$6^{η}$ Ομάδα Ασκήσεων

39. (Αμπελώνας)

(α')

x \ y	1	2	3	4	5	$P_X(x)$
3	2/15	2/15	1/15	1/15	1/30	13/30
4	2/15	1/15	1/15	1/15	1/30	11/30
5	1/15	1/30	1/30	1/30	1/30	1/5
$P_Y(y)$	1/3	7/30	1/6	1/6	1/10	

Είναι $COV(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)$ ①

Έχουμε: $P_X(3) = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \frac{13}{30}$

$P_X(4) = \frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \frac{11}{30}$

$P_X(5) = \frac{1}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

οπότε $E(X) = \cancel{3}\cdot\frac{13}{\cancel{30}_{10}} + \cancel{4}^{2}\cdot\frac{11}{\cancel{30}_{15}} + \cancel{5}\cdot\frac{1}{\cancel{5}}$

$\Rightarrow E(X) = \frac{13}{10} + \frac{22}{15} + 1 = \frac{39+44+30}{30}$

$= 113/30$

Ομοίως $P_Y(1) = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

$P_Y(2) = \frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}$

$P_Y(3) = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

$P_Y(4) = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

$P_Y(5) = \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

οπότε

$E(Y) = 1\cdot\frac{1}{3} + \cancel{2}\cdot\frac{7}{\cancel{30}_{15}} + \cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{6}_2} + \cancel{4}^{2}\cdot\frac{1}{\cancel{6}_3}$

$+ \cancel{5}\cdot\frac{1}{\cancel{10}_2} = \frac{1}{3} + \frac{7}{15} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$

$= \frac{10+14+15+20+15}{30} = 74/30$

Τέλος $E(X\cdot Y) = 3\cdot\frac{2}{15} + 6\cdot\frac{2}{15} + 9\cdot\frac{1}{15} + 12\cdot\frac{1}{15} + 15\cdot\frac{1}{30} + 4\cdot\frac{2}{15} + 8\cdot\frac{1}{15} + 12\cdot\frac{1}{15} + 16\cdot\frac{1}{15} +$

$+ 20\cdot\frac{1}{30} + 5\cdot\frac{1}{15} + 10\cdot\frac{1}{30} + 15\cdot\frac{1}{30} + 20\cdot\frac{1}{30} + 25\cdot\frac{1}{30} =$

$= \frac{12+24+18+24+15+16+16+24+32+20+10+10+15+20+25}{30}$

$= \frac{281}{30}$

Συνεπώς ① $\Rightarrow COV(X,Y) = \frac{281}{30} - \frac{113}{30}\cdot\frac{74}{30} = \frac{34}{450} \simeq 0.07\overline{5}$

(β')

x \ y	1	2	3	4	5
3	Z 2, 2/15 Pxy	Z 4, 2/15 Pxy	Z 6, 1/15 Pxy	Z 6, 1/15 Pxy	Z 6, 1/30 Pxy
4	Z 2, 2/15 Pxy	Z 4, 1/15 Pxy	Z 6, 1/15 Pxy	Z 8, 1/15 Pxy	Z 8, 1/30 Pxy
5	Z 2, 1/15 Pxy	Z 4, 1/30 Pxy	Z 6, 1/30 Pxy	Z 8, 1/30 Pxy	Z 10, 1/30 Pxy

$Z = X + Y - |X-Y|$
($\hookrightarrow Z(Y,X)$)

Έχουμε:

