

# 非线性跟踪-微分器\*

韩京清 王 伟

(中国科学院系统科学研究所, 北京 100080)

## 一、前 言

在实际工程问题中, 常存在由不连续或带随机噪声的量测信号合理地提取连续信号及微分信号的问题。如实现PID 调节, 需要由不连续参考输入合理地提取微分信号; 目标跟踪需要从雷达的位置量测信号中合理地提取连续的位置信号及速度信号, 等等。当然, 过去采用线性微分器及线性滤波等手段, 提出了不少解决问题的办法, 然而“线性”办法还不能令人满意地解决诸如此类问题。能否在“开发利用非线性特性”的征途上探讨解决问题的方法呢? 基于这种想法, 文[1]利用二阶最速开关系统构造出跟踪不连续输入信号并提取“近似微分”信号的“机构”, 提出了“非线性跟踪-微分器”的概念, 并根据数值仿真得到了有关信号跟踪的命题, 但没能给出上述命题的证明。

本文第二节给出非线性跟踪-微分器的一般形式, 且在较一般的条件下, 对非线性跟踪-微分器的信号跟踪命题给出严格证明。指出由跟踪-微分器得到的微分信号是输入信号广义导数的一种光滑逼近。第三节介绍几种具体的非线性跟踪-微分器, 以实现跟踪及微分提取。第四节对具体的非线性跟踪-微分器进行数值仿真研究, 以便确定其中参数的变化范围及参数间的相互关系。仿真表明, 适当构造非线性函数, 是可以得到具有较高品质的跟踪-微分器。

## 二、非线性跟踪-微分器的一般形式及基本性质

所谓跟踪-微分器是这样的机构: 对它输入一信号  $v(t)$ , 它将输出两个信号  $z_1$  和  $z_2$ , 其中  $z_1$  跟踪  $v(t)$ , 而  $z_2 = \dot{z}_1$ , 从而把  $z_2$  作为  $v(t)$  的“近似微分”。那么如何来设计这样的系统, 同时由跟踪-微分器得到的信号及微分信号与原信号有何关系? 我们将通过下面的定理来回答这些问题。

**定理 1.** 若系统

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = f(z_1, z_2) \end{cases} \quad (1)$$

的任意解均满足:  $z_1(t) \rightarrow 0, z_2(t) \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ), 则对任意有界可积函数  $v(t)$  和任意常数  $T > 0$ , 系统

\* 国家自然科学基金资助课题。

1992 年 7 月 25 日收到, 1993 年 2 月 17 日收到修改稿。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = R^2 f\left(x_1 - v, \frac{x_2}{R}\right) \end{cases} \quad (2)$$

的解  $x_1(t)$  满足

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^T |x_1(t) - v(t)| dt = 0.$$

为证明这个定理,先证明如下引理:

**引理 1.** 设  $z(t)$  是  $[0, \infty)$  上的连续函数,且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0, \quad (3)$$

若令

$$x(t) = z(Rt), \quad R > 0. \quad (4)$$

则对任意给定的  $T > 0$ , 有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^T |x(t)| dt = 0.$$

证. 利用积分变量替换很易证得结论.

根据引理 1 及变换:

$$\begin{cases} s = \frac{t}{R}, \\ x_1(s) = z_1(t) + c, \\ x_2(s) = R z_2(t). \end{cases} \quad (5)$$

立即得到

**引理 2.** 若系统

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = f(z_1, z_2) \end{cases} \quad (6)$$

的任意解满足:  $z_1(t) \rightarrow 0, z_2(t) \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ), 则对任意固定的常数  $c$ , 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = R^2 f\left(x_1 - c, \frac{x_2}{R}\right) \end{cases} \quad (7)$$

的解  $x_1(t)$  对于任意  $T > 0$ , 有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^T |x_1(t) - c| dt = 0.$$

**定理 1 的证明.** 当  $v(t)$  为常数时,由引理 2 知定理结论成立.

对一般的有界可积函数  $v(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , 它作为  $L^1[0, T]$  的元,对任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在一连续函数  $\phi(t) \in C[0, T]$ , 使得

$$\int_0^T |v(t) - \phi(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2},$$

对此  $\phi(t)$ , 又有一简单函数列  $\varphi_n(t)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 一致收敛于它, 因此存在整数  $N_1$ ,

