sum^n Q_i dP_i + (H' - H)dt$$

Mas,

$$df_2 = \sum^n \frac{\partial f_2}{\partial q_i} dq_i + \sum^n \frac{\partial f_2}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial f_2}{\partial t} dt$$

Portanto:

$$p_i = \frac{\partial f_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial f_2}{\partial P_i}, \quad H' = \frac{\partial f_2}{\partial t} + H \quad (3.2.24)$$

Relações similares podem ser obtidas para funções geradoras que são funções de (Q, p) ou (Q, P) . A expressão que relaciona as Hamiltonianas é praticamente a mesma para todas as funções, valendo $H' = H + \frac{\partial f_j}{\partial t}$, sendo f_j a função em questão. As relações estão resumidas na tabela:

Transformações Canônicas	
Função geradora	Relações
$f = f_1(q, Q, t)$	$p_i = \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \quad P_i = -\frac{\partial f_1}{\partial Q_i}$
$f = f_2(q, P, t) - \sum^n Q_i P_i$	$p_i = \frac{\partial f_2}{\partial q_i} \quad Q_i = \frac{\partial f_2}{\partial P_i}$
$f = f_3(p, Q, t) + \sum^n q_i p_i$	$q_i = -\frac{\partial f_3}{\partial p_i} \quad P_i = -\frac{\partial f_3}{\partial Q_i}$
$f = f_4(p, P, t) + \sum^n (q_i p_i - Q_i P_i)$	$q_i = -\frac{\partial f_4}{\partial p_i} \quad Q_i = -\frac{\partial f_4}{\partial P_i}$

■ **Exemplo 26:** (Classical Mechanics - Herbert Goldstein, Charles P. Poole, John L. Safko - Adaptado) Mostre que a função geradora,

$$f_3 = -(e^Q - 1)^2 \tan p \quad (3.2.25)$$

Gera as variáveis canônicas:

$$\begin{aligned} Q &= \ln(1 + \sqrt{q} \cos p) \\ P &= 2(1 + \sqrt{q} \cos p)\sqrt{q} \sin p \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

Se p e q também forem canônicas.

A verificação pode ser feita diretamente através dos parênteses de Poisson. Através da tabela vemos como obter q e P através de f_3 :

$$p = -\frac{\partial f_3}{\partial P} = (e^Q - 1)^2 \sec^2 p$$

Resolvendo para Q :

$$Q = \ln(1 + \sqrt{q} \cos p) \quad (3.2.27)$$

Agora para P temos:

$$P = -\frac{\partial f_3}{\partial Q} = 2e^Q(e^Q - 1) \tan p$$

Substituindo Q pela expressão encontrada, em termos de q e p , obtemos:

$$P = 2(1 + \sqrt{q} \cos p)\sqrt{q} \sin p \quad (3.2.28)$$

No exercício anterior obtivemos um conjunto de coordenadas generalizadas a partir de uma função conhecida dada, contudo pode também ser necessário determinar se uma certa transformação de coordenadas é de fato canônica, dada a expressão para as variáveis. Como os colchetes de Poisson são invariantes sob uma transformação canônica de coordenadas, podemos inferir condições necessárias para tal a partir desta propriedade.

■ **Resultado 10.** Se p, q , $P(p, q)$ e $Q(p, q)$ são variáveis canônicas, então os colchetes de Poisson são invariantes sob a transformação $p \rightarrow P$ e $q \rightarrow Q$, isto é:

$$[f, g]_{p, q} = [f, g]_{P, Q} \quad (3.2.29)$$

Onde o índice indica com respeito a quais variáveis as funções são diferenciadas.

Demonstração. Calculando os colchetes de Poisson em termos das novas variáveis P, Q , temos:

$$[f, g]_{P,Q} = \frac{\partial f}{\partial P} \frac{\partial g}{\partial Q} - \frac{\partial f}{\partial Q} \frac{\partial g}{\partial P}$$

Mas P e Q são funções de p e q , portanto podemos usar a regra da cadeia para obter:

$$\begin{aligned} [f, g]_{P,Q} &= \left(\frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial P} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial P} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial Q} \right) \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial Q} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial P} + \frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial P} \right) \end{aligned}$$

Após certo trabalho com manipulação algébrica, a equação anterior pode ser reescrita como:

$$[f, g]_{P,Q} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} [q, p] + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} [p, q] + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial q} [q, q] + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial p} [p, p] \quad (3.2.30)$$

Mas $[p, q] = 1, [q, p] = -1$ e $[q, q] = [p, p] = 0$, portanto a equação anterior resulta em:

$$\begin{aligned} [f, g]_{P,Q} &= \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} \\ [f, g]_{P,Q} &= [f, g]_{p,q} \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

O que mostra que a operação é invariante. □

Assim, podemos por exemplo, verificar se $[Q_i, Q_j]_{p,q} = 0$, $[P_i, P_j]_{p,q} = 0$ e $[P_i, Q_j]_{p,q} = \delta_{ij}$. Essas são condições *necessária e suficientes* para determinar se a transformação é canônica.

■ **Exemplo 27:** (Classical Mechanics - Herbert Goldstein, Charles P. Poole, John L. Safko) Mostre que a transformação:

$$Q = \ln\left(\frac{\sin p}{q}\right), \quad P = q \cot p \quad (3.2.32)$$

É canônica.

É possível mostrar que a transformação é canônica diretamente através dos colchetes de Poisson:

$$[P, Q] = \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} \quad (3.2.33)$$

Temos que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial p} &= -\frac{q}{\sin^2 p} & \frac{\partial Q}{\partial q} &= -\frac{1}{q} \\ \frac{\partial P}{\partial q} &= \frac{\cos p}{\sin p} & \frac{\partial Q}{\partial p} &= \frac{\cos p}{\sin p} \end{aligned}$$

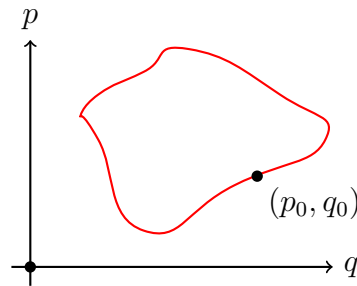
Assim:

$$[P, Q] = \frac{1 - \cos^2 p}{\sin^2 p} = 1 \quad (3.2.34)$$

Conforme queríamos mostrar, portanto a transformação é de fato canônica.

3.3 Espaço de Fase

No tratamento Hamiltoniano descrevemos o estado de um sistema de n graus de liberdades com $2n$ variáveis independentes, o conjunto de coordenadas generalizadas e os momentos conjugados associados. Conhecendo o estado do sistema, podemos inferir seu comportamento subsequente. É possível representá-lo em diferentes instantes a partir do **espaço de fase**, uma representação paramétrica da evolução do sistema. Os diferentes estados do sistema são representados graficamente em um gráfico de $2n$ dimensões, com n eixos representando as coordenadas generalizadas e n eixos representando os momentos conjugados, como no seguinte esboço:



O espaço de fase oferece algumas vantagens bem evidentes em relação às outras representações. Uma representação paramétrica somente das coordenadas de um corpo por exemplo, apesar de mostrar a trajetória percorrida pela partícula, não nos permite inferir as velocidades e determinar seu estado completamente. Um

só ponto nesse gráfico pode corresponder a diversos estados diferentes (No caso pêndulo simples por exemplo, o ponto mais baixo da trajetória pode corresponder ao caminho de "ida" ou de "volta", não é possível saber a orientação do vetor velocidade dada somente suas coordenadas numa parametrização das posições x e y). Não só isso, também é possível inferir certas propriedades do sistema a partir de sua representação gráfica, como por exemplo, verificar se ela é fechada, o que é o caso do oscilador harmônico simples, como veremos no exemplo seguinte.

■ **Exemplo 28:** Esboce o espaço de fase de um sistema massa-mola.

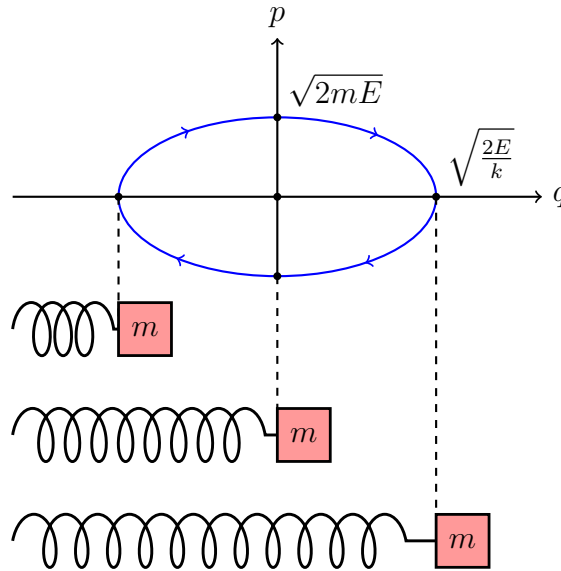
A Hamiltoniana do sistema é simplesmente:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} \quad (3.3.1)$$

Mas para este sistema a Hamiltoniana equivale à energia total, logo podemos rearranjar a equação anterior:

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{\frac{2E}{k}} = 1 \quad (3.3.2)$$

Que é simplesmente a equação de uma elipse. Podemos representar então a trajetória do corpo no espaço de fase conforme a figura:



Assim, no caso do sistema massa-mola as trajetórias no espaço de fase são elipses concêntricas, com o tamanho dos eixos determinados a partir da energia E . Veja que dado os pontos iniciais p_0, q_0 é possível determinar univocamente a

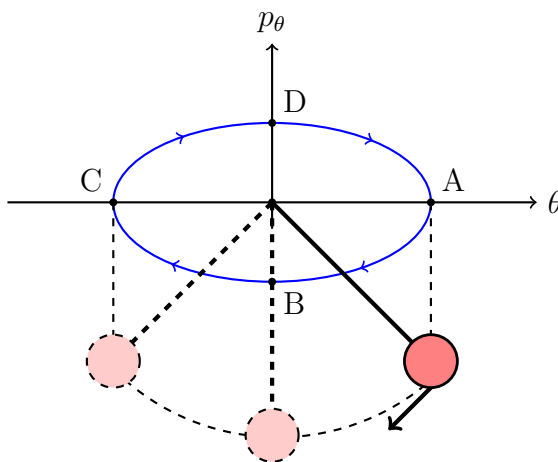
energia do sistema e sua trajetória.

■ **Exemplo 29:** Esboce o espaço de fase para um pêndulo de comprimento ℓ .

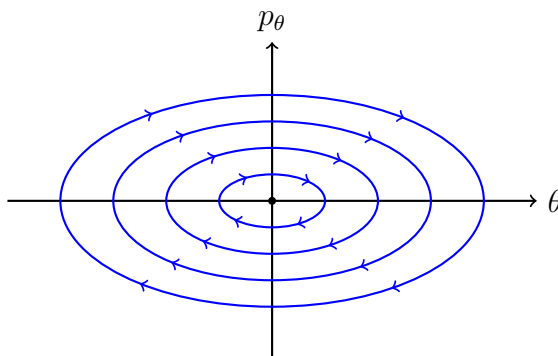
A Hamiltoniana para um pêndulo simples é:

$$H = \frac{p_\theta^2}{2m\ell^2} - mg\ell \cos \theta = 0 \quad (3.3.3)$$

Para pequenas oscilações a trajetória no espaço de fase possui a mesma formato do oscilador harmônico que vimos no exemplo anterior:



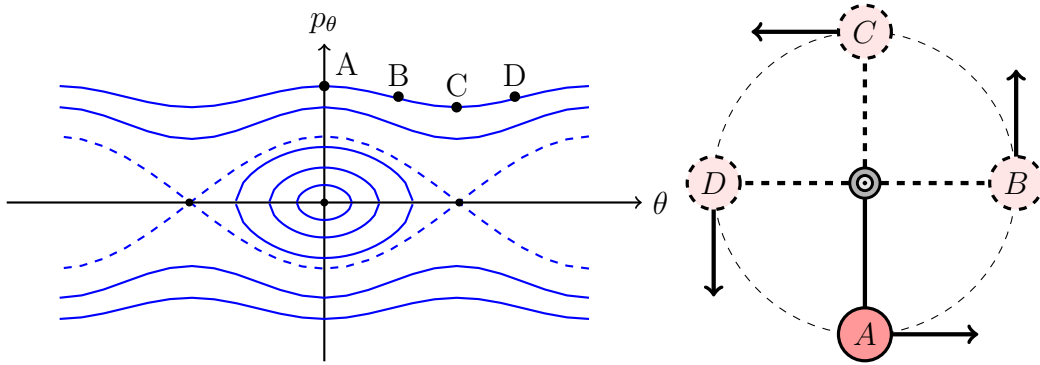
Podemos determinar algumas características simplesmente a partir desses gráfico. Na posição A , por exemplo, o pêndulo atinge o maior deslocamento possível, já ao longo da trajetória AB o momento p_θ diminui conforme o sistema evolui, até atingir o seu mínimo em B , que corresponde à posição mais baixa do pêndulo (com $\theta = 0$), onde obviamente o módulo da velocidade é máximo. Para maiores valores de energia E , as trajetórias no espaço de fase são elipses concêntricas mas de eixos maiores:



Já para oscilações não lineares o comportamento é ligeiramente diferente. Podemos estabelecer a relação entre momento e deslocamento angular através da expressão da Hamiltoniana, já que $H = E$. Portanto, a expressão que relaciona o momento angular com o deslocamento angular é (ignorando um fator multiplicativo constante, que não afetará a análise):

$$p_\theta = \pm \sqrt{E + mgl \cos \theta} \quad (3.3.4)$$

O esboço do espaço de fase fica:



Para as trajetórias de baixa energia, que correspondem as oscilações, as trajetórias no espaço de fase são próximas a elipses, conforme vimos. As trajetórias com esse formato, envolvida pelas linhas tracejadas no gráfico ocorrem quando:

$$E < mgl$$

Veja que a trajetória no espaço de fases é fechada, se a energia do pêndulo estiver neste intervalo o pêndulo tem movimento oscilatório. Para maiores energias a aproximação é menos precisa, e o formato da trajetória se aproxima daquela representada pelas linhas tracejadas, e não de uma elipse. Contudo, se:

$$E > mgl$$

Então o termo dentro da raiz é sempre positivo. Nesta situação o pêndulo tem energia suficiente para realizar rotações completas sempre na mesma direção, e não realiza mais o movimento oscilatório de "ida" e "volta" da situação anterior. Veja que no espaço de fase as trajetórias nessa situação não são fechadas: o ângulo θ sempre cresce ou diminui conforme o sistema evolui, e o momento angular tem sempre o mesmo sinal. A figura ao lado do espaço de fases representa o movimento do pêndulo nos instantes A, B, C e D. Se as linhas superiores, de valor positivo (que contém os pontos ABCD) representam a rotação no sentido anti-horário, então as linhas inferiores simplesmente representam o movimento no sentido contrário.

Por fim, veja que há uma linha tracejada, separando as duas regiões com os diferentes tipos de movimento. Essa trajetória corresponde a situação em que $E = mgl$, e é denominada **separatriz**. Ela passa pelos pontos de equilíbrio instável, com $\theta = \pi$, onde $p_\theta = 0$. Os caminhos em torno dessa região são os mais sensíveis às condições iniciais.

Estes dois últimos exemplos foram importante pois nos mostraram que é possível compreender certas características do comportamento do sistema através da análise do espaço de fase, sem necessariamente resolver as equações de movimento.

Se o sistema é autônomo, isso é, se a Hamiltoniana é da forma $H = H(q, p)$, então a Hamiltoniana define *superfícies* no espaço de fase, nas quais estão contidas as trajetórias do corpo.

■ **Exemplo 30:** (Marion, J. B.; Thornton, S. T.; 2011; Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas) Uma partícula de massa m tem movimento restrito à superfície de um cilindro definido por $x^2 + y^2 = R^2$. A partícula está sujeita a um potencial $U = kr^2$, sendo r a distância em relação a origem. Encontre a Hamiltoniana do corpo e esboce sua trajetória no espaço de fase.

