Instituto de Física
Universidade de São Paulo

Grupos e Tensores

4300429
Prof. João Carlos Alves Barata
1º Semestre de 2018
Níckolas de Aguiar Alves

Grupos e Tensores

4300429

Professor: João Carlos Alves Barata, DFMA-IFUSP
Notas por: Níckolas de Aguiar Alves

Nível: Graduação
Período: 1º Semestre de 2018

São Paulo
1º Semestre de 2018

Grupos e Tensores - 4300429
Professor João Carlos Alves Barata
2018

Nickolas de A. Alves

Definição 1 (Produto): seja C um conjunto e f uma função da forma $f: C \times C \to C$. Então dizemos que f é um produto.

Exemplo 1

São produtos em $\mathbb{R}$:

$f(x,y) = xy$

$f(x,y) = x + y$

$f(x,y) = x + 2^{y^{44}} + \sqrt{\pi}$

$f(x,y) = x + \operatorname{sen}(xy + x^2)$

Exemplo 2

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$$

Notação

Sejam C um conjunto e f um produto. $\forall\, x, y \in C$ teremos $f(x,y) \equiv x \cdot y$.

Definição 2 (Semigrupo): seja S um conjunto não-vazio dotado de um produto "$\cdot$" que satisfaz

- Associatividade

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \ \forall\, a, b, c \in S$

Então dizemos que S é um semigrupo.

Definição 3 (Monóide): seja M um conjunto não-vazio dotado de um produto "$\cdot$" que satisfaz

- Associatividade

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \ \forall\, a, b, c \in S$

- Existência de elemento neutro

$\exists\, e \in M;\ \forall\, a \in M,\ a \cdot e = e \cdot a = a$

Então dizemos que M é um monóide.

Observação: a unicidade do elemento neutro em um monóide é garantida, pois, se houvesse $e' \in M;\ e' \cdot a = a \cdot e' = a,\ \forall\, a \in M$, ter-se-ia que $e' = e' \cdot e = e$.

Definição 4 (Grupo): seja G um conjunto não-vazio dotado de um produto "$\cdot$" que satisfaz

- Associatividade
  $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c), \quad \forall\, a,b,c \in G$
- Existência de elemento neutro
  $\exists\, e \in G;\ \forall\, a \in G,\ a\cdot e = e\cdot a = a$
- Existência de elemento inverso
  $\forall\, g \in G,\ \exists\, g^{-1} \in G;\ g^{-1}\cdot g = g\cdot g^{-1} = e$

Então dizemos que G é um grupo.

Observação: seja $g \in G$, sendo G um grupo. Então é simples ver que g^{-1} é único, pois, ao supor que $\exists\, h \in G;\ h\cdot g = g\cdot h = e$, temos que

$$h = h\cdot e = h\cdot(g\cdot g^{-1}) = (h\cdot g)\cdot g^{-1} = e\cdot g^{-1} = g^{-1}$$

Observação: seja $g \in G$, sendo G um grupo. Então $(g^{-1})^{-1} = g$, pois

$$\begin{aligned}(g^{-1})^{-1} &= (g^{-1})^{-1}\cdot e\\ &= (g^{-1})^{-1}\cdot(g^{-1}\cdot g)\\ &= ((g^{-1})^{-1}\cdot g^{-1})\cdot g\\ &= e\cdot g\\ &= g\end{aligned}$$

Definição 5 (Grupo Abeliano): seja G um grupo com produto "$\cdot$". Se o produto "$\cdot$" for comutativo, i.e., $a\cdot b = b\cdot a,\ \forall\, a,b \in G$, diremos que G é um grupo abeliano ou comutativo. Caso "$\cdot$" não seja comutativo, pode-se dizer que G é um grupo não-comutativo ou não abeliano. A nomenclatura se extende a semigrupos e monóides.

Exemplo 3

$(\mathbb{N}, +)$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, é um semigrupo abeliano.

Exemplo 4

$(\mathbb{N}_0, +)$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$, é um monóide abeliano

Exemplo 5

$(\mathbb{Z}, +)$, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, é um grupo abeliano

$$1^{-1} = -1$$
$$2^{-2} = -2$$

Exemplo 6

$(\mathbb{N}, \cdot)$ é um monóide abeliano

Exemplo 7

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ é um monóide abeliano

Exemplo 8

$(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ e $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ são grupos abelianos

~~Exemplo 9.~~

Notação

$$Mat(\mathbb{C}, n) = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, A_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$$

$$Mat(\mathbb{R}, n) = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, A_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemplo 9

$(Mat(\mathbb{C}, n), +)$ é um grupo abeliano

$$e = [0]$$
$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$
$$[a_{ij}]^{-1} = [-a_{ij}]$$

4300429

Exemplo 10

$(Mat(\mathbb{C}, n), \cdot)$

$A(BC) = (AB)C$ ✓ é semigrupo

$A \mathbb{1} = \mathbb{1} A = A$ ✓ é monóide

Como nem toda matriz é invertível, não é grupo

$AB \neq BA$ × não é abeliano

$(Mat(\mathbb{C}, n), \cdot)$ é monóide não-abeliano.

~~[illegible]~~

Exemplo 11

$GL(\mathbb{C}, n) = \{A \in Mat(\mathbb{C}, n),\ \det A \neq 0\}$

↳ grupo linear

$A A^{-1} = A^{-1} A = \mathbb{1}$

Grupo não-abeliano $(n > 1)$

$GL(\mathbb{R}, n) = \{A \in Mat(\mathbb{R}, n),\ \det A \neq 0\}$

$GL(\mathbb{Q}, n) = \{A \in Mat(\mathbb{Q}, n),\ \det A \neq 0\}$

Exemplo 12
↳ special

$SL(\mathbb{C}, n) = \{A \in Mat(\mathbb{C}, n),\ \det A = 1\}$

$SL(\mathbb{R}, n) = \{A \in Mat(\mathbb{R}, n),\ \det A = 1\}$

$SL(\mathbb{Q}, n) = \{A \in Mat(\mathbb{Q}, n),\ \det A = 1\}$

Semigrupo ✓ (produto de matrizes é associativo)

Monóide ✓ $(\det \mathbb{1} = 1)$

Grupo ✓ $\cancel{\det AB = \det A}$ $1 = \det \mathbb{1} = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = 1 \cdot \det A^{-1} = \det$

• ainda é produto.

$A, B \in SL(\mathbb{C}, n)$.

$\det AB = \det A \cdot \det B = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow AB \in SL(\mathbb{C}, n)$

Note que: $SL(\mathbb{C}, n) \subset GL(\mathbb{C}, n)$ (SL é subgrupo)

Exemplo 13

$GL(\mathbb{Z},n) = \{A \in Mat(\mathbb{Z},n),\ \det A \neq 0\}$ é monóide, mas não grupo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \notin Mat(\mathbb{Z},n)$$

Problema:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \Delta^T$$

$\Delta \equiv$ matriz dos cofatores $\quad \Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\quad)$

Se $A \in Mat(\mathbb{Z},n)$, $\Delta \in Mat(\mathbb{Z}, n-1)$. Logo, o problema está no termo $\frac{1}{\det A}$.

Se $\det A = 1$, é um grupo

$SL(\mathbb{Z},n)$ é grupo.

Exemplo 14

Seja $\mathcal{C}$ um conjunto. ~~Definimos~~ Sejam A e B dois conjuntos. Definimos a diferença simétrica $A \Delta B$ de A e B como sendo

$A \Delta B \doteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Então $(\mathbb{P}(\mathcal{C}), \Delta)$ é um grupo abeliano, pois

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$
$$e = \phi$$
$$A \Delta \phi = \phi \Delta A = A$$
$$A^{-1} = A \qquad A \Delta A = \phi$$

Exemplo 15 - Grupo de Permutações

~~Cons~~ Seja C um conjunto não-vazio. $Perm(C) \doteq \{f: C \to C, \text{ bijetoras}\}$.

$f, g \in Perm(C) \Rightarrow f \circ g \in Perm(C)$

$f \circ id = id \circ f = f$

$f^{-1} = f^{-1}$

Exemplo 16
Grupos $(\mathbb{Z}_n, \dot{+})$

$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Algoritmo de Euclides
$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$
$a \in \mathbb{Z}$
$a = qn + r$, $q \in \mathbb{Z}$, $r \in \{i\}_{i=0}^{n-1}$

Definição 6: sejam $\mathbb{Z}_n = \{i\}_{i=0}^{n-1}$ e $\dot{+}: \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ um produto tal que $\dot{+}(a,b) \equiv a \dot{+} b := (a+b) \bmod n$.

Exemplo 17:
$\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$

$1 \dot{+} 2 = (1+2) \bmod 4 = 3 \bmod 4 = \cancel{0/1/3}\ 3 \Rightarrow 1 \dot{+} 2 = 3$
$1 \dot{+} 3 = (1+3) \bmod 4 = 4 \bmod 4 = 0 \Rightarrow 1 \dot{+} 3 = 0$
$2 \dot{+} 3 = (2+3) \bmod 4 = 5 \bmod 4 = 1 \Rightarrow 2 \dot{+} 3 = 1$
$3 \dot{+} 3 = (3+3) \bmod 4 = 6 \bmod 4 = 2 \Rightarrow 3 \dot{+} 3 = 2$

Exercício: prove que $(\mathbb{Z}_n, \dot{+})$ é um grupo.

Definição 7: seja G um grupo em relação a uma operação "$\cdot$" cujo elemento neutro é e. Um subconjunto H de G é dito ser um <u>subgrupo</u> de G se for também um grupo em relação à mesma operação "$\cdot$". Ou seja, H é subgrupo se valerem:

i) $e \in H$
ii) $h_1 \cdot h_2 \in H$, $\forall h_1, h_2 \in H$
iii) $h^{-1} \in H$, $\forall h \in H$

Observação: todo grupo possui, trivialmente, ao menos dois subgrupos: ele mesmo e o subgrupo $\{e\}$ formado apenas pelo elemento neutro.

Proposição 1: Seja G um grupo e sejam H_1 e H_2 subgrupos de G. Então $H_1 \cap H_2$ é também um subgrupo de G.

Demonstração

i) Como H_1 e H_2 são subgrupos de G, $e \in H_1$ e $e \in H_2$. Logo, $e \in H_1 \cap H_2$.

ii) Sejam $h_1, h_2 \in H_1 \cap H_2$. Então $h_1, h_2 \in H_1$ e, por H_1 ser subgrupo, $h_1 \cdot h_2 \in H_1$. De forma análoga, conclui-se que $h_1 \cdot h_2 \in H_2$. Logo, temos que $h_1 \cdot h_2 \in H_1 \cap H_2$.

iii) Seja $h \in H_1 \cap H_2$. Então $h \in H_1$ e, por H_1 ser subgrupo, sabemos que $h^{-1} \in H_1$. De forma análoga, conclui-se que $h^{-1} \in H_2$. Logo, temos que $h^{-1} \in H_1 \cap H_2$.

Desta forma, concluímos que $H_1 \cap H_2$ é subgrupo de G. ■

Proposição 2 (Generalização da Proposição 1): Seja G um grupo e seja $\{H_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de subgrupos de G. Então $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$ é também um subgrupo de G.

Demonstração:

Seja $\lambda \in \Lambda$.

i) Como H_λ é subgrupo de G, $e \in H_\lambda$, $\forall \lambda \in \Lambda$. Logo, $e \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$.

ii) Sejam $h_1, h_2 \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$. Como H_λ é subgrupo de G, $h_1 \cdot h_2 \in H_\lambda$, $\forall \lambda \in \Lambda$. Logo, $h_1 \cdot h_2 \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$.

iii) Seja $h \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$. Como H_λ é subgrupo de G, $h^{-1} \in H_\lambda$, $\forall \lambda \in \Lambda$. Logo, $h^{-1} \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$.

Desta forma, concluímos que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$ é de fato subgrupo de G. ■

Definição 8 (Corpo):

Seja $\mathbb{K}$ um conjunto não-vazio dotado de duas operações binárias $+: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ e $\cdot: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Diremos que o trio $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é um corpo se forem satisfeitas as seguintes propriedades:

(A1) $\forall a, b \in \mathbb{K}$, $a + b = b + a$ (comutatividade)

(A2) $\forall a,b,c \in \mathbb{K},\ a+(b+c)=(a+b)+c$ (associatividade)
(A3) $\exists\ 0 \in \mathbb{K};\ \forall a \in \mathbb{K},\ 0+a=a+0=a$ (elemento neutro)
(A4) $\forall a \in \mathbb{K},\ \exists -a \in \mathbb{K};\ a+(-a)=(-a)+a=0$ (elemento inverso)
(M1) $\forall a,b \in \mathbb{K},\ a\cdot b=b\cdot a$ (comutatividade)
(M2) $\forall a,b,c \in \mathbb{K},\ a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ (associatividade)
(M3) $\exists\ 1 \in \mathbb{K};\ \forall a \in \mathbb{K},\ 1\cdot a=a\cdot 1=a$ (unidade)
(M4) $\forall a \in \mathbb{K}\setminus\{0\},\ \exists a^{-1} \in \mathbb{K};\ a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$ (elemento inverso)
(D) $\forall a,b,c \in \mathbb{K},\ a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ (distributividade)

Exemplo 17:
São corpos:
$(\mathbb{Q},+,\cdot),\ (\mathbb{R},+,\cdot),\ (\mathbb{C},+,\cdot)$

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}):=\{a+b\sqrt{2};\ a,b\in\mathbb{Q}\}$ (temos que $\mathbb{Q}\subsetneq\mathbb{Q}(\sqrt{2})\subsetneq\mathbb{R}$)

$\mathbb{Q}(\sqrt{p}):=\{a+b\sqrt{p};\ a,b\in\mathbb{Q}\}$, p é primo

$\mathbb{Z}_n=\{i\}_{i=0}^{n-1}$ $\quad a \dotplus b:=(a+b) \bmod n \quad a \mathbin{\dot{\cdot}} b:=(a\cdot b) \bmod n$

$(\mathbb{Z}_n, \dotplus, \dot{\cdot})$ é corpo se, e somente se, n for primo

Definição 9 (Espaço Vetorial): sejam V um conjunto não vazio, $\mathbb{K}$ um corpo, $+: V\times V\to V$, $\cdot: \mathbb{K}\times V\to V$. Diremos que $(V,+,\mathbb{K},\cdot)$ é um espaço vetorial se valerem as seguintes afirmações:

A) V é um grupo abeliano em relação a "+"

$(A_1) \to \forall a,b \in V,\ a+b=b+a$
$(A_2) \to \forall a,b,c \in V,\ a+(b+c)=(a+b)+c$
$(A_3) \to \exists\ 0 \in V;\ \forall a \in V,\ 0+a=a+0=a$
$(A_4) \to \forall a \in V,\ \exists -a \in V;\ a+(-a)=(-a)+a=0$

$(M_1)\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K},\ v \in V,\ \alpha\cdot(\beta\cdot v)=(\alpha\beta)\cdot v$
$(M_2)\ \forall v \in V,\ 1\cdot v=v$ (1 é a unidade do corpo)
$(D_1)\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ u,v \in V,\ \alpha\cdot(u+v)=\alpha\cdot u+\alpha\cdot v$
$(D_2)\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K},\ v \in V,\ (\alpha+\beta)\cdot v=\alpha\cdot v+\beta\cdot v$

Exemplo 18:

$V =]0,1[, \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$

$\tilde{+}(a,b) \equiv a \tilde{+} b := \dfrac{ab}{1-a-b+2ab}, \quad a,b \in V$

$\tilde{\cdot}(a,\alpha) \equiv \alpha \tilde{\cdot} a := \dfrac{a^{\alpha}}{a^{\alpha}+(1-a)^{\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbb{K}, \; a \in V$

Nesse espaço vetorial, o elemento neutro da adição é $\frac{1}{2}$.

Isto é, $a \tilde{+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \tilde{+} a = a, \quad \forall a \in V.$

Exemplo 19:

$V =]0,1[\quad f: V \xrightarrow{\text{bijetora}} \mathbb{R}, \quad a,b \in V$

$a \tilde{+} b = f^{-1}(f(a)+f(b))$

$0 = f^{-1}(0)$

$\alpha \cdot a = f^{-1}(\alpha f(a))$

Exemplo 20:

$V = \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$

$\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ é espaço vetorial real

V pode ser um espaço vetorial complexo:

$V = \mathbb{R}^2 \qquad \alpha \in \mathbb{C}$

$\cancel{\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}} \notin \mathbb{R}^2$

$\alpha = x + iy, \quad x = \mathrm{Re}(\alpha), \quad y = \mathrm{Im}(\alpha)$

u3004229

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := (x\mathbb{1} + yJ)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x x_1 - y x_2 \\ y x_2 + x x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\alpha \cdot \left(\beta \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = (\alpha\beta)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha+\beta)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Note que

$$J^2 = -\mathbb{1}$$

J faz o papel de i

$$\alpha = x + iy$$

$$\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x\mathbb{1} + yJ)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Vale de forma semelhante para $\mathbb{R}^4$, por exemplo

Definição 10 (Base algébrica de um espaço vetorial). Seja $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ um espaço vetorial e seja $\mathcal{B} = \{b_\lambda, \lambda \in \Lambda\} \subset V$. Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma base algébrica de V se valerem as seguintes propriedades

i) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_{\lambda_i} = \vec{0} \Rightarrow \alpha_i = 0, \ \forall \ i \in \{i\}_{i=1}^{n}$

ii) $v \in V \Rightarrow \exists \ \beta_i \in \mathbb{K}, \ b_{\lambda_i} \in \mathcal{B}; \ v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_{\lambda_i}$

Exemplo 21:

$\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$

Definição 11: definimos a dimensão de um espaço vetorial $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ como a cardinalidade de uma de suas bases.

Observação: seja $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ um espaço vetorial. Pode-se provar que toda base de V tem a mesma cardinalidade.

Exemplo 22:

$V = \mathbb{R}, \ \mathbb{K} = \mathbb{Q}$

$x \in \mathbb{R}, \ r \in \mathbb{Q}$

$r \cdot x = rx$

$B_1 = \{1\}$ $\qquad$ $B_2 = \{x_1, x_2\}$

$r \cdot 1 = r$ $\qquad$ $\underset{\mathbb{R}}{\mathbb{R} \ni x} = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \in \mathbb{Q}$

$\pi \neq r \cdot 1 = r \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} \neq r \cdot 1 = r \in \mathbb{Q}$

Definição 12 (Álgebra): uma álgebra A é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ (em geral $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) dotado de um produto $\bullet : A \times A \to A$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c, \quad \forall\, a, b, c \in A$

ii) $(a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c, \quad \forall\, a, b, c \in A$

iii) $\alpha (a \bullet b) = (\alpha a) \bullet b = a \bullet (\alpha b), \quad \forall\, a, b \in A, \ \alpha \in \mathbb{K}$

Definição 13 (Álgebra Associativa): seja $(A, \mathbb{K}, +, \cdot, \bullet)$ uma álgebra. Dizemos que ela é uma álgebra associativa se valer que $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c, \ \forall\, a, b, c \in A$. Caso essa propriedade não valha, dizemos que A é uma álgebra não-associativa.

Definição 14 (Álgebra Abeliana): seja $(A, \mathbb{K}, +, \cdot, \bullet)$ uma álgebra. Dizemos que ela é uma álgebra abeliana, ou comutativa, se valer que $a \bullet b = b \bullet a, \ \forall\, a, b \in A$. Caso essa propriedade não valha, dizemos que A é uma álgebra não-abeliana ou não-comutativa.

4300429

Definição 15 (Álgebra Unital): seja $(A, \mathbb{K}, +, \cdot, \circ)$ uma álgebra. Dizemos que ela é unital se $\exists\, e \in A$; $a \circ e = e \circ a = a$, $\forall a \in A$.

Exemplo 23:

São álgebras

$(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \cdot)$ $x \cdot y = xy$

$(\mathbb{C}, \mathbb{C}, \cdot)$ $z \cdot w = zw$

$Pol(\mathbb{R})$ e $Pol(\mathbb{C})$

$A = Mat(\mathbb{C}, n)$ / $e = \mathbb{1}$

$A, B \in Mat(\mathbb{C}, n)$

Álgebra associativa, não-abeliana e unital

Observação

A é uma álgebra de dimensão finita e $B = \{b_i\}_{i=1}^{m}$.

$$a = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_i \qquad b = \sum_{i=1}^{m} \beta_i b_i$$

$$a \circ b = \left(\sum_{p=1}^{m} \alpha_p b_p\right)\left(\sum_{q=1}^{m} \beta_q b_q\right)$$

$$= \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \beta_q (b_p \circ b_q) \qquad b_p \circ b_q = \sum_{r=1}^{m} C_{pq}^{r}\, b_r$$

$$= \sum_{r=1}^{m} \left(\sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \beta_q C_{pq}^{r}\right) b_p \cdot b_q$$

Definição 16: denominamos os coeficientes C_{pq}^{r} de constantes de estrutura

Definição 17: seja $(\mathcal{L}, \mathbb{K}, +, \cdot, [\,,])$ uma álgebra. Dizemos que $\mathcal{L}$ é uma Álgebra de Lie se o produto da álgebra, $[\,,]$ (assim denotado por motivos históricos) satisfizer as seguintes propriedades:

i) $[a,b] = -[b,a]$ (anticomutatividade), $\forall\, a,b \in \mathcal{L}$

ii) $[[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b] = \vec{0}$, $\forall\, a,b,c \in \mathcal{L}$

(Identidade de Jacobi)

Exemplo 24:

$A = \mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - y_2 x_3 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} + (\vec{y} \times \vec{z}) \times \vec{x} + (\vec{z} \times \vec{x}) \times \vec{y} = \vec{0}$$

Exemplo 25:

Álgebra de matrizes com comutador de matrizes

$A = Mat(\mathbb{C}, n)$

$[A,B] = AB - BA \longrightarrow$ comutador de A e B

Exemplo 26

$\mathcal{A} = Mat(\mathbb{C}, n)$

$S \in Mat(\mathbb{C}, n)$ fixa

$A, B \in Mat(\mathbb{C}, n)$

$[A,B]_S := ASB - BSA$

$(\mathcal{A}, [\cdot,\cdot]_S)$ é uma Álgebra de Lie

~~Exemplo 27~~

$\mathcal{B} = \{ A \in Mat(\mathbb{C}, n),\; \tau(A) = 0 \} \subset \mathcal{A}$

$A = [a_{ij}] \in Mat(\mathbb{C}, n)$, $\quad \tau(A) := \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$

$$A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow \alpha A + \beta B \in \mathcal{B}$$

$$\tau(\alpha A + \beta B) = \alpha \tau(A) + \beta \tau(B) = 0 + 0 = 0$$

$$A, B \in \mathcal{B}$$

$$\tau([A,B]) = 0$$

$$= \tau(AB - BA)$$

$$= \tau(AB) - \tau(BA)$$

$$= 0$$

$$\mathcal{C} = \{A \in Mat(\mathbb{R}, n), A^T = -A\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \in \cancel{Mat(\mathbb{R}, n)}\ \mathcal{C}$$

$A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow [A,B] \in \mathcal{C} \Rightarrow (\mathcal{C}, [\cdot,\cdot])$ é uma álgebra de Lie

$$[A,B]^T = (AB - BA)^T$$

$$= B^T A^T - A^T B^T$$

$$= BA - AB$$

$$= [B, A]$$

$$= -[A, B]$$

Definição 18: seja $A \in Mat(\mathbb{C}, n)$. Definimos o adjunto de A, A^* (ou $A^\dagger$) por

$$(A^*)_{ij} := \overline{(A)_{ji}}$$

transposição

Exemplo 27:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

Exemplo 28

$$\mathcal{D} = \{ A_a \in Mat(\mathbb{C}, n),\ A^* = -A,\ \tau(A) = 0 \}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \qquad a + d = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \bar{a} &= -a \\ \bar{b} &= -c \\ \bar{c} &= -b \\ \bar{d} &= -d \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$$

$\mathcal{D}$ é um espaço vetorial real e uma álgebra de Lie para o comutador

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad A, B \in \mathcal{D}$$

$$(\alpha A + \beta B)^* = -(\alpha A + \beta B)$$

$$A, B \in \mathcal{D}$$

$$\begin{aligned} [A,B]^* &= (AB)^* - (BA)^* \\ &= B^* A^* - A^* B^* \\ &= BA - AB \\ &= -[A,B] \end{aligned}$$

Exemplo 29

$$M \in Mat(\mathbb{R}, n)$$

$$\mathcal{E} = \{ A \in Mat(\mathbb{R}, n),\ AM = -MA^T \}$$

$\mathcal{E}$ é uma álgebra de Lie real para o comutador

$$\begin{aligned} [A,B]M &= (AB - BA)M \\ &\cancel{= ABM - BAM = (BA - AB)M} \\ &= ABM - BAM \\ &= -AMB^T + BMA^T \end{aligned}$$

4300429

$$= -AMB^T + BMA^T$$
$$= MA^T B^T - MB^T A^T$$
$$= M(A^T B^T - B^T A^T)$$
$$= M(BA - AB)^T$$
$$= -M[A,B]^T$$

Exemplo 30

$\mathbb{R}^3$ é uma álgebra de Lie com o produto vetorial usual

$$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \vec{x} \times \vec{y} = \vec{x} \wedge \vec{y}$$

i) $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$

ii) $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) + \vec{y} \times (\vec{z} \times \vec{x}) + \vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y}) = 0$

Exemplo 31

$\mathbb{R}^2$, funções ∞-diferenciáveis com valores reais

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $\qquad q, p \in \mathbb{R}$

$$(fg)(q,p) = f(q,p)\, g(q,p)$$

$$\{f,g\}(q,p) := \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$$

↳ colchete de Poisson

i) $\{f,g\}$ é anticomutativo

ii) $\{f,g\}$ satisfaz Jacobi

$$\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0$$

Definição 19 (Homomorfismo de Grupos): sejam G e H dois grupos. Um homomorfismo de G em H é uma função $\phi: G \rightarrow H$, $G \ni g \mapsto \phi(g) \in H$, que satisfaça, $\forall\, g_1, g_2 \in G$, $\phi(g_1 \cdot g_2) = \phi(g_1) \cdot \phi(g_2)$.

ic

Observação: sejam e_G e e_H os elementos neutros de G e H. Seja $\phi: G \to H$ um homomorfismo. Então

$$\phi(e_G) = e_H$$

$$g \in G$$
$$e_G \cdot g = g$$
$$\phi(g) = \phi(e_G \cdot g) = \phi(e_G) \cdot \phi(g)$$
$$\phi(g) \cdot [\phi(g)]^{-1} = \phi(e_G) \cdot \phi(g) \cdot [\phi(g)]^{-1}$$
$$e_H = \phi(e_G) \cdot e_H$$
$$e_H = \phi(e_G)$$

Observação: sejam e_G e e_H os elementos neutros de G e H. Seja $\phi: G \to H$ um homomorfismo. Então

$$\phi(g^{-1}) = [\phi(g)]^{-1}, \quad \forall g \in G$$

$$g \cdot g^{-1} = e_G$$
$$\phi(g \cdot g^{-1}) = \phi(e_G) = e_H$$
$$\left.\begin{array}{l} \phi(g) \cdot \phi(g^{-1}) = e_H \\ \phi(g^{-1}) \cdot \phi(g) = e_H \end{array}\right\} \phi(g^{-1}) = [\phi(g)]^{-1}$$

Definição 20: seja $\phi: G \to H$ um homomorfismo. Se ϕ for sobrejetora, dizemos que ϕ é um epimorfismo. Se ϕ for injetora, dizemos que ϕ é um monomorfismo. Se ϕ for sobrejetora e injetora, i.e. se ϕ for bijetora, dizemos que ϕ é um isomorfismo entre G e H.

Exercício: seja $\phi: G \to H$ um isomorfismo. Mostre que $\phi^{-1}: H \to G$ é um homomorfismo.

Exemplo 32:

$$G = (\mathbb{R}, +), \quad H = (\mathbb{R}_+, \cdot)$$

$$\phi: G \to H$$
$$x \mapsto e^x$$

$$\phi(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = \phi(x)\phi(y)$$

$$\phi(0) = e^0 = 1$$

$$\phi(-x) = e^{-x} = (e^x)^{-1}$$

$$\phi^{-1}: H \to G$$
$$y \mapsto \log y$$

$$\phi^{-1}(y_1 \cdot y_2) = \log(y_1 \cdot y_2) = \log y_1 + \log y_2 = \phi(y_1) + \phi(y_2)$$

$$\therefore (\mathbb{R}, +) \simeq (\mathbb{R}_+, \cdot)$$

Exemplo 33:

$$G = GL(\mathbb{C}, n), \quad H = (\mathbb{C}, \cdot)$$

$$GL(\mathbb{C}, n) \ni A \mapsto \phi(A) = \det(A) \in H$$

$$\phi(A) = \det(A)$$
$$\phi(AB) = \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = \phi(A) \cdot \phi(B)$$

Definição 21 (Exponencial de Matriz): seja $A \in Mat(\mathbb{C}, n)$. Motivados pela expansão em série de Taylor da função e^x, $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$

definimos a exponecial de A, $\exp(A)$ ou e^A, por

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot A^n$$

onde convencionamos que $A^0 \equiv \mathbb{1}$.

observação:

$$(A^2)_{ij} = (AA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} A_{kj}$$

$$(A^3)_{ij} = (A^2 A)_{ij} = \sum_{k_2=1}^{n} (A^2)_{ik_2} A_{k_2 j} = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} A_{ik_1} A_{k_1 k_2} A_{k_2 j}$$

$\vdots$

$$(A^m)_{ij} = \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{n} A_{ik_1} A_{k_1 k_2} A_{k_2 k_3} \cdots A_{k_{m-2} k_{m-1}} A_{k_{m-1} j}$$

[Definição (Delta de Kronecker):

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{se } i=j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$
]

observação

$$\left(\mathbb{1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m\right)_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{n} A_{ik_1} A_{k_1 k_2} \cdots A_{k_{m-2} k_{m-1}} A_{k_{m-1} j}$$

observação

$$\left| \sum_{l=0}^{\infty} a_l \right| \leq \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} |a_l| < \infty}_{\text{absolutamente convergente}} \Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} a_l \text{ converge}$$

observação

$$|\delta_{ij}| \leq 1$$

$$A = [A_{ij}] \to [|A_{ij}|]$$

$$\mathcal{A} := \max\{|A_{ab}|,\ a,b \in \{i\}_{i=1}^{n}\}$$

$$|\delta_{ij}| + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{n} |A_{ik_1}||A_{k_1 k_2}| \cdots |A_{k_{m-2} k_{m-1}}||A_{k_{m-1} j}| \leq 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{n} \mathcal{A}^m$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \mathcal{A}^m \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{n} 1$$

$$|\delta_{ij}| + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{n} |A_{ik_1}| \cdots |A_{k_{m-1}j}| \leq 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \mathcal{A}^m \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{n} 1$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \mathcal{A}^m \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_{m-2}=1}^{n} n$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \mathcal{A}^m n^{m-1}$$

$$= 1 + \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} (\mathcal{A} n)^m$$

$$= 1 + \frac{1}{n} \left(e^{\mathcal{A} n} - 1 \right) < \infty$$

Logo, $\left(\mathbb{1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m \right)_{ij}$ existe $\forall \, ij \in \{i\}_{i=1}^{n}$.

