

Introdução à Teoria de Gauge Matemática

Patrícia Ewald

IME - USP

U. Texas at Austin

III Escola Jayme Tiomno de Física Teórica
Dead Physicists Society

Notas por
Nicholas Alves

2021

Outline

- Review. Álgebra, Matrices
- Formas Diferenciales, Eqs. de Maxwell
- Fibrales, conexões, Yang-Mills

Revisão Álgebra Linear

Espaço Vectorsial

V conjunto, $+ : V \times V \rightarrow V$, $\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$

A1 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $\forall z_1, z_2 \in V$

A2 $z_1 + (v - w) = (z_1 - v) + w$, $\forall z_1, v, w \in V$

A3 $\exists 0 \in V$, $z + 0 = 0 + z = z$, $\forall z \in V$

A4 $\forall v \in V$, $\exists -v \in V$, $v - v = -v + v = 0$

M1 $1 \cdot v = v$, $\forall v \in V$

M2 $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v \in V$

D1 $\alpha(v + z) = \alpha v + \alpha z$

D2 $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$

→ "The rules of being a vector space"

Base

Conjunto $\{v_i\}$ que gera o espaço vetorial

↳ todo esp. vet. admite base

Produto Interno

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

Bilinear

Síndrico

$$\langle v, v \rangle \geq 0, \quad \forall v \in V$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = \theta$$

Exemplos

• produto escalar

$$(a, b) \circ (c, d) = ac + bd$$

• espaços de funções

$$f, g \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \langle f, g \rangle = \int fg dx$$

Normas

$$\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$$

Pode ser induzida pelo produto interno via

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Base orthonormal

Base $(e_i)_{i=1}^n$ de V é orthonormal se

$$\langle e_j, e_n \rangle = \delta_{jn}$$

Logo vale que, $\forall v \in V$,

$$v = \sum_{j=1}^n \langle v, e_j \rangle e_j$$

Mapas Lineares

V, W esp. vetoriais. Um mapa

$T: V \rightarrow W$ é linear se

$$T(u + \lambda v) = T(u) + \lambda T(v), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V$$

Mapas lineares de V em W formam
um espaço vetorial.

$$L(V, W) \in \text{Hom}(V, W)$$

notação

Se $T, S \in L(V)$, podemos definir

$$TS(v) = T(Sv).$$

Adjuntos

Se $T \in L(V, W)$, define $T^* \in L(W, V)$
por

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^*w \rangle.$$

Funcional Linear

V esp. vet.

Um funcional linear φ em V é um
mapa $\varphi \in L(V, \mathbb{R})$

Exemplos

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x, y, z) = 4x - 3y + 2z$$

$$\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

↳ constantes

$$\varphi: C^0([0,1]) \rightarrow \mathbb{R}$$

→ integração
pode ser vista
como funcional
linear

↳ polinómicos

$$\varphi: P(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \mapsto 3p(4) + 5p'(7)$$

Espaço Dual

De lininos o espaço dual de V , V^* , como

$$V^* = L(V, \mathbb{R})$$

↳ esp. vet.

$$\dim V^* = \dim V$$

Base Dual

Se $(e_i)_{i=1}^n$ é base de V , $(\varphi_i)_{i=1}^n$ é base dual se

$$\varphi_i(e_j) = \delta_{ij} \quad \rightarrow \text{determina uma base em } V^*$$

Teorema de Representação de Riesz

Se V é esp. vet. com prod. int. e $\varphi \in V^*$, $\exists ! u \in V$ tal que

$$\varphi(v) = \langle v, u \rangle, \quad \forall v \in V.$$

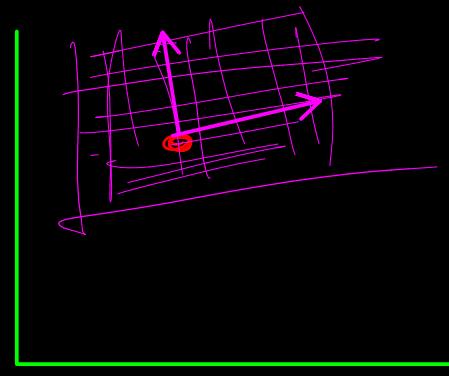
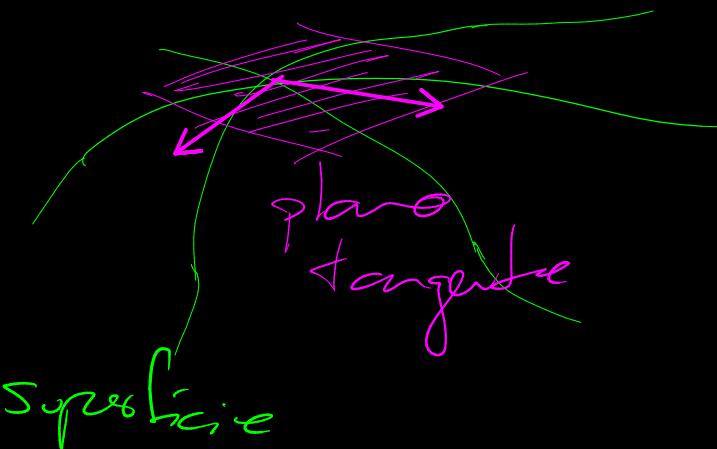
Mas por que queremos estudar teorias de gauge?

O Modelo Padrão da Física de Partículas, por exemplo, se baseia em teorias de Yang-Mills. O Eletromagnetismo é uma teoria de gauge com grupo $U(1)$.

Espaço Tangente

Vetores tangentes





Como podemos generalizar?

\mathbb{R}^2

Espresso das retoas
tangentes a um
 ponto $\in \mathbb{R}^n$ é o \mathbb{R}^n intimo

Derivadas Direcionais

Usando curvas: se $P, v \in \mathbb{R}^n$, parametrizando
uma curva $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ partindo de P com
direção v

$$\gamma(t) = P + t \cdot v.$$

A derivada direcional de $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ em P
na direção v é

$$D_v f(P) := \lim_{t \rightarrow 0}$$

$$\frac{f(\gamma(t)) - f(P)}{t} = \left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0}$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{d f_i(s)}{ds} \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_P = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_P$$

Logo que

$$D_v f_P : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

Dados $p, v \in \mathbb{R}^n$, podemos obter $D_v|_p$.

Derivações

Uma derivação em um ponto p é um mapa linear $D_p : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$D(fg)|_p = Df|_p g(p) + f(p) Dg|_p \xrightarrow{\text{regra de Leibniz}}$$

Denotaremos por $D_p(\mathbb{R}^n)$ o espaço das derivações em \mathbb{R}^n

Exemplos

Derivadas parciais são derivações pela regra da cadeia. Logo, também são as operações da soma

$$\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$$

Termos o mapa

veloces tangentes em p

$$\phi : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow D_p(\mathbb{R}^n)$$

$$v \mapsto \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$$

Tecnicamente: o mapa f acima é um isomorfismo.