使得, 当  $M > N_1$  时,  $|\phi(t) - \varphi_M(t)| < \frac{\varepsilon}{4T}$ , 从而

$$\int_0^T |v(t) - \varphi_M(t)| dt \leq \int_0^T |v(t) - \phi(t)| dt + \int_0^T |\phi(t) - \varphi_M(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (8)$$

由于  $\phi(t)$  为连续函数, 简单函数  $\varphi_M(t)$  将把区间  $[0, T]$  划分为有限个子区间, 不妨记为  $I_i, i = 1, 2, \dots, m$ , 且  $\varphi_M$  在每一个子区间上取常值, 由引理 2 知, 存在  $R_0 > 0$ , 当  $R > R_0$  时

$$\int_{I_i} |x_1(t) - \varphi_M(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2m}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

从而

$$\int_0^T |x_1(t) - \varphi_M(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (9)$$

因此, 当  $R > R_0$  时, 有

$$\int_0^T |x_1(t) - v(t)| dt < \int_0^T |x_1(t) - \varphi_M(t)| dt + \int_0^T |\varphi_M(t) - v(t)| dt < \varepsilon.$$

即定理得证.

对高阶系统有

**定理 2.** 若系统

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1, \\ \dots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n, \\ \dot{z}_n = f(z_1, z_2, \dots, z_n) \end{cases} \quad (10)$$

的解均满足  $z_i(t) \rightarrow 0, (t \rightarrow \infty), i = 1, 2, \dots, n$ , 则对任意有界可积函数  $v(t)$  和任意常数  $T > 0$ , 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = R^n f\left(x_1 - v(t), \frac{x_2}{R}, \dots, \frac{x_n}{R^{n-1}}\right) \end{cases} \quad (11)$$

的解  $x_1(t)$  满足

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^T |x_1(t) - v(t)| dt = 0.$$

证. 只要对系统(10)作如下变换:

$$\begin{cases} s = \frac{t}{R}, \\ x_1(s) = z_1(t) + c, \\ x_2(s) = Rz_2(t), \\ \dots \\ x_n(s) = R^{n-1}z_n(t), \end{cases} \quad (12)$$

即可得证.

定理 1 和 2 表明,  $x_1(t)$  平均收敛于  $v(t)$ . 若将有界可积函数  $v(t)$  看成广义函数,

则据文[2]  $x_2(t)$  ( $=\dot{x}_1(t)$ ) 弱收敛于  $v(t)$  的广义导数。这样,如果我们把系统(2)或系统(11)作为非线性跟踪-微分器(显然这是文[1]中结论的推广),则由跟踪-微分器系统(2)(或系统(11))得到的函数及微分,分别是在平均收敛和弱收敛意义下,对原函数及其导数(或广义导数)的光滑逼近。

根据这一结论,在 PID 调节原理中,若参考输入  $v(t)$  不连续或不可微,则将其看成广义函数,而 PID 中的“D”可以用逼近广义函数  $v(t)$  的光滑函数  $x_1(t)$  的导数(此导数弱收敛于广义函数  $v(t)$  的广义导数)来逼近。这样对不可微函数提取的“近似微分”就有了明确的涵义。

从定理的证明过程可知,结论的成立对函数  $f(z_1, z_2)$  (或  $f(z_1, \dots, z_n)$ ) 的具体形式并没有做更多的要求,只要保证系统(1)(或(10))的任意解满足  $z_i(t) \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ),  $i = 1, 2, \dots, n$  即可,从而我们得到非线性跟踪-微分器的几种具体实现。

### 三、几种具体的非线性跟踪-微分器

#### 1. 对非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a_1 |x_1|^{\alpha} \text{sign}(x_1) - a_2 |x_2|^{\alpha} \text{sign}(x_2) \end{cases} \quad (13)$$

不难验证,当  $a_1, a_2, \alpha > 0$  时,系统在  $(0, 0)$  处渐近稳定。这样可以得到如下形式的非线性跟踪-微分器:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -R \left[ a_1 |x_1 - v(t)|^{\alpha} \text{sign}(x_1 - v(t)) + a_2 \left( \frac{|x_2|}{\sqrt{R}} \right)^{\alpha} \text{sign}(x_2) \right]. \end{cases} \quad (14)$$