Teorema 2: a série que define a exponencial de uma matriz é convergente.

Demonstração:
ver observações anteriores. ■

Exemplo 34:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = t \cdot N \qquad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{tN} = \mathbb{1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} t^m N^m$$

Como N é nilpotente ($\exists\, m;\ N^m = 0$), teremos que

$$e^{tN} = \mathbb{1} + tN = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se $N^k = 0$, temos, de forma geral, que

$$e^{tN} = \mathbb{1} + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{t^m}{m!} N^m$$

Exemplo 35

Matrizes diagonais

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \qquad D^m = \begin{pmatrix} d_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^m \end{pmatrix}$$

$$e^D = \mathbb{1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \begin{pmatrix} d_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} d_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} d_n^m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_n} \end{pmatrix}$$

Observação

$$\left. \begin{array}{l} M = D + N \\ DN = ND \end{array} \right\} e^M = e^D e^N$$

Toda matriz pode ser expressa como a soma de uma matriz diagonal e uma matriz nilpotente (Teorema de Decomposição de Jordan)

Exemplo 36

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to e^{\theta J} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\theta^m}{m!} J^m$$

$$\theta J = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta \in (-\pi, \pi]$$

$$J^2 = -\mathbb{1} \Rightarrow \begin{array}{l} J^{2n} = (-1)^n \mathbb{1} \\ J^{2n+1} = (-1)^n J \end{array}$$

$$e^{\theta J} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\theta^m}{m!} J^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} J^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} J^{2n+1}$$

$$\therefore \quad e^{\theta J} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} \mathbb{1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} J$$

$$= \cos\theta \cdot \mathbb{1} + \operatorname{sen}\theta \cdot J$$

$$e^{\theta J} = \cos\theta\, \mathbb{1} + \operatorname{sen}\theta\, J = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Observação

$\exists\, A, B \in Mat(\mathbb{C}, n);\ e^A e^B \neq e^{A+B}$

Teorema 3: Sejam $A, B \in Mat(\mathbb{C}, n)$; $[A,B] = 0$. Então $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$.

Demonstração:

Exercício

Observação

Fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff

$[A,B] \neq 0$

$$e^A e^B = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[A,[A,B]] + \frac{1}{12}[B,[A,B]] + \cdots\right)$$

Exemplo 37

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \qquad \dot{Y}(t) = \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix}$$

PVI ou Problema de Cauchy $\begin{cases} \dot{Y} = AY & A \in Mat(\mathbb{C}, n) \\ Y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{n0} \end{pmatrix} \end{cases}$

$\to$ solução do Problema de Cauchy

$$Y(t) = e^{tA} Y_0$$

$$Y(0) = e^{0A} Y_0 = Y_0$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}Y_0\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right)Y_0$$

$$e^{tA} = \mathbb{1} + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots$$

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = 0 + A + tA^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \cdots$$

$$= A\left(\mathbb{1} + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots\right) = A\,e^{tA}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(e^{tA}Y_0\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right)Y_0 = A\,e^{tA}Y_0 = A\,Y(t)$$

$$\dot{Y}(t) = A\,Y(t)$$

o Grupo de Heisenberg: $GH_3(\mathbb{C})$

$$GH_3(\mathbb{C}) \subset SL(\mathbb{C},3)$$

$$GH_3(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; a,b,c \in \mathbb{C} \right\}$$

$$H(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(H(a,b,c)) = 1$$

$$H(0,0,0) = \mathbb{1}$$

$$H(a,b,c)\cdot H(a',b',c') = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a' & c' \\ 0 & 1 & b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+a' & c+c'+ab' \\ 0 & 1 & b+b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= H(a+a',\, b+b',\, c+c'+ab')$$

$$\left[H(a,b,c)\right]^{-1} = H(-a,\,-b,\,ab-c)$$

$$H_1(t) = H(t,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow H_1(t)\,H_1(t') = H_1(t+t')$$

$$H_2(t) = H(0,t,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow H_2(t)H_2(t') = H_2(t+t')$$

$$H_3(t) = H(0,0,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow H_3(t)H_3(t') = H_3(t+t')$$

$H_k(t)^{-1} = H_k(-t)$, $k = 1, 2, 3$

3 subgrupos uniparamétricos do Grupo de Heisenberg

$$h_1 = \frac{d}{dt} H_1(t)\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h_2 = \frac{d}{dt} H_2(t)\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h_3 = \frac{d}{dt} H_3(t)\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Geradores dos subgrupos ~~Grupo de~~ uniparamétricos ~~Heisenberg~~ de $GH_3(\mathbb{C})$

$$e^{t h_k} = H_k(t), \quad k = 1, 2, 3$$

$\{\alpha h_1 + \beta h_2 + \gamma h_3,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}\}$ forma um espaço vetorial e uma Álgebra de Lie para o comutador

$$\forall\ H(a,b,c) \in GH_3(\mathbb{C}), \quad H(a,b,c) = e^{\alpha h_1 + \beta h_2 + \gamma h_3}$$

$$\alpha = a, \quad \beta = b, \quad \gamma = c - \frac{ab}{2}$$

[Grupo $GH_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{C} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a' \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H(a)H(a') = H(a+a')$$

$$\mathbb{1} = H(0) \qquad H(a)^{-1} = H(-a)$$

H: isomorfismo de $(\mathbb{C}, +)$ em $GH_2(\mathbb{C})$]

$$\mathcal{H}_k = \{H_k(t),\ t \in \mathbb{C}\}, \quad k = 1, 2, 3$$

$\mathcal{H}_k$ é subgrupo de $GH_3(\mathbb{C})$

↳ como os H_k dependem apenas de um parâmetro e $H_k(t)H_k(t') = H_k(t+t')$;

chamamos os $\mathcal{H}_k$ de subgrupos uniparamétricos do Grupo de Heisenberg

$$gh_3(\mathbb{C}) = \{\alpha h_1 + \beta h_2 + \gamma h_3,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}\}$$

espaço vetorial complexo

$$\alpha h_1 + \beta h_2 + \gamma h_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: h(\alpha, \beta, \gamma)$$

$gh_3(\mathbb{C})$ com o comutador estabelece uma Álgebra de Lie

$$[h(a,b,c), h(a',b',c')] = h(0,0,ab'-a'b)$$

$$\left.\begin{aligned} p &:= h_1 \\ q &:= h_2 \\ \hbar &:= i h_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow h(a,b,c) = ap + bq + \frac{1}{i} c\hbar$$

$\{p, q, \hbar\}$ são uma base de $gh_3(\mathbb{C})$

$$[p, \hbar] = 0$$
$$[q, \hbar] = 0$$
$$[p, q] = -i\hbar$$

$$gh_3(\mathbb{C}) \to GH_3(\mathbb{C})$$

$$h(a,b,c)^3 = 0$$
$$h(a,b,c)^2 = h(0,0,ab)$$

$$\begin{aligned} e^{h(a,b,c)} &= \mathbb{1} + h(a,b,c) + \frac{1}{2} h(a,b,c)^2 + 0 \\ &= \mathbb{1} + h(a,b,c) + h(0,0,\tfrac{1}{2}ab) \\ &= H\left(a,b,c+\frac{ab}{2}\right) \end{aligned}$$

$$H(a,b,c) = e^{h\left(a,b,c-\frac{ab}{2}\right)}$$

$$H(a,b,c)\,H(a',b',c') = H(a+a',\, b+b',\, c+c'+ab')$$

$$\cancel{e^{h(a,b)}\, e^{h(a',b')}}$$

$$e^{h(a,b,c-\frac{ab}{2})}\, e^{h(a',b',c'-\frac{a'b'}{2})} = e^{h(a+a',\,b+b',\,c+c'-\frac{ab}{2}-\frac{a'b'}{2}) + \frac{1}{2}h(0,0,ab'-a'b)}$$

fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff
+
na álgebra de Heisenberg, os comutadores múltiplos são nulos

$$= \exp\left(h\left(a+a',\, b+b',\, c+c' + \frac{ab'-a'b-ab-a'b'}{2}\right)\right)$$

$$= \exp\left(h\left(a+a',\, b+b',\, c+c' + ab' + \left(\frac{-ab'-a'b-ab-a'b'}{2}\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(h\left(a+a',\, b+b',\, c+c' + ab' - \frac{(a+a')(b+b')}{2}\right)\right)$$

$$= H(a+a',\, b+b',\, c+c'+ab')$$

Definição 22 (formas bilineares): Seja $\mathcal{E}$ um espaço vetorial (sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Dizemos que uma função $\omega: \mathcal{E}\times\mathcal{E}\to\mathbb{R}$ é uma forma bilinear em $\mathcal{E}$ se, $\forall\, x_i, y_i \in \mathcal{E}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, valerem:

i) $\omega(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha\,\omega(x_1, y) + \beta\,\omega(x_2, y)$

ii) $\omega(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha\,\omega(x, y_1) + \beta\,\omega(x, y_2)$

Exemplo 38:

$\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$, $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\omega(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

$$\omega(x,y) = \sum_{k=1}^{n-j} x_k y_k$$

$p_i \in \mathbb{R}$

$$\omega(x,y) = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k y_k$$

Notação: $\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$

Exemplo 39:

$$\omega_A(x,y) = \langle x, Ay \rangle_{\mathbb{R}}, \quad A \in \mathcal{M}_{at}(\mathbb{R}, n)$$

Definição 23: sejam $\mathcal{E}$ um espaço vetorial (sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $\omega : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear. Dizemos que ω é simétrica se, $\forall\ x, y \in \mathcal{E}$, $\omega(x,y) = \omega(y,x)$.

Definição 24: sejam $\mathcal{E}$ um espaço vetorial (sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $\omega : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear. Dizemos que ω é positiva se, $\forall\ x \in \mathcal{E}$, $x \neq 0$, $\omega(x,x) > 0$.

Definição 25: sejam $\mathcal{E}$ um espaço vetorial (sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $\omega : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ uma forma simétrica. Dizemos que ω é não-degenerada se, ~~$\forall$~~ dado $x \in \mathcal{E}$, $\omega(x,y) = 0\ \forall\ y \in \mathcal{E} \Rightarrow x = 0$.

Observação sobre o Exemplo 39

ω é simétrica $\Leftrightarrow A = A^T$

ω é não-degenerada $\Leftrightarrow A$ é inversível ($\det A \neq 0$)

Exemplo 40:

$$A = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ \cdots \ 1}^{p} & \overbrace{-1 \ \cdots \ -1}^{n-p} \end{pmatrix}$$

$$\omega_A(x,y) = \sum_{k=1}^{p} x_k y_k - \sum_{k=p+1}^{n} x_k y_k$$

$$\omega_A(x,x) = \sum_{k=1}^{p} x_k^2 - \sum_{k=p+1}^{n} x_k^2$$

Exemplo 41:

$\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$, ω forma bilinear em $\mathcal{E}$

$GL(n)$ – matrizes inversíveis agindo em $\mathbb{R}$

$\mathcal{Q} = \{ M \in GL(n);\ \omega(Mx, My) = \omega(x,y),\ \forall\ x,y \in \mathbb{R}^n \}$ é um grupo

$M_1, M_2 \in \mathcal{Q} \Rightarrow M_1 \cdot M_2 \in \mathcal{Q}$

4300429

$$\omega(M_1 M_2 x, M_1 M_2 y) = \omega(M_1 x, M_1 y) = \omega(x, y)$$

$\mathbb{1} \in \Omega$: $\omega(\mathbb{1}x, \mathbb{1}y) = \omega(x,y)$

$M^{-1} \in \Omega$: $\omega(M^{-1}x, M^{-1}y) = \omega(MM^{-1}x, MM^{-1}y) = \omega(x,y)$

Observação

$$\langle x, My \rangle = \langle M^T x, y \rangle$$

Observação

$$\langle x, Ay \rangle_{\mathbb{R}} = \langle Mx, AMy \rangle = \langle x, M^T A M y \rangle$$

$$\langle x, Ay \rangle - \langle x, M^T A M y \rangle = 0 = \langle x, (A - M^T A M) y \rangle = 0$$

$$\Omega := \{ M \in GL(\mathbb{R}, n), \ M^T A M = A \}$$

Exemplo 42:

$A = \mathbb{1} \iff \omega(x,y) = \langle x, y \rangle$

$M \in \underline{O} \Rightarrow M^T M = \mathbb{1} \Rightarrow M^T = M^{-1}$

Grupo de invariância: $\underline{O} = \{ O \in GL(\mathbb{R}, n); O^T O = \mathbb{1} \}$

↳ grupo ortogonal, denotado como $O(n)$

Exemplo 43:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{O} = \left\{ O \in GL(\mathbb{R}, n); \ O^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \cdot O = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

↳ grupo de Lorentz, $\mathcal{L}_n$

↳ O são chamados transformações de Lorentz

Definição 26 (formas sesquilineares):
Seja $\mathcal{E}$ um $\mathbb{C}$-espaço vetorial. Dizemos que uma função $\omega: \mathcal{E}\times\mathcal{E} \to \mathbb{C}$ é uma forma sesquilinear em $\mathcal{E}$ se, $\forall x_i, y_i \in \mathcal{E}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, valerem:

i) $\omega(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha\,\omega(x,y_1) + \beta\,\omega(x,y_2)$

ii) $\omega(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \bar{\alpha}\,\omega(x_1,y) + \bar{\beta}\,\omega(x_2,y)$

Ou seja, se ω for linear no segundo argumento e anti-linear no primeiro.

Observação:
Grupo associado a uma forma sesquilinear

$\underline{O} \doteq \underline{O}(\mathcal{E},\omega) = \{O$ operador linear inversível agindo em $\mathcal{E}$, $\omega(Ox, Oy) = \omega(x,y),\ \forall x y \in \mathcal{E}\}$

Exemplo 44:

$\mathcal{E} = \mathbb{C}^n$

$\langle z, w\rangle_{\mathbb{C}} := \sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k w_k$ "forma sesquilinear 'padrão'" "produto escalar em $\mathbb{C}^n$"

$\langle z, z\rangle_{\mathbb{C}} = \|z\|^2$

Exemplo 45:

$\omega(z,w) = \langle z, Aw\rangle_{\mathbb{C}}$, $A \in Mat(\mathbb{C},n)$

$\hookrightarrow$ forma geral das formas sesquilineares em $\mathbb{C}^n$

Observação:

$M \in Mat(\mathbb{C},n)$

$\langle z, Mw\rangle_{\mathbb{C}} = \langle M^* z, w\rangle_{\mathbb{C}}$

$(M^*)_{ij} = \overline{M_{ji}} \to$ matriz adjunta

13004293

Exemplo 46:

$\omega(z,w) = \langle z, Aw\rangle_{\mathbb{C}}, \quad A \in Mat(\mathbb{C}, n)$

$\mathcal{O} = \{ O \in GL(\mathbb{C}, n), \ \langle Oz, AOw\rangle_{\mathbb{C}} = \langle z, Aw\rangle_{\mathbb{C}}, \ \forall z, w \in \mathbb{C}^n \}$

$= \{ O \in GL(\mathbb{C}, n), \ O^* A O = A \}$

$\langle z, Aw\rangle_{\mathbb{C}} = \langle Oz, AOw\rangle_{\mathbb{C}} = \langle z, O^* A O w\rangle_{\mathbb{C}}$

$\langle z, Aw\rangle_{\mathbb{C}} - \langle z, O^* A O w\rangle_{\mathbb{C}} = 0 = \langle z, (A - O^* A O) w\rangle_{\mathbb{C}} = 0$

Exemplo 47:

$A = \mathbb{1}: \quad \omega(z,w) = \langle z, w\rangle_{\mathbb{C}}$

$\mathcal{O} = \{ U \in GL(\mathbb{C}, n); \ U^* U = \mathbb{1} \}$

$= \{ U \in GL(\mathbb{C}, n); \ U^* = U^{-1} \}$

↳ grupo das matrizes unitárias, denotado $U(n)$

~~Exemplo~~

Observação:

E. Wigner provou que todas as transformações de simetria na Mecânica Quântica são descritas por matrizes unitárias ou antiunitárias

Exemplo 48:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \ddots_{1}^{\,p} & 0 \\ 0 & -1 \ddots_{-1}^{\,q} \end{pmatrix} \qquad p + q = n$$

$U(p,q) = \{ U \in GL(\mathbb{C}, n); \ U^* A U = A \}$ → matrizes quase unitárias

$O(p,q) = \{ O \in GL(\mathbb{R}, n); \ O^T A O = A \}$

$\mathcal{L}_n = O(n-1, 1)$

Definição 27:
Seja ω uma forma sesquilinear. Dizemos que ω é antissimétrica se, $\forall (x,y) \in \mathrm{Dom}[\omega]$, $\omega(x,y) = -\omega(y,x)$.

Exemplo 48:

$$\left.\begin{array}{l} \text{No } \mathbb{R}^n \\ J^T = -J \\ \omega(x,y) = \langle x, Jy \rangle_{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \text{grupo simplético}$$

Exemplo 49 (grupo $O(2)$):

$$O(2) = \{R \in GL(\mathbb{R},2);\ R^T = R^{-1}\}$$

$$R^T R = \mathbb{1} \Rightarrow \det(R^T)\det(R) = \det(\mathbb{1}) = 1$$

$$\det A = \det A^T \ \forall A \Rightarrow \det^2(R) = 1$$

$$\therefore \det R \in \{-1; 1\}$$

$$\therefore O(2) = \{R \in GL(\mathbb{R},2);\ R^T = R^{-1},\ \det R = 1\} \cup \{R \in GL(\mathbb{R},2);\ R^T = R^{-1},\ \det R = -1\}$$

$$SO(2) \doteq \{R \in GL(\mathbb{R},2);\ R^T = R^{-1},\ \det R = +1\}$$

$$O(2) = SO(2) \cup \{R \in GL(\mathbb{R},2);\ R^T = R^{-1},\ \det R = -1\}$$

$R \in SO(2)$:

$$R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

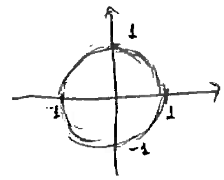
$$R^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad R^{-1} = \frac{1}{\cancel{\det R}^{\,1}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a,b \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} R \in SO(2) \\ \det R = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$$

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R},\ a^2+b^2=1 \right\}$$

Grupos de Lie podem ser associados a alguma superfície



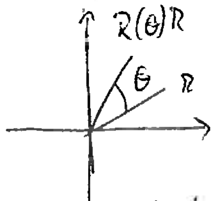
Há uma bijeção entre o círculo unitário e as matrizes de $SO(2)$. Fazemos então:

$$SO(2) = \left\{ R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in (-\pi, \pi] \right\}$$

$$R(0) = \mathbb{1}$$

$$R(\theta) R(\theta') = R(\theta + \theta' \bmod 2\pi)$$

$$R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$$



$$j = \left. \frac{dR(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ "matriz geradora do grupo $SO(2)$"

$$e^{\theta j} = R(\theta)$$

$$SO(2) = \left\{ e^{\theta j},\ \theta \in (-\pi, \pi] \right\}$$

$$O(2) = SO(2) \cup \underbrace{\left\{ S \in GL(\mathbb{R}, 2),\ S^T = S^{-1},\ \det S = -1 \right\}}_{P}$$

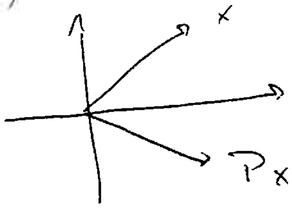
$S \in P$, $P = \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & -1 \end{pmatrix} \in P$

$S \cdot P \in O(2)$

$\det(SP) = \det S \cdot \det P = 1 \Rightarrow SP \in SO(2)$

$$SP = R(\theta) \xrightarrow{P^{-1}=P} S = R(\theta)\cdot P$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad Px = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$



Grupo de Lorentz em 1+1 dimensões $(O(1,1))$

$GL(\mathcal{E})$ → Grupo dos Operadores Lineares Bijetores de $\mathcal{E}$ (espaço vetorial) em $\mathcal{E}$

$\mathcal{E}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$

$\omega: \mathcal{E}\times\mathcal{E} \to \mathbb{K}$

$\underline{O}(\omega)$ – subgrupo de GL que preserva ω

$\hookrightarrow \omega(x,y) = \omega(Ax, Ay), \ \forall x,y \in \mathcal{E}, \ A \in \underline{O}(\omega)$

$\mathcal{E} = \mathbb{R}^n \quad \omega(x,y) = \langle x, My\rangle, \quad M = \mathbb{1}$

$$\underline{O}(\omega) = O(n)$$

$$\langle Ax, MAy\rangle = \langle x, My\rangle$$

$$\langle x, (A^T MA - M)y\rangle = 0, \quad \forall x,y \in \mathcal{E}$$

$$A \in \underline{O}(\omega) \Leftrightarrow A^T MA = M$$

$$M = \mathbb{1} \Rightarrow A^T A = \mathbb{1}$$

$$O(2) = SO(2) \cup \{A \in GL(\mathbb{R},2),\ A^T = A^{-1},\ \det A = -1\}$$

$$\omega_\eta(x,y) = \langle x, \eta y\rangle, \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$O(1,1) = \underline{O}(\omega_\eta)$$

$$A \in \underline{O}(\omega_\eta) \Leftrightarrow A^T \eta A = \eta$$

$$A^T \eta = \eta A^{-1}$$

$$\eta A^T \eta = A^{-1} \quad) \ \eta^2 = \mathbb{1}$$

4300429

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow \eta A^T \eta = A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}$$

Se $\det A = 1$

$$\begin{matrix} a = d \\ b = c \end{matrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a^2 - b^2 = 1$$

Se $\det A = -1$

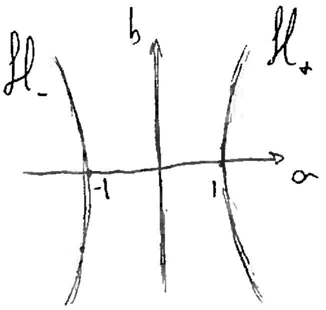
$$\begin{matrix} a = -d \\ b = -c \end{matrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}, \quad b^2 - a^2 = -1$$

$$O(1,1) = \left\{ A \in Mat(\mathbb{R}, n),\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},\ a^2 - b^2 = 1 \right\} \cup$$
$$\cup \left\{ A \in Mat(\mathbb{R}, n),\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix},\ a^2 - b^2 = 1 \right\}$$

$$SO(1,1) = \left\{ A \in Mat(\mathbb{R}, n),\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},\ a^2 - b^2 = 1 \right\}$$

$$O(1,1) = SO(1,1) \cup \left\{ A \in Mat(\mathbb{R}, n),\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix},\ a^2 - b^2 = 1 \right\}$$

$$a^2 - b^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{1 + b^2}$$



$$\mathcal{H}_\pm = \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a = \pm\sqrt{1 + b^2} \right\}$$

$SO(1,1)$ é homeomorfo a $\mathcal{H}_+ \cup \mathcal{H}_-$

$$\mathcal{L}_+^\uparrow := \left\{ A \in Mat(\mathbb{R}, n),\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},\ a = +\sqrt{1 + b^2} \right\} \to \text{grupo}$$
$$\mathcal{L}_+^\downarrow := \left\{ A \in Mat(\mathbb{R}, n),\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},\ a = -\sqrt{1 + b^2} \right\} \to \text{semigrupo}$$
$$\mathcal{L}_-^\uparrow := \left\{ A \in Mat(\mathbb{R}, n),\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix},\ a = +\sqrt{b^2 - 1} \right\} \to \text{semigrupo}$$
$$\mathcal{L}_-^\downarrow := \left\{ A \in Mat(\mathbb{R}, n),\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix},\ a = -\sqrt{b^2 - 1} \right\} \to \text{semigrupo}$$

$$SO(1,1) = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \to \text{grupo}$$
$$O(1,1) = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow \to \text{grupo}$$

Relatividade Restrita

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$$

$$\eta \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\omega_\eta(x,x) = \langle x, \eta x\rangle = (t\ x)\begin{pmatrix} t \\ -x\end{pmatrix} = t^2 - x^2$$

$$I\big((t_1,x_1),(t_2,x_2)\big) = \omega_\eta(x,x), \qquad x = \begin{pmatrix} t_1 - t_2 \\ x_1 - x_2\end{pmatrix}$$

$$A \in \mathcal{L}_+^\uparrow : \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix}, \quad a = +\sqrt{1+b^2}$$

$$b = -\operatorname{senh} z \implies a = \cosh z$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh z & -\operatorname{senh} z \\ -\operatorname{senh} z & \cosh z\end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}$$

$\boxed{c = 1}$

$$v := \tanh z$$

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \cosh z = a$$

$$-\operatorname{senh} z = -v\,\gamma(v) = b$$

$$A \in \mathcal{L}_+^\uparrow : \quad A = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -v\gamma(v) \\ -v\gamma(v) & \gamma(v)\end{pmatrix} = B_1(v)$$

$$\mathcal{L}_+^\uparrow = \{B_1(v),\ v \in (-1,1)\}$$

$$B_1(v)\begin{pmatrix} t \\ x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v)t - v\gamma(v)x \\ -v\gamma(v)t + \gamma(v)x\end{pmatrix} = \gamma(v)\begin{pmatrix} t - vx \\ -vt + x\end{pmatrix}$$

$$B_1(v)B_1(u) = B_1\left(\frac{v+u}{1+uv}\right)$$

Aplicando um raciocínio análogo para $\mathcal{L}_+^\downarrow$

$$\mathcal{L}_+^\downarrow \ni A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix}, \quad a = -\sqrt{1+b^2}$$

$$A = \begin{pmatrix} -\cosh z & -\operatorname{senh} z \\ -\operatorname{senh} z & -\cosh z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma(v) & -v\gamma(v) \\ -v\gamma(v) & -\gamma(v)\end{pmatrix} =: \tilde{T}(v)$$

$$\tilde{T}(0)\begin{pmatrix} t \\ x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -x\end{pmatrix} \longrightarrow$$ inclui inversão temporal e transformação de paridade

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad T := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_+^\downarrow = \left\{A \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R},2),\ A = P\begin{pmatrix} \cosh z & -\operatorname{senh} z \\ -\operatorname{senh} z & \cosh z\end{pmatrix}T,\ z \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\mathcal{L}_-^\uparrow = \left\{ A \in Mat(\mathbb{R},2),\ A = P\begin{pmatrix} \cosh z & -\operatorname{senh} z \\ -\operatorname{senh} z & \cosh z \end{pmatrix};\ z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{L}_-^\downarrow = \left\{ A \in Mat(\mathbb{R},2),\ A = \begin{pmatrix} \cosh z & -\operatorname{senh} z \\ -\operatorname{senh} z & \cosh z \end{pmatrix} T,\ z \in \mathbb{R} \right\}$$

$\mathcal{L}_+^\uparrow$: grupo de Lorentz restrito ou próprio ortócrono

Exercício:

Encontre o gerador do grupo de Lorentz restrito. Isto é, escreva $\mathcal{L}_+^\uparrow$ na forma

$$\mathcal{L}_+^\uparrow = \{ e^{zM_1};\ z \in \mathbb{R} \}$$

O Grupo $SU(2)$

↳ matrizes unitárias, 2×2 com determinante 1

$$SU(2) = \{ M \in Mat(\mathbb{C},2);\ M^* = M^{-1},\ \det M = 1 \}$$

→ matrizes de Pauli

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[\sigma_a, \sigma_b] = 2i \sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{abc} \sigma_c, \quad a,b = 1,2,3$$

Símbolo de Levi-Civita (ε_{abc})

$$\varepsilon_{abc} = \begin{cases} -1, & \text{se } (a,b,c) = (2,1,3) \text{ ou permutação cíclica} \\ 0, & \text{se } a=b,\ b=c \text{ ou } c=a \\ 1, & \text{se } (a,b,c) = (1,2,3) \text{ ou permutação cíclica} \end{cases}$$

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} U^* = \begin{pmatrix} \bar a & \bar c \\ \bar b & \bar d \end{pmatrix} \\ U^{-1} = \dfrac{1}{\det U}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$U \in SU(2) \Rightarrow \det U = 1, \quad U^* = U^{-1}$$

$$U \in SU(2) \Rightarrow \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \bar{a} = d \\ \bar{c} = -b \\ \bar{b} = -c \\ \bar{d} = a \end{matrix}$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

$$\det U = 1 \Rightarrow \det U = |a|^2 + |b|^2 = 1$$

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{C}, \ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2), \quad a, b \in \mathbb{C}$$

$$\begin{matrix} a = a_1 + i a_2 \\ b = b_1 + i b_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} |a|^2 = a_1^2 + a_2^2 \\ |b|^2 = b_1^2 + b_2^2 \end{matrix}, \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + i a_2 & b_1 + i b_2 \\ -b_1 + i b_2 & a_1 - i a_2 \end{pmatrix}$$

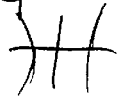
$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 + i a_2 & b_1 + i b_2 \\ -b_1 + i b_2 & a_1 - i a_2 \end{pmatrix}, \ a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}, \ a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 + i a_2 & b_1 + i b_2 \\ -b_1 + i b_2 & a_1 - i a_2 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in S^3 \right\}$$

Observação:

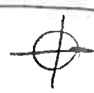
Grupos de Lie

$SO(2) \leftrightarrow$  S^1

$SO(1,1) \leftrightarrow$ 

$SU(2) \leftrightarrow S^3$

$SO(3) \leftrightarrow \mathbb{P}\mathbb{R}^3$

$$S^1 = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2; \ x^2 + y^2 = 1 \}$$ 

$$S^2 = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3; \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$$ 

$$\vdots$$

$$S^{n-1} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n; \ \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1 \right\}$$

