DOI：10.13195/j.cd.1988.02.29.hanjq.006

反馈系统中的线性与非线性

韩 京 清

（中国科学院系统科学研究所）

【摘要】系统中状态反馈的引入打破了原有的线性和非线性的界限。本文用初等的分析方法讨论非线性系统按控制（按观测）等价于线性系统的条件。本文的结果表明，适当运用非线性变换和反馈变换（观测变换）能把许多非线性系统化成线性系统来处理。

一、前　　言

十多年来非线性控制系统的微分几何方法很盛兴[6]，本文用较初等的分析方法，把作者在文献[2]中所得的关于非线性控制系统的结果给予一般化，讨论一类非线性控制系统的基本问题。

对没有输入、输出的封闭系统来说，线性和非线性系统具有完全不同的拓扑结构，两者不能随意转化。然而对有输入、输出作用的开放系统而言有“反馈”效应，这个“反馈”可以把线性转化为非线性，也可以把非线性简化为线性。

本文将用控制系统的“反馈变换”、“观测变换”的概念和“控制等价”及“观测等价”的概念给出一类非线性系统“控制等价”（“观测等价”）于线性系统的条件，并把它应用于观测器、最优控制等问题上。

二、基本概念

对确定性控制系统

$$\Sigma_C: \dot{x} = f(x, u)$$

和观测系统

$$\Sigma_0: \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases}$$

其中，$x \in \Omega \subset R^n$，$u \in R^m$，$y \in R^p$，给出如下几个基本概念：

定义 1　设$x_0 \in \Omega$给定。如果对$x_1 \in \Omega$，有 $u(t), t \in [0, t_1]$，由 x_1 出发的 $\dot{x} = f(x, u(t))$的解 $x(t)$满足 $x(t_1) = x_0$，则说“状态 x_1 对 x_0 能控”；

如果任意 $x_1 \in \Omega$ 都对 x_0 能控，则说 x_0 是 Σ_C 的一个“能控状态”；如果任意 $x_0 \in \Omega$ 都是 Σ_C 的能控状态，则说“Σ_C 在 Ω 内完全能控”。

定义 2　设 $x_0 \in \Omega$ 给定。记从 x_0 出发的系统 Σ_O 的解为 $x_0(t)$，它所给出的输出为 $y_0(t) = h(x_0(t))$。如果对 $x_1 \in \Omega$，存在$t_1 > 0$，使得从 x_1 出发的Σ_0 的解 $x_1(t)$ 所给出的输出 $y_1(t) = h(x_1(t))$ 满足

$$y_1(t) \equiv y_0(t), t \in [0, t_1]$$

则说“状态 x_1 对 x_0 不能区分”；

如果在 Ω 中不存在对 x_0 不能区分的状态，则说“x_0 是一个能观状态”；如果 Ω 中的每个状态都是能观的，则说系统“Σ_0 在 Ω 内完全能观”。

定义 3　设 $k(x, v)$：$\Omega \times R^m \to R^m$。如果对任意给定的 $x \in \Omega$，映象 $k(x, v)$：$R^m \to R^m$ 可逆，则说 $u = k(x, v)$ 是控制系统 Σ_C 的一个“状态反馈”；而由它决定的系统变换

$$\dot{x} = f(x, u) \ |\!\to \dot{x} = f(x, k(x, v)) = \bar{f}(x, v)$$

叫做系统的“反馈变换”。

定义 4　设 $g(h)$：$R^p \to R^s$。这时，系统变换：

本文于 1986 年 4 月 30 日收到。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{cases} \mapsto \begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{g}(\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}})) \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) \end{cases}$$

叫做由 $\mathbf{g}(\mathbf{h})$ 决定的“观测变换”。

定义 5 如果系统 $\Sigma_{C2}(\Sigma_{02})$ 是由系统 $\Sigma_{C1}(\Sigma_{01})$ 经状态变量的可逆变换和系统的反馈变换（观测变换）所得的，则说系统 $\Sigma_{C2}(\Sigma_{02})$ 是与系统 $\Sigma_{C1}(\Sigma_{01})$”控制等价”（“观测等价”）。

