3^{η} Ομάδα Ασκήσεων

21. (Τέσσερα ζάρια)

(α') Έστω τα ενδεχόμενα

A = " Όλες οι ζαριές διαφορετικές"

B = " 1η και 4η ζαριά διαφορετικές"

Προφανώς ισχύει $A \subseteq B$ και συνεπώς $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \overset{A\subseteq B}{=} \dfrac{P(A)}{P(B)}$ ①

Έχουμε $|A| = 6\cdot5\cdot4\cdot3 = 360$ καθώς για να είναι όλες οι ζαριές διαφορετικές υπάρχουν 6 επιλογές για την πρώτη ζαριά, $6-1=5$ για τη 2η, $6-2=4$ για την 3η και $6-3=3$ για την 4η

$|B| = 6\cdot6\cdot6\cdot5 = 1080$ καθώς υπάρχουν $6-1=5$ επιλογές για την 4η ώστε να είναι διαφορετική της 1ης

$|\Omega| = 6^4 = 1296$

Άρα $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{360}{1296}$ και $P(B) = \dfrac{|B|}{|\Omega|} = \dfrac{1080}{1296}$, άρα ① $\Rightarrow P(A|B) = \dfrac{36\cancel{0}}{\cancel{1296}}\cdot\dfrac{\cancel{1296}}{108\cancel{0}} = \dfrac{1}{3}$

(β') Έστω το ενδεχόμενο Γ = " Δύο διαφορετικά ζευγάρια όμοιων αποτελεσμάτων"

Επίσης έστω Δ = " 1ο = 3ο και 2ο = 4ο με 1ο ≠ 4ο "

E = " 1ο = 2ο και 3ο = 4ο με 1ο ≠ 4ο "

Z = " 1ο = 4ο και 2ο = 3ο με 1ο ≠ 2ο " οπότε $\Gamma = \Delta \cup E \cup Z$

Είναι $P(\Gamma|B) = \dfrac{P(\Gamma\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P((\Delta\cup E\cup Z)\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P((\Delta\cap B)\cup(E\cap B)\cup(Z\cap B))}{P(B)}$ ②

Προφανώς $\Delta \subseteq B \Rightarrow \Delta\cap B = \Delta$, $E\subseteq B \Rightarrow E\cap B = E$ και Z, B είναι ξένα οπότε $Z\cap B = \varnothing$

και ② $\Rightarrow P(\Gamma|B) = \dfrac{P(\Delta\cup E\cup\varnothing)}{P(B)} = \dfrac{P(\Delta)+P(E)+P(\varnothing)}{P(B)} = \dfrac{P(\Delta)+P(E)+0}{P(B)}$ ③

Είναι $|\Delta| = |E| = \binom{6}{2}\cdot 2$ καθώς επιλέγουμε από τους 6 δυνατούς αριθμούς τους 2 για να "καλύψουμε" τα ζεύγη των θέσεων που προσδιορίζει το εκάστοτε ενδεχόμενο και υπάρχουν 2 τρόποι για τη διευθέτηση αυτών των 2 αριθμών, (π.χ. στο ενδεχόμενο Δ μπορούν να επιλεγούν οι αριθμοί 1 και 5 που μπορούν να δημιουργήσουν τις τετράδες 1515, 5151)