4300429

$$\begin{pmatrix} a_1+ia_2 & b_1+ib_2 \\ -b_1+ib_2 & a_1-ia_2 \end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + b_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0\end{pmatrix}$$

$$= a_1\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{\sigma_0=\mathbb{1}} + ia_2\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}}_{\sigma_3} + ib_1\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix}}_{\sigma_2} + ib_2\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{\sigma_1}$$

$$= a_1\sigma_0 + i(b_2\sigma_1 + b_1\sigma_2 + a_2\sigma_3)$$

$$SU(2) = \{a_1\mathbb{1} + i(b_2\sigma_1 + b_1\sigma_2 + a_2\sigma_3),\ a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R},\ a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2=1\}$$

$$a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1 \Rightarrow a_1 \in [-1, 1]$$

$$a_1 = \cos\theta, \quad \theta \in (-\pi, \pi]$$

$$\cos\theta \neq \pm 1$$

$$\eta_1 = \frac{b_2}{\operatorname{sen}\theta}, \quad \eta_2 = \frac{b_1}{\operatorname{sen}\theta}, \quad \eta_3 = \frac{a_2}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$b_2 = \eta_1 \operatorname{sen}\theta, \quad b_1 = \eta_2\operatorname{sen}\theta, \quad a_2 = \eta_3\operatorname{sen}\theta$$

$$a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1$$

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\cdot(\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2) = 1$$

$$\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2 = 1$$

$$\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3), \quad \|\vec{\eta}\| = 1, \quad \vec{\eta} \in S^2$$

$$a_1\mathbb{1} + i(b_2\sigma_1 + b_1\sigma_2 + a_2\sigma_3) = \cos\theta\,\mathbb{1} + i(\eta_1\sigma_1 + \eta_2\sigma_2 + \eta_3\sigma_3)\cdot\operatorname{sen}\theta$$

$$\theta \in (-\pi, \pi], \quad \vec{\eta} \in \mathbb{R}^3, \ \|\vec{\eta}\| = 1$$

$$\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma} \doteq \eta_1\sigma_1 + \eta_2\sigma_2 + \eta_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_1 - i\eta_2 \\ \eta_1 + i\eta_2 & -\eta_3 \end{pmatrix}$$

$$SU(2) = \{\cos\theta\,\mathbb{1} + i\operatorname{sen}\theta(\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}),\ \theta \in (-\pi, \pi],\ \vec{\eta} \in \mathbb{R}^3,\ \|\vec{\eta}\| = 1\}$$

Não há problema se $\cos\theta = \pm 1$:

$$\pm\mathbb{1} + i\cdot 0\cdot(\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}) = \pm\mathbb{1} \in SU(2)$$

$$SU(2) \ni U = \cos\theta\cdot\mathbb{1} + i\,\text{sen}\,\theta(\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}) = e^{i\theta(\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})}$$

$$SU(2) = \{e^{i\theta(\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})},\ \theta\in(-\pi,\pi],\ \vec{\eta}\in\mathbb{R}^3, \|\vec{\eta}\|=1\}$$

$$\begin{array}{ccc} SU(2) & \longleftrightarrow & SO(3) \\ \mathbb{C}^2 & & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

$$(\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})^2 = \mathbb{1}$$

$$e^{i\theta(\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!}(\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!}(\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!}(\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\theta^{2n}}{(2n)!}\mathbb{1}^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\theta^{2n+1}\cdot i}{(2n+1)!}\mathbb{1}^n\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\theta^{2n}}{(2n)!}\mathbb{1} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}$$

$$= \cos\theta\cdot\mathbb{1} + i\,\text{sen}\,\theta\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in Mat(\mathbb{C}, 2)$

$$\alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + \alpha_3\sigma_3 = \vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}$$

$\alpha_k \in \mathbb{R}$ $\qquad \vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma} + \vec{\beta}\cdot\vec{\sigma} = (\vec{\alpha}+\vec{\beta})\vec{\sigma}$

$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ $\qquad [\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}, \vec{\beta}\cdot\vec{\sigma}] = 2i(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\vec{\sigma}$

$$[\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}, \vec{\beta}\cdot\vec{\sigma}] = 2i(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\sigma}$$

$$\left[\sum_{a=1}^{3}\alpha_a\sigma_a, \sum_{b=1}^{3}\beta_b\sigma_b\right] = \sum_{a=1}^{3}\sum_{b=1}^{3}\alpha_a\beta_b[\sigma_a,\sigma_b]$$

$$= 2i\sum_{c=1}^{3}\left(\sum_{a=1}^{3}\sum_{b=1}^{3}\alpha_a\beta_b\epsilon_{abc}\right)\sigma_c$$

$$= 2i(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\sigma}$$

$$\vec{\eta} = (1,0,0) \Rightarrow U_1(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & i\,\mathrm{sen}\,\theta \\ i\,\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\vec{\eta} = (0,1,0) \Rightarrow U_2(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\vec{\eta} = (0,0,1) \Rightarrow U_3(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}$$

$$U_k(\theta)U_k(\theta') = U_k(\theta+\theta'), \quad U_k(0) = \mathbb{1}$$

$$\{U_k(\theta),\ \theta\in(-\pi,\pi]\},\quad k=1,2,3$$

Lo são ~~g~~ subgrupos uniparamétricos de $SU(2)$

$$\frac{d}{d\theta}U_k(\theta)\Big|_{\theta=0} = i\sigma_k \longrightarrow$$ geradores dos ~~Uk~~ subgrupos unitários

> Observação (Spoiler):
>
> $SU(2) \ni U = U_3(\theta)\,U_2(\psi)\,U_3(\phi)$
>
> θ,ψ,ϕ: Ângulos de Euler

Quaternios (W. R. Hamilton 1843)

$\rightarrow (\mathbb{R},\cdot)$

$x\cdot y = xy,\quad e=1$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n),\ x_\mu \in \mathbb{R}\}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \oplus (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \odot (x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2),\ x_\mu \in \mathbb{R}\}$$

Produto "trivial"

$$(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2) \qquad e = (1,1)$$

$$(x,0)\cdot(y,0) = (xy, 0)$$

$$(0,x)\cdot(0,y) = (0, xy)$$

$$(x_1,x_2)(y_1,y_2) = (y_1,y_2)(x_1,x_2)$$

Outro Produto

$$(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2) \doteq (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

→ é associativo

→ é comutativo

→ $e = (1,0)$

$$(\mathbb{R}^2, \cdot) =: \mathbb{C}$$

→ definição da álgebra dos complexos

$$z = (x,y)$$

$$(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -e$$

$$i \equiv (0,1)$$

$$\mathbb{C} \ni (x,y) = x\cdot(1,0) + y\cdot(0,1)$$

$$= x \cdot e_0 + y \cdot i$$

Como e_0 é a identidade da álgebra, a notação usual é $x + y\cdot i$

A1300429

Podemos "expandir" a álgebra dos complexos do $\mathbb{R}^2$ para o $\mathbb{R}^3$?

$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z),\ x,y,z \in \mathbb{R}\}$

Produto "trivial"

$(x_1, y_1, z_1)\cdot(x_2, y_2, z_2) = (x_1x_2,\ y_1y_2,\ z_1z_2)$

$e = (1,1,1)$

$\{(x,0,0),\ x\in\mathbb{R}\}$ $\quad (x,0,0)(y,0,0) = (xy,0,0)$

$\{(0,y,0),\ y\in\mathbb{R}\}$

$\{(0,0,z),\ z\in\mathbb{R}\}$

Outro produto

$(x_1, x_2, x_3)\otimes(y_1,y_2,y_3) = (x_1y_1,\ x_2y_2 - x_3y_3,\ x_2y_3 + x_3y_2)$

$e = (1,1,0)$

$\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

$\nexists\, i;\ i^2 = -e$

Outro produto

$(x_1,x_2,x_3)\otimes(y_1,y_2,y_3) = (x_1y_1 - x_3y_3,\ x_2y_2,\ x_1y_3 + x_3y_1)$

$e = (1,1,0)$

$\nexists\, i;\ i^2 = -e$

Produto Vetorial

$(x_1,x_2,x_3)\times(y_1,y_2,y_3) = (x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - y_1x_2)$

Álgebra de Lie
- → não-comutativa
- → não-associativa
- → não-unital
- → não é uma álgebra de integridade

[Definição 28: dizemos que uma álgebra ~~A~~ A é uma álgebra de integridade se, $\forall\, x,y \in A,\ x\cdot y = \Theta_A \Rightarrow x = \Theta_A$ ou $y = \Theta_A$.]

Não conseguimos uma álgebra de integridade nova no $\mathbb{R}^3$. Vamos tentar para $\mathbb{R}^4$.

$$\mathbb{R}^4 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3),\ x_\mu \in \mathbb{R}\}$$

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) * (y_0, y_1, y_2, y_3) = (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3,\ x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2,\ x_0y_2 + y_0x_2 + x_3y_1 - x_1y_3,\ x_0y_3 + x_3y_0 + x_1y_2 - x_2y_1)$$

→ é associativo
→ não é comutativo
→ é unital ($e_0 = (1,0,0,0)$)
→ Álgebra dos Quatérnios ($\mathbb{H}$)

$e_0 = (1,0,0,0)$, $e_1(0,1,0,0)$ $e_2 = (0,0,1,0)$ $e_3(0,0,0,1)$

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu e_\mu$$

→ e_0 é a unidade da álgebra
→ $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -e_0$

→ $e_a e_b = -e_b e_a$, $a, b \in \{1,2,3\}$ $a \neq b$
→ $e_1 e_2 = e_3$ $e_2 e_3 = e_1$, $e_3 e_1 = e_2$

$$\left(\sum_{\mu=0}^{3} x_\mu e_\mu\right)\left(\sum_{\nu=0}^{3} y_\nu e_\nu\right) = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0} x_\mu y_\nu e_\mu e_\nu$$

→ não existem álgebras não-triviais em $\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^6, \mathbb{R}^7$, mas existe em $\mathbb{R}^8$ a álgebra dos octônios (não-comutativa)

→ Maxwell usou $\mathbb{H}$ para expressar as equações de Maxwell originalmente

Sub-álgebras de $\mathbb{H}$

$$\mathbb{H}_1 \doteq \{(x_0, x_1, 0, 0) = x_0 e_0 + x_1 e_1,\ x_0, x_1 \in \mathbb{R}\}$$

$$(x_0 + x_1 i)(y_0 + y_1 i) = x_0y_0 - x_1y_1 + x_0y_1 i + x_1y_0 i$$

$x=(x_0,x_1,x_2,x_3)$, $\bar{x}=(x_0,-x_1,-x_2,-x_3)$

$\bar{\bar{x}}=x$

$\bar{x}\cdot x=(x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2)e_0=\|x\|^2 e_0$

$\|x\|=\sqrt{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, $\|x\cdot y\|=\|x\|\cdot\|y\|$

Definição 29: Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra dotada de uma norma $\|\cdot\|$. Dizemos que $\|\cdot\|$ é uma norma algébrica se, $\forall x,y\in\mathcal{A}$, $\|x\cdot y\|=\|x\|\|y\|$.

A norma em $\mathbb{H}$ é uma norma algébrica.

$\mathbb{C}\setminus\{0\}$: $z^{-1}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$

$\mathbb{H}\setminus\{0\}$. $0=(0,0,0,0)$

$x=(x_0,x_1,x_2,x_3)$, $x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x=e_0$

$x^{-1}=\frac{\bar{x}}{\|x\|^2}=\frac{(x_0,-x_1,-x_2,-x_3)}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}$

Tal qual $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\mathbb{H}\setminus\{0\}$ forma um grupo para seu produto de álgebra.

Sejam $x,y\in\mathbb{H}$, $\|x\|=\|y\|=1$. Então $\|x\cdot y\|=1$. Note também que $\|e_0\|=1$.

$\mathbb{H}_1=\{x\in\mathbb{H};\ \|x\|=1\}$ é um grupo

$x^{-1}=\bar{x}$

$\|x^{-1}\|=\|\bar{x}\|=1$

$\bar{x}=(x_0,-x_1,-x_2,-x_3)$

$\mathbb{H}_1\simeq SU(2)$

$x=(x_0,x_1,x_2,x_3)\longrightarrow M(x)=\begin{pmatrix} x_0-ix_3 & x_2+ix_1\\ -x_2+ix_1 & x_0+ix_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}$ $\quad a=x_0-ix_3$, $b=x_2+ix_1$

$M(x\cdot y) = M(x)\cdot M(y)$

$M: \mathbb{H} \to \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \ a,b \in \mathbb{C} \right\}$

$M(e_0) = \mathbb{1}$ $\qquad e_1 \cdot e_2 = e_3$

$M(e_1) = i\sigma_1$ $\qquad (i\sigma_1)(i\sigma_2) = -i\sigma_3$

$M(e_2) = i\sigma_2$

$M(e_3) = -i\sigma_3$

$x \in \mathbb{H}, \ \|x\| = 1$

$$\det(M(x)) = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu^2 = \|x\|^2$$

$$M(\mathbb{H}_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 - i x_3 & x_2 + i x_1 \\ -x_2 + i x_1 & x_0 + i x_3 \end{pmatrix}, \ x_\mu \in \mathbb{R}, \ \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu^2 = 1 \right\} = SU(2)$$

$\mathbb{H}_1 \simeq SU(2)$

Grupos $O(3)$ e $SO(3)$

$O(3) = \{ R \in Mat(\mathbb{R},3), \ R^T = R^{-1} \}$

$R \in O(3) \Rightarrow R R^T = \mathbb{1} \Rightarrow \det{}^2 R = 1 \Rightarrow \det R = \pm 1$

$SO(n) \doteq \{ R \in Mat(\mathbb{R},n), \ R^T = R^{-1}, \ \det R = +1 \}$

$SO(3) \subset O(3)$

Lema 4: seja n ímpar, com $n \geqslant 3$. Seja $R \in SO(n)$. Então $\exists \ \eta \neq \theta_{\mathbb{R}^n} \in \mathbb{R}^n, \ R\eta = \eta$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} \varphi = \det(\mathbb{1} - R) &= \det(R^T R - R) = \det((R^T - \mathbb{1})R) = \det(R^T - \mathbb{1}) \cdot 1 \\ &= \det((R - \mathbb{1})^T) = \det(R - \mathbb{1}) = \det(-(\mathbb{1} - R)) = (-1)^n \det(\mathbb{1} - R) \\ &= -\det(\mathbb{1} - R) \end{aligned}$$

Logo, $\det(\mathbb{1} - R) = 0$. Percebemos então que $\lambda = 1$ zera $\det(R - \lambda\mathbb{1})$, de forma que 1 é autovalor de R.

13004293

Portanto, existe ao menos um autovetor η associado a 1 que faz com que

$$R\eta = \eta.$$

Com $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Proposição 5: sejam $R \in SO(3)$, $R \neq \mathbb{1}$, $V_R = \{\eta \in \mathbb{R}^3 ; R\eta = \eta\}$.
Então $\dim V_R = 1$.

Demonstração:

Pelo Lema 4, sabemos que $V_R \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ de forma que sabemos que $\dim V_R \neq 0$. Logo, $\dim V_R \in \{1, 2, 3\}$.

Se $\dim V_R = 3$, então $V_R = \mathbb{R}^3$. Logo, $R\eta = \eta$, $\forall \eta \in \mathbb{R}^3$.
Isso implica que $R = \mathbb{1}$, o que é falso por hipótese.
Portanto, $\dim V_R \neq 3$ e $\dim V_R \in \{1, 2\}$.

Note que

$$R\eta = \eta \Rightarrow \eta = R^{-1}\eta = R^T\eta \Rightarrow R^T\eta = \eta$$

$$u \in V_R^\perp \Rightarrow Ru \in V_R^\perp.$$ → Renan percebeu que era ⊥ e não T

$u \in V_R^\perp$, $v \in V_R$

$$\langle Ru, v\rangle_{\mathbb{R}} = \langle u, R^T v\rangle_{\mathbb{R}} = \langle u, v\rangle_{\mathbb{R}} = 0, \ \forall v \in V_R$$

Por absurdo, suponha que $\dim V_R = 2$. Então $\dim V_R^\perp = 1$
Logo, $u \in V_R^\perp \Rightarrow Ru = \lambda u$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\langle u, u\rangle_{\mathbb{R}} = \langle Ru, Ru\rangle_{\mathbb{R}} = \langle \lambda u, \lambda u\rangle_{\mathbb{R}} = \lambda^2 \langle u, u\rangle_{\mathbb{R}}$$

Portanto, $\lambda = \pm 1$. $\lambda \neq +1$, pois nesse caso teríamos que $u \in V_R$.
Assim, $Ru = -u$. Concluímos que R possui um autovalor -1 simples, e um autovalor 1 duplamente degenerado de forma que $\det(R) = -1$, o que contradiz a hipótese de que $R \in SO(3)$. Absurdo.
Logo, $\dim V_R \neq 2$. $\dim V_R = 1$.

Exemplo 50:

$M \in Mat(\mathbb{R}, n)$

$M u_\alpha = u$, $\quad u$ é invariante para M

$U = \{u \in \mathbb{R}^n;\ Mu = u\}$ é subespaço do $\mathbb{R}^n$

$u_1, u_2 \in U$: $\quad M(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$

Como 1 é autovalor de R, podemos escolher em $\mathbb{R}^3$ uma base ortonormal v, u_1, u_2, com $v \in V_R$, $u_1, u_2 \in V_R^\perp$, tal que

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{\boxed{r}}} \\ 0 & & \end{pmatrix},$$

com $r \in Mat(\mathbb{R}, 2)$. Note que

$$1 = \det R = \det r$$

$$R^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{r^T} \\ 0 & \end{pmatrix} \Rightarrow R^T R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{r^T} \\ 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{r} \\ 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{r^T r} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$R^T R = \mathbb{1}_3 \Rightarrow r^T r = \mathbb{1}_2$$

$$\begin{cases} r^T r = \mathbb{1}_2 \\ \det r = 1 \end{cases} \Rightarrow r \in SO(2) \Rightarrow r = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Proposição 6: para cada $R \in SO(3)$ existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ onde R é da forma

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

com $\theta \in (-\pi, \pi]$.

Teorema 7 [Teorema da Rotação de Euler]: Seja $\mathcal{R} \in SO(3)$, $\mathcal{R} \neq \mathbb{1}$. Então $\exists\, \vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$, $\|\vec{\eta}\| = 1$; $\mathcal{R}\vec{\eta} = \vec{\eta}$ e, além disso, $\mathcal{R}$ realiza uma rotação de algum ângulo $\theta \in (-\pi, \pi]$ em torno de $\vec{\eta}$, i.e., todo elemento de $SO(3)$ representa uma rotação de um certo ângulo em torno de um certo eixo.

Geradores de SO(3)

Se considerarmos os elementos de $SO(3)$ que correspondem a rotações de um ângulo θ em torno dos eixos canônicos no sentido anti-horário, temos:

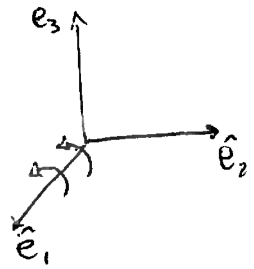
$$\mathcal{R}_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}_k = \{\mathcal{R}_k(\theta),\ \theta \in (-\pi, \pi]\}$$

↳ subgrupos uniparamétricos de $SO(3)$



$$\mathcal{R}_k(0) = \mathbb{1}$$

$$\mathcal{R}_k(\theta)\mathcal{R}_k(\theta') = \mathcal{R}(\theta + \theta')$$

Geradores infinitesimais do subgrupo $\mathcal{R}_k$

$$J_k = \frac{d}{d\varphi}\mathcal{R}_k(\varphi)\Big|_{\varphi = 0}$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observação: J_1, J_2 e J_3 formam uma base para o espaço das matrizes antissimétricas de $Mat(\mathbb{R}, 3)$

Observação:
Para $a, b, c = 1,2,3$, vale que

$$(J_a)_{bc} = -\epsilon_{abc}$$

mostre

$$[J_a, J_b] = \sum_{c=1}^{3} \epsilon_{abc} J_c$$

$$[J_1, J_2] = J_3$$
$$[J_2, J_3] = J_1$$
$$[J_3, J_1] = J_2$$

$$\vec{\alpha} \doteq (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$
$$\vec{\beta} \doteq (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$
$$\vec{\alpha} \cdot \vec{J} \doteq \sum_{\mu=1}^{3} \alpha_\mu J_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{J}, \vec{\beta} \cdot \vec{J}] = (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{J} :$$

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{J}, \vec{\beta} \cdot \vec{J}] = \sum_{\mu=1}^{3} [\alpha_\mu J_\mu, \vec{\beta} \cdot \vec{J}]$$
$$= \sum_{\mu=1}^{3} \sum_{\nu=1}^{3} \alpha_\mu [J_\mu, \beta_\nu J_\nu]$$
$$= \sum_{\mu=1}^{3} \sum_{\nu=1}^{3} \alpha_\mu \beta_\nu [J_\mu, J_\nu]$$
$$= \sum_{\mu=1}^{3} \sum_{\nu=1}^{3} \alpha_\mu \beta_\nu \sum_{\tau=1}^{3} \epsilon_{\mu\nu\tau} J_\tau$$

$$\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \sum_{\mu=1}^{3} \sum_{\nu=1}^{3} \sum_{\tau=1}^{3} \epsilon_{\mu\nu\tau} \alpha_\mu \beta_\nu \hat{e}_\tau$$

$$= \sum_{\mu=1}^{3} \sum_{\nu=1}^{3} \sum_{\tau=1}^{3} \epsilon_{\mu\nu\tau} \alpha_\mu \beta_\nu J_\tau$$
$$= (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{J}$$

J_1, J_2 e J_3 geram uma álgebra de Lie (denominada $so(3)$).

4300429

$$J_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J_2^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \sum_{\mu=1}^{3} J_\mu^2 = -2\,\mathbb{1}$$

$$J_3^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observação:

Para $a = 1, 2, 3$:

$$R_a(\varphi) = \mathbb{1} + (1 - \cos\varphi)\, J_a^2 + \sin\varphi\, J_a$$

Observação:

Para $a = 1, 2, 3$:

$$J_a^3 = J_a^2 J_a = -J_a$$

$$\therefore \quad J_a^{2k} = (-1)^{k+1} J_a^2, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*$$

$$J_a^{2k+1} = (-1)^k J_a, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0$$

Observação

Para $a = 1, 2, 3$, $R_a(\varphi) = e^{\varphi J_a}$

$$\exp(\varphi J_a) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi^m}{m!} J_a^m + \mathbb{1}$$

$$= \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!} J_a^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} J_a^{2k+1}$$

$$= \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \varphi^{2k}}{(2k)!} J_a^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} J_a$$

$$= \mathbb{1} + (1 - \cos\varphi)\, J_a^2 + \sin\varphi\, J_a = R_a(\varphi)$$

Convenção:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{J} = \|\vec{\alpha}\|\left(\frac{\vec{\alpha}}{\|\vec{\alpha}\|}\cdot\vec{J}\right) = \theta\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{J}$$

Restringiremos $\theta \in [0,\pi]$ e designaremos por $R(\theta,\vec{\eta})$ uma rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário em torno do versor $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$

A rotação identidade $\mathbb{1}$ é entendida como uma rotação de ângulo 0 em torno de um eixo arbitrário: $\mathbb{1} = R(0,\vec{\eta})$

Proposição 8:

Seja $R(\theta,\vec{\eta}) \in SO(3)$ uma rotação de um ângulo $\theta \in [0,\pi]$ no sentido anti-horário em torno do eixo definido pelo vetor $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{\eta} = (\eta_1,\eta_2,\eta_3)$, com $\|\vec{\eta}\| = 1$. Então podemos escrever

$$R(\theta,\vec{\eta}) = \exp(\theta\,\vec{\eta}\cdot\vec{J}),$$

onde $\vec{\eta}\cdot\vec{J} = \eta_1 J_1 + \eta_2 J_2 + \eta_3 J_3$. Calculando-se a exponencial, temos

$\rightarrow$ fórmula de Rodrigues

$$R(\theta,\vec{\eta}) = \mathbb{1} + (1-\cos\theta)(\vec{\eta}\cdot\vec{J})^2 + \sin\theta(\vec{\eta}\cdot\vec{J}),$$

escrevendo explicitamente

$$R(\theta,\vec{\eta}) = \begin{pmatrix} (1-\cos\theta)\eta_1^2 + \cos\theta & (1-\cos\theta)\eta_1\eta_2 - \sin\theta\,\eta_3 & (1-\cos\theta)\eta_1\eta_3 + \sin\theta\,\eta_2 \\ (1-\cos\theta)\eta_1\eta_2 + \sin\theta\,\eta_3 & (1-\cos\theta)\eta_2^2 + \cos\theta & (1-\cos\theta)\eta_3\eta_2 + \sin\theta\,\eta_1 \\ (1-\cos\theta)\eta_1\eta_3 - \sin\theta\,\eta_2 & (1-\cos\theta)\eta_3\eta_2 + \sin\theta\,\eta_1 & (1-\cos\theta)\eta_3^2 + \cos\theta \end{pmatrix}$$

4300429

Por fim, para $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ arbitrário, tem-se que

$$\mathcal{R}(\theta, \vec{\eta})\vec{\alpha} = \vec{\alpha} + (1-\cos\theta)\left(\vec{\eta}\times(\vec{\eta}\times\vec{\alpha})\right) + \sin\theta(\vec{\eta}\times\vec{\alpha})$$

$$= \cos\theta\,\vec{\alpha} + (1-\cos\theta)(\vec{\eta}\cdot\vec{\alpha})\vec{\eta} + \sin\theta(\vec{\eta}\times\vec{\alpha})$$

fórmulas de Rodrigues

Demonstração

Trivial no caso $\theta = 0$. Suponhamos $\mathcal{R}(\theta,\vec{\eta}) \neq \mathbb{1}$ e, portanto, $\theta \neq 0$. A Proposição 5 nos garante a existência de um subespaço V_R de $\mathbb{R}^3$ com $\dim V_R = 1$ cujos elementos são invariantes para $\mathcal{R}(\theta,\vec{\eta})$. Claramente $\mathcal{R}(\theta,\vec{\eta})\vec{\eta} = \vec{\eta}$.

Queremos demonstrar que $\exp(\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J})$ é uma matriz ortogonal, com determinante 1, que mantém $\vec{\eta}$ invariante e rotaciona os vetores perpendiculares a $\vec{\eta}$ em um ângulo θ em torno do eixo definido por $\vec{\eta}$ no sentido anti-horário. Assim podemos identificar $\mathcal{R}(\theta,\vec{\eta}) = \exp(\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J})$.

Note que $\vec{\eta}\cdot\vec{J} = \eta_1 J_1 + \eta_2 J_2 + \eta_3 J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\eta_3 & \eta_2 \\ \eta_3 & 0 & -\eta_1 \\ -\eta_2 & \eta_1 & 0 \end{pmatrix}$ é antissimétrica $\left((\vec{\eta}\cdot\vec{J})^T = -\vec{\eta}\cdot\vec{J}\right)$. Ademais,

$$(\vec{\eta}\cdot\vec{J})_{ij} = -\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\eta_k.$$

$$\left[\exp(\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J})\right]^T = \left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\theta^m}{m!}(\vec{\eta}\cdot\vec{J})^m\right]^T = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\theta^m}{m!}\left[(\vec{\eta}\cdot\vec{J})^m\right]^T = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\theta^m}{m!}\left((\vec{\eta}\cdot\vec{J})^T\right)^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\theta^m}{m!}(-\vec{\eta}\cdot\vec{J})^m = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\theta)^m}{m!}(\vec{\eta}\cdot\vec{J})^m = \exp(-\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J})$$

Pela fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, temos, para

$e^A e^{-A}$:

$$e^A e^{-A} = \exp\left(A + (-A) + \frac{1}{2}[A,-A] + \frac{1}{12}[A,[A,-A]] + \cdots\right)$$

$$[A,-A] = -[A,A] = -(AA - AA) = 0$$

$$e^A e^{-A} = \exp(0) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{0^m}{m!} + \mathbb{1} = \mathbb{1}$$

Assim, temos que

$$[\exp(\theta \vec{\eta}\cdot\vec{J})]^T = \exp(-\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}) = [\exp(\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J})]^{-1}$$

Ou seja, $\exp(\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J})$ é ortogonal. Logo, vale que $\det(\exp(\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J})) = \pm 1$. Adiante veremos que

$$\exp(\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}) = \mathbb{1} + (1-\cos\theta)(\vec{\eta}\cdot\vec{J})^2 + \sin\theta(\vec{\eta}\cdot\vec{J}),$$

o que é um exemplo de que $\det(\exp(\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}))$ depende continuamente de θ. Assim temos que o determinante há de ser constante para todo $\theta \in [0,\pi]$. Tomando $\theta = 0$:

$$\det(\exp(\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J})) = \det(\exp(0\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{J})) = \det(\mathbb{1}) = 1$$

Logo, sabemos que $\exp(\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}) \in SO(3)$.

