Ονομ/νυμο: ΑΛΒΙΟΝΑ ΜΑΝΤΣΟ

8η Ομάδα Ασκήσεων

Ομάδα ασκ.: 8η

Αρ. Μητρ.: 3200098

51. (Ολοκληρώματα)

(α') $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}$ ① Θέτουμε $x = 3\sin\theta \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)$ οπότε

$d\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)' dx = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{9\sin^2\theta}{9}}} \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3\sqrt{\cos^2\theta}} dx =$

$= \frac{1}{3|\cos\theta|} dx \Rightarrow dx = 3|\cos\theta|\, d\theta$

Για τα άκρα $-3, 3$ έχουμε:

$x = 3 \Rightarrow 3 = 3\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$x = -3 \Rightarrow -3 = 3\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = -1 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$

① $\Rightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{9-9\sin^2\theta} \cdot 3|\cos\theta|\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{9(1-\sin^2\theta)} \cdot 3|\cos\theta|\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\sqrt{\cos^2\theta} \cdot 3|\cos\theta|\, d\theta =$

$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 9 \cdot |\cos\theta||\cos\theta|\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 9 \cdot \cos^2\theta = 9\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{9}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\, d\theta + \frac{9}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2\theta\, d\theta =$

$= \frac{9}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\theta)'\, d\theta + \frac{9}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(\sin 2\theta)'}{2} d\theta = \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{9}{4}\left(\sin\pi - \sin(-\pi)\right) = \frac{9}{2}(\pi) + \frac{9}{4} \cdot 0 = \frac{9\pi}{2}$

(β') Για τον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $R=3$ έχουμε:

$C: (x-0)^2 + (y-0)^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y = \sqrt{9-x^2}$

Άρα το ολοκλήρωμα $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\, dx$ εκφράζει ουσιαστικά το εμβαδόν του ημικυκλίου του κύκλου C και συνεπώς $E_C = \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\, dx = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi \cdot 9}{2} = \frac{9\pi}{2}$

(γ') $\int \frac{1}{x(1+x^2)} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx}{1+x^2}\right) dx$ ①

Θέλουμε $A(1+x^2) + Bx^2 = 1 \Rightarrow A + Ax^2 + Bx^2 - 1 = 0 \Rightarrow (A-1) + Ax^2 + Bx^2 = 0$

Για $A=1$ και $B=-1$ είναι $(1-1) + x^2 - x^2 = 0$

① $= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \int (\log|x|)'\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{(1+x^2)} dx$

$= \int (\log|x|)' dx - \frac{1}{2}\int (\log(x^2+1))' dx =$

$= \log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+1)\ ,\ c\in\mathbb{R}$

52. (Μικρό όμικρον)

(α') Έστω $f(n) = a_\nu n^\nu + a_{\nu-1}n^{\nu-1} + \dots + a_1 n + a_0,\ a_\nu \neq 0$ και $g(n) = e^n$

Έστω, ακόμη, $f_x(n) = a_\nu x^\nu + a_{x-1}x^{\nu-1} + \dots + a_1 x + a_0,\ a_\nu \neq 0$ και $g_x(x) = e^x$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots a_1 x + a_0}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{a_\nu x^\nu}{e^x}\ a_\nu \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\nu}{e^x} \overset{(\frac{\infty}{\infty})\ DLH}{=}$

$= a_\nu \lim_{x\to+\infty}\frac{\nu x^{\nu-1}}{e^x} \overset{DLH}{=} \dots = a_\nu\cdot\nu\cdot(\nu-1)\cdot 1\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x^0}{e^x} = a_\nu\cdot\nu!\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e^x} = a_\nu\cdot\nu!\cdot 0 = 0$

Αφού για το όριο των συναρτήσεων έχουμε $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_x(x)}{g_x(x)} = 0$, και για το όριο των ακολουθιών έχουμε $\lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 0$. Άρα $f(n) = o(g(n))$

(β') Εστω $f_1(n) = n$, $g(n) = n^3$ και $f_2(n) = n^2$

Είναι $\lim_{n\to+\infty}\frac{f_1(n)}{g(n)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^3} = 0$ δηλ. $f_1(n) = o(g(n))$

και $\lim_{n\to+\infty}\frac{f_2(n)}{g(n)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^3} = 0$ δηλ. $f_2(n) = o(g(n))$

όμως $\lim_{n\to+\infty}\frac{f_1(n)\cdot f_2(n)}{g(n)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n\cdot n^2}{n^3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$ άρα δεν ισχύει $f_1(n)\cdot f_2(n) = o(g(n))$

(γ') Αναμένουμε ότι η πρόταση θα ισχύει αφού αν η g αυξάνεται πιο γρήγορα από τη f και η h πιο γρήγορα από τη g τότε η h θα αυξάνεται πιο γρήγορα και από τη f.