A Hamiltoniana da partícula é:

$$H = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{k}{2}z^2 = E \quad (3.3.5)$$

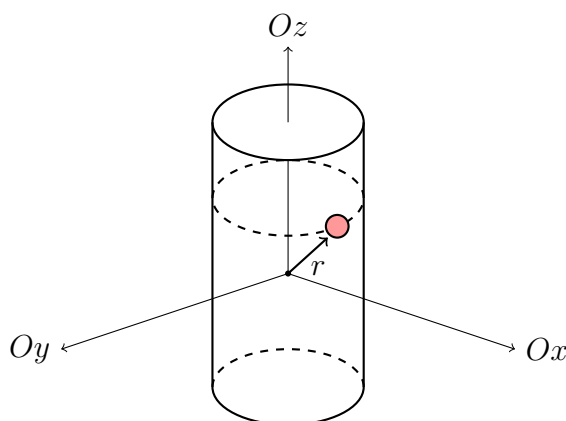
Mas o momento conjugado associado à θ é constante de movimento: $p_\theta = mR^2\dot{\theta}$, que corresponde ao momento angular do corpo. Assim, podemos escrever o momento p_z a partir da energia como:

$$\frac{p_z^2}{2m} + \frac{k}{2}z^2 = E - \frac{l^2}{2mR^2} = E_0 \quad (3.3.6)$$

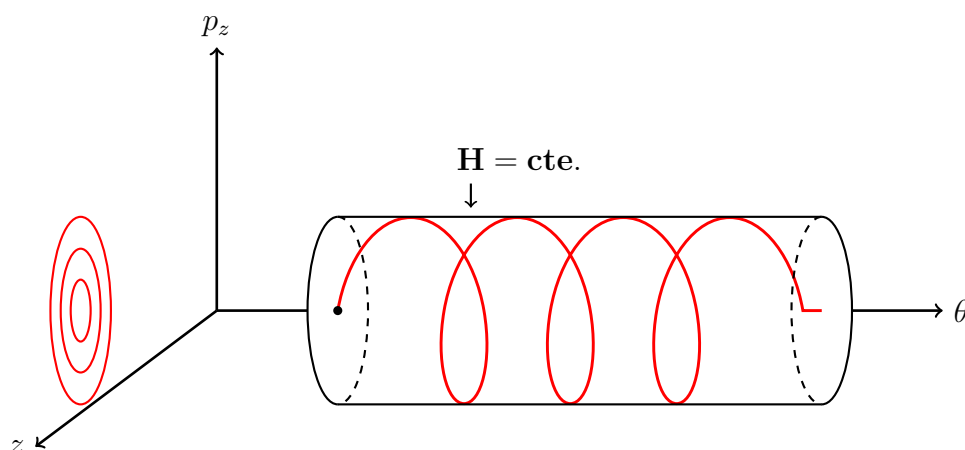
Sendo l o momento angular e E_0 uma constante que usaremos para simplificar as contas. Manipulando a equação anterior chegamos em:

$$\frac{p_z^2}{2mE_0} + \frac{z^2}{\frac{2E_0}{k}} = 1 \quad (3.3.7)$$

Que é a equação de uma elipse.



A equação anterior define a projeção da trajetória no plano $z - p_z$, que são elipses concêntricas, pois o movimento na direção z é harmônico simples. Por fim, como $\dot{\theta} = cte.$, o ângulo θ cresce linearmente e podemos remover o eixo p_θ do esboço do espaço de fase, definindo assim a trajetória no espaço tridimensional:

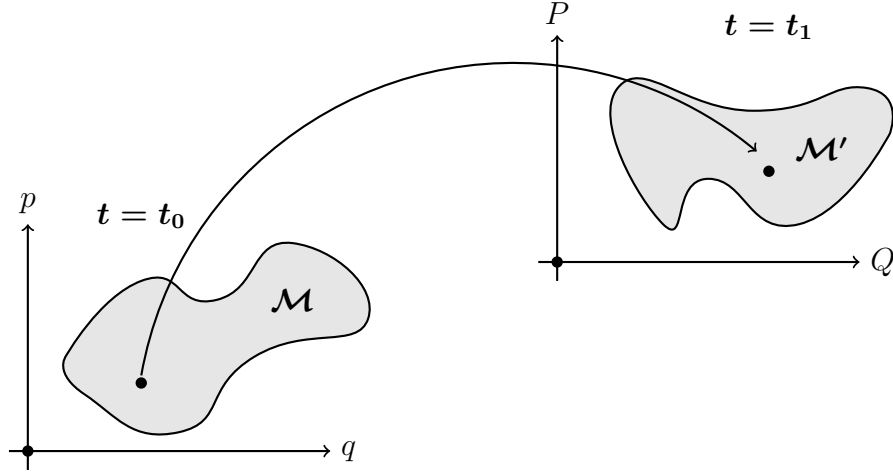


O que representa uma espira elíptica uniforme. A superfície definida pela espira, que é um cilindro de base elíptica, corresponde à superfície definida pela Hamiltoniana constante H . Se H não depende explicitamente do tempo as trajetórias no espaço nunca se cruzam, portanto, tendo em mãos os as coordenadas e momentos do sistema podemos determinar o movimento em instantes posteriores.

3.4 Teorema de Liouville

Considere um conjunto de pontos num espaço de fase de dimensão $2n$, distribuídos em uma região \mathcal{M} . Através de transformações canônicas ou da própria evolução do

sistema ao longo do tempo, situação na qual pontos se deslocam ao longo da trajetória correspondente, a região definida por esse conjunto de pontos é distorcida, gera uma nova região \mathcal{M}' .



Podemos formalizar essa ideia introduzindo o conceito de volume no espaço de fase $d\Gamma$ dado pelo produto dos diferenciais (No espaço de fase bidimensional, isto equivale a um elemento infinitesimal de área):

$$\Gamma = \int \dots \int dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n \quad (3.4.1)$$

Equivalentemente, para um novo conjunto de variáveis P, Q , o volume nesse novo espaço de fase é dado por:

$$\Gamma' = \int \dots \int dQ_1 \dots dQ_n dP_1 \dots dP_n \quad (3.4.2)$$

Podemos estabelecer uma relação entre os volumes através da matriz Jacobiana associada à transformação, que é:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial q_n} & \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial p_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q_n}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial Q_n}{\partial q_n} & \frac{\partial Q_n}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial Q_n}{\partial p_n} \\ \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial q_n} & \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial p_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial q_n} & \frac{\partial P_n}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{pmatrix} \quad (3.4.3)$$

Cuja determinante é:

$$D_J = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} \quad (3.4.4)$$

Portanto, a relação entre os elementos de volume nos diferentes sistemas de coordenadas é:

$$\int \dots \int dQ_1 \dots dQ_n dP_1 \dots dP_n = \int \dots \int D_J dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n \quad (3.4.5)$$

Por uma das propriedades da Jacobiana, podemos reescrevê-la como:

$$D_J = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)} \frac{\partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} \quad (3.4.6)$$

Se assumirmos que a Jacobiana é invertível, então $\det \mathbf{J} = 1/\mathbf{J}^{-1}$, portanto podemos reescrever a expressão anterior como:

$$D_J = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)} \bigg/ \frac{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)}$$

Por fim, se há variáveis repetidas na determinante da Jacobiana, podemos "eliminá-las", o que nos leva à uma expressão como menos variáveis:

$$D_J = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n)} \bigg/ \frac{\partial(p_1, \dots, p_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n)}$$

Se a transformação que leva de (q, p) à (Q, P) for canônica, podemos obter um resultado importante. O elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz associada à determinante no numerador é:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}$$

Se a função geradora F é do tipo $F = F(q, P)$, então $Q_i = \partial F / \partial P_i$, portanto podemos escrever o elemento anterior como:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial P_i}$$

Analogamente, para a matriz associada à determinante no denominador, o elemento na mesma posição vale:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial P_j}$$

Portanto, as matrizes diferem somente por um rearranjo de linhas e colunas (na

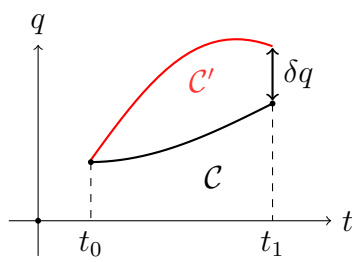
verdade elas são transpostas neste caso), o que implica que as duas determinantes são iguais. Portanto:

$$D_J = 1 \quad (3.4.7)$$

Concluimos então que:

$$d\Gamma = d\Gamma' \quad (3.4.8)$$

Isto é, uma transformação canônica do tipo $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ mantém o volume Γ da região \mathcal{M} no espaço de fase invariante.¹⁰



É possível mostrar que a evolução do sistema ao longo do tempo, corresponde à transformações infinitesimais sucessivas, sendo $-S$, o oposto da própria ação, a função geradora da transformação. Considere o sistema em dois instantes t_0 e t_1 , com $q = q(t_0), p = p(t_0), H$ e $q = q(t_1), p = p(t_1), H'$ nos instantes iniciais e finais, respectivamente.

Suponhamos agora, que a trajetória do sistema obedece ao princípio de Hamilton. Ao variar a trajetória por uma quantia δq , podemos calcular a variação da ação através de:

$$\delta S = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right] dt \quad (3.4.9)$$

Obviamente, o integrando é nulo. Portanto, ao fazer a substituição $\partial L / \partial \dot{q} = p$ a variação é dada por:

$$\delta S = p \delta q \quad (3.4.10)$$

Contudo, a variação de S também pode ser escrita em termos de suas derivadas parciais, pois $\delta S = \partial S / \partial q \delta q$. Portanto:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} \quad (3.4.11)$$

Veja agora que a derivada total de S é dada por:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (3.4.12)$$

Como $L = dS/dt$ e $H = p\dot{q} - L$, então a equação anterior nos leva a:

¹⁰Esta prova do teorema é apresentada em [3]

$$dS = p\dot{q} - Hdt \quad (3.4.13)$$

Portanto, a partir dessa argumento, chegamos na seguinte relação através da variação tanto do ponto final quanto do ponto inicial:

$$dS = \sum p(t_1)\dot{q}_{t_1} + \sum p(t_0)\dot{q}_{t_0} + (H - H')dt \quad (3.4.14)$$

Mas veja que a função geradora, que estudamos nas seções anteriores (Equação (3.2.20)), tem diferencial total:

$$df = \sum pdq - \sum PdQ + (H' - H)dt \quad (3.4.15)$$

Portanto, fica claro que $f = -S$. Fisicamente, este resultado nos permite concluir que a evolução do sistema ao longo do tempo corresponde a transformações canônicas do tipo $(p, q) \rightarrow (P, Q)$, sendo $-S$ a função geradora. O que é razoável, visto que (p, q) satisfazem as equações de Hamilton a todo instante t ao longo do movimento.

Com os resultados obtidos, podemos então formular o Teorema de Liouville:

■ **Resultado 11. Teorema de Liouville**

Os elementos de volume $d\Gamma$ no espaço de fase são preservados durante a evolução dinâmica de um sistema. Isto é:

$$\int d\Gamma = cte. \quad (3.4.16)$$

Durante todo o seu movimento.

Como as trajetórias no espaço de fase não se cruzam, então todos os pontos contidos em \mathcal{M} se mantêm restritos à essa mesma região durante o movimento. Ou seja, o número de pontos N englobados por \mathcal{M} é constante durante a evolução temporal do sistema. Se definirmos $\rho(p, q, t)$ como a *densidade* de pontos no espaço de fase, então:

$$\rho = \frac{dN}{d\Gamma} \quad (3.4.17)$$

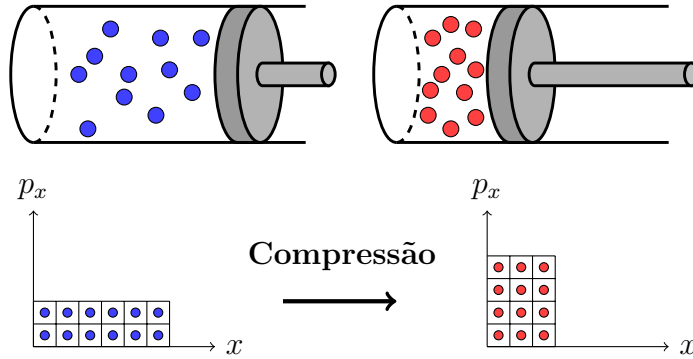
Portanto ρ é constante no tempo. A derivada total de ρ é dada por:

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_i \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.4.18)$$

Mas através das equações de Hamilton $\dot{q}_i = \partial H / \partial q_i$ e $\dot{p}_i = \partial H / \partial p_i$, identificamos os dois primeiros termos do lado direito da equação como $[H, \rho]$ logo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + [H, \rho] = 0 \quad (3.4.19)$$

O teorema de Liouville é especialmente importante no contexto da termodinâmica e da mecânica estatística. Obviamente não é factível, nem de interesse, estudar o comportamento individual de cada partícula constituinte de um gás, por exemplo. Esses sistemas em geral são caracterizados por grandezas macroscópicas, como pressão e temperatura, ou por *distribuições*, através das quais é possível obter propriedades microscópicas do sistema e inclusive, relacioná-las com as grandezas macroscópicas.



São recorrentes na física distribuições *estacionárias*, que são distribuições em equilíbrio estatístico, nas quais a densidade ρ dos pontos no espaço de fases não depende explicitamente do tempo. Nesse caso, é satisfeita a condição:

$$[H, \rho] = 0 \quad (3.4.20)$$

Alguns exemplos deste tipo de distribuição são:

- O ensemble microcanônico, dado por:

$$\rho(E) = \begin{cases} \rho_0, & E < H < E + dE \\ 0, & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad (3.4.21)$$

Sendo ρ_0 constante.

- A distribuição de Boltzmann, dada por:

$$f(p, q) \propto \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \quad (3.4.22)$$

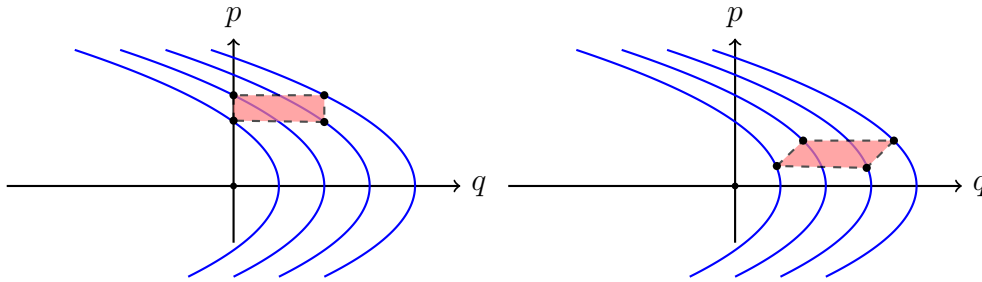
Estes exemplos ilustram, inclusive, uma razão pela qual a Hamiltoniana e o espaço de fase são conceitos amplamente utilizados na formulação mecânica estatística. Justamente devido às suas propriedades intrínsecas, é possível chegar a resultados particularmente úteis e adequados a esta classe de problemas, como o próprio Teorema de Liouville, para o qual não há resultado equivalente através da ideia espaço de configurações. [6]

■ **Exemplo 31:** Um exemplo simples, através do qual é possível visualizar a preservação de área no espaço de fase bidimensional é o de corpos em queda livre.

A Hamiltoniana de um corpo em queda livre é:

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgq = E \quad (3.4.23)$$

O que corresponde a trajetórias parabólicas no espaço de fase.



No figura acima é mostrada a posição de quatro pontos distintos no espaço de fase, em momentos diferentes. Os pontos definem um quadrilátero, e é possível ver que embora ele se deforme, a área se mantém constante durante o movimento.

3.5 Variáveis de Ação e Ângulo

Se pudermos expressar a Hamiltoniana de um sistema de modo que uma ou mais variáveis sejam cíclicas, é possível tornar a solução do problema razoavelmente mais simples. Se para uma Hamiltoniana $H = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ a variável q_n é cíclica, então o momento conjugado associado a ela é constante $p_n = c$. Isso nos permite simplificar a descrição do sistema, pois agora H depende de $2n - 2$ variáveis independentes. Vale ressaltar que este método que não é possível através da formulação Lagrangiana, portanto isto caracteriza uma das vantagens do formalismo Hamiltoniano [6]. ¹¹

¹¹Por exemplo: ao escrever a Lagrangiana de um corpo sob a ação de uma força central, substituir as velocidades generalizadas por termos constantes pode levar a equações de movimento

Nessa situação, a Hamiltoniana agora é escrita como

$$H = H(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}, c)$$

Por conseguinte, podemos encontrar a expressão \dot{q}_n simplesmente integrando a expressão:

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial c} \quad (3.5.1)$$

Para sistemas periódicos ¹² podemos construir um método mais geral que nos permite obter variáveis cíclicas através de transformações canônicas que resultam em um novo conjunto de variáveis, denominadas *variáveis de ação e ângulo*. Além de oferecer equações diferenciais mais simples, através desse método é possível obter a frequência do sistema com certa facilidade.

Nesta formulação consideraremos que $H(p, q) = E$. Além disso, nós denotaremos a variável de ação por I , e a de ângulo por Θ , que assumiremos que é periódica e tem período 2π . Assim, a transformação canônica é $(p, q) \rightarrow (I, \Theta)$. A função geradora será do tipo 1, e a chamaremos de $S_0(q, \Theta)$. A nomenclatura varia conforme o autor, mas em geral os nomes mais frequentemente utilizados são *função característica de Hamilton* ou *ação abreviada*. Por meio desta notação as variáveis relacionam-se então por:

$$p = \frac{\partial S_0}{\partial q} \quad I = -\frac{\partial S_0}{\partial \Theta} \quad (3.5.2)$$

Como última premissa, consideraremos que Θ é uma variável cíclica. Deste modo, como H não depende de Θ nem do tempo, então a nova Hamiltoniana é simplesmente $H(I)$, a antiga Hamiltoniana escrita em função da variável de ação. Como $H(I) = E$ é uma constante, então a própria variável I deve ser constante de movimento. Temos, pelas equações de Hamilton, que:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \Theta} = 0 \quad \frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{dE(I)}{dt} \quad (3.5.3)$$

Assim, vemos que I é constante, de acordo com o argumento apresentado acima, e podemos obter uma expressão para a variável de ângulo:

incorretas. A Lagrangiana deste exemplo é $L = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + k/r$. Você pode verificar que a substituição $\dot{\theta} = l/(mr^2)$ na Lagrangiana gera equações de movimento diferentes do esperado, portanto este procedimento não é adequado á formulação Lagrangiana.

