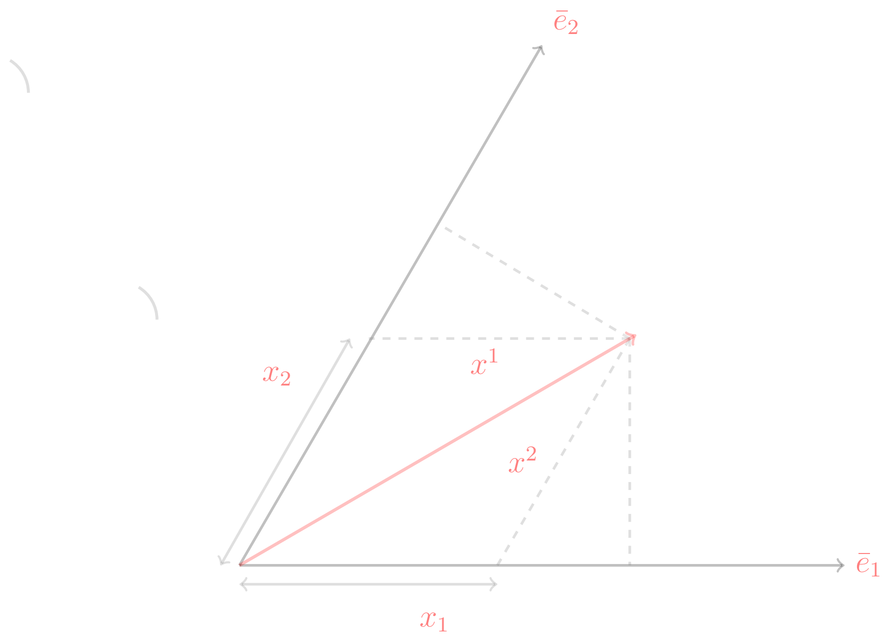
Tensores



Gabriel O. Alves

Conteúdo

1 Introdução

Usualmente, em tratamentos mais elementares na físicas, trabalhamos somente com bases *ortonormais*, isto é, bases que são perpendiculares entre si e unitárias, como as coordenadas cartesianas e polares, que são exemplos bem conhecidos. No sistema de coordenadas cartesiano, por exemplo, podemos representar graficamente um vetor da seguinte maneira:

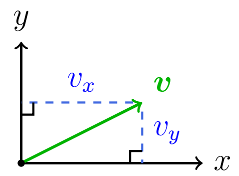


Figura 1: Vetor no plano cartesiano

A componente v_x do vetor $\boldsymbol{v}$ é tanto paralela ao eixo x quanto perpendicular ao eixo y, e o mesmo vale para a sua componente v_y: ela é paralela ao eixo y e perpendicular ao eixo x. Ou seja, as bases são ortogonais. Contudo, as componentes de um vetor não se comportam desta maneira em todo sistema de coordenadas. Podemos trabalhar com bases *oblíquas*, isto é, base que não são perpendiculares entre si. Surge então a necessidade de distinguir matematicamente dois tipos de componentes: as componentes ditas **contravariantes**, que são paralelas aos eixos, e as componentes **covariantes**, que são ortogonais aos eixos.

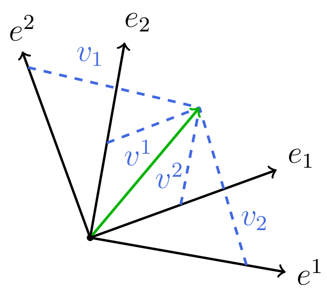


Figura 2: Diferentes tipos de componentes de uma sistema de coordenadas oblíquo. v^1 e v^2 são as componentes contravariantes, paralelas à base (e_1, e_2). As componentes covariantes v_1 e v_2, por sua vez, são perpendiculares á essa mesma base.

Mais importante ainda, essa distinção é útil não só pela sua interpretação geométrica, mas principalmente porque ela também se refere a maneira como essas componentes se comportam após uma mudança base, conforme veremos posteriormente. Esse tratamento matemático a respeito destas transformações é de grande praticidade, pois objetos matemáticos (que podem representar diversas grandezas físicas), se transformam de maneiras específicas, e compreender essas transformações nos auxilia a desenvolver teorias mais gerais.

Nas seções seguintes representarararemos um vetor como uma matriz coluna, como no exemplo a seguir:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \tag{1.0.1}$$

que tem componentes com indíces sobreescritos, ou como uma matriz linha:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \tag{1.0.2}$$

que tem índices subscritos. Embora a princípio não pareça haver nenhuma distinção matemática entre essas representações, o porquê de utilizarmos índices subscritos ou sobrescritos, e matrizes linha ou coluna para representar um vetor ficará claro mais adiante.

1.1 Transformação de base e coordenadas oblíquas

Dada uma base ortonormal original composta pelos vetores $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$, podemos obter uma nova base, possivelmente oblíqua , composta pelos vetores $\bar{\boldsymbol{e}}_1$ e $\bar{\boldsymbol{e}}_2$ a partir de uma matriz de transformação S. É possível encontrar uma expressão para a nova base a partir de um conjunto de quatro escalares $S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}$ e dos vetores da base original, conforme a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{e}}_1 &= S_{11}\boldsymbol{e}_1 + S_{12}\boldsymbol{e}_2 \\ \bar{\boldsymbol{e}}_2 &= S_{21}\boldsymbol{e}_1 + S_{22}\boldsymbol{e}_2 \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Ou, em notação matricial:

$$\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{e}}_1 & \bar{\boldsymbol{e}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{12} & S_{22} \end{pmatrix} \tag{1.1.2}$$

De maneira mais compacta:

$$\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{e}}_1 & \bar{\boldsymbol{e}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} S \tag{1.1.3}$$

Também podemos tomar o caminho inverso, e obter $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$ a partir de $\bar{\boldsymbol{e}}_1$ e $\bar{\boldsymbol{e}}_2$. Basta partir da equação anterior:

$$\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{e}}_1 & \bar{\boldsymbol{e}}_2\end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\end{pmatrix} \underbrace{SS^{-1}}_{I}$$

Portanto:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{e}}_1 & \bar{\boldsymbol{e}}_2\end{pmatrix} S^{-1} \tag{1.1.4}$$

Ou seja, podemos obter as bases originais a partir da multiplicação entre a matriz contendo as novas bases e a matriz de transformação inversa S^{-1}.

Exemplo *1.1*: Um exemplo simples de matriz de transformação é a matriz de rotação, escrita como:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Que corresponde a uma rotação por um ângulo θ no sentido anti-horário. A transformação inversa, por sua vez, é:

$$R^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Mas perceba também que ao fazer a substituição $\theta \to -\theta$ na matriz original, obtemos:

$$R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos -\theta & \sin -\theta \\ -\sin(-\theta) & \cos -\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Ou seja, a matriz inversa R^{-1} da transformação corresponde simplesmente uma rotação por um ângulo θ no *sentido horário*.

Agora podemos nos perguntar: como as componentes de um vetor mudam sob uma transformação de base? Em termos da base original, o vetor é expresso como:

$$\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2$$

Veja que quando escrito através desta base, o vetor tem componentes cartesianas x^1 e x^2. Mas também podemos escrevê-lo a partir do novo sistema de coordenadas como:

$$\boldsymbol{x} = \bar{x}^1\bar{\boldsymbol{e}}_1 + \bar{x}^2\bar{\boldsymbol{e}}_2$$

Que desta vez tem componentes $\bar{x}^1$ e $\bar{x}^2$. Já sabemos que podemos obter as novas bases a partir da multiplicação entre a matriz linha contendo as bases antigas e a matriz de transformação S. Partindo do pressuposto de que o vetor deve ser *invariante* sob a transformação de coordenadas, igualamos a expressão em forma matricial para o vetor $\boldsymbol{x}$ em ambas as bases, com a intenção de obter uma expressão de tranformação para as novas componentes:

$$\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{e}}_1 & \bar{\boldsymbol{e}}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}^1 \\ \bar{x}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1 \\ x^2\end{pmatrix} \tag{1.1.5}$$

Afinal, não importa qual a base sendo utilizada, a equação deve corresponder ao mesmo vetor. Agora, sabemos que $\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{e}}_1 & \bar{\boldsymbol{e}}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\end{pmatrix}S$, deste modo a expressão anterior fica:

$$S\begin{pmatrix}\bar{x}^1 \\ \bar{x}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^1 \\ x^2\end{pmatrix}$$

Porém, por meio da multiplicação pela matriz inversa reescrevemos a equação

$$\begin{pmatrix}\bar{x}^1 \\ \bar{x}^2\end{pmatrix} = S^{-1}\begin{pmatrix}x^1 \\ x^2\end{pmatrix} \tag{1.1.6}$$

Ou seja, dada a matriz de transformação S que relaciona as duas bases, podemos obter o valor das componentes $\bar{x}^1$ e $\bar{x}^2$ a partir da multiplicação da matriz inversa de transformação pelo vetor coluna que contém as componentes na base original. Deste modo, essas componentes recebem o nome de componentes *<u>contra</u>variantes*. É importante notar que neste tipo de transformação a mudança ocorre somente em relação as componentes do vetor e em como ela é expressa, e não em relação ao vetor em si, pois ele é o mesmo antes e após a transformação. Esse tipo de transformação é denominada *transformação passiva* por alguns autores, em contraponto à *transformação ativa*, na qual o próprio vetor sofre alterações, como em transformações lineares $S : V \to V$ do espaço vetorial.

Em nenhum momento foi posta a restrição de que as bases deveriam ser ortogonais, portanto podemos utilizar das mesmas ferramentas para trabalhar com coordenadas *oblíquas*. A figura seguinte mostra uma mudança de base de um sistema ortogonal para um sistema oblíquo. As linhas em azul representam as componentes do vetor no novo sistema de coordenadas:

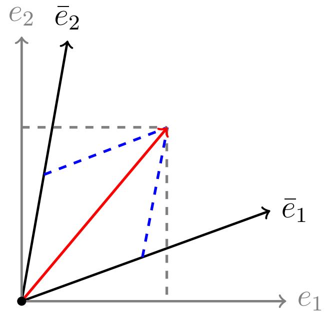


Figura 3: Transformação de base de um sistema ortogonal para um oblíquo.

Note, que a componente $\bar{x}^1$ do vetor, que é paralela ao eixo $\bar{e}_1$, não é perpendicular ao eixo $\bar{e}_2$, algo que não acontece em um sistema ortogonal, e nos sugere que em sistemas oblíquos podemos definir mais um tipo de projeção, que é a projeção ortogonal ao eixo, que veremos logo após o exemplo.

Exemplo *1.2*: Considere a matriz de transformação:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

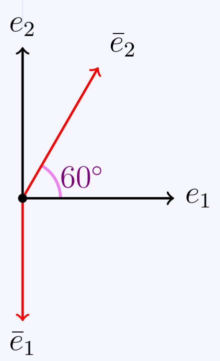
As bases se relacionam por:

$$\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{e}}_1 & \bar{\boldsymbol{e}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

O que gera as equações:

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= -e_2 \\ \bar{e}_2 &= \frac{1}{2} e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} e_2 \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Essa transformação corresponde a um sistema de coordenadas no qual o eixo e_1 sofre uma rotação de 90 graus no sentido horário, e o eixo e_2 sofre uma rotação de 30 graus também no sentido horário.



Tendo em mãos a matriz de transformação, podemos obter os valores das componentes neste novo sistema de coordenadas. A matriz inversa desta transformação é dada por:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, as novas componentes ficam:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Ao multiplicar as matrizes obtemos

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= \sqrt{3}x^1 - x^2 \\ \bar{x}^2 &= 2x^1 \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

Para ilustrar o resultado, tomemos como exemplo o vetor $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{e}_1$. Temos que $x^1 = 2$ e $x^2 = 0$. Assim, as componentes no novo sistema de coordenadas ficam:

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= 2\sqrt{3} \\ \bar{x}^2 &= 4 \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

Como neste novo sistema de coordenadas o vetor é representado como:

$$\boldsymbol{x} = \bar{x}^1\bar{\boldsymbol{e}}_1 + \bar{x}^2\bar{\boldsymbol{e}}_2$$

Temos:

$$\boldsymbol{x} = 2\sqrt{3}\bar{\boldsymbol{e}}_1 + 4\bar{\boldsymbol{e}}_2$$

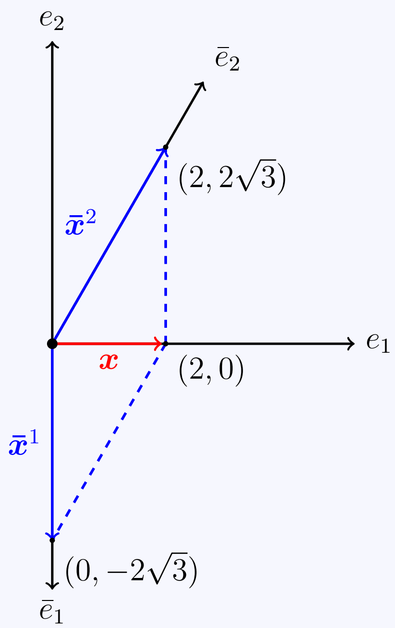
Para encontrar a representação de cada componente no sistema cartesiano basta reescrever $\bar{\boldsymbol{e}}_1$ e $\bar{\boldsymbol{e}}_2$ em termos da base antiga. Por exemplo,

$$\boldsymbol{x}^1 = x^1\bar{\boldsymbol{e}}_1 = x^1(-\bar{\boldsymbol{e}}_2) = -2\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2$$

E para a outra projeção, temos:

$$\boldsymbol{x}^2 = x^2\bar{\boldsymbol{e}}_2 = x^2(\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{e}_1 + 2\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2$$

Representando graficamente os vetores obtidos:



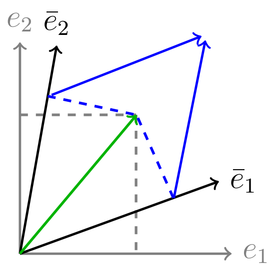
Por fim, para averiguar a resposta, basta reescrever $\boldsymbol{x}$ a partir de $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ e verificar se obtemos o vetor original $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{e}_1$. Temos:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = -2\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_1 + 2\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2 = 2\boldsymbol{e}_1$$

Ou seja, a nova representação está correta, pois é consistente com os valores da base original.

Vale ressaltar mais uma vez que em nenhum momento as transformações foram aplicadas sobre o vetor em si, mas sim sobre as bases, e nosso interesse era investigar a representação do mesmo vetor nestes diferentes sistema de coordenadas e como suas componentes de comportavam. Na realidade, é importante frisar que as próprias regras de transformação foram obtidas a partir da hipótese de que o vetor se mantém invariante, o que faz sentido em diversas aplicações de ordem prática: um vetor que representa uma força por exemplo, deve ser equivalente quaisquer que sejam o sistema de coordenadas que estejamos usando. Isto é, o vetor deve repreentar a mesma coisa, independentemente da nossa escolha de unidades, como N (SI) ou *dyn* (CGS), ou uso de sistema de coordenadas, como cartesianas ou polares.

Agora, veja (visualmente) o que acontece se tentarmos obter um vetor a partir de suas componentes ortogonais na base $\{\bar{\boldsymbol{e}}_1, \bar{\boldsymbol{e}}_2\}$:

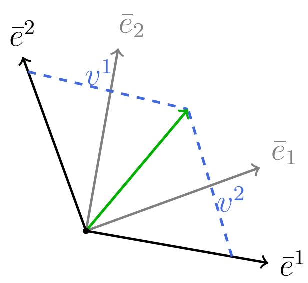


Claramente a soma vetorial das projeções não nos permite obter o vetor original. Não só isso, perceba que no caso do exemplo 2 também falhamos ao tentar obter o módulo do vetor calculando o produto escalar a partir das componentes contravariantes:

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\bar{x}^1\bar{x}^1 + \bar{x}^2\bar{x}^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$$

Contudo, sabemos que o resultado correto é $|\boldsymbol{x}| = 2$, pois o vetor é dado por $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{e}_1$ em coordenadas cartesianas. Deste modo, o objetivo agora consiste em buscar uma maneira adequada de representar as componentes ortogonais à base $(\bar{\boldsymbol{e}}_1, \bar{\boldsymbol{e}}_2)$ e desenvolver ferramentar apropriadas para trabalhar com vetores em coordenadas oblíquas, garantindo que as operações funcionem assim como em bases ortogonais.

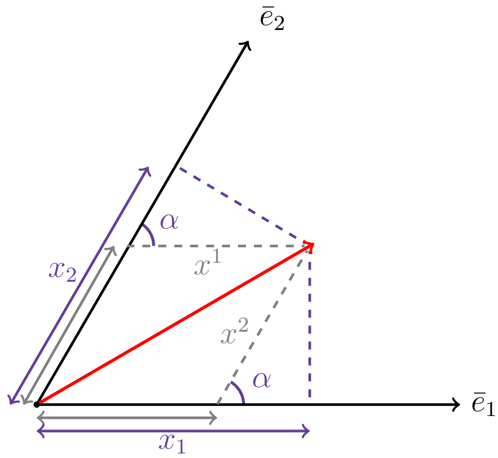
Felizmente existe uma maneira bem simples de alcançar este objetivo. As componentes $\bar{\boldsymbol{x}}^1$ e $\bar{\boldsymbol{x}}^2$ são paralelas a $\bar{\boldsymbol{e}}^1$ e $\bar{\boldsymbol{e}}^2$, respectivamente. Isso nos sugere que a fim de representar o vetor adequadamente através das novas componentes $\bar{\boldsymbol{x}}_1$ e $\bar{\boldsymbol{x}}_2$ podemos definir uma nova base $\{\bar{\boldsymbol{e}}^1, \bar{\boldsymbol{e}}^2\}$, cujos vetores são paralelos a essas componentes . Ou seja, como $\boldsymbol{x}_1 \perp \bar{\boldsymbol{e}}_2$ e $\boldsymbol{x}_2 \parallel \bar{\boldsymbol{e}}^1$, as bases $\bar{\boldsymbol{e}}^1$ e $\bar{\boldsymbol{e}}_2$ devem ser perpendiculares entre si. De maneira análoga, chegamos a mesma conclusão a respeito das bases $\bar{\boldsymbol{e}}^1$ e $\bar{\boldsymbol{e}}_2$. A seguinte representação visual mostra que se as componentes $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ forem expressas nessa base a soma vetorial resulta no vetor original, conforme desejado:



Podemos expressar a condição de perpendicularidade para as bases como:

$$
\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{e}}^{\mathbf{1}} \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{2}} &= 0 \\
\bar{\boldsymbol{e}}^{\mathbf{2}} \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{1}} &= 0
\end{aligned}
\tag{1.1.10}
$$

Vejamos agora como representar as magnitudes x_1 e x_2 em termos de x^1 e x^2. Se α representa o ângulo entre as bases $\bar{e}_1$ e $\bar{e}_2$, é possível representar geometricamente as componentes covariantes e contravariantes da seguinte maneira:



Assim, podemos rapidamente concluir que

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= \bar{x}^1 + \bar{x}^2 \cos\alpha \\
\bar{x}_2 &= \bar{x}^2 + \bar{x}^1 \cos\alpha
\end{aligned}
$$

Em seguida, devemos encontrar mais uma maneira de relacionar as bases covariantes e contravariantes, pois a condição de perpendicularidade nada nos diz sobre sua magnitude. Para isso, veja podemos representar o vetor na nova base, em função das componentes covariantes, como:

$$\boldsymbol{v} = \bar{x}_1 \bar{\boldsymbol{e}}^1 + \bar{x}_2 \bar{\boldsymbol{e}}^2$$

ou,

$$\boldsymbol{v} = (\bar{x}^1 + \bar{x}^2 \cos\alpha)\bar{\boldsymbol{e}}^1 + (\bar{x}^2 + \bar{x}^1 \cos\alpha)\bar{\boldsymbol{e}}^2$$

Se reescrevermos a expressão acima colocando as componentes em evidência, obtemos

$$\boldsymbol{v} = \bar{x}_1(\bar{\boldsymbol{e}}^1 + \bar{\boldsymbol{e}}^2\cos\alpha) + \bar{x}_2(\bar{\boldsymbol{e}}^2 + \bar{\boldsymbol{e}}^1\cos\alpha)$$

Em contrapartida, também já vimos que podemos representá-lo a partir das componentes contravariantes como:

$$\boldsymbol{v} = \bar{x}^1\bar{\boldsymbol{e}}_1 + \bar{x}^2\bar{\boldsymbol{e}}_2$$

Comparando as expressões, vemos que as bases se relacionam por:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{e}}^1 + \bar{\boldsymbol{e}}^2\cos\alpha = \bar{\boldsymbol{e}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{e}}^2 + \bar{\boldsymbol{e}}^1\cos\alpha = \bar{\boldsymbol{e}}_2 \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

Perceba que podemos calcular o produto escalar com $\bar{\boldsymbol{e}}_1$ na primeira equação e com $\bar{\boldsymbol{e}}_2$ na segunda, obtendo a segunda condição que define a base recíproca:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{e}}^1 \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_1 = 1 \\ \bar{\boldsymbol{e}}^2 \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_2 = 1 \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

Ou podemos tomar um caminho alternativo e solucionar o sistema, obtendo uma relação direta entre as bases:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{e}}^1 = \frac{\bar{\boldsymbol{e}}_1}{\sin^2\alpha} - \frac{\bar{\boldsymbol{e}}_2}{\tan\alpha\sin\alpha} \\ \bar{\boldsymbol{e}}^2 = \frac{\bar{\boldsymbol{e}}_2}{\sin^2\alpha} - \frac{\bar{\boldsymbol{e}}_1}{\tan\alpha\sin\alpha} \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

Você mesmo pode verificar que a solução é consistente com as condições obtidas.

