Ονομ/νυμο: ΑΛΒΙΟΝΑ ΜΑΝΤΣΟ
Ομάδα ασκ.: 7η
Άρ. Μητρώου: 3200098

7η Ομάδα Ασκήσεων

45. (Απόδειξη λήμματος 7.1)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και διαμέριση $P=\{p_0, p_1, \dots p_{n-1}, p_n\}$

$s(f;P)=\sum_{i=1}^{n}(p_i-p_{i-1})\,m_i$ όπου $m_i=\inf\{f(x): p_{i-1}\le x\le p_i\}$

$S(f;P)=\sum_{i=1}^{n}(p_i-p_{i-1})\,M_i$ όπου $M_i=\sup\{f(x): p_{i-1}\le x\le p_i\}$

Έστω $i\in[1,n]$. Στο $[p_{i-1},p_i]$ έχουμε $m_i\le f(x)\le M_i \Rightarrow m_i\le M_i \xRightarrow{p_i>p_{i-1}}$

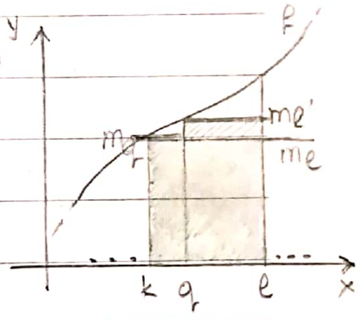
$\Rightarrow (p_i-p_{i-1})m_i \le (p_i-p_{i-1})M_i$ (σχέση 1)

Επειδή η σχέση 1 ισχύει $\forall i\in[1,n]$ θα είναι

$(p_1-p_0)m_0+(p_2-p_1)m_1+\dots+(p_n-p_{n-1})m_n \le (p_1-p_0)M_0+(p_2-p_1)M_1+\dots(p_n-p_{n-1})M_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(p_i-p_{i-1})m_i \le \sum_{i=1}^{n}(p_i-p_{i-1})M_i \Rightarrow s(f;P)\le S(f;P)$

46. (Απόδειξη λήμματος 7.2)



Έστω διαμέριση $P=\{p_0,p_1,\dots,p_n\}$ και $P'=P\cup\{p_q\}$ όπου $p_q\notin P$

Έστω επίσης ότι $p_k<p_q<p_\ell$ για $p_k,p_\ell\in P$

- Για το κάτω άθροισμα Darboux έχουμε:

$s(f;P)=\sum_{i=1}^{k}m_i(p_i-p_{i-1})+m_\ell(p_\ell-p_k)+\sum_{i=\ell+1}^{n}m_i(p_i-p_{i-1})$

$s(f;P')=\sum_{i=1}^{k}m_i(p_i-p_{i-1})+m_q(p_q-p_k)+m_\ell'(p_\ell-p_q)+\sum_{i=\ell+1}^{n}m_i(p_i-p_{i-1})$

όπου $m_i=\inf\{f(x): p_{i-1}<x<p_i\}$

Τα $s(f;P)$ και $s(f;P')$ έχουν κοινούς όρους τους $\sum_{i=1}^{k}m_i(p_i-p_{i-1})$ και $\sum_{i=\ell+1}^{n}m_i(p_i-p_{i-1})$

Οπότε για να αποδειχθεί το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι:

$m_\ell(p_\ell-p_k)\le m_q(p_q-p_k)+m_\ell'(p_\ell-p_q)$

Πράγματι,

Επειδή $m_\ell=\inf\{f(x): p_k<x<p_\ell\}$, ισχύει ότι $f(x)\ge m_\ell$ για $x\in(p_k,p_\ell)$ άρα $f(x)\ge m_\ell$ και για $x\in(p_k,p_q)\subset(p_k,p_\ell)$. Δηλαδή το m_ℓ είναι κάτω φράγμα των $f(x)$ στο (p_k,p_q). Άρα:

$m_q=\inf\{f(x): p_k<x<p_q\}\ge m_\ell$ (αφού το infimum είναι το μέγιστο κάτω φράγμα)

Με τον ίδιο τρόπο, αφού ισχύει ότι $f(x) \geq m_\ell$ για $x \in (p_k, p_\ell)$, θα είναι $f(x) \geq m_\ell$ και για $x \in (p_q, p_\ell) \subset (p_k, p_\ell)$. Δηλαδή το m_ℓ είναι κάτω φράγμα των $f(x)$ στο (p_q, p_ℓ). Άρα