如果系统Σ控制（观测）等价于一个线性系统，则说Σ为按控制（按观测）是“线性等价”的系统。

从上述概念直接可得如下几个推论。

推论 1 设 $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ 是系统 Σ_C（Σ_0）的一个能控(能观）状态，$\mathbf{x} = T(\bar{\mathbf{x}}): \bar{\Omega} \to \Omega$ 是可微的可逆变换。这时，$\bar{\Omega}$ 中的状态 $\bar{\mathbf{x}}_0 = T^{-1}(\mathbf{x}_0)$是经状态变换 $\mathbf{x} = T(\bar{\mathbf{x}})$ 所得的新系统 $\bar{\Sigma}_C(\bar{\Sigma}_0)$ 的能控（能观）状态。

推论 2 设 $\mathbf{x}_0$ 是 Σ_C 的能控状态，则对经反馈变换所得的新系统 $\bar{\Sigma}_C$ 来说，$\mathbf{x}_0$ 仍为能控状态。

推论 3 设系统 Σ_0 满足解的存在唯一性条件。又设 $\mathbf{x}_0$ 是 Σ_0 的能观状态，$\bar{\Sigma}_0$ 是经关于 $\mathbf{x}_0$ 的观测变换所得的新系统。这时，状态 $\mathbf{x}_0$ 仍然是新系统 $\bar{\Sigma}_0$ 的一个能观状态。

从以上推论可得

命题 1 控制（观测）等价保持系统的能控性（能观性）

三、线性等价条件

对单输入、单输出系统有

定理 1 设控制系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \mathbf{x} \in \Omega, u \in R \tag{3.1}$$

中 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ 对 $\mathbf{x}, u$ n 次可微。

（充分性）如果存在 n 次可微的函数 $l(\mathbf{x})$，使得由它产生的函数列

$$t_1(\mathbf{x}) = l(\mathbf{x}),$$

$$t_{i+1}(\mathbf{x}, u) = \frac{\partial t_i(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \tag{3.2}$$

$$i = 1, 2, \cdots, n-1,$$

满足

(i) $$\frac{\partial t_i(\mathbf{x}, u)}{\partial u} = 0, i = 2, \cdots, n \tag{3.3}$$

（从而可记 $t_i(\mathbf{x}, u) = t_i(\mathbf{x})$）

(ii) 方程 $\frac{\partial t_n(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = v$

对任意 $v \in R$ 都有解

$$u = \mathbf{k}(\mathbf{x}, v);$$

(iii)

$$\bar{\mathbf{x}} = T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} t_1(\mathbf{x}) \\ t_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ t_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} : \Omega \to \bar{\Omega} \tag{3.4}$$

是可微的可逆变换，则系统（4.1）线性等价于如下积分器串联型：

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_2 \\ &\vdots \\ \dot{\bar{x}}_{n-1} &= \bar{x}_n \\ \dot{\bar{x}}_n &= v \end{aligned} \tag{3.5}$$

（必要性）如果存在 n 次可微的可逆变换（3.4）和满足

$$\frac{\partial k(\mathbf{x}, v)}{\partial v} \neq 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall v \in R \tag{3.6}$$

状态反馈，$u = k(\mathbf{x}, v)$把系统(3,1)等价地变成系统(3,5)，那么组成变换(3,4)的函数列 $t_1(\mathbf{x}), t_2(\mathbf{x}), \cdots, t_n(\mathbf{x})$，必满足条件（3.2）、(3.3)且 $u = k(\mathbf{x}, v)$是方程 $\frac{\partial t_n(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = v$的解。

证明 充分性．对式（3.4）微分得

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$$

$$
=\begin{vmatrix}\frac{\partial t_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},u)\\ \frac{\partial t_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},u)\\ \vdots\\ \frac{\partial t_n(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},u)\end{vmatrix}
$$

$$
\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}t_2(\mathbf{x})\\ t_3(\mathbf{x})\\ \vdots\\ \frac{\partial t_n(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},u)\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}x_2\\ x_3\\ \vdots\\ \frac{\partial t_n(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},u)\end{vmatrix}
$$