Exemplo *1.3*: No exemplo anterior haviamos obtido as seguintes componentes contravariantes:

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= 2\sqrt{3} \\ \bar{x}^2 &= 4 \end{aligned}$$

E a base com a qual trabalhávamos era

$$\bar{\boldsymbol{e}}_1 = -\boldsymbol{e}_2$$
$$\bar{\boldsymbol{e}}_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_2$$

O ângulo formado entre as bases é $\alpha = 5\pi/6$, deste modo, as componentes *covariantes* ficam:

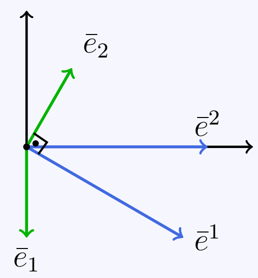
$$\bar{x}_1 = \bar{x}^1 + \bar{x}^2 \cos\frac{5\pi}{6} = 0$$
$$\bar{x}_2 = \bar{x}^2 + \bar{x}^1 \cos\frac{5\pi}{6} = 1$$

As bases, por sua vez:

$$\bar{\boldsymbol{e}}^1 = \frac{\bar{\boldsymbol{e}}_1}{\sin^2\alpha} - \frac{\bar{\boldsymbol{e}}_2}{\tan\alpha\sin\alpha} = 4\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} + 2\sqrt{3}\bar{\boldsymbol{e}}_2$$
$$\bar{\boldsymbol{e}}^2 = \frac{\bar{\boldsymbol{e}}_2}{\sin^2\alpha} - \frac{\bar{\boldsymbol{e}}_1}{\tan\alpha\sin\alpha} = 4\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{2}} + 2\sqrt{3}\bar{\boldsymbol{e}}_1$$

Em termos das coordenadas cartesianas, elas ficam:

$$\bar{\boldsymbol{e}}^1 = \sqrt{3}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{1}} - \boldsymbol{e}_2 \qquad \bar{\boldsymbol{e}}^2 = 2\boldsymbol{e}_1 \tag{1.1.14}$$



Se escrevermos o vetor em termos de suas componentes covariantes obtemos:

$$\boldsymbol{v} = \bar{x}_1\bar{\boldsymbol{e}}^1 + \bar{x}_2\bar{\boldsymbol{e}}^2 = 1\bar{\boldsymbol{e}}^2 \tag{1.1.15}$$

Ao expressar a nova base a partir dos versores cartesianos

$$\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{e}_1 \tag{1.1.16}$$

recuperamos a expressão original.

Agora, vejamos como as componentes covariantes do vetor se transformam. A matriz de transformação S, que gera um novo sistema $\{\bar{\boldsymbol{e}}_1, \bar{\boldsymbol{e}}_2\}$ de coordenadas covariantes também pode ser escrita a partir das projeções da base no plano cartesiano:

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{12} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{e}_1 & \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{e}_2 \\ \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{2}} \cdot \boldsymbol{e}_1 & \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{2}} \cdot \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \tag{1.1.17}$$

Ou seja, podemos escrever:

$$\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{e}}_1 & \bar{\boldsymbol{e}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{e}_1 & \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{2}} \cdot \boldsymbol{e}_1 \\ \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{e}_2 & \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{2}} \cdot \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \tag{1.1.18}$$

Agora, supondo que a base contravariante é obtida a partir da base cartesiana através de uma matriz de transformação T, temos: (Arrumar matriz T)

$$\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{e}}^1 \\ \bar{\boldsymbol{e}}^2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{e}_1 & \bar{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{e}_2 \\ \bar{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{2}} \cdot \boldsymbol{e}_1 & \bar{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{2}} \cdot \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \tag{1.1.19}$$

Resta agora obter uma relação entre a matriz T e a matriz S. Uma maneira simples de obter tal relação é através do cálculo do produto entre as matrizes T e S, fazendo uso das relações entre as bases covariantes e contravariantes, que foram obtidas anteriormente. O produto entre as matrizes é dado por:

$$TS = \begin{pmatrix} (\bar{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{e}_1)(\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{e}_1) + (\bar{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{e}_2)(\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{e}_2) & (\bar{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{e}_1)(\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{2}} \cdot \boldsymbol{e}_1) + (\bar{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{e}_2)(\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{2}} \cdot \boldsymbol{e}_2) \\ (\bar{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{2}} \cdot \boldsymbol{e}_1)(\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{e}_1) + (\bar{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{2}} \cdot \boldsymbol{e}_2)(\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{e}_2) & (\bar{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{2}} \cdot \boldsymbol{e}_1)(\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{2}} \cdot \boldsymbol{e}_1) + (\bar{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{2}} \cdot \boldsymbol{e}_2)(\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{2}} \cdot \boldsymbol{e}_2) \end{pmatrix}$$

Sabemos que base cartesiana é ortonormal, portanto $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0$ (e obviamente $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 1$). Essa informação, somada com as expressões que estabelecem a relação entre as bases covariantes e contravariantes, nos permite resolver as expressões na matriz. Através da condição $\bar{\boldsymbol{e}}^1 \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_1 = 1$, por exemplo, podemos calcular o resultado do primeiro elemento, pois podemos escreveros vetores $\bar{\boldsymbol{e}}^1$ e $\bar{\boldsymbol{e}}_1$ na base cartesiana como

$$\bar{\boldsymbol{e}}^1 = (\bar{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\bar{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2$$
$$\bar{\boldsymbol{e}}_1 = (\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2$$

Portanto, ao calcular o produto escalar a partir das expressões acima, obtemos a relação:

$$(\bar{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{e}_1)(\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{e}_1) + (\bar{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{e}_2)(\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{e}_2) = 1$$

Que é um dos elementos de (TS). Aplicando o mesmo procedimento sucessitivamente (Basta utilizar as três relações restantes: $\boldsymbol{e}^1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0$, $\boldsymbol{e}^2 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 1 = 0$ e $\boldsymbol{e}^2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 1$), concluímos que a matriz resultante é simplesmente a matriz identidade! Isto é,

$$TS = I$$

E por conseguinte, podemos concluir que:

$$T = S^{-1} \tag{1.1.20}$$

Ou seja, a matriz de transformação T é o inverso da matriz S. Assim, a base contravariante se transforma de maneira contrária à base covariante. Analogamente, as componentes covariantes do vetor se transformam de acordo com S, pois

$$\begin{pmatrix} \bar{x}^1 & \bar{x}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{e}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{e}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \tag{1.1.21}$$

Reescrevendo a expressão para a nova base:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}^1 & \bar{x}^2 \end{pmatrix} S^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix}$$

e finalmente concluímos que:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}^1 & \bar{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \end{pmatrix} S \tag{1.1.22}$$

***Exemplo** 1.4*: Voltaremos agora ao exemplo 3, a fim de mostrar que as relações matriciais obtidas são equivalentes aos resultados geométricos. Ao tentar obter a base contravariante a partir das relações matriciais

$$\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{e}}^1 \\ \bar{\boldsymbol{e}}^2 \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \tag{1.1.23}$$

encontramos

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{e}}^1 &= \sqrt{3}\boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e}_2 \\ \bar{\boldsymbol{e}}^2 &= 2\boldsymbol{e}_1 \end{aligned} \tag{1.1.24}$$

Que coincide com o resultado do exemplo anterior. Também haviamos calculado

$$\bar{x}_1 = \bar{x}^1 + \bar{x}^2 \cos\frac{5\pi}{6}, \qquad \bar{x}_2 = \bar{x}^2 + \bar{x}^1 \cos\frac{5\pi}{6}$$

Mas as componentes contravariantes são simplesmente,

$$\begin{aligned}\bar{x}^1 =& \sqrt{3}x^1 - x^2\\ \bar{x}^2 =& 2x^1\end{aligned}$$

Ou seja, as componentes covariantes, escritas em termos das componentes cartesianas, ficam

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 =& -x^2\\ \bar{x}_2 =& \frac{1}{2}x^1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2\end{aligned}$$

E portanto, fica claro que as componentes covariantes de fato se transformam de acordo com S:

$$\begin{pmatrix}\bar{x}_1 & \bar{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix} S = \begin{pmatrix}x^1 & x^2\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} \tag{1.1.25}$$

A introdução das componentes covariantes também resolve o problema do cálculo do módulo do vetor. Afinal, a norma de um vetor deve resultar em um escalar, que numericamente deve ser o mesmo qualquer que seja a base utilizada. Se definirmos a operação como:

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1 x^1 + x_2 x^2} \tag{1.1.26}$$

Obtemos os resultados corretos, independentes da escolha de base. Para o vetor $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{e}_1$ que foi utilizado previamente, por exemplo, temos:

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1 x^1 + x_2 x^2} = \sqrt{(2\sqrt{3}).0 + 4.1} = 2$$

Conforme o esperado. A demonstração nesse caso em particular no $\mathbb{R}^2$ com o qual trabalhamos é bem simples: veja que podemos escrever a expressão para a norma do vetor no plano cartesiano como

$$|\boldsymbol{x}|^2 = x_1 x_1 + x_2 x_2$$

Ou, em forma matricial:

$$|\boldsymbol{x}|^2 = \begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix} \tag{1.1.27}$$

Mas se usarmos as expressões de transformação encontradas, podemos escrever a expressão acima em termos das componentes covariates e contravariantes. Perceba que,

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \end{pmatrix} S^{-1}$$

e,

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \end{pmatrix}$$

Substituindo na (1.1.27), a expressão se torna:

$$|\boldsymbol{x}|^2 = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \end{pmatrix} S^{-1} S \begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \end{pmatrix}$$

Ou seja, a expressão para a norma fica simplesmente:

$$|\boldsymbol{x}|^2 = x_1 x^1 + x_2 x^2 \tag{1.1.28}$$

Isto é, se definirmos o produto escalar de dois vetores como o produto entre suas componentes covariantes e contravariantes de um vetor, ele se mantém invariante sob uma transformação qualquer de coordenadas, em decorrência do fato de que elas se transformam de maneira inversa.

1.2 Convenção de Einstein

Definição 1. *Índices que aparecem duas vezes em um produto indicam que há uma somatória implícita, cuja soma é realizada com respeito a esse mesmo índice.*

Usualmente os limites ficam subentendidos no contexto, caso contrário é feita uma indicação explícita sobre quais termos devem ser somados. Essa convenção basicamente nos diz que estas duas notações são equivalentes:

$$A_{ij} x_i \equiv \sum_i A_{ij} x_i \tag{1.2.1}$$

Como o índice i aparece uma vez em A_{ij} e outra em x_i, então é com respeito a ele que devemos realizar a soma. Os índices que aparecem somente uma vez comumente recebem o nome de **índices livres**, e aparecem em ambos os lados da equação. Note que os índices repetidos não aparecem no resultado final da expressão. No caso acima por exemplo, a resposta final só contém o índice j nos seus termos.

Também pode haver mais de um índice repetido na expressão, isso significa que há múltiplos somatórios implícitos, como neste caso:

$$A_{ij}B_{jk}C_{ik} = \sum_i \sum_j \sum_k A_{ij}B_{jk}C_{ki}$$

Assim, fica claro que essa convenção simplifica significativamente algumas expressões que de outro modo seriam muito mais custosas de se representar.

! Veja que a relação $a_{ij}(x_i+y_i) = a_{ij}x_i+a_{ij}y_i$ é válida, pois embora o índice i apareça três vezes ao longo de toda a equação, ele aparece exatamente duas vezes em cada termo, isto é, nos produtos $a_{ij}x_i$ e $a_{ij}y_i$, e nessa caso j se trata de um índice livre. Agora, perceba também que em geral não é correto aplicar a distributiva em expressões como a seguinte: $a_{ij}(x_i + y_j) \neq a_{ij}x_i + a_{ij}y_j$. Além disso, é importante lembrar que ao contrário dos índices repetidos, índices livres não podem ser substituído por outras letras, como neste exemplo $A_{ij}x_i \neq A_{ik}x_i$, se $k \neq j$.

1.3 Delta de Kronecker

Definição 2. *O Delta de Kronecker é definido como:*

$$\delta_{ij} = \delta_i^j = \delta^{ij} = \begin{cases} 0 \ se \ i \neq j \\ 1 \ se \ i = j \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Sendo i e j números naturais em geral.

Podemos escrever o produto escalar a partir do Delta de Kronecker e com a convenção de Einstein como

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \delta_{ij}x^i y_j$$

Ou representar o traço de uma matriz:

$$\mathrm{Tr}\,(A) = \delta_{ij}A_{ij}$$

O uso do Delta de Kronecker, juntamente com a convenção de Einstein, pode nos auxiliar na hora de escrever algumas expressões, tornando o cálculo mais imediatado ou a notação mais compacta. As equações (1.1.10) e (1.1.12), que estabelecem as relações entre as bases, por exemplo, podem ser escritas como uma só fórmula:

$$\boldsymbol{e_i} \cdot \boldsymbol{e^j} = \delta_{ij} \tag{1.3.2}$$

Ou seja, essa ferramenta no permite reescrever a informação anteriormente contida em *quatro* equações em uma só expressão desta vez.

1.4 Símbolo de Levi-Civita

Definição 3. *O símbolo de Levi-Civita é definido em três dimensões como:*

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 \ \textit{se } ijk \textit{ é uma permutação par dos inteiros 1,2 e 3} \\ -1 \ \textit{se } ijk \textit{ é uma permutação ímpar dos inteiros 1,2 e 3} \\ 0 \ \textit{se } i = j, \ j = k \textit{ ou } i = k \end{cases} \tag{1.4.1}$$

Com i,j e k representando números naturais de 1 *até* 3.

Uma permutação é dita par (ou ímpar) se o número de inversões ente dois termos adjacentes na sequência que leva do estado final ao inicial é par (ou ímpar). A sequência 312 é par, pois pode ser obtida a partir da sequência 123 através dos passos $123 \to 132 \to 312$. Já a sequência 321 é ímpar, pois é obtida por meio de $123 \to 132 \to 312 \to 321$. Assim, os valores não-nulos do símbolo de Levi-Civita são

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} &= 1 \\ \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} &= -1 \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

A seguinte figura pode ser útil para determinar a paridade das sequências no caso em que o símbolo de Levi-Civita possui três índices.

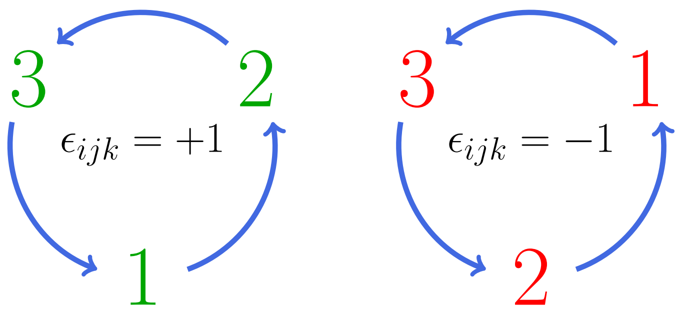


Figura 4: Permutações pares a esquerda e ímpares a direita.

Também é possível defini-lo em n dimensões de maneira análoga, com os valores dados a partir da paridade da sequência formada pelos índices. Nesse caso a figura acima deixa de ser útil, mas podemos escrever a sequência inicial e final, ligando por meio de uns traços os números iguais. A paridade do número de intersecções é a mesma paridade da permutação. Na figura seguinte é obtida a paridade da sequência 51342 partindo de 12345:

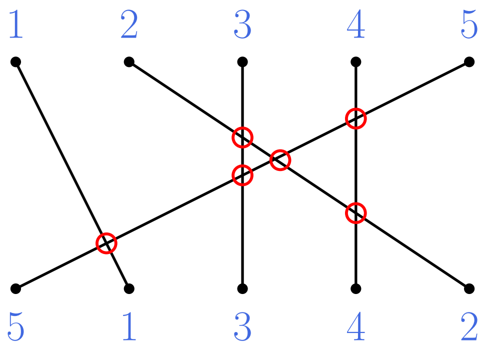


Figura 5: O número de intersecções indica a paridade da permutação. Como há 6 intersecções a permutação é par.

Por ora o símbolo de Levi-Civita som três índices será o suficiente, pois nosso tratamento nesse capítulo se limita ao $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Trataremos agora de um exemplo cujo uso do símbolo se mostra bem prático. A primeira utilidade evidente do símbolo é no cálculo de determinantes e produtos vetoriais.

***Exemplo** 1.5*: O determinante de uma matriz 3 x 3 é dado por:

$$\det A = \begin{aligned} &a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + \\ &a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + \\ &a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Olhando para os índices coloridos na segunda posição de cada sequência contendo o produto de a, vemos que os termos são positivos na sequências 123, 231 e 312. E negativos para as sequências 132, 213 e 321. Assim, podemos reescrever a determinante de uma matriz de maneira muito mais compacta utilizando o símbolo de Levi-Civita e a convenção de Einstein:

$$\det A = \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} \tag{1.4.4}$$

Podemos aplicar esse resultado no cálculo do produto vetorial entre dois vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ em coordenadas cartesianas. Sabemos que:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix} \tag{1.4.5}$$

Portanto, utilizando a nova notação, reescrever a expressão para o produto vetorial de maneira bem simples:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \epsilon_{ijk} x^j y^k \boldsymbol{e}_i \tag{1.4.6}$$

1.5 Identidade de Levi-Civita

Existe uma relação muito útil entre ϵ e δ, através da qual podemos deduzir outras propriedades importantes ou utilizar para simplificar diversos cálculos vetoriais.

Resultado 1. ***Identidade de Levi-Civita***

Vale a seguinte relação para o símbolo de Levi-Civita e o Delta de Kronecker:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \tag{1.5.1}$$

Com a soma realizada com respeito ao índice i, de acordo com a convenção de Einstein.

Note que o único índice repetido é o índice i, e só aparece no lado esquerdo da equação. Já os índices j, k, l e m se tratam de índices livres, aparecendo em ambos os lados da equação.

Exemplo *1.6*: Utilizaremos o resultado para provar a seguinte identidade vetorial:

$$\boldsymbol{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\boldsymbol{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\boldsymbol{z} \tag{1.5.2}$$

Podemos escrever a expressão acima utilizando o símbolo de permutação:

$$[\boldsymbol{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z})] = \epsilon_{ijk} x_j (\mathbf{y} \times \mathbf{z})_k \boldsymbol{e}_i \tag{1.5.3}$$

A k-ésima componente do produto vetorial de $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ é obtida de maneira análoga (Note que dessa vez buscamos o escalar, portanto não colocamos o versor na expressão):

$$(\mathbf{y} \times \mathbf{z})_k = \epsilon_{klm} y_l z_m \tag{1.5.4}$$

Substituindo na expressão inicial, encontramos

$$\boldsymbol{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} x_j y_l z_m \boldsymbol{e}_i$$

Mas note que $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij}$, portanto podemos reescrever a expressão acima

$$\boldsymbol{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \epsilon_{kij}\epsilon_{klm} x_j y_l z_m \boldsymbol{e}_i$$

e utilizar a identidade de Levi-Civita, a fim de obter

$$\boldsymbol{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) x_j y_l z_m \boldsymbol{e}_i$$

Aplicando a distributiva, percebemos que para a primeira expressão

$$\delta_{il}\delta_{jm} x_j y_l z_m \boldsymbol{e}_i$$

Os termos das somas são não-nulos se, e somente se $l = i$ e $m = j$, o que faz com que a expressão se torne

$$\delta_{il}\delta_{jm} x_j y_l z_m \boldsymbol{e}_i = x_j z_j y_i \boldsymbol{e}_i$$

Mas a soma $x_j z_j$ é simplesmente o produto escalar $\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$ e $y_i \boldsymbol{e}_i$ é o vetor $\boldsymbol{y}$, ou seja, podemos reescrever essa expressão simplesmente como:

$$\delta_{il}\delta_{jm} x_j y_l z_m \boldsymbol{e}_i = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\boldsymbol{y} \tag{1.5.5}$$

E fazendo o mesmo para o segundo termo contendo os deltas, achamos

$$\delta_{im}\delta_{jl} x_j y_l z_m \boldsymbol{e}_i = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\boldsymbol{z} \tag{1.5.6}$$

O que finalmente nos leva à identidade desejada:

$$[\boldsymbol{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z})] = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) x_j y_l z_m \boldsymbol{e}_i = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\boldsymbol{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\boldsymbol{z} \tag{1.5.7}$$

Resumo

- Vetores contravariantes se transformam de maneira inversa a base, isto é, de acordo com a matriz de transformação inversa
- Vetores covariantes se transformam da mesma maneira que a base, isto

é, de acordo com a mesma matriz de transformação

- As bases recíprocas obedecem a relação $\boldsymbol{e_i} \cdot \boldsymbol{e^j} = \delta_{ij}$
- A norma de um vetor em uma base oblíqua é dada por $\|v\| = v_i v^i$
- Índices repetidos em uma expressão indicam uma soma, e aparecem em somente um dos lados da igualdade. Índices livres aparecem em ambos os lados da igualdade
- O Delta de Kronecker e o símbolo de Levi-Civita se relacionam através da identidade $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$

Problemas 1

Problema 1.1: Considere uma matriz de transformação S que age sobre a base cartesiana $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, gerando uma nova base oblíqua $(\bar{\boldsymbol{e}}_1, \bar{\boldsymbol{e}}_2)$:

$$\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{e}}_1 & \bar{\boldsymbol{e}}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

i) Esboce a nova base no plano cartesiano.

ii) Considere agora um vetor $\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{e}_1 + \sqrt{3}\boldsymbol{e}_2$. Encontre as componentes contravariantes na nova base. Em seguida, faça um esboço das componentes.

iii) Encontre base recíproca e as componentes covariantes. Faça novamente um esboço da nova base e das componentes.