- $Z(1,3) = 1+3-|-2| = 4-2 = 2$
- $Z(2,3) = 2+3-|-1| = 5-1 = 4$
- $Z(3,3) = 3+3-0 = 6$
- $Z(4,3) = 4+3-|1| = 7-1 = 6$
- $Z(5,3) = 5+3-|2| = 8-2 = 6$
- $Z(1,4) = 1+4-|-3| = 5-3 = 2$
- $Z(2,4) = 2+4-|-2| = 6-2 = 4$
- $Z(3,4) = 3+4-|-1| = 7-1 = 6$
- $Z(4,4) = 4+4-0 = 8$
- $Z(5,4) = 5+4-|1| = 9-1 = 8$
- $Z(1,5) = 1+5-|-4| = 6-4 = 2$
- $Z(2,5) = 2+5-|-3| = 7-3 = 4$
- $Z(3,5) = 3+5-|-2| = 8-2 = 6$
- $Z(4,5) = 4+5-|-1| = 9-1 = 8$
- $Z(5,5) = 5+5-0 = 10$

Συνεπώς $S_Z = \{2,4,6,8,10\}$ και

- $P_Z(2) = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$
- $P_Z(4) = \frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}$
- $P_Z(6) = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$
- $P_Z(8) = \frac{1}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$
- $P(10) = \frac{1}{30}$

(γ') $E(Z) \overset{(\beta')}{=} 2\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{7}{30} + 6\cdot\frac{4}{15} + 8\cdot\frac{2}{15} + \cancel{10}\cdot\frac{1}{3\cancel{0}} = \frac{20+28+48+32+10}{30} =$

$= \frac{138}{30} = \frac{23}{5}$

φροντιστήρια πουκαμισάς

40 (Πεπόνια)

Είναι $S_X = \{1,2,3,4\}$
$S_Y = \{1,2,3,4\}$

$x \backslash y$	1	2	3	4
1	1/10	1/10	1/10	1/10
2	1/10	1/10	1/10	0
3	1/10	1/10	0	0
4	1/10	0	0	0

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι το άθροισμα των τιμών των X, Y δεν μπορεί να ξεπερνά το 5 (αφού 5 είναι όλα τα πεπόνια). Επομένως για $x \in S_X$, $y \in S_Y$ με $x+y>5$ θα είναι $P_{XY}(x,y)=0$.

Αν υποθέσουμε ότι βάζουμε τα πεπόνια σε μια "σειρά" (χωρίς να μας ενδιαφέρει όμως η σχετική σειρά των καλών πεπονιών και των χαλασμένων μεταξύ τους) και λαμβάνουμε τα πεπόνια σε εκείνη τη σειρά, έχουμε $\binom{5}{2}$* επιλογές για τις θέσεις όπου θα εμφανίζονται τα καλά πεπόνια (οι θέσεις αυτές προσδιορίζουν τις τιμές των X, Y). Για $x \in S_X$, $y \in S_Y$ με $x+y \leq 5$ υπάρχει μόνο μια επιλογή για τις θέσεις εμφάνισης των καλών πεπονιών και άρα

*ισοπίθανες

$$P_{XY}(x,y) = \frac{1}{\binom{5}{2}} = 1 \cdot \frac{2!3!}{5!} = \frac{1}{10}$$

- Για τις περιθώριες μάζες έχουμε:

$P_X(1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ $\qquad$ $P_Y(1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$P_X(2) = \frac{3}{10}$ $\qquad$ $P_Y(2) = \frac{3}{10}$

$P_X(3) = \frac{2}{10}$ $\qquad$ $P_Y(3) = \frac{2}{10}$

$P_X(4) = \frac{1}{10}$ $\qquad$ $P_Y(4) = \frac{1}{10}$

οπότε:

$E(X) = 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{2}{10} + \frac{4}{10} = 2$

$E(Y) = E(X) = 2$

$COV(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)$ ①

Είναι $E(X\cdot Y) = \frac{1}{10}(1+2+3+4+2+4+6+3+6+4) = \frac{35}{10}$

οπότε ① $\Rightarrow \frac{35}{10} - 2\cdot 2 = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$

41. (Anti-doping controle)

(α') Έστω οι Τ.Μ. A, B ώστε η A εκφράζει την επιλογή (A=1) ή μη (A=0) του M από την υπηρεσία A και η B εκφράζει την επιλογή (B=1) ή μη (B=0) του M από την υπηρεσία B. Έστω επίσης η Τ.Μ. Z που εκφράζει το πλήθος των φορών που επιλέχθηκε ο M, δηλ. $S_Z = \{0,1,2\}$ και $Z = A+B$.

