Ονομ/νυμο: ΑΛΒΙΟΝΑ ΜΑΝΤΣΟ
Ομάδα ασκ.: 3η
Αρ. Μητρ.: 3200098

3η Ομάδα Ασκήσεων

14. (Αλλαγή μεταβλητής)

($\Rightarrow$)

- Έστω ότι $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ (1)

Έστω $\varepsilon>0$

Θέτω $\delta'=\delta/|a|>0$

$0<\left|h-\frac{x_0-b}{a}\right|<\delta' \xRightarrow{\cdot|a|} 0<|a|\left|h-\frac{x_0-b}{a}\right|<\delta \Rightarrow 0<\left|ah-\cancel{a}\left(\frac{x_0-b}{\cancel{a}}\right)\right|<\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow 0<|ah-x_0+b|<\delta \Rightarrow 0<|(ah+b)-x_0|<\delta \overset{1}{\Rightarrow} |f(ah+b)-L|<\varepsilon$

Άρα $\lim\limits_{h\to\frac{x_0-b}{a}} f(ah+b)=L$

($\Leftarrow$)

- Έστω ότι $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: 0<\left|h-\left(\frac{x_0-b}{a}\right)\right|<\delta \Rightarrow |f(ah+b)-L|<\varepsilon$ (2)

Έστω $\varepsilon>0$.

Θέτω $\delta'=\delta\cdot|a|>0$

$0<|x-x_0|<\delta' \Rightarrow 0<|x-x_0|<\delta|a| \xRightarrow{:|a|} 0<\frac{|x-x_0|}{|a|}<\delta \Rightarrow 0<\left|\frac{x}{a}-\frac{x_0}{a}\right|<\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow 0<\left|\frac{x}{a}-\frac{b}{a}-\frac{x_0}{a}+\frac{b}{a}\right|<\delta \Rightarrow 0<\left|\frac{x-b}{a}-\left(\frac{x_0-b}{a}\right)\right|<\delta \overset{2}{\Rightarrow} \left|f\left(\cancel{a}\cdot\frac{x-\cancel{b}}{\cancel{a}}+\cancel{b}\right)-L\right|<\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$

Δηλαδή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to\frac{x_0-b}{a}} f(ah+b)=L$

15. (Όριο $\Rightarrow$ Φράγμα)

Αφού το όριο υπάρχει έχουμε ότι $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-k|<\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow -\varepsilon<f(x)-k<\varepsilon \Rightarrow k-\varepsilon<f(x)<k+\varepsilon$ (1)

Θα ισχύει ότι $\forall \varepsilon'>0: k-\varepsilon'>0 \Rightarrow \varepsilon'<k\ \ \exists \delta'>0$ ώστε $0<|x-x_0|<\delta' \overset{1}{\Rightarrow} 0<k-\varepsilon'<f(x)<k+\varepsilon'$

Οπότε το αναζητούμενο P είναι το $k-\varepsilon'$ για οποιοδήποτε $\varepsilon'<k$ και η ανοιχτή γειτονιά είναι η $(x_0-\delta', x_0+\delta')-\{x_0\}$ για τα αντίστοιχα δ' που ικανοποιούν τη σχέση $0<|x-x_0|<\delta' \Rightarrow |f(x)-k|<\varepsilon'$

Για παράδειγμα αν $\varepsilon' = \frac{k}{2} > 0$ (δηλ. είναι $\varepsilon' < k$) έχουμε ότι:

$\exists \delta' : 0 < |x - x_0| < \delta' \Rightarrow |f(x) - k| < \varepsilon' \Rightarrow |f(x) - k| < \frac{k}{2} \Rightarrow -\frac{k}{2} < f(x) - k < \frac{k}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{k}{2} < f(x) < \frac{3k}{2} \Rightarrow 0 < k < f(x) < \frac{3k}{2}$

δηλαδή $x \in (x_0 - \delta', x_0 + \delta') - \{x_0\} \Rightarrow f(x) > \frac{k}{2}$ και $\frac{k}{2} \in \mathbb{R}_+^*$