当  $\alpha = 1$  时,系统(14)便是线性跟踪-微分器。对  $0 < \alpha < 1$  所作的数值仿真表明,此系统在原点附近常发生颤振,可以加一点线性区间改造成:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -R \left[ \text{fal}(x_1 - v, \alpha, \delta) + \beta \frac{\text{fal}(x_2, \alpha, \delta)}{R^{\alpha}} \right]. \end{cases} \quad (15)$$

其中

$$\text{fal}(z, \alpha, \delta) = \begin{cases} |z|^{\alpha} \text{sign}(z), & |z| > \delta, \\ \frac{z}{\delta^{1-\alpha}}, & |z| \leq \delta, \quad \delta > 0. \end{cases} \quad (16)$$

II. 由二阶最速开关系统,可以得到如下二阶跟踪-微分器:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -R \text{sign} \left( x_1 - v(t) + \frac{|x_2| x_2}{2R} \right). \end{cases} \quad (17)$$

为了避免在原点附近的颤振,将符号函数  $\text{sign}$  改为线性饱和函数  $\text{sat}$  就得到有效的二阶跟踪-微分器:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -R \text{sat} \left( x_1 - v(t) + \frac{|x_2| x_2}{2R}, \delta \right). \end{cases} \quad (18)$$

其中

$$\text{sat}(A, \delta) = \begin{cases} \text{sign}(A), & |A| > \delta, \\ \frac{A}{\delta}, & |A| \leq \delta, \delta > 0. \end{cases} \quad (19)$$

III. 由三阶快速系统,可以得到相应的三阶跟踪-微分器:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -R \text{sign} \left( x_1 - v - \frac{x_3^2}{6R^2} + A \left( \frac{x_3}{R} + S \sqrt{\frac{A}{R}} \right) \right). \end{cases} \quad (20)$$

其中

$$S = \text{sign} \left( x_2 + \frac{|x_3| x_3}{2R} \right), \quad (21)$$

$$A = S x_2 + \frac{x_3^2}{2R}. \quad (22)$$

实际应用系统(20)时,同改造系统(17)一样,把符号函数  $\text{sign}$  改为线性函数  $\text{sat}$  就得到有效的三阶跟踪-微分器:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -R \text{sat} \left( x_1 - v(t) - \frac{x_3^2}{6R^2} + A \left( \frac{x_3}{R} + S \sqrt{\frac{A}{R}} \right), \delta \right). \end{cases} \quad (23)$$

其中  $S, A$  分别由(21), (22)给出,

用有限个跟踪-微分器串联的方法,理论上讲,可以得到二阶,甚至是更高阶的微分信号,但由于存在如何克制随机噪声影响的问题,目前尚未得到理想的结果。

#### 四、数值仿真

定理是  $R$  在极限状态下成立的,但具体实现时,  $R$  只能取有限值。那么,要取得满意的效果,  $R$  应该取多大,同时跟踪+微分器中各参数间又应有何关系? 我们将通过数值仿真来进行分析。

1. 跟踪效果要好,  $R$  要大,但  $R$  的过大会给微分信号增加高频噪声。对于输入为正弦函数的情形,我们得到  $R$  的取值范围如下:

1) 在输入不含噪声时,跟踪-微分器 I (当  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 1.14$  时)要求  $R$  在 200—500;跟踪-微分器 II 要求  $R$  在 10—70;跟踪-微分器 III 要求  $R$  在 300—2500。

2) 当被跟踪信号含有 1% 的噪声时  $R$  的范围分别是: 100—200; 2.5—5; 25—100。当噪声加大时,只要  $R$  不变小,跟踪不会受影响,微分信号震荡加大。折中的办法是,在保证

跟踪的前提下,  $R$  应尽可能小。

2. 参数  $\delta$  对微分信号有很大影响, 要保证微分信号尽可能不受  $\delta$  的影响,  $\delta$  与  $R$  之间要有如下关系, 当  $R$  增大时,  $\delta$  要增大相应的倍数。具体地说, 跟踪-微分器 I,  $\delta = 0.00005R$ ; 跟踪-微分器 II,  $\delta = 0.00005R$ ; 跟踪-微分器 III,  $\delta = 0.000001R$ 。

