

# 跟踪 - 微分器的离散形式<sup>\*</sup>

韩京清 袁露林

(中国科学院系统科学研究所, 北京 100080)

**摘要** 本文利用“等时区方法”确定出二阶离散系统最速控制综合函数, 并依此构造出离散形式的跟踪 - 微分器. 数值仿真表明, 这种跟踪 - 微分器跟踪输入信号既快速、无超调, 又无颤振, 且能给出较好的微分信号.

**关键词** 跟踪 - 微分器, 离散系统, 最速控制, 综合函数.

## 1 引言

若能合理提取“微分”信号, 就能提高许多实用控制器的性能, 并且也能大大简化控制器的设计. 基于这种想法, 文 [1] 根据二阶连续系统最速控制综合函数提出了称为“跟踪 - 微分器”的二阶动态结构. 纯开关形式的这种结构容易引起颤振. 若在开关线附近加适当线性区域会得到好的效果; 在离散化的数值仿真中发现跟踪性能和微分品质对线性区间的大小比较敏感. 通过数值仿真可以确定出这个线性区间的合理值, 但在文 [1] 未能给出其理论依据. 大量的数值控制器是针对大采样的离散系统的, 这就需要仔细研究跟踪 - 微分器的离散形式.

文 [2,3] 用“等时区方法”讨论离散系统的最速控制问题时, 作为例子, 讨论了二阶系统最速控制的综合问题, 但是没有具体描述控制量取线性值的区域和便于计算的综合函数. 本文采用文 [2, 3] 的方法, 对二阶离散系统进一步明确了最速控制取非极值的线性区域, 从而给出最速控制综合函数的显示表达式. 然后用此综合函数构造出二阶离散的跟踪 - 微分器. 数仿真表明, 这个跟踪 - 微分器能够快速跟踪输入信号, 无超调又无颤振, 且能给出较好品质的微分信号.

第二节用“等时区方法”确定离散系统的最速控制综合函数; 第三节给出离散跟踪 - 微分器的形式和仿真结果; 第四节是结束语.

## 2 二阶离散系统最速控制综合函数

对两个积分器串联的二阶连续系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u| \leq r$$

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助课题.

1996 年 4 月 22 日收到.

进行离散化得

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} x_1(k) + hx_2(k) \\ x_2(k) + hu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} u, \quad |u| \leq r, \quad (1)$$

其中  $h$  为采样步长,  $x_1(k), x_2(k)$  为第  $k$  步  $T = kh$  时的状态,  $x(k) = (x_1(k), x_2(k))^T$ . 这个方程以  $x(0) = (x_1(0), x_2(0))^T$  为初值的解的表达式为

$$\begin{aligned} x(k+1) = & \begin{pmatrix} 1 & kh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(0) + \begin{pmatrix} 1 & (k-1)h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} u(0) \\ & + \cdots + \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} u(k-1) + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} u(k), \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $u(i)$  为第  $i$  步的控制量. 所以在  $k+1$  步内到达原点的可能的初始点为

$$\begin{aligned} x(0) = & \begin{pmatrix} kh^2 \\ -h \end{pmatrix} u(k) + \begin{pmatrix} (k-1)h^2 \\ -h \end{pmatrix} u(k-1) \\ & + \cdots + \begin{pmatrix} 2h^2 \\ -h \end{pmatrix} u(1) + \begin{pmatrix} h^2 \\ -h \end{pmatrix} u(0), \end{aligned} \quad (3)$$

在控制量  $u$  受限制  $|u| \leq r$  的情况下,  $T$  时间内能到达原点的所有初始点  $(x_1, x_2)$  的全体  $G(T)$  称作  $T$ -等时区<sup>[3,4]</sup>. 下面把  $G(T)$  改记为  $G(k)$ .

根据文 [3], 等时区  $G(k)$  是凸多边形.  $k \leq 5$  时  $G(k)$  的形状见图 1:  $G(2)$  是以  $a_{-2}, b_{+2}, a_{+2}, b_{-2}$  为顶点的平行四边形;  $G(3)$  是一个六边形等等.

