1η Ομάδα Ασκήσεων

1. (Η ένωση επιμερίζει την άπειρη τομή)

• Έστω $x \in \left(A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)\right)$. Αυτό σημαίνει ότι $x \in A$ ή $x \in \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)$.

- Αν $x \in A$ τότε $x \in A \cup B_i$ για κάθε B_i, οπότε $x \in \left(\bigcap_{i=1}^{\infty}(A \cup B_i)\right)$.
- Αν $x \notin A$ τότε $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$ που σημαίνει ότι $x \in B_i$ για κάθε B_i. Άρα $x \in A \cup B_i$ για κάθε B_i, δηλ. $x \in \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A \cup B_i\right)$

Συνεπώς, δείξαμε ότι $\left(A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)\right) \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^{\infty}(A \cup B_i)\right)$ (σχέση 1)

• Έστω τώρα $x \in \left(\bigcap_{i=1}^{\infty}(A \cup B_i)\right)$. Αυτό σημαίνει ότι $x \in (A \cup B_i)$ για κάθε B_i που με τη σειρά του σημαίνει ότι $x \in A$ ή $x \in B_i$ για κάθε B_i.

- Αν $x \in A$ τότε $x \in \left(A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)\right)$
- Αν $x \notin A$ τότε $x \in B_i$ για κάθε B_i (διαφορετικά, αν υπήρχε κάποιο i για το οποίο $x \notin B_i$, θα είχαμε $x \notin (A \cup B_i)$ άρα $x \notin \left(\bigcap_{i=1}^{\infty}(A \cup B_i)\right)$ ~ άτοπο)

  Άρα $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$ κι επομένως $x \in \left(A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)\right)$

  Συνεπώς δείξαμε ότι $\bigcap_{i=1}^{\infty}(A \cup B_i) \subseteq \left(A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)\right)$ (σχέση 2)

↳ Λόγω των σχέσεων 1, 2, ισχύει $A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty}(A \cup B_i)$

2. (Λειτουργία δικτύου)

(α') $D = A \cap B$

(β') $E = B' \cap A$

(γ') $F = A \cap B \cap C'$

(δ') $G = (A \cap B') \cup (A \cap C) \cup A'$

3. (Σταθερά και κινητά τηλέφωνα)

Έστω πως με Σ_i συμβολίζεται το σταθερό i, για $1 \leq i \leq 400$ $(i \in \mathbb{N})$ και με K_i συμβολίζεται το κινητό i, για $1 \leq i \leq 50$ $(i \in \mathbb{N})$

Έστω ακόμη πως τα μη διατεταγμένα ζεύγη $\{\Sigma_i, \Sigma_j\}$, $\{\Sigma_i K_k\}$, $\{K_k, K_\ell\}$ (με $1 \leq i, j \leq 400$ και $1 \leq k, \ell \leq 50$) συμβολίζουν την επιλογή δύο σταθερών, ενός σταθερού και ενός κινητού και δύο κινητών τηλεφώνων, αντίστοιχα.

Αν συμβολίσουμε με Σ, ΣK και K τα ενδεχόμενα η επιλογή να είναι δύο σταθερά, ένα σταθερό και ένα κινητό και δύο κινητά αντίστοιχα, έχουμε:

$\Sigma = \{ \{\Sigma_1, \Sigma_i\} / 2 \leq i \leq 400 \} \cup \{ \{\Sigma_2, \Sigma_i\} / 3 \leq i \leq 400 \} \cup \ldots \cup \{ \{\Sigma_{399}, \Sigma_i\} / 400 \leq i \leq 400 \}$

$\Sigma K = \{ \{\Sigma_1, K_i\} / 1 \leq i \leq 50 \} \cup \{ \{\Sigma_2, K_i\} / 1 \leq i \leq 50 \} \cup \ldots \cup \{ \{\Sigma_{400}, K_i\} / 1 \leq i \leq 50 \}$

$K = \{ \{K_1, K_i\} / 2 \leq i \leq 50 \} \cup \{ \{K_2, K_i\} / 3 \leq i \leq 50 \} \cup \ldots \cup \{ \{K_{49}, K_i\} / 50 \leq i \leq 50 \}$

Άρα ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = (\Sigma) \cup (\Sigma K) \cup (K)$