Problema 1.2: Suponha que a matriz de transformação S agora é escrita em forma geral como:

$$S = \begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix} \tag{1.5.8}$$

Mostra que a maneira alternativa de escrever a expressão de transformação das componentes covariantes

$$\bar{x}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} x_i \tag{1.5.9}$$

é válida. Faça o mesmo para a expressão das componentes contravariantes:

$$\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} x^i \tag{1.5.10}$$

Problema 1.3: Verifique as seguintes identidades para o Delta de Kronecker e para o símbolo de Levi-Civita:

- i) $\delta_{ij} x_i = x_j$
- ii) $\delta_{ii} = 3$
- iii) $\delta_{ij}\delta_{ik} = \delta_{jk}$
- iii) $\delta_{ij}\epsilon_{ijk} = 0$
- iv) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijm} = 2\delta_{km}$
- v) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$

Problema 1.4: Mostre que os elementos de uma matriz $C_{m\times n}$, resultante da multiplicação entre uma matriz $A_{m\times p}$ e uma matriz $B_{p\times n}$ são $c_{ij} = a_{ik}b_{kj}$. Com $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., q$ e $k = 1, ..., p$.

Problema 1.5: Prove, utilizando a fórmula obtida para determinantes de matrizes 3x3, que vale a propriedade:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \tag{1.5.11}$$

Use a relação:

$$\epsilon_{ijk}b_{li}b_{mj}b_{nk} = \epsilon_{lmn}\det(B) \tag{1.5.12}$$

Tente se convercer do porquê desta relação ser verdadeira.

Problema 1.6: Utilizando o símbolo de Levi-Civita e o Delta de Kronecker, mostre que prodemos escrever o produto triplo como:

$$\boldsymbol{x}\cdot(\mathbf{y}\times\mathbf{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \tag{1.5.13}$$

Problema 1.7: Verifique que

$$(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{z}) = \begin{vmatrix} \mathbf{x}\cdot\mathbf{w} & \mathbf{x}\cdot\mathbf{z} \\ \mathbf{y}\cdot\mathbf{w} & \mathbf{y}\cdot\mathbf{z} \end{vmatrix} \tag{1.5.14}$$

Problema 1.8: Tome ϕ como um escalar. Mostre que:

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\phi) = 0 \tag{1.5.15}$$

Problema 1.9: Obtenha as identidades

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v} \tag{1.5.16}$$

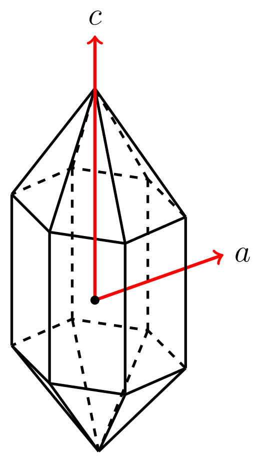
e

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}) \tag{1.5.17}$$

2 Tensores

É comum, durante a construção de muitos modelos, tratarmos diversos materiais como isotrópicos, isto é, consideramos que suas propriedades, como condutividade elétrica e térmica, tensão e a polarização, são independentes da sua orientação, pois num primeiro momento isso nos permite descrever os fenômenos de maneira mais simples. Contudo, muitos materiais apresentam a propriedade de *anisotropia*, que é basicamente o oposto da isotropicidade: suas propriedades variam de acordo com a direção.

Naturalmente, como o problema se torna mais complícado, devemos refinar nossa maneira de estudá-lo. Faz-se necessário o uso de ferramentas mais poderosas, e com esse intuito podemos introduzir um novo objeto denominado *tensor*, que é basicamente uma extensão do conceito de escalares e vetores. Há diversas maneiras de defini-los e interpretá-los, o que pode variar de acordo com seu campo de interesse. E embora a princípio todas essas interpretações pareçam completamente diferentes, é possível mostrar que elas são equivalentes. Além disso, suas aplicações não se limitam somente ao estudo de materiais e suas propriedades. Na realidade eles possuem um domínio de aplicação é bem mais amplo, que vai desde a álgebra até a relatividade geral e a computação.



Uma situação física na qual podemos ver que o uso de tensores se mostra útil é no estudo da condutividade térmica em uma placa de quartzo. Um arranjo experimental que demonstra o fenômeno pode ser contruído a partir de duas seções transversais removidas do cristal, uma ortogonal ao eixo c e outro ortogonal ao eixo a. Ao utilizar um filme de cristal líquido, colado à placa de quartzo obtida, é possível monitorar a distribuição de temperatura ao longo da placa. Verifica-se experimentalmente que a condutividade perpendicular ao eixo c do cristal é menor do que a condutividade paralela ao eixo.

No corte perpendicular à c a distribuição é homogênea, portanto as curvas isotérmicas tem forma circular. Já na seção transversal paralela à c a distribuição de temperatura obtida tem uma forma elíptica, o que mostra que a a condutividade térmica apresenta valores distintos para os dois eixos no plano, no caso, a condutividade perpendicular ao eixo c do cristal é menor do que a condutividade paralela ao eixo, o que faz com que o cristal seja aquecido mais lentamente na direção do eixo c.

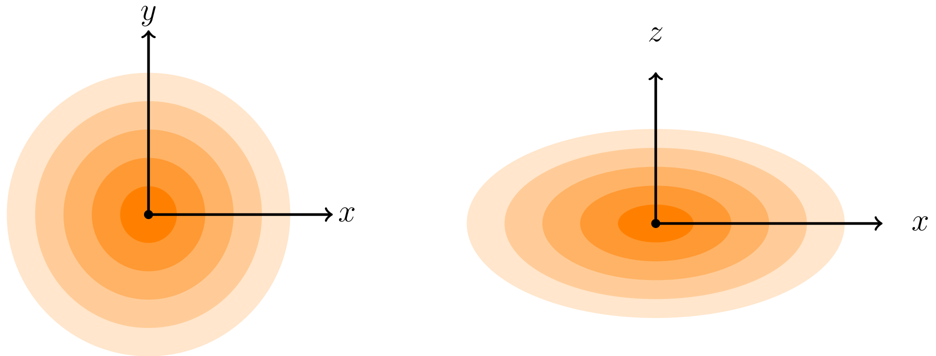


Figura 6: Distribuição de temperatura na placa de quartzo. Regiões de mesma cor indicam pontos isotérmicos. A distribuição a esquerda representa o corte ortogonal ao eixo c, que corresponde ao plano xy. A distribuição à direita representa a distribuição de temperaura na seção paralela à c, que corresponde aos eixos zx ou zy.

Na situação isotrópica, a relação entre o fluxo de calor Φ e a temperatura é dada por:

$$\mathbf{\Phi} = k\boldsymbol{\nabla} T \tag{2.0.1}$$

Onde k, a condutividade térmica, é simplesmente um escalar. Agora, se a situação é anisotróprica, claramente, esta expressão não é mais válida se k é um escalar. Afinal, se o calor de distribui de maneira diferente de acordo com cada direção, devemos ter uma expressão de fluxo para cada componente. A equação para a componente x do fluxo por exemplo, pode ser escrita como:

$$\mathbf{\Phi}_x = k_{xx}\boldsymbol{\nabla}_x T = k_{xx}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{x}}$$

Para o eixo y:

$$\mathbf{\Phi}_y = k_{yy}\boldsymbol{\nabla}_y T = k_{yy}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{y}}$$

Com $k_{xx} = k_{yy}$, pois as condutividades são iguais. E para o eixo z, também temos uma expressão similar

$$\mathbf{\Phi}_z = k_{zz}\boldsymbol{\nabla}_z T = k_{zz}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$$

Mas dessa vez com $k_{zz} \neq k_{xx} = k_{yy}$. Isso nos sugere que a expressão para o fluxo pode ser escrita simplesmente como:

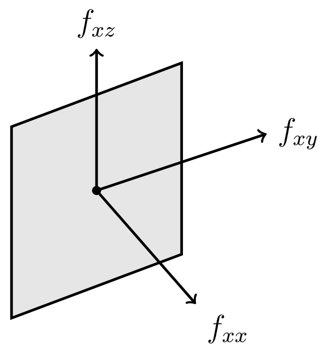
$$\mathbf{\Phi} = K\boldsymbol{\nabla}T \tag{2.0.2}$$

Onde K pode ser representado por uma matriz! Em forma matricial, a equação fica

$$\begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}_x \\ \mathbf{\Phi}_y \\ \mathbf{\Phi}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & k_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nabla}_x T \\ \boldsymbol{\nabla}_y T \\ \boldsymbol{\nabla}_z T \end{pmatrix} \tag{2.0.3}$$

Desta vez, a expressão é condizente a observação experimental, pois nos permite obter componentes com valores distintos a partir do gradiente de temperatura. A quantidade de K é denomidana *tensor de condutividade térmica*. As componentes fora da diagonal principal são nulas simplesmente devido á natureza do problema, pois trabalhamos com um exemplo bem específico. O tensor pode ter valores diferentes para cada um dos seus nove elementos. Além disso **não** é correto dizer que um tensor é uma matriz. Na realidade tensores possuem características próprias bem definidas que nos permite indentificá-los, conforme veremos mais adiante.

Vejamos agora uma outra situação na qual também podemos utilizar um tensor. Considere um bloco cúbico. Um ponto em seu interior sofre a ação de forças internas em diversas direções. Imagine agora um corte transversal do cubo, ortogonal ao eixo x, conforme na figura ao lado. Naturalmente, há ação de uma força F_x, na mesma direção do eixo x. Contudo, também há a presença de forças F_y e F_z tangenciais ao plano yz, que são geradas pela *tensão de cisalhamento*.



Esse tipo de força pode fazer com que camadas de um material se desloquem paralelamente umas às outras, e pode ser responsável pela ruptura do solo, por exemplo.

Tentaremos agora equacioná-las. Chamaremos a área da seção acima como $A_x = \Delta y \Delta z$. A força na direção x, por sua vez, tem módulo f_{xx}. Como a tensão é simplesmente a força aplicada por unidade de área, podemos escrever a tensão na face x devido à componente f_{xx} como

$$\sigma_{xx} = \frac{f_{xx}}{A_x}$$

Onde o primeiro índice de τ indica o eixo ortogonal ao plano e o segundo índice indica a direção na qual a força age. Agora, se considerarmos a componente f_{xy}, a expressão para o stress é

$$\sigma_{xy} = \frac{f_{xy}}{A_x}$$

E por fim, para a força agindo na direção z:

$$\sigma_{xz} = \frac{f_{xz}}{A_x}$$

O mesmo pode ser feito para as outras faces, de tal modo que encontramos um conjunto de nove quantidades no total:

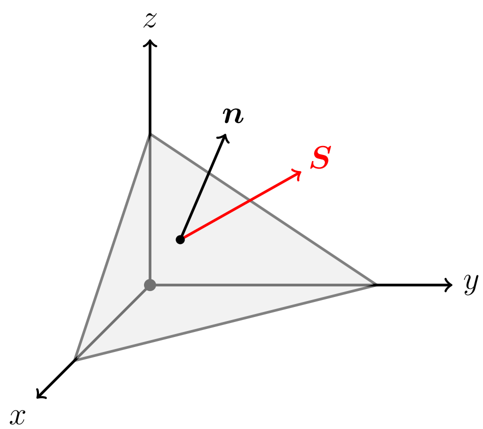
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{2.0.4}$$

Se escolhermos uma seção transversal arbitrária, como a da figura seguinte, que possui um vetor unitário normal $\boldsymbol{n}$ à superfície, podemos escrever a componente x da força resultante como:

$$\Delta F_x = \sigma_{xx}A_x + \sigma_{xy}A_y + \sigma_{xz}A_z \tag{2.0.5}$$

Dividindo a equação acima por A_n, a área da face ortogonal ao vetor normal, obtemos:

$$S_x = \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z \tag{2.0.6}$$



Pois, em módulo, a componente i do vetor normal é $n_i = A_i/A_n$. Ou seja, fazendo isso para todas as direções, obtemos a seguinte equação matricial:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{S}_x \\ \boldsymbol{S}_y \\ \boldsymbol{S}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{n}_x \\ \boldsymbol{n}_y \\ \boldsymbol{n}_z \end{pmatrix} \tag{2.0.7}$$

Ou,

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\sigma n} \tag{2.0.8}$$

Ou seja, precisamos de uma grandeza com 9 quantidades para descrever completamente o estado do cubo. O tensor $\boldsymbol{\sigma}$ é comumente chamado de *tensor de tensões*.

2.1 Definição

Introduziremos agora a abordagem clássica de tensores, que os define a partir da maneira como suas componentes se transformam sob uma mudança de coordenadas. A definição moderna é mais sofisticada, e nos permite trabalhar com resultados que possuem um maior grau de rigor e generalidade, além de fornecer algumas interpretações geométricas úteis. A abordagem convencional, por sua vez, é mais simples, e é fácil enxergá-la como uma extensão de conceitos já bem estabelecidos - a custo de certo rigor. Em situações mais práticas, também pode ser bem mais conveniente utilizar o tensor com base em suas componente, por isso esta abordagem ainda é amplamente utilizada, como na cristalografia. Não só isso, uma certa proficiência no método das componentes pode tornar a construção moderna de tensores mais intuitiva.

2.1.1 Tensores de primeira ordem

Podemos agora retormar a discussão da primeira seção. Havíamos visto que as componentes *contravariantes* de um vetor se transformam de maneira contrária a base, enquanto as componentes *covariantes* se transformam da mesma maneira.

Definição 4. *Considere uma transformação do tipo $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, ..., x^n)$, que é diferenciável e possui inversa $x^i = x^i(\bar{x}^1, ..., \bar{x}^n)$. Um vetor **contravariante** é todo objeto cujas coordenadas se transformam de acordo com*

$$\bar{v}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} v^r \tag{2.1.1}$$

*Um vetor **covariante** por sua vez é todo objeto cujas coordenadas se transformam de acordo com*

$$\bar{v}_i = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} x_r \tag{2.1.2}$$

Um vetor é chamado de tensor de primeira ordem. Escalares por sua vez são tensores de ordem zero.

Para se lembrar das fórmulas acima, perceba que o índice livre i sempre acompanha a variável barrada. Além disso, se o vetor é **contravariante** os índices ficam **em cima** e a variável barrada se encontra no "numerador". Para o vetor **covariante** os índices ficam **embaixo**, e a variável barrada no "denominador". Você pode também verificar que essa definição algébrica é consistente com todos os cálculos feitos no primeiro capítulo.

***Exemplo** 2.1*: Podemos mostrar que os diferenciais totais de uma função se transformam de maneira contravariante. O resultado é impediato pois a transformação de coordenadas é dada por $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, ..., x^n)$, logo o diferencial total vale

$$\mathrm{d}\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 + ... + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^n}\mathrm{d}x^n = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j \tag{2.1.3}$$

Conclúimos daí que as componentes de vetores tagentes $v_i = dx^i/dt$ à uma curva $x(t)$ também são contravariantes. Agora, mostraremos que o gradiente é um vetor covariante. Imagine que o operador é aplicado sobre uma função escalar f. Sua i-ésima componente é dada por:

$$\bar{\partial}_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^i} \tag{2.1.4}$$

Ao aplicar a regra da cadeia, podemos reescrever a componente acima como

$$\bar{\partial}_i f = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\partial_j f$$

ou seja, os operadores se relacionam por

$$\bar{\partial}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\bar{\partial}_j \tag{2.1.5}$$

o que estabelece o caráter covariante do gradiente.

! O produto vetorial $\boldsymbol{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ na realidade **não** se trata de um vetor. Para mostrar isso, considere uma transformação de reflexão dos eixos, na qual $\bar{x}^i = -x^i$, isto é $\partial\bar{x}^i/\partial x^i = -\delta_{ij}$. As componentes de $\boldsymbol{c}$ são dadas por $c_i = \epsilon_{ijk}a_j b_k$. Se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são vetores, então suas componentes se transformam de acordo com $\bar{a}_i = -a_i$ e $\bar{b}_i = -b_i$. Assim, temos que $\bar{c}_i = \epsilon_{ijk}\bar{a}_j\bar{b}_k = \epsilon_{ijk}(-a_j)(-b_k) = c_i$. Ou seja, as componentes c_i do produto vetorial não se transformam de acordo com a lei de transformação de vetores covariantes ou contravariantes. Nesta transformação em particular, o vetor $\boldsymbol{c}$ também sofre uma reflexão, assim como as bases! Esse tipo de vetor recebe o nome de *pseudo-vetor* ou *vetor axial*.

Dependendo do tipo de cálculo a ser feito, utilizar a Jacobiana pode ser bem prático, como no exemplo seguinte.

***Exemplo** 2.2*: Suponha que $\boldsymbol{v} = (2x^1, 3x^2)$ é um vetor contravariante em $\mathbb{R}^2$, expresso em termos do sistema de coordenadas x^i. Calcule o valor das componentes $\boldsymbol{v}^i$ se é feita uma transformação do tipo:

$$\begin{aligned}\bar{x}^1 &= x^1 x^2 \neq 0 \\ \bar{x}^2 &= \frac{x^1}{x^2}\end{aligned}$$

Em seguida, repita os cálculos e encontre as componentes $\bar{v}_i$, desta vez considerando o vetor como covariante.

A Jacobiana da transformação é

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & x^1 \\ \dfrac{1}{x^2} & -\dfrac{x^1}{(x^2)^2} \end{pmatrix} \tag{2.1.6}$$

As componentes são

$$\bar{v}^1 = \frac{\partial\bar{x}^1}{x^1}v^1 + \frac{\partial\bar{x}^1}{x^2}v^2 \tag{2.1.7}$$

Substituindo pelos ementos da Jacobiana,

$$\begin{aligned}\bar{v}^1 &= x^2(2x^1) + x^1(3x^2) = 5x^1x^2 \\ \bar{v}^2 &= \frac{1}{x^2}(2x^1) - \frac{x^1}{(x^2)^2}(3x^2) = -\frac{x^1}{x^2}\end{aligned}$$

Ou,

$$\bar{v}^1 = 5\bar{x}^1, \qquad \bar{v}^2 = -\bar{x}^2$$

Agora, para encontrar as derivadas inversas, basta inverter a Jacobiana:

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{x^2} & x^2 \\ \dfrac{1}{x^1} & -\dfrac{(x^2)^2}{x^1} \end{pmatrix} \tag{2.1.8}$$

Assim, as componentes são

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= \frac{1}{2x^2}(2x^1) + \frac{1}{2x^1}(3x^2) \\ \bar{v}_2 &= \frac{x^2}{2}(2x^1) - \frac{(x^2)^2}{2x^1}(3x^2) \end{aligned}$$

ou,

$$\bar{v}_1 = \bar{x}^2 + \frac{3}{2\bar{x}^2}, \qquad \bar{v}_2 = \bar{x}^1 - \frac{3\bar{x}^1}{2(\bar{x}^2)^2}$$

Também seria interessante mostrar que essa nova definição de covariância e contravariância nos permite obter as mesmas interpretações geométricas do primeiro capítulo. Podemos fazer isso escrevendo um vetor $\boldsymbol{v}$ em um sistema original de coordenadas (x^1, x^2), com base covariante $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$. Como construímos o vetor como $\boldsymbol{v} = a^r \boldsymbol{e_r}$, as componentes a^r claramente são paralelas aos eixos. Basta agora mostrar como elas se transformam, isto é, que são covariantes. Num novo sistema de coordenadas $\bar{x}_j = \bar{x}_j(x_1, x_2)$ a expressão para o vetor fica

$$\boldsymbol{v} = \bar{a}^r \boldsymbol{\bar{e}_r} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^r} \bar{a}^r \boldsymbol{e_i}$$

Mas originalmente haviamos escrito que $\boldsymbol{v} = a^i \boldsymbol{e_i}$, podemos estabelecer a igualdade

$$a^i \boldsymbol{e_i} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^r} \bar{a}^r \boldsymbol{e_i}$$

Ou seja, a componente contravariante se transforma de acordo com:

$$\bar{a}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} a^r$$

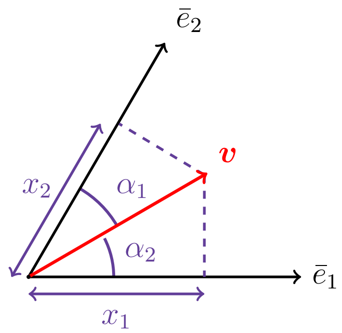
o que nos permite concluir que a componente é contravariante. Agora tentaremos mostrar que ao definir as componentes $\boldsymbol{e^1}$ e $\boldsymbol{e_2}$ como perpendiculares aos eixos $\boldsymbol{e_2}$ e $\boldsymbol{e^1}$, respectivamente, poderemos resgatar as leis de transformação das componentes covariantes. Se chamarmos o ângulo formado entre o vetor $\boldsymbol{v}$ e o eixo $\boldsymbol{e}_i$ de θ_i, o valor da projeção ortogonal do vetor no eixo $\boldsymbol{e}_i$ é

$$a_i = \|v\|\|e_i\|\cos\theta_i = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_i$$

No novo sistema de coordenadas, a componente fica

$$\bar{a}_r = \boldsymbol{v}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_r = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_r) = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}a_i$$

Mostramos então que as componentes a_i, quando definidas como as projeções ortogonais ao vetor $\boldsymbol{v}$, são covariantes.