Perceba que $(\vec{\eta}\cdot\vec{J})^3 = -(\vec{\eta}\cdot\vec{J})$, pois

$$(\vec{\eta}\cdot\vec{J})^2 = (\vec{\eta}\cdot\vec{J})(\vec{\eta}\cdot\vec{J}) = \begin{pmatrix} 0 & -\eta_3 & \eta_2 \\ \eta_3 & 0 & -\eta_1 \\ -\eta_2 & \eta_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\eta_3 & \eta_2 \\ \eta_3 & 0 & -\eta_1 \\ -\eta_2 & \eta_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta_3^2-\eta_2^2 & \eta_1\eta_2 & \eta_1\eta_3 \\ \eta_1\eta_2 & -\eta_3^2-\eta_1^2 & \eta_2\eta_3 \\ \eta_1\eta_3 & \eta_2\eta_3 & -\eta_2^2-\eta_1^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \eta_1^2-1 & \eta_1\eta_2 & \eta_1\eta_3 \\ \eta_1\eta_2 & \eta_2^2-1 & \eta_2\eta_3 \\ \eta_1\eta_3 & \eta_2\eta_3 & \eta_3^2-1 \end{pmatrix}$$

4300429

$$(\vec{\eta}\cdot\vec{J})^3 = (\vec{\eta}\cdot\vec{J})(\vec{\eta}\cdot\vec{J})^2 = \begin{pmatrix} 0 & +\eta_3 & +\eta_2 \\ +\eta_3 & 0 & -\eta_1 \\ -\eta_2 & +\eta_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1^2-1 & \eta_1\eta_2 & \eta_1\eta_3 \\ \eta_1\eta_2 & \eta_2^2-1 & \eta_3\eta_2 \\ \eta_1\eta_3 & \eta_3\eta_2 & \eta_3^2-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \eta_3 & -\eta_2 \\ -\eta_3 & 0 & \eta_1 \\ \eta_2 & -\eta_1 & 0 \end{pmatrix} = -(\vec{\eta}\cdot\vec{J})$$

$$\therefore \quad (\vec{\eta}\cdot\vec{J})^{2k} = (-1)^{k+1}(\vec{\eta}\cdot\vec{J})^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$(\vec{\eta}\cdot\vec{J})^{2k+1} = (-1)^k(\vec{\eta}\cdot\vec{J})$$

Assim,

$$e^{\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}} = \mathbb{1} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\theta^m}{m!}(\vec{\eta}\cdot\vec{J})^m$$

$$= \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta^{2k}}{(2k)!}(\vec{\eta}\cdot\vec{J})^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}(\vec{\eta}\cdot\vec{J})^{2k+1}$$

$$= \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\theta^{2k}}{(2k)!}(\vec{\eta}\cdot\vec{J})^2 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}(\vec{\eta}\cdot\vec{J})$$

$$= \mathbb{1} + (1-\cos\theta)(\vec{\eta}\cdot\vec{J})^2 + \sin\theta(\vec{\eta}\cdot\vec{J})$$

$$\forall \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3, \quad (\vec{\eta}\cdot\vec{J})\vec{\alpha} = \vec{\eta}\times\vec{\alpha}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\eta_3 & \eta_2 \\ \eta_3 & 0 & -\eta_1 \\ -\eta_2 & \eta_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_2\alpha_3 - \eta_3\alpha_2 \\ \eta_3\alpha_1 - \eta_1\alpha_3 \\ \eta_1\alpha_2 - \eta_2\alpha_1 \end{pmatrix} = \vec{\eta}\times\vec{\alpha}$$

$$\therefore \quad (\vec{\eta}\cdot\vec{J})^2\vec{\alpha} = (\vec{\eta}\cdot\vec{J})\left[(\vec{\eta}\cdot\vec{J})\vec{\alpha}\right] = (\vec{\eta}\cdot\vec{J})(\vec{\eta}\times\vec{\alpha}) = \vec{\eta}\times(\vec{\eta}\times\vec{\alpha})$$

$$\vec{\eta}\times(\vec{\eta}\times\vec{\alpha}) = (\vec{\eta}\cdot\vec{\alpha})\vec{\eta} - (\vec{\eta}\cdot\vec{\eta})\vec{\alpha} = (\vec{\eta}\cdot\vec{\alpha})\vec{\eta} - 1\cdot\vec{\alpha}$$

$$(\vec{\eta}\cdot\vec{J})^2\vec{\alpha} = \vec{\eta}\times(\vec{\eta}\times\vec{\alpha}) = (\vec{\eta}\cdot\vec{\alpha})\vec{\eta} - \vec{\alpha}$$

Logo,

$$\exp(\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J})\vec{\alpha} = \mathbb{1}\cdot\vec{\alpha} + (1-\cos\theta)(\vec{\eta}\cdot\vec{J})^2\vec{\alpha} + \sin\theta(\vec{\eta}\cdot\vec{J})\vec{\alpha}$$
$$= \vec{\alpha} + (1-\cos\theta)(\vec{\eta}\times(\vec{\eta}\times\vec{\alpha})) + \sin\theta(\vec{\eta}\times\vec{\alpha})$$
$$= \cos\theta\,\vec{\alpha} + (1-\cos\theta)(\vec{\eta}\cdot\vec{\alpha})\vec{\eta} + \sin\theta(\vec{\eta}\times\vec{\alpha})$$

Resta provar que $\exp(\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J})\vec{\eta} = \vec{\eta}$ e que a mesma matriz rotaciona os vetores perpendiculares a $\vec{\eta}$ em um ângulo θ no sentido anti-horário ao redor do eixo definido por $\vec{\eta}$.

$$\exp(\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J})\vec{\eta} = \vec{\eta} + (1-\cos\theta)(\vec{\eta}\times(\vec{\eta}\times\vec{\eta})) + \sin\theta(\vec{\eta}\times\vec{\eta})$$
$$= \vec{\eta} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{\eta}$$

Tome $\vec{\zeta}\in\mathbb{R}^3$, $\|\vec{\zeta}\| = 1$, $\langle\vec{\eta},\vec{\zeta}\rangle_{\mathbb{R}} = 0$. Então $\vec{\zeta}$ e $\vec{\eta}\times\vec{\zeta}$ são unitários e formam uma base ortonormal no subespaço ortogonal a $\vec{\eta}$. Segue:

$$\exp(\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J})\vec{\zeta} = \cos\theta\,\vec{\zeta} + (1-\cos\theta)(\vec{\eta}\cdot\vec{\zeta})\vec{\eta} + \sin\theta(\vec{\eta}\times\vec{\zeta})$$
$$= \cos\theta\,\vec{\zeta} + \sin\theta\,(\vec{\eta}\times\vec{\zeta})$$

Como $\vec{\eta}\cdot(\vec{\eta}\times\vec{\zeta}) = 0$ e $\vec{\eta}\times(\vec{\eta}\times\vec{\zeta}) = -\vec{\zeta}$

$$\exp(\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J})(\vec{\eta}\times\vec{\zeta}) = \cancel{\cos\theta(\vec{\eta}\times\vec{\zeta}) + (1-\cos\theta)(\vec{\eta}\times(\vec{\eta}\times\vec{\zeta}))}$$
$$= \cos\theta(\vec{\eta}\times\vec{\zeta}) + (1-\cos\theta)(\vec{\eta}\cdot(\vec{\eta}\times\vec{\zeta}))\vec{\eta} + \sin\theta(\vec{\eta}\times(\vec{\eta}\times\vec{\zeta}))$$
$$= -\sin\theta\,\vec{\zeta} + \cos\theta\,(\vec{\eta}\times\vec{\zeta})$$

Assim vemos que $\exp(\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J})$ age como uma rotação de um ângulo θ no espaço ortogonal

4300924

a $\vec{\eta}$. Assim, terminamos de demonstrar o que era necessário e percebemos que podemos identificar $R(\theta, \vec{\eta}) = \exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J})$. ∎

$$SO(3) = \{ e^{\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}}, \ \theta \in [0, \pi], \vec{\eta} \in \mathbb{R}^3, \|\vec{\eta}\| = 1 \}$$

Observação:

Alguns elementos no conjunto à direita podem ser idênticos.

$$e^{\pi \cdot (\vec{\eta}) \cdot \vec{J}} = \mathbb{1} + (1 - \cos\pi)(\vec{\eta} \cdot \vec{J})^2 + \sin\pi (\vec{\eta} \cdot \vec{J})$$
$$= \mathbb{1} + 2(\vec{\eta} \cdot \vec{J})^2$$

$$e^{\pi \cdot (-\vec{\eta}) \cdot \vec{J}} = \mathbb{1} + (1 - \cos\pi)(-\vec{\eta} \cdot \vec{J})^2 + \sin\pi (-\vec{\eta} \cdot \vec{J})$$
$$= \mathbb{1} + 2 \cdot 1 \cdot (\vec{\eta} \cdot \vec{J})$$
$$= \mathbb{1} + 2(\vec{\eta} \cdot \vec{J})$$

$\|\vec{\eta}\| = 1$

Proposição 9: seja $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Então as $\exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}) = \mathbb{1} \iff \theta = 2\pi \cdot n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Demonstração

$$e^{\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}} = \mathbb{1} + (1 - \cos\theta)(\vec{\eta} \cdot \vec{J})^2 + \sin\theta (\vec{\eta} \cdot \vec{J})$$

$$e^{\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}} = \mathbb{1} \iff (1 - \cos\theta)(\vec{\eta} \cdot \vec{J})^2 + \sin\theta (\vec{\eta} \cdot \vec{J}) = 0$$

$$\{(\vec{\eta} \cdot \vec{J})^2, (\vec{\eta} \cdot \vec{J})\} \text{ é LI} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = 2\pi \cdot n, \ n \in \mathbb{Z}$$

∎

Grupo $O(3)$

$$O(3) = \{R \in Mat(\mathbb{R},3);\ R^T = R^{-1}\}$$

$$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_{\mathbb{R}} = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

$$\langle R\vec{a}, R\vec{b} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle R^T R \vec{a}, \vec{b} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \mathbb{1}\vec{a}, \vec{b} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$SO(3) = \{R \in Mat(\mathbb{R},3);\ R^T = R^{-1},\ \det R = 1\}$$

$$= \{R(\theta, \vec{\eta}) \in Mat(\mathbb{R},3);\ \vec{\eta} \in \mathbb{R}^3,\ \|\vec{\eta}\| = 1,\ \theta \in [0,\pi]\}$$

$$= \{e^{\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}},\ \vec{\eta} \in \mathbb{R}^3,\ \|\vec{\eta}\| = 1,\ \theta \in [0,\pi]\}$$

Seja $S \in O(3)$, $\det S = -1 \Rightarrow S \notin SO(3)$

Note que

$$P_1 \doteq \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in O(3), \quad \det P_1 = -1$$

$$\downarrow$$

$$P_1^2 = \mathbb{1},\ P_1^T = P_1$$

$$SO(3) \ni R = SP_1 \Rightarrow S = RP_1, \quad R \in SO(3)$$

$$= e^{\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}} P_1$$

$$SO(3) \ni R' = P_1 S \Rightarrow S = P_1 R', \quad R' \in SO(3)$$

$$= P_1 e^{\theta' \vec{\eta}' \cdot \vec{J}}$$

Análogo para

$$P_2 \doteq \mathrm{diag}(1,-1,1),\ P_3 \doteq \mathrm{diag}(1,1,-1)$$

$$P_0 \doteq \mathrm{diag}(-1,-1,-1) = -\mathbb{1}$$

4300429

$P_k \in O(3)$, $\det P_k = -1$, $k = 0, 1, 2, 3$

$\therefore$ $S \in O(3)$, $\det S = -1$

$S = R_k P_k$ $\quad R_k, R_k' \in SO(3)$

$= P_k R_k'$ $\quad k = 0, 1, 2, 3$

SO(3) e os Ângulos de Euler

$R \in SO(3)$

$R = e^{\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}} = \mathbb{1} + (1 - \cos\theta)(\vec{\eta} \cdot \vec{J})^2 + \sin\theta\, (\vec{\eta} \cdot \vec{J})$

$\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$, $\|\vec{\eta}\| = 1$, $\theta \in [0, \pi]$

Teorema 1O (Parametrização de Rotações em Termos dos Ângulos de Euler)

Seja $R \in SO(3)$ e sejam $\hat{e}_k$, $k = 1, 2, 3$, os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^3$. Suponhamos que $\hat{e}_3' = R\hat{e}_3 \neq \pm\hat{e}_3$. Então, $\exists$ $\theta \in (0, \pi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\psi \in [0, 2\pi)$, denominados ângulos de Euler, tais que podemos escrever

$$R = R(\varphi, \hat{e}_3) R(\theta, \hat{e}_1) R(\psi, \hat{e}_3) = R_3(\varphi) R_1(\theta) R_3(\psi)$$

Isto é, podemos escrever R como um produto de três rotações sucessivas: uma rotação de um ângulo ψ em torno do eixo 3 seguida de uma rotação de um ângulo θ em torno do eixo 1 e, enfim, uma rotação de um ângulo φ em torno do eixo 3.

Além disso, podemos escrever R na forma

$$R = R(\psi, \hat{e}_3') R(\theta, \hat{n}) R(\varphi, \hat{e}_3)$$

$\hat{e}_3' := Re_3 = R(\theta, \hat{n})\hat{e}_3$, $\quad \hat{n} := R(\varphi, \hat{e}_3)\hat{e}_1 = R(-\psi, \hat{e}_3')\hat{e}_1'$

$\hat{e}_1' := R\hat{e}_1$

Esta parametrização nos permite descrever R como o produto de três rotações sucessivas: uma rotação de um ângulo φ em torno do eixo canônico 3 seguida de uma rotação de um ângulo θ em torno de um eixo definido pelo vetor unitário $\hat{n}$, que habita o plano definido por $\hat{e}_1$ e $\hat{e}_2$, e finalmente, uma rotação de um ângulo ψ em torno do eixo definido pelo vetor $\hat{e}_3' = R\hat{e}_3 = R(\theta, \hat{n})\hat{e}_3$.

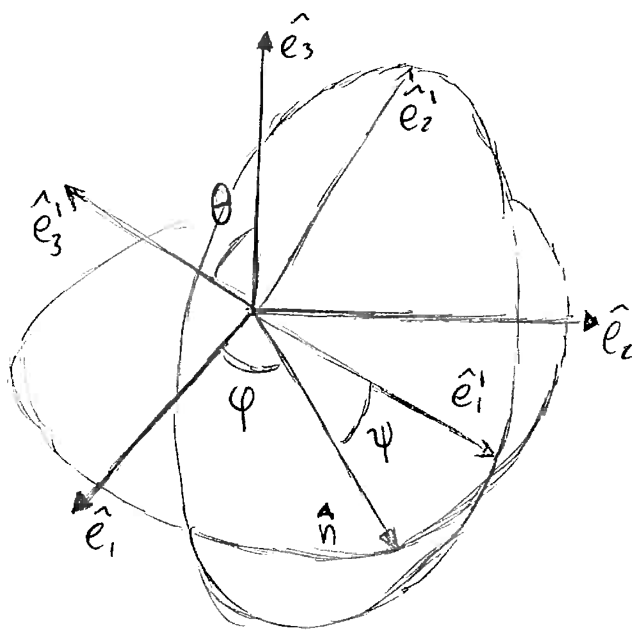
No caso em que $\hat{e}_3' = R\hat{e}_3 = +\hat{e}_3$, podemos escrever R como

$$R = R(\varphi, \hat{e}_3) = R_3(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Para $\hat{e}_3' = R\hat{e}_3 = -\hat{e}_3$, podemos escrever R da forma seguinte

$$R = R(\varphi, \hat{e}_3) R(\pi, \hat{e}_1) = R_3(\varphi) R_1(\pi)$$

com $\varphi \in [0, 2\pi)$.



Observação:

A parametrização de uma rotação em termos de três rotações de 3-1-3 pode ser estendida a quaisquer outros dois eixos canônicos distintos: se $a, b \in \{1, 2, 3\}$,

$a \neq b$, $\exists\, \theta_{ab}, \varphi_{ab}, \psi_{ab}$;

$$R = R(\varphi_{ab}, \hat{e}_a) R(\theta_{ab}, \hat{e}_b) R(\psi_{ab}, \hat{e}_a)$$

De forma semelhante, existem $\theta_{ab}, \varphi_{ab}, \psi_{ab}$ tais que

$$R = R(\psi_{ab}, e_a') R(\theta_{ab}, \hat{n}_{ab}) R(\varphi_{ab}, \hat{e}_a)$$

Na Mecânica Clássica, a convenção mais comum é a 3-1-3. Na Mecânica Quântica, é mais frequente o uso de 3-2-3.

Observação:

Faz-se uso também da Representação de Tait-Bryan:

$$R = R_1(\phi_1) R_2(\phi_2) R_3(\phi_3)$$

Que é generalizável para

$$R = R_a(\phi_a) R_b(\phi_b) R_c(\phi_c),$$

com $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$ distintos entre si. Os ângulos ϕ_a, ϕ_b e ϕ_c são denominados ângulos de Tait-Bryan.

Observação:

Os ângulos de Euler (θ, φ, ψ) com $\theta \in (0, \pi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ e $\psi \in [0, 2\pi)$ provêm $SO(3)$ de uma carta local de coordenadas, mas para $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ os ângulos φ e ψ não estão definidos (esta "singularidade" é semelhante ao que ocorre nos pólos do sistema de coordenadas esféricas tridimensional). ~~Esta~~ Esta indefinição de φ e ψ nos conduz a assumir $\hat{e}_3' = R\hat{e}_3 \neq \pm \hat{e}_3$ no início do Teorema 10.

Relação entre $SU(2)$ e $SO(3)$

$$SU(2) = \left\{ e^{i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}},\ \theta\in[0,\pi],\ \vec{\eta}\in\mathbb{R}^3,\ \|\vec{\eta}\|=1 \right\}$$

$$e^{i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}} = \cos\theta\cdot\mathbb{1} + i\sin\theta\,(\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})$$

$$\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma} = \sum_{i=1}^{3}\eta_i\sigma_i$$

$$\theta\to-\theta,\quad \vec{\eta}\to-\vec{\eta}$$

$$[\sigma_a,\sigma_b] = 2i\sum_{c=1}^{3}\epsilon_{abc}\sigma_c,\quad \text{e.g.},\ [\sigma_1,\sigma_2] = 2i\sigma_3$$

$$SO(3) = \left\{ e^{\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}},\ \theta\in[0,\pi],\ \vec{\eta}\in\mathbb{R}^3,\ \|\vec{\eta}\|=1 \right\}$$

$$e^{\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}} = \mathbb{1} + (1-\cos\theta)(\vec{\eta}\cdot\vec{J})^2 + \sin\theta\,(\vec{\eta}\cdot\vec{J})$$

$$\vec{\eta}\cdot\vec{J} = \sum_{i=1}^{3}\eta_i J_i$$

$$\theta\to-\theta,\quad \vec{\eta}\to-\vec{\eta}$$

$$[J_a,J_b] = \sum_{c=1}^{3}\epsilon_{abc}J_c,\quad \text{e.g.},\ [J_1,J_2] = J_3$$

Defino $\vec{j} = -\frac{i}{2}\vec{\sigma}$, i.e., $j_k = -\frac{i}{2}\sigma_k$, $k=1,2,3$

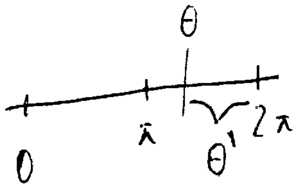
$$e^{i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}} = e^{-2\theta\vec{\eta}\cdot\vec{j}}$$

$$[j_a,j_b] = \sum_{c=1}^{3}\epsilon_{abc}j_c$$

$$\begin{aligned}SU(2) &= \left\{ e^{-2\theta\vec{\eta}\cdot\vec{j}},\ \theta\in[0,\pi],\ \vec{\eta}\in\mathbb{R}^3,\ \|\vec{\eta}\|=1 \right\} & \vec{\eta}\to-\vec{\eta}\\ &= \left\{ e^{2\theta\vec{\eta}\cdot\vec{j}},\ \theta\in[0,\pi],\ \vec{\eta}\in\mathbb{R}^3,\ \|\vec{\eta}\|=1 \right\} & 2\theta\to\theta\\ &= \left\{ e^{\theta\vec{\eta}\cdot\vec{j}},\ \theta\in[0,2\pi],\ \vec{\eta}\in\mathbb{R}^3,\ \|\vec{\eta}\|=1 \right\}\end{aligned}$$

4300429

$$U = e^{\theta \vec{\eta}\cdot\vec{j}} = e^{-\frac{i\theta}{2}\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}}$$
$$= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbb{1} - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}$$



$$\theta + \theta' = 2\pi$$
$$\theta = 2\pi - \theta'$$

$$U = \cos\left(\pi - \frac{\theta'}{2}\right)\mathbb{1} - i\sin\left(\pi - \frac{\theta'}{2}\right)\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}$$
$$= -\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)\mathbb{1} + i\sin\left(\frac{\theta'}{2}\right)\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}$$
$$e^{\theta\vec{\eta}\cdot\vec{j}} = -e^{\theta'\vec{\eta}\cdot\vec{j}}$$

$$[j_a, j_b] = \sum_{c=1}^{3}\epsilon_{abc}\, j_c \qquad [J_a, J_b] = \sum_{c=1}^{3}\epsilon_{abc}\, J_c$$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{j} = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i j_i,\ \vec{\alpha}\in\mathbb{R}^3 \qquad \vec{\alpha}\cdot\vec{J} = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i J_i,\ \vec{\alpha}\in\mathbb{R}^3$$

$$[\vec{\alpha}\cdot\vec{j}, \vec{\beta}\cdot\vec{j}] = (\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{j} \qquad [\vec{\alpha}\cdot\vec{J}, \vec{\beta}\cdot\vec{J}] = (\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{J}$$

$su(2)$ $\qquad$ $so(3)$

$su(2) \to$ Álgebra de Lie de $SU(2)$ $\quad su(2) = \{\vec{\alpha}\cdot\vec{j};\ \vec{\alpha}\in\mathbb{R}^3\}$

$so(3) \to$ Álgebra de Lie de $SO(3)$ $\quad so(3) = \{\vec{\alpha}\cdot\vec{J};\ \vec{\alpha}\in\mathbb{R}^3\}$

$$\varphi : su(2) \to so(3)$$
$$\vec{\alpha}\cdot\vec{j} \mapsto \vec{\alpha}\cdot\vec{J}$$

$$\varphi([\vec{\alpha}\cdot\vec{j}, \vec{\beta}\cdot\vec{j}]) = \varphi((\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{j}) = (\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\varphi(\vec{j}) = (\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{J} = [\vec{\alpha}\cdot\vec{J}, \vec{\beta}\cdot\vec{J}] = [\varphi(\vec{\alpha}\cdot\vec{j}), \varphi(\vec{\beta}\cdot\vec{j})]$$

$SU(2)$ e $SO(3)$ são formados pelas exponenciais dos elementos de duas álgebras de Lie isomorfas: $su(2)$ e $so(3)$. Que tipo de relação podemos encontrar entre os dois grupos?

$$\phi: SU(2) \to SO(3)$$
$$e^{\theta\vec{\eta}\cdot\vec{j}} \mapsto \phi(e^{\theta\vec{\eta}\cdot\vec{j}}) = e^{\varphi(\theta\vec{\eta}\cdot\vec{j})} = e^{\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}}$$

Proposição 11: $\phi: SU(2) \to SO(3)$, $\exp(\theta\vec{\eta}\cdot\vec{j}) \mapsto \phi(\exp(\theta\vec{\eta}\cdot\vec{j})) = \exp(\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J})$ é um homomorfismo de $SU(2)$ em $SO(3)$, i.e., $\phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ e, $\forall\, U_a, U_b \in SU(2)$, $\phi(U_a)\phi(U_b) = \phi(U_aU_b)$.

$$\|M\| \doteq \sup \frac{\|Mv\|}{\|v\|}$$

Demonstração

$$a \doteq \sum_{k=1}^{3} \alpha_k j_k \quad , \qquad b \doteq \sum_{k=1}^{3} \beta_k j_k$$

$U_a = e^a$, $U_b = e^b$

Limitemos os valores de α_i e β_i de forma que $\|a\|, \|b\| < \frac{1}{2}\log(2 - \frac{\sqrt{2}}{2})$, o que nos mantém no domínio de validade da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff:

$$U_aU_b = e^a e^b = e^{a*b}$$
$$a*b = a + b + \frac{1}{2}[a,b] + \frac{1}{12}[a,[a,b]] + \frac{1}{12}[b,[b,a]] + \cdots$$

Como o comutador é o produto da álgebra de $su(2)$, perceba que $a*b \in su(2)$. Além disso, note que:

$$e^{\vec{\gamma}\cdot\vec{j}} = e^{\vec{\alpha}\cdot\vec{j}} e^{\vec{\beta}\cdot\vec{j}} = e^a e^b = e^{a*b} = e^{(\vec{\alpha}\cdot\vec{j})*(\vec{\beta}\cdot\vec{j})}$$

$$\vec{\gamma}\cdot\vec{j} = (\vec{\alpha}\cdot\vec{j}) + (\vec{\beta}\cdot\vec{j}) + \frac{1}{2}[\vec{\alpha}\cdot\vec{j}, \vec{\beta}\cdot\vec{j}] + \frac{1}{12}[\vec{\alpha}\cdot\vec{j},[\vec{\alpha}\cdot\vec{j}, \vec{\beta}\cdot\vec{j}]] + \cdots$$
$$= (\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot\vec{j} + \frac{1}{2}(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{j} + \frac{1}{12}(\vec{\alpha}\times(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}) - \vec{\beta}\times(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}))\cdot\vec{j} + \cdots$$

Como os j_i são LI,

$$\vec{\gamma} = (\vec{\alpha}+\vec{\beta}) + \frac{1}{2}(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}) + \frac{1}{12}\left(\vec{\alpha}\times(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}) - \vec{\beta}(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\right) + \cdots$$

Ou seja, $\vec{r}$ é uma expansão em série de potências de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$. Como a série que define $a*b$ é absolutamente convergente e envolve, em cada termo, polinômios em $\vec{\alpha}$ e $\vec{\beta}$, ~~$\vec{r}$ é analítica~~ sabemos que $\vec{r}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ é analítica.

Sejam

$$\phi(U_a) = \exp\left(\sum_{k=1}^{3} \alpha_k J_k\right)$$

$$\phi(U_b) = \exp\left(\sum_{k=1}^{3} \beta_k J_k\right)$$

$$A = \varphi(a) = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k J_k$$

$$B = \varphi(b) = \sum_{k=1}^{3} \beta_k J_k$$

$$\phi(U_a)\phi(U_b) = e^{A} e^{B} = e^{A*B}$$

Como φ é isomorfismo entre $su(2)$ e $so(3)$ e o produto $*$ é formado por combinações lineares de comutadores múltiplos de elementos de $su(2)$, temos que

$$A*B = \varphi(a) * \varphi(b) = \varphi(a*b) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{3} r_k(\vec{\alpha}, \vec{\beta})\, j_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{3} r_k(\vec{\alpha}, \vec{\beta})\, \varphi(j_k) = \sum_{k=1}^{3} r_k(\vec{\alpha}, \vec{\beta})\, J_k$$

$\therefore$ $\phi(U_a)\phi(U_b) = \exp(\varphi(a*b)) = \phi(\exp(a*b)) = \phi(U_a U_b)$, quando $\|a\|, \|b\| < \frac{1}{2}\log\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. No entanto, cada elemento de $e^{\vec{\alpha}\cdot\vec{J}}$ é uma função analítica (inteira) de $\vec{\alpha}$ (pois a série que define a exponencial converge absolutamente em toda parte). Idem para $e^{\vec{\beta}\cdot\vec{J}}$. Logo, cada elemento de $e^{\vec{\alpha}\cdot\vec{J}} e^{\vec{\beta}\cdot\vec{J}}$ é uma função analítica inteira de $\vec{\alpha}$ e $\vec{\beta}$. Logo, cada elemento de $e^{\vec{r}\cdot\vec{J}}$ também é uma função analítica de $\vec{\alpha}$ e $\vec{\beta}$ quando estes

4300429

estão próximos a zero, pois a composição de funções analíticas é uma função analítica. Assim, $e^{\vec{\alpha}\cdot\vec{J}}e^{\vec{\beta}\cdot\vec{J}} = e^{\vec{\gamma}\cdot\vec{J}}$ coincidem em um aberto suficientemente pequeno. Por um teorema da teoria de funções de variável complexa, isso implica que $e^{\vec{\alpha}\cdot\vec{J}}e^{\vec{\beta}\cdot\vec{J}} = e^{\vec{\gamma}\cdot\vec{J}}$ em toda parte. Logo, vale $\forall \vec{\alpha},\vec{\beta}$ que

$$\phi(e^{\vec{\alpha}\cdot\vec{J}})\,\phi(e^{\vec{\beta}\cdot\vec{J}}) = \phi(e^{\vec{\alpha}\cdot\vec{J}}e^{\vec{\beta}\cdot\vec{J}})$$

∎

Como ϕ é um homomorfismo e é claramente sobrejetora, ϕ é um epimorfismo de $SU(2)$ em $SO(3)$.

Note que a Proposição 9 implica que $\phi(e^{\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}}) = \mathbb{1} \iff \theta = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. Tomando $n_1=0$ e $n_2=1$, i.e., $\theta_1=0$ e $\theta_2=2\pi$, vemos que

$$\phi(e^{0\vec{\eta}\cdot\vec{J}}) = \mathbb{1}_3 = \phi(e^{2\pi\vec{\eta}\cdot\vec{J}}) \quad ; \quad e^{2\pi\vec{\eta}\cdot\vec{J}} = -e^{0\vec{\eta}\cdot\vec{J}}$$

$$\phi(\mathbb{1}_2) = \mathbb{1}_3 = \phi(-\mathbb{1}_2)$$

$$\phi(-U) = \phi(-\mathbb{1}_2 U) = \phi(-\mathbb{1}_2)\,\phi(U) = \phi(U)$$

Assim, percebemos que ϕ não é injetora.

Podemos construir outro homomorfismo de $SU(2)$ em $SO(3)$:

$$U \in SU(2)$$

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2+|b|^2=1$$

$$\psi : SU(2) \to SO(3)$$

$$\psi\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\bar{a}^2+\bar{b}^2+a^2-b^2) & \frac{1}{2}(\bar{a}^2+\bar{b}^2-a^2-b^2) & -\bar{a}\bar{b}-ab \\ \frac{i}{2}(\bar{a}^2+\bar{b}^2+a^2+b^2) & \frac{1}{2}(\bar{a}^2+\bar{b}^2+a^2+b^2) & i(ab-\bar{a}\bar{b}) \\ a\bar{b}+\bar{a}b & i(a\bar{b}-\bar{a}b) & a\bar{a}-b\bar{b} \end{pmatrix}$$

Lema 12:
Seja $R \in SO(3)$. Então
$$R(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) = (R\vec{\alpha}) \times (R\vec{\beta}), \quad \forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^3$$

Demonstração:
Seja $R \equiv R(\theta, \vec{\eta})$, para algum $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$, $\|\vec{\eta}\| = 1$, e algum $\theta \in [0, \pi]$. Como $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$, $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$,

$$(R(\vec{\alpha} \times \vec{\beta})) \times ((R\vec{\alpha}) \times (R\vec{\beta})) = (R(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot (R\vec{\beta}))R\vec{\alpha} - (R(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot (R\vec{\alpha}))R\vec{\beta}$$

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle R\vec{\alpha}, R\vec{\beta} \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$(R(\vec{\alpha} \times \vec{\beta})) \times ((R\vec{\alpha}) \times (R\vec{\beta})) = ((\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\beta})R\vec{\alpha} - ((\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\alpha})R\vec{\beta}$$
$$= \vec{0}$$

$$\therefore R(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) = \lambda (R\vec{\alpha} \times R\vec{\beta}), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\|R(\vec{\alpha} \times \vec{\beta})\| = \|\vec{\alpha} \times \vec{\beta}\| = \|\vec{\alpha}\| \|\vec{\beta}\| \sin \varphi$$
$$\|R\vec{\alpha} \times R\vec{\beta}\| = \|R\vec{\alpha}\| \|R\vec{\beta}\| \sin \varphi' = \|\vec{\alpha}\| \|\vec{\beta}\| \sin \varphi'$$

Como R preserva norma e produto escalar, preserva o ângulo entre vetores, i.e., $\varphi = \varphi'$. Logo, $\lambda = \pm 1$. Como R é contínua em θ e $\theta = 0 \Rightarrow R = \mathbb{1} \Rightarrow \lambda = +1$, concluímos que $\lambda = +1$, $\forall \theta \in [0, \pi]$, i.e.,
$$R(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) = R\vec{\alpha} \times R\vec{\beta}$$
∎

Proposição 13:
Seja $R_0 \in SO(3)$. Então, $\forall \vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$, $\|\vec{\eta}\| = 1$ e $\forall \theta \in [0, \pi]$,
$$R_0 R(\theta, \vec{\eta}) R_0^{-1} = R(\theta, R_0 \vec{\eta})$$

Demonstração:

$$R(\theta, R_0\vec{\eta})\, R_0 \vec{\alpha} = \cos\theta\, R_0\vec{\alpha} + (1-\cos\theta)(R_0\vec{\eta}\cdot R_0\vec{\alpha})R_0\vec{\eta} + \sin\theta\,(R_0\vec{\eta}\times R_0\vec{\alpha})$$

$$= \cos\theta\, R_0\vec{\alpha} + (1-\cos\theta)(\vec{\eta}\cdot\vec{\alpha})R_0\vec{\eta} + \sin\theta\, R_0(\vec{\eta}\times\vec{\alpha})$$

$$= R_0\left(\cos\theta\,\vec{\alpha} + (1-\cos\theta)(\vec{\eta}\cdot\vec{\alpha})\vec{\eta} + \sin\theta\,(\vec{\eta}\times\vec{\alpha})\right)$$

$$= R_0\, R(\theta,\vec{\eta})\vec{\alpha}\ , \quad \forall\, \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$$

$$\therefore\ R(\theta, R_0\vec{\eta})R_0 = R_0 R(\theta,\vec{\eta})$$

$$R_0 R(\theta,\vec{\eta})R_0^{-1} = R(\theta, R_0\vec{\eta}) \qquad \blacksquare$$

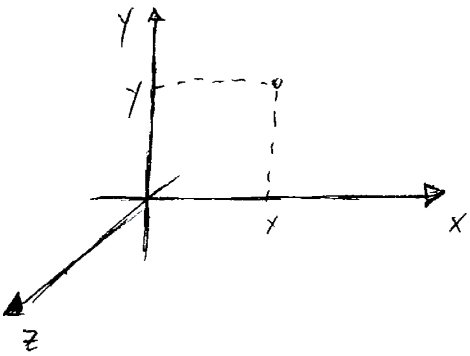
Observações:

Note que

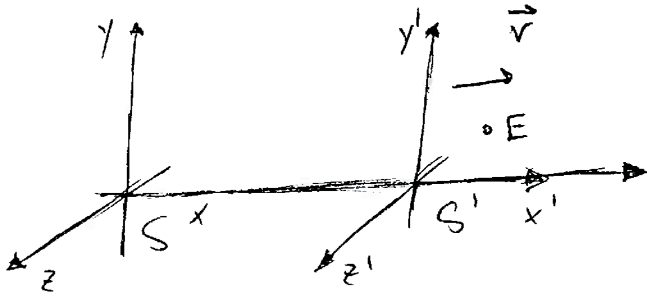
$$R(\theta,\vec{\eta}) = e^{\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}}$$

$$\therefore\ R_0\, e^{\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}} R_0^{-1} = e^{\theta(R_0\vec{\eta})\cdot\vec{J}}$$

Grupo de Galilei



$$E \to (t, x, y, z)$$



Sendo S e S' dois referenciais inerciais (i.e. vale o princípio de inércia), como se relacionam as coordnadas (t, x, y, z) e (t', x', y', z') de um mesmo evento E?

