Saintia Matematika ISSN: 2337-9197
Vol. 02, No. 01 (2014), pp. 85–94.

INVERS SUATU MATRIKS TOEPLITZ MENGGUNAKAN METODE ADJOIN

Bakti Siregar, Tulus, Sawaluddin

Abstrak: *Pencarian invers matriks adalah suatu hal yang biasa dilakukan dalam bidang matematika dan ilmu hitung secara umum. Pada penelitian ini dibahas invers suatu matriks toeplitz T_n dengan diagonal nol dan selainnya $x \in \mathbb{R}$. Untuk memperoleh invers matriks toeplitz T_n dilakukan dengan mengamati pola dari determinan matriks toeplitz T_n berorde 2×2 hingga 7×7 dengan menggunakan metode operasi baris elementer diperoleh $|T_n| = (-1)^{(n+1)}(n-1)x^n$ di mana $\forall x \in \mathbb{R}$. Selanjutnya menentukan invers matriks toeplitz T_n menggunakan metode adjoin matriks T_n di mana $\forall x \in \mathbb{R}$ dan $|T_n| \neq 0$ diperoleh formula*

$$T_n^{-1} = (t_{ij}) = \begin{cases} \frac{-(n-2)}{(n-1)x} & \text{untuk } i = j \\ \frac{1}{(n-1)x} & \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

di mana t_{ij} adalah entri-entri yang terletak di baris ke-i dan kolom ke-j.

1. PENDAHULUAN

Dalam teori matriks terdapat berbagai jenis matriks, salah satunya matriks toeplitz. Pada dasarnya matriks toeplitz mempunyai operasi sama dengan matriks biasa hanya saja pada matriks toeplitz mempunyai struktur dan sifat yang khusus. Matriks toeplitz adalah matriks simetris yang sirkulan pada persamaan (1) di mana setiap unsur pada diagonal utamanya sama dan setiap unsur pada subdiagonal yang bersesuaian dengan diagonal utama

Received 20-08-2013, Accepted 23-01-2014.
2010 Mathematics Subject Classification: 15B05, 15A09
Key words : Matriks Toeplitz, Determinan,Kofaktor, Invers.

juga sama[1].

$$T_n = (t_{ij}) = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{(n-1)} & t_{(n-2)} & \cdots & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

di mana t_{ij} adalah entri-entri yang terletak pada baris ke-i dan kolom ke-j.

Berdasarkan definisi yang diyatakan pada persamaan (1) maka diasumsikan bahwa terdapat berbagai jenis dari matriks toeplitz. Salah satu jenis dari matriks toeplitz adalah andaikan A suatu matriks toeplitz tridiagonal berorde n pada persamaan (2).

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} b & a & 0 & \cdots & 0 \\ c & b & a & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & c & b & a \\ 0 & 0 & 0 & c & b \end{bmatrix} \quad (2)$$

di mana $a \neq 0$ dan $c \neq 0$[2]. Dalam penelitiannya dinyatakan jika A suatu matriks tridiagonal pada persamaan (2) dan $\mathbb{Z} = A^m = (a_{ij})$ untuk m adalah bilangan bulat positif, maka

$$(a_{ij}) = \frac{2}{n+1}(\frac{c}{a})^{\frac{i-j}{2}} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^m sin(\frac{ik\pi}{n+1}) sin(\frac{jk\pi}{n+1})$$

untuk $\lambda_k = b + 2a\sqrt{\frac{c}{a}}cos(\frac{k\pi}{n+1})$. Sedangkan, jika B suatu matriks kuadrat sedemikian hingga $b_{ij} \leq 0$ untuk semua $i \neq j$ dan $b_{ij} > 0$ untuk semua $i = j$ maka matriks B disebut Z matriks[3]. Syarat cukup menentukan invers matriks B (Z matriks) adalah $|B| > 0$. Sebenarnya masih banyak jenis-jenis dari matriks toeplitz selain yang telah dipaparkan sebelumnya, tetapi dalam kasus ini tidak akan dibahas lebih mendalam.

Pembahasan menarik dalam teori matriks adalah menentukan invers suatu matriks. Invers mempunyai peranan penting dalam menyelesaikan beberapa persoalan dalam matriks dan banyak dipergunakan dalam ilmu matematika maupun ilmu terapannya. Tujuan penelitian ini adalah mendeskripsikan proses perolehan invers suatu matriks toeplitz T_n persamaan (3) dengan mengamati pola rekursip determinan menggunakan operasi baris elementer dan menentukan invers matriks toeplitz T_n menggunakan metode adjoin.

$$T_n = \begin{bmatrix} 0 & x & \cdots & x \\ x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

2. LANDASAN TEORI

Definisi 1. Suatu matriks A berukuran $n \times n$ disebut simetris jika $A^T = A$[4].