Όσον αφορά το ενδεχόμενο Α αυτό ταυτίζεται ουσιαστικά με το ΣΚ (αφού η επιλογή ενός κινητού και ενός σταθερού έχει κόστος $5 + 1 = 6$ ευρώ)

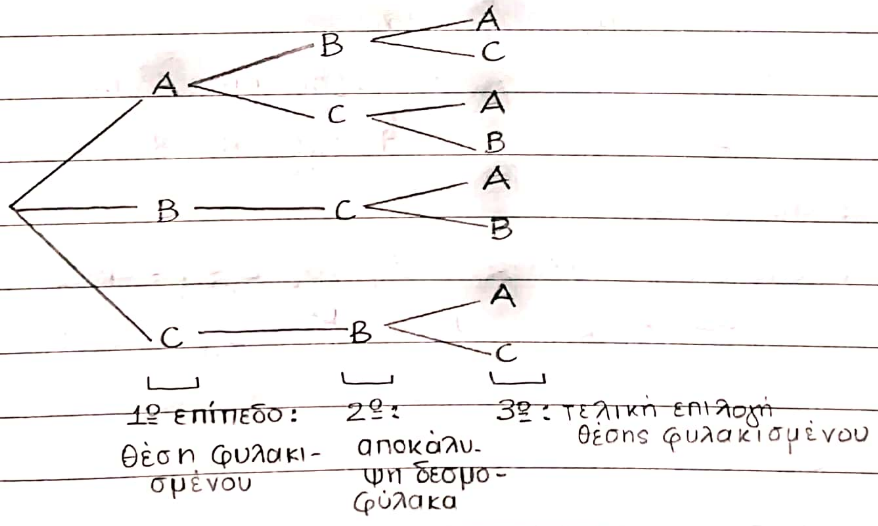
Συνεπώς $A = \Sigma K$

Για το ενδεχόμενο Β παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν επιλογές με κόστος 11 ευρώ

Άρα $B = \emptyset$

4. (Το πρόβλημα των τριών φυλακισμένων)

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι φυλακισμένοι κατέχουν τις θέσεις A, B και C. Έστω ότι η θέση A έχει το φυλακισμένο στον οποίο θα απονεμειθεί χάρη. Το πρώτο επίπεδο του παρακάτω δενδροδιαγράμματος απεικονίζει τις θέσεις των φυλακισμένων, το δεύτερο απεικονίζει την επιλογή του δεσμοφύλακα ως προς τη θέση τού προς εκτέλεση φυλακισμένου που αποκαλύπτει σε εκείνον που τον ρώτησε (επιλέγεται μεταξύ των θέσεων B, C) και το τελευταίο επίπεδο δείχνει την τελική επιλογή θέσης του φυλακισμένου.



Ο δειγματικός χώρος που προκύπτει είναι: $\Omega = \{ABA, ABC, ACA, ACB, BCA, BCB, CBA, CBC\}$

5. (Περιγραφή ενδεχομένων)

(α') $B \cap A' \cap C'$

(β') $A \cap B \cap C'$

(γ') $A \cup B \cup C$

(δ') $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(ε') $A \cap B \cap C$

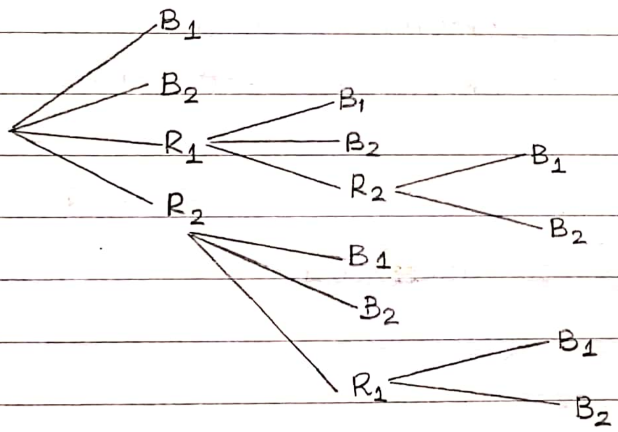
(ς') $A' \cap B' \cap C'$

(ζ') $\big((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)\big)'$ [το συμπλήρωμα του (δ')]

(η') $(A \cap B \cap C)'$ [το συμπλήρωμα του (ε')]

6. (Μαρκαδόροι)

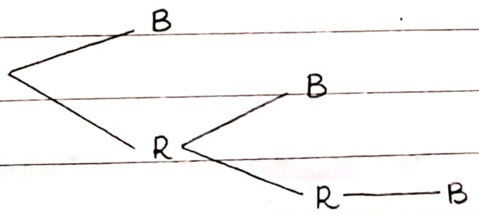
(α') Έστω B_1, B_2 (⇝Blue) οι δύο μπλε μαρκαδόροι και R_1, R_2 (⇝Red) οι δυο κόκκινοι. Στο παρακάτω δενδροδιάγραμμα τα διαφορα επίπεδα απεικονίζουν το μαρκαδόρο που μπορεί να βγαίνει κάθε φορά από το συρτάρι σε μια εκτέλεση του πειράματος.



