Ονομ/νυμο: ΑΛΒΙΟΝΑ ΜΑΝΤΣΟ
Ομάδα ασκ: 4η
Αρ. Μητρ. 3200098

4η Ομάδα Ασκήσεων

22. (Η $|x|$ είναι παντού συνεχής)

Έστω $\varepsilon>0$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις για το $x_0\in\mathbb{R}$.

- Αν $x_0>0$ τότε $|x_0|=x_0$. Θέτουμε $\delta=\min\{x_0,\varepsilon\}$ οπότε $\delta\le x_0$ και $\delta\le\varepsilon$ ①. Επειδή $\delta\le x_0$ εξασφαλίζεται ότι $x>0$ όταν $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, ώστε $|x|=x$
- Έχουμε $|x-x_0|<\delta \Rightarrow ||x|-|x_0||\le\delta \overset{①}{\Rightarrow} ||x|-|x_0||<\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Άρα η f συνεχής στο $(0,+\infty)$
- Αν $x_0=0$ θέτουμε $\delta=\varepsilon$ και έχουμε $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |x-0|<\varepsilon \Rightarrow |x|<\varepsilon \Rightarrow ||x|-|0||<\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(0)|<\varepsilon$
  Άρα η f συνεχής στο 0.
- Αν $x_0<0$ τότε $|x_0|=-x_0$. Θέτουμε $\delta=\min\{-x_0,\varepsilon\}$ οπότε $\delta\le -x_0$ και $\delta\le\varepsilon$ ②. Επειδή $\delta\le -x_0$ εξασφαλίζεται ότι $x<0$ όταν $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ ώστε $|x|=-x$

Έχουμε $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |-|x|+|x_0||<\delta \Rightarrow |-(|x|-|x_0|)|<\delta \Rightarrow ||x|-|x_0||<\delta \overset{②}{\Rightarrow} ||x|-|x_0||<\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.
Άρα η f συνεχής στο $(-\infty,0)$. ▶ Συνεπώς η $f(x)=|x|$ είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

23. (Υπολογισμός ορίων)

(α') $\lim_{x\to0}\sin\sin x$. Γνωρίζουμε ότι η $\sin x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Άρα έχουμε
$\lim_{x\to0}\sin\sin x=\sin(\sin0)=\sin0=0$

(β') $\lim_{x\to0}\cos\sin x$. Γνωρίζουμε ότι οι $\cos x$ και $\sin x$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.
Άρα έχουμε $\lim_{x\to0}\cos\sin x=\cos(\sin0)=\cos0=1$

(γ') $\lim_{x\to1}\tan\frac{x^2+1}{x^3+2}$ Είναι $\lim_{x\to1}\frac{x^2+1}{x^3+2}=\frac{1^2+1}{1^3+2}=\frac{2}{3}$. Γνωρίζουμε ότι η $\tan x$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και το $\frac{2}{3}$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της $\tan x$.

Άρα έχουμε $\lim_{x\to1}\tan\frac{x^2+1}{x^3+2}=\tan\left(\frac{2}{3}\right)$

24. (Κοινό πρόσημο σε ανοικτή γειτονιά)

Αφού η f είναι συνεχής στο x_0 θα ισχύει ότι $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0: |x-x_0|<\delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

Άρα και για $\varepsilon'=|f(x_0)|$ $\exists \delta'>0: |x-x_0|<\delta' \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<|f(x_0)| \Rightarrow -|f(x_0)|<f(x)-f(x_0)<|f(x_0)| \Rightarrow f(x_0)-|f(x_0)|<f(x)<f(x_0)+|f(x_0)|$ (1)