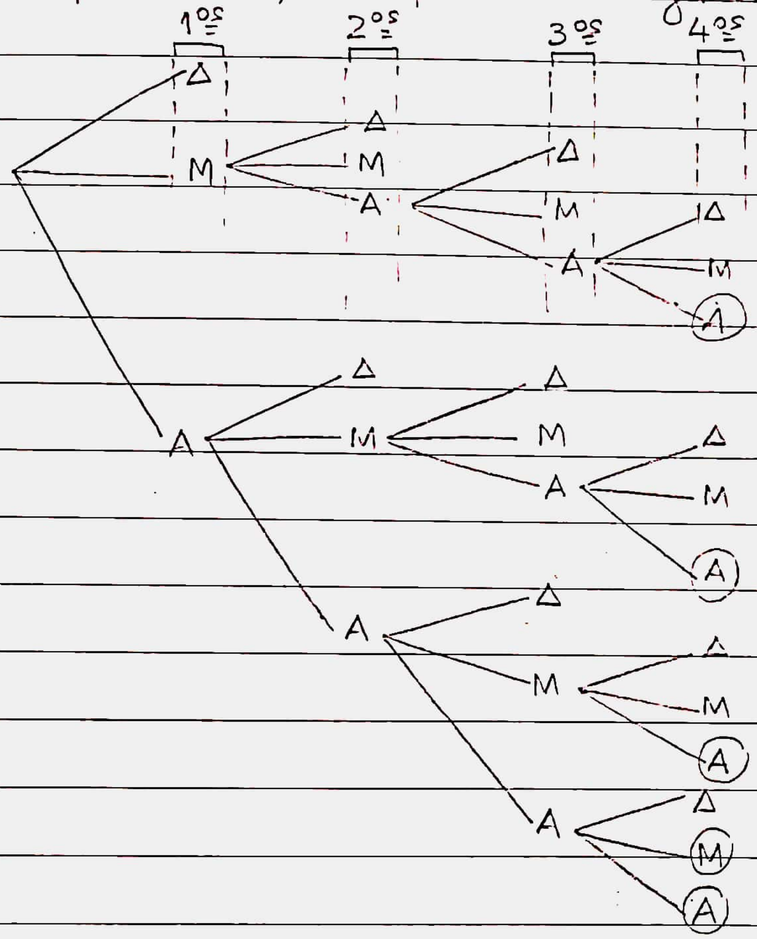
↳ Συνεπώς $P(\Delta) = P(E) = \dfrac{6!}{2!4!}\cdot\dfrac{1}{1296}$ και ③ $\Rightarrow P(\Gamma|B) = 2\cdot\cancel{2}\cdot\dfrac{6!}{\cancel{2}!4!}\cdot\dfrac{1}{\cancel{1296}}\cdot\dfrac{\cancel{1296}}{1080} = \dfrac{60}{1080} = \dfrac{1}{18}$

22. (Πινιάτα)

Μπορεί να κατασκευαστεί το ακόλουθο δενδροδιάγραμμα όπου σε κάθε επίπεδο παριστάνεται το χτύπημα του αντίστοιχου σε σειρά παιδιού ως εξής:

- Δ: Δυνατό με $P(\Delta)=\frac{1}{4}$
- Μ: Μέτριο με $P(M)=\frac{1}{4}$
- Α: Αστοχία με $P(A)=\frac{1}{2}$

(Σε περίπτωση που η πινιάτα σπάσει πριν τα 4 χτυπήματα, το παιχνίδι σταματάει εκεί, κι ας μην έχουν παίξει όλοι)



(Σύμβαση: P(ΜΑΑΑ)=P(ΜπΑπΑπΑ) κτλ)

Τα αποτελέσματα σε κύκλο είναι αυτά που αντιστοιχούν σε μη σπάσιμο της πινιάτας (έστω Σ' αυτό το ενδεχόμενο)

Είναι $P(\Sigma')=P(MAAA \cup AMAA \cup AAMA \cup AAAM \cup AAAA)=$

$= P(MAAA)+P(AMAA)+P(AAMA)+P(AAAM)+P(AAAA)$ (Ανεξάρτητα χτυπήματα)

$= P(M)\cdot P(A)\cdot P(A)\cdot P(A)+P(A)\cdot P(M)\cdot P(A)\cdot P(A)+P(A)\cdot P(A)\cdot P(M)\cdot P(A)+$

$+P(A)\cdot P(A)\cdot P(A)\cdot P(M)+P(A)\cdot P(A)\cdot P(A)\cdot P(A)=$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}=\frac{6}{32}$

Γνωρίζουμε ότι $P(\Sigma) = 1 - P(\Sigma') = 1 - \frac{6}{32} = \frac{32-6}{32} = \frac{26}{32} = 0.8125$ η πιθανότητα να σπάσει η πινιάτα

23. (Ασθένειες)