Podemos identificar derivadas e vetores tangentes

tangentes

Ademais, se tivermos coordenadas (x_1, \dots, x_n) ,

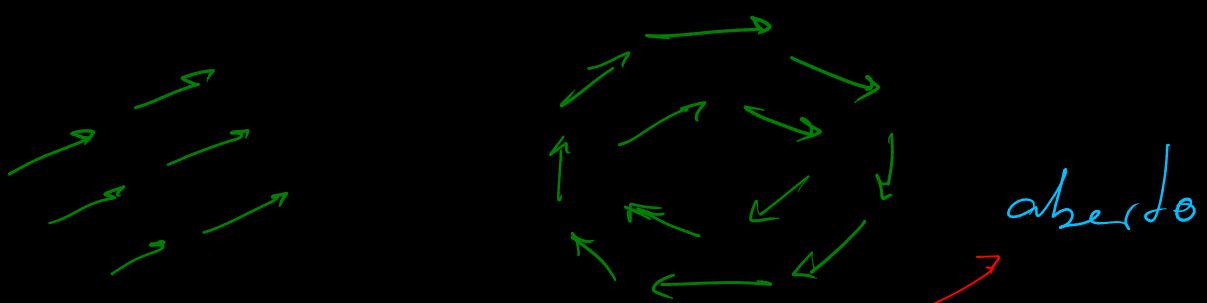
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right) \text{ também vale para } T_p U$$

e base de $T_p \mathbb{R}^n$

\hookrightarrow Se $(0, z)$ carta local

Campo vetorial

Intuitivamente: $\text{função } \times : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$



Campo vetorial em $V \subseteq \mathbb{R}^n$ leva partes $p \in V$ em velocões tangentes $X_p \in T_p V = T_p \mathbb{R}^n$

$$X_p = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \quad a_i(p) \in \mathbb{R}$$

Podemos pensar como um mapa em V :

$$x = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad a_i \in C^\infty(U).$$

Poçecaba que se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $x f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$x f(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p.$$

Ademais, vale a regra de Leibniz:

$$x(fg) = (xf)g + f(xg).$$

(h-)conexões e produto wedge

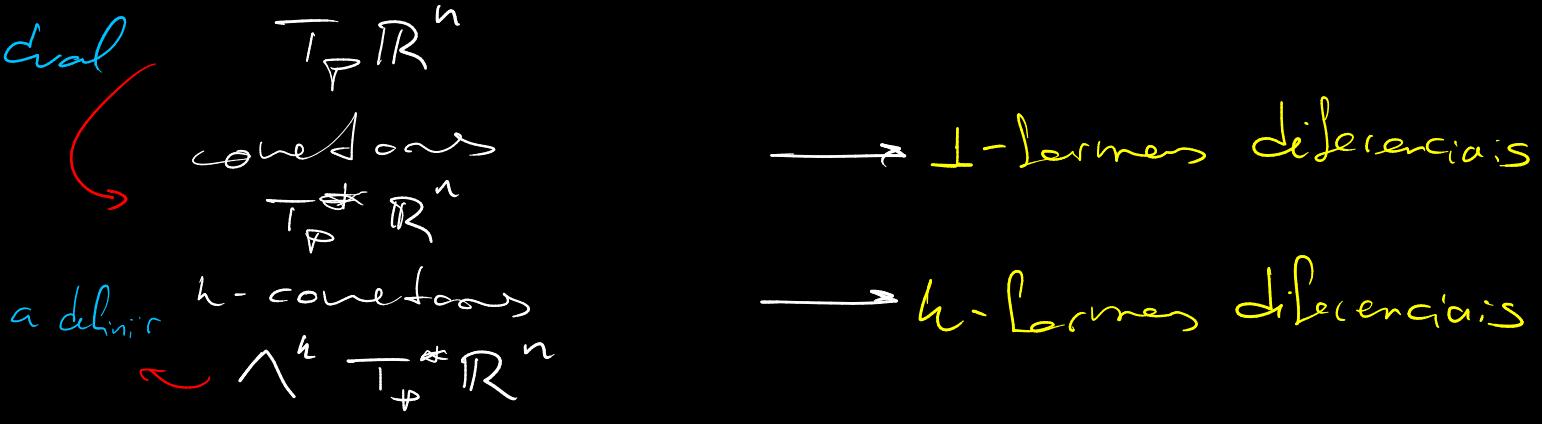
Dual de V : $V^* = L(V, \mathbb{R})$



Elementos de V^* : conexões

Novo objetivo:

vetores tangentes \rightarrow campos vectoriais



O que são h-permutações?

Permutações

Seja $A = \{i\}_{i=1}^k$ um conjunto de índices.

Uma permutação é uma bijeção $\sigma: A \rightarrow A$, ou seja, uma reordenação. Denotaremos

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) \end{pmatrix}.$$

Exemplo

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Uma transposição é uma permutação que troca essencialmente dois elementos, como

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} =: (1\ 2)$$

Permutações podem ser decompostas em termos de transposições.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)(1\ 4)(3\ 5)$$

12345 ↘
21345 ↘
24315 ↘
24513 ↘

Chamadas de S_n o grupo das permutações

de $\{\cdot\}_n^k$ é definidas

σ é par se é produto de um número par de transposições

σ é ímpar se é produto de um número ímpar de transposições

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma \text{ par} \\ -1, & \text{se } \sigma \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\tau)$$

Mapas multilineares

Uma função $f: V^k \rightarrow \mathbb{R}$ é k -linear se for linear em cada argumento.

Exemplos

- Produto escalar

- $A \in \mathbb{M}^{m \times n}$, $A = (v_1, \dots, v_n)$, $v_i \in \mathbb{R}^m$

$\det A = \det(v_1, \dots, v_n)$ é n -linear

Uma função h-linear $f: V^k \rightarrow \mathbb{R}$ é

→ simétrica se, $\forall \sigma \in S_n$,

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = f(v_1, \dots, v_n) \quad \text{ou} \quad \xrightarrow{\text{alterna}}$$

→ anti-simétrica se, $\forall \sigma \in S_n$, alternante efc

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \text{sgn}(\sigma) \cdot f(v_1, \dots, v_n)$$

Exemplos

O produto escalar é simétrico.

O determinante é alternado.

h-conedores

O espaço das funções h-lineares alternadas em V é $A_n(V)$ e seus elementos são chamados h-conedores.

Dada uma função h-linear qualquer, podemos definir

$$Sf(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \sigma f \quad \xrightarrow{\text{simétrico}} \quad \sigma f(v_1, \dots, v_n) = f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$$

$$Af(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \sigma f \quad \xrightarrow{\text{anti-simétrico}}$$

Proposição

Se L é h -linear, S^f é simétrica e A^f é alternada.

Demonastração:

Foramos A^f . Se f é análogo. Dado $\sigma \in S_h$,

$$\begin{aligned} \sigma A^f &= \sigma \left(\sum_{\tau} \operatorname{sgn}(\tau) \tau f \right), \\ &= \sum_{\tau} \operatorname{sgn}(\sigma) \tau (\sigma f), \\ &= \operatorname{sgn}(\tau) \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\sigma) (\sigma \tau)(f), \\ &= \operatorname{sgn}(\tau) A^f. \end{aligned}$$



Proposição

Se $f \in A_h(v)$, $A^f = h! f$.