¹²Inclui-se também nesta definição sistemas nos quais embora q não seja periódica no tempo, o momento associado $p(q)$ é. Um exemplo deste tipo de movimento é o de *rotação* do pêndulo, conforme vimos, ou do movimento de rotação de um corpo rígido.

$$\Theta = \frac{dE}{dI}t + \Theta_0 \quad (3.5.4)$$

Sendo Θ_0 uma constante. Como Θ é periódica, podemos definir dE/dt como a frequência do sistema, que pode depender de I , pois assim:

$$\Theta = \omega(I)t + \Theta_0 \quad (3.5.5)$$

Assim, após um período, temos que $\Delta\Theta = 2\pi$. A variável de ângulo pode então ser representada como a *fase* do movimento oscilatório. Por fim, obteremos uma expressão para a variável de ação. Veja que o diferencial total da função geradora S_0 é:

$$dS_0 = \frac{\partial S_0}{\partial q}dq + \frac{\partial S_0}{\partial \Theta}d\Theta$$

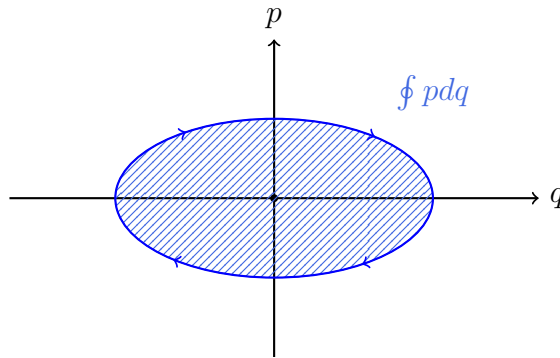
podemos substituir as derivadas parciais por p e $-I$, respectivamente, e integrar ao longo de um circuito no espaço de fase, que corresponde a oscilação completa:

$$\oint dS_0 = \oint pdq - \oint Id\Theta = 0$$

Assim, finalmente obtemos uma expressão para I :

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq \quad (3.5.6)$$

A integral na expressão acima pode ser interpretadas como a área definida pela trajetória no espaço de fase. No caso do pêndulo simples, por exemplo, a integral deve ser calculada de 0 a 2π , o que engloba no espaço de fase uma trajetória correspondente a uma oscilação completa. Já para o caso do oscilador massa mola, por exemplo, os limite de oscilação são a amplitude A do sistema.



■ **Exemplo 32:** Encontre as variáveis de ação e ângulo para o sistema massa-

mola. Em seguida represente as trajetórias no espaço de fase.

Vimos que para este sistema, a Hamiltoniana e a energia total valem:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} = E \quad (3.5.7)$$

A partir desta equação é possível encontrar a variável de ação. Veja que podemos escrever o momento p como:

$$p = \pm \sqrt{2mE \left(1 - \frac{k}{2E}q^2\right)} \quad (3.5.8)$$

Portanto:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq = \frac{\sqrt{2mE}}{2\pi} \oint \sqrt{1 - \frac{k}{2E}q^2} dq \quad (3.5.9)$$

A integral pode ser resolvida através da substituição trigonométrica $q = \sqrt{2E/k} \sin \theta$, o que nos leva a,

$$I = \frac{\sqrt{2mE}}{2\pi} \sqrt{\frac{2E}{k}} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta$$

Assim, a variável de ação para o oscilador harmônico vale:

$$I = \frac{E}{\omega} \quad (3.5.10)$$

Se utilizarmos a condição inicial $\Theta_0 = 0$, então a variável de ângulo fica:

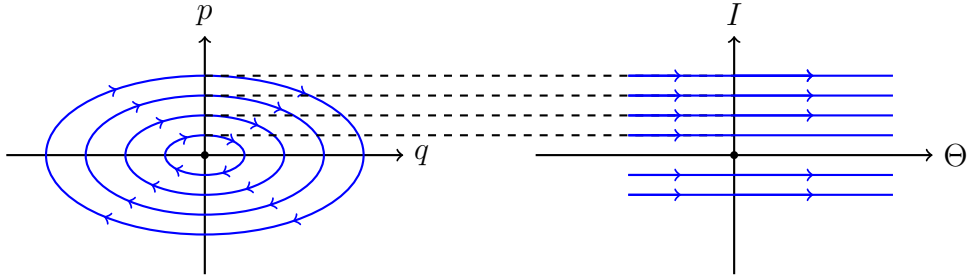
$$\Theta = \omega t \quad (3.5.11)$$

Obviamente, este resultado também pode ser obtido geometricamente. Constantamos anteriormente que a trajetória no espaço de fase do oscilador harmônico é uma elipse de eixos $\sqrt{2mE}$ e $\sqrt{2E/k}$, portanto podemos encontrar a variável de ação simplesmente calculando a área da elipse:

$$I = \frac{1}{2\pi} \pi \sqrt{2mE} \sqrt{\frac{mE}{k}} = \frac{E}{\omega}$$

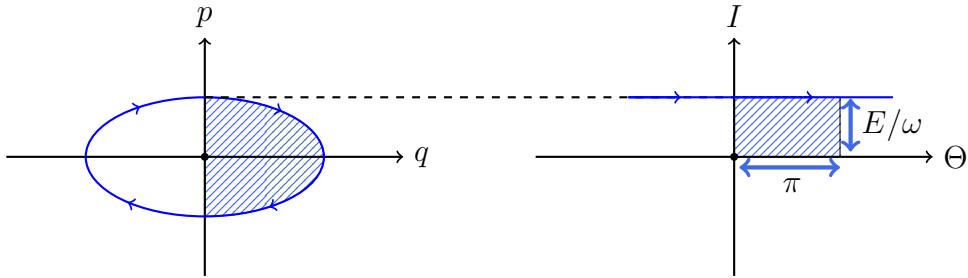
Além disso, é também interessante investigar o que acontece com as trajetórias no novo espaço de fase. No sistema de coordenadas p, q o original a trajetória no espaço de fase corresponde a elipses, cujas dimensões dependem da energia E do oscilador. No espaço de fases no sistema de coordenadas as trajetórias correspondem a retas horizontais, correspondentes à equação $I = E/\omega$ da variável de ação,

conforme a figura:



Podemos também mostrar diretamente que a transformação preserva a área englobada pela trajetória no espaço de fase, como é de se esperar de acordo com o teorema de Liouville.

A área correspondente durante um metade de uma oscilação completa é $A = \frac{\pi}{2}ab = \pi \frac{E}{\omega}$. No novo sistema de coordenadas, a trajetória corresponde a um retângulo de comprimento horizontal $\Theta = \omega T/2 = \pi$ e comprimento vertical $I = E/\omega$, portanto a área correspondente a um também vale $\pi \frac{E}{\omega}$.



3.6 Invariantes Adiabáticos

Em alguns sistemas físicos algumas mudanças podem ocorrer *adiabaticamente*, o que significa que elas podem ser consideradas lentas. Na mecânica clássica, a variação do comprimento de um pêndulo simples ou variação da constante elástica de uma mola com o tempo podem ser considerados processos adiabáticos, desde que elas ocorram a uma taxa muito menor do que o período natural do sistema. Veremos que este tipo de processo nos permite obter uma quantidade (aproximadamente) conservada durante o movimento do sistema, dizemos então que existe um *invariante adiabático*. A ideia de invariantes adiabáticos não é útil somente na mecânica clássica, mas também na mecânica quântica e na física de plasmas.

Para formalizar a ideia, considere um sistema físico que possa ser caracterizado por um parâmetro λ , através do qual podemos descrever a influência de agentes externos. Compreendemos a variação como lenta se:

$$T \frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda \quad (3.6.1)$$

Onde T representa o período natural do sistema, livre de perturbações. Digamos que a Hamiltoniana depende de λ e é igual à energia $H(p, q, \lambda) = E$, então:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \quad (3.6.2)$$

Pelas equações de Hamilton os dois primeiros termos se cancelam. Como o parâmetro λ varia muito lentamente, então é razoável considerar que $d\lambda/dt$ é aproximadamente constante ao longo de várias oscilações. Portanto, podemos tomar a média temporal da equação anterior e escrevê-la como:

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{d\lambda}{dt} \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}} \quad (3.6.3)$$

Vejamos agora como escrever a relação anterior em termos das coordenadas. Pelas equações de Hamilton, temos que:

$$dt = \frac{1}{\partial H / \partial p} dq \quad (3.6.4)$$

Portanto o período T da oscilação pode ser reescrito em termos das coordenadas p e q :

$$T = \int_0^T dt = \oint \frac{1}{\partial H / \partial p} dq \quad (3.6.5)$$

Portanto:

$$\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial H}{\partial \lambda} dt \quad (3.6.6)$$

E a média temporal da energia pode ser reescrita como:

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{1}{\partial H / \partial p} dq}{\oint \frac{1}{\partial H / \partial p} dq} \quad (3.6.7)$$

Ao calcular esta integral podemos considerar que a energia $H = E$ é constante, e que as grandezas E e λ são independentes. Assim, podemos reescrever as derivadas parciais nas integrais somente em termos de p, q e λ . Como é válido para o sistema que $E = E(p, q, \lambda)$, então as equações podem ser rearranjadas de modo que seja válida a relação:

$$p = p(q, E, \lambda)$$

Assim, a Hamiltoniana é da forma $H(q, p(p, E, \lambda), \lambda)$. A derivada total de p com respeito à λ é:

$$\frac{dp}{d\lambda} = \frac{\partial p}{\partial \lambda}$$

Ao derivar $H(q, p(p, E, \lambda), \lambda) = E$ com respeito à λ obtemos então:

$$\frac{\partial H}{\partial p} \frac{dp}{d\lambda} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0$$

O que nos leva à:

$$\frac{\partial H / \partial \lambda}{\partial H / \partial p} = - \frac{\partial p}{\partial \lambda} \quad (3.6.8)$$

Que é a expressão no numerador da (3.6.7). Podemos agora obter a expressão no denominador da (3.6.7) diferenciando $H(q, p(q, E, \lambda), \lambda) = E$ com respeito a E , pois $dp/dE = \partial p / \partial E$:

$$\frac{\partial H}{\partial p} \frac{dp}{dE} = 1$$

Encontramos então:

$$\frac{\partial p}{\partial E} = \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)^{-1} \quad (3.6.9)$$

Portanto a (3.6.7), através da (3.6.8) e (3.6.9), fica:

$$\frac{\overline{dE}}{dt} = - \frac{d\lambda}{dt} \oint \frac{\partial p}{\partial \lambda} dq \quad (3.6.10)$$

Tomando $\frac{\overline{dE}}{dt}$ e $\frac{d\lambda}{dt}$ como constantes, podemos reescrever a expressão anterior como a integral:

$$\oint \left(\frac{\partial p}{\partial E} \frac{\overline{dE}}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right) dq = 0 \quad (3.6.11)$$

Que pode ser escrita como:

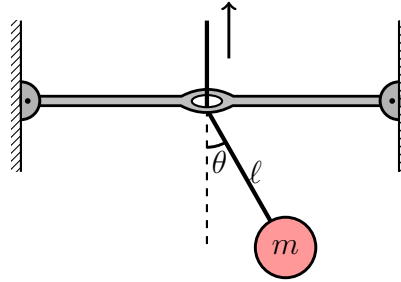
$$\frac{\overline{dI}}{dt} = 0 \quad (3.6.12)$$

onde,

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq \quad (3.6.13)$$

O parâmetro I , que é a variável de ação, é o invariante adiabático, que se mantém constante, de acordo com as aproximações feitas. É possível mostrar que o erro decai exponencialmente o período, contudo não o faremos aqui.¹³

■ **Exemplo 33:** Considere um pêndulo de massa m que lentamente é puxado verticalmente para cima, sendo encurtado. Encontre o invariante adiabático do sistema e mostre como a amplitude máxima da oscilação muda de acordo com a variação de seu comprimento.



A Hamiltoniana do sistema vale:

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl \cos \theta \quad (3.6.14)$$

Podemos utilizar a aproximação $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ a fim de transformar a expressão na equação de uma elipse, visto que ignorando o termo constante do potencial a Hamiltoniana fica:

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{mgl\theta^2}{2} = E$$

Como a Hamiltoniana corresponde à energia total nesse sistema, segue que

$$\frac{p_\theta^2}{2mEl^2} + \frac{\theta^2}{\frac{2E}{mgl}} = 1 \quad (3.6.15)$$

Como essa trajetória corresponde a uma elipse, o invariante adiabático do pêndulo é, assim como no caso do sistema massa-mola:

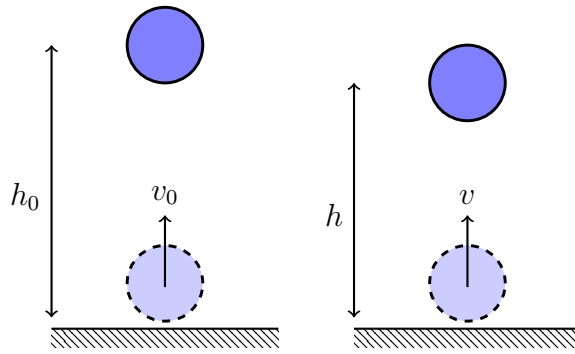
$$I = \frac{1}{2\pi} \pi \sqrt{2ml^2} \sqrt{\frac{2E}{mgl}} = E \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{E}{\omega}$$

¹³A prova pode ser encontradas em [3] e [20], por exemplo

Além disso, veja que a energia total é proporcional ao quadrado da amplitude e ao comprimento do pêndulo, isto é $E \propto l\theta_0^2$ (Para verificar, simplesmente tome $p_\theta = 0$ na expressão da energia total). É válida então a relação:

$$\frac{E}{\omega} = \text{cte.} \implies \theta_0 \propto \ell^{\frac{3}{4}} \quad (3.6.16)$$

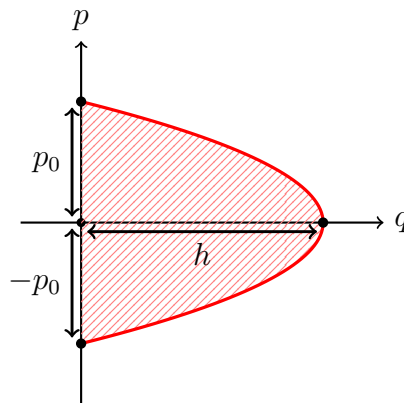
■ **Exemplo 34:** (CAHN, Sidney B.; NADGORNÝ, Boris E.; A guide to physics problems: Part 1; 1994) Uma bola quica verticalmente. Ela possui velocidade v_0 ao atingir o chão. A aceleração da gravidade é reduzida em 10% durante um longo período de tempo. Assumindo que as colisões da bola com o chão são elásticas, encontre a mudança correspondente em v_0 .



Como a variação da aceleração gravitacional é adiabática, podemos relacionar as grandezas a partir do invariante adiabático:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq = \frac{1}{2\pi} \int \int dp dq \quad (3.6.17)$$

A integral corresponde a área da trajetória no espaço de fase, que é parabólica:



Descrita, através da conservação de energia, por

$$mgq = E - \frac{p^2}{2m} \implies q = \frac{1}{2m^2g}(p_0^2 - p^2) \quad (3.6.18)$$

O invariante adiabático é então:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint q dp = \frac{1}{2m^2g} \int_{-p_0}^{p_0} (p_0^2 - p^2) dp = \frac{1}{3\pi m^2} \frac{p_0^2}{g} \quad (3.6.19)$$

Temos assim que:

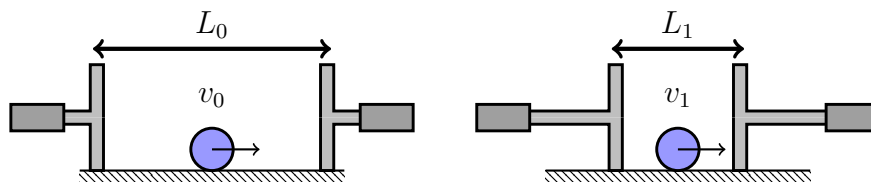
$$\frac{p_0^3}{g} = \frac{p'^3}{g'} \quad (3.6.20)$$

Como $g' = 0.9g$, a velocidade no final do processo é dada por:

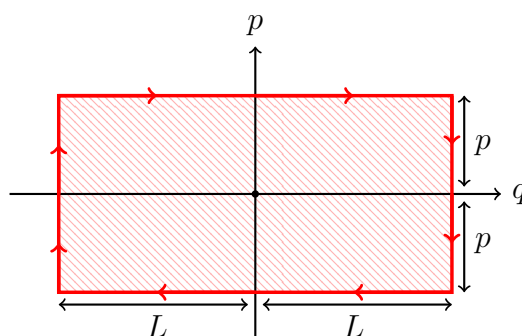
$$v' = \sqrt[3]{0.9} v_0 = 0.97 v_0 \quad (3.6.21)$$

Portanto a velocidade v_0 diminui em 3%.

■ **Exemplo 35:** Considere uma partícula de massa m que oscila entre duas paredes separadas por uma distância L_0 através de colisões elásticas. Se as paredes são lentamente aproximadas de tal modo que a distância entre elas passa a ser L_1 , encontre o invariante adiabático do sistema e a velocidade da partícula ao fim do processo .