- Αν $f(x_0)>0 \Rightarrow |f(x_0)|=f(x_0)$ τότε
  $\overset{(1)}{\Rightarrow} f(x_0)-f(x_0)<f(x)<f(x_0)+f(x_0) \Rightarrow 0<f(x)<2f(x_0)$.
  Δηλαδή υπάρχει $I=(x_0-\delta', x_0+\delta')$ (και $x_0 \in I$) τέτοιο ώστε
  $x \in I \Rightarrow f(x)>0$
- Αν $f(x_0)<0 \Rightarrow |f(x_0)|=-f(x_0)$ τότε
  $\overset{(1)}{\Rightarrow} f(x_0)-(-f(x_0))<f(x)<f(x_0)-f(x_0) \Rightarrow 2f(x_0)<f(x)<0$
  Δηλαδή υπάρχει $I=(x_0-\delta', x_0+\delta')$ (και $x_0 \in I$) τέτοιο ώστε
  $x \in I \Rightarrow f(x)<0$

25. (Σύνθεση συνεχούς συνάρτησης με ακολουθία)

Έστω κάποιο $\varepsilon>0$.
Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 έχουμε ότι $\exists \delta>0: |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ (σχέση 1)
Για το δ έχουμε ότι, αφού $a_n \to x_0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}^*: n>N_0 \Rightarrow |a(n)-x_0|<\delta \overset{(1)}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow |f(a(n))-f(x_0)|<\varepsilon$

Δηλαδή αποδείξαμε ότι για οποιοδήποτε $\varepsilon>0$ $\exists N_0 \in \mathbb{N}^*: n>N_0 \Rightarrow |f(a(n))-f(x_0)|<\varepsilon$
που σημαίνει ότι $\lim_{n\to+\infty} f(a(n)) = f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} a(n))$

26. (Συνεχής συνάρτηση με πεπερασμένο όριο στο άπειρο.)

- Έστω κάποιο $\varepsilon>0$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ θα υπάρχει X_1 τέτοιο ώστε $x>X_1 \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<f(x)-L<\varepsilon \Rightarrow L-\varepsilon<f(x)<\varepsilon+L$
  Αυτό σημαίνει ότι στο $(X_1,+\infty)$ η f είναι άνω και κάτω φραγμένη (δηλ. φραγμένη)

- Στο διάστημα $[\alpha, X_1]$ επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής, θα είναι φραγμένη (Θεώρημα 4.4).
  Τελικά η συνάρτηση είναι φραγμένη στο $[\alpha,X_1]\cup(X_1,+\infty)=[\alpha,+\infty)$, δηλαδή σε όλο το πεδίο ορισμού της.

27. (Συνεχής ρητή συνάρτηση)

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα I και λαμβάνει μόνο ρητές τιμές στο I. $f(I)$ είναι η εικόνα του διαστήματος I μέσω της f.
Έστω ότι η συνάρτηση f δεν είναι σταθερή. Σε αυτήν την περίπτωση γνωρίζουμε ότι $f(I)$ είναι διάστημα.
Έστω $x_0\in I$ και $f(x_0)\in f(I)$ με $f(x_0)\in\mathbb{Q}$. Λόγω της πυκνότητας των αρρήτων στο $\mathbb{R}$, $\exists\, \varepsilon>0$ όσο μικρό θέλουμε ώστε $(f(x_0)-\varepsilon)\in\mathbb{Q}'$ και $(f(x_0)-\varepsilon)\in f(I)$. Αυτό σημαίνει ότι $\exists\, x_1\in I$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=f(x_0)-\varepsilon$, δηλ. $f(x_1)\in\mathbb{Q}'$ που είναι άτοπο αφού η f λαμβάνει μόνο ρητές τιμές.
Συνεπώς το $f(I)$ είναι μονοσύνολο, δηλ. η f είναι σταθερή συνάρτηση, η $f(x)=c=f(x_0)$ με $c\in\mathbb{Q}$.