Demonastração:

$$A^f = \sum \operatorname{sgn}(\sigma) \sigma f,$$

$$= \sum (\operatorname{sgn} \sigma)^2 f,$$

$$= h! f$$



Produto Tensorial

No contexto de dimensões finitas podemos definir

$$V \otimes W = \text{Hom}(V^*, W)$$

Ou seja, se $v \in V$, $w \in W$, $f \in V^*$,

$$v \otimes w : V^* \rightarrow W \quad \epsilon \mathbb{R}$$

$$f \mapsto (v \otimes w)(f) = \overline{f(v)}w$$

Yaméz identificar $V = V^{**}$.

Se temos $S, T \in V^*$, $S \otimes T \in V^* \otimes V^*$, $v \in V$,

$$S \otimes T(v) = S(v)T \in V^*$$

Tomando $u \in V$,

$$(S \otimes T(v))(u) = (S(v)T)(u) = S(v)T(u).$$

Assim, definimos

$$(S \otimes T)(v, u) = S(v)T(u).$$

Similarmente, se f é h -linear e g é l -linear, define-se
a função $(h \circ l)$ -linear fog por

$$(\mathfrak{f} \otimes g)(v_1, \dots, v_{n+\ell}) = f(v_1, \dots, v_n) g(v_{n+1}, \dots, v_{n+\ell}).$$

Exemplo (Mapas Bilineares)

V esp. vet., (e_i) base, (α_i) base dual

$$g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

mapa bilinear. Definemos $\mathfrak{g}_{ij} = g(e_i, e_j)$. Teme

$$v = \sum_i v_i e_i \quad w = \sum_j w_j e_j \quad \text{Só queremos que}$$

$$v_i = \alpha_i(v) \quad e \quad w_j = \alpha_j(w). \quad \text{Assim}$$

$$\begin{aligned} g(v, w) &= \sum_i v_i w_j g(e_i, e_j), \\ &= \sum_i \mathfrak{g}_{ij} \alpha_i(v) \alpha_j(w), \\ &= \sum_i (\mathfrak{g}_{ij} \alpha_i \otimes \alpha_j)(v, w). \end{aligned}$$

Produto wedge (ou exterior)

Possa $\mathfrak{f} \in A_n(V)$ e $g \in A_\ell(V)$ definir

$$\mathfrak{f} \wedge g = \frac{1}{n! \ell!} \Delta (\mathfrak{f} \otimes g).$$

Ou seja,

$$(\mathfrak{f} \wedge g)(v_1, \dots, v_{n+\ell}) = \frac{1}{n! \ell!} \sum \text{sgn}(\sigma) \mathfrak{f}(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) g(v_{\sigma(n+1)}, \dots, v_{\sigma(n+\ell)}).$$

Note que $\mathfrak{f} \wedge g \in A_{n+\ell}(V)$.

Propriedades

i. Se $f \in A_o(V)$, $f = c$ constante, e $g \in A_n(V)$,

$$f \wedge g = c \wedge g = cg \in A_n(V).$$

ii. Anticomutatividade

$f \in A_n(V)$, $g \in A_e(V)$

$$f \wedge g = (-1)^{k+l} g \wedge f$$

iii. Bilinearidade

$$f \wedge (g+h) = f \wedge g + f \wedge h$$

iv. Se $f \in A_n(V)$ e $h \leftarrow$ impar, $f \wedge f = 0$.

v. Associatividade

$f \in A_n(V)$, $g \in A_e(V)$, $h \in A_m(V)$,

$$f \wedge g \wedge h = \frac{1}{h! l! m!} A(f \otimes g \otimes h)$$

Exemplo

$u, v \in V$, $f, g \in V^*$

$$(f \wedge g)(u, v) = f(u)g(v) - f(v)g(u)$$

Vamos aos h-conebrões...

Notações de multiíndices

$(e_i)_{i=1}^n$ base de V , (α_i) base dual. Um multiíndice: $I = (i_1, \dots, i_n)$

Escalonados

$\hookrightarrow h \leq n$

$$e_I = (e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$$

$$\alpha_I = \alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_n}$$

$$\alpha_I(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } I=j \\ 0, & \text{se } I \neq j \end{cases}$$

\hookrightarrow se $|I| = h$, $\alpha_I \in A_h(V)$ é um h -conejo

Proposição

Os $\alpha_I \in A_h(V)$ com $I = (i_1 < \dots < i_n)$ formam uma base para $A_h(V)$.

\hookrightarrow se $h > n$, procura que $A_h(V) = \{0\}$

\hookrightarrow se $\dim V = n$, $\dim A_h(V) = \binom{n}{h}$

Formas Diferenciais

Uma 1-forma diferencial é uma função que toma pares $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ e leva a conejos em $T_p^* U$.

Uma h -forma diferencial leva $p \in U$ em um h -conejo em $\Lambda^h T_p^* U$

$\Lambda^k T_p^* U$: construído com wedges de cones
em $T_p^* U$.

↳ h-forma diferencial: um campo de
h-conesones

↳ em geral chamaremos apenas
de h-formas

Notações

$\Omega(\mathbb{R}^n)$ espaço das 1-formas

$\underline{\Omega}^h(\mathbb{R}^n)$ espaço das h-formas

$\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ espaço dos campos vetoriais

1-formas

Nota que se $x_p \in T_p \mathbb{R}^n$ e $\alpha_p \in T_p^* \mathbb{R}^n$, então

$$\alpha_p(x_p) \in \mathbb{R}.$$

Analogamente, temos também que

$$X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \alpha(X) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

↓

$$\alpha(X)|_P = \alpha_P(X_P) \in \mathbb{R}$$

Como obter 1-formas?

Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Podemos construir uma 1-forma df , a derivada de f , por

$$(df)_P(X_P) = X_P(f) \in \mathbb{R} \quad \forall P \in \mathbb{R}^n$$

$$\quad \quad \quad \forall X_P \in T_P \mathbb{R}^n$$

↪ df 1-forma vs $df = f_\#$ push-forward

$$f_\#(X_P) = df(X)|_{P \frac{d}{dt}}|_{f(P)} \in T_{f(P)} \mathbb{R}^n$$

↪ ver T_0 , Introdução a Manifolds, Prop. 17.2

Propriedades

Se $(x_i)_{i=1}^n$ são coordenadas em \mathbb{R}^n , $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{P=1}^n$ é base de $T_P \mathbb{R}^n$ e $(dx_i|_P)$ é a base dual de $T_P^* \mathbb{R}^n$.

Demonstração:

$$d\zeta_i \Big|_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) = \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_j} \Big|_p = S_{ij}.$$

Assim, $(d\zeta_i)_{i=1}^n$ é uma base (loc) de $\mathcal{L}(R^n)$.

Se $\omega \in \mathcal{L}(R^n)$,

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i, \quad a_i \in C^\infty(R^n).$$

Proposição

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Demonstração

$$df = \sum a_i dx_i \quad \xrightarrow{\text{?}}$$

$$df(\partial_j) = \sum a_i dx_i(\partial_j) = a_j,$$

$$df(\partial_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

Assim,

$$a_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$



h -Formas

\hookrightarrow h -constants

$$\omega \in \mathcal{Q}^h(\mathbb{R}^n) \quad \text{se} \quad \omega_p \in \Lambda^n(T_p \mathbb{R}^n), \quad t_p \in \mathbb{R}^n$$

De novas construções com multiíndices, temos que $x = (x_i)_{i=1}^n$ é base de $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$, então

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} \in \mathcal{Q}^h(\mathbb{R}^n)$$

\hookrightarrow wedge pando e pando

$$\alpha, \beta \in \mathcal{Q}^h(\mathbb{R}^n), \quad (\alpha \wedge \beta)_p = \alpha_p \wedge \beta_p$$

dx_I com $I = (i_1 < \dots < i_n)$ formam uma base de $\mathcal{Q}^h(\mathbb{R}^n)$.