$m_{\ell}' = \inf\{f(x) : p_q < x < p_\ell\} \geq m_\ell$ (αφού το infimum είναι το μέγιστο κάτω φράγμα

Συνεπώς, $m_q \geq m_\ell \Rightarrow m_q(p_q - p_k) \geq m_\ell(p_q - p_k)$ ① και

$m_\ell' \geq m_\ell \Rightarrow m_\ell'(p_\ell - p_q) \geq m_\ell(p_\ell - p_q)$ ②

↪ Με πρόσθεση των σχέσεων ① και ② έχουμε:

$$m_q(p_q - p_k) + m_\ell'(p_\ell - p_k) \geq m_\ell(p_q - p_k) + m_\ell(p_\ell - p_q) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m_q(p_q - p_k) + m_\ell'(p_\ell - p_k) \geq m_\ell(\cancel{p_q} - p_k + p_\ell - \cancel{p_q}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m_q(p_q - p_k) + m_\ell'(p_\ell - p_k) \geq m_\ell(p_\ell - p_k)$$

δηλ. το ζητούμενο αποδείχθηκε, άρα $s(f;P) \leq s(f;P')$

- Για το άνω άθροισμα Darboux έχουμε:

$$S(f;P) = \sum_{i=1}^{k} M_i(p_i - p_{i-1}) + M_\ell(p_\ell - p_k) + \sum_{i=\ell+1}^{n} M_i(p_i - p_{i-1})$$

$$S(f;P') = \sum_{i=1}^{k} M_i(p_i - p_{i-1}) + M_q(p_q - p_k) + M_\ell'(p_\ell - p_q) + \sum_{i=1}^{n} m_i(p_i - p_{i-1})$$

όπου $M_i = \sup\{f(x) : p_{i-1} < x < p_i\}$

Τα $S(f;P)$ και $S(f;P')$ έχουν κοινούς όρους τους $\sum_{i=1}^{k} M_i(p_i - p_{i-1})$ και $\sum_{i=\ell+1}^{n} M_i(p_i - p_{i-1})$. Οπότε για να αποδειχθεί το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι:

$$M_\ell(p_\ell - p_k) \geq M_q(p_q - p_k) + M_\ell'(p_\ell - p_q)$$

Πράγματι,

Επειδή $M_\ell = \sup\{f(x) : p_k < x < p_\ell\}$, ισχύει ότι $f(x) \leq M_\ell$ για $x \in (p_k, p_\ell)$ άρα $f(x) \leq M_\ell$ και για $x \in (p_k, p_q) \subset (p_k, p_\ell)$ (a) και $f(x) \leq M_\ell$ και για $x \in (p_q, p_\ell) \subset (p_k, p_\ell)$ (b). Δηλαδή το M_ℓ είναι άνω φράγμα των $f(x)$ στο (p_k, p_q) και στο (p_q, p_ℓ). Άρα:

$M_q = \sup\{f(x) : p_k < x < p_q\} \leq M_\ell$ ③ (λόγω πρότασης a)

$M_\ell' = \sup\{f(x) : p_q < x < p < p_\ell\} \leq M_\ell$ ④ (λόγω πρότασης b)

(αφού το supremum είναι το ελάχιστο άνω φράγμα)

Συνεπώς, $M_q \leq M_\ell \Rightarrow M_q(p_q - p_k) \leq M_\ell(p_q - p_k)$ ③ και

$M_\ell' \leq M_\ell \Rightarrow M_\ell'(p_\ell - p_q) \leq M_\ell(p_\ell - p_q)$ ④

↳ Με πρόσθεση των σχέσεων ③ και ④ έχουμε:

$$M_q(p_q - p_k) + M_\ell'(p_\ell - p_q) \leq M_\ell(p_q - p_k) + M_\ell(p_\ell - p_q) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_q(p_q - p_k) + M_\ell'(p_\ell - p_q) \leq M_\ell(\cancel{p_q} - p_k + p_\ell - \cancel{p_q}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_q(p_q - p_k) + M_\ell'(p_\ell - p_q) \leq M_\ell(p_\ell - p_k)$$

δηλ. το ζητούμενο αποδείχθηκε, άρα $S(f;P) \geq S(f;P')$

Γενικεύοντας, για τη διαμέριση $P' = P \cup \{p_q\}$ $(p_q \notin P)$ παίρνουμε τη διαμέριση $P_2 = P' \cup \{p_{q_2}\} = P \cup \{p_q\} \cup \{p_{q_2}\} = P \cup \{p_q, p_{q_2}\}$ $(p_q, p_{q_2} \notin P)$ και έχουμε $s(f;P_2) \geq s(f;P') \geq s(f;P)$ και