28. (Εύρεση ρίζας)

Έστω $g:[2,4]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x)-\frac{x}{2}$. Η g είναι συνεχής ως πράξη συνεχών (των $f, -\frac{x}{2}$)
Επειδή f διέρχεται από τα σημεία $(2,2)$ και $(4,1)$ έχουμε ότι

$$f(2)=2 \text{ και } f(4)=1$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ g(2)=f(2)-\frac{2}{2}=2-1=1>0 \\ \bullet\ g(4)=f(4)-\frac{4}{2}=1-2=-1<0 \end{array}\right\} g(2)\cdot g(4)<0$$

Συνεπώς για την g ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Bolzano στο $[2,4]$, οπότε υπάρχει $x_0\in(2,4)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0 \Rightarrow f(x_0)-\frac{x_0}{2}=0 \Rightarrow f(x_0)=\frac{x_0}{2}$

29. (Αντίστροφη υπερβολικού συνημιτόνου).

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in [0,+\infty)$. Η cosh είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ (ως πράξη παραγωγίσιμων) με $(\cosh)'(x) = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$(\cosh)'(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \Rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^x = e^{-x} \xRightarrow{e^x: 1-1} x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

x	0	$+\infty$
$(\cosh)'(x)$		$+$
$\cosh x$		$\nearrow$

$(\cosh)'(x) > 0 \Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0 \Rightarrow e^x - e^{-x} > 0 \Rightarrow e^x > e^{-x} \xRightarrow{e^x: 1-1}$
$x > -x \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$

Άρα για $x > 0$ έχουμε $(\cosh)'(x) > 0$ και επειδή επιπλέον cosh είναι συνεχής στο 0, θα είναι $\cosh \uparrow [0,+\infty)$

Αφού η cosh είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ θα είναι και 1-1 στο $[0,+\infty)$. Άρα αντιστρέφεται. Για το σύνολο τιμών της έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} \cosh x = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} \cosh x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to+\infty} e^x + \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\right) = \frac{1}{2}(+\infty + 0) = +\infty$$

Άρα $\cosh([0,+\infty)) = [1,+\infty)$

Συνεπώς, γνωρίζουμε ότι η αντίστροφη arccosh θα έχει πεδίο ορισμού $[1,+\infty)$ και σύνολο τιμών $[0,+\infty)$

- Θέτουμε $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow 2y = e^x + e^{-x} \Rightarrow e^x + e^{-x} - 2y = 0 \xRightarrow{\cdot e^x} e^{2x} + e^{-x+x} - 2ye^x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow e^{2x} - 2ye^x + e^0 = 0 \Rightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$ (1), όπου $y \in [1,+\infty)$ (δηλ. στο σύνολο τιμών της cosh)

Θέτουμε $\omega = e^x$ οπότε (1) $\Rightarrow \omega^2 - 2y\omega + 1 = 0$

$\Delta = (-2y)^2 - 4 = 4y^2 - 4 = 4(y^2-1) = 4(y-1)(y+1)$

y	$-\infty$	-1		1	
Δ	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Delta = 0 \Rightarrow y = 1$ ή $y = -1$

Για τα $y \in [1,+\infty)$, $\Delta > 0$ οπότε το τριώνυμο έχει δύο ρίζες:

$$\omega_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4(y^2-1)}}{2} = y \pm \sqrt{y^2-1}$$

Άρα $e^x = y \pm \sqrt{y^2-1}$, με $y \in [1,+\infty)$, δηλ. $x = \log(y + \sqrt{y^2-1})$ ή
$x = \log(y - \sqrt{y^2-1})$

Θα προσδιορίσουμε ποια εκ των δύο συναρτήσεων που προέκυψαν είναι η αντίστροφη της cosh.

Γνωρίζουμε ότι η αντίστροφη έχει σύνολο τιμών το $[0,+\infty)$.