Έχουμε • $P_Z(0) = P(A=0, B=0) \overset{\text{Ανεξ.}}{=} P(A=0)\cdot P(B=0) =$

$$= \frac{\binom{29}{10}}{\binom{30}{10}} \cdot \frac{\binom{29}{5}}{\binom{30}{5}} = \frac{\frac{29!}{\cancel{10!}\,19!}}{\frac{30!}{\cancel{10!}\,20!}} \cdot \frac{\frac{29!}{\cancel{5!}\,24!}}{\frac{30!}{\cancel{5!}\,25!}} = \frac{29!\cdot 29!}{19!\cdot 24!}\cdot\frac{25!\,20!}{30!\,30!} = \frac{5}{9}$$

Για το 1ο πείραμα: A,
Δ.Χ. $\rightarrow \Omega_A$
$|\Omega_A| = \binom{30}{10}$
Δεν επιλέγεται ο M
(ενδεχόμενο M_A')
οπότε μένουν $30-1=29$
από τους οποίους επιλέγονται
οι 10.
Άρα $|M_A'| = \binom{29}{10}$

Για το 2ο πείραμα: B έλεγχος
Δ.Χ. $\rightarrow \Omega_B$
$|\Omega_B| = \binom{30}{5}$
Δεν επιλέγεται ο M (ενδεχόμενο M_B')
οπότε μένουν $30-1=29$
από τους οποίους επιλέγονται οι 10
Άρα $|M_B'| = \binom{29}{5}$

• $P_Z(1) = P(A=0, B=1) + P(A=1, B=0) \overset{\text{Ανεξ.}}{=} P(A=0)\cdot P(B=1) + P(A=1)\cdot P(B=0)$

$$= \frac{\binom{29}{10}}{\binom{30}{10}} \cdot \frac{\binom{29}{4}}{\binom{30}{5}} + \frac{\binom{29}{9}}{\binom{30}{10}} \cdot \frac{\binom{29}{5}}{\binom{30}{5}} = \frac{\frac{29!}{10!\,19!}}{\frac{30!}{10!\,20!}} \cdot \frac{\frac{29!}{4!\,25!}}{\frac{30!}{5!\,25!}} + \frac{\frac{29!}{9!\,20!}}{\frac{30!}{10!\,20!}} \cdot \frac{\frac{29!}{5!\,24!}}{\frac{30!}{5!\,25!}} =$$

$$= \frac{100}{900} + \frac{250}{900} = \frac{350}{900} = \frac{7}{18}$$

Επιλέγεται ο M
άρα μένουν $5-1=4$
κενές "θέσεις" που
συμπληρώνουν οι 4
από τους $30-1=29$
εναπομείναντες αθλητές

Επιλέγεται ο M
άρα μένουν $10-1=9$
κενές "θέσεις" που
συμπληρώνουν οι 9
από τους $30-1=29$
εναπομείναντες αθλητές

• $P_Z(2) = P(A=1, B=1) \overset{\text{Ανεξ.}}{=} P(A=1)\cdot P(B=1) = \dfrac{\binom{29}{9}}{\binom{30}{10}} \cdot \dfrac{\binom{29}{4}}{\binom{30}{5}} = \dfrac{\frac{29!}{9!\,20!}}{\frac{30!}{10!\,20!}} \cdot \dfrac{\frac{29!}{4!\,25!}}{\frac{30!}{5!\,25!}} = \dfrac{50}{900} = \dfrac{1}{18}$