16. (Όριο γινομένου)

Η $g(x)$ είναι φραγμένη σε μια ανοιχτή γειτονιά I του x_0 άρα για $x \in I - \{x_0\}$ θα ισχύει $|g(x)| \leq M$, $M > 0$

Έχουμε $|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq |f(x)| \cdot M$

$|f(x) \cdot g(x)| \leq |f(x)| \cdot M \Leftrightarrow -|f(x)| \cdot M \leq f(x) \cdot g(x) \leq |f(x) \cdot M|$

Ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to x_0} \left(-|f(x)| \cdot M\right) \overset{M>0}{=} \lim\limits_{x \to x_0} \left(-|f(x) \cdot M|\right) = -\left|\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot M)\right| = -\left|\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} M\right| = -|0 \cdot M| = 0$

και $\lim\limits_{x \to x_0} \left(|f(x)| \cdot M\right) = \lim\limits_{x \to x_0} |f(x) \cdot M| = \left|\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} M\right| = |0 \cdot M| = 0.$

- Άρα από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} -|f(x)| \cdot M = \lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| M = 0$

17. (Όριο περιοδικής συνάρτησης)

Έστω ότι το όριο υπάρχει, δηλ. $\forall M \ \exists X : x > X \Rightarrow f(x) > M$

Έστω $M > 0$ και έστω $X_{min} = \min\{X / x > X \Rightarrow f(x) > M\}$

Οπότε για κάποιο $x_1 < X_{min}$ και για το οποίο ισχύει $0 < X_{min} - x_1 < T$ θα είναι $f(x_1) \leq M$

Σε αυτήν την περίπτωση $x_1 + T > X_{min}$ άρα θα πρέπει $f(x_1 + T) > M$

το οποίο είναι άτοπο αφού $f(x_1 + T) = f(x_1) \leq M$ καθώς η συνάρτηση είναι περιοδική.

Άρα το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ δεν μπορεί να ισχύει.

* Σημείωση: Σε ιδιάζουσες περιπτώσεις όπου δεν υπάρχει το $\min\{X / x > X \Rightarrow f(x) > M\}$ θα υπάρχει σίγουρα το $\inf\{X / x > X \Rightarrow f(x) > M\}$ οπότε η αποδεικτική διαδικασία είναι όμοια

18. (Όρια)

(α') $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{|\cos x|}{2}\right)^x$

Γνωρίζουμε ότι $0\leq|\cos x|\leq 1 \Leftrightarrow 0\leq \frac{|\cos x|}{2}\leq\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0^x\leq\left(\frac{|\cos x|}{2}\right)^x\leq\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Έχουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$ (γιατί $\frac{1}{2}<1$) και $\lim_{x\to+\infty}0^x=\lim_{x\to+\infty}0=0$.

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{|\cos x|}{2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}0^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$

(β') Με προσαρμογή της πρότασης 3.8 έχουμε ότι μια συνάρτηση f δεν έχει όριο καθώς $x\to+\infty$ αν υπάρχουν A,B με $A<B$ ώστε $\forall X$ να μπορούμε να βρούμε ένα $x_1>X$ ώστε $f(x_1)\leq A$ και ένα $x_2>X$ ώστε $f(x_2)\geq B$

Έστω λοιπόν $f(x)=|\cos x|^x$

- $\forall X$ $\exists k\in\mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $2k\pi>X$ και θα είναι $f(2k\pi)=|\cos(2k\pi)|^x=|1|^x=1^x=1$

  Δηλαδή για $x_1=2k\pi>X$ έχουμε $f(x_1)\geq 1$ (αν ισχύει το "=" θα ισχύει και "≥")

- $\forall X$ $\exists k\in\mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $2k\pi+\frac{\pi}{2}>X$ και θα είναι $f(2k\pi+\frac{\pi}{2})=$

  $=|\cos(2k\pi+\frac{\pi}{2})|^x=|0|^x=0^x=0$

  Δηλαδή για $x_2=2k\pi+\frac{\pi}{2}>X$ έχουμε $f(x_2)\leq 0$ (αν ισχύει το "=" θα ισχύει και "≤")

Άρα δεν υπάρχει το όριο.