Για τα σύνολα τιμών των προηγούμενων συναρτήσεων όταν $y\in[1,+\infty)$ έχουμε:

- $x=\log(y-\sqrt{y^2-1})$. • $\lim\limits_{y\to 1^+}\log(y-\sqrt{y^2-1})=\log(1-\sqrt{1-1})=\log(1)=0$.
(αφού η $y-\sqrt{y^2-1}$ είναι συνεχής στο 1 και η log είναι συνεχής στο $1-\sqrt{1^2-1}=1$)

• $\lim\limits_{y\to+\infty}\log(y-\sqrt{y^2-1})$. Είναι $\lim\limits_{y\to+\infty}(y-\sqrt{y^2-1})=$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{(y-\sqrt{y^2-1})(y+\sqrt{y^2-1})}{y+\sqrt{y^2-1}}\right)=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^2-(y^2-1)}{y+y\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y+y\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}}\right)=0$$

Άρα $\lim\limits_{y\to 0}\log y=-\infty$

Δηλαδή για $y\in[1,+\infty)$ προκύπτει σύνολο τιμών $(-\infty,0]$ (που δεν είναι το ζητούμενο)

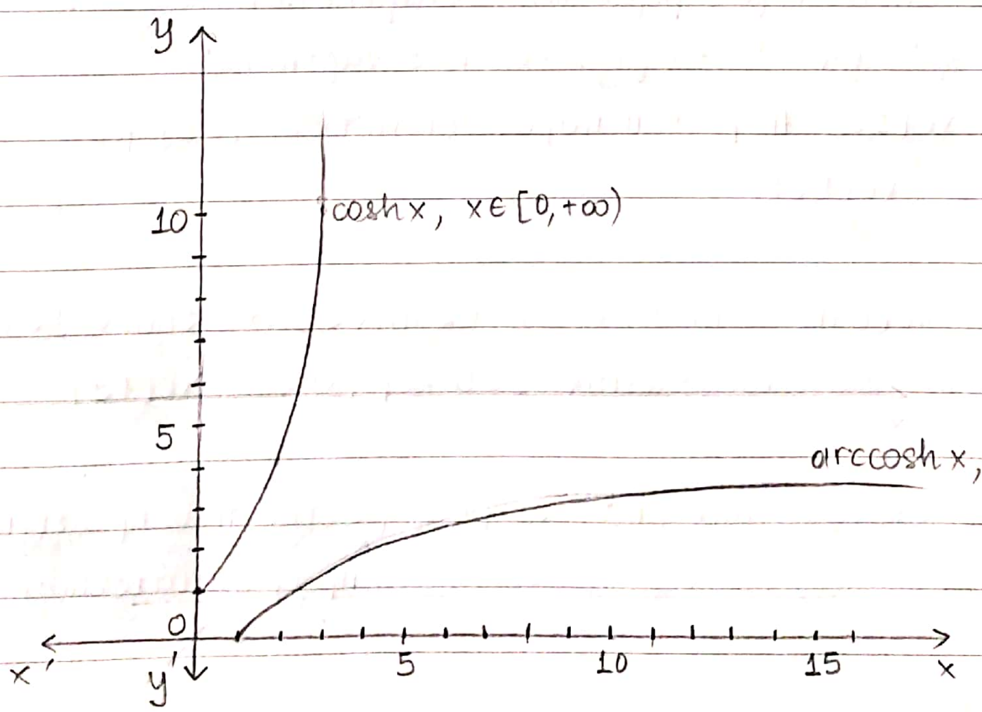
- $x=\log(y+\sqrt{y^2-1})$. • $\lim\limits_{y\to 1^+}\log(y+\sqrt{y^2-1})=\log(1+\sqrt{1-1})=\log 1=0$ (λόγω συνέχεια όπως πάνω)

• $\lim\limits_{y\to+\infty}\log(y+\sqrt{y^2-1})$. Είναι $\lim\limits_{y\to+\infty}(y+\sqrt{y^2-1})=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(y+y\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}\right)$

$=(+\infty)+(+\infty)\cdot(1-0)=+\infty$. Άρα $\lim\limits_{y\to+\infty}\log y=+\infty$

