Доказани твърдения на семинарните упражнения по ДИС 1

Твърдения, доказани с индукция

1. **Неравенство на Бернули:** Ако $n \in \mathbb{N}$, то $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$, $x \in [-1; +\infty]$.
2. **Свойство:** $b^m - c^m = (b-c)(b^{m-1} + b^{m-2}c + b^{m-3}c^2 + \cdots + bc^{m-2} + c^{m-1})$
3. **Тъждество на Безу:** Ако $P(x)$ е полином от степен n и реалното число $a \in \mathbb{R}$ е корен на полинома, то $P(x) = (x-a)Q(x)$, където $Q(x)$ е полином от степен $n-1$.
4. **Свойство на полиномите:** Полином от степен n има **най-много** n различни нули.
5. **Еднаквост на полиноми:** Два полинома, които приемат общи стойности на коефициентите в $n+1$ различни точки, имат равни коефициенти.

Биномни коефициенти

Биномен коефициент: Нека $\alpha \in \mathbb{R}$. Числата $\binom{\alpha}{0} = 1$ и $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ се наричат биномни коефициенти.

Основни свойства:

(а) $\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}$.

(б) Ако $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, то:

- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(в) Ако $n, k \in \mathbb{N}$ и $k > n$, то $\binom{n}{k} = 0$.

Биномна формула на Нютон:

(а) $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$

(б) $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1}\binom{n}{n}b^n$

Други твърдение за биномни коефициенти:

(а) Ако $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, то $\binom{n}{k}$ е броят на k-елементните подмножества на множество, състоящо се от n елемента. (комбинаторичен смисъл на биномния коефициент)

(б) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

(в) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$

(г) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$

Твърдения свързани с ограниченост на множества:

1. Нека $M \subset \mathbb{R}$, $N \subset \mathbb{R}$ са непразни. Ако $M \subseteq N$ и N (по-голямото множество) е ограничено отгоре, то $=>$ $\sup M \leq \sup N$

2. Нека $M \subset \mathbb{R}$, $N \subset \mathbb{R}$ са непразни, ограничени отгоре множества от положителни реални числа. Тогава $M.N$ $(\{m.n|m \in M, n \in N\})$ също е ограничено отгоре и $\sup(M.N) = \sup M. \sup N$

3. Нека $M \subset \mathbb{R}$, $N \subset \mathbb{R}$ са непразни, ограничени отгоре множества от реални числа. $M + N$ $(\{m + n|m \in M, n \in N\})$ също е ограничено отгоре и $\sup(M + N) = \sup M + \sup N$

Твърдения свързани с граници и сходимост на редици:

1. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$
   - $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
   - $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$
   - $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n.b_n) = a.b$
   - $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}, b \neq 0$

2. **Теорема за двамата полицаи:** Ако $a_n \leq c_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ и $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ са сходящи и клонят към l, то $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ също е сходяща и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$

3. Ако $k \in \mathbb{N}$, то;
   - $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n^k}) = 0$
   - $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{\sqrt[k]{n}}) = 0$
   - Ако $q \in (-1, 1)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

4. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, то $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n.b_n) = 0$

5. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n.b_n = \begin{cases} +\infty, l > 0 \\ -\infty, l < 0 \end{cases}$

6. Ако $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{l}$, $k \in \mathbb{N}$

7. Ако $a \in \mathbb{R}$ е фиксирано число, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

8. Ако $a > 1$ е фиксирано число, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, $k \in \mathbb{N}$

9. Ако $q \in (-1, 1)$ е фиксирано числом то $\lim\limits_{n\to\infty} n^k q^n = 0$, $k \in \mathbb{N}$

10. Ако $a > 0$ е фиксирано число, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

12. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

13. Редицата $an = (1+\frac{1}{n})^n$ е ограничена и монотонна, следователно е и сходяща. Тя клони към неперовото число - e. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = e$. Тук важат следните твърдения:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{k}{n})^n = e^k$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{k}{n})^n = e^{-k}$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{kn})^n = e^{\frac{1}{k}}$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{kn})^n = e^{-\frac{1}{k}}$

Твърдения свързани с числови редове:

1. Хармоничният ред **НЕ** е сходящ
2. Ако $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ. то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. **Забележка:** Обратното не е вярно - ако редица клони към нула, не е задължително редът ѝ да е сходящ. Пример: хармоничният ред.
3. **Принцип за мажориране:** Ако $0 \leq a_n \leq b_n$ за $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ, то и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ също е сходящ.
4. **Критерий за сравняване:** Ако $a_n > 0$, $b_n > 0$ за $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\exists K = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$, като $0 < K < \infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{a}_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ са или едновременно сходящи, или разходящи. Казваме, че са сравними и пишем: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$
5. Основни числови редове, които се използват за сравняване:
   - $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, който е $\begin{cases} \text{сходящ, ако } q \in (-1,1) \\ \text{разходящ, ако } q \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty) \end{cases}$ (геометрична прогресия)
   - $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, който е $\begin{cases} \text{сходящ, ако } \alpha > 1 \\ \text{разходящ, ако } \alpha \leq 1 \end{cases}$ (обощен хармоничен ред)
6. **Критерий на Коши за редове с неотрицателни членове:** ако $a_n \geq 0$ за $\forall n \in \mathbb{N}$ и $a_n \geq a_{n+1}$ за $\forall n \in \mathbb{N}$, то числовите редове $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ са сравними.
7. **Критерий на Даламбер:** Нека $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е числов ред с положителни членове, за който $\exists$ границата $D = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ (крайна или безкрайна). Тогава:
   - Ако $D < 1$, то редът е сходящ.
   - Ако $D > 1$, то редът е разходящ.
   - Ако $D = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ отдясно (стойностите на редицата са по-големи от 1), то редът е разходящ.

8. **Критерий на Коши:** Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е числов ред с положителни членове, за който $\exists$ границата $C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ (крайна или безкрайна). Тогава:

   - Ако $C < 1$, то редът е сходящ.
   - Ако $C > 1$, то редът е разходящ.
   - Ако $C = 1$ и $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ отдясно (стойностите на редицата са по-големи от 1), то редът е разходящ.