Definisi 2. Misalkan $A = (a_{ij})$ adalah matriks bujur sangkar maka minor pada entri a_{ij} dinyatakan oleh $|M_{ij}|$ dan didefinisikan menjadi determinan sub-matriks, setelah baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ dihapuskan dari A. Bilangan $(-1)^{(1+j)}|M_{ij}|$ dinyatakan oleh K_{ij} dinamakan kofaktor entri a_{ij}[5].

Definisi 3. Determinan dari suatu matriks A berukuran $n \times n$ dinyatakan sebagai $|A|$ adalah skalar yang diasosiasikan dengan matriks A dan didefinisikan secara induktif

$$|A| = \begin{cases} a_{11}, & \text{untuk } n = 1 \\ a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1j}A_{1j}, & \text{untuk } n > 1 \end{cases}$$

di mana $A_{1j} = (-1)^{1+j}|M_{1j}|, j = 1, \cdots, n$ adalah kofaktor-kofaktor yang diasosiasikan dengan entri-entri dalam baris pertama dari A dan M_{1j} adalah minor baris pertama dan kolom ke-j[6]. Penentuan nilai $|A|$ menggunakan baris pertama, hal sama dapat juga dilakukan dengan menggunakan kolom sebagai berikut:

$$|A| = \begin{cases} a_{11}, & \text{untuk } n = 1 \\ a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{i1}A_{i1}, & \text{untuk } n > 1 \end{cases}$$

.

Definisi 4. Andaikan A suatu matriks segitiga-atas atau matriks segitiga bawah maka $|A|$ merupakan hasil kali setiap unsur diagonal utamanya[7].

Metode operasi baris elementer merupakan salah satu cara dalam menentukan determinan suatu matriks $n \times n$ dengan mereduksi bentuk matriks tersebut menjadi matriks baru yang mempunyai penghitungan determinan lebih mudah, misalkan dalam bentuk matriks segitiga-bawah atau matriks segitiga-atas. Operasi baris elementer meliputi operasi aritmatika (penjumlahan dan perkalian) yang dikenakan pada setiap unsur dalam suatu matriks, pertukaran baris, perkalian suatu baris dengan konstanta tak nol dan penjumlahan suatu baris pada baris yang lain sehingga oleh definisi 4 determinan dari matriks segitiga adalah hasil kali setiap entri pada diagonal utamanya.

Pengaruh operasi baris elementer pada suatu matriks antara lain:

1. Jika A adalah matriks yang dihasilkan bila baris tunggal A dikalikan oleh konstanta k maka $|A| = k|A|$
2. Jika A adalah matriks yang dihasilkan bila dua baris A dipertukarkan maka $|A| = -|A|$
3. Jika A adalah matriks yang dihasilkan bila kelipatan suatu baris A ditambahkan pada baris lain maka $|A| = |A|$[6].

Definisi 5. Matriks adjoin dari matriks bujur sangkar A berukuran $i \times j$ dinotasikan dengan $Adj(A)$ adalah

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} K_{11}A & K_{12}A & \cdots & K_{1j}A \\ K_{21}A & K_{22}A & \cdots & K_{2j}A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{i1}A & K_{i2}A & \cdots & K_{ij}A \end{bmatrix}^T \tag{4}$$

di mana $K_{11}A, \cdots, K_{ij}A$ adalah kofaktor-kofaktor dari matriks A[8].

Definisi 6. Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar dikatakan dapat dibalik (*invertible*) sehingga diperoleh matriks B, sedemikian hingga $AB = I_n = BA$ dan B dinamakan invers dari A yang dinotasikan dengan A^{-1}. Jika matriks B tidak dapat didefinisikan, maka A dinyatakan sebagai matriks singular. Invers dari A didefinisikan sebagai $A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|}$ dengan $Adj(A)$ adalah adjoin dari A dan $|A|$ merupakan nilai determinan matriks A[9].

3. PEMBAHASAN

Menurut definisi 6 sehingga invers matriks toeplitz T_n pada persamaan (3) di mana $x \in \mathbb{R}$ dapat didefinisikan $T_n^{-1} = \frac{Adj(T_n)}{|T_n|}$ dengan $Adj(T_n)$ adalah adjoin dari T_n dan $|T_n|$ merupakan nilai determinan matriks T_n. Untuk memperoleh formula nilai determinan matriks toeplitz dilakukan dengan mengamati pola determinan matriks toeplitz T_n yang berorde 2×2 hingga 7×7 dengan menggunakan metode operasi baris elementer.