由条件(ii)得积分器串联型(3.5)。

必要性　根据假设，对可逆变换 $\mathbf{z}=(T\mathbf{x})$ 和反馈 $u=k(\mathbf{x},v)$，有

$$
\dot{\mathbf{x}}=\frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},k(\mathbf{x},v))
$$

$$
=\begin{vmatrix}\frac{\partial t_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},k(\mathbf{x},v))\\ \vdots\\ \frac{\partial t_{n-1}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},k(\mathbf{x},v))\\ \frac{\partial t_n(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},k(\mathbf{x},v))\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}x_2\\ \vdots\\ x_n\\ v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t_2(\mathbf{x})\\ \vdots\\ t_n(\mathbf{x})\\ v\end{vmatrix}
$$

由此得　$t_{i+1}(\mathbf{x})=\frac{\partial t_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},k(\mathbf{x},v))$

$$
i=1,2,\cdots,n-1 \tag{3.7}
$$

$$
\frac{\partial t_n(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},k(\mathbf{x},v))=v \tag{3.8}
$$

显然，当 $i\leqslant n-1$ 时，

$$
O=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial t_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},k(\mathbf{x},v))\right)
$$

$$
=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial t_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},u)\right)\cdot\frac{\partial k(\mathbf{x},v)}{\partial v},
$$

但是，由式(3.6)，$\frac{\partial k(\mathbf{x},v)}{\partial v}\neq 0$，故必有

$$
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial t_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},u)\right)=0,\ i=1,2,\cdots,n-1 \tag{3.9}
$$

这说明式(3.7)右端与 $u=k(\mathbf{x},v)$ 无关，从而式(3.7)可写成，

$$
t_{i+1}(\mathbf{x})=\frac{\partial t_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},u),\ i=1,2,\cdots,
$$

$n-1$，于是条件(3.2)、(3.3)必成立。另外，由式(3.8)，条件(ii)也成立。　证毕

定理中条件(i)可做为求未知函数 $t_1(\mathbf{x})=l(\mathbf{x})$ 的条件。

系 1　设控制系统有如下形式

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1&=f_1(x_1,x_2)\\
&\vdots\\
\dot{x}_{n-1}&=f_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\
\dot{x}_n&=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

如果 f_i 充分可微且满足

$$
\frac{\partial f_i(x_1,\cdots,x_{i+1})}{\partial x_{i+1}}\neq 0,\ i=1,2,\cdots,n-1,\quad \forall\,\mathbf{x}\in\Omega, \tag{3.11}
$$

$$
\frac{\partial f_n(x_1,\cdots,x_n,u)}{\partial u}\neq 0,\ \forall\,\mathbf{x}\in\Omega,\ \forall\,u\in R, \tag{3.12}
$$

则系统(3.10)按控制线性等价于式(3.5)。

证明　由定理 1 的条件(i)可知函数 $l(\mathbf{x})$ 只依赖于 x_1，从而取 $l(\mathbf{x})=x_1$。这时由条件(3.11)、(3.12)可以证明按式(3.2)组成的函数列 $t_i(\mathbf{x}),i=1,2,\cdots,n$，将满足定理的所有条件。　证毕

我们把定理1逆过来看。系统(3.1)所描述的非线性特性是由线性系统(3.5)经一种非线性反馈所得。对能控的线性系统用线性状态反馈可以任意配置极点。现在如果把状态反馈形式扩充为一般的定义3意义下的函数 $u=k(x,v)$，那么对能控的线性系统用状态反馈“几乎可以任意”设置一些非线性特性。从这种意义下，我们能否把自然界中已存在的许多非线性现象看做在特定的自然环境约束下形成的线性系统的非线性反馈效应呢？