Assim, se $\omega \in \mathcal{Q}^h(\mathbb{R}^n)$,

$$\omega = \sum_{|I|=h} a_I dx_I, \quad a_I \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Se $\alpha \in \mathcal{Q}^h(\mathbb{R}^n)$, $\beta \in \mathcal{Q}^e(\mathbb{R}^n)$,

$$(\alpha \wedge \beta)_p = \alpha_p \wedge \beta_p \xrightarrow{\text{wedge de multi-formas}}$$

Wedge em Goodnader

$$\text{Se } \alpha = \sum \alpha_I dx_I \text{ e } \beta = \sum \beta_I dx_I,$$

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{I \cap J = \emptyset} \alpha_I \beta_J dx_I \wedge dx_J$$

Assim,

$$\wedge: \mathcal{Q}^k(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{Q}^l(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{Q}^{k+l}(\mathbb{R}^n)$$

↪ ⊥, linear

$$\text{Se } \omega \in \mathcal{Q}^k \text{ e } X_1, \dots, X_n \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n),$$

$$\omega(X_1, \dots, X_n) \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

↪ $\omega: \mathcal{X} \times \dots \times \mathcal{X} \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Exemplo

$$\omega \in \mathcal{Q}^2(\mathbb{R}^3), \quad X_1, X_2 \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$$

$$\omega = f dx \wedge dy, \quad X_1 = 2\partial_x - \partial_z, \quad X_2 = h\partial_y$$

$$\begin{aligned}\omega(x_1, x_2) &= f(d_x(x_1)dx_2 - d_x(x_2)dx_1) \\ &= f(zh - \phi) \\ &\Rightarrow f\end{aligned}$$

Derivada Exterior

$$d: \underline{\mathcal{Q}}^h(\mathbb{R}^n) \rightarrow \underline{\mathcal{Q}}^{h+1}(\mathbb{R}^n)$$

Para $h=0$, definimos $\underline{\mathcal{Q}}^0(\mathbb{R}^n) = \widetilde{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$
e $d\Omega$ é o diferencial:

$$d\Omega = \sum \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} dx_i \in \mathcal{Q}'(\mathbb{R}^n)$$

Para h -Formas, se $\omega = \sum_{|I|=h} \alpha_I dx_I$,

$$d\omega = \sum_I dx_I \wedge d\alpha_I.$$

$$= \sum_I \left(\sum_j \frac{\partial \alpha_I}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_I$$

\$\hookrightarrow \underline{\mathcal{Q}}^{h+1}(\mathbb{R}^n)\$

Exemplo

$$\omega = f dx + g dy \in \mathcal{C}'(\mathbb{R}^2)$$

$$\begin{aligned} d\omega &= df \wedge dx + dg \wedge dy, \\ &= (\partial_x f dx + \partial_y f dy) \wedge dx, \\ &\quad + (\partial_x g dx + \partial_y g dy) \wedge dy, \\ &= \partial_y f dy \wedge dx + \partial_x g dx \wedge dy, \\ &= (\partial_x g - \partial_y f) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Propriedades

gra de α

i. Antiderivadas de grau 1:



$$d(\alpha \cdot \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge d\beta$$

ii. $d^2 = 0$

iii. Se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $x \in X(\mathbb{R}^n)$,

$$df(x) = x f'$$

→ caracterizam a derivada exterior
unicamente

Comparação com Cálculo Vetorial

Agora nos referimos ao TR^3

Tenemos

1-Lemas $f dx + g dy + h dz$
 (f, g, h)

2-Lemas $f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$
 (f, g, h)

3-Lemas $f dx \wedge dy \wedge dz$

Assim, podemos identificar

0,3-Lemas como longas

1,2-Lemas como retas

O que ocorre com \wedge e \square ?

$f \in \Omega^0$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx - \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \in \Omega^1$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \nabla f \quad \text{gradiente}$$

$$\omega \in \mathcal{C}^1$$

$$d\omega = d(f dx + g dy + h dz)$$

$$= (\partial_y h - \partial_z g) dy \wedge dz + (\partial_z f - \partial_x h) dx \wedge dz + (\partial_x g - \partial_y f) dx \wedge dy$$

$$\hookrightarrow (\partial_y h - \partial_z g, \partial_z f - \partial_x h, \partial_x g - \partial_y f) = \nabla \times (f, g, h)$$

rotacional

$$\omega \in \mathcal{C}^2$$

$$d\omega = d(f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = \nabla \cdot (f, g, h)$$

divergente

Notar que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \cdot \vec{F} &= \vec{0} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) &= 0 \end{aligned} \quad \boxed{d^2 = 0}$$

Teorema de Stokes

$$\int_U d\omega = \int_{\partial U} \omega$$

fronteira da região
integrando

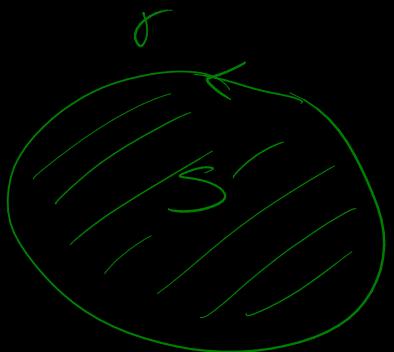
região de integração

i. Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

ii. Teorema de Stokes

$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$



iii. Teorema de Gauss

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \int_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

→ Stokes são "celulas" do Teorema de Stokes em variedades

Agora temos

$$v = v_x dx + v_y dy + v_z dz = (v_x, v_y, v_z)$$

$$w = w_x dx + w_y dy + w_z dz = (w_x, w_y, w_z)$$

$$\begin{aligned} v \cdot w &= (v_y w_z - v_z w_y) dy \, dz \\ &\quad + (v_z w_x - v_x w_z) dz \, dx \\ &\quad + (v_x w_y - v_y w_x) dx \, dy \end{aligned}$$

grau 0
produzido
horizontal

→ Podem ser uma I-formas...

Estrutura de Hodge (ou Dual de Hodge)

$$\star : \underline{\mathcal{Q}}^h(\mathbb{R}^n) \rightarrow \underline{\mathcal{Q}}^{n-h}(\mathbb{R}^n)$$

↳ vamos definir no caso particular do \mathbb{R}^3 ,
para a definição geral é um tanto complexa

Note que em \mathbb{R}^3

$$\star : \underline{\mathcal{Q}}^0 \rightarrow \underline{\mathcal{Q}}^3$$

$$\underline{\mathcal{Q}}^1 \rightarrow \underline{\mathcal{Q}}^2$$

$$\underline{\mathcal{Q}}_3^2 \rightarrow \underline{\mathcal{Q}}^1$$

$$\underline{\mathcal{Q}}^0 \rightarrow \underline{\mathcal{Q}}^0$$

Definimos:

$$\star dx = dy \wedge dz \quad \star \star = \perp$$

$$\star dy = dz \wedge dx$$

$$\star dz = dx \wedge dy$$

Observação:

$$\star(\star dx + dy) = \star \star dx - \star dy$$

e assim por diante...