Na realidade, ainda que o desenvolvimento do primeiro capítulo tenha sido contruído em torno de situações bem específicas e não se assemelha a construção que estamos fazendo agora, as ferramentas que estamos desenvolvendo nos permite obter os mesmos resultados anteriores. A matriz de transformação S do primeiro capítulo por exemplo, é simplesmente a matriz Jacobiana J que usamos no último exercício. O problema 1.2 por sua vez nos mostra que as transformações também obedeciam as leis de transformação covariante e contravariante que definimos nesta seção!

2.1.2 Tensores de segunda ordem

Definição 5. *Um tensor* ***contravariante*** *de segunda ordem é todo objeto cujas coordenadas se transformam de acordo com*

$$\bar{T}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^s}T^{rs} \tag{2.1.9}$$

Já um tensor ***covariante*** *de segunda ordem obedece a lei de transformação*

$$\bar{T}_{ij} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}T_{rs} \tag{2.1.10}$$

Por fim, um tensor ***misto*** *de segunda ordem se transforma conforme*

$$\bar{T}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}T^r_s \tag{2.1.11}$$

Exemplo *2.3*: Mostre que o delta de Kronecker δ^i_j é um tensor misto de segunda ordem, mas δ^{ij} e δ_{ij} em geral não são tensores. Isto é, numericamente δ^i_j tem o mesmo valor em todo sistema de coordenadas, o que não acontece para os outros dois tensores.

Escrevendo a lei de transformação para o tensor misto:

$$\bar{\delta}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\delta^r_s$$

Vemos que os termos não nulos são aqueles para os quais $r = s$, pela definição de δ^r_s, portanto

$$\bar{\delta}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^j} = \delta^i_j$$

Ao tentar fazer o mesmo para o tensor covariante obtemos

$$\bar{\delta}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^s}\delta^{rs} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^s}$$

Uma expressão que não necessariamente coincidirá com a definição $\bar{\delta}^{ij} = 1$ se $i = j$ e $\bar{\delta}^{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Se ambos os índices variam de 1 até n podemos interpretar um tensor como uma matriz $\boldsymbol{T}$ de dimensões $n \times n$. Isso é particularmente útil pois podemos reescrever as equações de transformação em forma matricial, que deixa muitos cálculos mais imediatos. Se utilizarmos a notação $J_{ij} = \partial \bar{x}^i / \partial x^j$ a equação (2.1.9) pode ser reescrita como

$$\bar{T}^{ij} = J_{ir}T^{rs}J_{js}$$

Podemos reescrever J_{js} como um elemento da transposta da jacobiana J^T_{sj}, pois assim podemos interpretar o produto $T^{rs}J_{js} = T^{rs}J^T_{sj}$ como o elemento $(TJ^T)_{rj}$ da multiplicação $\boldsymbol{T}\boldsymbol{J}^T$.

$$\begin{pmatrix} T_{11} & \cdots & T_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{T_{r1} \quad \cdots \quad T_{rn}} \\ \vdots & & \vdots \\ T_{n1} & \cdots & T_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J^T_{11} & \cdots & \boxed{\begin{matrix} {J^T}_{1j} \\ \vdots \\ {J^T}_{nj} \end{matrix}} & \cdots & J^T_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ J^T_{n1} & \cdots & & \cdots & J^T_{nn} \end{pmatrix}$$

A expressão original fica então:

$$\bar{T}^{ij} = J_{ir}(TJ^T)_{rj}$$

Agora, fica bem evidente que este último produto $J_{ir}(TJ^T)_{rj}$ é simplesmente um elemento $(JTJ^T)_{ij}$ resultante da multiplicação $\boldsymbol{JTJ}^T$ entre as três matrizes. Ou seja, é possível escrever a lei de transformação em forma matricial como

$$\bar{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{JTJ}^T \tag{2.1.12}$$

desde que o tensor seja contravariante. Expressões similares podem ser obtidas para tensores covariantes e mistos.

***Exemplo** 2.4*: Se $\boldsymbol{T}$ é um tensor contravariante de segunda ordem que tem coordenadas $T^{11} = 1$, $T^{12} = 2$, $T^{21} = 0$ e $T^{22} = -1$ no sistema de coordenadas (x^i), encontre suas componentes no mesmo sistema de coordenadas $(\bar{x}^i)$ do exemplo 2.2. Por fim, calcule os valores numéricos no ponto $(x^1, x^2) = (3, 1)$.

Vimos que

$$\bar{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{JTJ}^T$$

Portanto, basta substituir os valores nas matrizes

$$\bar{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} x^2 & x^1 \\ \dfrac{1}{x^2} & -\dfrac{x^1}{(x^2)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 & \dfrac{1}{x^2} \\ x^1 & -\dfrac{x^1}{(x^2)^2} \end{pmatrix}$$

Encontramos, ao multiplicar:

$$\bar{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} (x^2)^2 + 2x^2x^1 - (x^1)^2 & 1 - 2\left(\dfrac{x^1}{x^2}\right) + \left(\dfrac{x^1}{x^2}\right)^2 \\ 1 + 2\left(\dfrac{x^1}{x^2}\right) + \left(\dfrac{x^1}{x^2}\right)^2 & \dfrac{1}{(x^2)^2} - 2\dfrac{x^1}{(x^2)^3} - \left(\dfrac{x^1}{x^2}\right)^2 \end{pmatrix}$$

Ao substituir pelos valores numéricos obtemos:

$$\bar{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 16 & -14 \end{pmatrix}$$

2.1.3 Tensores de ordem arbitrária

Tendo definido tensores de primeira e segunda ordem s a partir da maneira como se transformam, a definição para tensores de ordens superiores é natural.

Definição 6. *Um tensor contravariante de ordem p e covariante de ordem q, também chamado de tensor do tipo (p,q), é um objeto que se transforma de acordo com:*

$$\bar{T}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{r_1}}\ldots\frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{r_p}}\frac{\partial x^{s_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}}\ldots\frac{\partial x^{s_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}}T^{r_1\ldots r_p}_{s_1\ldots s_q} \tag{2.1.13}$$

Assim como tensores são representados pelo produto entre suas componentes (que são escalares) e as bases, podemos fazer o mesmo para os tensores, generalizando a ideia:

$$\boldsymbol{T} = T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\boldsymbol{e}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\boldsymbol{e}_{i_p}\otimes\boldsymbol{e}^{j_1}\otimes\ldots\otimes\boldsymbol{e}^{j_q} \tag{2.1.14}$$

O produto $\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$, chamado de *produto tensorial*, por ora pode não fazer muito sentido, pois ainda não o definimos. A ideia será formalizada no capítulo seguinte, na construção alternativa de tensores.

Num primeiro momento, podemos simplesmente considerar que este produto define uma nova base. Ou seja, se no $\mathbb{R}^2$ podemos determinar um vetor a partir de duas bases distintas $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$, para um tensor de segunda ordem, que neste exemplo consideraremos que é covariante, utilizamos *quatro* bases:

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1,\quad \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_1,\quad \boldsymbol{b}_4 = \boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_2$$

Veja que $\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2 \neq \boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_1$ pois este tipo de produto em geral não comuta. Anteriormente interpretamos $\boldsymbol{e}_i$ como uma matriz linha, seguindo o mesmo raciocínio podemos enxergar as novas bases $\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$ como matrizes, definidas a partir do produto matricial entre $\boldsymbol{e}_i$ e $\boldsymbol{e}_j$:

$$\boldsymbol{e}_1^T\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

Ou seja, isso indica que as bases são:

$$\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

Naturalmente essas bases nos permitem expressar o tensor corretamente, pois

$$\boldsymbol{T} = T_{11}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + T_{12}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + T_{21}\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + T_{22}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}T_{12} & T_{12}\\T_{21} & T_{22}\end{pmatrix}$$

Assim como os vetores, um tensor não muda após uma transformação de coordenadas, somente suas componentes (e as bases). Em outras palavras, o objeto $\boldsymbol{T}$ deve representar a mesma grandeza, independentemente do sistema de coordenadas escolhido. Afinal, um tensor de condutividade térmica por exemplo, que age sobre um gradiente de temperatura, deve resultar em um mesmo vetor de fluxo de calor não importa o sistema de coordenadas utilizado. O que muda é simplesmente a representação que escolhemos para determinar tais grandezas. Ao longo do resto do capítulo abandonaremos essa representação, pois neste momento só as componentes serão de interesse. O assunto será retomado no capítulo seguinte.

2.2 Operações elementares com tensores

Combinação linear

A combinação linear entre dois tensores $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{S}$ do tipo (p,q) resulta em um tensor de mesma ordem.

$$(\alpha T + \beta S)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \equiv \alpha T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \beta S^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \tag{2.2.1}$$

Produto externo

O produto interno entre dois tensores $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{S}$ é o nome dado à operação:

$$(TS)^{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_r}_{j_1 \dots j_q l_1 \dots l_s} \equiv T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} S^{k_1 \dots k_r}_{l_1 \dots l_s} \tag{2.2.2}$$

que gera um tensor de ordem $(p+r, q+s)$.

Contração

A contração consiste em igualar dois índices arbitrários i_α e j_β de um tensor, sendo um covariante e o outro contravariante, realizando a soma conforme a conveção.

$$(T')^{i_1 \dots i_{p-1}}_{j_1 \dots j_{q-1}} \equiv T^{i_1 \dots u \dots i_p}_{j_1 \dots u \dots j_q} \tag{2.2.3}$$

Sendo $i_\alpha = j_\beta = k$, com a soma sendo realizada com respeito a u, obviamente. Como você pode ver, a operação resulta em um tensor de ordem $(p-1, q-1)$.

Produto Interno

O produto interno entre dois tensores consiste em igualar um índice contravariante i_α de um tensor a um índice covariante j_β de um segundo tensor:

$$(T \cdot S)^{i_1 \dots i_{p-1} k_1 \dots k_r}_{j_1 \dots j_q l_1 \dots l_{s-1}} \equiv T^{i_1 \dots u \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} S^{k_1 \dots k_r}_{l_1 \dots u \dots l_s} \tag{2.2.4}$$

O que também resulta em um tensor de ordem $(p-1, q-1)$.

■ ***Exemplo** 2.5*: Se T^i_j é um tensor misto de segunda ordem, calcular o traço da matriz que representa $\boldsymbol{T}$ é equivalente a contrair o tensor, pois:

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{T}) = T^u_u = T^1_1 + ... + T^n_n \tag{2.2.5}$$

Que resulta em um escalar (tensor de ordem 0).

Vale apontar que produto interno entre dois tensores é equivalente à contração do seu produto externo, conforme o diagrama.

$$\begin{tikzcd}
T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}, S^{k_1 \ldots k_r}_{l_1 \ldots l_s} \arrow[rr, "\text{Produto Interno}"] \arrow[dr, swap, "\text{Produto externo}"] & & (S \cdot T)^{i_1 \ldots i_{p-1} k_1 \ldots k_r}_{j_1 \ldots j_q l_1 \ldots l_{s-1}} \\
& (ST)^{i_1 \ldots i_p k_1 \ldots k_r}_{j_1 \ldots j_q l_1 \ldots l_s} \arrow[ur, swap, "\text{Contração}"] &
\end{tikzcd}$$

Ou seja, o traço da matriz no exemplo acima, é o mesmo que à contração do tensor misto obtido a partir do produto externo entre um vetor covariante e um vetor contravariante.

■ ***Exemplo** 2.6*: Se v^i é um vetor contravariante e u_j é um vetor covariante, o seu produto interno resulta em um tensor misto de segunda ordem:

$$(vu)^i_j = v^i u_j = T^i_j \tag{2.2.6}$$

Podemos inclusive, interpretar a operação em forma matricial. Como v é uma matriz coluna e u uma uma linha, podemos representar o produto externo simplesmente através da multiplicação matricial entre os vetores:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{vu} = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 u_1 & \ldots & v^n u_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v^1 u_n & \ldots & v^n u_n \end{pmatrix} \tag{2.2.7}$$

Repare também que o produto interno entre $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{u}$ é $v^i u_i$, que corresponde à contração do tensor $\boldsymbol{T}$, o produto externo entre $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, pois essa operação também resulta em $T^i_i = v^i u_i$. Podemos então interpretar o traço como um operador que "converte"um produto externo em um produto interno, pois $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{vu}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

2.3 Regra do quociente

É importante que sejamos capazes de identificar grandezas tensoriais em uma equação. Para isto, podemos utilizar a regra do quociente, que a partir do produto externo ou interno estabelece o caráter tensorial de um objeto. O teorema basicamente nos diz que se $\boldsymbol{S}$ é um tensor e o produto $\boldsymbol{TS}$ resulta em um terceiro tensor $\boldsymbol{U}$, então $\boldsymbol{T}$ também corresponde a um tensor.

Resultado 2. *Se o produto entre um dado conjunto de elemtnos e um tensor resulta em um tensor, então os objetos em questão constituem um tensor. Em outras palavras, se $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{U}$ são tensores do tipo (m, n) e $(p+m, q+n)$, respectivamente*

$$T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} S^{k_1 \ldots k_m}_{l_1 \ldots l_n} = U^{i_1 \ldots i_p k_1 \ldots k_m}_{j_1 \ldots j_q l_1 \ldots l_n} \tag{2.3.1}$$

então $\boldsymbol{T}$ é um tensor do tipo (p, q).

A demonstração é simples. Se $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{U}$ são tensores então sua transformação obedece

$$\begin{aligned}
\bar{S}^{k_1 \ldots k_m}_{l_1 \ldots l_n} &= \frac{\partial \bar{x}^{k_1}}{\partial x^{t_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{k_m}}{\partial x^{t_m}} \frac{\partial x^{u_1}}{\partial \bar{x}^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{u_n}}{\partial \bar{x}^{l_n}} S^{t_1 \ldots t_m}_{u_1 \ldots u_n} \\
\bar{U}^{i_1 \ldots i_p k_1 \ldots k_m}_{j_1 \ldots j_q l_1 \ldots l_n} &= \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{r_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{r_p}} \frac{\partial \bar{x}^{k_1}}{\partial x^{t_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{k_m}}{\partial x^{t_m}} \frac{\partial x^{s_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{s_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}} \frac{\partial x^{u_1}}{\partial \bar{x}^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{u_n}}{\partial \bar{x}^{l_n}} U^{r_1 \ldots r_p t_1 \ldots t_m}_{s_1 \ldots s_q u_1 \ldots u_n}
\end{aligned}$$

Ao barrar os termos da (2.3.1) e utilizar as duas igualdades acima podemos mostrar que $\boldsymbol{T}$ se transforma como um tensor, pois

$$\bar{T}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \bar{S}^{k_1 \ldots k_m}_{l_1 \ldots l_n} = \bar{U}^{i_1 \ldots i_p k_1 \ldots k_m}_{j_1 \ldots j_q l_1 \ldots l_n} \tag{2.3.2}$$

fica

$$\begin{gathered}
S^{t_1 \ldots t_m}_{u_1 \ldots u_n} \cancel{\frac{\partial \bar{x}^{k_1}}{\partial x^{t_1}}} \cdots \cancel{\frac{\partial \bar{x}^{k_m}}{\partial x^{t_m}}} \cancel{\frac{\partial x^{u_1}}{\partial \bar{x}^{l_1}}} \cdots \cancel{\frac{\partial x^{u_n}}{\partial \bar{x}^{l_n}}} \bar{T}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \\
U^{r_1 \ldots r_p t_1 \ldots t_m}_{s_1 \ldots s_q u_1 \ldots u_n} \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{r_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{r_p}} \cancel{\frac{\partial \bar{x}^{k_1}}{\partial x^{t_1}}} \cdots \cancel{\frac{\partial \bar{x}^{k_m}}{\partial x^{t_m}}} \frac{\partial x^{s_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{s_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}} \cancel{\frac{\partial x^{u_1}}{\partial \bar{x}^{l_1}}} \cdots \cancel{\frac{\partial x^{u_n}}{\partial \bar{x}^{l_n}}}
\end{gathered}$$

Os termos indicados se "cancelam", e obtemos:

$$S^{t_1 \ldots t_m}_{u_1 \ldots u_n} \bar{T}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = U^{r_1 \ldots r_p t_1 \ldots t_m}_{s_1 \ldots s_q u_1 \ldots u_n} \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{r_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{r_p}} \frac{\partial x^{s_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{s_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}}$$

Como $U^{r_1...r_p t_1...t_m}_{s_1...s_q u_1...u_n} = S^{t_1...t_m}_{u_1...u_n} T^{r_1...r_p}_{s_1...s_q}$, a equação acima se reduz á:

$$\bar{T}^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{r_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{r_p}} \frac{\partial x^{s_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{s_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}} T^{r_1...r_p}_{s_1...s_q} \tag{2.3.3}$$

O que evidencia a transformação tensorial do objeto. Também podemos usar a regra do quociente a partir do produto internos entre tensores, um exercício com a demonstração se encontra no final do capítulo. Por ora enunciaremos o resultado:

Resultado 3. *Seja S^k um vetor contravariante e $U^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}$. Se*

$$T^{i_1...i_p}_{j_1...j_q k} S^k = U^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} \tag{2.3.4}$$

então $T^{i_1...i_p}_{j_1...j_q k}$ é um tensor de ordem $(p+1, q)$. Em outras palavras, se o produto interno entre $\boldsymbol{T}$ e um vetor $\boldsymbol{S}$ resulta em um tensor $\boldsymbol{U}$, então $\boldsymbol{T}$ também apresenta caráter tensorial.

O exemplo a seguir ilustrará um dos usos do teorema.

***Exemplo** 2.7*: O produto interno entre a força e os deslocamento nos fornece o trabalho realizado $\mathrm{d}W = F \mathrm{d}x^i$. Como o deslocamento infinitesimal $\mathrm{d}x^i$ é contravariante e o trabalho $\mathrm{d}W$, ao aplicar o teorema do quociente concluímos que $F = F_i$ é um vetor covariante.

2.4 Tensores Simétricos

Muitos tensores apresentam caráter simétrico, portanto veremos esta definição com mais detalhes. A definição para tensores de segunda ordem é trivial, no entanto vale a pena definir a simetria para tensores de ordens superiores. Além disso, comumente são empregadas técnicas que decompõe um tensor em componentes simétricas a assimétricas, portanto vale a pena estudar este procedimento.

2.4.1 Simetria de tensores de segunda ordem

Definição 7. *Um tensor de segundo ordem é dito simétrico quando a matriz que o representa é igual a sua transposta, isto é, se $\boldsymbol{T}^T = \boldsymbol{T}$. Analogamente, quando $\boldsymbol{T}^T = -\boldsymbol{T}$ o tensor é chamado de antissimétrico.*

Em notação indicial equivale a dizer que tensores que satisfazem $T_{ij} = T_{ji}$ são simétricos, e tensores que satisfazem $T_{ij} = -T_{ji}$ são assimétricos.