为了讨论系统的观测问题，先给出

命题 观测系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \quad\vdots\\ \dot{x}_{n-1}=x_n\\ \dot{x}_n=f(x_1,\cdots,x_n)\\ y=x_1\end{cases}\qquad(3.13)$$

当 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 Ω 内满足解的存在唯一性条件时，在 Ω 内完全能观。

此命题是由定义2及其解的唯一性直接得证。

定理 2 设有观测系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\mathbf{f}(\mathbf{x})\\ y&=h(\mathbf{x})\end{aligned}\qquad(3.14)$$

其中，$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 满足解的存在唯一性条件，且 $\mathbf{f}(\mathbf{x}),h(\mathbf{x})$ 充分可微。如果存在充分可微的 $\mathbf{g}(h):R\to R^n$，使得函数列

$$t_1(\mathbf{x})=h(\mathbf{x})$$

$$t_{i+1}(\mathbf{x})=\frac{\partial t_i(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x})+g_i(h(\mathbf{x})),$$

$$i=1,2,\cdots,n-1\qquad(3.15)$$

所组成的

$$\bar{\mathbf{x}}=T(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}t_1(\mathbf{x})\\ t_2(\mathbf{x})\\ \vdots\\ t_n(\mathbf{x})\end{pmatrix}:\Omega\to\bar{\Omega}$$

为可微的可逆变换，那么系统(3.14)在 Ω 内完全能观。进一步，如果还满足

$$\frac{\partial t_n(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x})=g_n(h(\mathbf{x}))\qquad(3.16)$$

那么系统(3.14)线性等价于如下积分器串联型

$$\begin{cases}\dot{\bar{\mathbf{x}}}_1=\bar{\mathbf{x}}_2\\ \quad\vdots\\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{n-1}=\bar{\mathbf{x}}_n\\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_n=0\\ y=\bar{\mathbf{x}}_1\end{cases}\qquad(3.17)$$

证明 由于

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}=\frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}\frac{\partial t_1(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x})\\ \vdots\\ \frac{\partial t_{n-1}(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x})\\ \frac{\partial t_n(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x})\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\bar{x}_2-g_1(\bar{x}_1)\\ \vdots\\ \bar{x}_n-g_{n-1}(\bar{x}_1)\\ g_n(\bar{x}_1)\end{pmatrix}$$

$$y=h(\mathbf{x})=\bar{x}_1$$

经 $\mathbf{g}(h(\mathbf{x}))$ 决定的观测变换得相应结论。

把定理1、2的所有函数换成线性函数，定理1、2是线性系统的能控、能观的充要条件。

对多变量情形有

定理 3 设控制系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}),\ \mathbf{x}\in\Omega,\ \mathbf{u}\in R^m\qquad(3.18)$$

中 $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})$ 对 $\mathbf{x}\in\Omega,\mathbf{u}\in R^m$ 充分可微。

（充分性）如果存在整数组

$$\nu>0,\ m=n_1\geq n_2\geq\cdots\geq n_\nu>0$$

和 m 个充分可微的函数 $l_1(\mathbf{x}),l_2(\mathbf{x}),\cdots,l_m(\mathbf{x})$，使得向量组

$$\tilde{\mathbf{t}}_1(\mathbf{x},\mathbf{u})=\begin{pmatrix}l_1(\mathbf{x})\\ \vdots\\ l_m(\mathbf{x})\end{pmatrix}$$

$$\tilde{t}_{i+1}(\mathbf{x},\mathbf{u})=\frac{\partial\tilde{t}_i(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})$$

$$i=1,2,\cdots,\nu-1 \tag{3.19}$$

满足

(i) $\frac{\partial\tilde{t}_i(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}}$ 的前 n_i 行等于0，$i=1,2,\cdots\nu$。

(ii) $t_\nu(\mathbf{x})$ 是 $\tilde{t}_1$ 的前 n_ν 个分量所成的子向量；$t_{\nu-1}(\mathbf{x})$ 是 $\tilde{t}_2$ 的前 n_ν 个分量和 $\tilde{t}_1$ 的第 $n_\nu+1$ 到 $n_{\nu-1}$ 分量所成的子向量；