$S(f;P_2) \leq S(f;P') \leq S(f;P)$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, καταλήγουμε τελικά σε μια διαμέριση $P_v = P_{v-1} \cup \{p_{q_v}\} = P \cup \{p_q, p_{q_2}, \dots, p_{q_v}\}$ $(p_q, p_{q_2}, \dots, p_{q_v} \notin P)$ και έχουμε $s(f;P_v) \geq s(f;P_{v-1}) \geq \dots \geq s(f;P) \Rightarrow s(f;P_v) \geq s(f;P)$ και

$S(f;P_v) \leq S(f;P_{v-1}) \leq \dots \leq S(f;P) \Rightarrow S(f;P_v) \leq S(f;P)$

47. (Εμβαδόν τριγώνου)

$f(x)=x$ στο $[0,4]$

Έστω $P_n=\{p_0=0,\ p_1=\frac{a}{n},\ p_2=\frac{2a}{n},\ \dots\ p_n=\frac{na}{n}=a\}$

Η συνάρτηση είναι γν. αύξουσα άρα $\forall i\in[1,n]$ $m_i=\inf\{f(x): p_{i-1}\le x\le p_i\}=f(p_{i-1})$ $\overset{①}{=} p_{i-1}$ και $M_i=\sup\{f(x): p_{i-1}\le x\le p_i\}=f(p_i)=p_i$ ②

Έχουμε $s(f;P_n)=\sum_{i=1}^{n} m_i(p_i-p_{i-1})\overset{①}{=}\sum_{i=1}^{n}(p_{i-1})(p_i-p_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(i-1)\frac{a}{n}\left(\frac{ia}{n}-(i-1)\frac{a}{n}\right)=$

$=\sum_{i=1}^{n}(i-1)\frac{a}{n}\left(\frac{a}{n}\right)=\frac{a^2}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(i-1)=\frac{a^2}{n^2}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}i=\frac{a^2}{n^{\cancel{2}}}\cdot\frac{(n-1)\cdot(\cancel{n}-\cancel{1}+\cancel{1})}{2}=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{n-1}{n}$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a^2}{2}\cdot\frac{(n-1)}{n}\right)=\frac{a^2}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n}=\frac{a^2}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n}=\frac{a^2}{2}\cdot 1=\frac{a^2}{2}$, που σημαίνει

ότι η ακολουθία $s(f;P_n)$ συγκλίνει στο $\frac{a^2}{2}$ (πρόταση 1)

Επίσης $S(f;P_n)=\sum_{i=1}^{n}M_i(p_i-p_{i-1})\overset{②}{=}\sum_{i=1}^{n}(p_i)(p_i-p_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\frac{ia}{n}\cdot\left(\frac{ia}{n}-(i-1)\frac{a}{n}\right)=$

$=\sum_{i=1}^{n}\frac{ia}{n}\cdot\left(\frac{a}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{ia^2}{n^2}=\frac{a^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i=\frac{a^2}{n^{\cancel{2}}}\frac{\cancel{n}(n+1)}{2}=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a^2}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\frac{a^2}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{a^2}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n}=\frac{a^2}{2}\cdot 1=\frac{a^2}{2}$, που σημαίνει ότι

η ακολουθία $S(f;P_n)$ συγκλίνει στο $\frac{a^2}{2}$ (πρόταση 2)

Επιπλέον για την ακολουθία $s(f;P_n)=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{a^2}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)$ παρατηρούμε ότι

$s(f;P_n)\le\frac{a^2}{2}\Rightarrow\frac{a^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\le\frac{a^2}{2}\Rightarrow\cancel{\frac{a^2}{2}}-\frac{a^2}{2n}\le\cancel{\frac{a^2}{2}}\Rightarrow-\frac{a^2}{2n}\le 0$, που ισχύει αφού $a>0$ και $n>0$

Το $\frac{a^2}{2}$ είναι το supremum των $s(f;P)$ για $P\subset P[0,a]$ αφού λόγω της πρότασης 1 έχουμε:

έστω $\varepsilon>0$. $\exists N_0\in\mathbb{N}: n>N_0\Rightarrow\left|s(f;P_n)-\frac{a^2}{2}\right|<\varepsilon\Rightarrow-\varepsilon<s(f;P_n)-\frac{a^2}{2}\Rightarrow s(f;P_n)>\frac{a^2}{2}-\varepsilon$