Um tensor pode ser decomposto em uma parte simétrica e uma parte assimétrica:

$$T_{ij} = T_{(ij)} + T_{[ij]} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) \tag{2.4.1}$$

Onde índices envoltos por parênteses indicam simetria, e índices escritos entre colchetes indicam assimetria. Como há 3! permutações para os índices em um tensor de terceira a ordem, a construção fica:

$$T_{(ijk)} = \frac{1}{3!}(T_{ijk} + T_{ikj} + T_{jik} + T_{jki} + T_{kij} + T_{kji}) \tag{2.4.2}$$

Pois assim o valor de $T_{(ijk)}$ não muda não importa a troca de índices realizada. O tensor antissimétrico correspondente é:

$$T_{[ijk]} = \frac{1}{3!}(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} - T_{ikj} - T_{jik} - T_{kji}) \tag{2.4.3}$$

O que faz com que haja uma mudança de sinal para troca entre dois índices adjacentes (p. ex. $T_{[ijk]} = -T_{[jik]} = T_{[ijk]}$). Como essas relações valem para *todos* os índices os tensores $T_{(ijk)}$ e $T_{[ijk]}$ são chamadas de *completamente simétrico* e *completamente assimétrico*, respectivamente. O processo também pode ser realizado com respeito a somente dois dos três indíces, como no exemplo a seguir:

$$T_{(ij)k} = \frac{1}{2}(T_{ijk} + T_{jik})$$

Este tensor é simétrico em relação aos dois primeiros índice mas não é completamente simétrico.

2.4.2 Simetria de tensores de ordem geral

A construção é análoga para um tensor de ordem n.

Definição 8. *A parte completamente simétrica $T_{(i_1..i_n)}$ de ordem n é dado por*

$$T_{(i_1..i_n)} = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma} T_{\sigma(1)\dots\sigma(n)} \tag{2.4.4}$$

o tensor completamente antissimétrico por sua vez, é contruído como

$$T_{[i_1..i_n]} = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) T_{\sigma(1)\dots\sigma(n)} \tag{2.4.5}$$

Apesar da notação ligeiramente mais complicada o seu significado é bem simples. $\sigma(1)...\sigma(n)$ representa uma permutação qualquer dos índices, portanto o somatório com respeito a σ indica que somamos todas os arranjos possíveis da sequência $i_1...i_n$, dividindo o resultado pelo número de permutações $n!$. A construção do tensor antissimétrico praticamente a mesma, porém a paridade da permutação é levada em conta: $\text{sgn}(\sigma) = 1$ para permutações pares e $\text{sgn}(\sigma) = -1$ para permutações ímpares.

!

Tensores mistos não podem ser decompostos dessa maneira para qualquer transformação de coordenadas. Se definirmos $S^i_j \equiv T^i_j + T^j_i$, a grandeza $\boldsymbol{S}$ **não** apresenta caráter tensorial, pois:

$$\bar{T}^i_j + \bar{T}^j_i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}T^r_s + \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^s}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}T^s_r \neq \bar{S}^i_j$$

Essa equação só é válida quando os tensores são cartesianos (Problema 2.7).

2.5 Densidades tensoriais

Os tensores são na verdade um subconjunto de uma classe maior de objetos: as *densidades tensoriais*. Não será nosso foco descrever estes objetos, porém vale ao menos estudá-los brevemente devido a sua gama de aplicações . Dois exemplos já bem conhecidos são o símbolo de Levi-Civita e o vetor resultante de um produto vetorial. Ademais, densidades tensoriais também descrevem transformações de elementos de volume após uma mudança de coordenadas, o que as torna particularmente importantes em geometria diferencial e relatividade geral.

Definição 9. *Uma densidade tensorial $\mathcal{T}$ de ordem (p,q) e peso W se transforma de acordo com*

$$\bar{\mathcal{T}}^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} = \det(\boldsymbol{J})^W \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{r_1}}...\frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{r_p}}\frac{\partial x^{s_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}}...\frac{\partial x^{s_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}}\mathcal{T}^{r_1...r_p}_{s_1...s_q} \tag{2.5.1}$$

onde $\det J$ *é a determinante da matriz Jacobiana.*

Quando o peso é zero, obviamente a lei de transformação acima se reduz à lei de transformação usual de um tensor.

***Exemplo** 2.8*: Mostre que ϵ_{ijk} se transforma como uma densidade tensorial de peso 1 e de ordem $(0,3)$.

Utilizaremos a identidade dada no problema 1.5:

$$\epsilon_{rst}b_{ri}b_{sj}b_{tk} = \epsilon_{ijk}\det(B)$$

Se tomarmos os elementos b como:

$$b_{ri} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}$$

fica claro que $B = J^{-1}$, e a identidade se torna

$$\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\epsilon_{rst} = \bar{\epsilon}_{ijk}\det(\boldsymbol{J}^{-1})$$

Como $\det(\boldsymbol{J}^{-1}) = 1/\det \boldsymbol{J}$, a equação acima pode ser reescrita como

$$\bar{\epsilon}_{ijk} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\epsilon_{rst}\det \boldsymbol{J} \tag{2.5.2}$$

Conforme queríamos mostrar.

No próximo capítulo, após nos equiparmos com o tensor métrico, mostraremos como "converter"densidades tensoriais em tensores e como relacioná-las com elementos de volume.

2.5.1 Propriedades

Combinação linear

A combinação linear entre duas densidades tensoriais de mesma ordem e peso gera uma densidade tensorial do mesmo tipo.

Produto externo

O produto interno entre duas densidades tensorais $\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}$ de pesos W e V é

$$(\mathcal{T}\mathcal{S})^{i_1\ldots i_p k_1\ldots k_r}_{j_1\ldots j_q l_1\ldots l_s} \equiv \mathcal{T}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\mathcal{S}^{k_1\ldots k_r}_{l_1\ldots l_s} \tag{2.5.3}$$

que gera uma densidade tensorial de ordem $(p+r, q+s)$ e peso $W+V$.

Contração

Segue a mesma regra de contração de um tensor:

$$(\mathcal{T}')^{i_1\ldots i_{p-1}}_{j_1\ldots j_{q-1}} \equiv \mathcal{T}^{i_1\ldots u\ldots i_p}_{j_1\ldots u\ldots j_q} \tag{2.5.4}$$

O que resulta em uma densidade tensorial de mesmo peso mas de ordem $(p-1, q-1)$.

Produto Interno

O produto interno entre duas densidades tensoriais de pesos W e V,

$$(\mathcal{T}\cdot\mathcal{S})^{i_1\ldots i_{p-1}k_1\ldots k_r}_{j_1\ldots j_q l_1\ldots l_{s-1}} \equiv \mathcal{T}^{i_1\ldots u\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\mathcal{S}^{k_1\ldots k_r}_{l_1\ldots u\ldots l_s} \tag{2.5.5}$$

resulta em uma densidade tensorial de ordem $(p-1, q-1)$ e peso $W+V$.

Exemplo *2.9*: Usando as propriedades acima podemos ver que o determinante de um tensor contravariante de segunda ordem resulta em uma densidade tensorial de ordem 0 e peso 2. Havíamos visto que este tipo de tensor se transforma de acordo com $\bar{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{T}\boldsymbol{J}^T$. Se utilizarmos as propriedades $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ e $\det(A) = \det(A^T)$ concluímos rapidamente que:

$$\det(\bar{\boldsymbol{T}}) = \det(\boldsymbol{J})^2\det(\boldsymbol{T}) \tag{2.5.6}$$

Portanto $W = 2$.

Resumo

- Tensores contravariantes de segunda ordem se transformam de acordo com $\bar{\boldsymbol{T}}_{\text{contra}} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{T}\boldsymbol{J}^T$. Tensores covariantes e mistos obedecem

$$\bar{\boldsymbol{T}}_{\text{cov}} = (\boldsymbol{J}^{-1})^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{J}^{-1} \quad \text{e} \quad \bar{\boldsymbol{T}}_{\text{misto}} = \boldsymbol{J}^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{J}^{-1}$$

  respectivamente. (Problema 2.4)

- Calcular o produto interno entre dois tensores é equivalente a contrair seu produto externo

- O delta de Kronecker é um tensor misto de segunda ordem, o símbolo se Levi-Civita é um pseudo-tensor de ordem $(3,0)$ peso -1 ou ordem $(0,3)$ e peso 1. (Problema 2.11)

- Densidades tensoriais se transformam de maneira similarar aos tensores, a única diferença é um fator $\det(\boldsymbol{J})^W$ extra que multiplica a expressão. O real W recebe o nome de *peso*.

Problemas 2

Problema 2.1: Se os dois elementos de uma base covariante são $e_1 = (1, 2)$ e $e_2 = (3, 0)$, calcule as quatro bases $\boldsymbol{e_i} \otimes \boldsymbol{e_j}$.

Problema 2.2: Mostre que podemos definir o produto interno como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v^i$. Basta mostrar que o resultado é um escalar e que valem as propriedades do produto interno para a operação.

Problema 2.3: Mostre que se $\boldsymbol{T}$ é um tensor simétrico e $\boldsymbol{S}$ é um tensor antissimétrico vale a identidade

$$T^{ij} S_{ij} = 0$$

Problema 2.4: (Tensor Calculus; Synge) Mostre que

$$\frac{\partial}{\partial x^s} A_r - \frac{\partial}{\partial x^r} A_s$$

Corresponde a um tensor covariante antissimétrico de segunda ordem.

Problema 2.5: Mostre que as leis de transformação para tensores mistos e covariantes podem ser escritas como

$$\bar{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{T}\boldsymbol{J}^{-1}, \quad e \quad \bar{\boldsymbol{T}} = (\boldsymbol{J}^{-1})^T \boldsymbol{T}\boldsymbol{J}^{-1}$$

respectivamente.

Problema 2.6: Prove que se um tensor contravariante de segunda ordem é representado pela matriz $\boldsymbol{T}$ de dimensões $n \times n$, então sua matriz inversa $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}^{-1}$ define um tensor covariante de segunda ordem.

Problema 2.7: As componentes de um tensor misto de segunda ordem são $T_{11} = 1$, $T_{12} = 1$, $T_{21} = 2$ e $T_{22} = 0$. Calcule suas novas componentes após a mudança de coordenadas $\bar{x}^1 = x^1 + x^2$ e $\bar{x}^2 = \frac{1}{2}(x^1)^2$, com $x^1 \neq 0$. Tome $x^1 = 2$.

Problema 2.8: A densidade de corrente pode ser obtida a partir do campo elétrico por meio de $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{E}$, ou

$$J_i = \sigma_{ij} E_j \tag{2.5.7}$$

Contudo, também podemos relacionar as duas grandezas a partir do tensor de resistividade elétrica, pois $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\rho J}$, ou seja $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma}^{-1}$. Considerando o caso bidimensional, encontre as componentes do tensor de resistividade a partir das componentes do tensor de condutividade.

Problema 2.9: Mostre a contração de um tensor misto de segunda ordem é um invariante.

Problema 2.10: Prove que se a contração de um tensor fosse realizada com respeito a dois índices do mesmo tipo o resultado não obedeceria a lei de transformação de um tensor.

Problema 2.11: Demonstre o resultado 3.

Problema 2.12: O momento angular pode ser calculado a partir da expressão

$$\boldsymbol{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m[\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})] \tag{2.5.8}$$

Sabendo que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I\omega}$, isto é $L_i = I_{ij}\omega_j$, mostre que as componentes do *tensor de inércia* $\boldsymbol{I}$ são calculadas a partir de

$$I_{ij} = m(\delta^i_j r_k r_k - r_i r_j) \tag{2.5.9}$$

Problema 2.13: Calcule as componentes do tensor de inércia de um cubo de lado a. Tome a origem em um de seus vértices. Neste caso em que a distribuição de massa é contínua você pode usar a equação acima como:

$$I_{ij} = \int (\delta^i_j r_k r_k - r_i r_j) dm \tag{2.5.10}$$

Problema 2.14: Mostre que o produto escalar $\boldsymbol{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é uma densidade tensorial de peso $W = 1$ e ordem $(0, 1)$.

Problema 2.15: Prove que ϵ^{ijk} tem peso -1.

Problema 2.16: Mostre que

$$\phi = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \tag{2.5.11}$$

tem peso 0. Entenda $\cdot$ como o produto interno.

3 Tensores especiais

3.1 O tensor métrico e a primeira forma fundamental

Vimos no primeiro capítulo que a maneira a qual estávamos habituados a calcular o produto interno não era exatamente a mais geral. Devemos então buscar maneiras distintas de calcular distâncias, áreas e volumes, que funcionem para sistemas de coordenadas arbitrários. Entra em cena a ideia de tensor métrico, que surge de maneira bem natural neste contexto da geometria diferencial - inicialmente na equação da primeira forma fundamental, que simplesmente nos diz como é possível calcular distâncias. Após nos equiparmos com esta ferramenta seremos capazes de calcular ângulos, áreas e volumes, generalizando alguns resultados já conhecidos do cálculo no $\mathbb{R}^n$.

Para encontrar uma expressão geral para um elemento de arco ds consideraremos uma curva $\boldsymbol{\gamma}$, que é expressa parametricamente em coordenadas cartesianas como

$$\gamma(t) = \gamma(x^1(t), ..., x^n(t)) \tag{3.1.1}$$

ou vetorialmente, como $\boldsymbol{\gamma} = x^1\boldsymbol{e}_1 + ... + x^n\boldsymbol{e}_n$, sendo $\boldsymbol{e}_i$ uma base ortogonal. Num nova sistema de coordenadas essa curva é escrita da seguinte maneira

$$\gamma(t) = \gamma(\bar{x}^1(t), ..., \bar{x}^n(t)) \tag{3.1.2}$$

cuja expressão vetorial agora vale $\boldsymbol{\gamma} = \bar{x}^1\bar{\boldsymbol{e}}_1 + ... + \bar{x}^n\bar{\boldsymbol{e}}_n$, sendo $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ uma base geral. Podemos escrever o comprimento infinitesimal de arco deste modo:

$$ds^2 = d\boldsymbol{\gamma} \cdot d\boldsymbol{\gamma} \tag{3.1.3}$$

O diferencial de γ, na base barra, é expresso como

$$d\boldsymbol{\gamma} = \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \bar{x}^r} d\bar{x}^r \tag{3.1.4}$$

Assim, a expressão para o comprimento fica

$$ds^2 = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \bar{x}^i} d\bar{x}^i\right) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \bar{x}^j} d\bar{x}^j\right) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \bar{x}^i}\right) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \bar{x}^j}\right) d\bar{x}^i d\bar{x}^j \tag{3.1.5}$$

Os diferenciais $d\bar{x}^r$ e $d\bar{x}^s$ são componentes de um vetor contravariante, assim, seu produto constitui um tensor **covariante** de segunda ordem. Exigeremos agora que o elemento ds seja um escalar, o que é natural pois se trata de uma medida de comprimento, que deve ser a mesma em todo sistema de coordenadas. Pelo teorema do quociente concluímos que a quantidade

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \bar{x}^i}\right) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \bar{x}^j}\right)$$

é um tensor covariante de segunda ordem, pois seu produto com dois vetores contravariantes resulta em um escalar. Obteremos agora uma expressão para esse tensor, que não seja escrita em termos de γ. Veja que no sistema ortogonal podemos escrever $\boldsymbol{\gamma} = x^k e_k = x^l e_l$. Substituindo nas derivadas parciais:

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \bar{x}^i}\right) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \bar{x}^j}\right) = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\boldsymbol{e_k} \cdot \boldsymbol{e_l}$$

O último passo consiste em utilizar a ortogonalidade da base $\boldsymbol{e_k} \cdot \boldsymbol{e_l} = \delta_{kl}$, o que nos permite obter uma expressão para o tensor, que denotaremos como g_{ij}:

$$g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \tag{3.1.6}$$

Este objeto recebe o nome de *tensor métrico*. Perceba que podemos escrever o tensor a partir de $\boldsymbol{J}$, pois

$$\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} = (J^{-1})_{ki} = [(J^{-1})^T]_{ik}, \quad e \quad \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} = (J^{-1})_{kj}$$

por conseguinte [1]

$$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{J}^{-1})^T \boldsymbol{J}^{-1} \tag{3.1.7}$$

Isto é, a matriz que representa é simplesmente o produto entre a transposta da Jacobiana (inversa) e a própria Jacobiana (inversa). Também podemos expressar o tensor métrico em função das bases, pois como

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \bar{x}^i}\right) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \bar{x}^j}\right)$$

Basta escrever γ como $\bar{x}^k \bar{\boldsymbol{e}}_k$, pois assim a expressão acima se reduz à:

[1] Alguns autores definem a Jacobiana de maneira inversa $\boldsymbol{J}^{-1} \to J$, que deixa a equação na forma $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{J}^T \boldsymbol{J}^T$

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial \bar{x}^i} \bar{\boldsymbol{e}}_k \right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial \bar{x}^j} \bar{\boldsymbol{e}}_l \right) = \delta_i^k \delta_j^l (\bar{\boldsymbol{e}}_k \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_l)$$

O que nos permite concluir que o tensor métrico pode ser calculado a partir do produto interno usual entre as bases:

$$g_{ij} = \bar{\boldsymbol{e}}_i \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_j \tag{3.1.8}$$

A expressão acima deixa claro que g_{ij} é **simétrico**. Por fim obtemos, através da (3.1.5) e da (3.1.6), o seguinte resultado.

Resultado 4. ***A primeira forma fundamental***

Dada uma curva $\gamma(t) = \gamma(x^1(t), ..., x^n(t))$ em uma superfície S, o comprimento de arco é dado por

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \tag{3.1.9}$$

sendo g_{ij} uma componente do tensor métrico. Esta forma quadrática é chamada de primeira forma fundamental.

Ou seja, conhecer a métrica de um espaço nos permite inferir várias de suas propriedades. Uma das principais vantagens é que podemos obter diversos resultados algebricamente, que geometricamente seriam difíceis ou impossíveis de se conseguir.

Exemplo *3.1*: Encontre uma expressão para ds em coordenadas polares. A inversa Jacobiana é dada por:

$$\boldsymbol{J}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.1.10}$$

Pois $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Assim,

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \tag{3.1.11}$$

Deste modo, o elemento de arco em coordenadas polares é dado por:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \tag{3.1.12}$$

O tensor representado pela matriz inversa $\boldsymbol{G}^{-1}$ tem elementos g^{ij} e recebe o nome de tensor métrico conjugado, pois apresenta propriedades análogas ao tensor métrico g_{ij}. É possível mostrar que suas componentes são dadas por:

$$g^{ij} = \bar{\boldsymbol{e}}^i \cdot \bar{\boldsymbol{e}}^j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} \tag{3.1.13}$$

Notamos então que o tensor g^{ij} é contravariante de segunda ordem. Esse resultados mostram puma das razões pela qual o tensor métrico é tão importante: ele descreve a relação entre as bases canônicas de um sistema de coordenadas.

3.1.1 Manipulação de índices

Uma das principais propriedades do tensor métrico é a conexão que ele estabelece entre as componentes covariantes e contravariantes de um tensor. [2]

Podemos expressar um vetor a partir das coordenadas covariantes como $\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{e}^i$. Calculamos em seguida o produto interno de ambos os lados da expressão com $\boldsymbol{e}_i$, pois $\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}_i = 1$ (Sem soma). Então naturalmente

$$v_i = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_i \tag{3.1.14}$$

Mas o vetor também pode ser escrito por meio das coordenadas contravariantes, pois $\boldsymbol{v} = v^j \boldsymbol{e}^j$. Se substituirmos na expressão acima obtemos

$$v_i = (v^j \boldsymbol{e_j}) \cdot \boldsymbol{e}_i = v^j (\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_i)$$

Como $g_{ij} = \boldsymbol{e}^j \cdot \boldsymbol{e}_i$ a expressão acima fica

$$v_i = g_{ij} v^j \tag{3.1.15}$$

Por razões análogas vale

$$v^i = g^{ij} v_j \tag{3.1.16}$$

***Exemplo** 3.2*: Voltaremos agora aos exemplos 1.2 e 1.3, pois poderemos ilustrar como essa relação entre as componentes através do tensor métrico por meio de um exemplo numérico.

Havíamos visto que a base covariante era dada por $\boldsymbol{e}_1 = (0, -1)$ e $\boldsymbol{e}_1 =$

[2]Numa linguagem um pouco mais rebuscada dizemos que ele estabelece um isomorfismo entre o espaço vetorial $\boldsymbol{T}_p$ e seu espaço dual $\boldsymbol{T}_p^*$, mas não se preocupe com esses termos neste momento, isso simplesmente nos diz que por meio da métrica podemos associar vetores aos covetores, ou duais, de maneira bijetiva.