Πράγματι, $\lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{h(n)} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f(n)}{g(n)}\cdot\frac{g(n)}{h(n)}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{g(n)}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{g(n)}{h(n)} = 0\cdot 0 = 0$

Άρα $f(n) = o(h(n))$ (αφού όλα τα όρια υπάρχουν)

(δ') (εκτός)

$n\to+\infty$ 1

53. (Όρια)

(α') $\lim\limits_{h\to+\infty}\dfrac{\int_1^h \sqrt{x}\,\log x\,.\,dx}{h^2}$ (1). Για $x\geq 1 \Rightarrow \log x\geq 0$ και $\sqrt{x}\geq 1$, άρα $\sqrt{x}\cdot\log x\geq 0$. Το ολοκλήρωμα λοιπόν εκφράζει το εμβαδόν της μη αρνητικής συνά- συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x}\log x$ στο $[1,h]$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\log x=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$. Συνεπώς, αφού οι τιμές της συνάρτησης αυξάνονται απεριόριστα και h αυξάνεται απεριόριστα, το εμβαδόν (ολοκλήρωμα) θα αυξάνεται απεριόριστα.

$$(1)\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\to DLH}{\Longrightarrow}\lim_{h\to+\infty}\frac{\left(\int_1^h\sqrt{x}\log x\,dx\right)'}{2h}=\lim_{h\to+\infty}\frac{\sqrt{h}\log h-\cancel{\sqrt{1}\cdot\log 1}^{\,0}}{2h}=\lim_{h\to+\infty}\frac{\sqrt{h}\cdot\log h}{2h}=$$

$$=\lim_{h\to+\infty}\frac{\sqrt{h}\cdot\log h}{2(\sqrt{h})^2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\to DLH}{=\!=}\lim_{h\to+\infty}\frac{\frac{1}{h}}{2\cdot\frac{1}{2\sqrt{h}}}=\lim_{h\to+\infty}\frac{\sqrt{h}}{h}=\lim_{h\to+\infty}\frac{\sqrt{h}}{(\sqrt{h})^2}=0.$$

(β′) $\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{1/x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}$

Θέτουμε $y=\frac{1}{x}$ και $\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y^2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)DLH}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{2y} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)DLH}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{2} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^2 e^{1/x} = +\infty$$

(γ′) $\lim_{x\to 0^-} x^2 e^{1/x} = \lim_{x\to 0^-} x^2 \cdot \lim_{x\to 0^-} e^{1/x}$ ①

Θέτουμε $y=\frac{1}{x}$ και $\lim_{x\to 0^-} y = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. Οπότε $\lim_{y\to-\infty} e^y = 0$

① $\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} x^2 e^{1/x} = 0\cdot 0 = 0$

← 53 (δ′) στην επόμενη σελίδα (εκ παραδρομής)

(ε′) $\lim_{x\to 0^+} (\sqrt{x})^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sqrt{x}\log\sqrt{x}}$

Θέτουμε $y=\sqrt{x}\log\sqrt{x}$ και $\sqrt{x}=z$ οπότε $y = z\log z$.

Είναι $\lim_{x\to 0^+} z = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$

$$\lim_{z\to 0^+} y = \lim_{z\to 0^+} z\log z = \lim_{z\to 0^+} \frac{\log z}{\frac{1}{z}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)DLH}{=} \lim_{z\to 0^+} \frac{\frac{1}{z}}{-\frac{1}{z^2}} = \lim_{z\to 0^+} -\frac{z^2}{z} = 0$$

$$\lim_{y\to 0} e^y = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} (\sqrt{x})^{\sqrt{x}} = 1$$

(στ′) $\lim_{h\to+\infty} \int_1^h \frac{1+|\cos t|}{t}\,dt$. Για $t\geq 1$: $0\leq|\cos t|\leq 1 \Rightarrow 0\leq \frac{|\cos t|}{t} \leq \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{1}{t} \leq \frac{|\cos t|+1}{t} \leq \frac{2}{t}$

Άρα $\int_1^h \frac{1}{t}\,dt \leq \int_1^h \frac{|\cos t|+1}{t}\,dt$ ①

Είναι $\lim_{h\to+\infty} \int_1^h \frac{1}{t}\,dt = \lim_{h\to+\infty} \int_1^h (\log t)'\,dt = \lim_{h\to+\infty} \log h - \overset{0}{\log 1} = +\infty$

Οπότε λόγω της (1) έχουμε $\lim_{h\to+\infty} \int_1^h \frac{1+|\cos t|}{t}\,dt = +\infty$

54. (α') $\int \frac{1}{\sin x+\cos x}\cdot(\sin x-\cos x)\,dx = \int -\frac{1}{\sin x+\cos x}\cdot(\cos x-\sin x)\,dx =$

$\int -\frac{1}{\sin x+\cos x}\cdot(\sin x+\cos x)'\,dx = -\int\left(\log|\sin x+\cos x|\right)'dx = -\log|\sin x+\cos x|+c,\ c\in\mathbb{R}$

(β') $\int \frac{e^x}{\cos^2(e^x)}\,dx = \int\left(\tan(e^x)\right)'dx = \tan(e^x)+c,\ c\in\mathbb{R}$

... Συνέχεια της 53

53 (δ') $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n+\cos n+\log n}{e^n}$

Είναι $-1\leq \cos x\leq 1 \Rightarrow e^x+\log x-1\leq e^x+\cos x+\log x\leq e^x+\log x+1 \Rightarrow$

$\overset{e^x>0}{\Rightarrow} \frac{e^x+\log x-1}{e^x}\leq \frac{e^x+\cos x+\log x}{e^x}\leq \frac{e^x+\log x+1}{e^x}$

Έχουμε $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\log x-1}{e^x} \overset{(\frac{\infty}{\infty})DLH}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x\cdot x+1}{x}}{e^x} =$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\cdot x+1}{e^x\cdot x} \overset{(\frac{\infty}{\infty})DLH}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\cdot x+\cancel{e^x}}{e^x\cdot x+e^x} = 1$

Επίσης $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\log x+1}{e^x} \overset{(\frac{\infty}{\infty})DLH}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\frac{1}{x}}{e^x} = \ldots = 1$

Άρα από το κριτήριο της παρεμβολής: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\cos x+\log x}{e^x} = 1.$

Συνεπώς και για τη δοσμένη ακολουθία θα ισχύει $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^n+\cos n+\log n}{e^n} = 1$