Ονομ/νυμο: ΑΛΒΙΟΝΑ ΜΑΝΤΣΟ
Ομάδα ασκ.: 9η
Αρμητρώου: 3200098

10η Ομάδα Ασκήσεων

62. (Διαφορική εξίσωση 1)

(α') $(\tan y(x))\cdot y'(x) = x\sin x \Rightarrow \tan y \cdot \frac{dy}{dx} = x\sin x \Rightarrow \tan y \cdot dy = x\sin x\, dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \tan y \cdot dy = \int x\sin x\, dx \quad (1)$$

$$\int \tan y\, dy = \int \frac{\sin y}{\cos y} dy = -\int \frac{1}{\cos y}\cdot(\cos y)'\, dy = -\log|\cos y|$$

$$\int x\sin x\, dx = -\int x\cdot(\cos x)'\, dx = -x\cos x - \int \cos x\, dx = -x\cos x - \sin x$$

$$(1) \Rightarrow -\log|\cos y(x)| = -x\cos x - \sin x + c \Rightarrow \log|\cos y(x)| = x\cos x + \sin x - c \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |\cos y(x)| = e^{x\cos x + \sin x - c} \Rightarrow |\cos y(x)| = e^{-c}\cdot e^{x\cos x + \sin x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos y(x) = k e^{x\cos x + \sin x} \Rightarrow y(x) = \arccos(k e^{x\cos x + \sin x}) \quad (2)$$ για κάποιο $k \in \mathbb{R}^*$

(β') Με αντικατάσταση $y(0)=0$ στην (2) έχουμε:

$$0 = \arccos(k e^{0\cdot\cos 0 + \sin 0}) \Rightarrow \arccos(k e^0) = 0 \Rightarrow \arccos k = 0 \Rightarrow k = \cos 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k = 1$$

Άρα η ειδική λύση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι
$y(x) = \arccos(e^{x\cos x + \sin x})$ με $D_y = \{x / x\cos x + \sin x < 0\}$ ώστε να ισχύει $e^{x\cos x + \sin x} < 1$ (αφού η arccos είναι παρ/μη στο $(-1,1)$)

63. (Διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης)

(α') $z'(x) - z(x) = xe^x$ ①

Έχουμε $\int -1\,dx = -x$ (μια παράγουσα)

Στην ① πολλαπλασιάζουμε τα δυο μέλη με e^{-x} και έχουμε:

$$z'(x)\cdot e^{-x} - e^{-x}z(x) = xe^x\cdot e^{-x} \Rightarrow (z(x)\cdot e^{-x})' = x \quad ②$$

Είναι $\int x\,dx = \int\left(\frac{x^2}{2}\right)'dx = \frac{x^2}{2}$ (μια παράγουσα)

$$② \Rightarrow (z(x)\cdot e^{-x})' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \Rightarrow z(x)\cdot e^{-x} = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow z(x) = e^x\left(\frac{x^2}{2}+c\right),\ c\in\mathbb{R}$$

(β') $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = xe^x \Rightarrow y''(x) - y'(x) - y'(x) + y(x) = xe^x \Rightarrow$

$$\Rightarrow (y''(x) - y'(x)) - (y'(x) - y(x)) = xe^x \Rightarrow (y'(x) - y(x))' - (y'(x) - y(x)) = xe^x \quad ③$$

Αντικαθιστώντας στην ③ $y'(x) - y(x) = z(x)$ παίρνουμε την ①.

Άρα από το (α) $z(x) = e^x\left(\frac{x^2}{2}+c\right) \Rightarrow y'(x) - y(x) = e^x\left(\frac{x^2}{2}+c\right)$ ④

Έχουμε $\int -1\,dx = -x$ (μια παράγουσα)

Στην ④ πολλαπλασιάζουμε τα δυο μέλη με e^{-x} και έχουμε:

$$y'(x)e^{-x} - e^{-x}y(x) = e^x\cdot e^{-x}\left(\frac{x^2}{2}+c\right) \Rightarrow (y(x)\cdot e^{-x})' = \frac{x^2}{2}+c \quad ⑤$$

Είναι $\int\left(\frac{x^2}{2}+c\right)dx = \int\frac{x^2}{2}dx + \int c\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{x^3}{3}\right)'dx + \int(cx)'dx =$