$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Também fomos capazes de calcular as componentes do vetor, que valiam $v^1 = 2\sqrt{3}$ e $v^2 = 4$ no caso contravariante, ou $v_1 = 0$ e $v_2 = 1$, no caso covariante. Mostraremos agora que por meio da métrica deste sistema de coordenadas é possível fazer uma "conversão" direta entre as componentes. A métrica que corresponde á nossa escolha de eixos é

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{e}}_1 \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_1 & \bar{\boldsymbol{e}}_1 \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_2 \\ \bar{\boldsymbol{e}}_2 \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_1 & \bar{\boldsymbol{e}}_2 \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como escolhemos um sistema de coordenadas oblíquo, é natural que surjam componentes não diagonais na métrica. Além disso, sua diagonal é únitária pois escolhemos uma base normalizada. Agora, basta dispor as componentes contravariantes em um vetor coluna, pois assim as componentes covariantes são dadas, numericamente, através de uma simples multiplicação matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ou seja, as entradas da matriz resultante correspondem às componentes covariantes do vetor $\boldsymbol{v}$. Tal equação corresponde simplesmente à relação $v_i = g_{ij}v^j$ em forma matricial.

3.1.2 Produto Interno

Com as relações acima seremos capazes de definir um produto interno a partir do tensor métrico, só necessitamos de mais um resultado. Veja que podemos escrever a (3.1.9) em forma matricial como:

$$ds^2 = d\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{G} d\boldsymbol{x}$$

Se estamos trabalhando em um espaço Riemanniano, que por definição tem sempre $ds^2 > 0$, então a equação acima nos diz que a matriz que representa o tensor métrico é positiva-definida, pela própria definição. [3] Assim, é possível definir o produto interno como:

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = u^i v_i = g_{ij} u^i v^i = g^{ij} u_i v_j \tag{3.1.17}$$

[3] Há métricas que não obedecem essa regra. Quando estabelecemos a exigência de que a métrica é simplesmente *não-degenerada* (isto é $\det \boldsymbol{G} \neq 0$), permitindo que ela adote valores negativos, estamos nos referindo à um espaço Pseudo-Riemanniano. Um exemplo é a métrica de Minkowski da relatividade restrita, que tem coeficientes $g_{11} = g_{22} =_g 3 = 1$ e $g_{00} = -1$. Ou seja, no espaço de Minkowski podemos ter $ds^2 < 0$.

Você mesmo pode checar que valem as propriedades de produto interno. [4]

Resultado 5. *O ângulo entre dois vetores* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *é:*

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})}{\|u\|\|v\|} \tag{3.1.18}$$

cujas normas são definida por $\|u\| = \sqrt{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})}$ *e* $\|v\| = \sqrt{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}$.

Os cálculos são feitos basicamente das mesma maneira como são efetuados no espaço euclidiano, a única diferença evidente é o uso da métrica no produto interno, como no exeemplo sequinte.

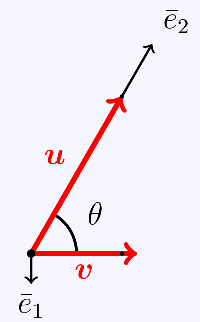
Exemplo *3.3*: Considere os vetores $\boldsymbol{v} = 2\sqrt{3}\bar{\boldsymbol{e}}^1 + 4\bar{\boldsymbol{e}}^2$ e $\boldsymbol{u} = 3\bar{\boldsymbol{e}}^2$. Usando a métrica do exemplo anterior, calcule o produto interno por meio de matrizes. Podemos arranjar a equação para o produto interno matricialmente, como

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3$$

Os módulos são $\|u\| = 2$ e $\|v\| = 3$. Portanto:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

O ângulo formado entre os vetores vale 60 graus. Os vetores são representandos ao lado, na base correspondente à métrica utilizada.



Graças à métrica somos capazes então de calcular o módulo e o ângulo entre vetores mesmo em uma base não-ortogonal!

[4]Vale ressaltar mais uma vez que assim como na seção anterior, perdemos rigor matemático ao trabalhar com todos esses conceitos sem nos apoiarmos nas ideias de variedades, espaço tangente, produto tensorial, etc. Um exemplo de abuso de notação que cometemos é na equação da primeira forma $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, que de maneira mais rigorosa deveria ser escrita como $ds^2 g_{ij}dx^i \otimes dx^j$, com $\otimes$ representando o produto tensorial. Além disso, quando nos referimos à "espaços Riemannianos" por exemplo estamos na verdade fazendo uma grande simplificação, a maioria das obras modernas na literatura aborda o assunto sob o ponto de vista de *variedades*, que a grosso modo são uma formalização e generalização do conceito de superfícies.

A partir da métrica também somos capazes de determinar as trajetórias ortogonais à uma dada curva em um certo sistema de coordenadas. A vantagem evidente em realizar uma mudança de coordenadas neste tipo de problema é simplificação que podemos fazer em relação as equações diferenciais associadas às curvas buscadas. No exemplo seguinte, no qual buscamos a curva ortogonal a um cardióide, o uso de coordenadas polares geram equações bem mais compactas em relação ao que obteríamos através de um sistema cartesiano.

Exemplo *3.4*: Encontre a curva ortogonal ao Cardióide, parametrizado através de $\theta(t) = (t)$, cuja equação é dada por

$$r(t) = c(1 + \cos t) \tag{3.1.19}$$

A condição de ortogonalidade em um espaço não-euclideano é a mesma a qual estamos habituados - os vetores tangenciais às trajetórias no ponto em que elas se cruzam devem perpendiculares, isto é, seu produto interno deve ser zero. O vetor tangente ao cardióide, é

$$v_T = (dr/dt, d\theta/dt) = (-c\sin t, 1)$$

O vetor tangente à trajetória que procuramos é parametrizado por $u_T = (dr/dt, d\theta/dt)$. Como já sabemos a métrica para coordenadas polares basta igualar o produto interno a zero:

$$(\boldsymbol{v}_T \cdot \boldsymbol{u}_T) = \begin{pmatrix} -c\sin t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr/dt \\ d\theta/dt \end{pmatrix} = 0$$

As multiplicações matriciais acima resultam em

$$c\frac{dr}{r^2} = \frac{d\theta}{\sin\theta}$$

Substituindo c por $r/(1 + \cos t)$, através da equação do Cardióide, a EDO fica

$$\frac{dr}{r} = \frac{1 + \cos t}{\sin t} d\theta$$

Podemos então usar a identidade

$$\tan\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\sin t}{1 + \cos t}$$

Pois assim a EDO acima fica:

$$\frac{dr}{r} = \frac{dt}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Após integrar por subsituição obtemos:

$$\ln r = 2\ln\sin\left(\frac{t}{2}\right) + \ln k$$

Ou,

$$r = k\sin^2\frac{\theta}{2}$$

Utilizando mais uma identidade trigonométrica finalmente obtemos

$$r = k'(1 - \cos\theta)$$

Com $k' = k/2$.

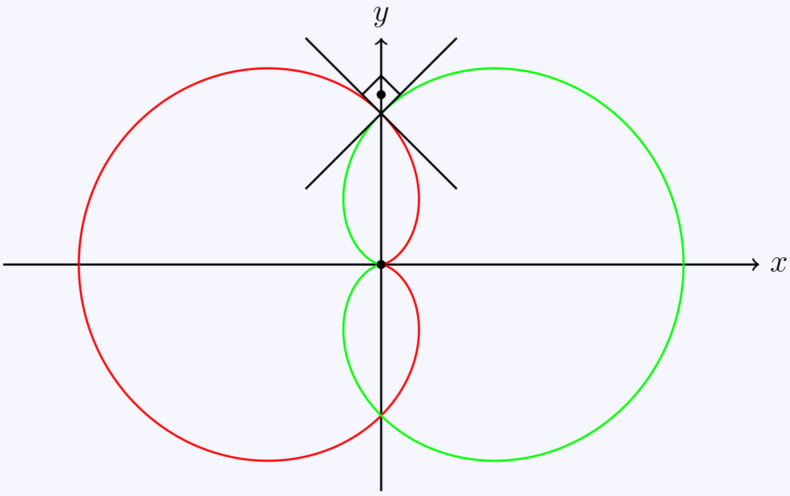


Figura 7: A trajetória ortogonal à curva $r = c(1 + cos\theta)$ também é um cardóide, mas das forma $r = c(1 - \cos\theta)$, que parece espelhado em relação ao eixo y.

Vale frisar que o fato de termos exigido que a métrica seja positiva definida nos garantiu que as normas dos vetores sejam sempre não-negativos e que o cosseno dos ângulos na (3.1.18) esteja confinado no intervalo $[-1, 1]$. Em métricas nas quais não estabecelemos esta exigência podemos ter $ds^2 \leqslant 0$, como na métrica de Minkowski, na qual $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. A situação $ds^2 = 0$ corresponde à condição $dt^2 = dx^2 - dy^2 - dz^2$. Isso significa que dois pontos no espaço tempo (ou 'eventos') são separados por um intervalo de luz. Esses intervalos são chamados de intervalo tipo-luz.

3.1.3 A determinante do tensor métrico

Demonstraremos agora alguns resultados envolvendo a determinante do tensor métrica. Podemos relacionar essa quantidade com a determinante da Jacobiana, isto nos permite trabalhar com alguns resultados do cálculo diferencial por meio da métrica, como no cálculo de integrais de volume. Começaremos com alguns pontos algébricos, que nos dão informações adicionais sobre as propriedades da métrica e validam alguns resultados.

Resultado 6. *A matriz* $\boldsymbol{G}$ *regular. Isto é*

$$g = \det \boldsymbol{G} \neq 0 \tag{3.1.20}$$

Suponha que $\boldsymbol{G}$ tem determinante nula. Então existe um vetor $\boldsymbol{v}$ tal que

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{v} = 0 \tag{3.1.21}$$

isto é, existe uma solução para o sistema linear homogêneo dado por $\boldsymbol{G}$. Multipliquemos agora ambos os lados da equação por $\boldsymbol{v}^T$:

$$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{v} = 0$$

A equação acima corresponde ao produto interno:

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 0 \tag{3.1.22}$$

Contudo, a métrica é não-degenerada, conforme havíamos visto. Concluímos então que o vetor $\boldsymbol{v}$ só pode ser o vetor nulo, e por conseguinte nossa hipótese de que $\det \boldsymbol{G} = 0$ é equivocada. Isto prova, portanto, que a determinante da métrica é necessariamente não-nula. Isso também significa que a matriz é invertível, isso justifica o nosso uso da métrica conjugada na subseção anterior!

Resultado 7. *O sinal de* $\det \boldsymbol{G}$ *independe do sistema de coordenadas.*

Sabemos que $\bar{\boldsymbol{G}} = (\boldsymbol{J}^{-1})^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{J}^{-1}$, pois o tensor é covariante. Pelas propriedades do cálculo de determinantes é trivial que

$$\bar{g} = (\det \boldsymbol{J}^{-1})^2 g \tag{3.1.23}$$

ou,

$$g = \det(\boldsymbol{J})^2 \bar{g} \tag{3.1.24}$$

Assim, fica óbvio que o sinal de $\boldsymbol{G}$ é invariante. Agora que obtemos uma expressão para a transformação de g podemos obter uma expressão para elementos de volume em coordenadas curvilíneas. A expressão para o volume infinitesimal em coordenadas cartesianas já é bem conhecida $dV = dxdydz$. Não podemos definir uma expressão desta mesma maneira em coordenadas gerais pois claramente a quantidade

$$dV = dx^1...dx^n$$

não é invariante. Tome as coordenadas polares por exemplo, em que um elemento de área é dado por $dS = rdrd\theta$, que contém um fator r além do previsto pela equação acima. Para isso usamos um resultado do cálculo integral: o elemento de volume após uma transformação de coordenadas difere do volume original por um fator $\det \boldsymbol{J}$, isto é

$$d\bar{x}^1...d\bar{x}^n = (\det \boldsymbol{J})dx^1...dx^n \tag{3.1.25}$$

Logo, pela (3.1.24) é possível reescrever a equação acima em termos da métrica como

$$\sqrt{\bar{g}}d\bar{x}^1...d\bar{x}^n = \sqrt{g}dx^1...dx^n \tag{3.1.26}$$

o que evidencia que a grandeza corresponde à um escalar, e nos permite enunciar o seguinte resultado.

Resultado 8. *O elemento de volume*

$$\sqrt{g}dx^1...dx^n \tag{3.1.27}$$

é invariante.

Ou seja, o elemento de volume, como definido acima, é invariante em relação à uma mudança de coordenadas. Conhecendo a métrica sabemos não somente como calcular distâncias, mas também áreas e volumes.

***Exemplo** 3.5*: Em coordenadas polares a métrica é

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \phi \end{pmatrix}$$

como

$$g = r^4 \sin^2 \phi$$

O elemento de volume vale

$$dV = r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi$$

3.1.4 Mudança de peso

Assim como é possível levantar e abaixar indíces por meio da métrica, também podemos "converter" densidades tensoriais em tensores ordinários por meio da sua determinante g, e vice-versa. Afinal, se substituirmos $\det \boldsymbol{J}$ por $\sqrt{g}/\sqrt{\bar{g}}$ na equação de transformação de um pseudo-tensor, obtemos:

$$(\sqrt{\bar{g}})^{W/2}\bar{\mathcal{T}}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = (\sqrt{g})^{W/2}\frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{r_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{r_p}}\frac{\partial x^{s_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{s_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}}\mathcal{T}^{r_1 \ldots r_p}_{s_1 \ldots s_q} \tag{3.1.28}$$

Ou seja, a quantidade

$$T^{r_1 \ldots r_p}_{s_1 \ldots s_q} = (\sqrt{g})^{W/2}\mathcal{T}^{r_1 \ldots r_p}_{s_1 \ldots s_q} \tag{3.1.29}$$

define um tensor ordinário. Ou seja, o símbolo de Levi-Civita ϵ_{ijk} por exemplo, que tem peso 1, pode ser definido como um tensor no sentido usual a partir de:

$$\varepsilon_{ijk} = \sqrt{g}\epsilon_{ijk} \tag{3.1.30}$$

3.2 O símbolo de Christoffel

Elwin Bruno Christoffel (1829-1900) foi um físico e matemático alemão, com amplas contribuições em ambas as áreas, sendo lembrado principalmente pelas suas publicações em geometria diferencial. Muito do desenvolvimento do cálculo tensorial ao fim do século XIX e início do século XX, em especial os trabalhos por parte de Ricci e Levi-Civita, se deve aos seus resultados, o que alavancou a formulação da relatividade geral no mesmo período. Dichrilet, embora não tenha sido seu orientador formalmente, exerceu grande influência sobre Christoffel durante sua formação enquanto estudava na universidade de Berlim, no período entre 1850 a 1856. A despeito de sua natureza solitária, a clareza de suas aulas era altamente elogiada por alguns de seus contemporâneos, como Heinrich Timerding. Por motivos de saúde Christoffel se aposentou em 1894, abandonando de seu cargo na Universidade de Strasbourg. Ele continuou trabalhando independentemente até sua morte, em Março de 1900, e não tendo se casado, não deixou descendentes.

3.2.1 Símbolos de Christoffel

O símbolo de Christoffel surge naturalmente em diversos contextos, se tratando da geometria diferencial sua aparição mais imediata é na equação de geodésicas e no estudo de derivadas covariantes. Sua introdução pode também se dar de várias maneiras - optaremos aqui por defini-los inicialmente em termos das bases.

Tome um vetor da base $\boldsymbol{e}_i$ num sistema de coordenadas x^i. A derivada parcial deste vetor pode ser representada a partir de uma combinação linear dos elementos da própria base. Os coeficientes desta cobinação linear são denotados por ${\Gamma_{ij}}^k$ e recebem o nome de símbolos de Christoffel. Em outras palavras

$$\frac{\partial \boldsymbol{e_i}}{\partial x^j} = {\Gamma_{ij}}^k \boldsymbol{e_k} \tag{3.2.1}$$

esses são os símbolos de Christoffel de *segundo* tipo. Ou seja, conhecendo-os sabemos como os vetores da base variam ao longo do espaço. Em bases constantes, como a base cartesiana, esperamos que todos os coeficientes ${\Gamma_{ij}}^k \boldsymbol{e^k}$ sejam identicamente nulos. Podemos também calcular o produto escalar de ambos os lados da equação com a base contravariante, o que resulta na forma alternativa

Definição 10. *O símbolo de Christoffel (de segundo tipo) é definido como:*

$$ {\Gamma_{ij}}^k = \boldsymbol{e^k} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e_i}}{\partial x^j} \tag{3.2.2}$$

Tentaremos agora, em um exemplo, encontrar os símbolos geometricamente.

***Exemplo** 3.6*: Encontraremos dois dos símbolos de Christoffel que deescrevem a variação do versor $\boldsymbol{e}_\theta$ devido à uma pequena variação no raio. Isto é, buscamos

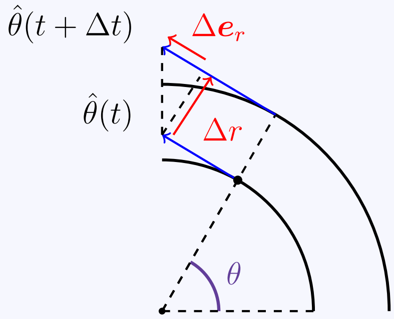
$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial r} = {\Gamma_{\theta r}}^r \boldsymbol{e}_r + {\Gamma_{\theta r}}^\theta \boldsymbol{e}_\theta \tag{3.2.3}$$

Começaremos desenhando os versores $\boldsymbol{e}_\theta$ após uma pequena variação na posição Δr. Por semelhança de triângulos vemos que ela se relaciona com o módulo da variação de $\boldsymbol{e}_\theta$:

$$\frac{\Delta \boldsymbol{e}_\theta}{\Delta r} = \frac{|\boldsymbol{e}_\theta|}{r} \tag{3.2.4}$$

No limite diferencial

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial r}\right| = \frac{1}{r}|\boldsymbol{e}_\theta|$$



Como a variação do vetor é tangencial a trajetória podemos escrever a derivada vetorialmente como

$$\boldsymbol{e}_\theta = \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\theta$$

Isso nos permite concluir que

$$\Gamma_{\theta r}{}^{r} = 0 \quad e, \quad \Gamma_{\theta r}{}^{\theta} = \frac{1}{r} \tag{3.2.5}$$

Existe também o símbolo de Christoffel de *primeiro* tipo, conforme definimos a seguir

Definição 11. *O símbolo de Christoffel (de primeiro tipo) é definido como:*

$$\Gamma_{ijk} = g_{kl}\Gamma_{ij}{}^{l} \tag{3.2.6}$$

ou,

$$\Gamma_{ijk} = \boldsymbol{e_k} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e_i}}{\partial x^j} \tag{3.2.7}$$

Vale frisar que o processo não pode ser interpretado como um abaixamento de índice, pois não estamos trabalhando com um tensor, conforme mostraremos.

3.2.2 Lei de transformação

Iremos agora obter uma equação que relaciona os coeficiemtes em diferentes sistemas de coordenadas, o que nos mostrará que: (i) a quantia não corresponde à um tensor e (ii) a propriedade de simetria dos índices inferiores. Podemos obter essa lei de transformação barrando as variáveis na definição (3.2.2). Em seguida basta utilizar as equações de transformação para vetores contravariantes e covariantes.

No sistemas de coordenadas barrado, vale

$$\bar{\Gamma}_{ij}{}^{k} = \bar{\boldsymbol{e}}^{k} \cdot \frac{\partial \bar{\boldsymbol{e}}_i}{\partial \bar{x}^j} \tag{3.2.8}$$

Se utilizarmos as leis de transformação das bases e da derivada partial a relação acima se torna

$$\bar{\Gamma}_{ij}{}^{k} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^t} \boldsymbol{e}^t \cdot \left[\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial}{\partial x^s} \left(\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \boldsymbol{e}_r \right) \right] \tag{3.2.9}$$

Usando a regra do produto para derivar o termo entre parênteses:

$$\bar{\Gamma}_{ij}{}^{k} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^t} \boldsymbol{e}^t \cdot \left[\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial x^s} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^i} \boldsymbol{e}_r \right]$$

Como o produto escalar é linear, a expressão acima fica:

$$\bar{\Gamma}_{ij}{}^{k} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^t} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \left(\boldsymbol{e}^t \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial x^s} \right) + \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^t} \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^i} (\boldsymbol{e}^k \cdot \boldsymbol{e}_r)$$

O primeiro termo entre parênteses é simplesmente $\Gamma_{rs}{}^{t}$, e no segundo termo usamos a condição $(\boldsymbol{e}^k \cdot \boldsymbol{e}_r) = \delta^r_k$, o que nos permite obter a lei de transformação buscada.

Resultado 9. *O símbolo de Christoffel se transforma de acordo com a relação*

$$\bar{\Gamma}_{ij}{}^{k} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^t} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \Gamma_{rs}{}^{t} + \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^t} \frac{\partial^2 x^t}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^i} \tag{3.2.10}$$

Vemos então que o símbolo de Christoffel não se transforma da mesma maneira que um tensor, devido à existência do segundo termo na equação acima.