………

$t_1(\mathbf{x})$ 是 $\tilde{t}_\nu$ 的前 n_ν 个分量，$\tilde{t}_{\nu-1}$ 的从 $n_\gamma+1$ 到 $n_{\gamma-1}$ 分量…，$\tilde{t}_1$ 的从 n_2+1 到最后分量所成的子向量。

这时，由 $t_i(\mathbf{x})$，$i=1,2,\cdots,\nu$，所组成的变换

$$\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{x}}_\gamma\\ \vdots\\ \bar{\mathbf{x}}_2\\ \bar{\mathbf{x}}_1\end{bmatrix}=T(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}t_\gamma(\mathbf{x})\\ \vdots\\ t_2(\mathbf{x})\\ t_1(\mathbf{x})\end{bmatrix}:\ \Omega\to\bar{\Omega} \tag{3.20}$$

是可微的可逆变换；

(iii) $\frac{\partial t_1(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})=\mathbf{v}$ 对任意 $\mathbf{v}\in R^m$ 都有解

$$\mathbf{u}=\mathbf{k}(\mathbf{x},\mathbf{v}),$$

则系统(3.18)控制等价于如下线性系统

$$\begin{cases}\dot{\bar{\mathbf{x}}}_\nu=[I_\nu\quad O]\bar{\mathbf{x}}_{\nu-1}\\ \quad\vdots\\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2=[I_2\quad O]\bar{\mathbf{x}}_1\\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_1=\mathbf{v}\end{cases} \tag{3.21}$$

其中，$\bar{\mathbf{x}}_i\in R^{n_i}$，$I_i$ 是 n_i 阶单位阵，$i=1,2,\cdots,\nu$。

(必要性) 如果存在 ν 次可微的可逆变换(3.20)和满足

$$det\left(\frac{\partial\mathbf{k}(\mathbf{x},\mathbf{v})}{\partial\mathbf{v}}\right)\neq0,\ \forall\,\mathbf{x}\in\Omega,\ \forall\,\mathbf{v}\in R^m \tag{3.22}$$

的状态反馈 $\mathbf{u}=\mathbf{k}(\mathbf{x},\mathbf{v})$，把系统(3.18)等价地变成系统(3.21)，必存在 $m=n_1$ 个函数 $l_1(\mathbf{x})$，…，$l_m(\mathbf{x})$，由此生成的向量列 $\tilde{t}_i(\mathbf{x},\mathbf{u})$，$i=1,2,\cdots,\nu$，满足条件(i)，而且变换式(3.20)中的向量 $t_i(\mathbf{x})$，$i=1,2\cdots,\nu$ 是按(ii)产生，而状态反馈 $\mathbf{u}=\mathbf{k}(\mathbf{x},\mathbf{v})$ 满足方程 $\frac{\partial t_1(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})=\mathbf{v}$

定理 4 设观测系统

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathbf{x}\in R^n\\ \mathbf{y}=\mathbf{h}(\mathbf{x}),\mathbf{y}\in R^p\end{cases} \tag{3.23}$$

中 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 满足解的存在唯一性条件，$\mathbf{f}(\mathbf{x})$、$\mathbf{h}(\mathbf{x})$充分可微。

如果存在整数组 $\mu>0,p=n_1\geq n_2\geq\cdots\geq n_\mu>0$ 及 μ 个 p 维充分可微的向量 $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{h})$…，$\tilde{\mathbf{g}}_\mu(\mathbf{h})$，使得由 $\mathbf{h}(\mathbf{x})$和 $\tilde{\mathbf{g}}_i(\mathbf{h}(\mathbf{x}))$ 产生的向量组

$$\begin{cases}\tilde{t}_1(\mathbf{x})=\mathbf{h}(\mathbf{x})\\ \tilde{t}_{i+1}(\mathbf{x})=\frac{\partial\tilde{t}_i(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x})+\tilde{\mathbf{g}}_i(\mathbf{h}(\mathbf{x})),\\ i=1,2,\cdots\mu-1\end{cases} \tag{3.24}$$