Assim, obtemos

$$v \times w = \star(v \wedge w)$$

Electromagnetismo

Partim das Equações de Maxwell.

$$\left[\begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = 0 = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \\ \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J} \end{array} \right]$$

assumindo caso
sem lentes gás
Simplicidade

Começamos com as leis de Faraday e de Gauss magnética. Assumem o caso estático em que $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$. Assim,

$$E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\nabla \cdot B = 0 \Rightarrow B \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$$

$$\nabla \times E = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$$

e as equações se traduzem em

$$\partial B = 0,$$

$$\partial E = 0.$$

Mas os campos dependem do tempo...

Vamos então ao espaço de Minkowski:

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{B}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{E}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \end{array} \right\} \text{Funções} \quad \left. \begin{array}{l} \mathcal{B} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^4) \\ \mathcal{E} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^4) \end{array} \right.$$

$$\mathcal{B} = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$$

$$\mathcal{E} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

Nota:

d, \wedge recebem
rot, div, \times

Juntando,

$$F = \mathcal{B} + \mathcal{E} \wedge dt \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^4)$$

em \mathbb{R}^3 , não
geral

Em componentes,

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu, \text{ com}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \text{tensor de} \\ \text{Faraday} \\ \text{ou} \\ \text{eletromagnético} \end{matrix}$$

Objetivo: $dF = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$

Vamos calcular

$$dF = d(B + E \wedge dt)$$

$$= dB + dE \wedge dt$$

$$dB = d(B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy)$$

$$= \partial_x B_x dx \wedge dy \wedge dz + \partial_y B_x dt \wedge dy \wedge dz + \dots$$

$$= (\nabla \cdot B) dx \wedge dy \wedge dz + \partial_t B \wedge dt$$

$$dE = d(E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

$$\overset{\text{espace}}{=} d_3 E + \partial_t E_x dt \wedge dx + \partial_t E_y dt \wedge dy + \partial_t E_z dt \wedge dz$$

$$= d_3 E - \partial_t E \wedge dt$$

Assim,

$$dF = (\nabla \cdot B) dx \wedge dy \wedge dz + \partial_t B \wedge dt + d_3 E \wedge dt = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot B = 0 \\ \partial_t B + d_3 E = 0 = \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E \end{array} \right.$$

Resumando leis de Gauss e Ampere-Maxwell...

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$$

Como obter divergencia
de 1-L coma e
rotacional de 2-L coma?

↳ estrela de Hodge

Caso estético:

$$\vec{E} \in \mathcal{Q}^1(\mathbb{R}^3) \quad \Rightarrow$$

$$\vec{B} \in \mathcal{Q}^2(\mathbb{R}^3)$$

$$\star_3 \vec{E} \in \mathcal{Q}^2(\mathbb{R}^3)$$

$$\star_3 \vec{B} \in \mathcal{Q}^1(\mathbb{R}^3)$$

$$d_3(\star_3 \vec{E}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$d_3(\star_3 \vec{B}) = 0 \quad \nabla \times \vec{B} = 0$$

$$\vec{E} \text{ se } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq 0 ?$$

Estrela de Hodge em Minkowski (\mathbb{R}^4)

$$\star dt = dx \wedge dy \wedge dz$$

$$\star(dx) = dt \wedge dy \wedge dz$$

$$\star dy = dt \wedge dz \wedge dx$$

$$\star(dz) = dt \wedge dx \wedge dy$$

$$\star dz = dt \wedge dx \wedge dy$$

métrica
(+ ---)

Minkowski (\mathbb{R}^4)

Para uma p-L coma em Minkowski 4D, $\star \star = (-1)^{1+p(4-p)}$

Sob essas convenções, teremos

Objetivo: $\star d \star F = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0} \end{array} \right.$

Vännen cekular.

$$\star F = \star B + \star (E \wedge dt)$$

$$\begin{aligned}\star B &= B_x \star (dy \wedge dz) + B_y \star (dz \wedge dx) + B_z \star (dx \wedge dy) \\ &= B_x dt \wedge dx + B_y dt \wedge dy + B_z dt \wedge dz \\ &= dt \wedge \star_3 B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\star (E \wedge dt) &= E_x \star (dx \wedge dt) + E_y \star (dy \wedge dt) + E_z \star (dz \wedge dt) \\ &= E_x dy \wedge dz + E_y dz \wedge dx + E_z dx \wedge dy \\ &= \star_3 E\end{aligned}$$

$$d \star F = d \star B + d \star (E \wedge dt)$$

$$\begin{aligned}d \star B &= d(dt \wedge \star_3 B) \\ &= -d(\star_3 B \wedge dt) \\ &= -d\star_3 B \wedge dt \quad \text{ndt är den sista termen} \\ &= -\underbrace{d_3 \star_3 B \wedge dt}_1 \\ &\quad \nabla \times B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d \star (E \wedge dt) &= d \star_3 E \\ &= d(E_x dy \wedge dz + E_y dz \wedge dx + E_z dx \wedge dy) \\ &= \underbrace{d_3 \star_3 E}_1 - \partial_t E \wedge dt \\ &\quad \nabla \cdot E\end{aligned}$$

$$\star d \star F = \star d \star B + \star d \star (E \wedge f)$$

$$\star d \star B = - \star ((\nabla \times B)_x dx \wedge dy \wedge dz \wedge df + \dots)$$

$$= - ((\nabla \times B)_x dx + (\nabla \times B)_y dy + (\nabla \times B)_z dz)$$

$$\begin{aligned} \star d \star (E \wedge f) &= \nabla \cdot E \star (dx \wedge dy \wedge dz) + \partial_x E_x \star (df \wedge dy \wedge dz) + \dots \\ &= \nabla \cdot E df + \partial_x E_x dx + \partial_y E_y dy + \partial_z E_z dz \\ &= \nabla \cdot E df + \partial_x E \end{aligned}$$

Impõe $\star d \star F = 0$ temos que

$$\left[\begin{array}{l} \nabla \cdot E = 0 \\ \nabla \times B - \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \end{array} \right]$$

Assim, em termos diferenciais temos
que as equações de Maxwell são

$$dF = 0$$

$$\star d \star F = 0$$

onde $F = B + E \wedge df$.