Se o sistema de coordenadas x_i é euclidiano, onde os vetores que formam a base são constantes ao longo de todo o espaço, então os coeficientes são nulos em todos os pontos, e o resultado acima nos permite obter $\bar{\Gamma}_{ij}{}^{k}$ em termos das relações entre os dois sistemas de coordenadas, através das derivadas parciais:

$$\bar{\Gamma}_{ij}{}^{k} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^t} \frac{\partial^2 x^t}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^i} \tag{3.2.11}$$

Como as derivadas parciais comutam, concluímos que o símbolo de Christoffel é simétrico em relação aos índices inferiores. O mesmo vale para os dois primeiros índices do símbolo de primeiro tipo, naturalmente.

3.2.3 Expressão explícita

Podemos obter uma expressão explcícita para os símbolos de Christoffel a partir da relação entre o tensor métrico e as bases. Se derivarmos a equação $g_{il} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$ obtemos

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} = \boldsymbol{e}_i \cdot \frac{\boldsymbol{e}_l}{\partial x^j} + \frac{\boldsymbol{e}_i}{\partial x^j}\boldsymbol{e}_l$$

que em termos dos ímbolos de Christoffel fica,

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} = \Gamma_{lji} + \Gamma_{ij} \tag{3.2.12}$$

podemos agora realizar o mesmo cálculo, desta vez permutando os índices, a fim de obter as seguintes expressões:

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} = \Gamma_{jil} + \Gamma_{lij} \tag{3.2.13}$$

e,

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = \Gamma_{ilj} + \Gamma_{jli} \tag{3.2.14}$$

agora, basta somar as duas primeiras equações e subtrair a terceira, pois assim obtemos:

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = {\color{blue}\Gamma_{lji}} + {\color{red}\Gamma_{ijl}} + {\color{red}\Gamma_{jil}} + {\color{green}\Gamma_{lij}} - {\color{green}\Gamma_{ilj}} - {\color{blue}\Gamma_{jli}}$$

Se usarmos a propriedade de simetria dos índices inferiores obtemos, finalmente

Resultado 10. *O símbolo e Christoffel do primeiro tipo é escrito em termos do tensor métrico como*

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right] \tag{3.2.15}$$

Este resultado nos permite calcular os símbolos muito mais rapidamente, dada uma métrica. É virtualmente impossível calculá-los a partir da (3.2.2) para sistemas de coordenadas arbitrárias.

Exemplo *3.7*: Calcularemos agora os símbolos de Christoffel para coordenadas parabólicas. Eles se relacionam com as coordenadas cartesianas usuais através das equações:

$$\begin{aligned} x^1 &= \eta\xi \\ x^2 &= \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2) \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Isto nos dá o seguinte tensor métrico:

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} \eta^2+\xi^2 & 0 \\ 0 & \eta^2+\xi^2 \end{pmatrix} \tag{3.2.17}$$

Veja então que $g_{12} = g_{21} = 0$. Assim, as únicas derivadas que precisamos computar são

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{11}}{\partial \eta} &= \frac{\partial g_{22}}{\partial \eta} = 2\eta \\ \frac{\partial g_{11}}{\partial \xi} &= \frac{\partial g_{22}}{\partial \eta} = 2\xi \end{aligned}$$

Os símbolos de Christoffel de primeiro tipo associados valem então

$$\begin{array}{ll} \Gamma_{111} = \eta & \Gamma_{112} = -\xi \\ \Gamma_{211} = \Gamma_{121} = \xi & \Gamma_{212} = \Gamma_{122} = \eta \\ \Gamma_{221} = -\eta & \Gamma_{222} = \xi \end{array} \tag{3.2.18}$$

Diferente da base cartesiana, a base nesse sistema não é constante ao longo do espaço, portanto os símbolos não-nulos que obtemos estão de acordo com o esperado.

3.3 A derivada covariante

Nesta seção introduziremos um tipo de derivada que se comporta tensorialmente - caráter que a derivada parcial usual não possui, conforme mostraremos algebricamente e geométricamente. A derivada covarianet será uma ferramente útil pois nos permitirá trabalhar com alguns processos geométricos mais sofisticados, inclusive com a generalização das operações de divergência e rotacional.

3.3.1 Formulação algébrica

Tomemos um campo vetorial v^i. Analisaremos como a derivada parcial este campo se comporta numa transformação de coordemadas $x^j \to \bar{x}^j$. O primeiro passo consiste em utilizar a regra da cadeia a fim de relacionar as derivadas particias nos dois sistemas de coordenadas distintos

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\left(\frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^i} v_u\right) = \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial}{\partial x^s}\left(\frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^i} v_u\right) \tag{3.3.1}$$

Derivando o termo entre parênteses:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\left(\frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial v_u}{\partial x^s} + \frac{\partial^2 x^u}{\partial x^s \partial \bar{x}^i} v_u\right)$$

ou,

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x^j} = \underbrace{\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial v_u}{\partial x^s}}_{Tensor} + \frac{\partial^2 x^u}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^i} v_u \tag{3.3.2}$$

Ou seja, o processo de diferenciação de um tensor não preserva o caráter tensorial! [5] Isso fica explícito devido ao segundo termo no lado direito da equação. Contudo, perceba que a segunda derivada acima é similar ao segundo termo na lei de transformação do símbolo de Christoffel, conforme calculamos na (3.2.10). Em virtude deste fato tentaremos agora escrever a segunda derivada em função de Γ. Começaremos multiplicando a equação em questão por $\partial x^u/\partial \bar{x}^k$, pois isso elimina $\partial \bar{x}^k/\partial x^t$ e nos permite "isolar" a segunda derivada:

$$\frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^k}\overline{\Gamma}_{ij}{}^{k} = \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\Gamma_{st}{}^{u} + \frac{\partial^2 x^u}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^i}$$

Podemos então reescrever o termo contendo a segunda derivada por meio da equação acima, e a (3.3.2) se torna

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial v_u}{\partial x^s} + v_u\left[\frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^k}\overline{\Gamma}_{ij}{}^{k} - \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\Gamma_{st}{}^{u}\right]$$

Mas $\frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^k} v_u$ é simplesmente $\bar{v}^k$. Finalmente, após rearranjar a equação acima e colocar alguns termos em evidência obtemos a fórmula:

[5] Existem inclusives justificativas mais geométricas (e formais) para este fato. A principal é que o processo de diferenciação consiste avalar a diferença entre o vetor em dois pontos *distintos* do espaço. Estes vetores vivem em espaços tangenciais $T(M_p)$ e $T(M_q)$ distintos.

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}^j} - \bar{v}^k \overline{\Gamma}_{ij}{}^k = \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^i}\left[\frac{\partial v_u}{\partial x^s} - v_u \Gamma_{st}{}^u\right] \tag{3.3.3}$$

E está feito, o termo entre colchetes se transforma como um tensor! Essa expressão motiva a definição de um novo tipo de derivada, que chamaremos de *derivada covariante*: com algumas propriedades particularmente úteis (i) o caráter tensorial que acabamos de ver, (ii) propriedades análogas àquelas da derivada ordinária e (iii) algumas propriedades e aplicações geométricas, que não abordaremos profundamente aqui mas podem ser encontradas em qualquer texto usual de relatividade geral ou geometria diferencial.

Definição 12. ***A derivada covariante***
A derivada covariante de um ***vetor covariante*** *é definida como:*

$$\nabla_j v_k = \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - v_k \Gamma_{ij}{}^k \tag{3.3.4}$$

Perceba que o índice do vetor se contrai com o indíce superior do símbolo de Christoffel no segundo termo.

Perceba que no sistema cartesiano a derivada covariante coincide com a derivada parcial usual. O fato da derivada partial não corresponder à um tensor também tem caráter geométrico - a princípio não sabemos distinguir as mudanças decorrente do vetor, de fato, das mudanças decorrente á variação da base, que muda ponto a ponto. A introdução da derivada covariante nos permite computar a mudança "real"do vetor, compensando essa diferença.

Tentar calcular o diferencial total de um vetor pode tornar essa carcterística geométrica da derivada covariante mais explícita:

$$d\boldsymbol{v} = d(v^i \boldsymbol{e}_i) = (dv_i)\boldsymbol{e}_i + v_i d\boldsymbol{e}_i \tag{3.3.5}$$

Pela regra da cadeia podemos calcular esses diferenciais totais a partir das derivadas parciais, de acordo com

$$d\boldsymbol{v} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} dx^j \boldsymbol{e}_i + v_i \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j} dx^j$$

Mas pela relação

$$\frac{\partial \boldsymbol{e_i}}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}{}^k \boldsymbol{e_k}$$

assim, após fazermos a troca de índices $i \rightarrow k$ no primeiro termo, a equação acima pode ser representada por

$$d\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^j} + v_i {\Gamma_{ij}}^k \boldsymbol{e_k}\right) \boldsymbol{e}_k dx^j$$

ou,

$$d\boldsymbol{v} = (\nabla_j v^k)\boldsymbol{e}_k dx^j \tag{3.3.6}$$

Como não desenvolvemos alguns pontos comuns da geometria diferencial, como o conceito de espaço tangente, por exemplo, não sondaremos muito a fundo estas propriedades de caráter mais geométrico.

3.3.2 Formulação geométrica

Nós também podemos nos apoiar em alguns argumentos geométricos para definir a derivada covariante: veremos como as componentes de um vetor se comportam em diferentes pontos numa superfície M. Para isso, considere a i-ésima componente do vetor num ponto q, que se relaciona com a componente num ponto p numa vizinhança de acordo com

$$v_i(q) = v_i(p) + dv_i(p) \tag{3.3.7}$$

ou seja, $dv_i(p)$ representa uma diferença infinitesimal. Note que não podemos considerar essa diferença como sendo tensorial, visto que calculamos as componentes em pontos distintos na superfície. Agora precisaremos introduzir conceito de transporte paralelo:

Definição 13. ***Transporte paralelo***
O transporte de um vetor de um ponto p para um ponto q numa vizinhança é dito paralelo se existe um sistema de coordenadas $\bar{x}$, denominado sistema geodésico, se e somente se, as componentes do novo metor se mantém constantes. Isto é:

$$d\bar{v}_i(p) = v_i(q) - v_i(p) = 0 \tag{3.3.8}$$

Há duas exigências óbvias a respeito da diferença $d\bar{v}_i(p)$: i) se os pontos p e q coincidem, isto é se $dx^i(p) = 0$, então naturalmente a diferença $d\bar{v}_i(p)$: é nula, e ii) se $v_i(p)$ se anula em algum ponto p, o mesmo ocorre com a diferença. Assim, iremos supor que essa diferença depende bilinearmente de $dx^i(p)$ e de $v_i(p)$: [6]

[6] Claro que neste momento é impossível saber que o coeficiente linear que ${\Gamma_{ij}}^k$ que foi escrito acima de fato se trata do símbolo de Christoffel, mas isso pode ser provado após obtermos a expressão para a derivada covariante. Essa informação foi tomada como dada por razões

$$d\bar{v}_k(p) = \Gamma_{ij}{}^k v_k(p) dx^j \tag{3.3.9}$$

Assim, chamaremos de vetor paralelamente transportado o vetor (3.3.7).

Considere agora que o ponto p tem coordenadas $(x^1, ..., x^n)$ e que o ponto q tem coordenadas $(x^1 + \delta x^1, ..., x^n + \delta x^n)$. Tomaremos agora, em contrapartida, um vetor $u^i(q) = v_k(p) + \delta v_k(p)$ não paralelamente transportado, que pode ser obtido a partir de uma expansão de Taylor:[7]

$$v_k(p)(x + \delta x) = v_k(p) + \frac{\partial v_k}{\partial x^j} \delta x^j(p) \tag{3.3.10}$$

Se chamarmos o segundo termo de

$$\delta v_k(p)(x) = \frac{\partial v_k}{\partial x^j} \delta x^j(p) \tag{3.3.11}$$

Temos então que:

$$u_k(q) = v_k(p)(x + \delta x) = v_k(p) + \delta v_k(p)(x) \tag{3.3.12}$$

A última etapa da formulação geométrica consiste em calcular a diferença $u_k(q) - v_k(q)$, que é vetorial, já que ambos os vetores são calculados no mesmo ponto, e para isso a ideia de transporte paralelo se mostrará importante.

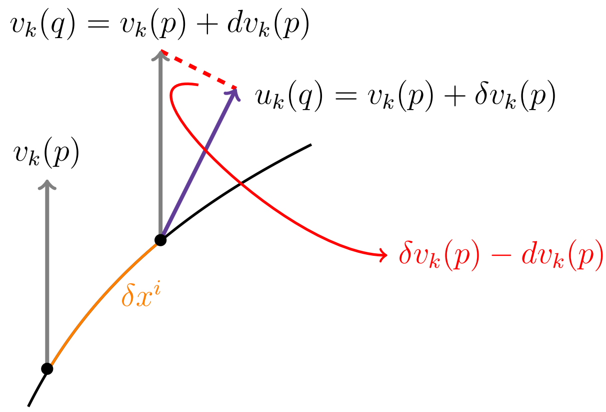


Figura 8: O vetor paralelamente transportado foi desenhado em cinza, e o vetor não paralelamente transportado em violeta.

Essa diferença pode ser escrita como:

didáticas, a fim de simplificar as passagens mais adiantes. Mas a princípio é possível escrever o coeficiente como um termo arbitrário c_{ij}^k e sem seguida demonstrar que ele é de fato o símbolo de Christoffel.

[7] o primeiro termo entre parênteses indica simplesmente o índice (p ou q) do ponto no qual o vetor se encontra

$$u_k(q) - v_k(q) = \delta v_k(p) - dv_k(p) \tag{3.3.13}$$

A derivada covariante é obtida a partir dessa diferença, de maneira análoga à derivada ordinária do cálculo diferencial. Tomamos a diferença acima e calculamos sua razão com respeito a $\delta x^j(p)$, com os pontos p e q infinitamente próximos, isto é:

$$_j v_k = \lim_{\delta x^j(p)\to 0} \frac{u_k(q) - v_k(q)}{\delta x^j(p)} \tag{3.3.14}$$

veja que essa difereça simplesmente representa:

$$\nabla_j v^k = \lim_{\delta x^j(p)\to 0} \frac{\text{Vetor paralelo} - \text{Vetor não paralelo}}{\delta x^j(p)} \tag{3.3.15}$$

ou,

$$\nabla_j v_k = \lim_{\delta x^j(p)\to 0} \frac{\delta v_k(p) - dv_k(p)}{\delta x^j(p)} \tag{3.3.16}$$

Assim, finalmente obtemos:

$$\nabla_j v_k = \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - v_k {\Gamma_{ij}}^k \tag{3.3.17}$$

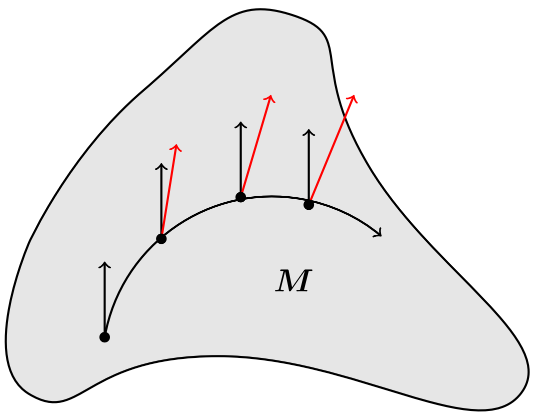


Figura 9: Representação de um vetor paralelamente transportado numa superfície M, em preto.

Problemas 3

Problema 3.1: Prove a (3.1.13), que nos diz como calcular as componentes do tensor métrico conjugado.

Problema 3.2: Mostre que $v^i = g^{ij} v_j$

Problema 3.3: Através do tensor métrico, mostre que as componentes covariantes e contravariantes coincidem no espaço euclideano.

Problema 3.4: (Tensor calculus - David. C. Kay) Mostre que em qualquer sistema de coordenadas $(x^1, ..., x^n)$ o vetor $v^i = g^{i\alpha}$ é normal à superfície $x^\alpha = \text{const}$

Problema 3.5: Converta ϵ^{ijk} para uma densidade tensorial de ordem 0 por meio de g.

Problema 3.6: Calcule os símbolos de christoffel de primeiro tipo para o sistema de coordenadas hiperbólico.

Problema 3.7: Encontre uma expressão para a derivada covariante de um tensor contravariante. Como você espera que seja a expressão para a derivada covariante de um tensor misto de segunda ordem ?

Problema 3.8: Mostre que

$$\nabla_j g_{kl} = 0$$

Problema 3.9: Mostre a derivada covariante com respeito a índices distintos, em geral, não comuta. Isto é, obtenha a seguinte expressão:

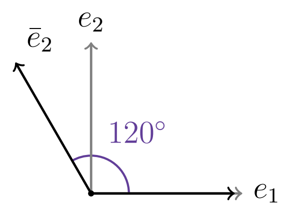
$$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) A^k = \left(\frac{\partial \Gamma^l_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^k_{il}}{\partial x^j} + \Gamma_{im}^{\ \ k} \Gamma_{jl}^{\ \ m} - \Gamma_{jm}^{\ \ k} \Gamma_{il}^{\ \ m}\right) A^k \tag{3.3.18}$$

O termo entre parênteses é o tensor de Riemann R^k_{lij}, e é nulo somente no espaço tempo plano (Um exemplo no qual este tensor não é nulo é o de uma superfície esférica, que tem uma única componente independente $R^\theta_{\varphi\theta\varphi} = \sin^2\theta$).

4 Soluções

4.1 Capítulo 1

Problema 1.1: i) O versor e_1 permanece inalterado, e o versor e_2 sofre uma rotação de 30 graus no sentido anti-horário:



ii) A matriz inversa é:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

Deste modo, as componentes contravariantes ficam:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

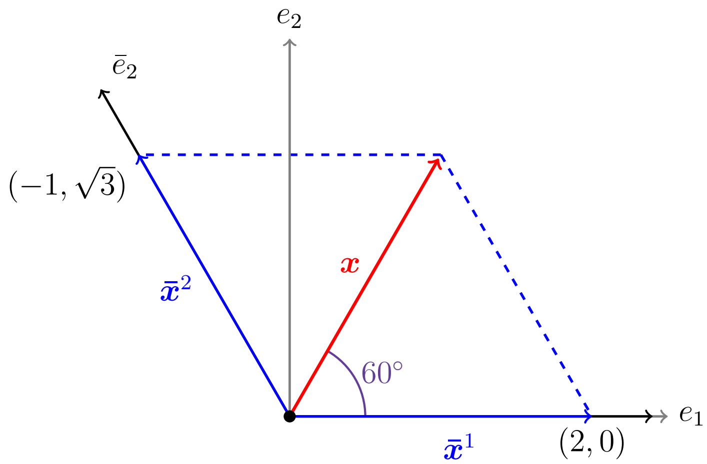
Fazendo a multiplicação:

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= x^1 + \frac{\sqrt{3}}{3} x^2 = 2 \\ \bar{x}^2 &= \frac{2\sqrt{3}}{3} x^2 = 2 \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Vetorialmente, no plano cartesiano, estas componentes ficam:

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathbf{1}} &= \bar{x}^1 \bar{\boldsymbol{e}}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 \\ \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathbf{2}} &= \bar{x}^2 \bar{\boldsymbol{e}}_2 = -\boldsymbol{e}_1 + \sqrt{3}\boldsymbol{e}_2\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Esboçando:



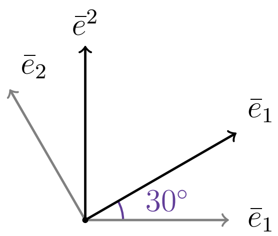
iii) A base recíproca se transforma da mesma maneira que as componentes contravariantes do vetor:

$$\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{e}}^1 \\ \bar{\boldsymbol{e}}^2\end{pmatrix} = S^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2\end{pmatrix} \tag{4.1.3}$$

Como as bases cartesianas $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}^1$ coincidem, a expressão acima gera as equações

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{e}}^1 &= \boldsymbol{e}^1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{e}^2 \\ \bar{\boldsymbol{e}}^2 &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{e}^2\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Esboçando os novos eixos,



Agora, as componentes covariantes valem

$$\begin{pmatrix}\bar{x}^1 & \bar{x}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^1 & x^2\end{pmatrix} S \tag{4.1.5}$$

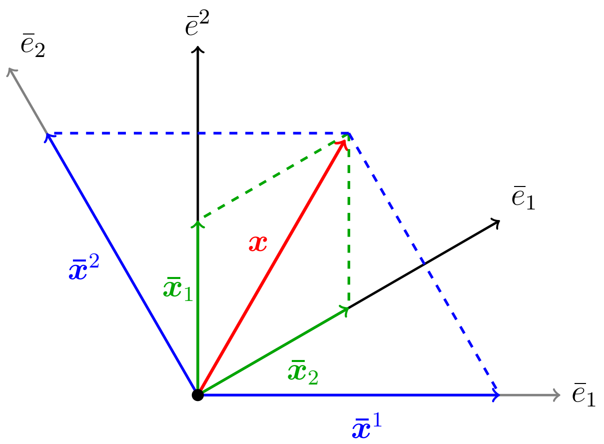
Expressão que nos leva a

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 =& x^1 = 1\\ \bar{x}_2 =& -\frac{1}{2}x^1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 = 1\end{aligned}$$

Assim, os vetores correspondentes às componentes são,

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}} =& \bar{x}_1\bar{\boldsymbol{e}}^1 = \boldsymbol{e}^1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{e}^2\\ \bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{2}} =& \bar{x}_2\bar{\boldsymbol{e}}^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{e}^2\end{aligned}$$

Obtemos, ao desenhar no plano cartesiano:



Problema 1.2: As componentes cartesianas são obtidas através das componentes covariantes por meio da expressão

$$\begin{pmatrix}x^1\\x^2\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}\bar{x}^1\\\bar{x}^2\end{pmatrix}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} x^1 &= a\bar{x}^1 + c\bar{x}^2 \\ x^2 &= b\bar{x}^1 + d\bar{x}^2 \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

E portanto:

$$\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} = a, \quad \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} = c, \quad \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} = b, \quad \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} = d \tag{4.1.7}$$

Agora, lembre-se que as componentes covariantes se transformam de acordo com:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} S \tag{4.1.8}$$

Equação matricial que corresponde as equações

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= a x_1 + c x_2 \\ \bar{x}_2 &= b x_1 + d x_2 \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Com o auxilio da (4.1.7) percebemos que a expressão acima é simplesmente

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} x_1 + \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} x_2 \\ \bar{x}_2 &= \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} x_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} x_2 \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Na convenção de Einstein:

$$\bar{x}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} x_i \tag{4.1.11}$$

A prova para a equação que diz respeito as componentes contravariantes é análoga.