Άρα $\int_0^a f=\frac{a^2}{2}$

Με τον ίδιο τρόπο, για την ακολουθία $S(f;P_n)$ παρατηρούμε ότι
$S(f;P_n) \geq \frac{a^2}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq \frac{a^2}{2} \Rightarrow \cancel{\frac{a^2}{2}} + \frac{a^2}{2n} \geq \cancel{\frac{a^2}{2}} \Rightarrow \frac{a^2}{2n} \geq 0$, που ισχύει αφού $a>0$ και $n>0$

Το $\frac{a^2}{2}$ είναι το infimum των $S(f;P)$ για $P \in P[0,a]$ αφού λόγω της πρότασης 2 έχουμε:

έστω $\varepsilon>0$. $\exists N_0 \in \mathbb{N}: n>N_0 \Rightarrow \left|S(f;P_n)-\frac{a^2}{2}\right|<\varepsilon \Rightarrow S(f;P_n)-\frac{a^2}{2}<\varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow S(f;P_n)<\varepsilon+\frac{a^2}{2}$

Άρα $\overline{\int_0^a} f = \frac{a^2}{2}$

Τελικά $\underline{\int_0^a} f = \overline{\int_0^a} f = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \int_0^a f = \frac{a^2}{2}$

48. (Ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης)

Έστω ότι $\exists x_0 \in (a,b): f(x_0)>0$

Έστω επίσης $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$*. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[a,b]$,
$\exists \delta>0: |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow \frac{f(x_0)}{2}<f(x)<\frac{3f(x_0)}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$

Θεωρούμε ακόμη τη συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} f(x_0)/2, & x\in(x_0-\delta,x_0+\delta) \\ 0, & x\in\left([a,b]-(x_0-\delta,x_0+\delta)\right)\end{cases}$

Για $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ έχουμε $f(x)>\frac{f(x_0)}{2}=g(x)$ και
για $x\in\left([a,b]-(x_0-\delta,x_0+\delta)\right)$ έχουμε $f(x)\geq 0=g(x)$, άρα $\left(f(x)\geq g(x) \text{ στο } [a,b]\right)$ ①

① $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ ②

Είναι $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^{x_0-\delta} 0\,dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2}\,dx + \int_{x_0+\delta}^{b} 0\,dx = 0 + \frac{f(x_0)}{2}(\cancel{x_0}+\delta-\cancel{x_0}+\delta) + 0 = \delta f(x_0)$

② $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \delta f(x_0)>0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx>0$, που είναι άτοπο, αφού $\int_a^b f(x)dx=0$

* Σημ.: ως ε θα μπορούσε να είχε τεθεί οποιαδήποτε τιμή μικρότερη του $f(x_0)$ και θα εξυπηρετούσε και πάλι την απόδειξη.

49. (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

Έστω $f(x) = k\cdot g(x)$ στο $[a,b]$ με $k\in\mathbb{R}$

$$\left[\int_a^b f^2\right]^{1/2}\cdot\left[\int_a^b g^2\right]^{1/2} = \left[\int_a^b k^2 g^2\cdot\int_a^b g^2\right]^{1/2} = \left[k^2\int_a^b g^2\cdot\int_a^b g^2\right]^{1/2} = \left[k^2\cdot\left(\int_a^b g^2\right)^2\right]^{1/2} =$$

$$= \left|k\cdot\int_a^b g^2\right| = \left|\int_a^b g^2\cdot k\right| = \left|\int_a^b (f\cdot g)\right|$$

Άρα πράγματι ισχύει η ισότητα.

• Ωστόσο, αν $f(x)=k\cdot g(x)$ στο $[a,b]$, εκτός ενός σημείου $x_0\in(a,b)$, τότε τα παραπάνω ολοκληρώματα δεν μεταβάλλονται και επομένως η ισότητα εξακολουθεί να ισχύει.

Άρα $f(x)=k\cdot g(x)$ στο $[a,b]$ με $k\in\mathbb{R}$ είναι μια ικανή αλλά όχι αναγκαία συνθήκη.

50. (Περίπου μηδενική συνάρτηση)

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε:

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \left[\int_a^b f^2\right]^{1/2}\cdot\left[\int_a^b g^2\right]^{1/2} = \left[\int_a^b f^2\right]^{1/2}\cdot[0]^{1/2} = 0$$

Επειδή όμως $\left|\int_a^b fg\right| \geq 0$ (ιδιότητα απολύτου τιμής) θα είναι $\left|\int_a^b fg\right| = 0 \Rightarrow \int_a^b fg = 0$