19. (Όριο ρητής συνάρτησης)

Έστω $\varepsilon>0$

$|f(x)-L|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{10x}{x+5}-10\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{10x-10(x+5)}{x+5}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{\cancel{10x}-\cancel{10x}-50}{x+5}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{|-50|}{|x+5|}<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{50}{|x+5|}<\varepsilon \Leftrightarrow 50<\varepsilon|x+5| \Leftrightarrow |x+5|>\frac{50}{\varepsilon} \Leftarrow x>\frac{50}{\varepsilon}-5$ (1)

Θέτοντας, λοιπόν, $X=\frac{50}{\varepsilon}-5$ έχουμε $x>X \Rightarrow x>\frac{50}{\varepsilon}-5 \overset{(1)}{\Rightarrow} \ldots \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{10x}{x+5}=10$

20. (Αύξουσα Συγκλίνουσα Συνάρτηση)

Θα δείξουμε ότι η f είναι άνω φραγμένη και μάλιστα από το L.
Έστω ότι η f δεν έχει άνω φράγμα το L. Άρα θα υπάρχει x_1 ώστε $f(x_1)>L$ δηλ.
$\exists \varepsilon'>0: f(x_1)=L+\varepsilon' \Rightarrow \varepsilon'=f(x_1)-L$ (1)

- Επειδή η f είναι αύξουσα έχουμε $x>x_1 \Rightarrow f(x)\geq f(x_1) \overset{(1)}{\Rightarrow} f(x)\geq L+\varepsilon'$
  δηλ. $x\in(x_1,+\infty)\Rightarrow f(x)\geq L+\varepsilon'$ (2)
- Όμως, λόγω της ύπαρξης του ορίου ισχύει ότι
  για το $\varepsilon'>0$ $\exists X: x>X \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon' \Rightarrow -\varepsilon'<f(x)-L<\varepsilon' \Rightarrow f(x)<\varepsilon'+L$
  δηλ. $x\in(X,+\infty)\Rightarrow f(x)<L+\varepsilon'$ (3)

Από τα (2),(3) προκύπτει ότι για $x\in(\max\{x_1,X\},+\infty)$* η πρόταση 2 είναι άτοπη. Άρα η f έχει άνω φράγμα το L, δηλ. είναι άνω φραγμένη.

* Σημείωση: Προφανώς $(\max\{x_1,X\},+\infty)\subseteq(x_1,+\infty)$ και
$(\max\{x_1,X\},+\infty)\subseteq(X,+\infty)$

21. (Όρια)

(α΄) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}\sqrt{1+\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{\sin^2 x}} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|}$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{1+\cos x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\sqrt{1+\cos 0}}{1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

- $\lim_{x\to 0^-} \frac{x\sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\sqrt{1+\cos x}}{-\sin x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{-\frac{\sin x}{x}} = \frac{\sqrt{1+\cos 0}}{-1} = \frac{\sqrt{1+1}}{-1} = -\sqrt{2}$

(β΄) $\lim_{h\to 0^+} \sup_{\{0<x<h\}} \sin\frac{1}{x}$

Έστω $h>0$ και θεωρούμε $x_0 = \frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$, $k\in\mathbb{Z}$

$\lim_{k\to+\infty} x_0 = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\right)$ (1)

Έχουμε ότι $\lim_{k\to+\infty}\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right) = +\infty$ άρα $\overset{(1)}{\Rightarrow} \lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\right) = 0$

Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχει κάποιο k για το οποίο $x_0 = \frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}} < h$

Γνωρίζουμε ότι $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ οπότε $\sup \sin\frac{1}{x} \leq 1$

Για το x_0 είναι $\sin\left(\frac{1}{x_0}\right) = \sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Άρα $\sup_{\{0<x<h\}} \sin\frac{1}{x} = 1$

$\lim_{h\to 0^+} \sup_{\{0<x<h\}} \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$