Modelos Determinísticos de Investigação Operacional

Universidade do Minho

RELATÓRIO

Incêndios Florestais

André Gonçalves (a80368), Diogo Gonçalves (a81860), Luís Alves (a80165), Rafaela Rodrigues (a80516)

Questão 1

Modelo Primal

Parâmetros:

n - número de nodos na rede

c_{ij} – tempo de propagação entre os nodos ij, $\forall\, i, j \in [1, .., n]$

o – nodo de origem

Variáveis de decisão:

x_{ij} – número de caminhos que passam no arco entre i e j ; $i, j \in [1, .., n]$

Função objetivo:

$$\text{Min Z} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \times c_{ij}$$

Sujeito a:

$a)\ \sum_{i=1}^{n} x_{oi} = n - 1\ ;$

$$b) \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_{ji} - 1\ ;\ j \in [1, .., n]$$

$c)\ x_{ij} \geq 0;\ \forall\, i, j \in [1, .., n]$

Função Objetivo: o objetivo é minimizar a soma dos custos dos arcos que ligam os nodos.

Restrições:

a) O número de caminhos a partir da origem é n-1 (precisa de chegar a todos os nodos exceto origem).
b) O número de caminhos que chegam até ao nodo j é igual ao número de caminhos que saem do nodo j mais um, uma vez que um dos caminhos definidos é até j.
c) Todos os caminhos são maiores ou iguais a 0.

Modelo Dual

Parâmetros:

n - número de nodos na rede

c_{ij} – tempo de propagação entre os nodos ij, $\forall\, i, j \in [1, .., n]$

o – nodo de origem

Variáveis de decisão:

t_i – instante de tempo em que o fogo chega ao nodo i, $i \in [1..n]$

Função objetivo:

$$\text{Max Z} = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

Sujeito a:

$a)\ t_o = 0;$

$b)\ t_j - t_i \leq c_{ij}\ ; \forall\, i, j \in [1, .., n]$

$c)\ t_j \geq 0;\ \forall\, i \in [1, .., n]$

Função Objetivo: o objetivo é maximizar os instantes de tempo em que o fogo chega a cada um dos nodos.

Restrições:

a) O instante de tempo em que o fogo atinge o nodo inicial é zero.
b) A diferença temporal entre a chegada do fogo ao nodo j a partir do nodo i é menor ou igual ao tempo de propagação entre os nodos i e j. Assim, como a função objetivo é de maximização, será escolhido o tempo mais curto de propagação até um dado nodo a partir de todos os nodos com caminhos para o dado nodo.
c) O instante de tempo em que o fogo chega a determinado nodo é maior ou igual a zero.

Solução do problema para a instância

Resolvendo a instância sugerida, o valor da solução obtida é de 1880 tanto no modelo dual como no modelo primal. Para além disso, é possível verificar na árvore de caminhos mais curtos que de facto as soluções são equivalentes.

Solução do Primal

nPathsN	0	0	0	0	0	0	0	nPathsS	42	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0		16	0	18	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0		14	0	0	3	7	4	0
	0	0	0	0	0	0	0		3	7	1	2	6	1	1
	0	0	0	0	0	0	0		2	6	0	1	5	0	0
	0	0	0	0	0	0	0		1	1	3	0	0	2	0
	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0
nPathsE	6	5	4	3	2	1	0	nPathsO	0	0	0	0	0	0	0
	25	24	5	4	3	2	0		0	0	0	0	0	0	0
	1	0	17	13	5	0	0		0	0	0	0	0	0	0
	10	2	0	0	0	2	0		0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0
	0	4	0	0	4	1	0		0	0	0	0	0	0	0
	0	0	2	1	0	1	0		0	0	0	0	0	0	0

Solução do Dual

0	4	8	12	14	16	20
10	14	16	19	21	24	27
20	24	26	28	30	34	36
30	32	36	38	40	44	46
41	41	45	47	51	54	57
52	52	54	58	60	62	65
61	63	64	68	70	72	74

Questão 2

Nota: Assume-se que a célula a proteger é conhecida, tal como a célula de ignição. Assume-se também que está protegida se o instante de chegada é posterior à constante *g*. Caso a célula a proteger não fosse conhecida, a função objetivo alterar-se ia para *maxmin* dos tempos de chegada do fogo a cada nodo. No entanto, não foi essa a nossa interpretação do enunciado mas fica aqui registada a outra possível interpretação dada à questão.