1. Andaikan matriks toeplitz berorde 2×2 adalah $T_2 = \begin{bmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{bmatrix}$ di mana $\forall x \in \mathbb{R}$ sehingga diperoleh
   $|T_2| = \begin{vmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{vmatrix} (B_1 \leftrightarrow B_2) - \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix} = -x^2$ maka $|T_2| = -x^2$

2. Andaikan matriks toeplitz berorde 3×3 adalah $T_3 = \begin{bmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & x \\ x & x & 0 \end{bmatrix}$ di mana $\forall x \in \mathbb{R}$ sehingga diperoleh
   $$|T_3| = \begin{vmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & x \\ x & x & 0 \end{vmatrix} (B_1 \leftrightarrow B_3) - \begin{vmatrix} x & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & x \end{vmatrix} (B_1 - B_2) - \begin{vmatrix} x & x & x \\ 0 & x & -x \\ 0 & x & x \end{vmatrix} (B_2 - B_3)$$
   $$= - \begin{vmatrix} x & x & 0 \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & -2x \end{vmatrix} = 2x^3, \text{ maka } |T_3| = 2x^3.$$

Proses untuk memperoleh determinan matriks toeplitz T_4, T_5, T_6 dan T_7 tidak diuraikan dalam pembahasan ini tetapi nilai determinan matriks toeplitz T_n yang berorde 2×2 hingga 7×7 dinyatakan pada Tabel 1.

Tabel 1. Nilai Determinan Matriks Toeplitz T_n

No	Matiks Toeplitz T_n	Nilai Determinan
1	T_2	$-x^2$
2	T_3	$2x^3$
3	T_4	$-3x^4$
4	T_5	$4x^5$
5	T_6	$-5x^6$
6	T_7	$6x^7$

Dari Tabel 1 dapat diperoleh bahwa pola dari nilai determinan matriks toeplitz T_n pada teorema 1.

Teorema 1: Andaikan T_n suatu matriks toeplitz berordo $n \geq 2$ pada persamaan (3) di mana $\forall x \in \mathbb{R}$ maka nilai determinan matriks T_n adalah

$$|T_n| = (-1)^{n+1}(n-1)x^n$$

Bukti: Pembuktian dilakukan dengan induksi matematika, andaikan T_n adalah matriks toeplitz dengan ordo $n \geq 2$ yakni $\{2, 3, 5, \cdots, n\}$.

Langkah pertama. Diperlihatkan bahwa $|T_2|, |T_3|, |T_4|, \cdots, |T_n|$ memiliki pola untuk setiap $n \geq 2$.

1. untuk $n = 2$ diperoleh $|T_2| = -x^2$
2. untuk $n = 3$ diperoleh $|T_3| = 2x^3 = -x^2.(-2x) = |T_2|.(-2x)$
3. untuk $n = 4$ diperoleh $|T_4| = -3x^2 = 2x^3.(\frac{-3}{2}x) = |T_3|.\frac{3}{2}x$
4. dan seterusnya.

Dengan mengamati $|T_2|, |T_3|, |T_4|, \cdots, |T_n|$ diperlihatkan bahwa $|T_3|$ bergantung pada $|T_2|$ dan $|T_4|$ bergantung pada $|T_3|$ sehingga $|T_{n+1}|$ bergantung pada $|T_n|$.

Langakah kedua. Asumsikan bahwa $|T_n| = (-1)^{n+1}(n-1)x^n$ benar, untuk $n \geq 2$ maka $|T_{n+1}| = (-1)^{n+2}((n+1)-1)x^{n+1} = (-1)^{n+2}n.x^{n+1}$ sehingga pola atau selisih dari $|T_n|$ menuju $|T_{n+1}|$ adalah $\frac{|T_{n+1}|}{|T_n|} = \frac{(-1)^{n+2}n.x^{n+1}}{(-1)^{n+1}(n-1)x^n} = \frac{-n}{(n-1)}x$. Jadi untuk $n = k, |T_k| = (k-1)x^k$ sedemikian hingga untuk $n = k+1$ diperoleh,

$$\begin{aligned}
|T_{k+1}| &= |T_k|.(\frac{-k}{k-1}x) \\
&= (-1)^{k+1}(k-1)x^k.(\frac{-k}{k-1}x) \\
&= (-1)^{k+1}(-k).x^{k+1} \\
&= (-1)^{k+1}(-1).kx^{k+1} \\
&= (-1)^{k+2}.kx^{k+1}.
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $|T_n| = (-1)^{n+1}(n-1)x^n$, di mana $n \geq 2$ berlaku untuk $|T_{n+1}|$. ■

Menentukan invers matriks T_n diperlukan nilai determinan dan kofaktor-kofaktor dari matriks T_n. Formula determinan matriks T_n diperlihatkan pada teorema 1 sehingga dapat diperlihatkan kofaktor-kofaktor matriks T_n pada teorema 2.