A trajetória da partícula no espaço de fases corresponde a um retângulo, conforme a figura:



O cálculo da área da trajetória é portanto, trivial:

$$I = \int_{-p}^p \int_{-L}^L dq dp = 4pq \quad (3.6.22)$$

Como $p_0 = mv_0$ e $p_1 = mv_1$, fica fácil encontrar a velocidade final a partir do invariante adiabático, pois

$$p_1 L_1 = p_0 L_0$$

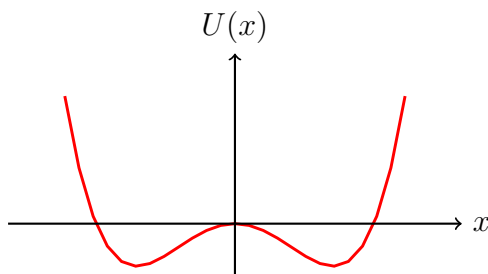
Portanto:

$$v_1 = \frac{L_0}{L_1} v_0 \quad (3.6.23)$$

Portanto a velocidade da partícula aumenta em decorrência do processo.

Problemas 3

■ **Problema 3.1:** O potencial para um oscilador de Duffing é $U = ax^2/2 + bx^4/4$ sendo a e b constantes. Encontre as equações de movimento do sistema.

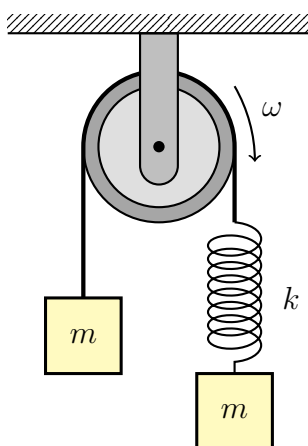


■ **Problema 3.2:** (Marion, J. B.; Thornton; S. T.; 2011; Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas) Uma partícula de massa m se move em uma direção sob a influência de uma força

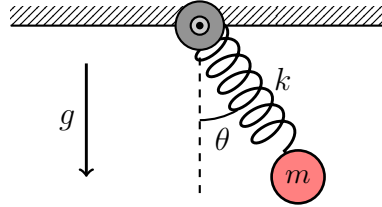
$$F(x, t) = \frac{k}{x^2} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

onde k e τ são constantes positivas. Compute as funções de Lagrange e Hamilton. Compare a hamiltoniana e a energia total e discuta a conservação de energia para o sistema.

■ **Problema 3.3:** Considere a máquina de Atwood composta por dois blocos de massa m_1 e m_2 , conectados através de uma mola de constante elástica k e de comprimento x_0 quando relaxada, e um fio ideal de comprimento $\ell - x_0$ que passa por uma polia sem massa. Encontre a Hamiltoniana e as equações de movimento do sistema.

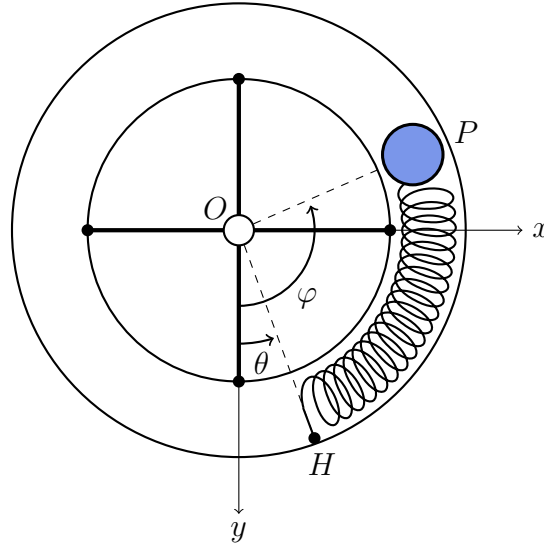


■ **Problema 3.4:** Um corpo é preso a uma mola ideal de constante elástica k e comprimento relaxado ℓ , que por sua vez tem uma de suas extremidades fixada no teto, conforme a figura:



Encontre a Hamiltoniana do sistema e as equações de movimento.

■ **Problema 3.5:** (CAHN, Sidney B.; NADGORNÝ, Boris E.; A guide to physics problems: Part 1;1994) Considere um tubo cilíndrico oco em forma de um anel circular de raio R , conforme a figura. O anel é conectado a um eixo vertical através de barras rígidas e sem massa, de modo que ele possa girar sem atrito no plano horizontal. Dentro do anel, uma partícula pontual P de massa m pode se mover livre de atrito, mas é conectada a um ponto H do anel através de uma mola ideal de constante elástica k . Tome como variáveis os ângulos θ e φ .



a) Escreva a Lagrangiana e a Hamiltoniana do sistema e as reescreva em termos das variáveis:

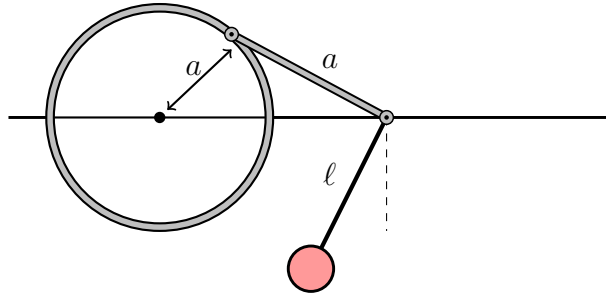
$$\xi = \frac{\varphi + \theta}{\sqrt{2}} \quad \eta = \frac{\varphi - \theta}{\sqrt{2}} \quad (3.6.24)$$

b) Encontre uma constante de movimento f além da energia, e mostre que $[H, f] = 0$.

c) Integre as equações de movimento dada as condições iniciais em $t = 0$:

$$\theta = -\frac{\pi}{4}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0 \quad (3.6.25)$$

■ **Problema 3.6:** (Classical Mechanics - Herbert Goldstein, Charles P. Poole, John L. Safko) O ponto de suspensão de um pêndulo simples de massa m e comprimento ℓ pode se mover ao longo de um trilho horizontal, e está conectado a um aro de raio a e massa M através de uma barra sem massa de comprimento a . O aro gira em torno de seu centro, que é mantido fixo no trilho.



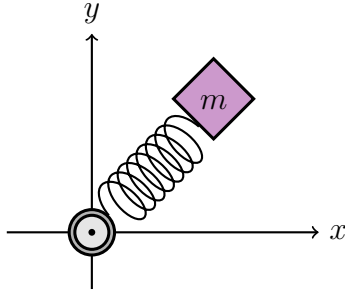
a) Encontre a Hamiltoniana do sistema e em seguida encontre as equações de movimento de Hamilton.

b) Suponha agora que o ponto de suspensão se mova ao longo do trilho de acordo com alguma função do tempo $x = f(t)$, sendo que x inverte a direção do movimento em uma distância $x = \pm 2a$ em relação ao centro do aro circular. Encontre a Hamiltoniana e as equações de movimento para o sistema.

■ **Problema 3.7:** (Mecânica Analítica, Nivaldo A. Lemos, 2007) Um oscilador harmônico bidimensional tem Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \quad (3.6.26)$$

Sabendo que $A = p_x^2 + m^2\omega^2 x^2$ e $L = xp_y - yp_x$ são constantes de movimento, use o teorema de Poisson para provar que $B = p_x p_y + m^2\omega^2 xy$ e $C = p_x^2 - p_y^2 + m^2\omega^2(x^2 - y^2)$ também são constantes de movimento.

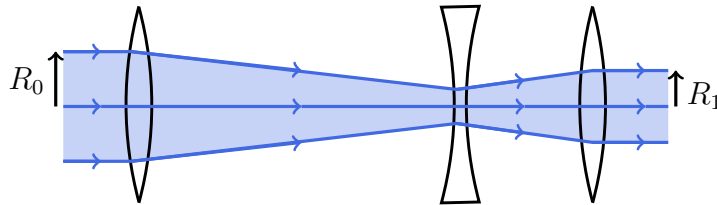


■ **Problema 3.8:** (Classical Mechanics - Herbert Goldstein, Charles P. Poole, John L. Safko - Adaptada) Encontre sob quais condições

$$Q = \frac{\alpha p}{x}, \quad P = \beta x^2 \quad (3.6.27)$$

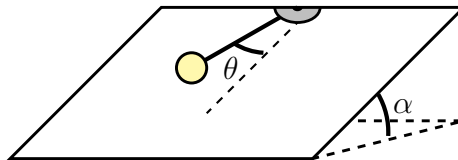
com α e β constantes, representa uma transformação canônica para um sistema de um grau de liberdade e obtenha a função geradora apropriada. Aplique a transformação na solução do oscilador harmônico. Dica: para este problema, utilize os parênteses de Poisson com sinal com convenção contrária. Isto equivale a dizer que a condição de canonicidade será $[p, q] = -1$. Esta mudança torna o processo de obter a função geradora mais direto e simples.

■ **Problema 3.9:** (Marion, J. B.; Thornton, S. T.; 2011; Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas) Discuta as implicações do teorema de Liouville ao focar em feixes de partículas carregadas, considerando o seguinte caso simples a seguir. Um feixe de elétrons de seção transversal circular (raio R_0) é direcionado ao longo do eixo z . A densidade de elétrons pelo feixe é constante, mas as componentes de quantidade de movimento transversais ao feixe (p_x e p_y) são distribuídos uniformemente sobre um círculo de raio p_0 em espaço de quantidade de movimento. Se algum sistema de foco reduzir o raio do feixe de R_0 para R_1 , encontre a distribuição resultante das componentes da quantidade de movimento transversais. Qual é o significado físico deste resultado? (Considere a divergência angular do feixe)

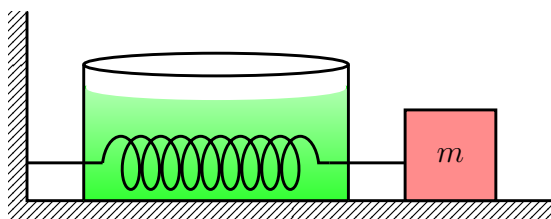


■ **Problema 3.10:** (Classical Mechanics - Herbert Goldstein, Charles P. Poole, John L. Safko) Um pêndulo plano que executa pequenas oscilações está restringido

a se mover em um plano inclinado, conforme a figura. Como a amplitude muda quando a inclinação α do plano é variada lentamente?



■ **Problema 3.11:** (CAHN, Sidney B.; NADGORN, Boris E.; A guide to physics problems: Part 1;1994) Um bloco de massa m desliza no chão horizontal. Ele é conectado a uma mola presa na parede. Inicialmente a amplitude das oscilações é A_1 e a constante elástica da mola é k_1 . A constante da mola diminui adiabaticamente até que um valor k_2 constante. (Para exemplificar, suponha que a mola está sendo dissolvida em um ácido). Qual é a nova amplitude?



■ **Problema 3.12:** Vimos em um exemplo anterior que a Lagrangiana de uma partícula carregada sob a influência de um campo eletromagnético é dada por:

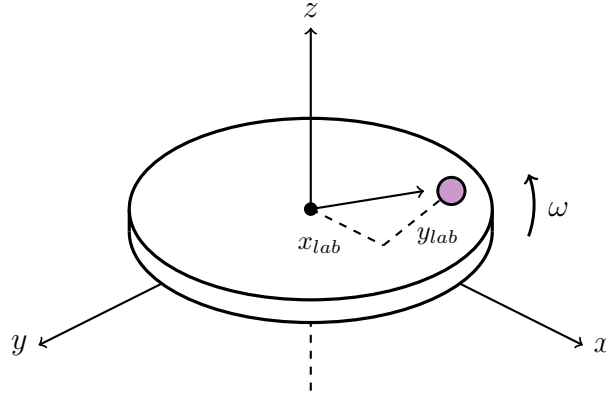
$$L = \frac{mv^2}{2} - e\Phi + \frac{e}{c}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \quad (3.6.28)$$

Encontre a Hamiltoniana correspondente.

■ **Problema 3.13:** (Baseado em Hand, L. N.; Finch, J. D.; 1998) Até então, toda a formulação que desenvolvemos foi construída a partir de referenciais inerciais. Veremos agora como obter a Lagrangiana e a Hamiltoniana de um corpo se comportam certos referenciais não-inerciais.

Considere uma partícula que se movimenta sob uma plataforma giratória, cuja Lagrangiana vale:

$$L = \frac{mv_{lab}^2}{2} - V(x, y) \quad (3.6.29)$$



Onde v_{lab} representa a velocidade do corpo no referencial do laboratório. Denotaremos as coordenadas no referencial do laboratório por (x_{lab}, y_{lab}) , e as coordenadas no referencial não-inercial por (x, y) . O referencial não-inercial do problema consiste na plataforma giratória mostrada, que rotaciona com velocidade angular ω no sentido anti-horário. As coordenadas entre os dois referenciais se relacionam então por:

$$\begin{aligned} x_{lab} &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ y_{lab} &= x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned} \quad (3.6.30)$$

Que como você pode ver, é análoga a uma rotação por um ângulo θ dos eixos x_{lab} e y_{lab} , resultando nos novos eixos x, y .

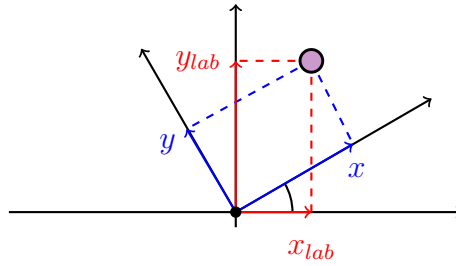


Figura 9: Vista superior

Tendo em vista tais informações, escreva a Lagrangiana em ambos os sistemas de coordenadas e mostre que a Hamiltoniana H do referencial não-inercial e a Hamiltoniana H_{lab} se relacionam por:

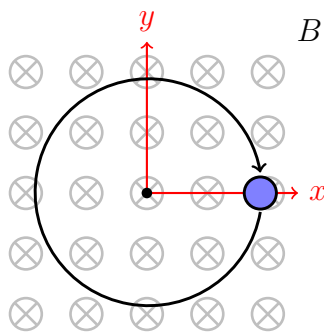
$$H = H_{lab} - \omega L_z \quad (3.6.31)$$

Onde L_z representa a componente z do momento angular, conforme visto a partir da plataforma giratória.

■ **Problema 3.14:** Considere agora a Lagrangiana do problema 3.12 com $\Phi = 0$.

a) Mostre que o potencial vetor $\mathbf{A} = (-\frac{B}{2}y, \frac{B}{2}x, 0)$ corresponde ao campo magnético $\mathbf{B} = -B\hat{z}$

b) Utilizando o vetor do item anterior, encontre a Hamiltoniana H_{lab} no referencial do laboratório, e em seguida a Hamiltoniana H em um referencial inercial que gira com velocidade angular ω em relação ao laboratório. Através dessa nova Hamiltoniana, mostre que existe um valor de ω para o qual o termo linear com B desaparece. Por fim, resolva as equações de movimento



4 Apêndice

4.1 A notação δ

É conveniente definir um operador que esteja relacionado a incrementos arbitrários a uma função $y(x)$, visto o uso de variações infinitesimais e deslocamentos virtuais é recorrente em tratamentos matemáticos na mecânica analítica e no cálculo das variações. Por isso definimos a *variação* de uma função δy como:

$$\delta y_i = y'_i(x) - y_i(x) \quad (4.1.1)$$

Onde $y'_i(x)$ representa a curva variada, sendo x a variável independente, que é mantida fixa. Essa variação também pode ser escrita como:

$$\delta y_i = \epsilon \eta_i(x) \quad (4.1.2)$$

Onde ϵ representa uma constante e $\eta(x)$ é uma função arbitrária que representa as condições já impostas pelo problema, como vínculos e condições de contorno. Agora, considere a variação de F :

$$\delta F = F(y'_1, y'_2, \dots, y'_n, x') - F(y_1, y_2, \dots, y_n, x) \quad (4.1.3)$$

Podemos escrever isso de uma maneira diferente expandindo $F(y'_1, y'_2, \dots, y'_n, x')$ por meio de uma série de Taylor e desprezar os termos maiores que os de segunda ordem. Assim, a expansão em torno de um ponto $P = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ fica:

$$F(y'_1, y'_2, \dots, y'_n, x') = F(a_1, a_2, \dots, a_n) + \frac{\partial F}{\partial y_1}(y'_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_n}(y'_n - a_n) + O(\delta^2)$$

De maneira mais compacta:

$$F(y'_1, y'_2, \dots, y'_n, x') = F(a_1, a_2, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_i}(y'_i - a_i) \quad (4.1.4)$$

Na seção 2 a função com qual trabalhamos é a função L . Suas variáveis são $q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t), t$. Portanto, se reescrevermos a equação anterior de acordo com a notação utilizada, obtemos (L será escrita como $L(q, \dot{q}, t)$ por conveniência):

$$L(q', \dot{q}', t) = L(q, \dot{q}, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i}(q'_i - a_i) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\dot{q}'_i - a_{i+n})$$

Se a expansão for feita em torno de $a_1 = q_1, \dots, a_n = q_n, a_{n+1} = \dot{q}_1, \dots, a_{2n} = \dot{q}_n$, basta substituir $q_i = q'_i - \epsilon \eta_i(x)$ para que a expansão se reduza a:

$$L(q', \dot{q}', t) = L(q, \dot{q}, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \epsilon \eta_i(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon \dot{\eta}_i(x) \quad (4.1.5)$$

Ou, escrevendo em termos do operador δ :

$$L(q', \dot{q}', t) = L(q, \dot{q}, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \quad (4.1.6)$$

4.2 Transformada de Legendre

Considere uma função $y = f(x)$ convexa, isto é:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} > 0 \quad (4.2.1)$$

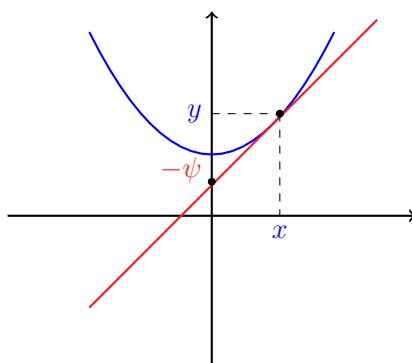
Busca-se um método no qual é possível construir uma nova função $-\psi(p)$ que dependa da derivada $p = \partial y / \partial x$ da função, sem que se perca informação no processo. Veja que não basta estabelecer a relação:

$$-\psi = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Pois informação é perdida neste caso, visto que não é possível reconstruir a função original y a partir da nova função ψ . Por exemplo, toda a classe de funções $y = x^2 + C$, onde C é constante, gerariam a mesma função $-\psi = 2x$, deste modo, deve-se buscar uma formulação um pouco mais sofisticada, de modo que sejamos capazes de resgatar a função original mesmo após a transformação.