Έστω τα ενδεχόμενα

- A : Ο ασθενής έχει την ασθένεια A
- B : -//- B
- C : -//- C
- Θ : Το αποτέλεσμα το τέστ να είναι θετικό (άρα Θ': αρνητικό τεστ)

Γνωρίζουμε ότι $P(\Theta|A) = 0.9$ $P(\Theta|B) = 0.5$ $P(\Theta|C) = 0.1$ και

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$$

Από τον κανόνα του Bayes και με δεδομένο ότι ο ασθενής έχει σίγουρα <u>μια ακριβώς</u> εκ των ασθενειών A, B, C, έχουμε:

$$P(A|\Theta) = \frac{P(A\cap\Theta)}{P(\Theta)} = \frac{P(\Theta|A)\cdot P(A)}{P(\Theta|A)\cdot P(A) + P(\Theta|B)\cdot P(B) + P(\Theta|C)\cdot P(C)} =$$

$$= \frac{0,9\cdot 1/3}{0,9\cdot\frac{1}{3} + 0,5\cdot\frac{1}{3} + 0,1\cdot\frac{1}{3}} = \frac{0,9}{0,9+0,5+0,1} = \frac{0,9}{1,5} = 0,6$$

$$P(B|\Theta) = \frac{P(B\cap\Theta)}{P(\Theta)} = \frac{P(\Theta|B)\cdot P(B)}{P(\Theta|A)\cdot P(A) + P(\Theta|B)\cdot P(B) + P(\Theta|C)\cdot P(C)} =$$

$$= \frac{0,5\cdot 1/3}{0,9\cdot\frac{1}{3} + 0,5\cdot\frac{1}{3} + 0,1\cdot\frac{1}{3}} = \frac{0,5}{1,5} = \frac{1}{3} = 0,\overline{3}$$

$$P(C|\Theta) = \frac{P(C\cap\Theta)}{P(\Theta)} = \frac{P(\Theta|C)\cdot P(C)}{P(\Theta|A)\cdot P(A) + P(\Theta|B)\cdot P(B) + P(\Theta|C)\cdot P(C)} =$$

$$= \frac{0,1\cdot 1/3}{0,9\cdot\frac{1}{3} + 0,5\cdot\frac{1}{3} + 0,1\cdot\frac{1}{3}} = \frac{0,1}{1,5} = 0,0\overline{6}$$

24. (Τριαδικό Κανάλι)

(α')

Έστω τα ενδεχόμενα

- $0in$: είσοδος 0 • $1in$: είσοδος 1 • $2in$: είσοδος 2
- $0out$: έξοδος 0 • $1out$: έξοδος 1 • $2out$: έξοδος 2

Άρα $P(0in) = P(1in) = 1/4$ και $P(2in) = 1/2$

- $P(0out) = P(0out|0in)\cdot P(0in) + P(0out|1in)\cdot P(1in) + P(0out|2in)\cdot P(2in)$
$$= (1-\varepsilon)\cdot\frac{1}{4} + \varepsilon\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}(1-\cancel{\varepsilon}+\cancel{\varepsilon}) = \frac{1}{4}$$

- $P(1out) = P(1out|1in)\cdot P(1in) + P(1out|0in)\cdot P(0in) + P(1out|2in)\cdot P(2in) =$
$$= (1-\varepsilon)\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{4} + \varepsilon\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}(1-\varepsilon+2\varepsilon) = \frac{1}{4}(1+\varepsilon)$$

- $P(2out) = P(2out|2in)\cdot P(2in) + P(2out|1in)\cdot P(1in) + P(2out|0in)\cdot P(0in) =$
$$= (1-\varepsilon)\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{4} + \varepsilon\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}(2-2\varepsilon+\varepsilon) = \frac{1}{4}(2-\varepsilon)$$