Em Yang-Mills, temos

$$\star d_A \star F_A = 0, \quad d_A F_A = 0.$$

ainda devemos definir o que
sao d_A e F_A

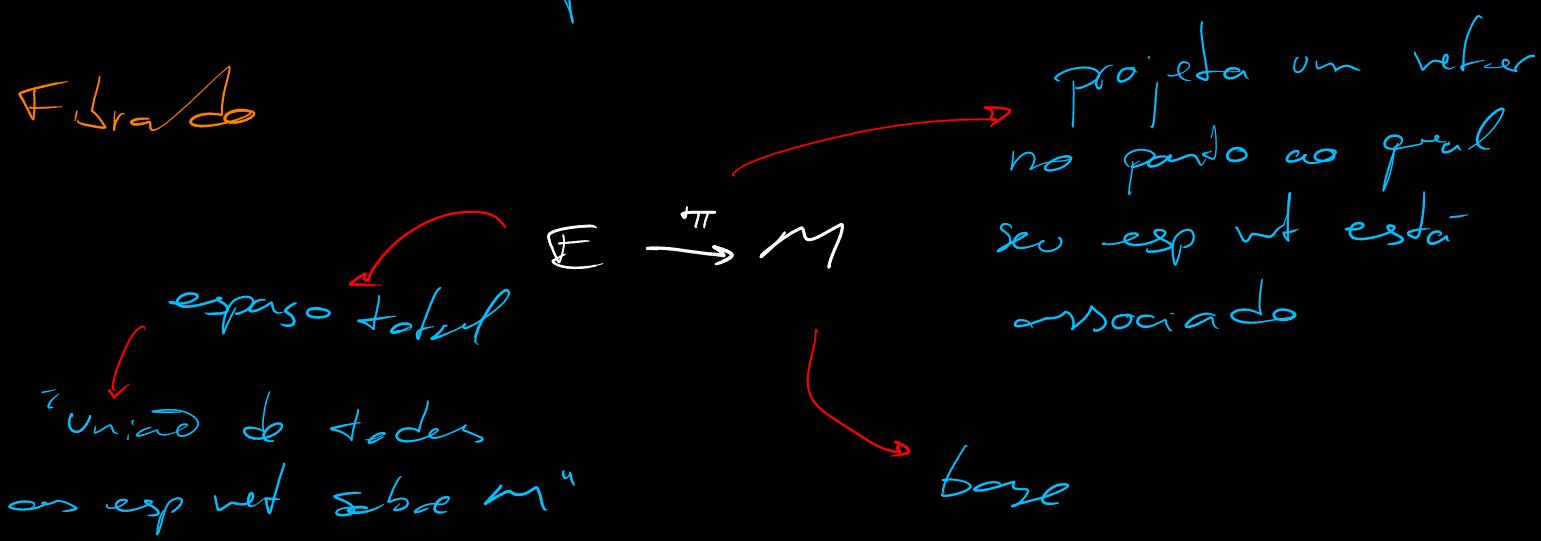
Fibradas Vetoriais



A cada ponto, atribui-se um espaço vetorial. Se a todos os pontos atribuir o mesmo espaço vetorial V , temos apenas $M \times V$. Mas e se permitirmos que o espaço varie ponto a ponto (algum tipo de "fogão", por exemplo)?

→ generalizar a ideia de espaço paralelo

Fibra



Segue: Dada um ponto $p \in M$ e leva um um vetor $v \in V_p$. → esp. vet. associado a p

$$s: M \rightarrow E$$

segundo

$$\pi \circ s = \text{id}_M$$

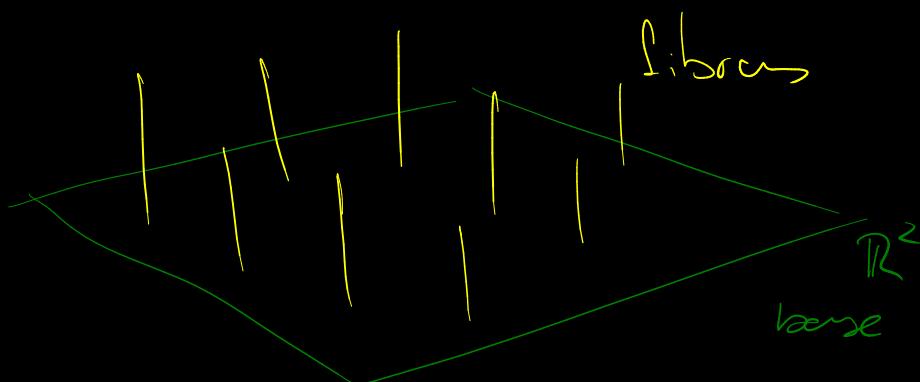
Exemplo:

Considere Linsas $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

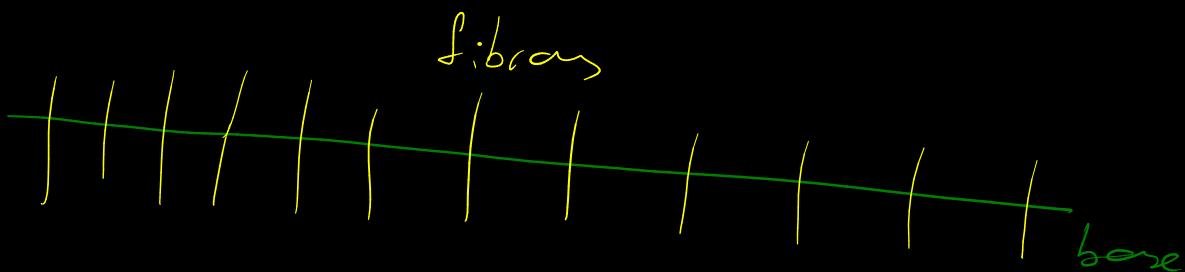
Podemos entender como seções do fibrado $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

Podemos pensar em $f(x)$ como $x \mapsto (x, f(x))$

Tomemos $E = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



Tomemos $E: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



Exemplos

i. Fibrado Tangente

$\forall p \in \mathbb{R}^n$, temos $T_p \mathbb{R}^n$

unica disjointa

$$T\mathbb{R}^n = \bigcup_p T_p \mathbb{R}^n \quad \xrightarrow{\text{grande: Lema}} \text{(sobre } p)$$

$$T\mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n \quad \hookrightarrow p \neq q \Rightarrow T_p \mathbb{R}^n \neq T_q \mathbb{R}^n, \text{ mas}$$

compos naturais satisfece $T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \cong T_q \mathbb{R}^n$

exatamente segue de $T\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Denotando por $\Gamma(E)$ ou $\Gamma(E \rightarrow M)$ o espaço das seções de $E \rightarrow M$, temos que

$$\mathcal{X}(\mathbb{R}^n) = \Gamma(T\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n).$$

ii. Fibrado Cotangente

$\forall p \in \mathbb{R}^n$, temos $T_p^* \mathbb{R}^n$

Lema: a cada ponto atribui um conector

$$T^*\mathbb{R}^n = \bigcup_p T_p^* \mathbb{R}^n$$

$$T^*\mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n$$

$$\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) = \Gamma(T^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$$

iii. $\forall p \in \mathbb{R}^n$ temos $\Lambda^n T_p^* \mathbb{R}^n = \Lambda_n(T_p \mathbb{R}^n)$

$$\Lambda^n T^* \mathbb{R}^n = \bigcup_p \Lambda^n T_p^* \mathbb{R}^n$$

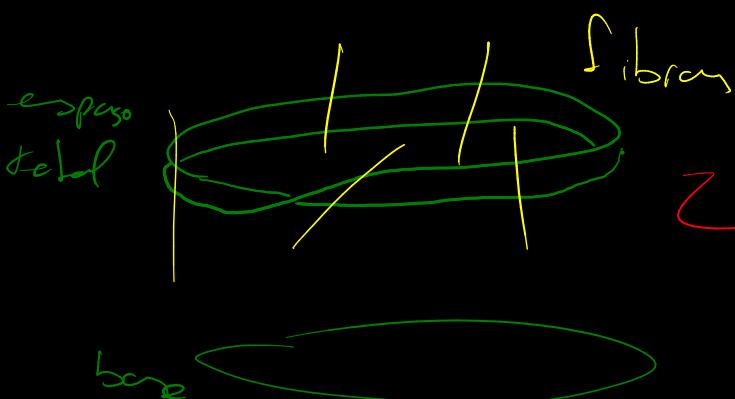
$$\Lambda^n T^* \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$Q^n(\mathbb{R}^n) = \Gamma(\Lambda^n T^* \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n).$$