满足

(i) $\tilde{t}_2(\mathbf{x})$ 的后 n_1-n_2 个分量为0；$\tilde{t}_3(\mathbf{x})$的前 n_2 个分量中后 n_2-n_3 个分量为0；…；$\tilde{t}_\mu$ 的前 $n_{\mu-1}$ 个分量中后 $n_{\mu-1}-n_\mu$ 个分量为0；

(ii) 记 $t_i(\mathbf{x})$为 $\tilde{t}_i(\mathbf{x})$的前 n_i 个分量所成的子向量 $i=1,2,\cdots,\mu$。这时，

$$\bar{\mathbf{x}}=T(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}t_1(\mathbf{x})\\ \vdots\\ t_\mu(\mathbf{x})\end{bmatrix} \tag{3.25}$$

为可微的可逆变换，那么系统(3.23)完全能观。进一步满足

(iii) $\dfrac{\partial t_\mu(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x})+\mathbf{g}_\mu(\mathbf{h}(\mathbf{x}))=0$,

其中，$\mathbf{g}_\mu(\mathbf{h})$ 为 $\tilde{\mathbf{g}}_\mu(\mathbf{h})$ 的前 n_μ 个分量所成的子向量，那么系统（3.23）观测等价于如下线性系统：

$$\begin{cases}\dot{\bar{\mathbf{x}}}_1=\begin{bmatrix}I_2\\0\end{bmatrix}\bar{\mathbf{x}}_2\\ \vdots\\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\mu-1}=\begin{bmatrix}I_\mu\\0\end{bmatrix}\bar{\mathbf{x}}_\mu\\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_\mu=0\\ \mathbf{y}=\bar{\mathbf{x}}_1\end{cases}\tag{3.26}$$

四、应用例

1. 最优控制问题

考察如下最优控制问题

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2, & x_1(0)=x_1^0\\ \dot{x}_2=f(x_1,x_2)+u, & x_2(0)=x_2^0,\end{cases}$$

$$|u|\leqslant 1,$$

$$J=S(x_1(T),x_2(T)),(T\text{—固定})$$

经状态反馈 $u=-f(x_1,x_2)+v$ 后系统变成

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=v, \quad |v-f(x_1,x_2)|\leqslant 1\end{cases}$$

$$J=S(x_1(T),x_2(T))$$

由于 v 的约束可写成

$$g_1(x_1,x_2)=v-f(x_1,x_2)-1\leqslant 0,$$

$$g_2(x_1,x_2)=-v+f(x_1,x_2)-1\leqslant 0.$$

根据文献[3]对应的 Hamilton 量为

$$H=\psi_1x_2+\psi_2v+\mu_1g_1(x_1,x_2)+\mu_2g_2(x_1,x_2)$$

其中
$$\mu_1\begin{cases}>0, & g_1=0,\\ =0, & g_1<0,\end{cases}$$
$$\mu_2\begin{cases}>0, & g_2=0,\\ =0, & g_2<0.\end{cases}$$

显然，μ_1，μ_2 不能同时非0。对应的共轭方程为

$$\begin{cases}\dot{\psi}_1=(\mu_1-\mu_2)\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1},\\ \psi_1(T)=-\dfrac{\partial S}{\partial x_1}\\ \dot{\psi}_2=-\psi_1+(\mu_1-\mu_2)\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\\ \psi_2(T)=-\dfrac{\partial S}{\partial x_2}\end{cases}$$

这是一个常系数线性非齐次方程组，比原问题的共轭方程组容易计算。

2. 非线性系统的观测器

如果系统(3.23)满足定理4的条件，那么经变换式(3.25)，得

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}_1=\begin{bmatrix}I_2\\0\end{bmatrix}\mathbf{x}_2-\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1)\\ \vdots\\ \dot{\mathbf{x}}_{\mu-1}=\begin{bmatrix}I_\mu\\0\end{bmatrix}\mathbf{x}_\mu-\mathbf{g}_{\mu-1}(\mathbf{x}_1)\\ \dot{\mathbf{x}}_\mu=\qquad -\mathbf{g}_\mu(\mathbf{x}_1)\\ \mathbf{y}=\mathbf{x}_1\end{cases}\tag{4.1}$$