3. 非线性跟踪-微分器 I 中参数  $\alpha, \beta$  的变化对跟踪、微分效果亦有重要影响。当被跟踪信号为常数时, 要保证跟踪且没有超调,  $\alpha$  和  $\beta$  之间大致应满足:  $\beta = 3.1(\alpha - 0.5) + 1.17$ , 其中  $0.5 < \alpha < 1.35$ 。而且  $\alpha \neq 1$  与  $\alpha = 1$  相比, 能明显改善跟踪品质, 同时较小的  $R$  就能取得较满意的效果 ( $\alpha = 1$  是线性的情形, 超调和相位滞后均较大), 这正是“开发利用非线性特性”的优越性之所在。

4. 跟踪所需要的时间通常随  $R$  的增大而减小。

现给出一些数值仿真结果。仿真采用改进的四阶龙格-库塔法, 积分步长为  $h = 0.01$ 。

假定输入信号为:

$$v(t) = R_1 \sin(\omega t) + \sigma(t), \quad (24)$$

其中  $\sigma(t)$  是白噪声,  $|\sigma(t)| < 0.01$ 。

图1, 2, 3分别是输入信号(24)经不同的跟踪-微分器(分别对应系统(15), (18), (23))所得到的结果。其中输入信号是式(24)中  $R_1 = \omega = 1$  的情况。图4是跟踪-微分器 I (系统(15))相应于  $R_1 = 1, \omega = 0.5$  的情形, 且均含 1% 的随机噪声。图中“点线”是输入曲线, “实线”是跟踪信号“花线”是相应的微分信号。

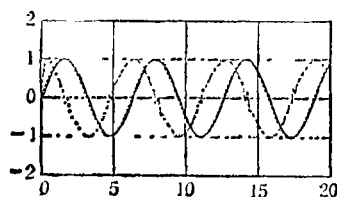


图1 参数为  $R = 200, \delta = 0.01, \alpha = 0.5, \beta = 1.14$  时的结果。

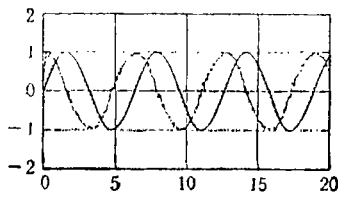


图2 参数为  $R = 5, \delta = 0.00025$  的结果。

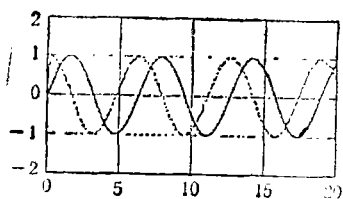


图3 参数为  $R = 70, \delta = 0.00007$  时的结果。

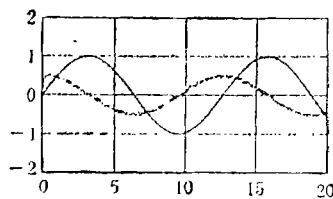


图4 参数为  $R = 200, \delta = 0.01, \alpha = 0.5, \beta = 1.14$  时的结果。

## 五、结 论

本文给出了非线性跟踪-微分器的一般形式, 在较一般的条件下, 证明了文[1]提出的

有关信号跟踪命题,说明了提取的“近似微分”的涵义,介绍了几种具体实现,从数值仿真,得到了这些具体实现中参数的取值范围及参数间的相互关系。

### 参 考 文 献

- [1] 韩京清,继电器加 PID 的控制规律,全国控制理论与应用年会(西安)论文集, 1989 年 10 月.
- [2] 陈景良,近代分析数学概要,清华大学出版社,北京,1987 年.
- [3] Lee, E. B. and Markus, L., Foundations of Optimal Control Theory, The SIAM Series in Applied Mathematics, 1967.

## NONLINEAR TRACKING-DIFFERENTIATOR

HAN JING-QING WANG WEI

(*Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing 100080*)

### ABSTRACT

In this paper, we discuss the problem of getting continuous signal and differential signal properly from the signal which is not differentiable. We give the general form and some kinds of concrete realization of nonlinear Tracking-Differentiator which can solve the problem stated above. Lastly, we do a simulation research on the concrete realization.