



Modelos Determinísticos de Investigação Operacional

Universidade do Minho

RELATÓRIO

Incêndios Florestais

André Gonçalves (a80368), Diogo Gonçalves (a81860), Luís Alves
(a80165), Rafaela Rodrigues (a80516)

Questão 1

Modelo Primal

Parâmetros:

n - número de nodos na rede

c_{ij} – tempo de propagação entre os nodos ij , $\forall i, j \in [1, \dots, n]$

o – nodo de origem

Variáveis de decisão:

x_{ij} – número de caminhos que passam no arco entre i e j ; $i, j \in [1, \dots, n]$

Função objetivo:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \times c_{ij}$$

Sujeito a:

$$a) \sum_{i=1}^n x_{oi} = n - 1$$

$$b) \sum_{i=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^n x_{ji} - 1, j \in [1, \dots, n]$$

$$c) x_{ij} \geq 0, \forall i, j \in [1, \dots, n]$$

Função Objetivo: o objetivo é minimizar a soma dos custos dos arcos que ligam os nodos.

Restrições:

- a) O número de caminhos a partir da origem é $n-1$ (precisa de chegar a todos os nodos exceto origem).
- b) O número de caminhos que chegam até ao nodo j é igual ao número de caminhos que saem do nodo j mais um, uma vez que um dos caminhos definidos é até j .
- c) Todos os caminhos são maiores ou iguais a 0.

Modelo Dual

Parâmetros:

n - número de nodos na rede

c_{ij} – tempo de propagação entre os nodos ij , $\forall i, j \in [1, \dots, n]$

o – nodo de origem

Variáveis de decisão:

t_i – instante de tempo em que o fogo chega ao nodo i , $i \in [1..n]$

Função objetivo:

$$\text{Max } Z = \sum_{i=1}^n t_i$$

Sujeito a:

a) $t_o = 0$

b) $t_j - t_i \leq c_{ij}, \forall i, j \in [1, \dots, n]$

c) $t_j \geq 0, \forall i \in [1, \dots, n]$

Função Objetivo: o objetivo é maximizar os instantes de tempo em que o fogo chega a cada um dos nodos.

Restrições:

- a) O instante de tempo em que o fogo atinge o nodo inicial é zero
- b) A diferença temporal entre a chegada do fogo ao nodo j a partir do nodo i é menor ou igual ao tempo de propagação entre os nodos i e j . Assim, como a função objetivo é de maximização, será escolhido o tempo mais curto de propagação até um dado nodo a partir de todos os nodos com caminhos para o dado nodo.
- c) O instante de tempo em que o fogo chega a determinado nodo é maior ou igual a zero.

Solução do problema para a instância

Resolvendo a instância sugerida, o valor da solução obtida é de 1880 tanto no modelo dual como no modelo primal. Para além disso, é possível verificar na árvore de caminhos mais curtos que de facto as soluções são equivalentes.

Solução do Primal

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------|----|----|----|----|---|---|---|---------|----|---|----|---|---|---|---|
| nPathsN | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | nPathsS | 42 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 16 | 0 | 18 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 14 | 0 | 0 | 3 | 7 | 4 | 0 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 3 | 7 | 1 | 2 | 6 | 1 | 1 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 2 | 6 | 0 | 1 | 5 | 0 | 0 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 1 | 1 | 3 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| nPathsE | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | nPathsO | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 25 | 24 | 5 | 4 | 3 | 2 | 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 0 | 17 | 13 | 5 | 0 | 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 10 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 4 | 0 | 0 | 4 | 1 | 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Solução do Dual

| | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 0 | 4 | 8 | 12 | 14 | 16 | 20 |
| 10 | 14 | 16 | 19 | 21 | 24 | 27 |
| 20 | 24 | 26 | 28 | 30 | 34 | 36 |
| 30 | 32 | 36 | 38 | 40 | 44 | 46 |
| 41 | 41 | 45 | 47 | 51 | 54 | 57 |
| 52 | 52 | 54 | 58 | 60 | 62 | 65 |
| 61 | 63 | 64 | 68 | 70 | 72 | 74 |

Questão 2

Nota: Assume-se que a célula a proteger é conhecida, tal como a célula de ignição. Assume-se também que está protegida se o instante de chegada é posterior à constante g . Caso a célula a proteger não fosse conhecida, a função objetivo alterar-se ia para *maxmin* dos tempos de chegada do fogo a cada nodo. No entanto, não foi essa a nossa interpretação do enunciado mas fica aqui registada a outra possível interpretação dada à questão.