从而按文献[2]的定理3.2构造出状态观测器。

对系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=f_1(x_1)x_2+f_2(x_1)\\ y=x_1\end{cases}$$

取 $$g_1(x_1)=-\int_0^{x_1}f_1(z)dz$$

$$g_2(x_1)=-f_2(x_1)$$

$$T(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2+g_1(x_1)\end{bmatrix}$$

对系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=f_1(x_1)x_3+f_2(x_1)x_2\\ \qquad +f_1'(x_1)x_2+f_3(x_1)\\ y=x_1\end{cases}$$

（下转第65页）

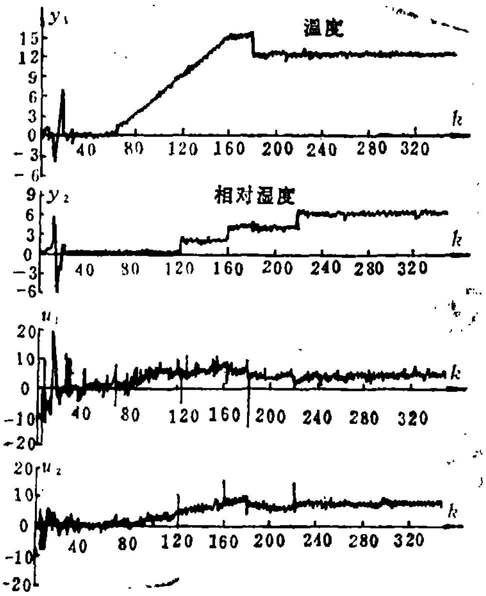

图 3

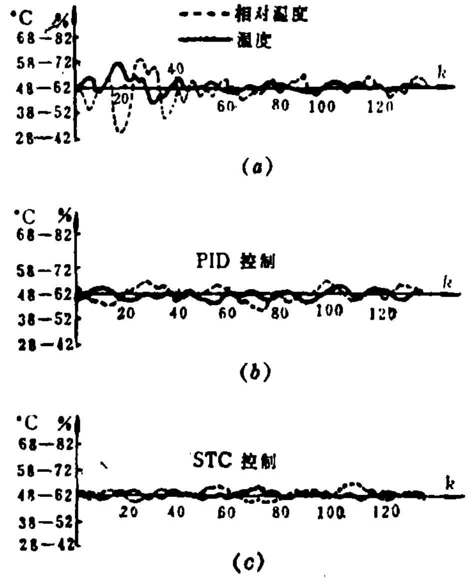

图 4

参 考 文 献

〔1〕 H.N.Koivo,A Multivariable Self—tuning Controller,Automatica,Vol.16.1980,PP351—366

〔2〕 韩光文，辨识与参数估计，国防工业出版社，1980 年

(上接第 32 页)

取

$$g_1(x_1) = -\int_0^{x_1} f_1(z)dz$$

$$g_2(x_1) = -\int_0^{x_1} f_2(z)dz$$

$$g_3(x_1) = -f_3(x_1)\quad ;$$

$$T(x_1,\ x_2,\ x_3) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + g_1(x_1) \\ x_3 + g'_1(x_1)x_2 + g_2(x_1) \end{bmatrix}$$

那么均被化成(4.1)形式的系统，从而可以构造出状态观测器。

参 考 文 献

〔1〕 A.Isidori,Nonlinear Control Systems, An Introduction, Springer-Verlag, Berlin,1985

〔2〕 韩京清，线性系统的结构与反馈系统计算，全国控制理论及其应用学术交流会论文集，科学出版社，1981年，第 43—55 页

〔3〕 A.E. 布赖森、何毓琦，应用最优控制——最优化、估计、控制，国防工业出版社，1982年