Ο δειγματικός χώρος που προκύπτει είναι:

$\Omega = \{B_1, B_2, R_1B_1, R_1B_2, R_1R_2B_1, R_1R_2B_2, R_2B_1, R_2B_2, R_2R_1B_1, R_2R_1B_2\}$

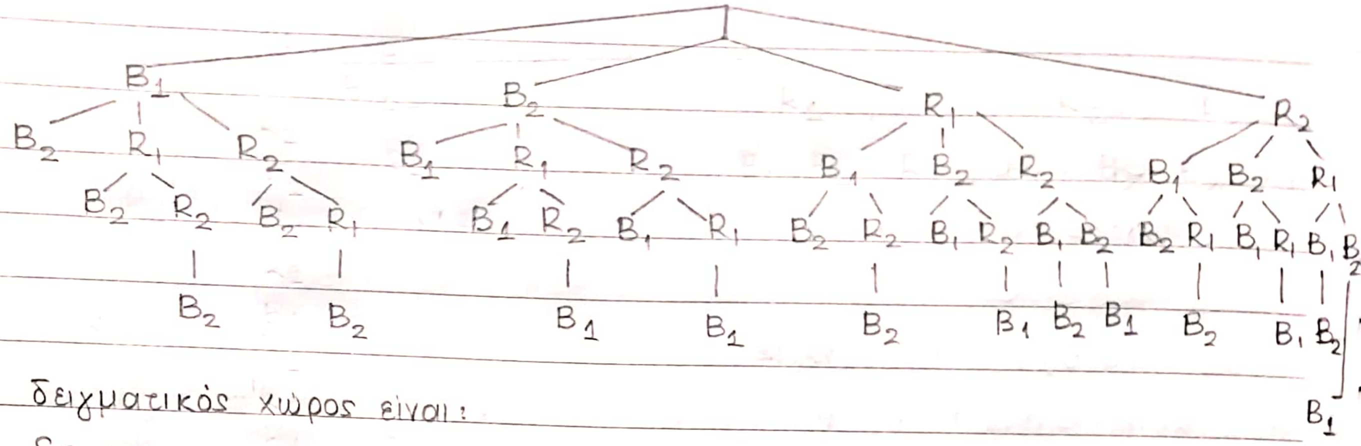
(β') Έστω B καθένας εκ των μπλε μαρκαδόρων και R καθένας εκ των κόκκινων. Με τη λογική που εφαρμόστηκε και στο (α') έχουμε το ακόλουθο δενδροδιάγραμμα



Ο δειγματικός χώρος είναι:

$\Omega = \{B, RB, RRB\}$

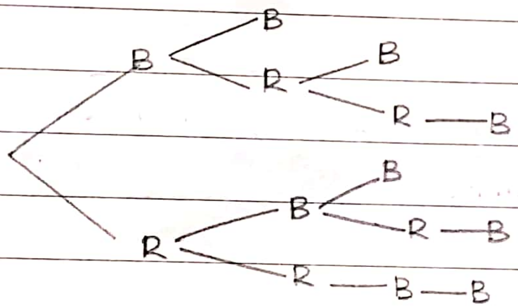
(γ')



Ο δειγματικός χώρος είναι:

$\Omega = \{ B_1B_2,\ B_1R_1B_2,\ B_1R_1R_2B_2,\ B_1R_2B_2,\ B_1R_2R_1B_2,$
$B_2B_1,\ B_2R_1B_1,\ B_2R_1R_2B_1,\ B_2R_2B_1,\ B_2R_2R_1B_1,$
$R_1B_1B_2,\ R_1B_1R_2B_2,\ R_1B_2B_1,\ R_1B_2R_2B_1,\ R_1R_2B_1B_2,\ R_1R_2B_2B_1,$
$R_2B_1B_2,\ R_2B_1R_1B_2,\ R_2B_2B_1,\ R_2B_2R_1B_1,\ R_2R_1B_1B_2,\ R_2R_1B_2B_1 \}$