$= \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + cx$ (μια παράγουσα)

$$⑤ \Rightarrow (y(x)\cdot e^{-x})' = \left(\frac{x^3}{6} + cx\right)' \Rightarrow y(x)\cdot e^{-x} = \frac{x^3}{6} + cx + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = e^x\left(\frac{x^3}{6} + cx + c_2\right),\ c, c_2\in\mathbb{R}$$

64. (Διαφορική εξίσωση 2)

$(\tan y(x)) \cdot y'(x) = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow \tan y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow \tan y \, dy = \frac{x}{x^2+1} dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \tan y \, dy = \int \frac{x}{x^2+1} dx$ ①

$\int \tan y \, dy = -\log|\cos y|$

$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} (x^2+1)' dx = \frac{1}{2} \log(x^2+1)$

① $\Rightarrow -\log|\cos y(x)| = \frac{1}{2} \log(x^2+1) + c \Rightarrow |\cos y(x)|^{-1} = e^{\frac{1}{2}\log(x^2+1)+c} \Rightarrow$

$\Rightarrow |\cos y(x)|^{-1} = e^{\log(x^2+1)^{1/2}} \cdot e^c \Rightarrow |\cos y(x)|^{-1} = e^c \sqrt{x^2+1} \Rightarrow |\cos y(x)| = \frac{1}{e^c} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Rightarrow \cos y(x) = k \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow y(x) = \arccos\left(k \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}\right)$, για κάποιο $k \in \mathbb{R}$

65. (Διαφορική Εξίσωση 3)

$$y'(x) + \tan x\, y(x) = \frac{1}{\cos x} \quad ①, \qquad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

Έχουμε $\int \tan x\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)'\,dx = -\log(\cos x)$ ($\cos x>0$ για $0<x<\frac{\pi}{2}$)

Στην πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη με $e^{-\log(\cos x)} = (\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x}$:

$$① \Rightarrow y'(x)\cdot\frac{1}{\cos x} + \tan x\cdot\frac{1}{\cos x}\,y(x) = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(x)\cdot\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,y(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \left(y(x)\cdot\frac{1}{\cos x}\right)' = (\tan x)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x)\cdot\frac{1}{\cos x} = \tan x + c \Rightarrow y(x) = (\tan x + c)\cos x = \sin x + c\cdot\cos x, \quad c\in\mathbb{R}$$

Επαλήθευση

Πράγματι, για $y(x) = \sin x + c\cdot\cos x$ έχουμε:

$$(\sin x + c\cdot\cos x)' + \tan x(\sin x + c\cdot\cos x) = \cos x - \cancel{c\sin x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cancel{c\sin x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

66. (Διαφορική Εξίσωση 4)

$$y'(x) + (2\log x + 5)y(x) = e^{-2x\log x} \quad ① \qquad (\text{με } x>0)$$

Έχουμε $\int (2\log x + 5)\,dx = \int 2\log x\,dx + \int 5\,dx = 2\int (x)'\log x\,dx + 5x =$

$$= 2x\log x - 2\int \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}\,dx + 5x = 2x\log x - 2x + 5x = 2x\log x + 3x$$

Στην ① πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη με $e^{2x\log x + 3x} = e^{2x\log x}\cdot e^{3x}$

$$e^{2x\log x + 3x}\,y'(x) + (2\log x + 5)e^{2x\log x + 3x} = e^{-2x\log x}\cdot e^{2x\log x}\cdot e^{3x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(y(x)\cdot e^{2x\log x + 3x}\right)' = e^{3x} \Rightarrow \left(y(x)\cdot e^{2x\log x + 3x}\right)' = \left(\frac{e^{3x}}{3}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x)\cdot e^{2x\log x + 3x} = \frac{e^{3x}}{3} + c \Rightarrow y(x) = e^{-(2x\log x + 3x)}\cdot\left(\frac{e^{3x}}{3} + c\right) =$$

$$= e^{-2x\log x}\cdot e^{-3x}\cdot e^{3x} + e^{-2x\log x - 3x}\cdot c = e^{-2x\log x} + ce^{-2x\log x - 3x}, \quad c\in\mathbb{R}$$

με $x>0$

φροντιστήρια ποukαμισάς

67) (Πεδίο ορισμού ειδικών λύσεων)

