Ονομ/νυμο: ΑΛΒΙΟΝΑ ΜΑΝΤΣΟ
Ομάδα ασκ.: 2η
Αρ. Μητρ.: 3200098

2η Ομάδα Ασκήσεων

9. (Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση)

Κατ' αρχάς, επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα, εξ ορισμού έχουμε ότι $\forall x_1, x_2 \in B$ με $x_1 < x_2$ ισχύει η συνεπαγωγή $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ①

Έστω τώρα κάποια $x_1, x_2 \in B$ τέτοια ώστε $f(x_1) > f(x_2)$. Για τα x_1, x_2 θα ισχύει μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $x_1 > x_2$. Αν όμως $x_1 > x_2$ θα είναι $f(x_1) < f(x_2)$, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα. Αυτό είναι άτοπο γιατί εξ υποθέσεως $f(x_1) > f(x_2)$. Άρα αποκλείεται $x_1 > x_2$
- $x_1 = x_2$. Αν όμως $x_1 = x_2$ θα είναι προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$. Αυτό είναι άτοπο γιατί εξ υποθέσεως $f(x_1) > f(x_2)$. Άρα αποκλείεται $x_1 = x_2$
- $x_1 < x_2$, που ισχύει, αφού αποκλείστηκαν οι άλλες δυο περιπτώσεις

Συνεπώς $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$ ②

Από τα ①, ② έχουμε $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

10. (Αυθαίρετα μικρές περίοδοι)

Συνάρτηση που ικανοποιεί τις δεδομένες προϋποθέσεις είναι η συνάρτηση "Dirichlet": $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

Πράγματι, η συνάρτηση είναι μη σταθερή, αφού λαμβάνει δυο τιμές.
Επιπλέον, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $p \in (0, \varepsilon)$ τέτοιο ώστε $p \in \mathbb{Q}$, γεγονός που προκύπτει από την πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς.

$\forall x \in \mathbb{R}$ έχουμε
- Αν $x \in \mathbb{Q}$ τότε $f(x) = 1$. Όμως και οι αριθμοί $x+p$, $x-p$ θα είναι ρητοί αφού το άθροισμα και η διαφορά ρητών αριθμών είναι πάντα ρητός. Αφού $(x+p), (x-p) \in \mathbb{Q}$, θα είναι $f(x) = f(x+p) = f(x-p) = 1$ ①
- Αν $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ τότε $f(x) = 0$. Όμως και οι αριθμοί $x+p$, $x-p$ θα είναι άρρητοι, αφού το άθροισμα και η διαφορά ενός άρρητου και ενός ρητού είναι πάντα άρρητος. Αφού $(x+p), (x-p) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, θα είναι $f(x) = f(x+p) = f(x-p) = 0$ ②

Από τις σχέσεις ①, ② προκύπτει ότι $\forall \varepsilon > 0 \; \exists p \in (0, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} : f(x) = f(x+p) = f(x-p)$

Σαρώθηκε με το CamScanner

δηλαδή η συνάρτηση *Dirichlet* έχει άπειρες, αυθαίρετα μικρές περιόδους.

11. (Infimum αθροίσματος)

Γνωρίζουμε ότι $(f+g): B \to \mathbb{R}$ και $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Έστω $\ell_1 = \inf_{x\in B}\{f\}$ και $\ell_2 = \inf_{x\in B}\{g\}$. $\forall x \in B$ ισχύει $f(x) \geq \ell_1$ και $g(x) \geq \ell_2$.

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $\forall x\in B$ ότι $f(x)+g(x) \geq \ell_1+\ell_2$ ①

Έστω ακόμη $\ell = \inf_{x\in B}\{f+g\}$. Ισχύει ότι $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x\in B : (f+g)(x) < \ell+\varepsilon \Rightarrow f(x)+g(x) < \ell+\varepsilon$ ②

Έστω ότι $\inf_{x\in B}\{f+g\} < \inf_{x\in B}\{f\} + \inf_{x\in B}\{g\} \Rightarrow \ell < \ell_1+\ell_2$. Άρα θα υπάρχει κάποιο $\varepsilon > 0$ ώστε $\ell+\varepsilon = \ell_1+\ell_2$ ③

② $\xRightarrow{(3)}$ $f(x)+g(x) < \ell_1+\ell_2$, που είναι άτοπο λόγω της σχέσης (1).

Άρα $\ell \geq \ell_1+\ell_2 \Rightarrow \inf_{x\in B}\{f+g\} \geq \inf_{x\in B}\{f\} + \inf_{x\in B}\{g\}$

Μια γενική περίπτωση στην οποία ισχύει η ισότητα, είναι όταν οι συναρτήσεις f, g παρουσιάζουν min και μάλιστα στο ίδιο σημείο (έστω x_0, με $x_0\in B$), δηλ. $\min f = f(x_0)$ και $\min g = g(x_0)$, με $x_0 \in B$. Τότε:

- $\inf_{x\in B}\{f\} = \min f = f(x_0)$ ④ και
- $\inf_{x\in B}\{g\} = \min g = g(x_0)$ ⑤

Επίσης, επειδή τα $f(x_0)$, $g(x_0)$ είναι τα ελάχιστα των συναρτήσεων f, g, αντίστοιχα ισχύει:

- $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x\in B$
- $g(x_0) \leq g(x)$, $\forall x \in B$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $f(x_0)+g(x_0) \leq f(x)+g(x) \Rightarrow (f+g)(x_0) \leq (f+g)(x)$ $\forall x\in B$, που σημαίνει ότι $\min(f+g) = (f+g)(x_0)$ ⑥