Problema 1.3: i) O único termo não-nulo da soma é o termo para o qual $i = j$, portanto $\delta_{ij} x_i = x_j$.

ii) Como há índices repetidos, deve ser realizada uma soma:

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

iii) Note que j e k são índices livres nesta expressão. O único termo não nulo é o termo para o qual $j = i$ e $k = i$. Ou seja, só haverá um termo não-nulo, valendo 1, se $k = j$. Isso signfica que $\delta_{ij}\delta_{ik} = 1$ se $k = j$ e $\delta_{ij}\delta_{ik} = 0$ se $k \neq j$. Portanto:

$$\delta_{ij}\delta_{ik} = \delta_{kj}$$

iii) Escrevendo

$$\delta_{ij}\epsilon_{ijk} = \epsilon_{iik}$$

Rapidamente percebemos que $\delta_{ij}\epsilon_{ijk} = 0$, pois ϵ é nulo sempre que há índices repetidos.

iv) Se utilizarmos

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

Com $j = l$, a expressão acima fica:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijm} = \delta_{jj}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kj}$$

Mas de acordo com resultado do item iii) $\delta_{jm}\delta_{kj} = \delta_{km}$, e pelo resultado do item ii) $\delta_{jj} = 3$, logo

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijm} = 3\delta_{km} - \delta_{km} = 2\delta_{km}$$

v) Basta utilizar o resultado anterior, tomando $m = k$:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 2\delta_{kk} = 6$$

Problema 1.4: A multiplicação entre os elementos da i-ésima linha da matriz A pelo elementos da j-ésima coluna da matriz B correspondem ao elemento c_{ij} da matriz.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

Escrevendo explicitamente:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b2j + ... + a_{ip}bpj$$

Isso corresponde à soma:

$$c_{ij} = a_{ik} b_{kj} \tag{4.1.12}$$

Com k indo de 1 até p. Perceba que os índices livres i e j indicam a linha fixada na matriz A e a coluna fixada na matriz B, respectivamente.

- **Problema 1.5**: O determinante de uma matriz $C = AB$ é dado por:

$$\det(C) = \epsilon_{ijk} c_{1i} c_{2j} c_{3k} \tag{4.1.13}$$

Mas lembre-se que podemos escrever os elementos da matriz C como $c_{ij} = a_{ik} b_{kj}$ (Não confunda esses índices com os da expressão acima, não há relação entre eles!). Logo, c_{1i} equivale a $a_{1l} b_{li}$, e assim sucessivamente. Deste modo, reescrevemos a expressão para a determinante como:

$$\det(C) = \epsilon_{ijk} a_{1l} b_{li} a_{2m} b_{mj} a_{3n} b_{nk} = \epsilon_{ijk} b_{li} b_{mj} b_{nk} a_{1l} a_{2m} a_{3n}$$

Agora, basta utilizar a relação dada que obtemos

$$\det(C) = \epsilon_{lmn} a_{1l} a_{2m} a_{3n} \det(B)$$

A soma claramente corresponde ao determinante da matriz A, o que nos permite concluir que

$$\det(C) = \det(AB) = \det(A) \det(B) \tag{4.1.14}$$

- **Problema 1.6**: Temos

$$\boldsymbol{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = x_i (\mathbf{y} \times \mathbf{z})_i \tag{4.1.15}$$

Mas a i-ésima componente de $\mathbf{y} \times \mathbf{z}$ é dada por

$$(\mathbf{y} \times \mathbf{z})_i = \epsilon_{ijk} y_j z_k \tag{4.1.16}$$

Assim, a expressão para o produto triplo fica:

$$\boldsymbol{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \epsilon_{ijk} x_i y_j z_k$$

Mas esta é simplesmente a determinante de uma matriz. Veja que para que a expressão acima coincida com a (1.4.4), do exemplo 5, basta tomar $a_{1i} = x_i$, $a_{2j} = y_j$ e $a_{3k} = z_k$. Ou seja:

$$\boldsymbol{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \tag{4.1.17}$$

Problema 1.7: O produto escalar é dado por

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{y})_i (\mathbf{w} \times \mathbf{z})_i$$

Mas,

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_i = \epsilon_{ijk} x_j y_k$$

e

$$(\mathbf{w} \times \mathbf{z})_i = \epsilon_{ilm} w_l z_m$$

Então a expressão do produto escalar se torna

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{z}) = \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} x_j y_k w_l z_m \tag{4.1.18}$$

Como $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$, encontramos:

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{z}) = \delta_{jl}\delta_{km} x_j y_k w_l z_m - \delta_{jm}\delta_{kl} x_j y_k w_l z_m$$

O primeiro termo é não-nulo quando $l = j$ e $m = k$, assim

$$\delta_{jl}\delta_{km} x_j y_k w_l z_m = x_j w_j y_k z_k = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$$

Já para o segundo termo, encontramos:

$$-\delta_{jm}\delta_{kl} x_j y_k w_l z_m = -x_j z_j y_k w_k = -(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{w})$$

O que finalmente nos leva à:

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{w}) \tag{4.1.19}$$

Que coincide com o resultado dado pelo determinante.

Problema 1.8: Podemos escrever

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\phi) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\boldsymbol{\nabla}\phi)_k \tag{4.1.20}$$

Como a k-esima componente do gradiente é simplesmente

$$(\boldsymbol{\nabla}\phi)_k = \frac{\partial \phi}{\partial x_k}$$

A expressão vetorial inicial fica:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\phi) = \epsilon_{ijk}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j \partial x_k}$$

Usaremos so fatos de que a ordem sob a qual as derivadas parciais são realizadas e de que ϵ é antissimétrico em relação aos índices j e k, mantendo i fixo. Isto é, pelas propriedades

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\phi}{\partial x_j \partial x_k} &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x_k \partial x_j} \\ \epsilon_{ijk} &= -\epsilon_{ikj} \end{aligned} \tag{4.1.21}$$

Vemos que:

$$\epsilon_{ijk}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j \partial x_k} = -\epsilon_{ikj}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_k \partial x_j}$$

Mas veja que j e k se tratam de índices repetidos, em ambas as expressões, portanto podemos simplismente fazer a troca $j \to k$ e $k \to j$ no lado direito da equação sem afetar a soma, obtendo:

$$\epsilon_{ijk}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j \partial x_k} = -\epsilon_{ijk}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j \partial x_k} \tag{4.1.22}$$

Mas isso só é verdade se a expressão é identicamente nula, portanto concluímos que:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\phi) = \epsilon_{ijk}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \tag{4.1.23}$$

- **Problema 1.9**: Para a primeira identidade podemos escrever:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) = \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v})_k \boldsymbol{e}_i \tag{4.1.24}$$

Mas,

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v})_k = \epsilon_{klm}\frac{\partial v_m}{\partial x_l}\boldsymbol{e}_i$$

Assim, a equação inicial se torna

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) = \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\frac{\partial^2 v_m}{\partial x_l \partial x_j}\boldsymbol{e}_i$$

Após utilizar a identidade de Levi-Civita para eliminar os ϵ:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\frac{\partial^2 v_m}{\partial x_l \partial x_j}\boldsymbol{e}_i$$

Assim, teremos que $l = i$ e $m = j$ para o primeiro termo da expressão, e $m = i$ e $l = j$ para o segundo termo, gerando

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)\boldsymbol{e}_i - \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}\boldsymbol{e}_i$$

Ou seja, a identidade fica:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{v} \tag{4.1.25}$$

Para demosntrar a segunda identidade podemos começar escrevendo

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial(v_j u_k)}{\partial x_i} \tag{4.1.26}$$

Após utilizar a regra do produto:

$$\epsilon_{ijk}\frac{\partial(v_j u_k)}{\partial x_i} = \epsilon_{ijk}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}u_k + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}v_j\right)$$

Mas como $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij}$, podemos escrever o primeiro termo como:

$$\epsilon_{kij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}u_k = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v})_k u_k = \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v})$$

Já para o segundo termo perceba que $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$, o que nos permite reescrevê-lo como:

$$\epsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}v_j = -\epsilon_{jik}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}v_j = -(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u})_j v_j = -\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u})$$

O que finalmente nos leva à identidade procurada:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}) \tag{4.1.27}$$

4.2 Capítulo 2

- **Problema 2.1**: Basta calcular os produtos matriciais

$$\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

as outras duas bases são:

$$\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 2.2: Para provar que o produto resulta em um escalar basta barrar as componentes e usar as leis de transformação

$$\bar{u}_i \bar{v}^i = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} u^r \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^i} v^s = \delta^r_s u_r v^s = u_r v^r = u_i v^i \tag{4.2.1}$$

Problema 2.3: Utilizando a propriedade de simetria de T e em seguida a antissimetria de S temos que

$$T^{ij} S_{ij} = T^{ji} S_{ij} = -T^{ji} S_{ji} \tag{4.2.2}$$

Como i e j são índices repetidos, podemos fazer a troca $i \leftrightarrow j$, obtendo:

$$T^{ij} S_{ij} = -T^{ij} S_{ij} \implies T^{ij} S_{ij} = 0 \tag{4.2.3}$$

Problema 2.4: Iremos escrever

$$T_{rs} = \frac{\partial}{\partial x^s} A_r - \frac{\partial}{\partial x^r} A_s \tag{4.2.4}$$

o caráter antissimétrico de $\boldsymbol{T}$ é óbvio, pois

$$T_{sr} = \frac{\partial}{\partial x^r} A_s - \frac{\partial}{\partial x^s} A_r = -\left(\frac{\partial}{\partial x^s} A_r - \frac{\partial}{\partial x^r} A_s \right) = -T_{rs}$$

Agora veremos como o objeto se transforma. Após uma transformação de coordenadas $\bar{x} = \bar{x}(x_1, .., x_n)$ ele passa ser:

$$\bar{T}_{ij} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} \bar{A}_i - \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} \bar{A}_j \tag{4.2.5}$$

Ao utilizar a regra da cadeia para as derivadas parciais obtemos

$$\bar{T}_{ij} = \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial}{\partial x^s} \bar{A}_i - \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^r} \bar{A}_j$$

Agora, utilizando a covariância de $\boldsymbol{A}$, temos

$$\bar{T}_{ij} = \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial}{\partial x^s} \left(\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} A_r \right) - \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} A_s \right)$$

Como as derivadas parciais comumtam, a expressão acima se torna

$$\bar{T}_{ij} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^s}A_r - \frac{\partial}{\partial x^r}A_s\right) = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}T_{rs} \tag{4.2.6}$$

o que mostra que o tensor é covariante.

Problema 2.5: Rearranjando a lei de transformação do tensor misto como

$$\bar{T}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}T^r_s\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} = J_{ir}T^r_s(J^{-1})_{sj} \tag{4.2.7}$$

Fica claro que

$$\bar{T}^i_j = J_{ir}T^r_s(J^{-1})_{sj} = J_{ir}(TJ^{-1})_{rj} = (JTJ^{-1})_{ij}$$

Portanto:

$$\bar{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{T}\boldsymbol{J}^{-1} \tag{4.2.8}$$

Agora fazemos o mesmo para o tensor covariante. Temos que

$$\bar{T}_{ij} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}T_{rs}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} \tag{4.2.9}$$

que corresponde a expressão

$$\bar{T}^i_j = (J^{-1})_{ri}T^r_s(J^{-1})_{sj} = (J^{-1})_{ri}(TJ^{-1})_{rj}$$

Como $(J^{-1})_{ri} = (J^{-1})^T_{ir}$, a expressão acima se torna

$$\bar{T}^i_j = ((J^{-1})^T TJ^{-1})_{ij}$$

assim, concluímos que

$$\bar{\boldsymbol{T}} = (\boldsymbol{J}^{-1})^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{J}^{-1} \tag{4.2.10}$$

Problema 2.6: Como o tensor é covariante vale que

$$\bar{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{T}\boldsymbol{J}^T \tag{4.2.11}$$

Ao multiplicar a expressão acima por $\bar{\boldsymbol{T}}^{-1}$ obtemos:

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{T}\boldsymbol{J}^T\bar{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{-1}}$$

Agora multiplicamos pelo inverso da Jacobiana:

$$\boldsymbol{J}^{-1} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{J}^T\bar{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{-1}}$$

E fazemos o mesmo com a matriz $\boldsymbol{T}$ e a matriz $\boldsymbol{J}^T$, obtendo:

$$\bar{\boldsymbol{T}}^{-\mathbf{1}} = (\boldsymbol{J}^{-1})^T \boldsymbol{T}^{-1} \boldsymbol{J}^{-1} \tag{4.2.12}$$

Que é a transformação de um tensor covariante.

Problema 2.7: A Jacobiana da transformação é

$$\bar{\boldsymbol{J}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{J}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{x^1} \\ 1 & \dfrac{1}{x^1} \end{pmatrix}$$

Utilizando a relação $\bar{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{T}\boldsymbol{J}^{-1}$:

$$\bar{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{x^1} \\ 1 & \dfrac{1}{x^1} \end{pmatrix}$$

Ao concluir a multiplicação obtemos:

$$\bar{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{4}{x^1} \\ x^1 & 2 \end{pmatrix} \tag{4.2.13}$$

Como $x^1 = 2$, temos:

$$\bar{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 2.8: Ao multiplicar a equação pelo inverso da condutividade achamos

$$\boldsymbol{\sigma}^{-1}\boldsymbol{J} = \boldsymbol{E}$$

Como $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma}^{-1}$, segue que $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{J}$ e $\rho_{ij} = \sigma_{ij}^{-1}$, portanto basta encontrar os elementos da inversa. Portanto

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21}} \begin{pmatrix} \sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{21} & \sigma_{11} \end{pmatrix}$$

Veja que quando a matriz de condutividade é diagonal ($\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$), as fórmulas para a resistividade são familiares:

$$\rho_{11} = \frac{1}{\sigma_{11}}, \quad \rho_{22} = \frac{1}{\sigma_{22}}, \quad \rho_{12} = 0, \quad \rho_{21} = 0$$

Problema 2.9: O tensor misto obedece a equação

$$\bar{T}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}T^r_s \tag{4.2.14}$$

Fazendo $j = i$ temos

$$\bar{T}^i_i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}T^r_s$$

E por conseguinte,

$$\bar{T}^i_i = \delta^r_s T^r_s = T^r_r \tag{4.2.15}$$

Problema 2.10: Se tomarmos $j = i$ na equação de um tensor covariante, temos

$$\bar{T}_{ii} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}T_{rs}$$

que em geral não é invariante.

Problema 2.11: O vetor $\boldsymbol{S}$ e o tensor $\boldsymbol{U}$ obedecem

$$\bar{S}_k = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^t}S^t$$
$$\bar{U}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{r_1}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{r_p}}\frac{\partial x^{s_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{s_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}}U^{r_1\ldots r_p}_{s_1\ldots s_q}$$

Como

$$\bar{T}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q u}\bar{S}^u = \bar{U}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$$

temos que

$$\bar{T}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q u}\frac{\partial \bar{x}^u}{\partial x^t}S^t = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{r_1}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{r_p}}\frac{\partial x^{s_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{s_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}}U^{r_1\ldots r_p}_{s_1\ldots s_q}$$

Mas pela relação inicial $\bar{T}^{r_1\ldots r_p}_{s_1\ldots s_q t}S^t = U^{r_1\ldots r_p}_{s_1\ldots s_q}$

$$\bar{T}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q u}S^t\frac{\partial \bar{x}^u}{\partial x^t} = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{r_1}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{r_p}}\frac{\partial x^{s_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{s_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}}T^{r_1\ldots r_p}_{s_1\ldots s_q l}S^l$$

Ao fazer a troca de índices $l \leftrightarrow t$ o termo S^t some e obtemos:

$$\bar{T}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q u}\frac{\partial \bar{x}^u}{\partial x^t} = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{r_1}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{r_p}}\frac{\partial x^{s_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{s_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}}T^{r_1\ldots r_p}_{s_1\ldots s_q t}$$

Multiplicando ambos os lados por $\partial x^t/\partial \bar{x}^k$:

$$\bar{T}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q u}\delta^u_k = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{r_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{r_p}} \frac{\partial x^{s_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{s_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k} T^{r_1 \dots r_p}_{s_1 \dots s_q t}$$

Concluímos então que $\boldsymbol{T}$ é um tensor de ordem indicada:

$$\bar{T}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q k} = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{r_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{r_p}} \frac{\partial x^{s_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{s_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k} T^{r_1 \dots r_p}_{s_1 \dots s_q t} \tag{4.2.16}$$

■ **Problema 2.12**: O ponto de partida para encontrar uma expressão para o tensor de inércia é a expressão vetorial dada no enunciado. Começaremos escrevendo a equação em termos das componentes:

$$L_i = m[\epsilon_{ijk} r_j (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})_k] \tag{4.2.17}$$

Fazendo o mesmo para o produto vetorial que restou:

$$L_i = m[\epsilon_{ijk} r_j (\epsilon_{klm} \omega_l r_m)]$$

Como $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij}$ temos que:

$$L_i = m[\epsilon_{kij} \epsilon_{klm} \omega_l r_j r_m$$

Ao utilizar a identidade de Levi-Civita obtemos:

$$L_i = m[(\delta^i_l \delta^j_m - \delta^i_m \delta^j_l) \omega_l r_j r_m]$$

O que resulta em

$$L_i = m[\omega_i r_j r_j - \omega_j r_j r_i]$$

Faremos a substituição $\omega_i = \delta^i_j \omega_j$ para que o índice de ω em ambos os termos coincida, e faremos a troca de índice $j \to k$ no primeiro termo para não violar a convenção de soma (índices não devem aparecer mais de duas vezes), obtendo:

$$L_i = m\omega_j (\delta^i_j r_k r_k - r_j r_i)$$

Comparando com a equação $L_i = I_{ij}\omega_j$ concluímos que:

$$I_{ij} = m(\delta_{ij} r_k r_k - r_i r_j) \tag{4.2.18}$$

■ **Problema 2.13**: Para $i = 1$ e $j = 1$ o momento de inércia fica:

$$I_{11} = \int ((r_1)^2 + (r_1)^2 + (r_3)^2 - r_1 r_1) dm = \int ((r_2)^2 + (r_3)^2) dm$$

como $dm = \rho dx^1 dx^2 dx^3$ a integral acima fica¿

$$I_{11} = \int_0^a \int_0^a \int_0^a ((r_2)^2 + (r_3)^2) dx^1 dx^2 dx^3 \tag{4.2.19}$$

O que resulta em:

$$I_{11} = \frac{2\rho a^5}{3} = \frac{2ma^2}{3} \tag{4.2.20}$$

Obtemos os mesmos resultados para I_{22} e I_{33}. Agora, para I_{12}:

$$I_{12} = -\int r_1 r_2 dm = -\int_0^a \int_0^a \int_0^a r^1 r^2 dr^1 dr^2 dr^3$$

Integral que resulta em:

$$I_{11} = -\frac{\rho a^5}{4} = -\frac{ma^2}{4} \tag{4.2.21}$$

As componentes restantes do tensor têm o mesmo valor. Assim, concluímos que o ternsor de inércua do cubo é:

$$\boldsymbol{I} = ma^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{pmatrix} \tag{4.2.22}$$