Parâmetros:

n - número de nodos na rede

c_{ij} – tempo de propagação entre os nodos ij, $\forall\ i \in [1,..,n],\ \ \forall\ j \in \{1,..,n\}$

Δ - constante de retardamento

g – constante que define se a célula está protegida

b – número de recursos disponíveis

o – nodo de origem

p – nodo a proteger

Variáveis de decisão:

$$x_i \begin{cases} 1 & \text{se é colocado um recurso no nodo i,} \quad i \in [1,..,n] \\ & 0 \ \ \textit{caso contrário} \end{cases}$$

t_i – instante de tempo de chegada do fogo ao nodo i, $i \in [1,..,n]$

Função objetivo:

$$\text{Max } Z = t_p$$

Sujeito a:

a) $t_o = 0;$
b) $t_p \geq g;$
c) $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq b;$
d) $t_j - t_i \leq c_{ij} + \Delta x_i;\ \forall\ i \in [1,..,n]\ ;\ \forall\ j \in \{1,..,n\}$
e) $t_i \geq 0\ ;\ \ \forall\ i \in [1,..,n]\ ;$
f) $x_i \in \{0,1\};$

Função Objetivo: o objetivo é maximizar o instante de chegada do fogo à célula protegida.

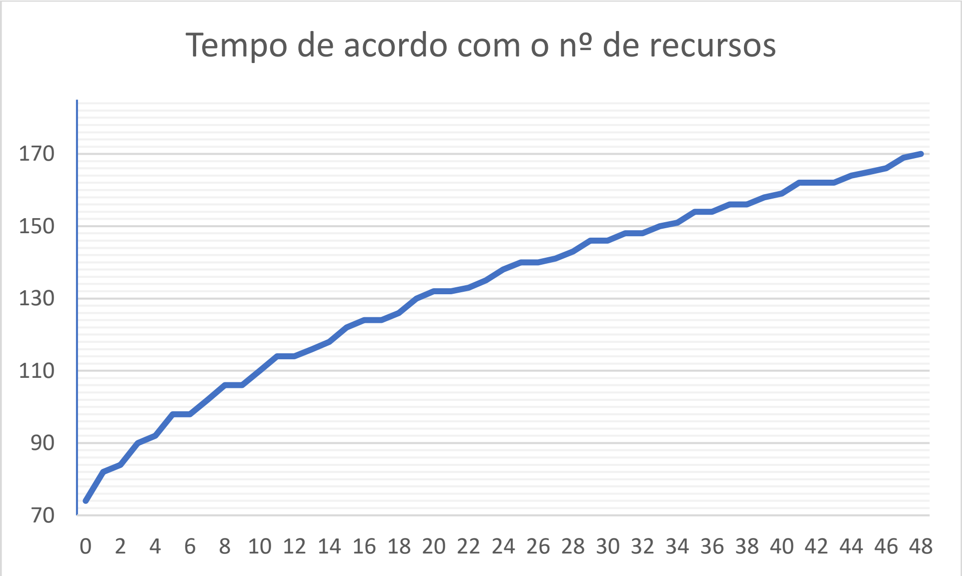
Restrições:

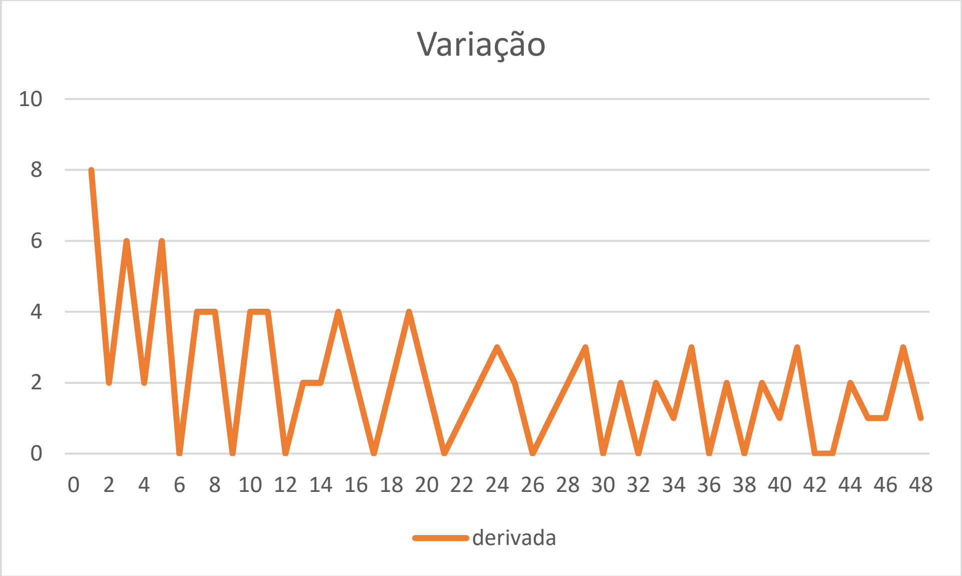
d) O instante de tempo em que o fogo chega à origem é 0.
e) O instante de tempo em que o fogo chega à célula a ser protegida tem de ser superior à constante que indica que a célula está protegida.
f) A soma dos recursos usados tem de ser inferior ou igual aos recursos disponíveis
g) A diferença temporal entre o instante de chegada do fogo a uma célula e uma adjacente é igual ao menor tempo de propagação entre a célula e as suas adjacentes, tendo em consideração a possibilidade de as adjacentes estarem protegidas e assim alterarem o tempo de propagação.
h) O instante de tempo em que o fogo chega a cada célula é superior ou igual a 0.
i) Um recurso é ou não colocado (variável binária).

Resolução no OPL (ver fogos2.xlsx)

Devem ser colocados recursos nas células (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1), (7,6), (6,7).

O fogo atingirá a célula a proteger passados 106 instantes de tempo.





Dado que o fogo precisa de se propagar para sudeste, e não o pode fazer na diagonal, é natural que os aumentos mais significativos sejam a cada 2 novos recursos, já que colocando um recurso a sul ou este, apenas faz com que o fogo escolha uma outra direção com valor similar anteriormente. Para além disso, é evidente que a adição de mais um recurso até aos 19 recursos é a que mais impacto tem na proteção da célula.

Questão 3

Nota: Assume-se que em cada cenário apenas pode ocorrer uma ignição, isto é, havendo ignição num nodo tal que t = 0, mais nenhum nodo pode ter t = 0 com a ignição definida no primeiro nó.

Parâmetros:

n - número de nodos na rede

c_{ij} – tempo de propagação entre os nodos ij, $\forall\, i \in [1,..,n],\ \forall\, j \in \{1,..,n\}$

Δ - constante de retardamento

d – duração do fogo

b – número de recursos disponíveis

p – probabilidade de ignição no nodo i, $\forall\, i \in [1,..,n]$

Variáveis de decisão:

$x_i \begin{cases} 1 \quad \text{se é colocado um recurso no nodo i}, \quad i \in [1,..,n] \\ \qquad\qquad 0 \quad \textit{caso contrário} \end{cases}$

$t_{ij} - \text{instante de tempo em que o nodo i arde após ignição em j}, i \in [1,..,n], j \in [1,..,n]$

$b_{ij} \begin{cases} 1 \quad \text{se nodo i arde d instantes após ignição em j}, i \in [1,..,n], j \in [1,..,n] \\ \qquad\qquad 0 \quad \textit{caso contrário} \end{cases}$

Função objetivo:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_j * b_{ij}$$