Δηλαδή για $y\in[1,+\infty)$ προκύπτει το ζητούμενο σύνολο τιμών $[0,+\infty)$

→ Συνεπώς $\operatorname{arccosh} y=\log(y+\sqrt{y^2-1})$, $y\in[1,+\infty)$



30, 31

```python
def bisection(a,b,f,Ex,Ef):
    m=(a+b)/2
    n=1
    print('n \t a \t\t b \t\t m \t\t f(a) \t\t f(b) \t\t f(m)')
    while (b-a)/2>Ex and abs(f(m))>Ef:
        if f(m)*f(a)<0:
            b=m
        elif f(m)*f(b)<0:
            a=m
        print(n,'\t', "{:.4f}".format(round (a,4)),'\t', "{:.4f}".format(round(b,4)),\
        '\t', "{:.4f}".format(round(m,4)),'\t', "{:.4f}".format(round(f(a),4)),'\t',\
        "{:.4f}".format(round(f(b),4)),'\t', "{:.4f}".format(round(f(m),4)))
        m=(a+b)/2
        n+=1
    return m

def funct(x):
    from math import cos
    return 2*cos(x) - x
bisection(1, 3, funct, 0.001, 0.001)
```

PROBLEMS   OUTPUT   DEBUG CONSOLE   TERMINAL

n	a	b	m	f(a)	f(b)	f(m)
1	1.0000	2.0000	2.0000	0.0806	-2.8323	-2.8323
2	1.0000	1.5000	1.5000	0.0806	-1.3585	-1.3585
3	1.0000	1.2500	1.2500	0.0806	-0.6194	-0.6194
4	1.0000	1.1250	1.1250	0.0806	-0.2626	-0.2626
5	1.0000	1.0625	1.0625	0.0806	-0.0891	-0.0891
6	1.0000	1.0312	1.0312	0.0806	-0.0038	-0.0038
7	1.0156	1.0312	1.0156	0.0386	-0.0038	0.0386
8	1.0234	1.0312	1.0234	0.0174	-0.0038	0.0174
9	1.0273	1.0312	1.0273	0.0068	-0.0038	0.0068
10	1.0293	1.0312	1.0293	0.0015	-0.0038	0.0015

31. (Αριθμητικός υπολογισμός ρίζας της συνάρτησης)

Απάντηση στο ερώτημα: "Πόσες ρίζες έχει η συνάρτηση;"

$f(x)=2\cos x - x$, $x\in[1,3]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,3]$ με
$f'(x)=-2\sin x-1$, $x\in[1,3]$

Γνωρίζουμε ότι για $x\in(0,\pi)$ είναι $\sin x>0 \Rightarrow -2\sin x<0 \Rightarrow -2\sin x-1<-1<0$
Επειδή $[1,3]\subseteq(0,\pi)$, θα είναι $-2\sin x-1<0 \Rightarrow f'(x)<0$, $x\in[1,3]$
Άρα $f\downarrow[1,3]$
Επομένως η f έχει ακριβώς μια ρίζα στο $[1,3]$ (αυτήν που προσεγγίσαμε προγραμματιστικά)

32. (Συνέχεια Lipschitz συνημιτόνου)

$f(x)=A\cos(ax+b)$, $A,a,b\in\mathbb{R}$

$|f(x)-f(y)| = |A\cos(ax+b)-A\cos(ay+b)| = |A(\cos(ax+b)-\cos(ay+b))| =$

$\overset{(1)}{=} \left|A\left(-2\sin\left(\frac{ax+b+ay+b}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{ax+\cancel{b}-ay-\cancel{b}}{2}\right)\right)\right| =$

$= |-2A|\left|\sin\left(\frac{ax+ay+2b}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{ax-ay}{2}\right)\right| \overset{(2)}{\leq} |-2A|\left|\sin\left(\frac{ax-ay}{2}\right)\right| \overset{(3)}{\leq} |-\cancel{2}A|\left|\frac{ax-ay}{\cancel{2}}\right| =$

$= |A||a(x-y)| = |A\cdot a||x-y|$

Άρα η f είναι Lipschitz συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $C=|A\cdot a|$

(1) Άσκηση 2.19
(2) Γενικά $0\leq|\sin x|\leq 1 \Rightarrow |y||\sin x|\leq|y|$, $y\in\mathbb{R}$
(3) Πρόταση 2.2.3.