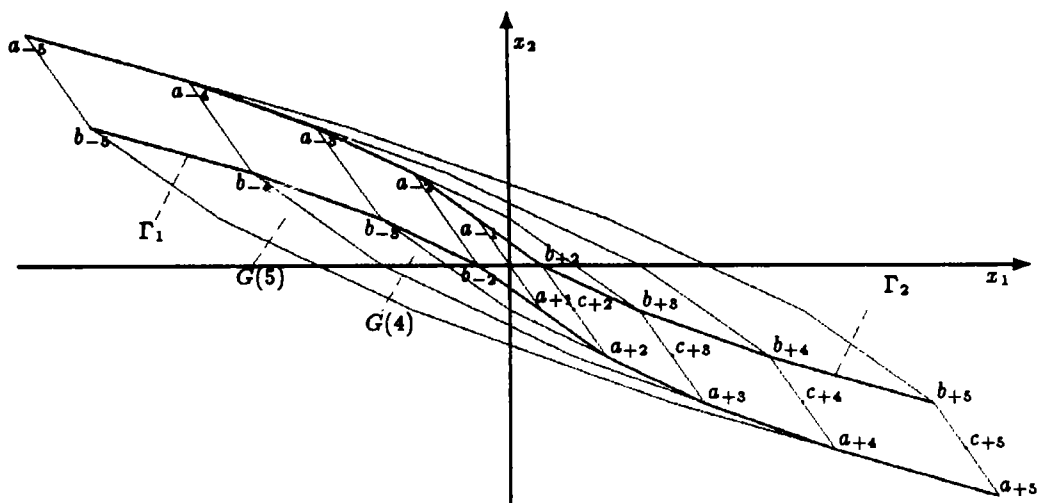


图 1 系统 (1) 的等时区  $G(1)$  到  $G(5)$  示意图

在图 1 中, 连结  $a_{+k}, a_{+(k-1)}, \dots, a_{+1}, 0$  的折线和连接  $a_{-k}, a_{-(k-1)}, \dots, a_{-1}, 0$  的折线是控制分别取  $+r$  和  $-r$  而到达原点的两条最速轨线. 点  $b_{+i}(b_{-i}), i \geq 2$  是第一步取  $u = -r(u = +r)$  后全取  $u = +r(u = -r)$  而到达原点的初始点; 线段  $[a_{+i}, b_{+i}][a_{-i}, b_{-i}], i \geq 2$  的中点  $c_{+i}(c_{-i})$  是第一步取  $u = 0$  后全取  $u = +r(u = -r)$  而到达原点的初始点. 连接

$\cdots, a_{+k}, a_{+(k-1)}, \cdots, a_{+2}, b_{-2}, b_{-3}, \cdots, b_{-(k-1)}, b_{-k}, \cdots$  的折线  $\Gamma_1$  下方是控制量  $u = +r$  的区域, 连接  $\cdots, a_{-k}, a_{-(k-1)}, \cdots, a_{-2}, b_{+2}, b_{+3}, \cdots, b_{+(k-1)}, b_{+k}, \cdots$  的折线  $\Gamma_2$  上方是控制量  $u = -r$  的区域. 至于折线  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  所限定的区域内部, 当  $k \geq 2$  时, 从  $\alpha a_{+k} + (1-\alpha)b_{+k}$  出发,  $0 < \alpha < 1$ , 取控制量  $u = \alpha r - (1-\alpha)r = (2\alpha-1)r$ , 则下一步到达  $a_{+(k-1)}$ . 由于折线段  $a_{+k}, a_{+(k-1)}, \cdots, a_{+1}, 0$  和  $a_{-k}, a_{-(k-1)}, \cdots, a_{-1}, 0$  都是最速轨线段, 根据动态规划最优性原理,  $[a_{+k}, b_{+k}]$  和  $[a_{-k}, b_{-k}]$  线段上的控制量  $u = (2\alpha-1)r$  和  $u = -(2\alpha-1)r$  是最速控制量, 因此折线  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  所限定的带形区域是控制量取  $[-r, r]$  中间值的线性区域.

根据上述性质, 下面确定最速控制的综合函数.

在等时区  $G(2)$  之外, 由 (3) 式可得点  $a_{\pm i}, b_{\pm i}, c_{\pm i}, i \geq 2$ , 分别位于下面六条抛物线上

$$x_1 = \frac{x_2^2 - hr x_2}{2r}, \quad x_2 < 0, \quad (4)$$

$$x_1 = -\frac{x_2^2 + hr x_2}{2r}, \quad x_2 > 0, \quad (5)$$

$$x_1 = \frac{x_2^2 - 5hr x_2 + 2h^2 r^2}{2r}, \quad x_2 < 0, \quad (6)$$

$$x_1 = -\frac{x_2^2 + 5hr x_2 + 2h^2 r^2}{2r}, \quad x_2 > 0, \quad (7)$$

$$x_1 = \frac{x_2^2 - 3hr x_2}{2r}, \quad x_2 < 0, \quad (8)$$

$$x_1 = -\frac{x_2^2 + 3hr x_2}{2r}, \quad x_2 > 0. \quad (9)$$

今作坐标变换

$$z_1 = x_1 + hx_2, \quad z_2 = x_2,$$

则上述六条抛物线方程可合并成如下三个方程

$$z_2 - \text{sign}(z_1) \frac{r}{2} \left( h - \sqrt{\frac{8|z_1|}{r} + h^2} \right) = -\text{sign}(z_1) hr, \quad (10)$$