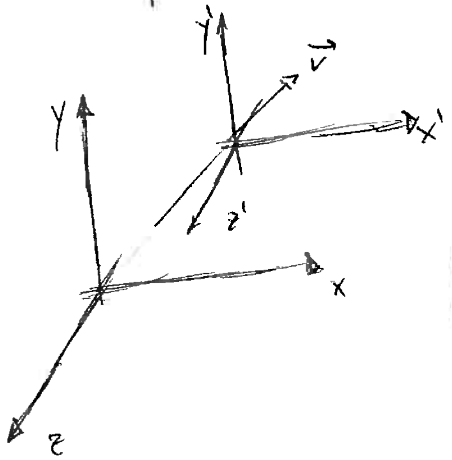
Convenção:

$$t = 0 \Rightarrow (t, x, y, z) = (t', x', y', z')$$

↳ origem em comum

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \rightarrow \text{Caso mais simples das Transformações de Galilei}$$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_1 & 1 & 0 & 0 \\ -v_2 & 0 & 1 & 0 \\ -v_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

"Boost": transformação entre dois referenciais que se movem com velocidade constante em relação um ao outro

$$G(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_1 & 1 & 0 & 0 \\ -v_2 & 0 & 1 & 0 \\ -v_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Boost de Galilei}$$

$$G(\vec{v_2})\, G(\vec{v_1}) = G(\vec{v_1} + \vec{v_2})$$

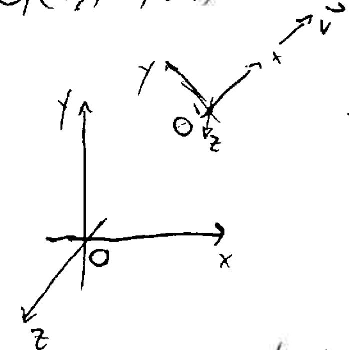
$$G(\vec{0}) = \mathbb{1}$$

$$G(\vec{v})^{-1} = G(-\vec{v})$$

Grupo dos Boosts de Galilei

$$\{G(\vec{v}),\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3\}$$

$$G(\vec{v}_2)\,G(\vec{v}_1) = G(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = G(\vec{v}_2 + \vec{v}_1) = G(\vec{v}_1)\,G(\vec{v}_2)$$



$$r \in O(3)$$

$$r\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

rotação e troca de orientação dos eixos

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -v_1 & & & \\ -v_2 & & r & \\ -v_3 & & & \end{array}\right)\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad r \in O(3)$$

$$G(\vec{v}, r), \quad \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \quad r \in O(3)$$

$$G(\vec{v}, r) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -v_1 & & & \\ -v_2 & & r & \\ -v_3 & & & \end{array}\right)$$

↳ Transformação de Galilei

$$G(\vec{v}, r)\begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ r\vec{x} - \vec{v}t \end{pmatrix}$$

$$G(\vec{v}, \mathbb{1}) \equiv G(\vec{v})$$

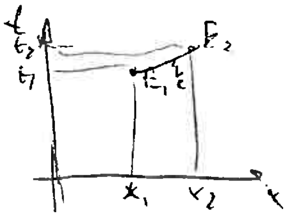
Grupo de Galilei (Homogêneo) → Não-abeliano

↳ o grupo dos boosts é um subgrupo abeliano

$$G(\vec{v}_1, r_1)\,G(\vec{v}_2, r_2) = G(\vec{v}_1 + r_1\vec{v}_2,\ r_1 r_2)$$

$$G(\vec{0}, \mathbb{1}) = \mathbb{1}, \quad G(\vec{v}, r)^{-1} = G(-\vec{v},\ r^{-1})$$

As leis do eletromagnetismo não são preservadas por transformações de Galilei



$$E = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad E_1 = \begin{pmatrix} t_1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} t_2 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$x_2 - x_1 = c\,(t_2 - t_1)$$

$$c = \frac{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}}{(t_2-t_1)}$$

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = 0 \qquad S$$

$$c^2(t'-t)^2 - (x'-x)^2 - (y'-y)^2 - (z'-z)^2 = 0 \qquad S'$$

Intervalo entre eventos

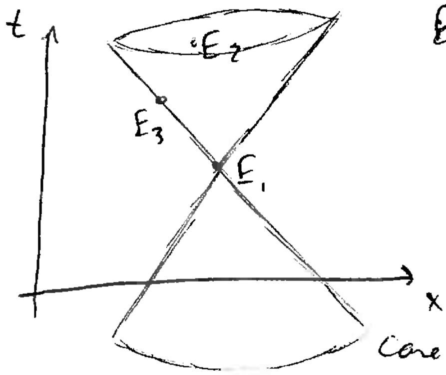
$$E_1 = \begin{pmatrix} t_1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} t_2 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \qquad S$$

$$E_1' = \begin{pmatrix} t_1' \\ x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{pmatrix} \quad \vec{E}_2' = \begin{pmatrix} t_2' \\ x_2' \\ y_2' \\ z_2' \end{pmatrix} \qquad S'$$

$$I(E_1, E_2) = c^2(t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2$$

$c \to 1$

$$I(E_1, E_2) = (t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2$$



Cone de Luz

$$E_1 = \begin{pmatrix} t_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} t_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$I(E_1, E_3) = 0$$

$$(t_3-t_1)^2 - (x_3-x_1)^2 = 0$$

$$(x_3 - x_1) = \pm(t_3 - t_1)$$

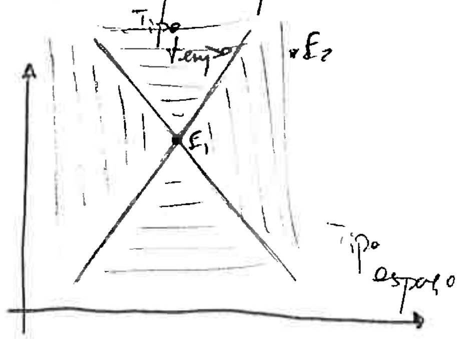
Cone de Luz com base em E_1

$$\{E_3 \in \mathbb{R}^4 ; \; I(E_1, E_3) = 0\}$$

Classificação de intervalos entre eventos

$E_1, E_2 \qquad I(E_1, E_2) = I(E_2, E_1)$

i) $I(E_1, E_2)$ é tipo luz se $I(E_1, E_2) = 0$ } causalmente conectados
ii) $I(E_1, E_2)$ é tipo tempo se $I(E_1, E_2) > 0$ }
iii) $I(E_1, E_2)$ é tipo espaço se $I(E_1, E_2) < 0$ → causalmente desconectados



Tipo

$$I(E_1, E_2) = (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 < 0$$

$$|t_2 - t_1| < |x_2 - x_1|$$

$$c \equiv 1 < \frac{|x_2 - x_1|}{|t_2 - t_1|}$$

Absurdo!

um sinal não pode ser emitido em E_1 e detectado em E_2

$I(E_1, E_2)$ tipo tempo em S e tipo espaço em S'? → quebra de estrutura causal. Absurdo.

Uma transformação que preserve a estrutura causal há de respeitar

$$I(E_1, E_2) = (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \quad > 0, \; < 0$$

$$(t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2 \quad > 0, \; < 0$$

O Grupo de Lorentz → 22.6

$M \equiv \mathbb{R}^4$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{evento}}}{E} \in M \to \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$$

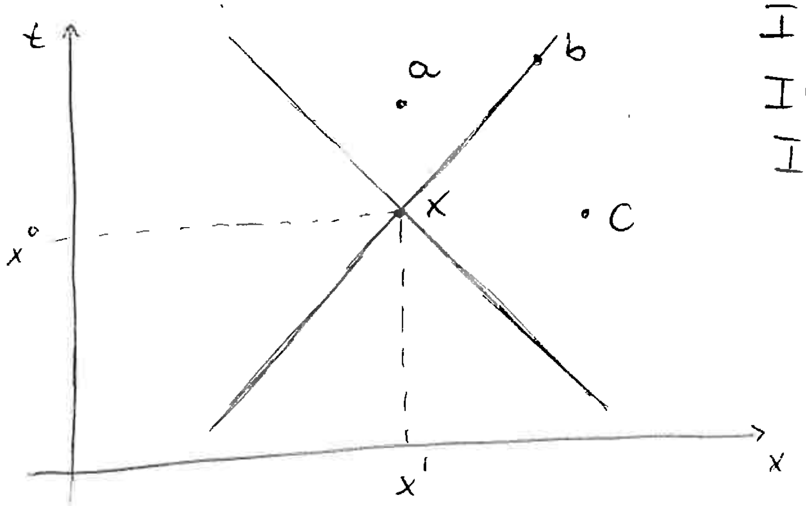
$$I(x,y) = (y^0 - x^0)^2 - (y^1 - x^1)^2 - (y^2 - x^2)^2 - (y^3 - x^3)^2$$

↳ intervalo entre x e y

x,y são do tipo luz se $I(x,y) = 0$

x,y são do tipo tempo se $I(x,y) > 0$

x,y são do tipo espaço se $I(x,y) < 0$



$I(x,a) > 0$

$I(x,b) = 0$

$I(x,c) < 0$

Como deve ser uma transformação que preserve a estrutura causal?

↳ i.e., que leva eventos do tipo tempo em eventos do tipo tempo, tipo luz em tipo luz e tipo espaço em tipo espaço

$$L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$
$$x \mapsto x'$$

$$\left.\begin{aligned} I(x,y) > 0 &\Rightarrow I(L(x), L(y)) > 0 \\ I(x,y) = 0 &\Rightarrow I(L(x), L(y)) = 0 \\ I(x,y) < 0 &\Rightarrow I(L(x), L(y)) < 0 \end{aligned}\right\}$$ L preserva a estrutura causal

Proposição 14:
L é um operador linear, se não for uma translação
↳ A.A. Alexandrov, P. Zeeman
↳ W. Rindler e L. Landau assumem que L é contínua e diferenciável

Exemplo

$$x \mapsto x + t \qquad t = \begin{pmatrix} t^0 \\ t^1 \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

$$I(x,y) = (x^0 - y^0)^2 - \sum_{k=1}^{3} (x^k - y^k)^2 = I(x+t, y+t)$$

Observação

$$L\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}$$

observação
Os índices se iniciam em 0

$$L = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{10} & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{20} & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{30} & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix}, \qquad (LL')_{ab} = \sum_{c=0}^{3} L_{ac} L'_{cb}$$

Métrica, ou tensor métrico, de Minkowski

$$\eta = \operatorname{diag}(+1, -1, -1, -1)$$

$$I(x,y) = \langle (x-y), \eta(x-y) \rangle_{\mathbb{R}}$$

Se $\langle (x-y), \eta(x-y) \rangle_{\mathbb{R}} = 0 \Rightarrow \langle L(x-y), \eta L(x-y) \rangle_{\mathbb{R}} = 0$

$\langle (x-y), \eta(x-y) \rangle_{\mathbb{R}} > 0 \Rightarrow \langle L(x-y), \eta L(x-y) \rangle_{\mathbb{R}} > 0$

$\langle (x-y), \eta(x-y) \rangle_{\mathbb{R}} < 0 \Rightarrow \langle L(x-y), \eta L(x-y) \rangle_{\mathbb{R}} < 0$

Dilatação

$$D(\lambda) = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \lambda, \lambda) = \lambda \mathbb{1}_4 \,, \qquad \lambda > 0$$

$$D(\lambda)\, x = \begin{pmatrix} \lambda x^0 \\ \lambda x^1 \\ \lambda x^2 \\ \lambda x^3 \end{pmatrix} = \lambda x$$

$$I(x,y) \to I(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 I(x,y)$$

Dilatações preservam estrutura causal, mas não são simetrias em Física

↳ $\nexists$ um átomo de H do tamanho de um elefante, nem vice-versa

Teorema 15

Seja $L \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R}, 4)$ tal que L preserva intervalos de tipo luz, i.e., se $I(x,y) = 0$, então $I(L(x), L(y)) = 0$. Então

$$\eta L^T \eta L = (L^T \eta L)_{00} \mathbb{1}_{4}$$

$$= \pm \sqrt{\det L}\, \mathbb{1}$$

↳ Teorema 22.9 das Notas

Além disso, se L preserva a estrutura causal vale que

$$\eta L^T \eta L = + \sqrt{\det L}\, \mathbb{1}$$

Se, além disso, L não implementar dilatações, então $|\det L| = 1$ e, portanto,

$$\eta L^T \eta L = \mathbb{1}$$

Observação

$$I(x,y) = \langle (x-y), \eta (x-y) \rangle$$
$$= \langle L(x-y), \eta L(x-y) \rangle$$
$$= \langle (x-y), L^T \eta L (x-y) \rangle$$

$$= \langle (x,y), \eta(x,y) \rangle = I(x,y)$$

Observação

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\eta^2 = \mathbb{1} \Rightarrow \eta^{-1} = \eta$$

$$L^T \eta L = \eta$$

Observação

$$\langle x, \eta y \rangle$$

$$\downarrow L$$

$$\langle Lx, \eta Ly \rangle = \langle x, L^T \eta L y \rangle$$

$$= \langle x, \eta y \rangle$$

$L \rightarrow$ transformações de Lorentz

$$\mathcal{L} = O(1,3) = \{ L \in Mat(\mathbb{R},4),\ \langle x, \eta y \rangle = \langle Lx, \eta Ly \rangle \}$$

$$= \{ L \in Mat(\mathbb{R},4),\ L^T \eta L = \eta \}$$

$$\det (L^T \eta L) = \det \eta$$

$$(\det L)^2 = 1 \Rightarrow \det L = \pm 1$$

$$\mathcal{L} = SO(1,3) \cup \{ L \in Mat(\mathbb{R},4),\ \langle x, \eta y \rangle = \langle Lx, \eta Ly \rangle,\ \det L = -1 \}$$

$$SO(1,3) = \{ L \in O(1,3),\ \det L = 1 \}$$

Lema 16

Se $L, L' \in O(1,3)$, então $\operatorname{sign}((LL')^{00}) = \operatorname{sign}(L^{00}) \operatorname{sign}(L'^{00})$

Exemplo

$$T = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \qquad T \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad T \in O(1,3),\ T \notin SO(1,3)$$

T é uma reflexão temporal

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \quad P_0 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

$P_k \in O(1,3)$, $P_k \notin SO(1,3)$, $k = 0,1,2,3$

$P_0 = P_1 P_2 P_3$

P_k são reflexões espaciais

Observação
Produto de matrizes dadas por blocos

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{A} & C \\ 0 & \boxed{B} \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} \boxed{C} & C \\ 0 & \boxed{D} \end{pmatrix}$$

$$MN = \begin{pmatrix} \boxed{AC} & 0 \\ 0 & \boxed{BD} \end{pmatrix}$$

se A e C ~~forem~~ quadrados
→ e de mesmo tamanho e
B e D forem quadrados e de
mesmo tamanho

Observação

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \\ & \boxed{-\mathbb{1}} \end{pmatrix}$$

Considere R dada por

$$R = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \\ & \boxed{r} \end{pmatrix}, \quad r \in SO(3)$$

$$R^T \eta R \stackrel{?}{=} \eta$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & r^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -\mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -r^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \eta$$

R é uma matriz de Lorentz

Note que nenhuma das matrizes de Lorentz apresentadas até agora mistura coordenadas espaciais e temporais

"Boosts" de Lorentz

$$L = \begin{pmatrix} B & \\ & \mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad L^T \eta_4 L = \eta_4$$

$$\eta_4 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$L \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B^T & \\ & \mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -\mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & \\ & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^T\eta_2 B & \\ & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \eta_2 & \\ & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

Idealmente,

$$B^T \eta_2 B = \eta_2$$

i.e. $B \in O(1,1)$

$$B = \begin{pmatrix} \cosh z & -\sinh z \\ -\sinh z & \cosh z \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma(v) & -v\gamma(v) \\ -v\gamma(v) & \gamma(v) \end{pmatrix}$$

$v = \tanh z$

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$L = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -v\gamma(v) & 0 & 0 \\ -v\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in O(1,3)$$

$$L^T \eta L = \eta$$

$$B_1(v) = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -v\gamma(v) & 0 & 0 \\ -v\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(1,3)$$

$$B_1(v) B_1(v') = B_1\left(\frac{v+v'}{1+vv'}\right), \qquad B_1(0) = \mathbb{1}$$

$\{B_1(v), -1 < v < 1\}$ → grupo de Boosts de Lorentz na direção 1

$$B_2(v) = \begin{pmatrix} \gamma(v) & 0 & -v\gamma(v) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -v\gamma(v) & 0 & \gamma(v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_3(v) = \begin{pmatrix} \gamma(v) & 0 & 0 & -v\gamma(v) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v\gamma(v) & 0 & 0 & \gamma(v) \end{pmatrix}$$

$$B_k(v) B_k(v') = B_k\left(\frac{v+v'}{1+vv'}\right)$$

Grupo dos boosts de Lorentz na direção $k = 1,2,3$

$$\{B_k(v), v \in (-1,1)\}$$

$$B_1(v) B_2(v') \neq B_2(v') B_1(v)$$

↳ não é um boost, mas um boost seguido de uma rotação!

$S\,Rot = \left\{ R = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{r} \end{pmatrix};\ r \in SO(3) \right\}$

A forma geral de um boost de Lorentz é $R B_1(v) R^{-1}$, $v \in (-1,1)$, $R \in SRot$

Fixe $R \in SRot$. Então $k = 1,2,3$

$$\mathcal{B}_{rot} = \left\{ R B_k(v) R^{-1};\ v \in (-1,1) \right\}$$

$$(R B_k(v) R^{-1})(R B_k(v') R^{-1}) = R B_k(v) B_k(v') R^{-1} = R B_k\left(\frac{v+v'}{1+vv'}\right) R^{-1}$$

↳ boosts em direções distintas não comutam

$L^T \eta L = \eta$, $\det L = \pm 1$, $\text{sign}(L_{00}) = \pm 1$, $R_{a,b} \in SRot$

1) $\det L = 1$, $\text{sign}(L_{00}) = 1 \Rightarrow L = R_a B_1(v) R_b$, $\mathcal{L}_+^\uparrow = \{R_a B_1(v) R_b\}$

2) $\det L = 1$, $\text{sign}(L_{00}) = -1 \Rightarrow L = T P_1 R_a B_1(v) R_b$, $\mathcal{L}_+^\downarrow = \{T P_1 R_a B_1(v) R_b\}$

3) $\det L = -1$, $\text{sign}(L_{00}) = -1 \Rightarrow L = T R_a B_1(v) R_b$, $\mathcal{L}_-^\downarrow = \{T R_a B_1(v) R_b\}$

4) $\det L = -1$, $\text{sign}(L_{00}) = 1 \Rightarrow L = P_1 R_a B_1(v) R_b$, $\mathcal{L}_-^\uparrow = \{P_1 R_a B_1(v) R_b\}$

Acima, T é uma inversão temporal e P_1 é uma inversão de eixo 1. Note que apenas $\mathcal{L}_+^\uparrow$ é um grupo

$\mathcal{L}_+^\uparrow$ ~ grupo de Lorentz próprio ortócrono (ou restrito)

$\mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow = \mathcal{L}^\uparrow$ ~ grupo de Lorentz ortócrono

$\mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow = \mathcal{L}_+$ ~ grupo de Lorentz próprio $\to$ $\mathcal{L}_+ = SO(1,3)$

$\mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow = \mathcal{L}_0$ ~ grupo de Lorentz ortócoro

$SRot \subset \mathcal{L}_+^\uparrow$

$\mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow = O(1,3)$

A demonstração de que todo elemento do grupo de Lorentz pertence a $\mathcal{L}_+^\uparrow$, $\mathcal{L}_+^\downarrow$, $\mathcal{L}_-^\uparrow$ ou $\mathcal{L}_-^\downarrow$ é um tanto extensa. Pode ser encontrada

4300429

nas Notas para um Curso de Física Matemática (22.B) e possivelmente será feita adiante nestas anotações, mas não é garantido.

Geradores do Grupo de Lorentz

$$B_1(v) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad v \in (-1,1) \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}$$

$v =: \tanh z$

$v \in (-1,1) \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow B_1(v) = \begin{pmatrix} \cosh z & -\sinh z & 0 & 0 \\ -\sinh z & \cosh z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_1(z)$$

$$B_1(z)B_1(z') = B_1(z+z'), \quad B_1(0) = \mathbb{1}$$

$$M_1 = \frac{d}{dz}B_1(z)\Big|_{z=0} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \mathcal{J}_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \boxed{J_k} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

J_k são os geradores de $SO(3)$

$$[\vec{\alpha}\cdot\vec{M} + \vec{\beta}\cdot\vec{\mathcal{J}}, \vec{\gamma}\cdot\vec{M} + \vec{\delta}\cdot\vec{\mathcal{J}}] = (\vec{\beta}\times\vec{\gamma} - \vec{\alpha}\times\vec{\delta})\vec{M} + (\vec{\beta}\times\vec{\delta} - \vec{\alpha}\times\vec{\gamma})\vec{\mathcal{J}}$$

Tome $A, B \in Mat(\mathbb{C}, n) \Rightarrow e^{A}Be^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]] + \dots$

$$B(\vec{\alpha}) = e^{\vec{\alpha}\vec{M}}, \qquad = B + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\underbrace{[A,[A,\cdots[A,B]\cdots]]}_{n \text{ vezes}}$$

$$R(\theta,\vec{\eta})B(\vec{\alpha})R(\theta,\vec{\eta})^{-1} = B(R(\theta,\vec{\eta})\vec{\alpha})$$

↳ série de Lie

$$L \in \mathcal{L}_+^\uparrow \Rightarrow L = R_a B_1(z) R_b$$

$$= \underbrace{(R_a B_1(z) R_a^{-1})}_{B \in B_{R_a}} \underbrace{R_a R_b}_{R \in SRot} = BR$$

↳ rotação seguida de boost

Série de Lie

$$A, B \in Mat(\mathbb{C}, n) \Rightarrow e^{A} B e^{-A} = B + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{[A,[A, \dots [A,B] \dots]]}_{n \text{ vezes}}$$

Demonstração

(Exercício) $$e^{A} B e^{-A} = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{n!} A^n\right) B \left(\sum_{m\in\mathbb{N}_0} \frac{(-1)^m}{m!} A^m\right)$$

$$= \sum_{n,m\in\mathbb{N}_0} \frac{(-1)^m}{n!\,m!} A^n B A^m$$

Defino

$$\mathcal{A}(t) = e^{tA} B e^{-tA}, \quad \mathcal{B}(t) = B + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \underbrace{[A,[A, \dots [A,B] \dots]]}_{n \text{ vezes}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Queremos mostrar que $\mathcal{A}(1) = \mathcal{B}(1)$. Primeiramente, perceba que $[A, e^{\pm tA}] = 0$ e que $\mathcal{A}(0) = B = \mathcal{B}(0)$. Com isso, damos sequência calculando as derivadas de $\mathcal{A}(t)$ e $\mathcal{B}(t)$:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(t) = A e^{tA} B e^{-tA} - e^{tA} B e^{-tA} A = [A, \mathcal{A}(t)]$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(t) = [A, \mathcal{A}(t)]$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{B}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \underbrace{[A,[A \dots [A,B] \dots]]}_{n \text{ vezes}} = [A,B] + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \underbrace{[A,[A, \dots [A,B] \dots]]}_{n \text{ vezes}}$$

$$n' = n-1 \Rightarrow n = n'+1$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{B}(t) = [A,B] + \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{t^{n'}}{n'!} \underbrace{[A,[A, \dots [A,B] \dots]]}_{n'+1 \text{ vezes}} = [A,B] + \left[A, \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{t^{n'}}{n'!} \underbrace{[A,[A, \dots [A,B]]]}_{n' \text{ vezes}}\right]$$

$$\frac{d}{dt}B(t) = \left[A, B + \sum_{n}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \underbrace{[A,[A,\dots[A,B]\dots]]}_{n \text{ vezes}}\right]$$

$$= [A, B(t)]$$

$$\therefore \frac{d}{dt}B(t) = [A, B(t)]$$

Desta forma,

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A}(0) = B \quad &e \quad \frac{d}{dt}\mathcal{A}(t) = [A, \mathcal{A}(t)] \\ \mathcal{B}(0) = B \quad &e \quad \frac{d}{dt}\mathcal{B}(t) = [A, \mathcal{B}(t)] \end{aligned}\right\} \mathcal{A}(t) = \mathcal{B}(t), \ \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Tome $t=1$.

$$AB^nA^{-1} = (ABA^{-1})^n$$

$$A\, e^{B} A^{-1} = A\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n\right) A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} AB^nA^{-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (AB^{n}A^{-1})^n$$

$$= \exp(ABA^{-1})$$

$$B_R = \{RB_1(z)R^{-1},\ z \in \mathbb{R},\ R \in SRot\} \Rightarrow RB_1(z)R^{-1} = R\,e^{zM_1}R^{-1}$$

$$= \exp(zRM_1R^{-1})$$

Veja ainda que

$$RM_1R^{-1} = e^{\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}} M_1 e^{-\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}} \overset{\text{Série de Lie}}{=} M_1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(\theta\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{J}),[(\theta\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{J}),\dots[(\theta\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{J}),M_1]\dots]]$$

$$[\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}, M_b] = \theta[\vec{\eta}\cdot\vec{J}, M_b] = \theta\sum_{a=1}^{3}\eta_a[J_a, M_b]$$

$$[J_a, M_b] = \sum_{c=1}^{3}\epsilon_{abc}M_c$$

$$[\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}, M_b] = \theta\sum_{a=1}^{3}\eta_a\sum_{c=1}^{3}\epsilon_{abc}M_c$$

Para $b=1$

$$[\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}, M_1] = \theta(\eta_3 M_2 - \eta_2 M_3)$$

$$\therefore [\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}, [\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}, \dots [\theta\vec{\eta}\vec{J}, M_1]\dots]] = \sum_{a=1}^{3}\alpha^{*}_{a,n}M_a = \vec{\gamma}_n\cdot\vec{M}$$

$$\therefore R M_1 R^{-1} = M_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\vec{\gamma}_n\vec{M} = \vec{\gamma}\cdot\vec{M} \Rightarrow R B_1(z) R^{-1} = e^{zRM_1R^{-1}} = e^{z\vec{\gamma}\cdot\vec{M}}$$

$$\therefore R B_1(z) R^{-1} = e^{\vec{\gamma}\cdot\vec{M}}, \quad \vec{\gamma}\in\mathbb{R}^3$$

$$R(\theta,\vec{\eta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0\ 0\ 0 \\ 0 & \\ 0 & \boxed{r(\theta,\vec{\eta})} \\ 0 & \end{pmatrix}, \quad r(\theta,\vec{\eta}) = e^{\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}}$$

$$R(\theta,\vec{\eta})\, e^{\vec{\gamma}\vec{M}}\, R(\theta,\vec{\eta})^{-1} = e^{(r(\theta,\vec{\eta})\vec{\gamma})\cdot\vec{M}}$$

$$e^{\vec{\gamma}\vec{M}} = R(\theta,\vec{\eta})^{-1}\, e^{(r(\theta,\vec{\eta})\vec{\gamma})\cdot\vec{M}}\, R(\theta,\vec{\eta}), \quad r(\theta,\vec{\eta})\vec{\gamma} = \|\vec{\gamma}\|\hat{e}_1$$

Se $R = R(\theta,\vec{\eta})^{-1}$, $e^{\vec{\gamma}\vec{M}} = R\, e^{\|\vec{\gamma}\|M_1} R^{-1}$, onde $\|\vec{\gamma}\| = z$

Grupos de Lie

Definição 30 [Espaço Métrico].

Sejam M um conjunto e $d: M\times M \to [0,+\infty)$ tal que,

$\forall x,y,z \in M$,

i) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$,

ii) $d(x,y)=d(y,x)$ (simetria),

iii) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ (desigualdade triangular).

Neste caso, diremos que (M,d) é um espaço métrico, onde d é dita a métrica definida em M.