(β') Από τον κανόνα του Bayes έχουμε

- $P(1in|1out) = \dfrac{P(1in\cap 1out)}{P(1out)} = \dfrac{P(1out|1in)\cdot P(1in)}{P(1out|1in)\cdot P(1in) + P(1out|2in)\cdot P(2in)} \overset{*}{=}$

$$\overset{(\alpha')}{=} \frac{(1-\varepsilon)\cdot 1/4}{(1-\varepsilon)\cdot\frac{1}{4} + \varepsilon\cdot\frac{1}{2}} = \frac{(1-\varepsilon)\cdot\cancel{1/4}}{(1+\varepsilon)\cdot\cancel{1/4}} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

* Είναι $P(1out|0in)=0$

- $P(0in|1out) = \dfrac{P(0in\cap 1out)}{P(1out)} = \dfrac{P(1out|0in)\cdot P(0in)}{P(1out|0in)\cdot P(0in) + P(1out|1in)\cdot P(1in) + P(1out|2in)\cdot P(2in)} =$

$= 0$ (αναμενόμενο, αφού το 0 δεν μεταδίδεται ποτέ ως 1)

- $P(2in|1out) = \dfrac{P(2in\cap 1out)}{P(1out)} = \dfrac{P(1out|2in)\cdot P(2in)}{P(1out|1in)\cdot P(1in) + P(1out|2in)\cdot P(2in)} \overset{*}{=}$

$$\overset{(\alpha')}{=} \frac{\varepsilon\cdot 1/2}{(1-\varepsilon)\cdot\frac{1}{4} + \varepsilon\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1/2(\varepsilon)}{(1+\varepsilon)1/4} = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

* Είναι $P(1out|0in)=0$

πουκαμισάς

25. (Στίγμα)

Έστω τα ενδεχόμενα

$i\Gamma$ με $i=0,1,2$: Οι i γονείς έχουν το στίγμα (κανένας ($i=0$), ακριβώς 1 ($i=1$), και οι 2 ($i=2$))

Σ_j με $j=1,2$: Το jº παιδί έχει το στίγμα

Γ: Κάποιο άτομο του πληθυσμού (γονιός) έχει το στίγμα

Δεδομένα

- $P(\Gamma)=0{,}01$ • $P(\Sigma_1|1\Gamma)=P(\Sigma_2|1\Gamma)=0{,}02$ • $P(\Sigma_1|2\Gamma)=P(\Sigma_2|2\Gamma)=0{,}5$
- $P(\Sigma_1|0\Gamma)=P(\Sigma_2|0\Gamma)=0$. Σύμβαση $\Sigma_1\Sigma_2=\Sigma_1\cap\Sigma_2$

(α') $P(\Sigma_1\Sigma_2|1\Gamma) \overset{\text{ανεξαρτησία}}{=\!=} P(\Sigma_1|1\Gamma)\cdot P(\Sigma_2|1\Gamma)=0{,}02\cdot 0{,}02=0{,}0004$

(β') $P(\Sigma_1\Sigma_2)=P(\Sigma_1\Sigma_2|2\Gamma)\cdot P(2\Gamma)+P(\Sigma_1\Sigma_2|1\Gamma)\cdot P(1\Gamma)+P(\Sigma_1\Sigma_2|0\Gamma)\cdot P(0\Gamma)$ ①

Έχουμε:

$P(0\Gamma) \overset{\text{ανεξαρτησία}}{=\!=} P(\Gamma')\cdot P(\Gamma')=0{,}99\cdot 0{,}99=0{,}9801$

$P(2\Gamma) \overset{\text{ανεξαρτησία}}{=\!=} P(\Gamma)\cdot P(\Gamma)=0{,}01\cdot 0{,}01=0{,}0001$

$P(1\Gamma)=1-(P(0\Gamma)+P(2\Gamma))=1-0{,}9801-0{,}0001=0{,}0198$

(1)⇒ $P(\Sigma_1\Sigma_2)=\cancel{P(\Sigma_1\Sigma_2|0\Gamma)}^{0}\cdot P(0\Gamma)+P(\Sigma_1\Sigma_2|1\Gamma)\cdot P(1\Gamma)+P(\Sigma_1\Sigma_2|2\Gamma)\cdot P(2\Gamma)=$