$$z_2 - \text{sign}(z_1) \frac{r}{2} \left( h - \sqrt{\frac{8|z_1|}{r} + h^2} \right) = \text{sign}(z_1) hr, \quad (11)$$

$$z_2 - \text{sign}(z_1) \frac{r}{2} \left( h - \sqrt{\frac{8|z_1|}{r} + h^2} \right) = 0. \quad (12)$$

若记  $z = (z_1, z_2)^T$ , 且

$$g(z) = z_2 - \text{sign}(z_1) \frac{r}{2} \left( h - \sqrt{\frac{8|z_1|}{r} + h^2} \right).$$

那么, 当  $i \geq 2$  时. 即  $G(2)$  之外, 也即  $|z_1| \geq h_2 r$  时, 就有

$$g(c_{+i}) = g(c_{-i}) = 0; \quad g(a_{+i}) = g(b_{-i}) = hr; \quad g(a_{-i}) = g(b_{+i}) = -hr.$$

因此, 这时的最速控制综合函数可表示成

$$u(z_1, z_2) = -r \text{sat}(g(z), hr),$$

其中

$$\text{sat}(x, \delta) = \begin{cases} \text{sign}(x), & |x| > \delta, \\ \frac{x}{\delta}, & |x| \leq \delta. \end{cases}$$

由于等时区  $G(2)$  内的点是两步到达原点的初始点，其最速控制就是由关系式

$$\begin{aligned} 0 &= x_1(2) = x_1(1) + hx_2(1) = x_1(0) + hx_2(0) + h(x_2(0) + hu(0)), \\ 0 &= x_2(2) = x_2(1) + hu(1) = x_2(0) + hu(0) + hu(1) \end{aligned}$$

解出的

$$u(0) = -\frac{x_1(0) + 2hx_2(0)}{h^2} = -\frac{z_1(0) + hz_2(0)}{h^2},$$

其中

$$|z_1(0)| \leq h^2r, |z_2(0)| \leq h^2r.$$

再记  $g(z) = \frac{z_1}{h} + z_2$ ，那么  $G(2)$  内的最速控制量又可表示成

$$u(z_1, z_2) = -r\text{sat}(g(z), hr).$$

于是，在原坐标系中，当  $r, h$  给定时，在  $(x_1, x_2)$  点上的最速控制综合函数可按如下公式计算

$$\begin{aligned} \delta &= hr; \quad \delta_1 = h\delta; \\ z_1 &= x_1 + hx_2; \quad z_2 = x_2; \\ g(z) &= \begin{cases} z_2 - \text{sign}(z_1) \frac{r(h - \sqrt{\frac{8|z_1|}{r} + h^2})}{2}, & |z_1| \geq \delta_1, \\ z_2 + \frac{z_1}{h}, & |z_1| \leq \delta_1, \end{cases} \\ u(x_1, x_2) &= -r\text{sat}(g(z), \delta). \end{aligned} \tag{13}$$

而这个最速控制轨线分布如下图：

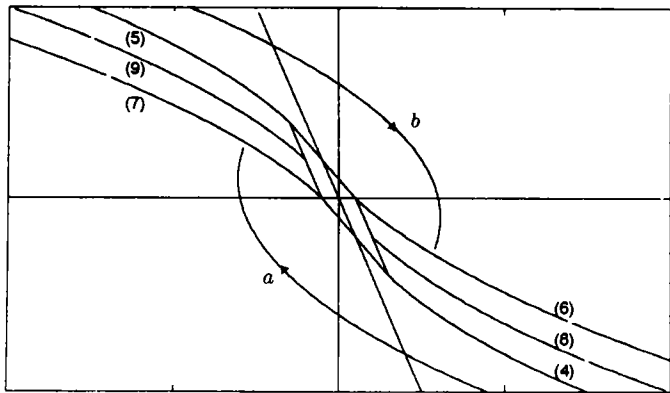


图 2 最速控制轨线分布图

如图 2 所示, 当系统的初始点在抛物线 (4),(7) 和抛物线 (5),(6) 所限定的线性区域外时, 控制取极值  $+r$  或  $-r$ , 使系统的状态到达线性区域内 (例如轨线 a 和 b 所示); 然后控制量取  $[-r, r]$  之间的线性值, 使系统的状态到达曲线 (4) 或 (5), 并在曲线 (4) 或 (5) 上运动, 从而到达等时区  $G(2)$  内, 最后在  $G(2)$  内经一步或两步转换到原点.