No plano cartesiano, é possível determinar completamente uma curva a partir das retas tangentes a essa curva, e em que ponto as retas interceptam o eixo y . Ou seja, na equação original, a curva é construída a partir da relação entre os pontos x e y , nesta transformação, ela construída a partir do coeficiente angular p de cada ponto e do ponto de intersecção $-\psi$ entre a tangente e a ordenada. Analisando a situação geometricamente:¹⁴

¹⁴O valor escolhido para a nova função pode ser tanto $-\psi$ quando ψ . A convenção aqui utilizada foi a primeira, visto que esse é o método usualmente adotado, inclusive na mecânica clássica, que é a área de interesse neste trabalho. Se quiséssemos, o valor adotado poderia ser ψ sem problema algum, como geralmente é feito na termodinâmica, pois a transformada manteria as mesmas propriedades, contudo essa convenção é menos usual.



O coeficiente angular da reta tangente é:

$$p = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (4.2.2)$$

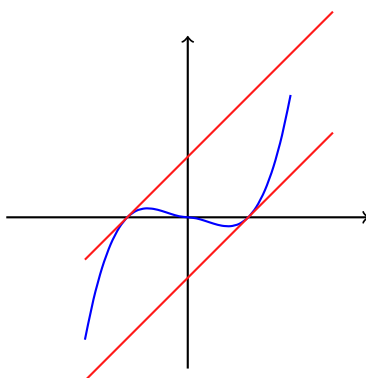
Além disso, tem-se que:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y - (-\psi)}{x - 0} \quad (4.2.3)$$

A partir das duas equações anteriores, a relação obtida é:

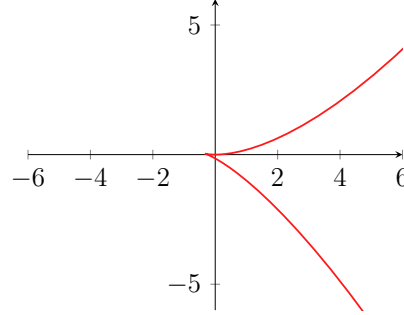
$$\psi = \frac{\partial x}{\partial y} x - y = px - y$$

Que é uma transformação de Legendre para a função $y(x)$. Veja que a exigência da equação (4.2.1) decorre do fato que para uma função não convexa um mesmo valor de p pode corresponder a dois pontos da função y , portanto a correspondência entre y e ψ não é única:



O gráfico anterior corresponde à função $y(x) = x^3 - x^2$. Há dois pontos que correspondem à $p = 1$, que são $x = 1$ e $x = -1/3$, isto é, o coeficiente angular da

reta tangente é o mesmo em ambos os pontos da função. Uma parametrização da transformada de Legendre geraria uma função do tipo:



Neste exemplo, o único valor de p que corresponde à um ψ único é $p = -1/3$. (Visto que a derivada de y , que é $y' = 3x^2 - 2x = c$, possui duas soluções possíveis para todo $c > -1/3$, e uma única para $c = -1/3$, ou seja, sempre haverá dois pontos da função com uma mesmo coeficiente angular, desde que esse coeficiente seja maior que $-1/3$).

A transformada de Legendre apresenta a propriedade de que quando aplicada duas vezes sobre a mesma função, o resultado é a função original:

■ **Resultado 12.** *A transformada de Legendre apresenta a propriedade de involução, isto é, denotando a transformada por \mathbb{L} , vale que:*

$$\mathbb{L}(\mathbb{L}(y)) = y \quad (4.2.4)$$

Demonstração: Aplicando a transformada de Legendre em $y = f(x)$ gera, conforme foi visto:

$$\mathbb{L}(y) = \psi = px - y$$

Agora, aplicando a transformada sobre ψ , tem-se que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = x$$

E,

$$\mathbb{L}(\mathbb{L}(y)) = \frac{\partial \psi}{\partial p} p - \psi$$

Pelas três equações anteriores conclui-se que:

$$\mathbb{L}(\mathbb{L}(y)) = xp - (px - y) = y$$

E portanto $\mathbb{L}(\mathbb{L}(y)) = y$.

Os procedimentos utilizado pode ser aplicados também para funções de várias variáveis, deste modo, a transformada de Legendre pode também ser enunciada para uma função de várias variáveis:

■ **Definição 12.** A transformada de Legendre é uma transformação que quando aplicada sobre uma função $Y(X_1, \dots, X_n)$ convexa, gera uma nova função $\psi(P)$:

$$\psi(P) = \sum_{i=1}^n P_i X_i - Y \quad (4.2.5)$$

Onde:

$$P_i = \frac{\partial Y}{\partial X_i} \quad (4.2.6)$$

Transformada de Legendre		
Função	$Y = Y(X_1, \dots, X_n)$	$\psi = \psi(P_1, \dots, P_n)$
Nova variável	$P_i = \frac{\partial Y}{\partial X_i}$	$X = -\frac{\partial \psi}{\partial P_i}$
Transformação	$\psi = \sum_i P_i X_i - Y$	$Y = -\sum_i X_i P_i + \psi$

■ **Exemplo 36:** Considere a função $y = x^2$. Claramente ela é convexa em todo o domínio ($y''(x) = 2 > 0$). Sua derivada vale:

$$p = 2x \implies x = \frac{p}{2}$$

E $y(x)$, em função de p , é:

$$y = x^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}$$

A transformada de Legendre para $y = x^2$ é então:

$$\psi = px - y = \frac{p^2}{4}$$

4.3 Teorema de Euler para funções homogêneas

Funções homogêneas são funções que ao terem seus argumentos multiplicados por algum número real positivo, tem como resultado um múltiplo de grau k para a função com os argumentos originais, isto é:

■ **Definição 13.** Uma função $f(x_1, \dots, x_n)$ é dita homogênea de grau k se satisfaz:

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \dots, x_n) \quad (4.3.1)$$

Para todo $\lambda > 0$.

Estes tipos de funções são frequentes na física, na matemática, na economia e em várias outras áreas, por isso é conveniente realizar definições adequadas e estudar teoremas relacionados a elas, devido a sua gama de aplicações. Segue um importante teorema, com aplicações na mecânica clássica e física estatística, e que decorre da definição anterior:

■ **Resultado 13.** Se uma função $f(x_1, \dots, x_n)$ é homogênea de grau k , então:

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = k f(x_1, \dots, x_n) \quad (4.3.2)$$

Ou, de maneira mais compacta:

$$\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = k f(\mathbf{x}) \quad (4.3.3)$$

Demonstração: Pela definição, temos:

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \dots, x_n)$$

Diferenciando a expressão com respeito a λ :

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda x_1} \frac{d(\lambda x_1)}{d\lambda} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \lambda x_n} \frac{d(\lambda x_n)}{d\lambda} = k \lambda^{k-1} f$$

Como a equação é válida para todo $\lambda > 0$, se tomarmos $\lambda = 1$ o resultado obtido é:

$$x_1 \frac{\partial f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)}{\partial \lambda x_1} + \dots + x_n \frac{\partial f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)}{\partial \lambda x_n} = k f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k$$

Conforme queríamos mostrar.

■ **Exemplo 37:** A função $f(x, y) = x^2y^3$ é homogênea de grau 5, pois:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = x(2xy^3) + y(3x^2y^2) = 5x^2y^3 = 5f(x, y) \implies k = 5$$

Para verificar, veja que $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2(\lambda y)^3 = \lambda^5 x^2 y^3 = \lambda^5 f(x, y)$.

4.4 A Jacobiana

Considere uma função de várias variáveis do tipo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Usualmente denotamos este tipo de função por $f = f(x_1, \dots, x_n)$ e o gradiente como:

$$\nabla f = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \hat{e}_k = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \quad (4.4.1)$$

Com derivadas direcionais dadas por $D_e f = \nabla f \cdot \hat{e}_i$, sendo \hat{e}_i um versor numa direção qualquer.

Agora, considere uma função vetorial $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Como podemos definir um "gradiente" para este tipo de função? Sabemos que \mathbf{f} possui m componentes, portanto podemos denotá-la por $\mathbf{f} = \mathbf{f}(f_1, \dots, f_m)$, sendo f_i sua i -ésima componente. Além disso, cada componente tem como argumentos x_1, \dots, x_n , portanto $f_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$. Assim, o gradiente de cada componente da função \mathbf{f} é ∇f_i .

Logo, podemos definir o "gradiente" de uma função vetorial, com $m > 1$, a partir de uma extensão do conceito que já havíamos estabelecido para o gradiente de função escalares. Esse novo operador é a **matriz jacobiana**, onde a i -ésima linha da matriz corresponde ao gradiente da i -ésima componente da função \mathbf{f} .

■ **Definição 14.** A matriz Jacobiana de uma função $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é definida como:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (4.4.2)$$

Ou seja, cada elemento da matriz é definido por $J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. Com $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

A determinante da matriz Jacobiana também possui várias aplicações, e na literatura usualmente também recebe o nome de Jacobiana:

■ **Definição 15.** A determinante D da matriz Jacobiana J de dimensão $n \times n$ é representada por:

$$D_J = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \det \mathbf{J} \quad (4.4.3)$$

■ **Exemplo 38:** Encontre a matriz Jacobiana e sua determinante para uma transformação de coordenadas polares para cartesianas.

As equações que relacionam os dois sistemas de coordenadas são:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

Portanto as derivadas que compõem a Jacobiana são:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta$$

A matriz Jacobiana é então:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.4.4)$$

Cuja determinante vale:

$$D_J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial r} = r \quad (4.4.5)$$

A determinante da Jacobiana é útil para calcular integrais em diferentes sistemas de coordenadas. Elas se relacionam por:

$$\int \cdots \int dy_1 \cdots dy_n = \int \cdots \int D_J dx_1 \cdots dx_n \quad (4.4.6)$$

Na conversão de coordenadas polares para cartesianas por exemplo, como $D_J = r$, uma integral de superfície fica:

$$\int \int f(x, y) dx dy = \int \int f(r, \theta) r dr d\theta \quad (4.4.7)$$

É possível mostrar que a determinante da matriz Jacobiana apresenta uma propriedade similar à regra de cadeia. Consideremos a Jacobiana:

$$\mathbf{J}^{f,x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (4.4.8)$$

Suponha agora, que f_1, \dots, f_n são funções de um novo conjunto de variáveis y_1, \dots, y_n , que por sua vez são funções de x_1, \dots, x_n . Temos, pela regra da cadeia, que:

$$\mathbf{J}_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \quad (4.4.9)$$

Agora considere as matrizes:

$$\mathbf{J}^{f,y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \quad \mathbf{J}^{y,x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (4.4.10)$$

O elemento na i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz resultante do produto entre $\mathbf{J}^{f,y}$ e $\mathbf{J}^{y,x}$ é:

$$\mathbf{J}_{i,j} = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (4.4.11)$$

Assim, fica claro que:

$$\mathbf{J}^{f,x} = \mathbf{J}^{f,y} \mathbf{J}^{y,x} \quad (4.4.12)$$

Agora é possível estabelecer uma relação entre as determinantes, pois $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$:

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \quad (4.4.13)$$

Além disso, se J é invertível, vale que $\mathbf{J}\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{I}$. Como $\det \mathbf{I} = 1$, segue que:

$$\det \mathbf{J} = \frac{1}{\det \mathbf{J}^{-1}} \quad (4.4.14)$$

Uma última propriedade importante que usaremos é a de que se a determinante da Jacobiana tem variáveis repetidas, então ela pode ser calculada a

partir de uma matriz de dimensões reduzidas. Suponha que para a matriz \mathbf{J} a determinante é $D_J = \partial(f_1, \dots, f_a, f_{a+1}, \dots, f_n) / \partial(x_1, \dots, x_a, x_{a+1}, \dots, x_n)$, com $f_{a+1} = x_{a+1}, \dots, f_n = x_n$. A matriz Jacobiana correspondente é:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_a} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{a+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_a}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_a}{\partial x_a} & \frac{\partial f_a}{\partial x_{a+1}} & \cdots & \frac{\partial f_a}{\partial x_n} \\ \frac{\partial x_{a+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x_{a+1}}{\partial x_a} & \frac{\partial x_{a+1}}{\partial x_{a+1}} & \cdots & \frac{\partial x_{a+1}}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial x_a} & \frac{\partial x_n}{\partial x_{a+1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (4.4.15)$$

Assumindo que as variáveis x_1, \dots, x_n são independentes, então $\partial x_i / \partial x_j = \delta_{ij}$. Portanto, podemos escrever a matriz anterior como:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\frac{f_1, \dots, f_a}{x_1, \dots, x_a}} & \mathbf{J}_{\frac{f_1, \dots, f_a}{x_{a+1}, \dots, x_n}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-a} \end{pmatrix} \quad (4.4.16)$$

Onde o índice das submatrizes Jacobianas indica as variáveis e o índice da matriz identidade indica sua dimensão (Assim, fica claro que a matriz $\mathbf{0}$ é uma matriz nula de dimensão $(n-a) \times a$).

Podemos agora simplificar a expressão da determinante desta matriz através de uma nova relação. Para matrizes em bloco \mathbf{M} da forma:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \quad (4.4.17)$$

Onde \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{D} são matrizes de dimensões $n \times n$, $n \times m$ e $m \times m$, respectivamente, a determinante é dado pela fórmula[25]:

$$\det \mathbf{M} = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{D}) \quad (4.4.18)$$

Assim, agora fica fácil calcular a determinante para a matriz \mathbf{J} :

$$D_J = \det \left(\mathbf{J}_{\frac{f_1, \dots, f_a}{x_1, \dots, x_a}} \right) \det(\mathbf{I}_{n-a}) = \det \left(\mathbf{J}_{\frac{f_1, \dots, f_a}{x_1, \dots, x_a}} \right) \quad (4.4.19)$$

Portanto:

$$D_J = \frac{\partial(f_1, \dots, f_a, x_{a+1}, \dots, x_n)}{\partial(x_1, \dots, x_a, x_{a+1}, \dots, x_n)} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_a)}{\partial(x_1, \dots, x_a)} \quad (4.4.20)$$

Que é o resultado utilizado na demonstração do teorema de Liouville.

■ **Exemplo 39:** Mostre por cálculo direto que $\partial(f_1, f_2, x_3)/\partial(x_1, x_2, x_3) = \partial(f_1, f_2)/\partial(x_1, x_2)$.

A matriz correspondente à primeira determinante é:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x_3}{\partial x_2} & \frac{\partial x_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4.21)$$

Portanto:

$$D_J = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} \quad (4.4.22)$$

5 Soluções

5.1 Capítulo 1

■ **Problema 1.1:** O comprimento infinitesimal de arco em coordenadas cartesianas é:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (5.1.1)$$

A relação entre as coordenadas cartesianas e esféricas é:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \varphi \cos \theta \\ y &= r \sin \varphi \sin \theta \\ z &= r \cos \varphi \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Portanto, temos:

$$\begin{aligned} dx &= \sin \varphi \cos \theta dr - r \sin \varphi \sin \theta d\theta + r \cos \varphi \cos \theta d\varphi \\ dy &= \sin \varphi \sin \theta dr + r \sin \varphi \cos \theta d\theta + r \cos \varphi \sin \theta d\varphi \\ dz &= \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

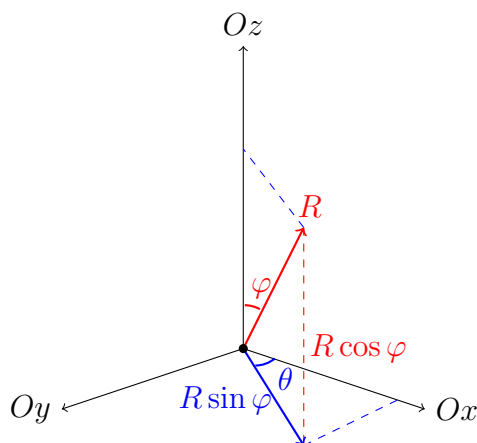


Figura 10: Coordenadas esféricas. Veja que a projeção vertical de R , no eixo Oz é $R \cos \varphi$. A projeção do vetor posição no plano xy é $R \sin \varphi$, portanto as componentes x e y dessa projeção são $R \cos \varphi \cos \theta$ e $R \cos \varphi \sin \theta$, respectivamente.