(δ')



Ο δειγματικός χώρος είναι:

$\Omega = \{ BB, BRB, BRRB,$
$RBB, RBRB, RRBB \}$

7. (Πρόβλημα Γαλιλαίου)

(α') Αν σε μια τριάδα xyz το x εκφράζει το αποτέλεσμα ρίψης του πρώτου, το y του δεύτερου και το z του τρίτου ζαριού τότε για το ενδεχόμενο A έχουμε αναλυτικά:

A = { 126, 216, 315, 414, 513, 612
135, 225, 324, 423, 522, 612. }
144, 234, 333, 432, 531,
153, 243, 342, 441,
162, 252, 351,
261,

και $|A| = 25$

Πιο απλά, με χρήση συνδυαστικής, αναζητούμε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ με $1 \le x_i \le 6$ που μετασχηματίζεται σε

(A) Σημ. Με $C(n,m)$ σημειώνονται οι συνδυασμοί των n στοιχείων ανά m

$y_1+1+y_2+1+y_3+1=9 \Rightarrow y_1+y_2+y_3=6$ με $0\le y_i\le 5$ (1)

Η εξίσωση $y_1+y_2+y_3=6$ $0\le y_i$ (2) έχει $\overset{(A)}{C}(6+2,3-1)=C(8,2)=\frac{8!}{2!6!}=\frac{\cancel{6!}\cdot 7\cdot 8}{2!\cancel{6!}}=28$

τριάδες λύσεων. Για να βρούμε πόσες είναι οι λύσεις της (1) θα πρέπει να αφαιρέσουμε από το πλήθος λύσεων της (2) εκείνες στις οποίες $y_i>5$ δηλ. $y_i=6$. Εκείνες είναι 3 στο πλήθος (οι τριάδες 006, 060, 600). Άρα τελικά η (1) έχει $28-3=25$ λύσεις, δηλ. καταλήγουμε και πάλι στο συμπέρασμα ότι $|A|=25$

Συνεπώς $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{25}{216}$

(β') Όπως και στο (α') ερώτημα, για το ενδεχόμενο B έχουμε αναλυτικά

B = { 136, 226, 316, 415, 514, 613,
145, 235, 325, 424, 523, 622,
154, 244, 334, 433, 532, 631.}
163, 253, 343, 442, 541,
262, 352, 451,
361,

κι επομένως $|B|=27$

Πιο απλά, αναζητούμε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x_1+x_2+x_3=10$ $0\le x_i\le 6$ που μετασχηματίζεται σε $y_1+1+y_2+1+y_3+1=10 \Rightarrow y_1+y_2+y_3=7$ $0\le y_i\le 5$ (3)

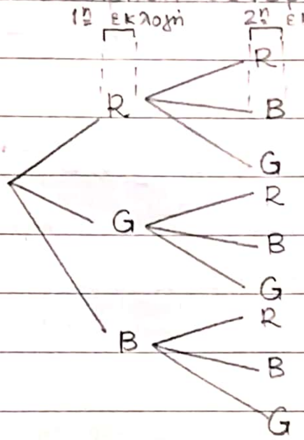
Η εξίσωση $y_1+y_2+y_3=7$ $y_i\ge 0$ (4) έχει $\overset{(A)}{C}(7+2,3-1)=C(9,2)=\frac{9!}{2!7!}=\frac{\cancel{7!}\cdot 8\cdot 9}{2\cdot\cancel{7!}}=36$ τριάδες λύσεων. Για να βρούμε το πλήθος των λύσεων της (3) θα πρέπει να αφαιρέσουμε από το πλήθος λύσεων της (4) εκείνες στις οποίες $y_i>5$ δηλ. $y_i=6$ ή $y_i=7$. Η μη διατεταγμένη τριάδα με $y_i=6$ που δίνει άθροισμα 7 είναι 610 και έχουμε $3!=6$ διατάξεις γι'αυτήν τη τριάδα. Επιπλέον έχουμε 3 τριάδες με $y_i=7$ (τις 007, 070, 700). Άρα τελικά η (3) έχει $36-6-3=27$ λύσεις, δηλ. καταλήγουμε και πάλι στο συμπέρασμα ότι $|B|=27$