3 离散跟踪 - 微分器和数值仿真

按文 [1] 的方法, 由离散最速控制综合函数 (13), 可构造出关于输入信号  $v(t)$  的跟踪 - 微分器的如下离散形式:

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= x_1(k) + hx_2(k); \\ \delta &= hr, \quad \delta_1 = h\delta; \\ e(k) &= x_1(k) - v(k); \\ z_1(k) &= e(k) + hx_2(k); \\ g(k) &= \begin{cases} x_2(k) - \text{sign}(z_1(k)) \frac{r(h - \sqrt{\frac{8|z_1(k)|}{r} + h^2})}{2}, & |z_1(k)| \geq \delta_1, \\ x_2(k) + \frac{z_1(k)}{h}, & |z_1(k)| \leq \delta_1, \end{cases} \\ x_2(k+1) &= x_2(k) - hrsat(g(k), \delta).\end{aligned}$$

(14)

下面给出几个具体仿真例子.

- 1 正弦输入信号:  $v(k) = \sin\left(\frac{3.14k}{50}\right)$ .
- 2 方波输入信号:  $v(k) = \begin{cases} 1, & 100m < k \leq (100m + 50), \\ -1, & 100m + 50 < k \leq 100(m + 1), \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \dots$

仿真结果如图 3, 图 4 所示. 其中  $x_1$  是跟踪信号,  $x_2$  是近似微分信号, 从上面的仿真可以看出, 二阶离散跟踪微分器具有如下优点:

1. 由于利用的是最速控制方案, 离散跟踪微分器对信号的跟踪是无超调跟踪, 即使跟踪阶跃信号也没有超调. 因此将离散跟踪微分器用于控制系统中安排过渡过程将十分有利.
2. 在离散跟踪微分器中控制的线性区间的大小可直接确定.

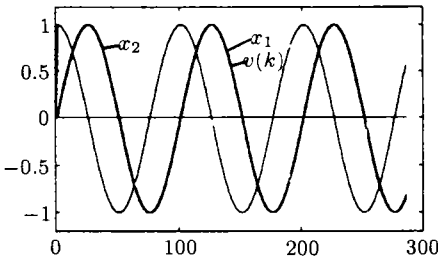


图 3 输入为正弦信号时的跟踪与微分曲线

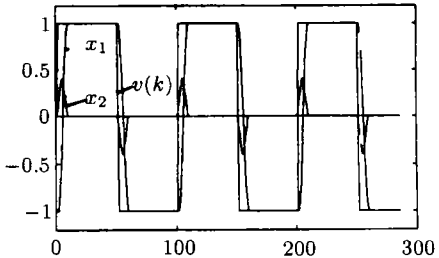


图 4 输入为方波信号时的跟踪与微分曲线

## 4 结束语

本文用离散系统最速控制的综合函数给出了离散形式的跟踪 - 微分器. 明确地解决了连续跟踪 - 微分器的纯开关函数换成线性饱和函数时的线性区间的大小问题, 为避免跟踪 - 微分器数值计算中的颤振现象提供了理论依据. 本文提出的离散跟踪 - 微分器也为离散控制对象给出了合理提取微分信号的有效方法. 仿真结果表明, 本文给出的离散跟踪 - 微分器在跟踪性能、微分品质、消颤现象等方面都有很好效果.

## 参 考 文 献

- [1] 韩京清, 王伟. 非线性跟踪 - 微分器. 系统科学与数学, 1994, 14(2): 177-183.
- [2] 宋健, 韩京清, 唐志强. 断续系统最速控制的综合. 1962 年全国控制理论“龙王庙”会议论文.
- [3] 钱学森, 宋健. 工程控制论 (上册). 北京: 科学出版社, 1980.
- [4] 宋健, 韩京清. 线性最速控制系统的分析与综合理论. 数学进展, 1962, 5(4): 264-284.

## THE DISCRETE FORM OF TRACKING-DIFFERENTIATOR

Han Jinqing      Yuan Lulin

(*Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing 100080*)

**Abstract** In this paper, the synthetic function for the time optimal control of the second-order discretetime system is obtained by the Isochronic Region method. Based on this function, the discrete form of tracking-differentiator is constructed. Numerical simulation shows that this discrete form of tracking-differentiator can quickly track an input signal without overshoot and chattering and can produce a good differential signal.

**Key words** Tracking-differentiator, discrete systems, time optimum control, synthetic function.