$\overset{\text{ανεξαρτησία}}{=\!=} P(\Sigma_1|1\Gamma)\cdot P(\Sigma_2|1\Gamma)\cdot P(1\Gamma)+P(\Sigma_1|2\Gamma)\cdot P(\Sigma_2|2\Gamma)\cdot P(2\Gamma)=$

$=0{,}02\cdot 0{,}02\cdot 0{,}0198+0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}0001=0{,}00003292$

(γ') Αναζητούμε τις $P(1\Gamma|\Sigma_1\Sigma_2)$, $P(2\Gamma|\Sigma_1\Sigma_2)$

Από τον κανόνα του Bayes έχουμε:

- $P(1\Gamma|\Sigma_1\Sigma_2)=\dfrac{P(1\Gamma\cap\Sigma_1\Sigma_2)}{P(\Sigma_1\Sigma_2)}=\dfrac{P(\Sigma_1\Sigma_2|1\Gamma)P(1\Gamma)}{P(\Sigma_1\Sigma_2|1\Gamma)\cdot P(1\Gamma)+P(\Sigma_1\Sigma_2|2\Gamma)\cdot P(2\Gamma)+\cancel{P(\Sigma_1\Sigma_2|0\Gamma)}^{0}\cdot P(0\Gamma)}$

$\overset{(\alpha),(\beta)}{=}\dfrac{0{,}0004\cdot 0{,}0198}{0{,}0004\cdot 0{,}0198+0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}0001}\simeq 0{,}24$

- $P(2\Gamma|\Sigma_1\Sigma_2)=\dfrac{P(2\Gamma\cap\Sigma_1\Sigma_2)}{P(\Sigma_1\Sigma_2)}=\dfrac{P(\Sigma_1\Sigma_2|2\Gamma)\cdot P(2\Gamma)}{P(\Sigma_1\Sigma_2|1\Gamma)P(1\Gamma)+P(\Sigma_1\Sigma_2|2\Gamma)\cdot P(2\Gamma)+\cancel{P(\Sigma_1\Sigma_2|0\Gamma)}^{0}\cdot P(0\Gamma)}$

$\overset{(\alpha),(\beta)}{=}\dfrac{0{,}25\cdot 0{,}0001}{0{,}0004\cdot 0{,}0198+0{,}25\cdot 0{,}0001}\simeq 0{,}76$

26. (Δύο κέρματα)

Εφόσον το νόμισμα διαλέγεται χωρίς προτίμηση, οι πιθανότητες να επιλεγούν τα N_1, N_2 είναι $P(N_1) = P(N_2) = 1/2$

Για τον προσδιορισμό της ανεξαρτησίας εξετάζουμε αν επαληθεύεται η σχέση $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Έχουμε $P(A\cap B) = P(A\cap B \mid N_1) \cdot P(N_1) + P(A \cap B \mid N_2) \cdot P(N_2)$ ①

Με δέσμευση ως προς N_1 ή N_2, τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα και συνεπώς ① $\Rightarrow P(A\cap B) = P(A|N_1) \cdot P(B|N_1) \cdot P(N_1) + P(A|N_2) \cdot P(B|N_2) \cdot P(N_2)$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{9}{32} = \frac{4+9}{32} = \frac{13}{32}$$

Επίσης $P(A) = P(A|N_1) \cdot P(N_1) + P(A|N_2) \cdot P(N_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

και $P(B) = P(B|N_1) \cdot P(N_1) + P(B|N_2) \cdot P(N_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

↳ Συνεπώς $P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{64} \neq P(A \cap B) = \frac{13}{32}$ και άρα τα A, B **δεν** είναι ανεξάρτητα. (Το αποτέλεσμα αυτό συμπίπτει με το διαισθητικά αναμενόμενο αφού αν δεν γνωρίζουμε ποιο κέρμα έχει επιλεχθεί και έρθει στην πρώτη ρίψη κορώνα, αυξάνεται η πιθανότητα να έρθει και στη δεύτερη ρίψη κορώνα γιατί έχει αυξηθεί η πιθανότητα να έχει επιλεγεί το κίβδηλο)