\hookrightarrow h-fibres

não-trivial
(não é podido)

iv. Faixa de Möbius

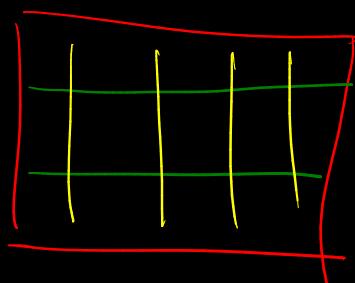
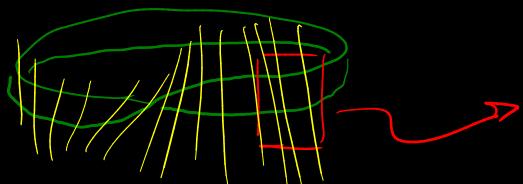


\hookrightarrow as anteriores podem ou não ser

\hookrightarrow não é $S^1 \times \mathbb{R}$ ou $\{0,1\}$
cilindro

Como distinguir um caso patológico de algo que realmente parece que seja um fibra?

\hookrightarrow queremos que o fibra seja localmente trivial



localmente é
trivial
(com produto)

Transformações de Gauge e Formas

Sendo E e B os campos eletromagnéticos, podemos escrever

$$\begin{cases} E = -\nabla \varphi - \frac{\partial A}{\partial t}, \\ B = \nabla \times A \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{potenciais} \\ \varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ A: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \end{array}$$

Perceba que, se $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, então E e B não são alterados por transformações da forma

$$\begin{cases} \varphi \mapsto \varphi - \frac{\partial f}{\partial t}, \\ A \mapsto A + \nabla f. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{transformações de gauge,} \\ \text{calibre} \end{array}$$

Em termos, $F = B + E \wedge dt$. Podemos escrever $F = dA$, para $A \in \underline{\Omega}^1(\mathbb{R}^4)$. Se

- em \mathbb{R}^4 ,
- $dF = 0 \Rightarrow \exists A$
- tal que
- $F = dA$

então

$$\begin{aligned} dA &= -\nabla \varphi dt + (\nabla \times A) ds - \frac{\partial A}{\partial t} \wedge dt \\ &= B + E \wedge dt \\ &= F \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{caso geral:} \\ \text{cohomologia de} \\ \text{de Rham} \end{array}$$

$$= F$$

Se fizemos $A \mapsto A + df$,

$$d^2 = 0$$

$$F = d(A + df) = dA \quad \curvearrowright$$

↳ transformação de gauge

Nesta linguagem, uma escolha usual de gauge é

$$d^\star A = \star d \star A.$$

Se $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, pode-se mostrar que

$$d^\star A = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad \curvearrowright \text{gauge de Coulomb}$$

Em \mathbb{R}^4 , \rightarrow gauge de Lorenz

$$d^\star A = 0 \Rightarrow \partial_\mu A^\mu = 0$$

Significado Físico das perturbações:

Efeito Aharonov - Bohm

↳ partícula quântica pode ser afetada pelo campo em uma região em que ele se anula

↳ espaço não é simplesmente conexo

Teoria de Gauge (Matemática)

ou

Teoria de Conexões em G -Fibrados

A seguir: M variedade (ou $M = \mathbb{R}^n$, se preferir)

Fibração Vetorial

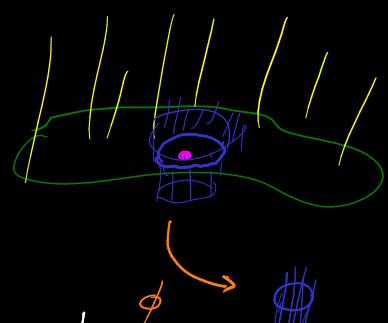
Um fibração vetorial de rank, h sobre M
consiste em

- E variedade;
- $\pi: E \rightarrow M$ mapa C^∞ sobrejetivo;
- $\forall p \in M$, as fibras $E_p = \pi^{-1}(p)$ têm estrutura de espaço vetorial,

Tal que $\forall p \in M$, \exists vizinhança U de p e um difeomorfismo

$$\phi: E|_U = \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^h$$

levando toda fibra E_y , $y \in U$, isomorficamente a $\{y\} \times \mathbb{R}^h$.



→ "localmente trivial"

Segão

Uma segao é um mapa suave $s: M \rightarrow E$ tal que $s \circ s = id_M$. O espaço das segaos sobre $E \xrightarrow{\pi} M$ é denotado $\Gamma(E) = \Gamma(E \xrightarrow{\pi} M)$.

Formas Diferenciais com valores em E

Havíamos definido que

$$V \otimes W = \text{Hom}(V^*, W).$$

Podemos também definir o produto tensorial de fibrados vectoriais. Sejam $E, F \rightarrow M$ fibrados vectoriais.

$$(E \otimes F)_P = E_P \otimes F_P$$

↓
definição
fibra a fibra

$$E \otimes F \rightarrow M \quad \text{fibrado vectorial}$$

Definição: $\Omega^k(M, E) = \Gamma(\wedge^k T^* M \otimes E)$

J-Forma

Sja $\omega \in \Omega^1(M, E)$. Num ponto $p \in M$, $\omega_p \in T_p^* M \otimes E_p$.

Se $v \in T_p M$, $\omega_p(v) \in E_p$. Se $X \in \Gamma(TM)$, ento $\omega(X) \in \Gamma(E)$.

h -Lema

Seja $\omega \in \mathbb{C}^h(M, E)$. Temos que

$$\begin{aligned}\omega : \Gamma(TM) \times \dots \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(E) \\ X(M) \times \dots \times X(M) &\end{aligned}$$

↳ Toma h campos e soma na uma seção em E , não necessariamente uma função suave.

Conexão \rightsquigarrow permite "navegar" pelos fibras
 \rightsquigarrow muitas definições equivalentes

Uma conexão em um fibrado vetorial $E \xrightarrow{\pi} M$
é um mapa bilinear

$$\begin{aligned}\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) &\rightarrow \Gamma(E) \\ (X, S) &\mapsto \nabla_X S\end{aligned}$$

satisfazendo

$$\nabla_{fx} S = f \nabla_x S \quad \text{Leibniz}$$

$$\nabla_x (fS) = f \nabla_x S + (Xf)S$$

$\forall S \in \Gamma(E), X \in \Gamma(TM), f \in C^\infty(M)$.