Assim, temos que:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{f(r)}$$

Diferenciando portanto as três equações com respeito a σ , segue que:

$$\frac{ds}{d\sigma} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + r^2 \sin^2 \varphi \dot{\theta}^2} \sigma$$

O tempo total vale então:

$$T(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} f(r) \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + r^2 \sin^2 \varphi \dot{\theta}^2} d\sigma \quad (5.1.4)$$

■ **Problema 1.2:** As coordenadas cartesianas se relacionam com as coordenadas cilíndricas de acordo com:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

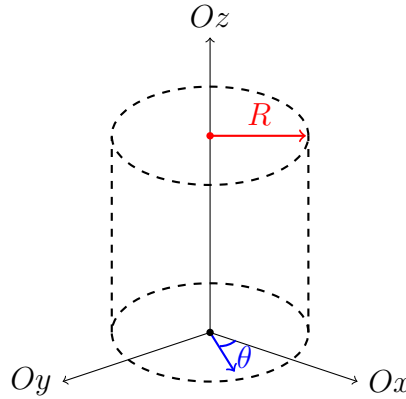


Figura 11: Cilindro circular

Portanto, temos que:

$$\begin{aligned} dx &= dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta \\ dy &= dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta \\ dz &= dz \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Assim o comprimento infinitesimal de arco é:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta + dz^2}$$

Onde cada termo corresponde à contribuição radial, angular e vertical, respectivamente. Mas como o raio do cilindro é constante e vale R , temos que $dr = 0$. Além disso, iremos diferenciar com respeito à θ , portanto:

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Então temos um funcional que tem como argumento a altura z :

$$S\{z\} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} f\left(z, \frac{dz}{d\theta}\right) d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{R^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2} d\theta \quad (5.1.7)$$

Utilizando a equação de Euler lagrange para f (Veja que f não depende explicitamente de θ , portanto $\partial f / \partial \theta = 0$, além disso, de acordo com as coordenadas que estamos lidando $z' = dz/d\theta$):

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) = 0 \implies \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) = k_0$$

Sendo k_0 uma constante. Derivando:

$$\frac{z'}{\sqrt{R^2 + z'^2}} = k_0$$

Resolvendo para z' ,

$$z' = \left(\frac{k_0^2}{1 - k_0^2} \right) R \quad (5.1.8)$$

Integrando e fazendo $k_1 = \left(\frac{k_0^2}{1 - k_0^2} \right) R$, chegamos em:

$$z' = k_1 \theta + k_2 \quad (5.1.9)$$

Que é a equação de uma hélice circular.

■ **Problema 1.3:** Temos que $x^2 + y^2 = z^2 = r^2$. Podemos portanto escrever o comprimento de arco como:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2} = \sqrt{2dr^2 + r^2 d\theta^2} \implies \frac{ds}{dr} = \sqrt{2 + r^2 \theta'^2} d\theta$$

Logo, temos que:

$$S = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{2 + r^2 \theta'^2} d\theta \quad (5.1.10)$$

Identificando $f(\theta', r) = \sqrt{2 + r^2 \theta'^2}$ e aplicando a equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta'} \right) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \theta}}_{=0} = 0$$

$$\frac{\theta'}{\sqrt{2 + r^2 \theta'^2}} = c_1$$

Elevando ambos os lados ao quadrado e separando as variáveis:

$$d\theta = \sqrt{2} c_1 \frac{dr}{r^2(r^2 - c_1^2)} \implies \theta = \sqrt{2} c_1 \int \frac{dr}{r^2(r^2 - c_1^2)} + c_2 \quad (5.1.11)$$

Podemos resolver a integral através da substituição $r = c_1 \sec u$, assim $dr = c_1 \sec u \tan u du$ e $r^2 - c_1^2 = c_1^2(\sec^2 u - 1) = c_1^2 \tan^2 u$, a integral fica:

$$\sqrt{2} c_1 \int \frac{dr}{r^2(r^2 - c_1^2)} = \sqrt{2} c_1 \int \frac{c_1 \sec u \tan u du}{c_1^2 \sec^2 u \tan^2 u} du = \sqrt{2} \int du = \sqrt{2} u$$

Como $r = c_1 \sec u$, então $u = \cos^{-1} \left(\frac{c_1}{r} \right)$, logo, a equação da geodésica é:

$$\theta = \sqrt{2} \cos^{-1} \left(\frac{c_1}{r} \right) + c_2 \quad (5.1.12)$$

As constantes c_1 e c_2 são obtidas a partir dos dois pontos pelo qual o caminho deve passar.

■ **Problema 1.4:** Suponha que $n(x)$ é o índice de refração de acordo com a posição horizontal x . Além disso, a distância horizontal percorrida pelo raio de luz é em função do deslocamento x é:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Portanto, o tempo que o raio de luz leva para percorrer uma certa distância é:

$$T\{y\} = \int_{x_0}^{x_1} f(y', x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x)} dx = \frac{1}{c} \int_{x_0}^{x_1} n(x) \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (5.1.13)$$

Como $\partial f / \partial y = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = cte. \implies n(x) \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = cte.$$

Mas como $y' = \tan \theta$ e $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ a equação anterior se reduz à:

$$n(x) \sin \theta = cte. \quad (5.1.14)$$

■ **Problema 1.5:** Suponha que $n(x)$ é o índice de refração de acordo com a posição horizontal x . Além disso, a distância horizontal percorrida pelo raio de luz é em função do deslocamento x é:

$$ds = \sqrt{1+y'^2} dx$$

Portanto, o tempo que o raio de luz leva para percorrer uma certa distância é:

$$T\{y\} = \int_{x_0}^{x_1} f(y', x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x)} dx = \frac{1}{c} \int_{x_0}^{x_1} n(x) \sqrt{1+y'^2} dx \quad (5.1.15)$$

Como $\partial f / \partial y = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = cte. \implies n(x) \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = cte.$$

Mas como $y' = \tan \theta$ e $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ a equação anterior se reduz à:

$$n(x) \sin \theta = cte. \quad (5.1.16)$$

■ **Problema 1.6:** Vimos que $dt = ds/v$, portanto o tempo necessário para completar o trajeto entre os pontos x_0 e x_1 é dado por:

$$dt = \frac{ds}{v} \implies T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx \quad (5.1.17)$$

Identificando o funcional a função $f(y, y') = \sqrt{1+y'^2}/y$. Como $f(y, y')$ não depende explicitamente de x , podemos utilizar a identidade de Beltrami para resolver o problema facilmente:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = c$$

Substituindo:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - \frac{y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}} = c \quad (5.1.18)$$

Introduzindo uma nova constante $C = 1/c$:

$$(1+y'^2)y^2 = C^2$$

Rearranjando e resolvendo para y' ,

$$\int dx = \pm \int \frac{y}{\sqrt{C^2 - y^2}} dy$$

A integral pode ser resolvida a partir da substituição $y = c \sec \theta$, pois como $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$, segue que $\sqrt{C^2 - y^2} = -\tan \theta$, e além disso $dy = c \sec \theta \tan \theta d\theta$, o que nos leva a:

$$\int \frac{y}{\sqrt{C^2 - y^2}} dy = - \int \sec^2 \theta d\theta = \tan \theta + C$$

Mas $\tan \theta = \sqrt{C^2 - y^2}/1$. Obtemos então, ao calcular a integral definida correspondente:

$$\mp \sqrt{C^2 - y^2} = x - x_0$$

Elevando ambos os lados da equação ao quadrado obtemos:

$$(x - x_0)^2 + y^2 = c^2 \quad (5.1.19)$$

Que é a equação de um círculo de raio C centrado em $(x_0, 0)$, com ambas as constantes determinadas a partir das condições iniciais.

5.2 Capítulo 2

■ **Problema 2.1:** a) As coordenadas dos corpos do sistema são:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \theta_1 \\ y_1 &= l_1 \cos \theta_1 \\ x_2 &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \\ y_2 &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Portanto temos:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ \dot{y}_1 &= -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ \dot{x}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ \dot{y}_2 &= -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2\end{aligned}$$

As energias potenciais valem:

$$U_1 = mgl_1 \cos \theta_1, \quad U_2 = mg(l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)$$

E as energia cinéticas:

$$\begin{aligned}T_1 &= \frac{m}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ T_2 &= \frac{m}{2} (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2)\end{aligned}$$

A Lagrangiana vale então:

$$L = m(l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2gl_1 \cos \theta_1 + gl_2 \cos \theta_2) \quad (5.2.2)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -m(l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 2gl_1 \sin \theta_1) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= m(2l_1^2 \ddot{\theta}_1 + l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1 l_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= m(l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_2 g \sin \theta_2) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m(l_2^2 \ddot{\theta}_2 + l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\theta_1 - \theta_2) \sin(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2))\end{aligned}$$

As equações de movimento obtidas são:

$$\begin{aligned}2l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 2g \sin \theta_1 &= 0 \\ l_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g \sin \theta_2 &= 0\end{aligned} \quad (5.2.3)$$

b) Assumindo que $l_1 = l_2$ e fazendo a aproximação para pequenos ângulos obtemos:

$$\begin{aligned} 2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 + 2g\theta_1 &= 0 \\ l\ddot{\theta}_2 + l\ddot{\theta}_1 + g\theta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Assumindo que as soluções são da forma $\theta_1 = Ae^{i\omega t}$ e $\theta_2 = Be^{i\omega t}$ e escrevendo $\omega_0^2 = g/l$, obtemos as equações:

$$\begin{aligned} 2A(\omega_0^2 - \omega^2) &= B\omega^2 \\ A\omega^2 &= B(\omega_0^2 - \omega^2) \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Dividindo uma equação pela outra, as constantes se cancelam:

$$2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \omega^4$$

Resolvendo para ω :

$$\sqrt{2}(\omega_0^2 - \omega^2) = \pm\omega^2$$

Portanto, as frequências são:

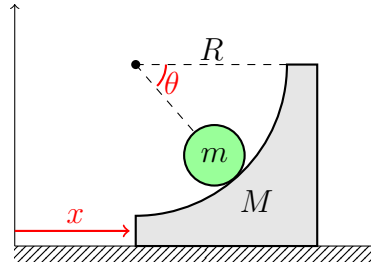
$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad \omega_2 = \omega_0\sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad (5.2.6)$$

■ **Problema 2.2:** Como a bolinha só pode se mover ao longo da superfície da cunha, escolheremos como coordenadas generalizadas o ângulo θ percorrido ao longo de sua circunferência, e seu deslocamento horizontal x . Podemos escrever as coordenadas da bolinha em coordenadas cartesianas como:

$$\begin{aligned} x' &= x + R \cos \theta \implies \dot{x}' = \dot{x} - R\dot{\theta} \sin \theta \\ y' &= -R \sin \theta \implies \dot{y}' = -R\dot{\theta} \cos \theta \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Logo, $\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 = \dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{\theta}R \sin \theta + R^2\dot{\theta}^2$, e Lagrangiana do sistema vale:

$$L = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{\theta}R \sin \theta + R^2\dot{\theta}^2) + mgR \sin \theta \quad (5.2.8)$$



Temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial L}{\partial \theta} &= m(gR \cos \theta - R\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta) \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= (M + m)\ddot{x} - mR(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= m(R^2\ddot{\theta} - R\ddot{x} \sin \theta - R\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta)
 \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

Assim, aplicando as equações de E-L para x e θ , as equações de movimento são, respectivamente:

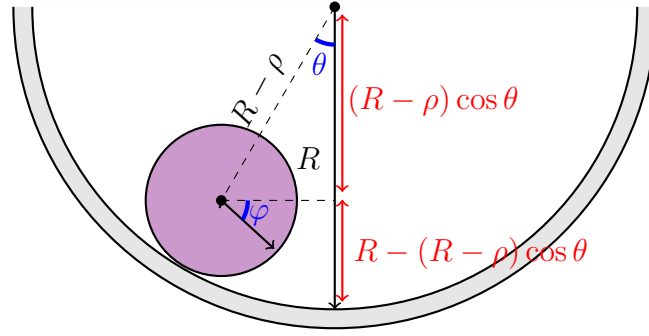
$$\begin{aligned}
 (M + m)\ddot{x} - mR(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) &= 0 \\
 R\ddot{\theta} - \ddot{x} \sin \theta - g \cos \theta &= 0
 \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

■ **Problema 2.3:** Podemos escrever o vínculo de rolamento sem deslizamento como:

$$(R - \rho)\dot{\theta} = \rho\dot{\varphi} \tag{5.2.11}$$

A energia potencial pode ser escrita como:

$$U = mg(R - (R - \rho) \cos \theta)$$



E a energia cinética:

$$T = \frac{I}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} \dot{\theta}^2$$

Onde I é o momento de inércia do corpo. Assim, fazendo a substituição $\dot{\varphi} = \frac{(R-\rho)}{\rho} \dot{\theta}$, dividindo todos os termos por m e ignorando os termos constantes, podemos escrever a Lagrangiana como:

$$L = (R - \rho)^2 \frac{\dot{\theta}^2}{2} \left(\frac{I}{m\rho^2} + 1 \right) + mg(R - \rho) \cos \theta \quad (5.2.12)$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mg(R - \rho) \sin \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= (R - \rho)^2 \left(\frac{I}{m\rho^2} + 1 \right) \dot{\theta} \end{aligned}$$

Portanto, a equação do movimento fica:

$$(R - \rho) \left(\frac{I}{m\rho^2} + 1 \right) \ddot{\theta} + mg \sin \theta = 0$$

Fazendo a aproximação para pequenos ângulos, podemos escrever a EDO como:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{(R - \rho) \left(\frac{I}{m\rho^2} + 1 \right)} \theta = 0 \quad (5.2.13)$$

Se tratando de uma esfera, $I = \frac{2}{5}m\rho^2$, logo a frequência vale:

$$\omega = \sqrt{\frac{5g}{7(R - \rho)}} \quad (5.2.14)$$

■ **Problema 2.4:** Podemos escrever a Lagrangiana da partícula em coordenadas cilíndricas como:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgz \quad (5.2.15)$$

Mas vale que $z = r^2$, portanto $\dot{z} = 2r\dot{r}$ e :

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 4r^2\dot{r}^2) + mgr^2 \quad (5.2.16)$$

Como L não depende de θ então a coordenada é cíclica, e o momento angular em torno do eixo z é conservado:

$$mr^2\dot{\theta} = C \quad (5.2.17)$$

Aplicando a equação de Euler-Lagrange para r :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= m(r^2\dot{\theta}^2 + 4r\dot{r}^2 - 2gr) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) &= m \frac{d}{dt} (\dot{r} + 4r\dot{r}) = m(\ddot{r} + 4(r^2\ddot{r} + 2r\dot{r}^2)) \end{aligned}$$

Assim,

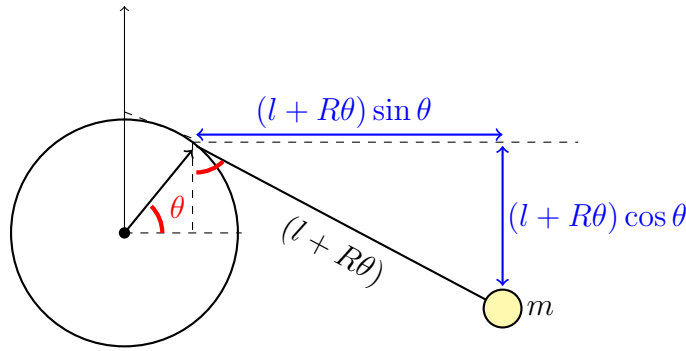
$$(1 + 4r^2)\ddot{r} + 4r\dot{r}^2 - r\dot{\theta}^2 + 2gr = 0 \quad (5.2.18)$$

■ **Problema 2.5:** As coordenadas do corpo podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} x &= R \cos \theta + (l + R\theta) \sin \theta \\ y &= R \sin \theta - (l + R\theta) \cos \theta \\ \dot{x} &= (l + R\theta)\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y} &= (l + R\theta)\dot{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

Pois se o ponto de tangência percorre um ângulo ao longo do círculo, o comprimento de corda desenrolada passa a ser $l + R\theta$. A do sistema lagrangiana é então:

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \\ L &= \frac{m}{2}(l + R\theta)^2\dot{\theta}^2 - mg(R \sin \theta - (l + R\theta) \cos \theta) \end{aligned} \quad (5.2.19)$$



Temos,

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta} &= m(l + R\theta)\dot{\theta}^2 - mg(l + R\theta)\sin \theta \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= m(l + R\theta^2)\ddot{\theta} + 2m\dot{\theta}^2(l + R\theta)\end{aligned}$$

Logo, após dividir todos os termos por $m(l + R\theta)$, a equação de movimento fica:

$$(l + R\theta)\ddot{\theta} + R\dot{\theta}^2 + g \sin \theta = 0 \quad (5.2.20)$$

■ **Problema 2.6:** a) As coordenadas da partícula são dadas por:

$$\begin{aligned}x &= R \cos \phi \\ y &= R \sin \phi \\ z &= R(1 - \cos \theta)\end{aligned}$$

Portanto, $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = R^2\dot{\theta}^2$ e $\dot{z}^2 = \omega^2 R^2 \sin^2 \theta$, com $\omega = \dot{\phi}$. A Lagrangiana da partícula é então (desconsiderando as constantes):

$$L = \frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) + mgR \cos \theta \quad (5.2.21)$$

A equação de movimento é então:

$$\ddot{\theta} - \omega^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{g}{R} \cos \theta = 0 \quad (5.2.22)$$

b) No equilíbrio $\ddot{\theta} = 0$, portanto os ângulos de equilíbrio θ_0 satisfazem:

$$\sin \theta_0 \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos \theta_0 \right) = 0 \quad (5.2.23)$$

As posições de equilíbrio são $\theta_0 = 0$, $\theta_0 = \pi$ e $\cos \theta_0 = \frac{g}{\omega^2 R}$, se $\frac{g}{\omega^2 R} < 1$. Contudo o equilíbrio com $\theta_0 = \pi$ é *instável*.