(β') Αναζητούμε την $P(X=x)$ με $x=10+y$ για $y=0,1,2,3,4,5$.
Στον πρώτο έλεγχο (Α) επιλέγονται 10 διαφορετικοί. Άρα σίγουρα θα έχουμε 10 άτομα που έχουν εξεταστεί τουλάχιστον μια φορά, ανεξαρτήτως των επιλογών στον 2º έλεγχο (Β) (το 10 λοιπόν είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του Χ.). Στον 2º έλεγχο (Β) μπορούν να επιλεγούν το πολύ 5 άτομα διαφορετικά από τα πρώτα 10 (το 15 λοιπόν είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του Χ).
Γενικά για να είναι $X=10+y$ με $y=0,\dots,5$ πρέπει στον 2º έλεγχο (Β) να επιλεγούν y άτομα που θα είναι <u>διαφορετικά</u> από τα πρώτα 10 (άρα θα επιλεχθούν από τα $30-10=20$ άτομα που δεν συμμετείχαν στον έλεγχο Α) και $5-y$ άτομα που θα πρέπει να είναι μεταξύ των 10 που συμμετείχαν στον 1º έλεγχο (Α).

Άρα $$\boxed{P(X=x) = \dfrac{\binom{10}{5-y}\cdot\binom{20}{y}}{\binom{30}{5}}, \quad x=10+y,\ y=0,\dots,5}$$

(γ') Έστω οι Τ.Μ. X_i, $i=1,2,\dots,30$ που μπορούν να λάβουν δύο τιμές:

• $X_i=0$ αν ο αθλητής i δεν έχει ελεγχθεί καμία φορά
• $X_i=1$ αν ο αθλητής i έχει ελεγχθεί <u>τουλάχιστον</u> μια φορά (είτε στον Α, είτε στον Β έλεγχο, είτε και στους 2

Είναι $P(X_i=0)=\frac{5}{9}$ (ερώτημα α') και επομένως $P(X_i=1)=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$

Άρα $X_i \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{4}{9}\right)$ και $X=\sum_{i=1}^{30} X_i$

Έχουμε λοιπόν $E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{30} X_i\right)=\sum_{i=1}^{30} E(X_i)=\sum_{i=1}^{30}\frac{4}{9}=\frac{30\cdot 4}{9}=\frac{120}{9}=\frac{40}{3}\simeq 13{,}33\dots$

42. (Το πρόβλημα του συλλέκτη κουπονιών)

Έστω η Τ.Μ. K για το πλήθος των αγορών που θα πρέπει να γίνουν για να συλλεχθούν όλα τα κουπόνια

Έστω επίσης οι Τ.Μ. K_i $i=1,\dots,n$ για το πλήθος των κουπονιών που θα χρειαστεί να αγοραστούν επιπλέον μέχρι να βρεθεί το i-οστό κουπόνι όταν έχουν βρεθεί ήδη $i-1$ διαφορετικά κουπόνια. Σε αυτήν την περίπτωση

$K_i \sim \text{Γεωμ}\left(\frac{n-(i-1)}{n}\right) \leftarrow$ Εφόσον έχουν ήδη βρεθεί $i-1$ κουπόνια υπάρχουν ακόμη $n-(i-1)$ που δεν έχουν βρεθεί, άρα η πιθανότητα να αγοραστεί κάποιο εξ αυτών είναι $\frac{n-(i-1)}{n}$

Θα είναι λοιπόν $K = \sum_{i=1}^{n} K_i$ ①

Για παράδειγμα έστω $n=3$ και:

$$\begin{bmatrix} \text{Κουπόνι } 1 & \text{Κουπόνι } 2 & \text{Κουπόνι } 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{δοκιμή } 1 & \text{δοκιμή } 4 & \text{δοκιμή } 5 \end{bmatrix}$$

↳ τότε $K=5$ και $K_1=1, K_2=3, K_3=1$ ώστε πράγματι $K=K_1+K_2+K_3$

$$① \Rightarrow E(K) = E\left(\sum_{i=1}^{n} K_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(K_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n}{n-(i-1)}\right)$$