↳ fS : paralelo-ponto L é nígeo e S kamingar em espalh

A conexão permite fazer derivadas direcionais das seções do fibrado. "cada" em que o fibrado é dividido

Localmente (em uma favoritização), \exists uma base de seções do fibrado chamada de referencial.

$$e = (e_1, \dots, e_n),$$

$$M \supset U \xrightarrow{e_i} E|_U,$$

de forma que para $s \in \Gamma(E|_U)$

$$s = \sum_{i=1}^n f_i e_i.$$

Assim, localmente temos a matriz da conexão

$$A = (A_{\cdot i \cdot}), \text{ com } A_{\cdot i \cdot} \in \underline{\mathcal{L}}^1(M), \text{ dada por}$$

$$\nabla_x(e_i) = \sum_{j=1}^n A_{\cdot j \cdot}(x) e_j. \quad \begin{matrix} \text{depende da} \\ \text{"direção de"} \\ \text{"derivada" } X \end{matrix}$$

Ou seja, A é uma matriz de 1-formas, ou equivalente,

$$A \in \underline{\mathcal{L}}^1(M, \underline{\text{End}}(E))$$

$$\underline{\text{End}}(E) \rightarrow M$$

\hookrightarrow matrizes!

$$(\underline{\text{End}}(E))_P = \underline{\text{End}}(E_P) \rightarrow \underline{\text{End}} V = \text{Hom}(V, V)$$

Conexões podem ser vistos como derivadas covariantes, no sentido de que dada ∇ , podemos definir

$$d_{\nabla} : \underline{\mathcal{C}}^k(M, \mathbb{E}) \rightarrow \underline{\mathcal{C}}^{k+1}(M, \mathbb{E}).$$

Isto leva à notação muda comum

$$d_A = d + \Delta$$

mais, é associado
a ∇

só faz sentido
localmente, pois A
é definido localmente

Podemos falar sobre
uma notação (localmente)

Curvatura

A curvatura de uma conexão ∇ é

$F_{\nabla} \in \underline{\mathcal{C}}^2(M, \text{End}(\mathbb{E}))$ dada por

$$F_{\nabla}(x, y)s = \nabla_x \nabla_y s - \nabla_y \nabla_x s - \nabla_{[x, y]} s.$$

Por que isso é interessante? Tome $\omega \in \underline{\mathcal{C}}^k(M, \mathbb{E})$. Podemos querer que

$$d_{\nabla}^2 \omega = F_{\nabla} \wedge \omega.$$

Assim, se $F_\nabla = 0$, $d_\nabla^2 = 0$.

Se A é um módulo de ∇ ,
escrivemos F_A . Pode-se
mostrar que

→ qual é a base de d_∇
estar de ser a
derivada exterior?

$$F_A = dA + \frac{1}{2} [A \wedge A] \quad \text{para detalhes, é razão interessante usar outras definições de conexão}$$

Onde está o G em G -Líbros?

↓
grupo de Lie compacto

→ grosso modo, $G \subseteq GL_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}

Exemplos:

$U(N)$, $O(N)$, $SO(N)$, $SU(N)$...

Node que

$\text{End } V \cong \text{Aut } V = GL(V) \cong GL_n(\mathbb{R})$

Poderes pensar em subgrupos de $GL_n(\mathbb{R})$
como estão dentro de $\text{End } V$ representações

Um G -Librado retocal é um Librado vertical com a ação de um grupo G , em suas fibras,

$$G \subseteq \text{End}(E_p) \quad \forall p \in M, E \rightarrow M.$$

$A \in \mathcal{L}'(M, \text{End}(E))$ é G -conexa se tiver valores em G .

Nota

Notas

Dados por $\mathcal{A}(E)$

O espaço das G -conexas no G -Librado $E \rightarrow M$ é

" G -Librado principal" gerado a ação usual do grupo como fibras, ou seja pode-se recuperar uma noção de equivalência

charadas apesar de "conexas"

Transformações de Gauge

O grupo das transformações de gauge de um G -Librado $E \rightarrow M$ é definido por

$$G(E) = \left\{ g \in \Gamma(\text{End}(E)), g(p) \in G \subseteq \text{End}(E_p), \forall p \in M \right\}.$$

As transformações de gauge agem em $\mathcal{A}(E)$. Se $A \in \mathcal{A}(E)$ e $g \in G(E)$,

$$g^* A = g^{-1} A g + g^{-1} d g$$

A_{ext} na curvatura

$$F_{g^*A} = g^{-1} F_A g.$$

Se $A_1, A_2 \in \mathcal{A}(\mathbb{E})$ e $\exists g \in G(\mathbb{E})$ tal que

$$A_2 = g^* A_1,$$

então A_1 e A_2 são ditas gauge-equivalentes.

Funcional de Yang-Mills

↳ Riemann classes
de equivalência

Poderemos colocar um produto interno em

$\Omega^2(M, \text{End}(\mathbb{E}))$ (curvatura) por meio de

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \langle \alpha \wedge * \beta \rangle_{\mathbb{E}} \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega^2(M, \mathbb{E})$$

produto interno
"ponto-a-ponto" nas
fibras

↳ estrela de Hodge e
integral avançam uma
métrica (pseudo) Riemanniana

Então definimos

$$YM(A) = \int_M |F_A|^2 \text{dvol}$$

$$= \int_M \langle F_A \wedge * F_A \rangle.$$

Funcional de
Yang-Mills

Sua equação de Euler-Lagrange é

$$d_A \star F_A = 0 = \star d_A \star F_A$$

↳ equação de Yang-Mills

Além disso, sempre vale a identidade de Bianchi:

$$d_A F_A = 0.$$

Isso tudo é invariante pela ação de $\mathcal{G}(\mathbb{E})$,

$$YM(A) = YM(g^* A).$$

Electromagnetismo

potencial A

$$A \mapsto A + d\mathbb{J}$$

$$F = dA$$

$$dF = 0$$

$$d \star F = 0$$

Yang-Mills

conexão A

$$A \mapsto g^{-1} A g + g^{-1} dg$$

$$F_A = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A]$$

$$d_A F_A = 0$$

$$d_A \star F_A = 0$$

↳ EM e Yang-Mills com $G = U(1)$



abeliano

Conclusões

- i. potenciais são conexões
- ii. campos são curvaturas
- iii. Yang-Mills é Eletromagnetismo não-abeliano

Observações Históricas

Yang & Mills 1954

 Buscavam entender melhor o "spin isotópico" (isospin) ao fazer uma analogia com o eletromagnetismo. Não utilizaram fibras ou conexões, embora essas noções já estivessem presentes em Matemática.

Em Matemática ~ 1970

Atiyah, Hitchin, Drinfeld & Manin 1977

↳ "uma construção completa, usando operadores algébricos, de todos os campos de YM auto-duais Euclidianos"

$$D=4: \quad A: \underline{\Omega}^2 \rightarrow \underline{\Omega}^2 \quad \xrightarrow{\text{ASD}}$$

Uma conexão é dita ser (anti-)auto-dual se

$$\star F_A = \pm F_A$$

Coneções ASD são auto-naturais e YM graças
à identidade de Bianchi.

$$d_A F_A = 0 \rightarrow \text{sempre (Bianchi)}$$

$$\star d_A \star F_A = \star d_A F_A = 0$$

Instâncias: coneções ASD. aluno de Atiyah

S. Donaldson 1983 → medalha Fields 1986

Utiliza o espaço de moduli dos instantons
(i.e., resultados de teoria de gauge) para provar
um resultado que implica na existência de
variedades topológicas sem estrutura diferenciável
em dimensão 4.

Resultados desse tipo implicam na existência
de um infinito não-enumerável de estruturas
diferenciáveis sobre \mathbb{R}^4 .

↳ única dimensão em que isso ocorre
 $(\mathbb{R}^n, n \neq 4)$, admite uma única estrutura diferenciável...)
e muito mais...