■ **Problema 2.7:** Desconsiderando os vínculos, a Lagrangiana do problema anterior é escrita como:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + mgr \cos \theta \quad (5.2.24)$$

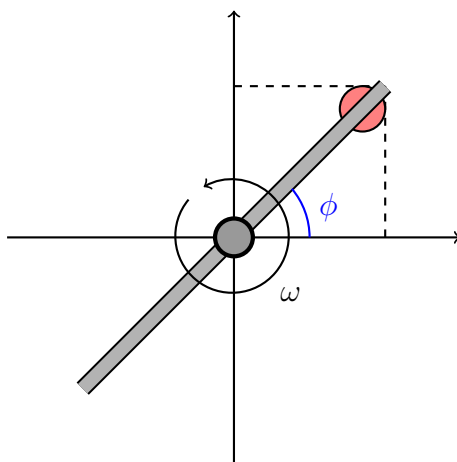


Figura 12: Vista superior. Veja que $\tan \phi = \tan \omega t = \frac{y}{x} \implies \sin \phi \cos \omega t - \sin \omega t \cos \phi = 0$

Os vínculos são:

$$\begin{aligned} f_1(r) &= r - R = 0 \\ f_2(\phi, t) &= \sin(\phi - \omega t) = 0 \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

Portanto, temos que $\frac{\partial f_1}{\partial r} = 1$ e $\frac{\partial f_2}{\partial \phi} = \cos(\phi - \omega t) = 1$.
E,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \phi} &= 0 \end{aligned}$$

Segue que,

$$\begin{aligned}
-mr\dot{\theta}^2 - mr\omega^2 \sin^2 \theta - mg \cos \theta - \lambda_1 &= 0 \\
m \frac{d}{dt} \left(r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \right) - \lambda_2 &= 0
\end{aligned}$$

Portanto as forças de restrição são $\lambda_1 = -(mR\dot{\theta}^2 + m\omega^2 R \sin^2 \theta + mg \cos \theta)$ e $\lambda_2 = 2mR\omega\dot{\phi} \sin \theta \cos \theta$.

■ **Problema 2.8:** A Lagrangiana para a partícula, em coordenadas cilíndricas, é:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + mgz \quad (5.2.26)$$

E há dois vínculos, um para o raio e outro que relaciona a altura z e o ângulo percorrido θ .

$$\begin{aligned}
f_1(r) &= r - R = 0 \\
f_2(z, \theta) &= z - \alpha\theta = 0
\end{aligned} \quad (5.2.27)$$

Chamaremos os multiplicadores indeterminados de λ_1 e λ_2 . As equações de E-L para r , θ e z , respectivamente, serão:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} &= 0 \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \theta} &= 0 \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} &= 0
\end{aligned}$$

Calculando as derivadas e em seguida fazendo que $\ddot{r} = 0$, $\dot{r} = 0$ e $r = R$:

$$\begin{aligned}
-m\dot{\theta}^2 - \lambda_1 &= 0 \\
mR^2\ddot{\theta} + \alpha\lambda_2 &= 0 \\
m\ddot{z} - mg - \lambda_2 &= 0
\end{aligned}$$

Agora fica fácil isolar as variáveis:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= m\dot{\theta}^2 R \\
\lambda_2 &= mg \left(\frac{R^2}{R^2 + \alpha^2} \right) \\
\ddot{\theta} &= g \frac{\alpha}{R^2 + \alpha^2} \\
\ddot{z} &= g \frac{\alpha^2}{R^2 + \alpha^2}
\end{aligned} \tag{5.2.28}$$

■ **Problema 2.9:** a) A altura z da massa inferior em relação ao furo vale $z = r - \ell$. Portanto $\dot{z} = \dot{r}$. A lagrangiana do sistema vale, em coordenadas polares (desconsiderando o termo constante da energia potencial):

$$L = \frac{m}{2}(2\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr \tag{5.2.29}$$

Onde θ é o ângulo que a partícula superior percorre ao longo da mesa. Resolvendo a equação de Euler-Lagrange para r encontramos:

$$2m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg = 0 \tag{5.2.30}$$

b) A coordenada θ é cíclica, isto é, não aparece explicitamente na Lagrangiana, portanto podemos concluir que o momento conjugado associado a coordenada θ é constante, que é o momento angular:

$$\frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = 0 \implies p_\theta = mr^2\dot{\theta} = C \tag{5.2.31}$$

c) Escrevendo $\dot{\theta}$ como $\dot{\theta} = C/mr^2$, a equação do movimento fica:

$$\ddot{r} - \frac{C^2}{2m} \frac{1}{r^3} + g = 0 \tag{5.2.32}$$

Em uma órbita circular estável $\ddot{r} = 0$:

$$-\frac{C^2}{2m^2} \frac{1}{R^3} + g = 0 \implies R = \left(\frac{C^2}{2gm^2} \right)^{-1/3} \tag{5.2.33}$$

Onde R é o raio órbita. Considere agora uma pequena perturbação na órbita $R \rightarrow R + \delta r$, onde $\delta r \ll R$. A equação de movimento fica:

$$\delta\ddot{r} - \frac{C^2}{2gm^2} (R + \delta r)^{-3} + g = 0 \tag{5.2.34}$$

Como $(R + \delta r)^{-3} = \frac{1}{R^3} (1 + \frac{\delta r}{R})^{-3} \approx \frac{1}{R^3} (1 - 3\frac{\delta r}{R})$, ignorando os termos constantes,

a equação de movimento pode ser reescrita como:

$$\delta\ddot{r} + \frac{3}{2} \frac{C^2}{gm^2 R^4} \delta r = 0 \quad (5.2.35)$$

Portanto a frequência vale:

$$\omega^2 = \frac{3}{2} \frac{C^2}{gm^2 R^4} \quad (5.2.36)$$

Sendo C o momento angular. Veja que $\omega^2 > 0$, portanto $\delta\ddot{r} < 0$, logo a órbita é estável.

Agora podemos encontrar a energia rapidamente. Temos a relação entre o momento angular e o raio $C^2 = 2gm^2 R^3$, e a relação entre a velocidade angular e o momento angular $mR^2\dot{\theta} = C$, portanto a energia do sistema vale:

$$E = T + U = \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + mg(R - \ell) = mg(2R - \ell) \quad (5.2.37)$$

■ **Problema 2.10:** a) Em coordenadas esféricas podemos escrever a Lagrangiana do pêndulo como:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + mgr \cos \theta \quad (5.2.38)$$

O momento conjugado associado a coordenada ϕ é:

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \quad (5.2.39)$$

b) Como ϕ é a coordenada cíclica, a Routhiana é:

$$R = p_\phi \dot{\phi} - L = \frac{m}{2} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 - r^2 \dot{\theta}^2) - mgr \cos \theta$$

Aplicando:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial R}{\partial \phi} = 0$$

Chegamos na equação de movimento:

$$\ddot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 + \frac{g}{R} \sin \theta = 0 \quad (5.2.40)$$

Que é a mesma equação na qual chegaríamos através da Lagrangiana.

■ **Problema 2.11:** a) As coordenadas do pêndulo são:

$$\begin{aligned}x &= l \sin \theta \implies \dot{x} = l \dot{\theta} \cos \theta \\y &= l \cos \theta + a \cos(\omega t) \implies \dot{y} = -(l \dot{\theta} \sin \theta - \omega a \sin(\omega t))\end{aligned}\tag{5.2.41}$$

Assim, desconsiderando termos constantes ou que dependem somente do tempo, a Lagrangiana do pêndulo é:

$$L = \frac{m}{2}(l^2 \dot{\theta}^2 + 2al\omega \dot{\theta} \sin(\omega t) \sin \theta) - mgl \cos \theta \tag{5.2.42}$$

Temos,

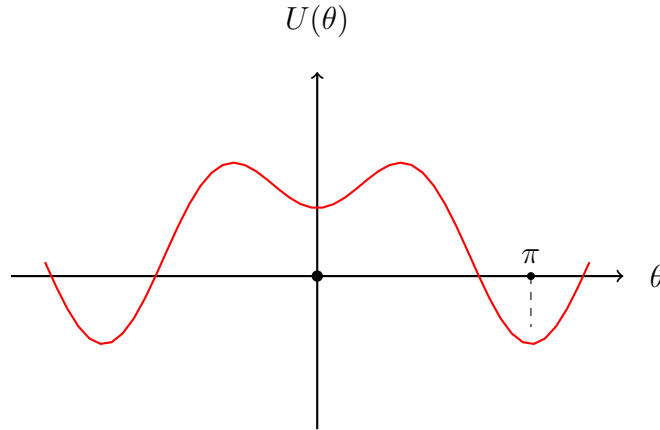
$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta} &= m(al\omega \dot{\theta} \sin(\omega t) \cos \theta + gl \sin \theta) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= ml^2 \ddot{\theta} + mal\omega(\omega \cos(\omega t) \sin \theta + \dot{\theta} \sin(\omega t) \cos \theta)\end{aligned}$$

O que leva à equação de movimento:

$$\ddot{\theta} = - \left(\frac{a\omega^2}{l} \cos \omega t - \frac{g}{l} \right) \sin \theta \tag{5.2.43}$$

b) Comparando a equação de movimento do item anterior com o enunciado do problema, podemos identificar f_1 como $f_1 = \frac{a\omega^2}{l} \sin \theta$ e escrever o potencial efetivo como (Na realidade, este potencial deve ser multiplicado por um fator ml^2 para ter dimensão de energia, mas a multiplicação por uma constante não altera o ponto de equilíbrio):

$$U_{eff} = -\frac{g}{l} \cos \theta + \frac{a^2 \omega^2}{4l^2} \sin^2 \theta \tag{5.2.44}$$



Derivando a expressão anterior:

$$\frac{dU_{eff}}{d\theta} = \sin \theta \left(\frac{g}{l} + \frac{a^2 \omega^2}{2l^2} \cos \theta \right) \quad (5.2.45)$$

Portanto fica claro que $\theta = \pi$ é um ponto de equilíbrio. Derivando mais uma vez e tomando $\theta_0 = \pi$, obtemos a frequência Ω de oscilação:

$$\Omega^2 = \frac{d^2 U_{eff}}{dx^2} \Big|_{\theta_0=\pi} \implies \Omega = \sqrt{\frac{a^2 \omega^2}{2l^2} - \frac{g}{l}} \quad (5.2.46)$$

Como Ω deve ser real, fica claro que deve ser satisfeita a condição:

$$\frac{a^2 \omega^2}{2l} > g \quad (5.2.47)$$

Para que π seja um ponto estável.

■ **Problema 2.12:** Aplicando a equação de Euler-Lagrange para o sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= e^{\frac{\alpha}{m}t} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= m \frac{d}{dt} (e^{\frac{\alpha}{m}t} \dot{x}) = m e^{\alpha t} \left(\frac{\alpha}{m} \dot{x} + \ddot{x} \right) \end{aligned}$$

O que, após dividir todos os termos por $e^{\frac{\alpha}{m}t}$, leva à:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (5.2.48)$$

Como são geradas as mesmas equações para y e z , basta somá-las para chegar

em:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + \alpha\dot{\mathbf{r}} + \nabla V = 0 \quad (5.2.49)$$

Que é a equação de movimento para um corpo sob a ação de uma força resistiva proporcional á velocidade e sob a ação de uma força conservativa associada à um potencial V .

■ **Problema 2.13:** Se alagrangiana se mantém invariante sob uma transformação infinitesimal do tipo $q \rightarrow q + \epsilon$, podemos identificar o parâmetro $\Phi = 1$. E a quantia conservada é:

$$C = \sum^n \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum^n p_i \quad (5.2.50)$$

Que é o momento linear do sistema.

Considerando agora uma translação no tempo na forma $t \rightarrow t + \epsilon$, se a Lagrangiana não depende explicitamente de t então claramente ela é invariante sob tal transformação. Portanto podemos identificar $\Psi = 1$, e a quantia conservada é:

$$C = \psi \left(L - \underbrace{\sum^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i}_{2T} \right) \Rightarrow E = C \quad (5.2.51)$$

5.3 Capítulo 3

■ **Problema 3.1:** A Lagrangiana do sistema é:

$$L = T - U = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \left(\frac{ax^2}{2} + b\frac{x^4}{4} \right) \quad (5.3.1)$$

Através da Lagrangiana encontramos o momento p :

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

Portanto:

$$H = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{ax^2}{2} + b\frac{x^4}{4} \quad (5.3.2)$$

As equação de Hamilton são então:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -ax - bx^3\end{aligned}\tag{5.3.3}$$

■ **Problema 3.2:** Como o potencial U se relaciona com a força F através da equação $F(x) = -\partial U/\partial x$, o potencial associado á força $F(x, t) = \frac{k}{x^2} \exp(-t/\tau)$ é:

$$U(x) = -\frac{k}{x} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Assim, o sistema tem Lagrangiana:

$$L = T - U = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k}{x} e^{-\frac{t}{\tau}}\tag{5.3.4}$$

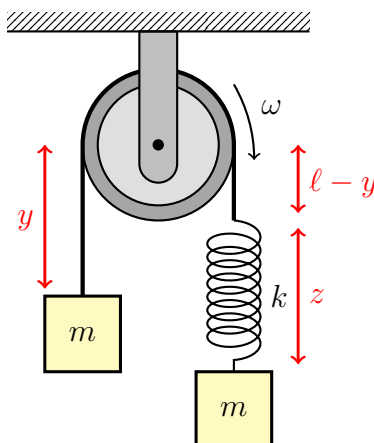
E Hamiltoniana,

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{x} e^{-\frac{t}{\tau}}\tag{5.3.5}$$

Vimos então que nesta situação a Hamiltoniana corresponde a energia total do sistema, contudo, elas não se conservam, pois claramente $dH/dt \neq 0$, devido a dependência temporal da Hamiltoniana.