Teorema 2: Andaikan T_n suatu matriks toeplitz berordo $n \geq 2$ pada persamaan (3) di mana $\forall x \in \mathbb{R}$, maka kofaktor-kofaktor matriks toeplitz T_n adalah

$$K_{ij}T_n = \begin{cases} |T_{n-1}| & \text{untuk } i = j \\ (-1)^{n+1}x^{n-1} & \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

di mana $K_{ij}T_n$ kofaktor - kofaktor yang terletak dibaris ke-i dan kolom ke-j

Bukti: Andaikan T_n adalah suatu matrik toeplitz pada persamaan (3), oleh definisi 2 maka kofaktor dari matriks T_n adalah mengeliminasi baris ke-i dan kolom ke-j diperoleh $K_{ij}T_n = (-1)^{i+j}|T_{n-1}|$ sehingga $K_{ij}T_n = |T_{n-1}|$ untuk $i = j$. Teorema 1 menjamin bahwa kofaktor $K_{ij}T_n = |T_{n-1}|$ benar. Sedangkan untuk membuktikan $K_{ij}T_n = (-1)^{n+1}x^{n-1}$ dilakukan dengan induksi matematika, andaikan T_n adalah matriks toeplitz dengan ordo $n \geq 2 = \{2, 3, 4, ..., n\}$ dan $i \neq j$.

Langkah pertama. Diperlihatkan bahwa $K_{ij}T_2, K_{ij}T_3, K_{ij}T_4, \cdots, K_{ij}T_n$ memiliki pola, untuk setiap $n \geq 2$ dan $i \neq j$.

1. Untuk $n = 2$ diperoleh $K_{ij}T_2 = -x$
2. Untuk $n = 3$ diperoleh $K_{ij}T_3 = x^2 = -x.(-x)$
3. Untuk $n = 4$ diperoleh $K_{ij}T_4 = -x^3 = x^2.(-x)$
4. dan seterusnya.

Dengan mengamati $K_{ij}T_2, K_{ij}T_3, K_{ij}T_4, \cdots, K_{ij}T_n$ dapat diperlihatkan $K_{ij}T_3$ bergantung pada $K_{ij}T_2$ dan $K_{ij}T_4$ bergantung pada $K_{ij}T_3$ sehingga $K_{ij}T_{n+1}$ bergantung pada $K_{ij}T_n$.

Langkah kedua. Asumsikan bahwa $K_{ij}T_n = (-1)^{n+1}x^{n-1}$ benar, untuk $n \geq 2$ maka $K_{ij}T_{n+1} = (-1)^{n+2}x^n$ sehingga pola atau selisih dari $K_{ij}T_n$ menuju $K_{ij}T_{n+1}$ adalah $(\frac{K_{ij}T_{n+1}}{K_{ij}T_n}) = (\frac{(-1)^{n+2}x^n}{(-1)^{n+1}x^{n-1}}) = -x$. Jadi untuk $n = k$ adalah $K_{ij}T_k = (-1)^{k+1}x^{k-1}$ sedemikian hingga untuk $k = n+1$ diperoleh,

$$K_{ij}T_{k+1} = K_{ij}T_k.(-x)$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^{k+1}x^{k-1}.(-x) \\ &= (-1)^{k+1}(-1).x^{(k-1+1)} \\ &= (-1)^{k+2}x^{k} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $K_{ij}T_n = (-1)^{n+1}x^{n-1}$, di mana $K_{ij}T_n$ adalah kofaktor kofaktor matriks T_n orde $n \geq 2$ dan $i \neq j$, berlaku untuk $K_{ij}T_{n+1}$.■

Pada teorema 2 diperlihatkan kofaktor-kofaktor matriks T_n secara umum, sehinga pada teorema 3 diperlihatkan invers matriks T_n yang diperoleh dengan menggunakan metode adjoin matriks T_n.

Teorema 3: Andaikan T_n suatu matriks toeplitz berordo $n \geq 2$ pada persamaan (3) di mana $\forall x \in \mathbb{R}$ dan $|T_n| \neq 0$ maka invers Matriks Toeplitz T_n adalah

$$T_n^{-1} = t_{ij} = \begin{cases} \frac{-(n-2)}{(n-1)x} & \text{untuk } i = j \\ \frac{1}{(n-1)x} & \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

t_{ij} adalah entri-entri yang terletak dibaris ke-i dan kolom ke-j.