Exemplos:

$M=\mathbb{R}^2$

$x=(x_1,x_2)$

$y=(y_1,y_2)$

$$d_E(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

$$d_1(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$$

$$d_\infty(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$$

Tome $p\geq 1$

$$d_p(x,y)\doteq\left[|x_1-y_1|^p+|x_2-y_2|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$d_\infty(x,y)=\lim_{p\to+\infty} d_p(x,y)$$

Tome $p_1,p_2>0$

$$d(x,y)=\left[p_1|x_1-y_1|^p+p_2|x_2-y_2|^p\right]^{1/p}$$

Exemplo:

$M = C^0(\mathbb{R})$

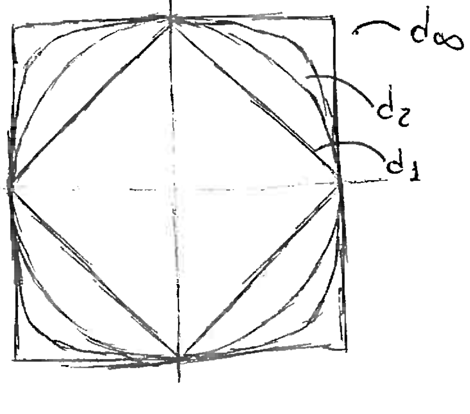
$$d_2(f,g) = \sqrt{\int_a^b |f(x)-g(x)|^2 dx}$$

$$d_p(f,g) = \left[\int_a^b |f(x)-g(x)|^p dx\right]^{1/p}$$

Definição 31:

Seja (M,d) um espaço métrico. Definimos a bola d-aberta centrada em $x \in M$ e de raio $r > 0$ como

$$B(x,r) \equiv B_r(x) \doteq \{y \in M;\ d(x,y) < r\}$$



Teorema 17:

Seja (M,d) um espaço métrico. Então vale a propriedade de Hausdorff, i.e., dadas $x, y \in M$, $\exists\, r \in (0, +\infty)$;

$$B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$$

□

Demonstração

Tome $r < \frac{d(x,y)}{2}$. Por absurdo, suponha que $\exists\, z \in B_r(x) \cap B_r(y)$.

Note que

$z \in B_r(x) \Rightarrow d(x,z) < r$

$z \in B_r(y) \Rightarrow d(y,z) < r$

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < 2r < d(x,y)$$
$$d(x,y) < d(x,y)$$

Absurdo. Logo, $\nexists\, z \in B_r(x) \cap B_r(y)$. Portanto, concluímos que

$$B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$$ ∎

Definição 32:
Seja M um conjunto. Definimos o conjunto das partes de M, $\mathbb{P}(M)$, como o conjunto dos subconjuntos de M. Note que, $\forall M$,

$$\emptyset \in \mathbb{P}(M)$$
$$M \in \mathbb{P}(M)$$

Definição 33 [conjunto d-aberto num espaço-métrico]
Sejam (M,d) um espaço-métrico e $A \in \mathbb{P}(M)$. Diremos que A é d-aberto se

i) $A = \emptyset$, ou se

ii) $\forall\, a \in A, \exists\, r_a > 0, B_{r_a}(a) \subset A$.

Definição 34 [Topologia Métrica]
Seja (M,d) um espaço métrico. Dizemos que o conjunto

$$\tau_d = \{A \in \mathbb{P}(M),\ A \text{ é d-aberto}\}$$

é uma topologia métrica em M.

Teorema 18:
Sejam (M,d) um espaço-métrico. Então valem:

i) $\emptyset, M \in \tau_d$;

ii) $A, B \in \tau_d \Rightarrow A \cap B \in \tau_d$

iii) $A_\lambda \in \tau_d,\ \lambda \in \Lambda \Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \tau_d$ $\square$

Definição 35 [Topologia]:

Seja X um conjunto não-vazio. Dizemos que um conjunto $\tau \subset \mathbb{P}(X)$ é uma topologia em X se valerem as propriedades

i) $\phi, X \in \tau$,

ii) $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$,

iii) $A_\lambda \in \tau,\ \lambda \in \Lambda \Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \tau$.

Definição 36 [Espaço Topológico]:

Sejam X um conjunto não-vazio e τ uma topologia em X. Então dizemos que a dupla (X,τ) é um espaço topológico.

Exemplos:

Seja X um conjunto não-vazio.

$\tau = \{\phi, X\}$ é uma topologia em X.

$\tau = \mathbb{P}(X)$ é uma topologia em X. Note que esta ainda é a topologia métrica devida à métrica trivial.

$$d_T(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Seja $X_0 \subset X$. O conjunto $\tau = \{A \subset X;\ X_0 \subset A\} \cup \{\phi\}$ é dito a topologia particular de X_0 (perceba que de fato é uma topologia).

Definição 36 [Espaço Hausdorff]:

Seja (X,τ) um espaço topológico. Dizemos que τ é uma topologia Hausdorff, ou que τ tem a propriedade

de Hausdorff, e que (X, τ) é um espaço Hausdorff se
$$\forall x, y \in X,\ \exists A, B \in \tau;\ x \in A,\ y \in B,\ A \cap B = \emptyset.$$

Definição 37 [Base Topológica]:
Seja (X, τ) um espaço topológico. Uma coleção de abertos $\mathcal{B} \subset \tau$ é dita ser uma base da topologia τ se todo τ-aberto puder ser escrito como união de elementos de $\mathcal{B}$: $A \in \tau \Rightarrow \exists B_\lambda \in \mathcal{B},\ \lambda \in \Lambda,\ A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$.
Note que Λ não precisa ser finito ou enumerável.

Definição 38 [Segundo-Contabilidade]:
Um espaço topológico (X, τ) é dito ser um espaço topológico segundo-contável se possuir uma base contável.

Definição 39 [Conjunto τ-aberto]:
Seja (X, τ) um espaço topológico. Seja $A \subset X$. Se $A \in \tau$, diremos que A é τ-aberto.

Definição 40 [Conjunto τ-fechado]:
Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $F \subset X$. Se $F^c \equiv X \setminus F$ é τ-aberto, dizemos que F é τ-fechado.

Teorema 19:
Seja τ uma topologia em X e $\mathcal{F}_\tau$ a coleção de todos os conjuntos τ-fechados. Então:

i) $\emptyset, X \in \mathcal{F}_\tau$

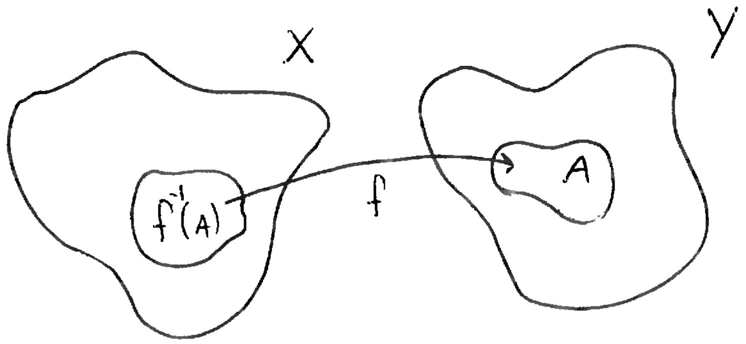
ii) $F, G \in \mathcal{F}_\tau \Rightarrow F \cup G \in \mathcal{F}_\tau$

iii) $F_\lambda \in \mathcal{F}_\tau,\ \lambda \in \Lambda \Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}_\tau$

$\square$

Definição 41 [Função Contínua]:

Sejam $(X,\tau_1), (Y,\tau_2)$ espaços-topológicos e seja $f: X \to Y$ uma função. Diremos que f é contínua em relação a τ_1 e τ_2 ((τ_1,τ_2)-contínua) se $f^{-1}(A) \in \tau_1, \forall A \in \tau_2$.

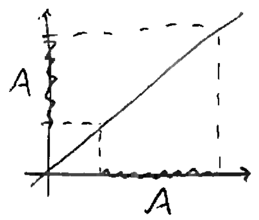


Exemplos:

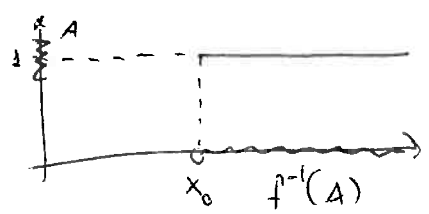
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x$

A topologia no domínio e no contradomínio será a usual, denotada por $\tau_{\mathbb{R}}$



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < x_0 \\ 1, & x \geq x_0 \end{cases}$$



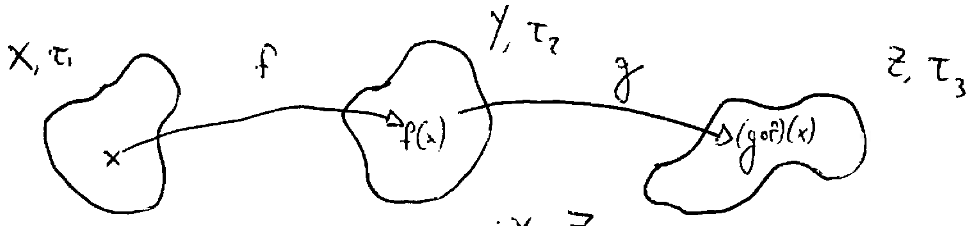
Não é contínua. Dando a topologia $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ao domínio, ela se torna contínua.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$

$\{\emptyset, X\}$ $\quad \tau_{\mathbb{R}}$

$f^{-1}(A) = A \overset{\text{pode ser}}{\neq} \emptyset, \mathbb{R}$ Não é contínua

13004279



$f: X \to Y$ $\quad$ $g: Y \to Z$

Sejam f e g contínuas em relação às topologias dadas. Logo, temos que

$$f^{-1}(A) \in \tau_1, \ \forall A \in \tau_2 \quad e \quad g^{-1}(B) \in \tau_2, \ \forall B \in \tau_3$$

Considere a função:

$$g \circ f : X \to Z$$

Tome $B \in \tau_3$. Como g é contínua, segue que:

$$g^{-1}(B) \in \tau_2,$$

mas como f é contínua, temos que:

$$f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \tau_1$$

Sabemos que

$$g^{-1}(B) = \{ y \in Y ; g(y) \in B \}, \quad f^{-1}(A) = \{ x \in X ; f(x) \in A \}$$

Dessa forma,

$$f^{-1}(g^{-1}(B)) = \{ x \in X ; f(x) \in g^{-1}(B) \} = \{ x \in X ; g(f(x)) \in B \}$$
$$= \{ x \in X ; (g \circ f)(x) \in B \}$$

$$\therefore (g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \tau_1$$

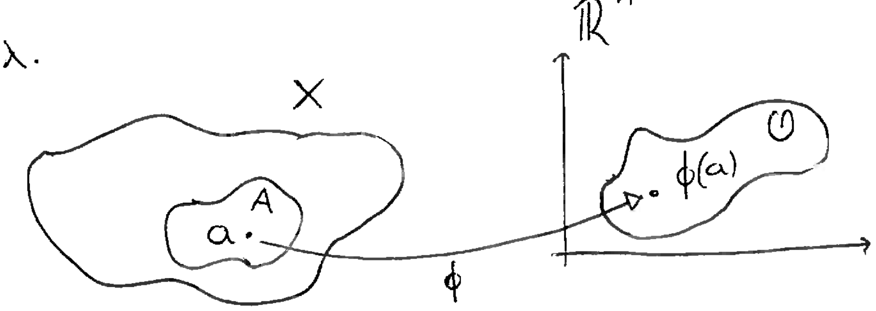
Logo, $(g \circ f)^{-1}(B) \in \tau_1, \ \forall B \in \tau_3$. Logo, $g \circ f$ é contínua, demonstrando, pois, o seguinte teorema:

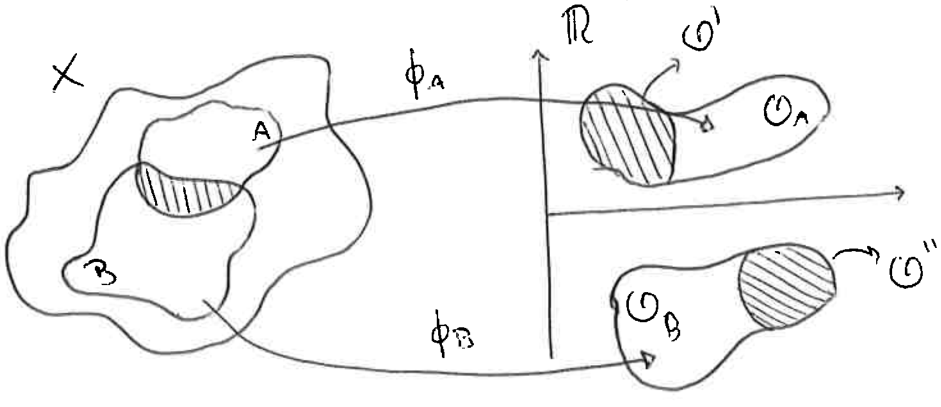
Teorema 20:

Sejam (X,τ_1), (Y,τ_2) e (Z,τ_3) espaços topológicos e sejam $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ funções contínuas. Então $(g \circ f): X \to Z$ é contínua. $\square$

Definição 42 [Espaço Topológico Localmente Euclidiano]

Um espaço topológico (X,τ) é dito ser localmente euclidiano de dimensão $n \in \mathbb{N}^*$ se possuir ao menos um recobrimento por abertos $A_\lambda \in \tau$, $\lambda \in \Lambda$ tais que existam $\phi_\lambda: A_\lambda \to \mathcal{O}_\lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ que sejam $(\tau, \tau_\mathbb{R})$-contínuas e tenham inversa $\phi_\lambda^{-1}: \mathcal{O}_\lambda \to A_\lambda$ $(\tau, \tau_\mathbb{R})$-contínuas. Dizemos que as funções ϕ_λ são homeomorfismos entre A_λ e $\mathcal{O}_\lambda$.





$\phi: \mathcal{O}' \to \mathcal{O}''$; $\phi = \phi_B \circ \phi_A^{-1}$

ϕ é contínua!

$\phi \equiv$ função de transição

$\phi(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) = \left(y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots x_n)\right)$

Definição 43 [Variedade Diferenciável de Dimensão n]:

Um espaço topológico localmente euclidiano (de dimensão n) é uma variedade diferenciável se:

i) Todas as funções de transição forem diferenciáveis, i.e.,

$$\exists \frac{\partial y_k}{\partial x_j}, \quad \forall k, j \in \{i\}_{i=1}^{n} \quad e \quad \forall y \in \mathcal{O}''$$

ii) (X, τ) é Hausdorff

iii) (X, τ) é segundo-contável

Noção de variedade formalizada por Wittney em 1947

Grupos de Lie

Seja G um grupo. Existem muitas funções $G \to G$. Por exemplo,

$$inv(g) = g^{-1}.$$

Tome $h \in G$. Podemos definir

$$L_h(g) = hg$$

$$R_h(g) - gh$$

$$R_h(g) = gh = (h^{-1}g^{-1})^{-1} = inv(L_{h^{-1}}(inv(g)))$$

$$\therefore R_h(g) = (inv \circ L_{h^{-1}} \circ inv)(g)$$

Definição 44 [Grupo de Lie]:

Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável em que as funções inv e L_h, $h \in G$, são contínuas.

Proposição 21:

Em um grupo de Lie, as funções R_h, $h \in G$, são contínuas. $\square$

Spoiler

fórmulas de Lie

$$e^{A+B} = \lim_{m\to+\infty}\left[e^{\frac{1}{m}A}\, e^{\frac{1}{m}B}\right]^{m}$$

$$e^{[A,B]} = \lim_{m\to+\infty}\left[e^{\frac{1}{m}A}\, e^{\frac{1}{m}B}\, e^{-\frac{1}{m}A}\, e^{-\frac{1}{m}B}\right]^{m^2}$$

Revisão - Grupos de Lie

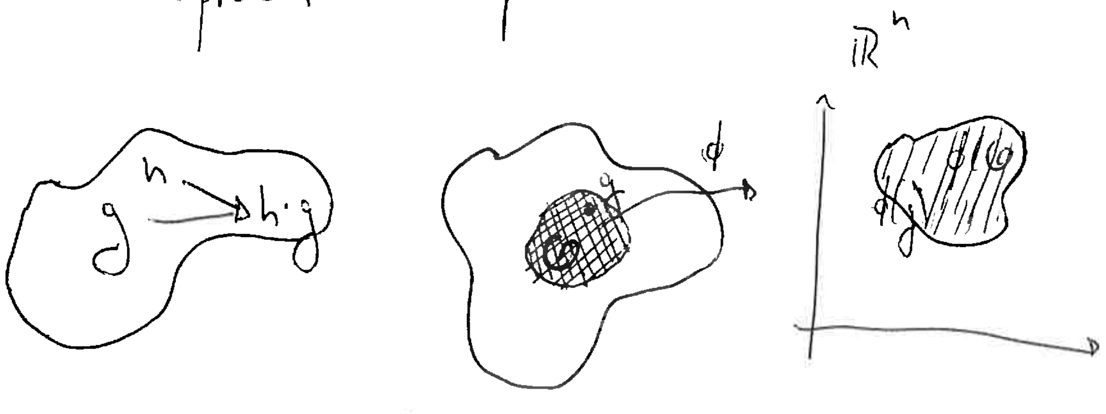
Grupo de Lie

$G \equiv$ grupo

↳ espaço topológico

↳ variedade diferenciável

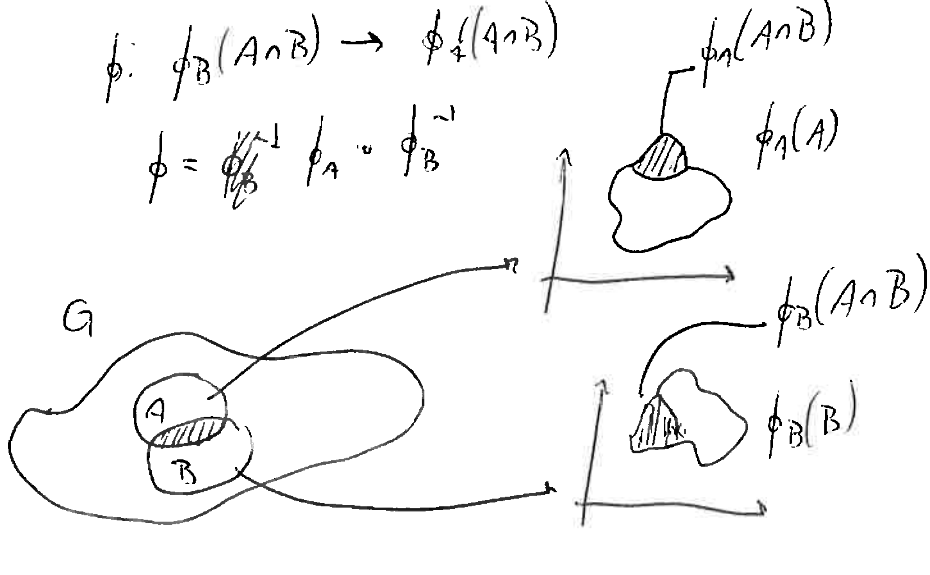
↳ produto à esquerda e inversão são contínuas



$\phi(g) = (x_1, \dots, x_m)$

$\phi: \phi_B(A\cap B) \to \phi_A(A\cap B)$

$\phi = \cancel{\phi_B^{-1}}\ \phi_A \circ \phi_B^{-1}$



Fixe $h \in G$

$$R_h : G \to G \qquad L_h : G \to G \qquad inv : G \to G$$
$$g \mapsto gh \qquad g \mapsto hg \qquad g \mapsto g^{-1}$$

$$L_h = inv \circ R_{h^{-1}} \circ inv$$

Exemplo

$GH_3(\mathbb{C})$ - Grupo de Heisenberg

$$H(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad H(a,b,c)H(a',b',c') = H(a+a', b+b', c+c'+ab')$$

$$H(a,b,c)^{-1} = H(-a, -b, ab-c)$$

$\cancel{\mathbb{C}^3 \ni (a,b,c) \mapsto H(a,b,c) \in}$

$$\mathbb{C}^3 \ni (a,b,c) \mapsto H(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GH_3(\mathbb{C})$$

$$\underset{\mathbb{C}^3}{(a,b,c)} \times \underset{\mathbb{C}^3}{(a',b',c')} \to \underset{\mathbb{C}^3}{(a+a', b+b', c+c'+ab')}$$

Exemplo

$GL(\mathbb{R},n) = \{ M \in Mat(\mathbb{R},n) ; \det M \neq 0 \}$

$$d(A,B) = \|A - B\|$$

$$\|A\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$$

↳ norma operatorial de A

$$\|AB\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|ABv\|}{\|v\|}$$
$$\leq \|A\| \sup_{v \neq 0} \frac{\|Bv\|}{\|v\|}$$
$$= \|A\| \, \|B\|$$

> **Norma**
>
> $\|\cdot\| : V \to [0, +\infty)$
>
> i) $\|v\| = 0 \iff v = 0$
>
> ii) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
>
> iii) $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$

$$\|C\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Cv\|}{\|v\|}$$

$$\|Cv\| \leq \|C\| \|v\|$$

$H \in GL(\mathbb{R},n)$ fixée

$R_H(G) = GH, \quad G \in GL(\mathbb{R},n)$

$G, G' \in Mat(\mathbb{R},n)$

$d(G,G') \leqslant \epsilon \Rightarrow \|G - G'\| \leqslant \epsilon$

$$\begin{aligned} d(R_H(G), R_H(G')) &= \|R_H(G) - R_H(G')\| \\ &= \|GH - G'H\| \\ &= \|(G-G')H\| \\ &\leqslant \|G-G'\| \, \|H\| \\ &\leqslant \epsilon \|H\| \end{aligned}$$

Série de Neumann

$z \in \mathbb{C}, \ |z| < 1$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$A \in Mat(\mathbb{C},n)$

$\|A\| < 1$

$$(\mathbb{1} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

$$(\mathbb{1}-A)s_p \xrightarrow{p \to +\infty} \mathbb{1}$$

$$\begin{aligned} &= (\mathbb{1}-A)\left(\sum_{n=0}^{p} A^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{p} A^n - \sum_{n=1}^{p+1} A^n \\ &= \mathbb{1} - A^{p+1} \xrightarrow[\lim_{p \to +\infty}]{} \mathbb{1} \end{aligned}$$

$$s_p = \sum_{n=0}^{p} A^n$$

$$\begin{aligned} \|s_p\| &= \left\|\sum_{n=0}^{p} A^n\right\| \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{p} \|A^n\| \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{p} \|A\|^n \\ &= \frac{1 - \|A\|^{p+1}}{1 - \|A\|} \\ &\leqslant \frac{1}{1-\|A\|} = \cancel{\lim_{p \to +\infty}} \end{aligned}$$

$G, G' \in GL(\mathbb{R},m)$

$\|G - G'\| \leqslant \epsilon$

$$\| G^{-1} - G'^{-1} \| = \text{"pequena"}$$

Note que

$$
\begin{aligned}
G &= G' + (G - G') \\
&= G' \left(\mathbb{1} + G'^{-1}(G - G') \right)
\end{aligned}
$$

$$G^{-1} = \left[\mathbb{1} + G'^{-1}(G - G') \right]^{-1} G'^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
G^{-1} - G'^{-1} &= \left[\mathbb{1} + G'^{-1}(G - G') \right]^{-1} G'^{-1} - G'^{-1} \\
&= \left\{ \left[\mathbb{1} + G'^{-1}(G - G') \right]^{-1} - \mathbb{1} \right\} G'^{-1}
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$\| G'^{-1}(G - G') \| \leqslant \| G'^{-1} \| \underbrace{\| G - G' \|}_{\leqslant \epsilon}$$

$$\therefore \quad \mathbb{1} + G'^{-1}(G - G') = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[G'^{-1}(G - G') \right]^n$$

$$G^{-1} - G'^{-1} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[G'^{-1}(G - G') \right]^n \right\} G'^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
\| G^{-1} - G'^{-1} \| &= \left\| \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[G'^{-1}(G - G') \right]^n \right\} G'^{-1} \right\| \\
&\leqslant \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[G'^{-1}(G - G') \right]^n \right\| \| G'^{-1} \| \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\| \left[G'^{-1}(G - G') \right] \right\|^n \| G'^{-1} \| \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \| G'^{-1} \|^{n+1} \| G - G' \|^n \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \| G'^{-1} \|^{n+1} \epsilon^n
\end{aligned}
$$

$$X = \begin{pmatrix} x^{11} & \cdots & x^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{n1} & \cdots & x^{nn} \end{pmatrix} \longleftrightarrow (x^{11}, x^{12}, \dots x^{nn}) \to n^2 \text{ coordenadas}$$

$$\mathbb{1} + X = \begin{pmatrix} 1+x^{11} & x^{12} & \cdots & x^{1n} \\ x^{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ x^{n1} & \cdots & & 1+x^{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema 21:

Todo subgrupo topologicamente fechado de um Grupo de Lie é também um Grupo de Lie (para a mesma topologia). □

$\boxed{\text{Cap. 24}}$

Exemplo

$GL(\mathbb{K}, n)$ é um grupo de Lie

$d(A,B) = \|A - B\|$

$$\|M\| = \sup_{\substack{u \in V \\ \|u\|=1}} \|Mu\| = \sup_{\substack{u \in V \\ u \neq 0}} \frac{\|Mu\|}{\|u\|}$$

i) $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$

ii) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$

iii) $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$

Obs 1) $\|\mathbb{1}\| = 1$

Obs 2) $\|A\| = \|A^*\|$

$$\left.\begin{array}{l} SU(n),\ SU(p,q) \subset GL(\mathbb{C}, n) \\ SO(n),\ SO(p,q) \subset GL(\mathbb{R}, n) \end{array}\right\} p+q=n$$

$$GH_3(\mathbb{C}) \subset GL(\mathbb{C}, 3)$$

Definição 45 [Subgrupos Uniparamétricos]

Diremos que $H \subset GL(\mathbb{C}, n)$ é um subgrupo uniparamétrico se $H = \{\gamma(t);\ t \in \mathbb{R}\}$ e valerem

i) $\gamma(0) = \mathbb{1}$

ii) $\gamma(t)\gamma(t') = \gamma(t+t')$, $\forall\ t, t' \in \mathbb{R}$

Proposição 22:

Seja $H \subset GL(\mathbb{C}, n)$ um subgrupo uniparamétrico. Se a função $\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma(t) \in H$ for contínua para toda $t \in \mathbb{R}$, então $\exists M \in Mat(\mathbb{C}, n)$;

$$\gamma(t) = e^{tM}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Diremos que M é o gerador de H. □

Demonstração.

$$\frac{1}{\tau}\Big(\gamma(t+\tau) - \gamma(t)\Big) = \frac{1}{\tau}\Big(\gamma(t)\gamma(\tau) - \gamma(t)\Big) = \frac{1}{\tau}\Big(\gamma(\tau) - \mathbb{1}\Big)\gamma(t)$$

$$\dot{\gamma}(t) \doteq \lim_{\tau\to 0} \frac{\gamma(t+\tau) - \gamma(t)}{\tau} = \underbrace{\left[\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\Big(\gamma(\tau) - \mathbb{1}\Big)\right]}_{M}\gamma(t)$$

γ é contínua: $\lim\limits_{\tau\to 0} \gamma(\tau) = \mathbb{1}$

$$\dot{\gamma}(t) = M\gamma(t) \Rightarrow \gamma(t) = e^{tM}\cdot\gamma(0)$$

$$\therefore \gamma(t) = e^{tM}$$ ■

Observação:

A existência de $\lim\limits_{\tau\to 0} \dfrac{\gamma(t) - \mathbb{1}}{\tau}$ é garantida, pois as propriedades de grupo e $\gamma(t+t') = \gamma(t)\gamma(t')$ são fortes o bastante para que continuidade de γ implique em diferenciabilidade.

↳ Seção 24.3.3 (von Neumann)

↳ Exercício

Teorema 23:

Seja $H \subset GL(\mathbb{C}, n)$ um subgrupo topologicamente fechado de $GL(\mathbb{C}, n)$. É garantida a existência de subgrupos uniparamétricos em H por um teorema aqui omitido (ver Cap. 24). Considere o conjunto $\mathcal{L}(H)$ dado por

$$\mathcal{L}(H) = \{M \in Mat(\mathbb{C}, n);\ M \text{ é gerador de algum sub. uni. de } H\}.$$

Então valem:

i) $\mathcal{L}(H)$ é um espaço vetorial de matrizes

ii) $\mathcal{L}(H)$ é uma álgebra de Lie

$\square$

Observação [Fórmula de Lie-Trotter]

$$e^{A+B} = \lim_{m\to\infty}\left(e^{\frac{1}{m}A}e^{\frac{1}{m}B}\right)^m$$

Cap. 10

Observação [Fórmula do Comutador]

$$e^{[A,B]} = \lim_{m\to\infty}\left(e^{\frac{1}{m}A}e^{\frac{1}{m}B}e^{-\frac{1}{m}A}e^{-\frac{1}{m}B}\right)^{m}$$

Demonstração [Teo. 23]

$A,B \in \mathcal{L}(H)$

$$e^{t(\alpha A+\beta B)} = \lim_{m\to\infty}\underbrace{\underbrace{\underbrace{\left[\underbrace{\underbrace{e^{\frac{t\alpha}{m}A}}_{\in H}\ \underbrace{e^{\frac{t\beta}{m}B}}_{\in H}}_{\in H}\right]}_{\in H}}_{\in H}}_{\in H}^{m}$$

$A, B \in \mathcal{L}(H)$

H é grupo

H é topologicamente fechado. Logo, como a sequência é convergente (por Lie-Trotter), pertence a H.