■ **Problema 3.3:** A energia cinética do bloco a esquerda é simplesmente $m_1 \dot{y}^2/2$. Já para o bloco a direita a energia cinética é $m_2(\dot{z} - \dot{y})^2/2$ pois o ponto de contato entre o fio inextensível e a mola tem velocidade \dot{y} . A Lagrangiana do sistema é então (ignorando o termo constante envolvendo ℓ):

$$L = \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{m(\dot{z} - \dot{y})^2}{2} + mgz - \frac{k}{2}z^2\tag{5.3.6}$$



Os momentos conjugados associados as coordenadas y e z são:

$$\begin{aligned} p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m(2\dot{y} - \dot{z}) \\ p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m(\dot{z} - \dot{y}) \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

Por conseguinte, sua Hamiltoniana é:

$$H = p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - L \quad (5.3.8)$$

Através da soma das equações (5.3.7), temos $m\dot{y} = p_y + p_z$, e através de sua diferença, temos $m\dot{z} = p_y + 2p_z$. Assim,

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_y}{m}(p_y + p_z) + \frac{p_z}{m}(p_y + 2p_z) - \left(\frac{(p_y + p_z)^2}{2m} + \frac{mp_z^2}{2m} + mgz - \frac{k}{2}z^2 \right) \\ H &= \frac{(p_y + p_z)^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} - mgz + \frac{kz^2}{2} \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

As equações de Hamilton são então,

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y + p_z, & \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \\ \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial p_z} = p_y + 2p_z, & \dot{p}_z &= -\frac{\partial H}{\partial z} = mg - kz \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

■ **Problema 3.4:** A Lagrangiana do sistema pode ser escrita como:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + (\ell^2 + x^2)\dot{\theta}^2) + mg(\ell + x)\cos\theta - \frac{kx^2}{2} \quad (5.3.11)$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} p_x &= m\dot{x} \\ p_\theta &= m(\ell + x)^2\dot{\theta} \end{aligned}$$

A Hamiltoniana vale,

$$H = p_\theta\dot{\theta} + p_x\dot{x} - L$$

Fazendo as devidas substituições, obtemos:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m(\ell + x)^2} - mg(\ell + x)\cos\theta + \frac{kx^2}{2} \quad (5.3.12)$$

As equações de movimento de Hamilton são, portanto:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} & \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{p_\theta^2}{m(\ell + x)^3} + mg\cos\theta - kx \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m(\ell + x)^2} & \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mg(x + \ell)\sin\theta \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

■ **Problema 3.5:** a) A distensão da mola é dada por $R(\varphi - \theta)$, logo a Lagrangiana do sistema é:

$$L = \frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) - \frac{kR^2}{2}(\varphi - \theta)^2 \quad (5.3.14)$$

Os momentos generalizados são, portanto,

$$p_\theta = mR^2\dot{\theta}, \quad p_\varphi = mR^2\dot{\varphi} \quad (5.3.15)$$

E a Hamiltoniana por sua vez é,

$$H = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mR^2} + \frac{kR^2}{2}(\theta - \varphi)^2 \quad (5.3.16)$$

Ao adotarmos a mudança de variáveis sugerida, podemos reescrever a Lagrangiana como:

$$L = \frac{mR^2}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - kR^2\eta^2 \quad (5.3.17)$$

Com momentos conjugados $p_\xi = mR^2\dot{\xi}$ e $p_\eta = mR^2\dot{\eta}$, o que nos leva à Hamiltoniana,

$$H = \frac{1}{2mR^2}(p_\xi^2 + p_\eta^2) + kR^2\eta^2 \quad (5.3.18)$$

b) A coordenada ξ é cíclica, pois não aparece na Hamiltoniana. Deste modo o momento conjugado $f = p_\xi$ é uma constante de movimento. Temos então que,

$$[H, p_\xi] = \frac{\partial H}{\partial p_\xi} \frac{\partial p_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial p_\xi}{\partial p_\xi} \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\partial H}{\partial p_\eta} \frac{\partial p_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial p_\xi}{\partial p_\eta} \frac{\partial H}{\partial \eta}$$

Como ξ, η, p_ξ e p_η são independentes entre si, todos os termos na expressão se anulam:

$$[H, p_\xi] = 0 \quad (5.3.19)$$

c) A expressão para ξ pode ser facilmente obtida, pois:

$$p_\xi = cte. \implies \xi = ct + \xi_0$$

Dada as condições iniciais, temos que $\xi(0) = 0$ e $\dot{\xi}(0) = 0$, portanto:

$$\xi = 0 \implies \phi = -\theta \quad (5.3.20)$$

Já para η , temos $\eta(0) = (\varphi - \theta)/\sqrt{2} = \pi/2\sqrt{2}$ e $\dot{\eta}(0) = 0$. Através da equação de Euler-Lagrange para η obtemos a equação de movimento:

$$\ddot{\eta} + 2\frac{k}{m}\eta = 0$$

Assim, a solução é da forma:

$$\eta = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

Com $\omega = \sqrt{2k/m}$. Pelas condições iniciais encontramos $A = \pi/2\sqrt{2}$ e $B = 0$, logo:

$$\eta = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cos \omega t \quad (5.3.21)$$

E por fim,

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} \cos \omega t \\ \theta &= \frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{4} \cos \omega t\end{aligned}\tag{5.3.22}$$

■ **Problema 3.7:** Para encontrar a constante de movimento B , basta calcular os colchetes de Poisson $[A, L]$ para as duas constantes de movimento já fornecidas no enunciado. Temos que,

$$\begin{array}{llll}\frac{\partial A}{\partial p_x} = 2p_x & \frac{\partial A}{\partial x} = 2m\omega^2 x & \frac{\partial A}{\partial p_y} = 0 & \frac{\partial A}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial p_x} = -y & \frac{\partial L}{\partial x} = p_y & \frac{\partial L}{\partial p_y} = x & \frac{\partial L}{\partial y} = -p_x\end{array}$$

Tendo em mãos as derivadas parciais, o cálculo dos colchetes fica simples:

$$[A, L] = \frac{\partial A}{\partial p_x} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial p_x} + \frac{\partial A}{\partial p_y} \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial L}{\partial p_y}\tag{5.3.23}$$

Assim,

$$[A, L] = 2(p_x p_y + m\omega^2 xy) = cte.$$

O que nos leva então à constante de movimento B :

$$B = p_x p_y + m\omega^2 xy\tag{5.3.24}$$

A constante C pode ser encontrada a partir de $[B, L]$. Veja que,

$$\begin{array}{llll}\frac{\partial B}{\partial p_y} = p_y & \frac{\partial B}{\partial x} = m\omega^2 y & \frac{\partial B}{\partial p_x} = p_x & \frac{\partial B}{\partial y} = m\omega^2 x\end{array}$$

Calculando os colchetes de Poisson vemos que:

$$[B, L] = p_x^2 - p_y^2 + m\omega^2(x^2 - y^2) = C\tag{5.3.25}$$

■ **Problema 3.8:** Se a transformação é canônica, então os parênteses de Poisson se mantêm invariantes. A condição de canonicidade da transformação, corresponde portanto, à relação $[P, Q] = -1$ (Como foi dito no enunciado, na resolução deste exercício é considerada uma convenção contrária para o colchetes de Poisson pois deste modo a solução torna-se razoavelmente mais simples). Assim,

o trabalho é puramente algébrico. As derivadas parciais são:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\alpha \frac{p}{x^2} \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{\alpha}{x} \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 2\beta x \quad \frac{\partial P}{\partial p} = 0$$

Deste modo,

$$[P, Q] = -1 \implies \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial x} = 1$$

Após a devida simplificação da equação anterior, encontramos a condição de canonicidade da transformação:

$$\beta = \frac{1}{2\alpha} \quad (5.3.26)$$

■ **Problema 3.9:** O volume ocupado no espaço de fase pela trajetória do Feixe é dada por:

$$V = (\pi R^2)(\pi p^2) = (\pi p R)^2 \quad (5.3.27)$$

Pelo teorema de Lioville o volume no espaço de fase é conservado após a passagem do feixe pelo sistema de foco. Deste modo, podemos relacionar as grandezas do feixe por:

$$V = cte. \implies p_0 R_0 = p_1 R_1$$

$$p_1 = \frac{R_1}{R_0} p_0 \quad (5.3.28)$$

Assim, a diminuição do raio do feixe implica no aumento da distribuição de momento.

■ **Problema 3.10:** A Lagrangiana do pêndulo é:

$$L = \frac{ml\dot{\theta}^2}{2} - mgl \sin \alpha \cos \theta \quad (5.3.29)$$

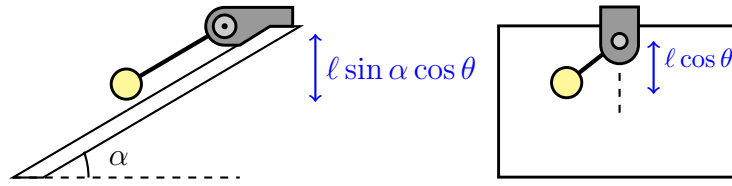


Figura 13: Vista lateral e vista superior

Lembre-se que podemos utilizar a aproximação $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$, assim, a Lagrangiana fica:

$$L = \frac{m}{2}(\ell \dot{\theta}^2 - g \sin \alpha \theta^2) \quad (5.3.30)$$

O termo constante adicional foi ignorado, pois não exerce influencia sob as equações de movimento. Isso nos leva à Hamiltoniana:

$$H = \frac{p_\theta^2}{2m\ell^2} + \frac{mg\ell}{2}\theta^2 \sin \alpha = E$$

Vimos anteriormente que podemos escrever essa equação de modo que ela corresponda a uma elipse no espaço de fase, que tem variável de ação:

$$I = \frac{E}{\omega} \quad (5.3.31)$$

Veja que para este sistema, a amplitude máxima e a energia total se relacionam simplesmente por:

$$E = \frac{mg\ell}{2}\theta_0^2 \sin \alpha$$

E como $\omega = \sqrt{\ell \sin \alpha / g}$, o invariante adiabático do sistema é:

$$I = \left(\frac{mg\ell}{2} \sin \alpha \theta_0^2 \right) \left(\sqrt{\frac{g}{\ell \sin \alpha}} \right)$$

Como m , g e ℓ são constantes, o invariante adiabático nos permite relacionar α e θ_0 :

$$\theta_0 \propto (\sin \alpha)^{-\frac{1}{4}} \quad (5.3.32)$$

■ **Problema 3.11:** Novamente, o invariante adiabático do sistema vale E/ω , conforme mostrado em exemplos anteriores. A energia E é dada por:

$$E = \frac{kA^2}{2}$$

Deste modo, como $E_0/\omega_0 = E_1/\omega_1$, então vale que:

$$A_1 = \left(\frac{k_1}{k_0}\right)^{\frac{1}{4}} A_0 \quad (5.3.33)$$

Assim, com a redução da constante elástica k , a amplitude do movimento diminui.

■ **Problema 3.12:** Já foi mostrado em um dos exemplos que os momentos conjugados são (Considerando o movimento somente em duas dimensões):

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{e}{c}A_x \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{e}{c}A_y \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

Em coordenadas cartesianas a Lagrangiana assume a forma:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - e\Phi + \frac{e}{c}(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y) \quad (5.3.35)$$

A Hamiltoniana por sua vez fica:

$$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - L$$

$$H = (m\dot{x} + \frac{e}{c}A_x)\dot{x} + (m\dot{y} + \frac{e}{c}A_y)\dot{y} - \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + e\Phi - \frac{e}{c}(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y)$$

$$H = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Simplificando, obtemos a Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2m} \left[(p_x - \frac{e}{c}A_x)^2 + (p_y - \frac{e}{c}A_y)^2 \right] \quad (5.3.36)$$

■ **Problema 3.13:** As velocidades no referencial do laboratório podem ser escritas a partir de uma derivação direta das equações de transformação de coordenadas apresentadas no enunciado (Note que $\dot{\theta} = \omega$, conforme expresso no problema):

$$\begin{aligned} \dot{x}_{lab} &= \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta - \omega(x \sin \theta + y \cos \theta) \\ \dot{y}_{lab} &= \dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta + \omega(x \cos \theta - y \sin \theta) \end{aligned} \quad (5.3.37)$$

Após certo trabalho manual, a expressão obtida para v_{lab} é:

$$v_{lab} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\omega(x\dot{y} - y\dot{x}) + \omega^2(x^2 + y^2)$$

Assim, os momentos conjugados associados são:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{2} \frac{\partial v_{lab}}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x} - \omega y) \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{m}{2} \frac{\partial v_{lab}}{\partial \dot{y}} = m(\dot{y} + \omega x) \end{aligned} \quad (5.3.38)$$

A Hamiltoniana vale:

$$H = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - L$$

O que nos leva a:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \omega(y p_x - x p_y) + V(x, y)$$

Como o momento angular vale $L_z = (y p_x - x p_y)$, a equação anterior pode ser reescrita como:

$$H = H_{lab} - \omega L_z \quad (5.3.39)$$

■ **Problema 3.14:** a) O potencial vetor e o campo magnético se relacionam por:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.3.40)$$

Agora, basta calcular o rotacional do potencial vetor:

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{B}{2}y & \frac{B}{2}x & 0 \end{vmatrix}$$

Calculando a determinante, obtemos:

$$\mathbf{B} = \frac{\partial A_x}{\partial y} \hat{z} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \hat{z} = -B \hat{z} \quad (5.3.41)$$

Assim como queríamos mostrar.

b) Pela Hamiltoniana obtida no exercício 12:

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(p_x - \frac{e}{c} A_x \right)^2 + \left(p_y - \frac{e}{c} A_y \right)^2 \right]$$

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(p_x + \frac{eB}{c} y \right)^2 + \left(p_y - \frac{eB}{c} x \right)^2 \right]$$

Expandindo:

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{eB}{2mc} (p_x y - p_y x) + \frac{e^2 B^2}{8mc^2} (x^2 + y^2) \quad (5.3.42)$$

Assim, fica fácil ver que para $\omega = eB/2mc$, a nova Hamiltoniana fica:

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{eB}{2mc} (p_x y - p_y x) + \frac{e^2 B^2}{8mc^2} (x^2 + y^2) - \omega()$$

$$H' = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{e^2 B^2}{8mc^2} (x^2 + y^2) \quad (5.3.43)$$

Por fim, pela (5.3.42), obtemos as equações de Hamilton:

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{e^2 B^2}{4mc} x + \frac{eB}{2mc} p_y \\ \dot{p}_y &= -\frac{e^2 B^2}{4mc} y - \frac{eB}{2mc} p_x \end{aligned} \quad (5.3.44)$$

Lembrando que $p_x = m\dot{x} + \frac{e}{c} A_x$ e $p_y = m\dot{y} + \frac{e}{c} A_y$ e fazendo as substituições no lado direito das equações anteriores, obtemos:

$$\dot{p}_x = \frac{eB}{2c} \dot{y} \dot{p}_y = \frac{eB}{2c} \dot{x}$$

Fazendo as mesmas substituições no lado esquerdo:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{eB}{c} \dot{y} \\ m\ddot{y} &= -\frac{eB}{c} \dot{x} \end{aligned}$$

As equações anteriores implicam que x e y satisfazem, separadamente:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \frac{e^2 B^2}{m^2 c^2} x &= A_0 \\ \ddot{y} + \frac{e^2 B^2}{m^2 c^2} y &= A_1\end{aligned}\tag{5.3.45}$$

Que são equações correspondentes ao movimento harmônico simples de frequência $\omega_0 = eB/mc$, cujas soluções são:

$$\begin{aligned}x &= R \cos \omega t \\ y &= -R \sin \omega t\end{aligned}\tag{5.3.46}$$

O movimento é circular uniforme, e a constante R é determinada a partir das condições iniciais e definem o raio do movimento.

Referências

- [1] GOLDSTEIN, Herbert; POOLE, Charloes; SAFKO, John. Classical Mechanics. 3. ed. San Francisco: Addison Wesley, 2002.
- [2] ON-MARRERO, Pablo V. Negr; SANTIAGO-FIGUERO A, Barbara L.. The Nonlinear Brachistochrone Problem with Friction. San Juan, Puerto Rico, jul. 2005. Disponível em: <http://mate.uprh.edu/~urmaa/reports/brach.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2016.
- [3] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. Mechanics. Massachusetts: Pergamon Press, 1960. 162 p. (Course of Theoretical Physics).
- [4] COURANT, Richard; JOHN, Fritz. Introduction to Calculus and Analysis II. New York: Springer, 1989. (Classics in Mathematics).
- [5] MILLER, James. The Way. Disponível em: <http://www.solitaryroad.com/c855.html>. Acesso em: 14 mar. 2016.
- [6] MARION, Jerry B.; THORNTON, Stephen T.. Dinâmica clássica de partículas e sistemas. São Paulo: Cengage Learning, 2014. 575 p. Tradução All Tasks, revisão técnica Fábio Raia.
- [7] LANCZOS, Cornelius. The variational principles of mechanics. Toronto: University Of Toronto Press, 1949.
- [8] ARNOLD, V. I.. Mathematical Methods of Classical Mechanics. 2. ed. New York: Springer Verlag, 1989.
- [10] KENNERLY, Sam. A graphical derivation of the Legendre transform. Disponível em: www.physics.drexel.edu/~skennerly/maths/Legendre.pdf. Acesso em: 5 abr. 2016.
- [11] DICK, Auguste. Emmy Noether: 1882-1935. Viena: Birkhäuser, 1981.
- [12] MORIN, David. Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. 734 p.
- [13] BUTIKOV, Eugene I. An improved criterion for Kapitza's pendulum stability. J Ournal Of P Hysics A: M Athematical And T Heoretical. São Petersburgo, p. 1-17. jun. 2011.
- [14] GREGORY, R. Douglas. Classical Mechanics: An undergraduate text. Nova Tork: Cambridge University Press, 2006. 610 p.
- [15] TÖRÖK, Josef S. Analytical Mechanics: With an introduction to dynamical systems. Nova York: John Wiley & Sons, 1996.
- [16] VILLAR, A.S, Notas de Aula de Mecânica Clássica, 2015
- [17] CAHN, Sidney B.; NADGORNÝ, Boris E.. A guide to physics problems: Part 1. Nova York: Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [18] CALKIN, M G. Lagrangian and Hamiltonian Mechanics. Singapura: World Scientific, 1999.

-
- [19] SOMMERFELD, Arnold. Mechanics: Lectures on Teoretical Physics. Nova York: Academic Press Inc., 1952.
 - [20] LEMOS, Nivaldo. A. Mecânica Analítica. Rio de Janeiro: Livraria da Física, 2007.
 - [21] TAYLOR, John R. Classical Mechanics. Nova York: University Science Books, 2005.
 - [22] ZIA, R. K. P.; REDISH, Edward F; MCKAY, Susan R. Making Sense of the Legendre Transform. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/0806.1147>. Acesso em: 22 jan. 207.
 - [23] KRAGH, Helge. Dirac: A Scientific Biography. Nova York: Cambridge Univeristy Press, 1990.
 - [24] SILVESTER, John R. Determinant of Block Matrices.
 - [25] POWELL, Philip D. , Calculating the Determinant of Block Matrices Arxiv, Dez. 2015.
 - [26] STRUCKMEIER, Jürgen, Liouville's theorem: Basics, Applications, and Limitations
 - [27] DVORAK, Mark, Liouville's Theorem, Dez. 2011
 - [28] TONG, David. Classical Dynamics. Cambridge, University Of Cambridge Part II Mathematical Tripos, 2005
 - [29] GOLWALA, Sunil. Lecture Notes on Classical Mechanics for Physics, 2005.
 - [30] TALMAN, Richard. Action/Angle variables and adiabatic invariants.
 - [31] Li, Ju; Notes on Adiabatic Invariants, 1998