Bukti: Pembuktian dilakukan sesuai dengan definisi 6 mengenai invers matriks yakni; andaikan T_n suatu matriks bujur sangkar berodo n dan dapat diperlihatkan matriks T_n^{-1}, sehingga $T_nT_n^{-1} = T_n^{-1}T_n = I$ maka T_n dikatakan dapat dibalik (*invertible*) dan T_n^{-1} dinamakan invers dari T_n sebagai berikut:

$$T_n^{-1}T_n = I = \begin{bmatrix} \frac{-(n-2)}{(n-1)x} & \frac{1}{(n-1)x} & \cdots & \frac{1}{(n-1)x} \\ \frac{1}{(n-1)x} & \frac{-(n-2)}{(n-1)x} & \cdots & \frac{1}{(n-1)x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(n-1)x} & \frac{1}{(n-1)x} & \cdots & \frac{-(n-2)}{(n-1)x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x & \cdots & x \\ x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(n-1)x}{(n-1)x} & \frac{-(n-2)x+(n-2)x}{(n-1)x} & \cdots & \frac{-(n-2)x+(n-2)x}{(n-1)x} \\ \frac{-(n-2)x+(n-2)x}{(n-1)x} & \frac{(n-1)x}{(n-1)x} & \cdots & \frac{-(n-2)x+(n-2)x}{(n-1)x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-(n-2)x+(n-2)x}{(n-1)x} & \frac{-(n-2)x+(n-2)x}{(n-1)x} & \cdots & \frac{(n-1)x}{(n-1)x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

4. KESIMPULAN

Hasil dari penelitian tentang invers matriks toeplitz T_n berordo $n \geq 2$ di mana setiap unsur diagonal utama nol dan selainnya $x \in \mathbb{R}$ dalam tulisan ini diperoleh kesimpulkan sebagai berikut:

1. Determinan matriks T_n adalah $|T_n| = (-1)^{n+1}(n-1)x^n$
2. Kofaktor-kofaktor Matriks Toeplitz T_n adalah

$$K_{ij}T_n = \begin{cases} |T_{n-1}| & \text{untuk } i = j \\ (-1)^{n+1}x^{n-1} & \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

   K_{ij} adalah entri-entri yang terletak dibaris ke-i dan kolom ke-j

3. Invers Matriks Toeplitz T_n adalah

$$T_n = t_{ij} = \begin{cases} \frac{-(n-2)}{(n-1)x} & \text{untuk } i = j \\ \frac{1}{(n-1)x} & \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

   t_{ij} adalah entri-entri yang terletak dibaris ke-i dan kolom ke-j.

Daftar Pustaka

[1] Gray, Robert M. *Toeplitz and Circulan Matrices*. Stanford 94305, Department of Electrical Engineering Stanford, USA .(2005)

[2] Salkuyeh, Davod Khojasteh. Positive Integer Power of the Tridiagonal Matriks Toeplitz. *International Mathematical Forum,* Vol 1, no. 22, 1061 - 1065, Mohaghegh Ardabili University. Ardabil, Iran, (2006)

[3] Sianipar, P. Invers Z-Matriks, *Bulletin of Mathematics*, Vol. 01, No. 01, 1-14. Medan Indonesia, (2009)

[4] Leon,S.J. *Aljabar Linier dan Aplikasinya*. Edisi kelima. Jakarta: Erlangga, (2001)

[5] Anton, Howard & Rorres, Chris. *Dasar-Dasar Aljabar Linear Versi Aplikasi*. Edisi Ketujuh. Jakarta: Erlangga, (2004)

[6] Nicholson, W. Keith. *Linear Algebra with Applications, Fourth Edition.* University of Calgary, (2004)

[7] Supranto, Johannes. *Pengantar Matriks*. Jakarta: Rineka Cipta, (2003)

[8] Hefferon, Jim. *Linear Algebra*. Saint Michaels College Colchester, Vermont USA, (2012)

[9] Zwilinger, D. *Standard Mathematical Tables and Formulae.* Chapman & Hall/CRC Press Company. New York, (2003)

Bakti Siregar: Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Sumatera Utara, Medan 20155, Indonesia
E-mail: siregarbakti@gmail.com

Tulus: Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Sumatera Utara, Medan 20155, Indonesia
E-mail: tulus@usu.ac.id

Sawaluddin: Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Sumatera Utara, Medan 20155, Indonesia
E-mail: sawaluddin@usu.ac.id