Parâmetros:

n - número de nodos na rede

c_{ij} – tempo de propagação entre os nodos ij , $\forall i \in [1, \dots, n]$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$

Δ - constante de retardamento

g – constante que define se a célula está protegida

b – número de recursos disponíveis

o – nodo de origem

p – nodo a proteger

Variáveis de decisão:

$$x_i \begin{cases} 1 & \text{se é colocado um recurso no nodo } i, i \in [1, \dots, n] \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

t_i – instante de tempo de chegada do fogo ao nodo $i, i \in [1, \dots, n]$

Função objetivo:

$$\text{Max } Z = t_p$$

Sujeito a:

- a) $t_o = 0$
- b) $t_p \geq g$
- c) $\sum_{i=1}^n x_i \leq b$
- d) $t_j - t_i \leq c_{ij} + \Delta x_i; \forall i \in [1, \dots, n]; \forall j \in \{1, \dots, n\}$
- e) $t_i \geq 0; \forall i \in [1, \dots, n];$
- f) $x_i \in \{0, 1\}$

Função Objetivo: o objetivo é maximizar o instante de chegada do fogo à célula protegida

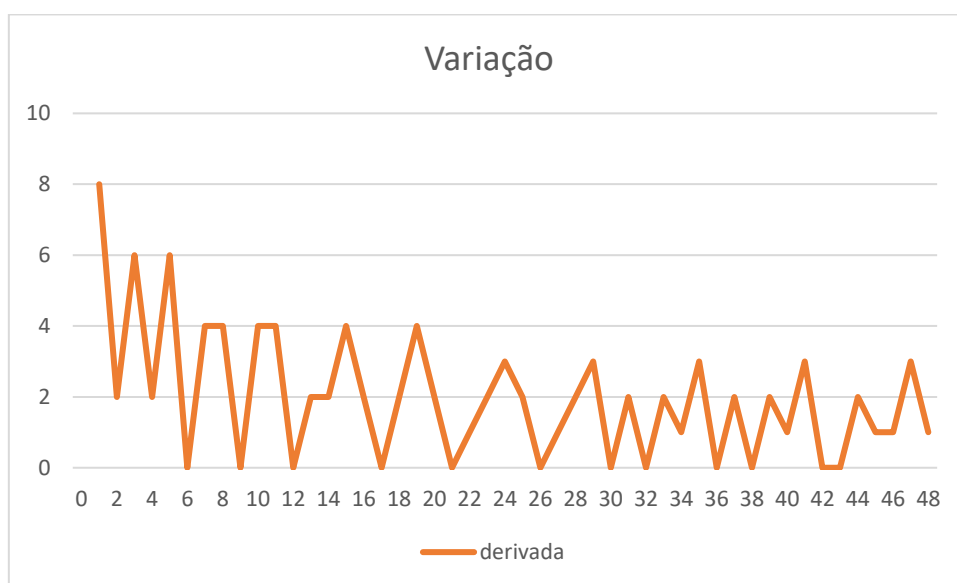
Restrições:

- d) O instante de tempo em que o fogo chega à origem é 0
- e) O instante de tempo em que o fogo chega à célula a ser protegida tem de ser superior à constante que indica que a célula está protegida
- f) A soma dos recursos usados tem de ser inferior ou igual aos recursos disponíveis
- g) A diferença temporal entre o instante de chegada do fogo a uma célula e uma adjacente é igual ao menor tempo de propagação entre a célula e as suas adjacentes, tendo em consideração a possibilidade de as adjacentes estarem protegidas e assim alterarem o tempo de propagação.
- h) O instante de tempo em que o fogo chega a cada célula é superior ou igual a 0
- i) Um recurso é ou não colocado (variável binária)

Resolução no OPL (ver fogos2.xlsx)

Devem ser colocados recursos nas células (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1), (7,6), (6,7).

O fogo atingirá a célula a proteger passados 106 instantes de tempo.



Dado que o fogo precisa de se propagar para sudeste, e não o pode fazer na diagonal, é natural que os aumentos mais significativos sejam a cada 2 novos recursos, já que colocando um recurso a sul ou este, apenas faz com que o fogo escolha uma outra direção com valor similar anteriormente. Para além disso, é evidente que a adição de mais um recurso até aos 19 recursos é a que mais impacto tem na proteção da célula.

Questão 3

Nota: Assume-se que em cada cenário apenas pode ocorrer uma ignição, isto é, havendo ignição num nodo tal que $t = 0$, mais nenhum nodo pode ter $t = 0$ com a ignição definida no primeiro nó.