Como t é arbitrário, $\alpha A+\beta B \in \mathcal{L}(H)$. Logo, $\mathcal{L}(H)$ é esp. vet.

$$e^{t[A,B]} = e^{[tA,B]} = \lim_{m\to\infty}\underbrace{\underbrace{\underbrace{\left(\underbrace{e^{\frac{t}{m}A}}_{H}\ \underbrace{e^{\frac{1}{m}B}}_{H}\ \underbrace{e^{-\frac{t}{m}A}}_{H}\ \underbrace{e^{-\frac{1}{m}B}}_{H}\right)}_{H}}_{H}}_{H}^{m^2}$$

$A, B \in \mathcal{L}(H)$

H é grupo

H é topologicamente fechado

Como t é arbitrário, $[A,B] \in \mathcal{L}(H)$. Logo, $\mathcal{L}(H)$ é álgebra de Lie. $\blacksquare$

Observação:
Podem existir elementos em um Grupo de Lie que não são alcançados pelos subgrupos uniparamétricos. Sec. 10.3

~~Demonstração~~ [~~Fórmula de Lie-Trotter~~]:

~~Ideia~~:

Lema 24 [Fórmula Telescópica]:
$A, B \in Mat(\mathbb{C}, n)$.
$$A^k - B^k = \sum_{p=0}^{k-1} A^p (A-B) B^{k-1-p}$$ □

Demonstração:
$$(A-B)B^{k-1} = AB^{k-1} - B^k$$
$$A(A-B)B^{k-2} = A^2B^{k-2} - AB^{k-1}$$
$$A^2(A-B)B^{k-3} = A^3B^{k-3} - A^2B^{k-2}$$
$$\vdots$$
$$A^{k-2}(A-B)B = A^{k-1}B - A^{k-2}B^2$$
$$A^{k-1}(A-B) = A^k - A^{k-1}B$$
$$\sum_{p=0}^{k-1} A^p(A-B)B^{k-1-p} = A^k - B^k$$ ■

Demonstração [Fórmula de Lie-Trotter]:
$$S_m \doteq e^{\frac{1}{m}A} e^{\frac{1}{m}B}, \quad T_m \doteq e^{\frac{1}{m}(A+B)}$$
$$T_m^m = e^{A+B}, \quad S_m^m = \left(e^{\frac{1}{m}A} e^{\frac{1}{m}B}\right)^m$$
$$T_m^m - S_m^m = \sum_{p=0}^{m-1} (T_m)^p (T_m - S_m)(S_m)^{m-1-p}$$
$$\|T_m^m - S_m^m\| \leq \sum_{p=0}^{m-1} \|T_m^p\| \cdot \|T_m - S_m\| \cdot \|S_m^{m-1-p}\| \leq \sum_{p=0}^{m-1} \|T_m\|^p \cdot \|T_m - S_m\| \cdot \|S_m\|^{m-1-p}$$

$$\|T_m\| = \left\| e^{\frac{1}{m}(A+B)} \right\| = \left\| \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} m^{-q} (A+B)^q \right\|$$

$$\leq \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} m^{-q} \|A+B\|^q$$

$$= e^{\frac{1}{m}\|A+B\|} \leq e^{\frac{1}{m}(\|A\| + \|B\|)} = e^{\frac{1}{m}\|A\|} e^{\frac{1}{m}\|B\|}$$

$$\|S_m\| = \left\| e^{\frac{1}{m}A} e^{\frac{1}{m}B} \right\| \leq \left\| e^{\frac{1}{m}A} \right\| \cdot \left\| e^{\frac{1}{m}B} \right\|$$

$$\leq e^{\frac{1}{m}\|A\|} \cdot e^{\frac{1}{m}\|B\|}$$

$$\therefore \|T_m^{m} - S_m^{m}\| \leq \sum_{p=0}^{m-1} \|T_m\|^p \|T_m - S_m\| \|S_m\|^{m-1-p}$$

$$\leq \sum_{p=0}^{m-1} e^{\frac{p}{m}\|A\|} e^{\frac{p}{m}\|B\|} e^{\frac{m-1-p}{m}\|A\|} e^{\frac{m-1-p}{m}\|B\|} \|T_m - S_m\|$$

$$= \sum_{p=0}^{m-1} e^{\frac{m-1}{m}(\|A\| + \|B\|)} \|T_m - S_m\|$$

$$= e^{\frac{m-1}{m}(\|A\| + \|B\|)} \cdot m \cdot \|T_m - S_m\|$$

$$< e^{(\|A\| + \|B\|)} \cdot m \cdot \|T_m - S_m\|$$

$$T_m - S_m = e^{\frac{1}{m}(A+B)} - e^{\frac{1}{m}A} e^{\frac{1}{m}B}$$

$$= \left(\mathbb{1} + \frac{1}{m}(A+B) + \frac{1}{2m^2}(A+B)^2 + \cdots\right) - \left(\mathbb{1} + \frac{1}{m}A + \frac{1}{2m^2}A^2 + \cdots\right)\left(\mathbb{1} + \frac{1}{m}B + \frac{1}{2m^2}B^2 + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{m^2} \cdot \circledast + \frac{1}{m^3} \cdot \circledast + \cdots \xrightarrow{m \to +\infty} 0$$

$\blacksquare$

obs.: fim de Grupos de Lie. Daqui em diante veremos construções sobre grupos. Próxima aula: grupo de Grothendieck.

Definição 46 [Relação de Equivalência]:
Sejam A e B conjuntos e $E \subseteq A \times B$. Dizemos que E é uma relação entre A e B. Diremos que E é uma relação de equivalência em A se $B = A$ (e, portanto, $E \subseteq A \times A$) e forem satisfeitas as seguintes propriedades:

i) $(a,a) \in E$, $\forall\, a \in A$ (identidade)

ii) $(a,b) \in E \Rightarrow (b,a) \in E$ (simetria)

iii) $(a,b) \in E \wedge (b,c) \in E \Rightarrow (a,c) \in E$ (transitividade)

Notação

$$E \ni (a,b),\ a,b \in A \equiv\!> a \sim b \equiv a \sim_E b$$

i) $a \sim a$, $\forall\, a \in A$

ii) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

iii) $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$

Exemplos

I $A = \mathbb{R}$

$x \sim y$ se $y - x \in \mathbb{Q}$

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y - x \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

II V espaço vetorial, W subespaço de V

$u, v \in V$, $u \sim v$ se $v - u \in W$

$$E = \{(u,v) \in V \times V;\ v - u \in W\}$$

$E \equiv E_W$

Definição 47 [Classe de Equivalência]:
Sejam A um conjunto e E uma relação de equivalência em A. Chamaremos de classe de equivalência de um elemento $a \in A$, denotada por $[a]$, o conjunto dado por

$$[a] = \{ b \in A;\ a \sim b \}.$$

Proposição 25:
Sejam A um conjunto, $E \subseteq A \times A$ uma relação de equivalência e $a \in A$. Então $[a] \neq \emptyset$. □

Demonstração
$a \in A \wedge a \sim a \Rightarrow a \in \{ a' \in A;\ a' \sim a \} = [a]$. Logo, $[a] \neq \emptyset$. ■

Proposição 26:
Sejam A um conjunto, $E \subseteq A \times A$ uma relação de equivalência e $a, b \in A$. Se $a \nsim b$, $\nexists\, c \in A;\ c \in [a],\ c \in [b]$, i.e., $[a] \cap [b] = \emptyset$. □

Demonstração:
Assuma, por absurdo, que $\exists\, c \in [a] \cap [b]$. Então, vale que $c \sim a$ e $c \sim b$. Logo, $a \sim c \wedge c \sim b$. Pela propriedade transitiva, $a \sim b$. Absurdo. ■

Proposição 27:
Sejam A um conjunto, $E \subseteq A \times A$ uma relação de equivalência e $a, b \in A$. $[a] \neq [b] \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$. □

Demonstração:
Se $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, então $\exists\, z \in [a] \cap [b]$, i.e., $\exists\, z \in A;\ z \sim a \wedge z \sim b$. Isso implica que $[a] = [b]$, pois

$x \in [a] \Rightarrow x \sim a$
$z \sim a \Rightarrow x \sim z$
$z \sim b \Rightarrow x \sim b \Rightarrow x \in [b]$
$\therefore [a] \supseteq [b]$

$x \in [b] \Rightarrow x \sim b$
$z \sim b \Rightarrow x \sim z$
$z \sim a \Rightarrow x \sim a \Rightarrow x \in [a]$
$\therefore [b] \supseteq [a]$

$\therefore [a] = [b]$

1300429

Desta forma, provamos a contrapositiva da afirmação, concluindo a demonstração. ∎

Definição 48:
Denotaremos e definimos o conjunto das classes de equivalência de um conjunto C por uma relação $\sim$ da seguinte forma:

$$C/\sim \doteq \{ [a] ;\ a \in C \}.$$

Grupo de Grothendieck
Seja $(S,+)$ um semigrupo abeliano. Podemos construir, a partir de $(S,+)$, um grupo abeliano da seguinte forma:

$$S \times S = S^2 = \{ (a,b),\ a,b \in S \}$$

$$S^2 \times S^2 \supseteq E = \{ ((a,b),(a',b'));\ \exists\, p \in S;\ a+b'+p = a'+b+p \}$$

i.e. $(\exists\, p \in S;\ a+b'+p = a'+b+p) \Rightarrow (a,b) \sim (a',b')$

$$\Gamma(S^2) \equiv S^2/\sim$$

↳ Grupo de Grothendieck

$$[(a,b)] \dot{+} [(c,d)] = [(a+c,\ b+d)]$$

Definição 49:
Seja A um grupo e $B \subset A$ um subgrupo. Dizemos que a função $B \ni b \mapsto aba^{-1} \in A$, $a \in A$, é uma conjugação de B.

Definição 50 [Subgrupo Normal]:
Seja G um grupo e N um subgrupo de G. Dizemos que N é um subgrupo normal de G se, $\forall\, n \in N$ e

$\forall g \in G$, $gng^{-1} \in N$. Isto é, N é invariante para conjugações por elementos de G.

Exemplo

$G = GL(\mathbb{C}, n)$, $M = SL(\mathbb{C}, n)$

M é subgrupo normal de G

$m \in M$, $g \in G$

$\det gng^{-1} = \det g \cdot \det n \cdot \det g^{-1} = \det n = 1$

Exemplo

$g \in G = O(n)$ $\quad h \in N = SO(n)$

$ghg^{-1} \in SO(n)$, $\forall h \in SO(n)$, $g \in O(n)$

N é subgrupo normal de G

Definição 51:

Sejam G e H grupos e seja $\varphi: G \to H$ um homomorfismo.

Nesse caso, definimos

i) a imagem de φ, $\mathrm{Ran}\,\varphi$, por

$$\mathrm{Ran}\,\varphi \doteq \{\varphi(g) \in H, g \in G\}$$

ii) o núcleo de φ, $\mathrm{Ker}\,\varphi$, por

$$\mathrm{Ker}\,\varphi \doteq \{g \in G, \varphi(g) = e_H\}$$

Proposição 28:

Sejam G e H grupos e $\varphi: G \to H$ um homomorfismo. Então

i) $\mathrm{Ran}\,\varphi$ é um subgrupo de H;

ii) $\mathrm{Ker}\,\varphi$ é um subgrupo normal de G. $\square$

Demonstração:

i) $\varphi(g_1), \varphi(g_2) \in \mathrm{Ran}\,\varphi$

$$\varphi(g_1)\varphi(g_2) = \varphi(g_1 g_2) \in \mathrm{Ran}\,\varphi$$

$$\varphi(g_1)^{-1} = \varphi(g_1^{-1}) \in \mathrm{Ran}\,\varphi$$

$$\varphi(g_1)\varphi(g_1^{-1}) = \varphi(e_G) = e_H \in \mathrm{Ran}\,\varphi$$

ii) É subgrupo, mas a demonstração é deixada como exercício

$h \in \ker\varphi$

$g \in G$

$$\begin{aligned}\varphi(g h g^{-1}) &= \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g^{-1}) \\ &= \varphi(g)\, e_H\, \varphi(g^{-1}) \\ &= \varphi(g)\varphi(g^{-1}) \\ &= \varphi(e_G) \\ &= e_H\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exemplo

$SL(\mathbb{C},n)$ é subgrupo normal de $GL(\mathbb{C},n)$

$$\varphi : GL(\mathbb{C},n) \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

$$A \mapsto \det A$$

→ grupo multiplicativo

$$\varphi(AB) = \det AB = \det A \det B = \varphi(A)\,\varphi(B)$$

$$\ker\varphi = \{A \in GL(\mathbb{C},n);\ \det A = 1\} = SL(\mathbb{C},n)$$

43oc429

Notação:

Se N é um subgrupo normal de G, escreveremos $N \triangleleft G$ ou $G \triangleright N$

Definição 52:

Definimos as seguintes relações de equivalência em G

i) $x, y \in G$, $x \sim y \Rightarrow x \sim_{\ell}^{H} y$ se $x^{-1} y \in H$,

ii) $x, y \in G$, $x \sim y \Rightarrow x \sim_{r}^{H} y$ se $y x^{-1} \in H$.

Acima, H é um subgrupo de G

Proposição 29:

As relações definidas na Definição 52 são de fato relações de equivalência. $\square$

Definição 53 [Cosets]:

Seja G um grupo e H um subgrupo de G. Definimos os cosets à esquerda e à direita de G por H segundo

i) $(G/H)_{\ell} \doteq \{ [g]_{\sim_{\ell}^{H}} ; g \in G \}$

ii) $(G/H)_{r} \doteq \{ [g]_{\sim_{r}^{H}} ; g \in G \}$

Teorema 30:

$(G/H)_{\ell} = (G/H)_{r} \Leftrightarrow H \triangleleft G$. $\square$

Demonstração:

$g, g' \in G$

$g \sim_{\ell}^{H} g' \Leftrightarrow g^{-1} g' = h \in H$

$\Leftrightarrow g g^{-1} g' g^{-1} = g h g^{-1}$

$H \triangleleft G \Leftrightarrow g h g^{-1} \in H \Leftrightarrow g h g^{-1} = g' g^{-1} \in H \Leftrightarrow g \sim_{r}^{H} g'$

4300429

Definição 54 [Grupo Quociente]:

Devido ao Teorema 30, se G é um grupo e $H \triangleleft G$, definimos o quociente de G por H, G/H, como

$$G/H \doteq (G/H)_\ell = (G/H)_r$$

Observação:

$$[g] = \{g' \in G;\ g \sim g'\}$$

$$g g'^{-1} \in H$$

$\rightarrow$ def do produto em G/H

$$[g][g'] = [gg']$$

$$[g] = [g'] \text{ se } g \sim g'$$

$$[g_1'] * [g_2] = [g_1' g_2] = [g_1 g_2]$$

$$([g_1][g_2])[g_3] \qquad [g_1]([g_2][g_3])$$

$$[g_1 g_2][g_3] \qquad [g_1][g_2 g_3]$$

$$[(g_1 g_2) g_3] = [g_1 (g_2 g_3)]$$

Exemplos

$$GL(\mathbb{C},n)/SL(\mathbb{C},n) \overset{\text{isomorfo}}{\approx} \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$O(n)/SO(n) \approx \{1,-1\}$$

$$U(n)/SU(n) \approx U(1)$$

$$SU(2)/\{\mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2\} \approx SO(3)$$

Observação:

O isomorfismo é uma relação de equivalência

Observação:

Dado $H \triangleleft G$, existe um homomorfismo φ com $Ker\, \varphi = H$?

$$\varphi: G \to G/H$$
$$g \mapsto [g]$$

$$Ker\, \varphi = \{g \in G ;\ \varphi(g) = e_{G/H}\} = H$$

$$\varphi(g_1 g_2) = [g_1 g_2] = [g_1][g_2] = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$$

$$\varphi(e) = [e] = H$$
$$\varphi(g) = [g] = e_{G/H} \Leftrightarrow g \in H$$

Exemplos (Isomorfismo e Homomorfismo)

$$(\mathbb{R}, +) \simeq (\mathbb{R}^*_+, \cdot)$$
$$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$$
$$x \mapsto e^x$$
$$\varphi^{-1}: \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log x$$

$GL(\mathbb{C}, n)$, $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$ são homomorfos

$\varphi(A) = \det A$

não podem ser isomorfos, pois $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$ é abeliano, mas $GL(\mathbb{C}, n)$ não

Teorema 31 [Primeiro Teorema de Isomorfismos].

Se G e H são grupos e $\varphi: G \to H$ é um homomorfismo, então vale que

$$Ran\, \varphi \simeq G/Ker\, \varphi$$

para a função

$$\psi : G/\ker\varphi \to \mathrm{Ran}\,\varphi$$
$$[g] \mapsto \varphi(g)$$

$\square$

Observação

$x \sim y \iff x^{-1}y \in \ker\varphi$

$[g_1][g_2] = [g_1 g_2]$

$g \sim g' \Rightarrow [g] = [g']$

$\psi([g]) = \varphi(g) = \varphi(g') = \psi([g'])$

$\hookrightarrow \varphi(g)^{-1}\varphi(g') = \varphi(g^{-1})\varphi(g')$

$= \varphi(g^{-1}g')$

$= \varphi(h)$, $h \in \ker\varphi$, pois $g \sim g'$

$= e_H$

Exemplo ($SU(2)$ e $SO(3)$)

$SO(3) \ni R = e^{\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}}$

$SU(2) \ni U = e^{\theta\vec{\eta}\cdot\vec{j}}$ $\qquad \vec{j} = -\frac{i}{2}\vec{\sigma}$

$[J_a, J_b] = \sum_{c=1}^{3} \epsilon_{abc} J_c$

$[j_a, j_b] = \sum_{c=1}^{3} \epsilon_{abc} j_c$

$\varphi(j_a) = J_a$ define um isomorfismo entre $su(2)$ e $so(3)$

$$\phi: SU(2) \to SO(3)$$
$$e^{\theta \vec{\eta}\cdot\vec{J}} \mapsto e^{\varphi(\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J})} = e^{\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}}$$

ϕ é um homomorfismo

$$\mathrm{Ran}\,\phi = SO(3)$$
$$\mathrm{Ker}\,\phi = \{U \in SU(2),\ \phi(U) = \mathbb{1}_3\}$$
$$\phi\left(e^{\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}}\right) = e^{\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}} = \mathbb{1}_3 \Rightarrow \begin{cases}\theta = 0\\ \theta = 2\pi\end{cases}$$

$$e^{i\alpha\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}} = \cos\alpha\,\mathbb{1}_2 + i(\sin\alpha)(\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})$$
$$e^{\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}} = e^{-i\frac{\theta}{2}\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}}$$
$$= \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\mathbb{1}_2 - i\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)(\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})$$

$$\theta = 0 \Rightarrow e^{\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}} = \mathbb{1}_2$$
$$\theta = 2\pi \Rightarrow e^{\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}} = \cos\pi\,\mathbb{1}_2 - i\sin\pi\,\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}$$
$$= -\mathbb{1}_2$$
$$\therefore \ \mathrm{ker}\,\phi = \{-\mathbb{1}_2, +\mathbb{1}_2\}$$

Note que $\mathrm{Ker}\,\phi$ de fato é um subgrupo normal

$$U\mathbb{1}_2U^{-1} = \mathbb{1}_2$$
$$U(-\mathbb{1}_2)U^{-1} = -\mathbb{1}_2$$

Observação: $\{-\mathbb{1}_2, \mathbb{1}_2\}$ é o único subgrupo normal de $SU(2)$

Pelo Primeiro Teorema de Isomorfismos teremos que

$$SO(3) \simeq SU(2)/\{-\mathbb{1}_2, \mathbb{1}_2\}$$
$$\hookrightarrow x^{-1}y \in \{-\mathbb{1}_2, \mathbb{1}_2\}$$
$$x = -y \ \vee \ x = y$$
$$[U] = \{-U, U\}$$

4300429

Definição 55 [Produto Direto e Soma Direta]:

Sejam $\{G_i\}$ grupos. Definimos o produto direto de n grupos G_i por

$$\left(\bigtimes_{i=1}^{n} G_i, \odot\right),$$

$$(g_1, \dots, g_n) \odot (g_1', \dots, g_n') = (g_1 \cdot g_1', \dots, g_n \cdot g_n') \in \bigtimes_{i=1}^{n} G_i.$$

Se $\{G_n, n \in \mathbb{N}\}$, definimos o produto direto de uma coleção enumerável de grupos por

$$\left(\bigtimes_{n\in\mathbb{N}} G_n, \odot\right),$$

$$(g_1, \dots) \odot (g_1', \dots) = (g_1 \cdot g_1', \dots) \in \bigtimes_{n\in\mathbb{N}} G_n.$$

Por fim, definimos a soma direta dos G_ns como o ~~conjunto~~ grupo.

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n = \{(g_1, g_2, \dots), g_k \in G_k, k \in \mathbb{N}, \text{ apenas finitos } g_k\text{s diferem dos } e_k\text{s}\},$$

com o mesmo produto de $\bigtimes_{n\in\mathbb{N}} G_n$. No caso de uma coleção finita de grupos, $\bigoplus_{i=1}^{n} G_i = \bigtimes_{i=1}^{n} G_i$.

Observação

$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n$ é subgrupo de $\bigtimes_{n\in\mathbb{N}} G_n$.

Observação

$(G \times H)/\tilde{H} \simeq G$, onde $\tilde{H} = \{(e_G, h), h \in H\} \simeq H$
$\phi(e_G, h) = h$

Definição 56 [Ação de um Grupo sobre um Conjunto]

Sejam G um grupo e M um conjunto. Uma ação α de G em M é uma função $\alpha: G \times M \to M$ que satisfaça um dos seguintes conjuntos de condições.

a)

i) Para cada $g \in G$, a função $M \ni x \mapsto \alpha(g,x) \in M$ é bijetora

ii) $\alpha(e_G, x) = x, \quad \forall x \in M$

iii) $\forall g, h \in G, \ x \in M$

$$\alpha(g, \alpha(h,x)) = \alpha(gh, x)$$

b)

i) Para cada $g \in G$, a função $M \ni x \mapsto \alpha(g,x) \in M$ é bijetora

ii) $\alpha(e_G, x) = x, \quad \forall x \in M$

iii) $\forall g, h \in G, \ x \in M$

$$\alpha(g, \alpha(h,x)) = \alpha(hg, x)$$

Se α satisfizer os axiomas de a, dizemos que é uma ação à esquerda de G sobre M. Se satisfizer os de b, dizemos que é uma ação à direita de G sobre M.

Observação:

Se $\alpha(g,x)$ é uma ação à esquerda, $\alpha(g^{-1},x)$ é uma ação à direita.

4300429

Notação:

$\alpha_g(x) \equiv \alpha(g,x)$

i) $\forall\ g \in G,\ M \ni x \mapsto \alpha_g(x) \in M$ é bijetora

ii) $\alpha_e(x) = x,\ \forall\ x \in M$

iii) $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x),\ \forall g,h \in G,\ x \in M$

$\beta_g(\beta_h(x)) = \beta_{hg}(x)$

Exemplos

$Sim(\mathbb{R},n) \doteq \{A \in Mat(\mathbb{R},n);\ A = A^T\}$

$M = Sim(\mathbb{R},n)$

$G = SO(n)$

$$\begin{aligned}\alpha;\ SO(n) \times Sim(\mathbb{R},n) &\to Sim(\mathbb{R},n)\\ (R,\ S) &\longmapsto RSR^T\end{aligned}$$

Mostre que α é, de fato, uma ação

$\alpha_{\mathbb{1}}(A) = \mathbb{1} A \mathbb{1}^T = A$

$\alpha_R(\alpha_{R'}(A)) = R\alpha_{R'}(A)R^T = RR'AR'^TR^T = (RR')A(RR')^T = \alpha_{RR'}(A)$

α_R é sobrejetora, $\forall R$

$B = \alpha_R(\underbrace{R^TBR^T}_{sim}) = \underbrace{RR^T}_{\mathbb{1}} B \underbrace{R^TR}_{\mathbb{1}}$

$\alpha_R(A) = \alpha_R(B) \Rightarrow RAR^T = RBR^T$

$A = B$

$$M = \mathrm{Herm}(n) \doteq \{A \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C}, n);\ A = A^*\}$$

$$G = \cancel{GL(\mathbb{C}, n)}\ SU(n)$$

$$\alpha : \cancel{GL}\ SU(n) \times \mathrm{Herm}(n) \to \mathrm{Herm}(n)$$

$$(U, \cancel{H}) \mapsto UHU^*$$

Exemplo

$$G \triangleright N$$

$$\forall\, n \in N,\ g \in G,\ gng^{-1} \in N$$

$$\alpha : G \times N \to N$$

$$(g, n) \mapsto gng^{-1}$$

Ação de um grupo G em um subgrupo normal N

Exemplo

$$SL(\mathbb{C}, 2) \longleftrightarrow \mathcal{L}_+^{\uparrow}$$

$$\mathbb{R}^4 = \left\{ \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix},\ x^k \in \mathbb{R} \right\} \qquad \mathrm{Herm}(2) = \{B \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C}, 2);\ B = B^*\}$$

$$B = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - i x^2 \\ x^1 + i x^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} = x^0 \sigma_0 + x^1 \sigma_1 + x^2 \sigma_2 + x^3 \sigma_3$$

$$\mathcal{M} : \mathbb{R}^4 \to \mathrm{Herm}(2)$$

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \mapsto \sum_{k=0}^{3} x^k \sigma_k$$

$$\mathcal{M}(x) = \mathcal{M}(y) \Rightarrow \sum_{k=0}^{3} x^k \sigma_k = \sum_{k=0}^{3} y^k \sigma_k \Rightarrow \sum_{k=0}^{3} \underbrace{(x^k - y^k)}_{0} \sigma_k = 0$$

1300463

$$\mathcal{M}^{-1}: \mathrm{Herm}(2) \to \mathbb{R}^4$$

$$\begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1-ix_2 \\ x_1+ix_2 & x_0-x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{Tr}(B\sigma_0) \\ \mathrm{Tr}(B\sigma_1) \\ \mathrm{Tr}(B\sigma_2) \\ \mathrm{Tr}(B\sigma_3) \end{pmatrix}$$

$B = \mathcal{M}(x)$, $\det B = \det \mathcal{M}(x)$

$$\det\begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1+ix_2 \\ x_1+ix_2 & x_0-x_3 \end{pmatrix} = (x_0+x_3)(x_0-x_3) - (x_1-ix_2)(x_1+ix_2)$$
$$= x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$
$$= \langle x, \eta x\rangle_{\mathbb{R}}$$

$\eta = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1)$

$$\langle x, \eta y\rangle_{\mathbb{R}} = \frac{1}{4}\left[\det(\mathcal{M}(x+y)) - \det(\mathcal{M}(x-y))\right]$$

a prova é trivial

$$= \frac{1}{4}\left[\langle x+y, \eta(x+y)\rangle - \langle x-y, \eta(x-y)\rangle\right]$$

Ação (à esquerda) de $SL(\mathbb{C}, n)$ sobre $\mathrm{Herm}(2)$

$$\alpha: SL(\mathbb{C},2) \times \mathrm{Herm}(2) \to \mathrm{Herm}(2)$$

$\alpha_A(M) = AMA^*$ $\quad$ $A \in SL(\mathbb{C},2)$, $M \in \mathrm{Herm}(2)$

$$\alpha_A(\alpha_{A'}(M)) = A\alpha_{A'}(M)A^* = AA'MA'^*A^* = (AA')M(AA')^*$$
$$= \alpha_{AA'}(M)$$

$$(AMA^*)^* = AMA^*$$

$\Lambda \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R},4)$

$x \in \mathbb{R}^4$, $A \in SL(\mathbb{C},2)$

$$\alpha_A(\mathcal{M}(x)) = A\mathcal{M}(x)A^* = \mathcal{M}(x') = \mathcal{M}(\Lambda x) \qquad x' = \Lambda x$$

$$\alpha_A(\mathcal{M}(x)) = \mathcal{M}(\Lambda x)$$

$$A \in SL(\mathbb{C},2), \quad \Lambda \in Mat(\mathbb{R},4)$$

$$\langle \Lambda x, \eta \Lambda y \rangle = \frac{1}{4}\left[\det\left(\mathcal{M}(\Lambda(x+y))\right) - \det\left(\mathcal{M}(\Lambda(x-y))\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\det \alpha_A\left(M(x+y)\right) - \det \alpha_A\left(M(x-y)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\det\left(A\, M(x+y)\, A^*\right) - \det\left(A\, M(x-y)\, A^*\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\det A \cdot \det M(x+y) \det A^* - \det A \det M(x-y) \det A^*\right]$$

$$= \frac{1}{4} \det A\, \overline{\det A}\left[\det(\mathcal{M}(x+y)) - \det(\mathcal{M}(x-y))\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\det M(x+y) - \det M(x-y)\right] = \langle x, \eta y \rangle$$

$\therefore \ \Lambda \in O(1,3)$ ↳ Grupo de Lorentz

Pode-se mostrar ainda que $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$

$$A\, \mathcal{M}(x)\, A^* = \mathcal{M}(\Lambda x)$$

$$A \in SL(\mathbb{C},2) \quad \Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$$

Como aplicar transformações de Lorentz em spinores?

↳ continua em algum curso de QFT ou Mecânica Quântica Relativística

$$SL(\mathbb{C},2)/\{\mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2\} \simeq \mathcal{L}_+^\uparrow$$

$$SU(2)/\{\mathbb{1}_2, \mathbb{1}_2\} \simeq SO(3)$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

Equação de Dirac

Definição 57 [Produto semi-direto]:

Sejam G e H grupos e $\alpha : G \times H \to H$ uma ação de G em H por automorfismos, i.e., α é uma ação à esquerda de G em H e, para cada $g \in G$, α_g é um automorfismo (um isomorfismo da forma $\varphi : A \to A$).

O produto semi-direto de G por H é o grupo formado por

$$G \times H = \{(g,h);\ g \in G,\ h \in H\}$$

$$(g_1,h_1) \circ (g_2,h_2) = (g_1 g_2,\ h_1 \cdot \alpha_{g_1}(h_2)).$$

Dizemos então que este grupo ~~denomina~~ é o produto semi-direto de G por H intermediado pela ação α e o denotamos por

$$G \otimes_\alpha H \equiv G \rtimes_\alpha H$$

Observação

Para o grupo $G \rtimes_\alpha H$, (e_G, e_H) é o elemento neutro e $(g,h)^{-1} = (g^{-1}, \alpha_{g^{-1}}(h^{-1}))$.

Exemplo

$G \triangleright N$, $\alpha_g(n) = g n g^{-1}$

$$G \otimes_\alpha N = \{(g,n)\ g \in G,\ n \in N\}$$

$$(g_1,n_1) \circ (g_2,n_2) = (g_1 g_2,\ n_1 g_1 n_2 g_1^{-1})$$

Exemplo

$G = \mathcal{L}_+^\uparrow$, $H = (\mathbb{R}^4, +)$

$\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$, $x \in \mathbb{R}^4$

$\alpha_\Lambda(x) = \Lambda x$

produto semi-direto

$\mathcal{L}_+^\uparrow \circledS_\alpha \mathbb{R}$

Grupo de Poincaré ou Grupo de Lorentz não-homogêneo

$(\Lambda, x)(\Lambda', y) = (\Lambda\Lambda', x + \Lambda y)$

Exemplo

G e H grupos

$$\tilde{G} := \{(g, e_H), g \in G\} \subset G \times H \rightsquigarrow \text{subgrupo de } G \otimes_\alpha H$$

$$\tilde{H} := \{(e_G, h), h \in H\} \subset G \times H$$

$$\tilde{G} \simeq G \qquad \hookrightarrow \tilde{H} \triangleleft G \otimes_\alpha H$$

$$\tilde{H} \simeq H$$

$$(G \otimes_\alpha H)/\tilde{H} \simeq \tilde{G} \simeq G$$

Definição 58 [Suporte de uma Função]:

Sejam H um conjunto não-vazio, M um monoide e $f: H \to M$ uma função. Definimos o suporte $\operatorname{supp} f$ de f por

$$\operatorname{supp} f \doteq \{x \in H;\ f(x) \neq e_M\},$$

onde e_M representa o elemento neutro de M.

Observação:

Se uma função f tem suporte finito, ela não se anula apenas num conjunto finito de pontos.