Sujeito a:

a) $t_{ii} = 0;\ i \in [1,..,n]$
b) $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq b;$
c) $t_{jk} - t_{ik} \leq c_{ij} + \Delta x_i;\ \forall\, i \in [1,..,n];\ \forall\, j \in \{1,..,n\}, \forall\, k \in \{1,..,n\}$
d) $t_{ij} \geq 0\ ;\ \ \forall\, i \in [1,..,n], \forall\, j \in [1,..,n];$
e) $t_{ij} \geq d(1 - b_{ij});\ \ \forall\, i \in [1,..,n], \forall\, j \in [1,..,n];$
f) $b_{ij} \ \in \{0,1\};\ \forall\, i \in [1,..,n], \forall\, j \in [1,..,n];$
g) $x_i \ \in \{0,1\};\ \forall\, i \in [1,..,n], \forall\, j \in [1,..,n];$

Função Objetivo: o objetivo é minimizar o nº de células ardidas, tendo associado o peso da probabilidade de isso acontecer.

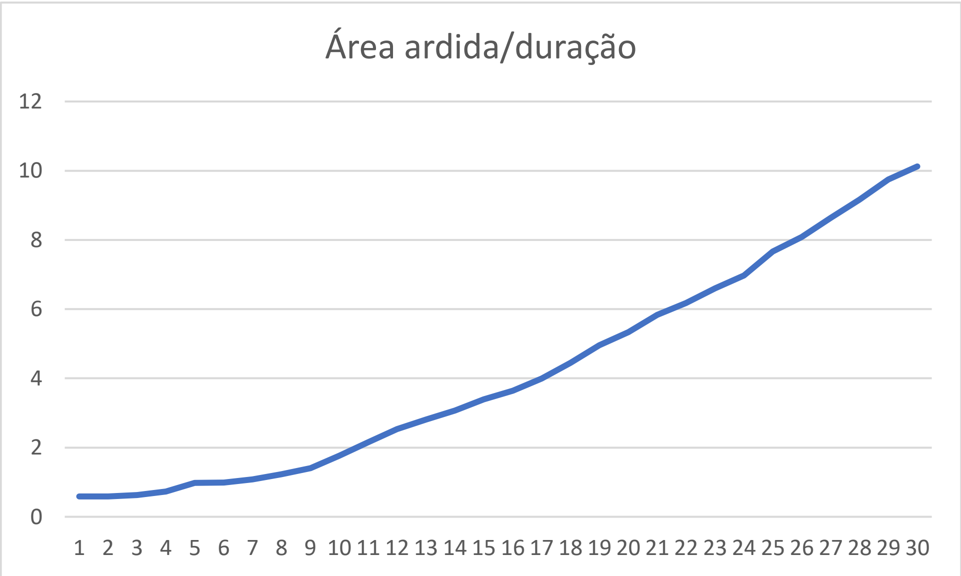
Restrições:

a) O instante de tempo em que o fogo chega ao nodo que deu origem à ignição, é sempre 0.
b) A soma dos recursos usados tem de ser inferior ou igual aos recursos disponíveis.
c) A diferença temporal entre o instante de chegada do fogo a uma célula e uma adjacente é igual ao menor tempo de propagação entre a célula e as suas adjacentes, tendo em consideração a possibilidade de as adjacentes estarem protegidas e assim alterarem o tempo de propagação. Esta restrição aplica-se a cada uma das possíveis ignições.
d) O instante de tempo em que o fogo chega a cada célula é superior ou igual a 0
e) Se o instante de chegada do fogo a um nó for superior a d, então a célula não arde d instantes após a ignição (b_{ij} = 0). Se o instante de chegada do fogo for inferior a d, então a célula arde.
f) b é uma variável binária.
g) x é uma variável binária.

Resolução no OPL (ver fogos3.xlsx)

Devem ser colocados recursos nas células (3,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,6), (4,2), (5,3).

O valor esperado de área ardida será de 2.538 nodos.



É possível verificar que à medida que a duração aumenta, a área ardida parece aumentar não linearmente, mas sim exponencialmente, o que faz sentido, uma vez que quanto maior a duração, maior a área ardida e consequentemente maior a frente de fogo ativa que se pode espalhar para mais nodos. Ainda assim, na resolução do modelo para durações superiores a 30, o software demorava mais de 1 minuto a resolver, pelo que se considerou dispensável a inserção de mais valores para efeitos de análise.