Parâmetros:

n - número de nodos na rede

c_{ij} – tempo de propagação entre os nodos ij , $\forall i \in [1, \dots, n]$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$

Δ - constante de retardamento

d – duração do fogo

b – número de recursos disponíveis

p – probabilidade de ignição no nodo i , $\forall i \in [1, \dots, n]$

Variáveis de decisão:

$x_i \begin{cases} 1 & \text{se é colocado um recurso no nodo } i, i \in [1, \dots, n] \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

t_{ij} – instante de tempo em que o nodo i arde após ignição em j , $i \in [1, \dots, n]$, $j \in [1, \dots, n]$

$b_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se nodo } i \text{ arde } d \text{ instantes após ignição em } j, i \in [1, \dots, n], j \in [1, \dots, n] \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

Função objetivo:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_j * b_{ij}$$

Sujeito a:

- a) $t_{ii} = 0, i \in [1, \dots, n]$
- b) $\sum_{i=1}^n x_i \leq b$
- c) $t_{jk} - t_{ik} \leq c_{ij} + \Delta x_i; \forall i \in [1, \dots, n]; \forall j \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \{1, \dots, n\}$
- d) $t_{ij} \geq 0; \forall i \in [1, \dots, n], \forall j \in [1, \dots, n];$
- e) $t_{ij} \geq d(1 - b_{ij}); \forall i \in [1, \dots, n], \forall j \in [1, \dots, n];$
- f) $b_{ij} \in \{0, 1\}; \forall i \in [1, \dots, n], \forall j \in [1, \dots, n];$
- g) $x_i \in \{0, 1\}, \forall i \in [1, \dots, n], \forall j \in [1, \dots, n];$

Função Objetivo: o objetivo é minimizar o nº de células ardidas, tendo associado o peso da probabilidade de isso acontecer

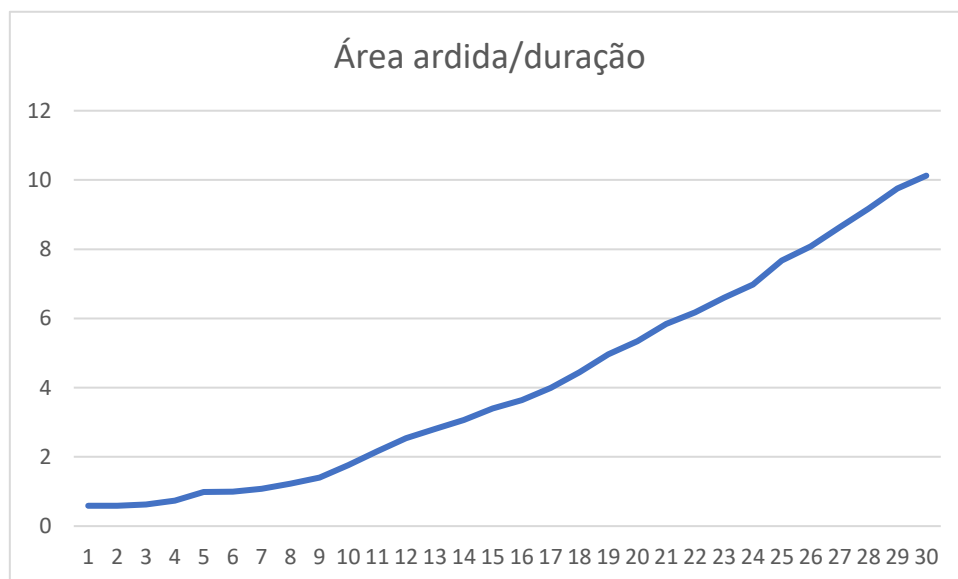
Restrições:

- a) O instante de tempo em que o fogo chega ao nodo que deu origem à ignição, é sempre 0.
- b) A soma dos recursos usados tem de ser inferior ou igual aos recursos disponíveis.
- c) A diferença temporal entre o instante de chegada do fogo a uma célula e uma adjacente é igual ao menor tempo de propagação entre a célula e as suas adjacentes, tendo em consideração a possibilidade de as adjacentes estarem protegidas e assim alterarem o tempo de propagação. Esta restrição aplica-se a cada uma das possíveis ignições.
- d) O instante de tempo em que o fogo chega a cada célula é superior ou igual a 0
- e) Se o instante de chegada do fogo a um nó for superior a d, então a célula não arde d instantes após a ignição ($b_{ij} = 0$). Se o instante de chegada do fogo for inferior a d, então a célula arde.
- f) b é uma variável binária.
- g) x é uma variável binária.

Resolução no OPL (ver fogos3.xlsx)

Devem ser colocados recursos nas células (3,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,6), (4,2), (5,3).

O valor esperado de área ardida será de 2.538 nodos.



É possível verificar que à medida que a duração aumenta, a área ardida parece aumentar não linearmente, mas sim exponencialmente, o que faz sentido, uma vez que quanto maior

a duração, maior a área ardida e consequentemente maior a frente de fogo ativa que se pode espalhar para mais nodos. Ainda assim, na resolução do modelo para durações superiores a 30, o software demorava mais de 1 minuto a resolver, pelo que se considerou dispensável a inserção de mais valores para efeitos de análise.