Observação:

Note que, se $f: M \to (\mathbb{Z}, +)$ tem suporte finito, podemos fazer:

$$x_0 \in M, \quad \delta_{x_0}(x) \doteq \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq x_0 \\ 1, & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

$$\{x_i\}_{i=1}^n \subset M$$

$$\delta_{\{x_i\}_{i=1}^n}(x) \doteq \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin \{x_i\}_{i=1}^n \\ 1, & \text{se } x \in \{x_i\}_{i=1}^n \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k \delta_{x_k}(x)$$

$$\{x_i\}_{i=1}^n = \operatorname{supp} f, \quad c_k = f(x_k)$$

Definição 59 [Grupo Livremente Gerado por um Conjunto]:

Seja M um conjunto. Definimos o grupo abeliano livremente gerado por M como o conjunto

$$F(M) \doteq \{ f : M \to (\mathbb{Z}, +) ; \ f \text{ tem suporte finito} \}$$

dotado do produto

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall f, g \in F(M).$$

Observação:

Podemos identificar

$$M \ni x_0 \leftrightarrow \delta_{x_0} \in F(M).$$

$$f \in F(M) \Rightarrow f = \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_{x_k} = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$$

$$\{x_i\}_{i=1}^{n} = \operatorname{supp} f$$

Exemplo:

$$M = \{a, b, c\}$$

$$\underbrace{3a + 4b - 5c}_{3\delta_a + 4\delta_b - 5\delta_c}$$

Se $2a = 3c$, então $2a - 3c = 0 \Leftrightarrow 2\delta_a - 3\delta_c = 0$. Quero impor isso no grupo gerado por M.

Seja $r \in F(M)$:

$$r(x) = \sum_{k=1}^{n} r_k \delta_{x_k}(x) = \sum_{k=1}^{n} r_k x_k = 0 \qquad \begin{array}{l} r_k \in \mathbb{Z} \\ x_k \in M \end{array}$$

↳ imposto

$$R(M) \doteq \{ ar, \ a \in \mathbb{Z} \}$$

$(a+b) r = ar + br$

$(-a) r = -ar$

↳ subgrupo de $F(M)$

Como $R(M)$ e $F(M)$ são abelianos, $R(M) \triangleleft F(M)$. Podemos tomar o quociente: $F(M)/R(M)$.

Sejam $f, g \in F(M)$

$f \sim g$ se $f - g \in R(M)$

$f(x) = g(x) + a \cdot r(x) \iff f \sim g$

$[f_1] + [f_2] = [f_1 + f_2]$

$f_1 + f_2 \cong f_1 + f_2 + a \cdot r(x)$

$M = \{a, b, c\}$

$2a - 3c = 0 \to$ imposto

$R(M) = \{\alpha \cdot (2a - 3c), \alpha \in \mathbb{Z}\}$

$F(M)/R(M)$

Para impor n relação no grupo:

$$r^{(i)} = \sum_{k=1}^{m_i} c_k^{(i)} \delta_{\{x_k^{(i)}\}} = 0 \qquad i \in \mathbb{N},\ 0 < i \leq n$$

$$F(M) \supset R(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r^{(i)}, \alpha_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

$R(M) \triangleleft F(M)$

$F(M)/R(M)$

~~Definição 60 [Prod. Tensorial de Grupos Abelianos]:~~

~~Sejam~~

Motivação:

Sejam A e B conjuntos. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dados por

$\mathcal{A} \doteq \{f : A \to \mathbb{Z}\}$

$\mathcal{B} \doteq \{f : B \to \mathbb{Z}\}$

$$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$ no conjunto

$$\{(f, g),\ f \in \mathcal{A},\ g \in \mathcal{B}\}$$

$$(f_1, g_1) + (f_2, g_2) = (f_1 + f_2,\ g_1 + g_2)$$

$$\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathbb{Z}$$

$$(f, g) \mapsto \underbrace{(f \otimes g)}_{f \text{ "tensor" } g}(a, b) = f(a)\, g(b) \in \mathbb{Z}$$

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} f_k \otimes g_k,\ f_k \in \mathcal{A},\ g_k \in \mathcal{B},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

↳ caso particular para os grupos de funções definidos acima

↳ o produto de grupo é a soma de funções

↳ somas finitas, pois as infinitas requerem convergência e, portanto, uma topologia. Por isso dizemos que este produto tensorial é algébrico, não topológico.

$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$

$(f, g);\ f \in \mathcal{A},\ g \in \mathcal{B}$

$(f_1, g_1) + (f_2, g_2) = (f_1 + f_2,\ g_1 + g_2)$

$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

$f \in \mathcal{A},\ g \in \mathcal{B} \to (f \otimes g)(a, b) = f(a) g(b)$

$f \otimes g_1 + f \otimes g_2 = f \otimes (g_1 + g_2)$

$f_1 \otimes g + f_2 \otimes g = (f_1 + f_2) \otimes g$

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são grupos abelianos quaisquer, podemos fazer.

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

$$a \otimes b,\ a \in \mathcal{A},\ b \in \mathcal{B}$$

$$F(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \ni \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_{\{(a_k, b_k)\}} = \sum_{k=1}^{n} c_k (a_k, b_k)$$

$a_k \in \mathcal{A}$
$b_k \in \mathcal{B}$
$c_k \in \mathbb{Z}$

$$a_k \otimes b_k \equiv (a_k, b_k)$$

Sob esta notação,

$$F(A \times B) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k\, a_k \otimes b_k,\ c_k \in \mathbb{Z},\ a_k \in A,\ b_k \in B \right\}$$

$$a_k \otimes b_k \equiv (a_k, b_k) \equiv \delta_{\{(a_k, b_k)\}}$$

No entanto, queremos que valha que

$$a \otimes b_1 + a \otimes b_2 = a \otimes (b_1 + b_2)$$

$$a_1 \otimes b + a_2 \otimes b = (a_1 + a_2) \otimes b$$

$$r_1 = \delta_{\{(a,b_1)\}} + \delta_{\{(a,b_2)\}} - \delta_{\{(a, b_1+b_2)\}}$$

$$r_2 = \delta_{\{(a_1,b)\}} + \delta_{\{(a_2,b)\}} - \delta_{\{(a_1+a_2, b)\}}$$

$$A \otimes B := F(A \times B)/R$$

$$a \otimes b := \left[\delta_{\{(a,b)\}}\right], \quad a \in A,\ b \in B$$

Definição 6C [Prod. Tensorial de Grupos Abelianos]:

Sejam A e B grupos abelianos quaisquer. Definimos o produto tensorial de A e B, $A \otimes B$, segundo

$$A \otimes B := F(A \times B)/R,$$

onde

$$F(A \times B) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k\, \delta_{\{(a_k,b_k)\}},\ c_k \in \mathbb{Z},\ a_k \in A,\ b_k \in B \right\},$$

$$r^{a}_{b_1 b_2} = \delta_{\{(a,b_1)\}} + \delta_{\{(a,b_2)\}} - \delta_{\{(a, b_1+b_2)\}},$$

$$r^{a_1 a_2}_{b} = \delta_{\{(a_1,b)\}} + \delta_{\{(a_2,b)\}} - \delta_{\{(a_1+a_2, b)\}},$$

$$R \doteq \left\{ \alpha_1 r^{a}_{b_1 b_2} + \alpha_2 r^{a_1 a_2}_{b},\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z},\ a, a_1, a_2 \in A,\ b, b_1, b_2 \in B \right\},$$

com $a\otimes b \doteq \left[\delta_{\{(a,b)\}}\right] \in F(A\times B)/R$.

Observação:
A Definição 60 possui uma extensão natural para famílias de n grupos abelianos, com

$$A_1\otimes\cdots\otimes A_n = F(A_1\times\cdots\times A_n)/R$$

Observação:
A Definição 60 possui uma extensão natural para espaços vetoriais. Se U e V são espaços vetoriais, são grupos abelianos para a soma e $U\otimes V$ será, portanto, um grupo abeliano. Para transformá-lo em um espaço vetorial, basta impor novas condições:

$$\alpha\in\mathbb{C},\ u\in U \Rightarrow \alpha u\in U$$
$$\alpha\in\mathbb{C},\ v\in V \Rightarrow \alpha v\in V$$

$$\alpha(u\otimes v) = (\alpha u)\otimes v = u\otimes(\alpha v)$$
$$(\alpha u)\otimes v - u\otimes(\alpha v) = 0$$

Observação:
Um tensor é um elemento de um produto tensorial

Exemplo.
$A = B = \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\}$
$A\otimes B = \{\sum_{k=1}^{n} f_k\otimes g_k,\ f_k, g_k\in A\}$
$f\otimes g_1 + f\otimes g_2 = f\otimes(g_1+g_2)$
$f(x)g_1(y) + f(x)g_2(y) = f(x)(g_1(y)+g_2(y))$
$f_1\otimes g + f_2\otimes g = (f_1+f_2)\otimes g$

$$\alpha(f\otimes g) = (\alpha f)\otimes g = f\otimes(\alpha g)$$
$$\alpha(f(x)g(y)) = (\alpha f(x))g(y) = f(x)(\alpha g(y))$$
$$F(x,y) = e^{xy} \neq \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, g_k(y)$$

Definição 61 [Representação]:

Sejam G um grupo e V um espaço vetorial. Uma representação é uma ação à esquerda de G sobre V por aplicações lineares inversíveis.

Exemplo (ou quase):

Ação:

$\alpha : G\times X \to X$

$\alpha(e,x) = x, \quad \forall\, x\in X$

$\alpha(g,\alpha(h,x)) = \alpha(gh,x), \quad \forall\, g,h\in G,\ x\in X$

Representação:

$\pi : G\times \cancel{X} \to \cancel{X}$

$\pi(g,\cdot) : V\to V$ é uma aplicação linear inversível

$\hookrightarrow \pi(g,\cdot)\in GL(V)$

$\hookrightarrow$ as aplicações lineares contínuas e inversíveis de V em V

$\pi(e,v) = v$

$\pi(e,\cdot) = \mathbb{1}$

$\pi(g,\pi(h,v)) = \pi(gh,v)$

$\pi(g,\pi(h,\cdot)) = \pi(gh,\cdot)$

Definição 61 - Equivalente [Representação]:

Sejam G um grupo e V um espaço vetorial. Uma representação é um homomorfismo de grupo de G em $GL(V)$.

Observação:

$\dim V < \infty \Rightarrow V \simeq \mathbb{K}^n$, $\dim V =: n$ e $GL(V) = GL(n, \mathbb{K})$

Exemplo:

$$\pi : G \to GL(V)$$
$$g \mapsto \mathbb{1}$$

↳ representação trivial

Exemplo:

$S_3 = \{e, (1\,2), (1\,3), (2\,3), (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$

$$\pi : S_3 \to GL(3, \mathbb{K})$$
$$\pi(g) v = \pi(g) \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \hat{e}_i = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \hat{e}_{g(i)}$$

$$\pi(e) = \mathbb{1}$$
$$\pi(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\pi(1,2,3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definição 62:

Sejam G um grupo, V um espaço vetorial e $\pi : G \times V \to V$ uma representação. Diremos que π é fiel se $\operatorname{Ker} \pi = e_G$.

Definição 63:

Sejam G um grupo, V_1 e V_2 espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $\pi_1 : G \to GL(V_1)$ e $\pi_2 : G \to GL(V_2)$ representações. Um operador $U : V_1 \to V_2$ tal que

$$U \pi_1(g) = \pi_2(g) U,$$
$$U \pi_1(g) U^{-1} = \pi_2(g), \quad \forall g \in G$$

é dito ser um operador de entrelaçamento, ou interwiner, de π_1 e π_2.

Definição 64:
Sejam G um grupo, V_1 e V_2 espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que duas representações $\pi_1 : G \to GL(V_1)$ e $\pi_2 : G \to GL(V_2)$ são equivalentes se existir $U: V_1 \to V_2$ isomorfismo de espaços vetoriais que seja um interwiner de π_1 e π_2.

Exemplo.

$G = (\mathbb{Z}_2, +) \qquad V_1 = V_2 = \mathbb{C}^2$

$\pi_{1,2} : G \to GL(V_{1,2})$

$\pi_1(0) = \mathbb{1} \qquad \pi_2(0) = \mathbb{1}$

$\pi_1(1) = -\mathbb{1} \qquad \pi_2(1) = \mathrm{diag}(+1, -1)$

Definição 65:
Sejam G um grupo, V um espaço vetorial e $\pi : G \to GL(V)$ uma representação. Dizemos que um subespaço $W \subseteq V$ é invariante (por π) se

$$\pi(g)\, w \in W, \quad \forall w \in W, g \in G.$$

Exemplo
$\{0\}$ e V são sempre invariantes triviais.

Exemplo
S_3 em $\mathbb{R}^3$

$W = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 ; \alpha + \beta + \gamma = 0\} = \mathrm{span}[(1,-1,0), (0,1,-1)]$

$W^\perp = \mathrm{span}[(1,1,1)]$

$\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$

$$\pi(g) = \left(\begin{array}{c|c} \pi_1(g) & 0 \\ \hline 0 & \pi_2(g) \end{array}\right)$$

Caso geral:

$$\pi(g) = \left(\begin{array}{c|c} \pi_1(g) & \phi(g) \\ \hline 0 & \pi_2(g) \end{array}\right)$$

Exemplo:

$G = (\mathbb{R}, +)$ e $\pi : G \to GL(2, \mathbb{R})$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

Não possui subespaços (não-triviais) invariantes

Definição 66:

Sejam G um grupo, V um espaço vetorial e $\pi : G \to GL(V)$ uma representação.

i) Dizemos que π é irredutível se os únicos subespaços invariantes forem os triviais

ii) Dizemos que π é totalmente redutível se existir $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, e $V_i \subset V$, $1 \leq i \leq k$, subespaços invariantes não-triviais de V tais que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$

iii) Dizemos que π é maximalmente redutível se π é totalmente redutível e $\pi(g)|_{V_i}$ é irredutível para todo V_i.

Proposição 32:

Seja V um espaço vetorial complexo, com $\dim V = n < \infty$, com produto interno (espaço de Hilbert) e seja π uma representação de um grupo G por operadores unitários. Então ou π é irredutível ou é maximalmente redutível. □

Demonstração:

$\pi(g)$ é unitário: $\pi(g)^* = \pi(g)^{-1} = \pi(g^{-1})$

Se π é irredutível, encerramos a demonstração. Se não, então $\exists\, W \subset V$ não-trivial e invariante.

Sejam $w' \in W^\perp$ e $w \in W$.

$$\langle \pi(g) w', w\rangle = \langle w', \pi(g^{-1}) w\rangle, \quad \pi(g^{-1}) w \in W, \text{ pois } W \text{ é invariante}$$
$$= 0$$

$\therefore\ \pi(g) w' \in W^\perp \Rightarrow W^\perp$ é π invariante

$$V = W \oplus W^\perp$$
$$\pi(g) = \left(\begin{array}{c|c} \pi_1(g) & 0 \\ \hline 0 & \pi_2(g) \end{array}\right)$$

Reiterando o raciocínio para $\pi_1(g): V \to W$ e para $\pi_2(g): V \to W^\perp$ podemos proceder indutivamente. Visto que as dimensões dos subespaços invariantes são estritamente decrescentes, o processo para. ∎

Escólio 33:

Seja V um espaço vetorial complexo com produto interno e seja π uma representação de um grupo G por operadores unitários. Se W for ~~fechado~~ invariante, então $\overline{W}$, o fecho de W, também o é. □

Observação:

O Escólio 33 é irrelevante para $\dim V < \infty$, onde todo espaço vetorial é fechado. No entanto, $(W^\perp)^\perp = \overline{W}$.

Definição 67:

Sejam G um grupo, V um espaço vetorial e $\pi: G \to GL(V)$ uma representação. Dizemos que π é irredutível para operadores se

$$A\pi(g) = \pi(g)A, \quad \forall g \in G \Rightarrow A = \lambda \cdot \mathbb{1}, \ \lambda \in \mathbb{K}.$$

Proposição 34:
Sejam G um grupo, V um espaço de Hilbert complexo e $\pi: G \to GL(V)$ uma representação. Se π é irredutível para operadores, então π é uma representação irredutível. $\square$

Demonstração:
Seja W um subespaço fechado invariante. $V = W \oplus W^{\perp}$. Seja $P = \mathrm{proj}_{\perp}(W)$.

$$\pi(g) \underbrace{P x^{\in V}}_{\in W} \in W \Rightarrow P\pi(g)Px = \pi(g)Px$$

$$\begin{aligned} P\pi(g)x &= P\pi(g)(Px + (\mathbb{1} - P)x) \\ &= P\pi(g)Px + P\underbrace{\pi(g)(\mathbb{1}-P)x}_{\in W^{\perp}} \\ &= \pi(g)Px \end{aligned}$$

Como π é irredutível para operadores,

$$P = \lambda \mathbb{1} \Rightarrow \begin{cases} P = \mathbb{1} \Rightarrow W = V \\ P = 0 \Rightarrow W = \{0\} \end{cases}$$

$\blacksquare$

Lema 35 [Lema de Schur]:
Sejam G um grupo, V_1 e V_2 espaços vetoriais, $\pi_1: G \to GL(V_1)$ e $\pi_2: G \to GL(V_2)$ representações irredutíveis e $A: V_1 \to V_2$ um intertwiner de π_1 e π_2. Então A é bijetor ou nulo. $\square$

Demonstração:

Ker A é invariante por π_1. De fato, se $x \in \ker A$,

$$A\,\pi_1(g)x = \pi_2(g)\underbrace{Ax}_{0} = 0 \Rightarrow \pi_1(g)x \in \ker A.$$

$\hookrightarrow x \in \ker A$

Ran A é invariante por π_2. De fato,

$$\pi_2(g)\underbrace{y}_{V_2} = \pi_2(g)A\underbrace{x}_{V_1} = A\underbrace{\pi_1(g)x}_{V_1} \in \operatorname{Ran} A.$$

Notando que π_1 e π_2 são irredutíveis, e portanto só admitem subespaços triviais como invariantes, temos que

$$\begin{cases} \operatorname{Ran} A = \{0\} \Rightarrow A = 0 \\ \operatorname{Ran} A = V_2 \begin{cases} \ker A = V_1 \Rightarrow A = 0,\ V_2 = \{0\} \\ \ker A = \{0\} \Rightarrow A \text{ é bijetor} \end{cases} \end{cases}$$

∎

Teorema 36 [Teorema de Wigner]:

Se π é uma representação de um grupo de simetria de um sistema físico em um espaço de Hilbert, então ou $\pi(g)$ é um operador unitário ou é antiunitário □

Observação.

$\langle \psi, \phi \rangle$

$\langle \pi(g)\psi, \pi(g)\phi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle$ → unitário

$\langle \pi(g)\psi, \pi(g)\phi \rangle = \overline{\langle \psi, \phi \rangle} = \langle \phi, \psi \rangle$ → antiunitário

Observação:

i) Uma representação de um grupo G em um espaço de Hilbert que seja irredutível para operadores é irredutível

ii) Toda representação irredutível complexa de dimensão finita é irredutível para operadores

iii) Uma representação unitária e de dimensão finita é irredutível se, e somente se, for irredutível para operadores

Corolário 37 [1º Coral. do Lema de Schur]:

Sejam G um grupo, V_1 e V_2 espaços vetoriais, de dimensão finita, não-triviais e $\pi_1: G \to GL(V_1)$ e $\pi_2: G \to GL(V_2)$ representações. Seja $A: V_1 \to V_2$, linear, tal que $A\pi_1(g) = \pi_2(g)A$, $\forall g \in G$. Então, se A for bijetor, A é único a menos da multiplicação por uma constante. □

Demonstração:

$V_1 \simeq V_2$ (mesma dimensão)

$V_1 \simeq V_2 \simeq V$, $A \in Mat(\mathbb{K}, n)$, $n = \dim V$

$B\pi_1(g) = \pi_2(g)B$, $\forall g \in G \Rightarrow (A - \lambda B)\pi_1(g) = \pi_2(g)(A - \lambda B)$

Pelo Lema de Schur, $A - \lambda B$ é nulo ou bijetor, i.e., inversível. Se nulo, temos que $A = \lambda B$ e a demonstração se encerra. Se não, temos que

$$\det(A - \lambda B) \neq 0,$$

$$\det\left[(AB^{-1} - \lambda \mathbb{1})B\right] = \det(AB^{-1} - \lambda \mathbb{1}) \det B \neq 0.$$

No entanto, $\det(AB^{-1} - \lambda \mathbb{1}) = 0$ define um polinômio em $\mathbb{C}$. Como $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado, tome λ como uma das raízes deste polinômio. Assim, ter-se-á que a matriz original não é inversível, sendo, portanto, nula. Logo, $A = \lambda B$. ∎

Corolário 38 [2º Corol. do Lema de Schur]:

Seja π uma representação irredutível, completa de dimensão finita de um grupo G. Então π é irredutível para operadores. $\square$

Demonstração:

Seja A tal que $A\pi(g) = \pi(g)A$, $\forall g \in G$. Sabemos que $\mathbb{1}\pi(g) = \pi(g)\mathbb{1}$, $\forall g \in G$. Do Corolário 37, tem-se que $A = \lambda \cdot \mathbb{1}$. $\blacksquare$

Corolário 39 [3º Corol. do Lema de Schur]:

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo e seja π uma representação irredutível de um grupo G por operadores limitados agindo em $\mathcal{H}$. Seja $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador limitado e agindo em $\mathcal{H}$ que satisfaça $A\pi(g) = \pi(g)A$, $\forall g \in G$. Então $A = \lambda \cdot \mathbb{1}$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. $\square$

Demonstração:

Temos trivialmente que $\mathbb{1}\pi(g) = \pi(g)\mathbb{1}$, $\forall g \in G$. Logo, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, vale que $(A - \lambda\mathbb{1})\pi(g) = \pi(g)(A - \lambda\mathbb{1})$, $\forall g \in G$. Pelo Lema de Schur, ou $A - \lambda\mathbb{1} = 0$ ou $A - \lambda\mathbb{1}$ é bijetor. Contudo, se escolhermos um λ no espectro de A, isso não seria possível. Logo, para um dado $\lambda \in \sigma(A)$, vale que $A = \lambda\mathbb{1}$. $\blacksquare$

Corolário 40 [4º Corol. do Lema de Schur]:

As representações irredutíveis completas de dimensão finita de um grupo Abeliano são ~~ud~~ unidimensionais. $\square$

Demonstração:

Se G é Abeliano e π uma representação de G, então vale que $\pi(g)\pi(h) = \pi(h)\pi(g)$, $\forall g,h \in G$. Logo, se π é completa, irredutível e de dimensão finita, o Corolário 39 implica que $\pi(h) = \lambda(h)\mathbb{1}$, i.e., $\pi(h)$ é uma matriz diagonal com $\lambda(h)$ na diagonal. Como π é irredutível, a dimensão do espaço só pode ser 1. ∎

Exemplo:

$$G = \mathbb{Z}_n\,, \quad \mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$$

$$a + b \doteq (a+b) \bmod n$$

$$\pi(a) = \exp(2\pi k i a/n) \quad \text{agem em } V = \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i2\pi k_1 a}{n}} & & & \\ & e^{\frac{i2\pi k_2 a}{n}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\frac{i2\pi k_n a}{n}} \end{pmatrix}$$

Exemplo:

$$G = SO(2) \ni R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R(\theta + \theta') = R(\theta)R(\theta')$$

$$\pi(R(\theta)) = e^{ip\theta}, \quad p \in \mathbb{Z}$$

$$G = (\mathbb{R}_+, \cdot)$$

$$\pi(\alpha) = e^{ik\log\alpha} = \alpha^{ik}, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+$$

Exemplo.

Seja G um grupo, M um conjunto. Sejam $\alpha : G \times M \to M$ uma ação e $\pi : G \to GL(V)$ uma representação, com V espaço vetorial.

$$\mathcal{F} := \{ f : M \to \mathbb{C} \}$$

↳ espaço vetorial

$$f, h \in \mathcal{F} \Rightarrow (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x) := \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$$

Definimos uma representação de G em $\mathcal{F}$ (abaixo, $x \in M$).

$$(\pi(g) f)(x) = f(\alpha_{g^{-1}}(x))$$

$$(\pi(e_G) f)(x) = f(\alpha_{e_G^{-1}}(x)) = f(x) \Rightarrow \pi(e_G) = \mathbb{1}_{\mathcal{F}}$$

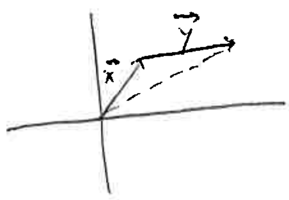
$$\begin{aligned}(\pi(g_1)(\pi(g_2) f))(x) &= (\pi(g_2) f)(\alpha_{g_1^{-1}}(x)) \\ &= f(\alpha_{g_2^{-1}}(\alpha_{g_1^{-1}}(x))) \\ &= f(\alpha_{g_2^{-1}} \alpha_{g_1^{-1}}(x)) \\ &= f(\alpha_{g_2^{-1} g_1^{-1}}(x)) \\ &= f(\alpha_{(g_1 g_2)^{-1}}(x)) \\ &= (\pi(g_1 g_2) f)(x)\end{aligned}$$

Exemplo.

$G = (\mathbb{R}^n, +)$; G possui uma ação em $\mathbb{R}^n$

$M = \mathbb{R}^n \qquad \alpha_{\vec{y}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{y}$

73004124



$$\alpha_{\vec{y}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$\alpha_{\vec{y}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{y} \quad \text{é bijetora } (\vec{y} \text{ fixado})$$

$$\alpha_{\vec{0}}(\vec{x}) = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$$

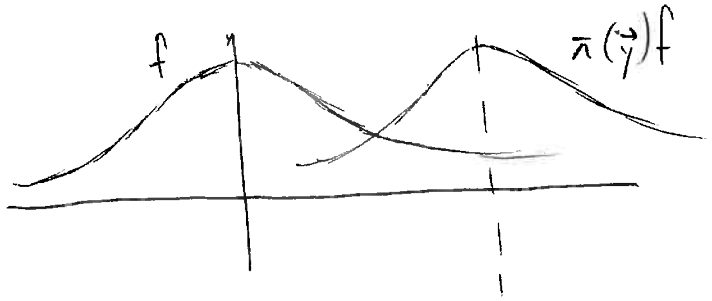
$$\alpha_{\vec{y}_1}(\alpha_{\vec{y}_2}(\vec{x})) = \alpha_{\vec{y}_1}(\vec{x} + \vec{y}_2) = \vec{x} + \vec{y}_1 + \vec{y}_2$$
$$= \alpha_{\vec{y}_1 + \vec{y}_2}(\vec{x})$$

Seja $\mathcal{F} = \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \}$, $f(\vec{x}) \in \mathbb{C}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$$(\pi(\vec{y}) f)(\vec{x}) = f(\alpha_{-\vec{y}}(\vec{x})) = f(\vec{x} - \vec{y})$$

É trivial constatar que

$$\pi(\vec{x} + \vec{y}) = \pi(\vec{x}) \pi(\vec{y})$$
$$\pi(\vec{0}) = \mathbb{1}$$



Exemplo:

$G = (\mathbb{R}, +)$

$$\pi(x + y) = \pi(x)\pi(y)$$
$$\pi(0) = \mathbb{1}$$
$$(\pi(y) f)(x) = f(x - y)$$

Seja o gerador $J : \frac{d}{dy} \pi(y) \Big|_{y=0}$

Veja que

$$(Jf)(x) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{(\pi(y)f)(x) - f(x)}{y}\right)$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{f(x-y) - f(x)}{y}\right)$$

$$= -\frac{d}{dx}f(x)$$

$$\therefore \quad J = -\frac{d}{dx}$$

Como o "gerador" existe, parece razoável que:

$$\pi(y)f = e^{yJ}f, \quad \text{onde}$$

$$e^{yJ} := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}y^n J^n$$

$$(\pi(y)f)(x) = (e^{yJ}f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}(J^n f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-y)^n}{n!}f^{(n)}(x)$$

Logo, $(\pi(y)f)(x)$ é, portanto, a série de Taylor de f centrada em x e calculada em $x-y$. Logo,

$$(\pi(y)f)(x) = f(x-y)$$

Note que foram feitas hipóteses "ocultas". Por exemplo, é preciso que $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Logo, vemos que

$J = -\frac{d}{dx} \rightarrow$ gerador do grupo de translações agindo em funções suficientemente diferenciáveis...

Exemplo:

$M = \mathbb{R}^3, \quad G = SO(3)$

$R(\theta, \vec{\eta}) = e^{\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}}, \quad \vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$

$\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3, \quad \|\vec{\eta}\| = 1$

$$\alpha_{\mathcal{R}(\theta,\vec{\eta})}(\vec{x}) = \mathcal{R}(\theta,\vec{\eta})\vec{x}, \qquad \alpha : SO(3) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\left(\pi\left(\mathcal{R}(\theta,\vec{\eta})\right) f\right)(\vec{x}) = f\left(\mathcal{R}(\theta,\vec{\eta})^{-1}\vec{x}\right) = f\left(\mathcal{R}(-\theta,\vec{\eta})\vec{x}\right)$$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}, \quad f(\vec{x}) \in \mathbb{C}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3$

Fixe $\vec{\eta}$

$$\mathcal{R}(\theta_1,\vec{\eta})\mathcal{R}(\theta_2,\vec{\eta}) = \mathcal{R}(\theta_1+\theta_2,\vec{\eta}), \quad \mathcal{R}(0,\vec{\eta}) = \mathbb{1}_3$$

$$\pi\left(\mathcal{R}(\theta_1,\vec{\eta})\right)\pi\left(\mathcal{R}(\theta_2,\vec{\eta})\right) = \pi\left(\mathcal{R}(\theta_1+\theta_2,\vec{\eta})\right), \quad \pi\left(\mathcal{R}(0,\vec{\eta})\right) = id$$

$$J_{\vec{\eta}} = \frac{d}{d\theta}\pi\left(\mathcal{R}(\theta,\vec{\eta})\right)\Big|_{\theta=0}$$

$$(J_{\vec{\eta}} f)(x) = \frac{d}{d\theta}\left(\pi\left(\mathcal{R}(\theta,\vec{\eta})\right)f(x)\right)\Big|_{\theta=0} = \frac{d}{d\theta} f\left(\mathcal{R}(-\theta,\vec{\eta})\vec{x}\right)\Big|_{\theta=0} =$$

$$= \frac{d}{d\theta} f\left(\vec{x} + (1-\cos\theta)\left(\vec{\eta}\times(\vec{\eta}\times\vec{x})\right) - \sin\theta\,(\vec{\eta}\times\vec{x})\right)\Big|_{\theta=0}$$

$$= \left(\sin\theta\left(\vec{\eta}\times(\vec{\eta}\times\vec{x})\right) - \cos\theta\,(\vec{\eta}\times\vec{x})\right)\cdot(\nabla f)\left(\mathcal{R}(-\theta,\vec{\eta})\vec{x}\right)\Big|_{\theta=0}$$

$$= -(\vec{\eta}\times\vec{x})\cdot\nabla f(\vec{x}) = -\vec{\eta}\cdot(\vec{x}\times\nabla f)(\vec{x})$$

$-J_{\vec{\eta}} = \vec{\eta}\cdot\vec{L}$ $\rightsquigarrow$ gerador das rotação agindo nas funções

$\vec{L} = \vec{x}\times\nabla f$ $\rightsquigarrow$ na versão quântica será o operador de momento angular