(α') $\tan y(x) = y'(x)$. Παρατηρούμε ότι μια λύση είναι η $y(x)=0$

Για $y(x) \neq 0$ έχουμε:

$$\tan y = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dx \cdot \tan y = dy \Rightarrow \frac{dy}{\tan y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\tan y} = \int dx \quad ①$$

$$\int \frac{1}{\tan y} dy = \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = \int \frac{1}{\sin y} \cdot (\sin y)' dy = \log|\sin y|$$

$$\int 1 \cdot dx = x$$

$$① \Rightarrow \log|\sin y(x)| = x + c \Rightarrow |\sin y(x)| = e^{x+c} \Rightarrow |\sin y(x)| = e^c \cdot e^x \Rightarrow \sin y(x) = ke^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = \arcsin(ke^x) \quad ②$$ για κάποιο $k \in \mathbb{R}^*$

(β') Με αντικατάσταση $y(0)=0$ στην ② έχουμε:

$y(0)=0 \Rightarrow 0 = \arcsin(ke^0) \Rightarrow \arcsin(k) = 0 \Rightarrow k = \sin 0 \Rightarrow k=0$, αδύνατο, αφού $k \in \mathbb{R}^*$. Άρα δεν υπάρχει ειδική λύση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και να δίνεται από τη γενική λύση. Η μόνη λύση είναι η $y(x)=0$, ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$

(γ') Με αντικατάσταση $y(0) = \frac{\pi}{6}$ στην ② έχουμε

$$y(0) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \arcsin(ke^0) \Rightarrow \arcsin k = \frac{\pi}{6} \Rightarrow k = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Άρα η ειδική λύση που διέρχεται από το $(0, \frac{\pi}{6})$ είναι η

$$y(x) = \arcsin\left(\frac{1}{2}e^x\right)$$

Πρέπει: (λόγω του ότι η arcsin είναι παρ/μη στο $(-1,1)$)

$$\frac{1}{2}e^x < 1 \Rightarrow e^x < 2 \Rightarrow x < \log 2$$

Άρα το μεγαλύτερο πεδίο ορισμού που μπορεί να έχει είναι $(-\infty, \log 2)$

68. (Κορωνοϊός)

(α') $\frac{1}{x^2(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1-x}$ ① $\Rightarrow Ax(1-x) + B(1-x) + x^2C = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow A(x-x^2) + B(1-x) + x^2C = 1 \Rightarrow Ax - Ax^2 + B - Bx + x^2C = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (C-A)x^2 + (A-B)x + (B-1) = 0$

$B-1=0 \Rightarrow B=1$

$A-B=0 \Rightarrow A=B=1$

$C-A=0 \Rightarrow C=A=1$

Άρα για $A=1$, $B=1$, $C=1$ ισχύει η ① για κάθε x.

(β') $y'(x) = y^2(x)(1-y(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2(1-y) \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{1}{y^2(1-y)}dy = dx \Rightarrow \int \frac{1}{y^2(1-y)}dy = \int dx$ ②

- $\int \frac{1}{y^2(1-y)}dy \overset{(a)}{=} \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{1-y}\right)dy = \int \frac{1}{y}dy - \int -\frac{1}{y^2}dy - \int \frac{-1}{1-y}dy =$

$= \int (\log|y|)'dy - \int \left(\frac{1}{y}\right)'dy - \int \frac{(1-y)'}{1-y}dy = \log|y| - \frac{1}{y} - \log|1-y|$

- $\int 1\,dx = x$

② $\Rightarrow \log|y(x)| - \frac{1}{y(x)} - \log|1-y(x)| = x + c$, $c \in \mathbb{R}$

(*) Σε αυτό το σημείο γίνεται η παραδοχή ότι $y^2(x)(1-y(x)) \neq 0$

- $y^2(x)(1-y(x)) = 0 \Rightarrow y^2(x) = 0$ ή $1-y(x) = 0 \Rightarrow y(x) = 0$ ή $y(x) = 1$

Δηλαδή θεωρούμε ότι $y(x) \neq 0$ και $y(x) \neq 1$

(γ') Για τις λύσεις $y(x)=0$ και $y(x)=1$ που δεν περιλαμβάνονται στη γενική λύση έχουμε

- $y'(x) = y^2(x)(1-y(x)) \xRightarrow{y(x)=0} 0 = 0(1-0) \Rightarrow 0=0$, που ισχύει. Άρα η $y(x)=0$ είναι μια λύση.
- $y'(x) = y^2(x)(1-y(x)) \xRightarrow{y(x)=1} 0 = 1(1-1) \Rightarrow 0=0$, που ισχύει. Άρα η $y(x)=1$ είναι επίσης μια λύση.