Συνεπώς $P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{27}{216}$

8. (Τρεις σφαίρες)

• Με επανατοποθέτηση

Με τη χρήση δένδρου έχουμε:



Και επομένως

$\Omega_1 = \{RR, RB, RG, GR, GB, GG, BR, BB, BG\}$

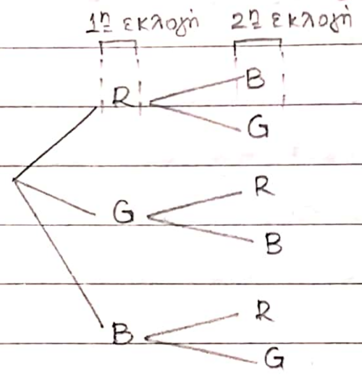
Έστω A_1 = "εκλογή μίας τουλάχιστον κόκκινης σφαίρας στις δύο δοκιμές"

οπότε $A_1 = \{RR, RB, RG, GR, BR\}$

$$P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega_1|} = \frac{5}{9}$$

• Χωρίς επανατοποθέτηση

Με τη χρήση δένδρου έχουμε:



και επομένως

$\Omega_2 = \{RB, RG, GR, GB, BR, BG\}$

Έστω A_2 = "εκλογή μίας τουλάχιστον κόκκινης σφαίρας στις δύο δοκιμές"

οπότε $A_2 = \{RB, RG, GR, BR\}$

$$P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

9. (Ανισότητα Bonferroni)

Είναι $P(A\cap B) = 1 - P((A\cap B)') \overset{\text{De Morgan}}{=} 1 - P(A'\cup B')$ ①. Από το "φράγμα της ένωσης" είναι $P(A'\cup B') \le P(A') + P(B') = 1 - P(A) + 1 - P(B) = 2 - (P(A)+P(B))$. Οπότε έχουμε

$-P(A'\cup B') \geq -2 + P(A) + P(B) \Rightarrow 1 - P(A'\cup B') \geq P(A) + P(B) - 1 \overset{①}{\Rightarrow} P(A\cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$

Για τη γενίκευση έχουμε:

$P(A_1\cap A_2\cap \ldots \cap A_n) = 1 - P((A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)') \overset{\text{De Morgan}}{=\!=} 1 - P(A_1'\cup A_2'\cup \ldots \cup A_n')$ ②

Από το "φράγμα της ένωσης" είναι $P(A_1'\cup A_2'\cup\ldots\cup A_n') \le P(A_1') + P(A_2') + \ldots + P(A_n') = (1-P(A_1)) + (1-P(A_2)) + \ldots + (1-P(A_n)) = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ φορές}} - (P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n))$

Οπότε $-P(A_1'\cup A_2'\cup\ldots\cup A_n') \geq -n + (P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - P(A_1'\cup A_2'\cup\ldots\cup A_n') \geq 1 - n + P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) \overset{②}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) - (n-1)$

10. (Αυστηρή Ανισότητα)

Η ανισότητα δεν ισχύει. Παρακάτω δίνεται ένα αντιπαράδειγμα.

Έστω πως σε ένα τυχερό παιχνίδι γυρνάμε έναν (άδικο) τροχό με 5 "φέτες".

Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ, 50€, 100€, 500€, ΤΖΑΚ ΠΟΤ\}$

και $P(ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ) = P(50€) = P(100€) = P(500€) = \frac{1}{4}$ ενώ $P(ΤΖΑΚ ΠΟΤ) = 0$

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

$A = \{50€, 100€, 500€\}$ και

$B = \{50€, 100€, 500€, ΤΖΑΚ ΠΟΤ\}$

όπου προφανώς $A \subset B$, αλλά

$P(A) = P(\{50€, 100€, 500€\}) = P(\{50€\} \cup \{100€\} \cup \{500€\}) = P(\{50€\}) + P(\{100€\}) + P(\{500€\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$P(B) = P(\{50€, 100€, 500€, ΤΖΑΚ ΠΟΤ\}) = P(\{50€\} \cup \{100€\} \cup \{500€\} \cup \{ΤΖΑΚ ΠΟΤ\})$
$= P(\{50€\}) + P(\{100€\}) + P(\{500€\}) + P(\{ΤΖΑΚ ΠΟΤ\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 = \frac{3}{4}$

δηλ. $P(A) = P(B)$.