Άρα $\inf_{x\in B}\{f+g\} = \min(f+g) \overset{⑥}{=} (f+g)(x_0) = f(x_0)+g(x_0) \overset{④,⑤}{=} \inf_{x\in B}\{f\} + \inf_{x\in B}\{g\}$

Σαρώθηκε με το CamScanner

12. (Υπερβολικές τριγωνικές συναρτήσεις - ορισμός και βασικές ιδιότητες)

(α') • Επειδή $\operatorname{dom} \sinh = \mathbb{R}$, $\forall x \in \operatorname{dom} \sinh$ έχουμε $(-x) \in \operatorname{dom} \sinh$

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{(e^{x} - e^{-x})}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\sinh x$$

Άρα η sinh είναι περιττή

• Επειδή $\operatorname{dom} \cosh = \mathbb{R}$, $\forall x \in \operatorname{dom} \cosh$ έχουμε $(-x) \in \operatorname{dom} \cosh$

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

Άρα η cosh είναι άρτια

• Επειδή $\operatorname{dom} \tanh = \mathbb{R}$, $\forall x \in \operatorname{dom} \tanh$ έχουμε $(-x) \in \operatorname{dom} \tanh$

Είναι $\tanh x = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}}{\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

$$\tanh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} = \frac{-(e^{x} - e^{-x})}{e^{x} + e^{-x}} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = -\tanh(x)$$

Άρα η tanh είναι περιττή.

• Επειδή $\operatorname{dom} \coth = \mathbb{R}$, $\forall x \in \operatorname{dom} \coth$ έχουμε $(-x) \in \operatorname{dom} \coth$

Είναι $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}}{\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}} = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$

$$\coth(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{e^{-x} - e^{-(-x)}} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{e^{-x} - e^{x}} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{-(e^{x} - e^{-x})} = -\frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}} = -\coth x$$

Άρα η coth είναι περιττή.

(β') • $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} - \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)\left(\dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} + \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)$

$= \left(\dfrac{\cancel{e^{x}} + e^{-x} - \cancel{e^{x}} + e^{-x}}{2}\right)\left(\dfrac{e^{x} + \cancel{e^{-x}} + e^{x} - \cancel{e^{-x}}}{2}\right) = \left(\dfrac{\cancel{2}e^{-x}}{\cancel{2}}\right)\left(\dfrac{\cancel{2}e^{x}}{\cancel{2}}\right) = e^{-x} \cdot e^{x} = e^{-x+x} =$

$= e^{0} = 1$ 3

Σαρώθηκε με το CamScanner

- $\sinh x\cdot\cosh y+\cosh x\cdot\sinh y=\left(\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)+\left(\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)=$

$$=\frac{e^{x}\cdot e^{y}+e^{x}\cdot e^{-y}-e^{-x}\cdot e^{y}-e^{-x}\cdot e^{-y}}{4}+\frac{e^{x}\cdot e^{y}-e^{x}\cdot e^{-y}+e^{-x}\cdot e^{y}-e^{-x}\cdot e^{-y}}{4}$$

$$=\frac{e^{x+y}+\cancel{e^{x-y}}-\cancel{e^{-x+y}}-e^{-x-y}+e^{x+y}-\cancel{e^{x-y}}+\cancel{e^{-x+y}}-e^{-x-y}}{4}=\frac{2e^{x+y}-2e^{-x-y}}{4}$$

$$=\frac{\cancel{2}(e^{x+y}-e^{-x-y})}{\cancel{4}\,2}=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}=\sinh(x+y)\ (1)$$

- $\cosh x\cdot\cosh y+\sinh x\cdot\sinh y=\left(\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)+\left(\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)=$

$$=\frac{e^{x}\cdot e^{y}+e^{x}\cdot e^{-y}+e^{-x}\cdot e^{y}+e^{-x}\cdot e^{-y}}{4}+\frac{e^{x}\cdot e^{y}-e^{x}\cdot e^{-y}-e^{-x}\cdot e^{y}+e^{-x}\cdot e^{-y}}{4}=$$

$$=\frac{e^{x+y}+\cancel{e^{x-y}}+\cancel{e^{-x+y}}+e^{-x-y}+e^{x+y}-\cancel{e^{x-y}}-\cancel{e^{-x+y}}+e^{-x-y}}{4}=\frac{2e^{x+y}+2e^{-x-y}}{4}=$$

$$=\frac{\cancel{2}(e^{x+y}+e^{-x-y})}{\cancel{4}\,2}=\frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2}=\cosh(x+y)\ (2)$$

- $\sinh 2x=\sinh(x+x)\overset{(1)}{=}\sinh x\cdot\cosh x+\cosh x\cdot\sinh x=2\sinh x\cdot\cosh x\ (4)$
- $\cosh 2x=\cosh(x+x)\overset{(2)}{=}\cosh x\cdot\cosh x+\sinh x\cdot\sinh x=\cosh^2x+\sinh^2x\ (5)$

- $\dfrac{2\tanh x}{1-\tanh^2x}=\dfrac{2\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)}{1-\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)^2}=\dfrac{2\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)}{1-\frac{\sinh^2x}{\cosh^2x}}=\dfrac{2\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)}{\frac{\cosh^2x-\sinh^2x}{\cosh^2x}}\overset{(3)}{=}\dfrac{2\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)}{\frac{1}{\cosh^2x}}=$

$$=\frac{2\sinh x}{\cancel{\cosh x}}\cdot\frac{\cosh^{\cancel{2}}x}{1}\overset{(4)}{=}\sinh 2x$$

- $\dfrac{1+\tanh^2x}{1-\tanh^2x}=\dfrac{1+\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)^2}{1-\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)^2}=\dfrac{1+\frac{\sinh^2x}{\cosh^2x}}{1-\frac{\sinh^2x}{\cosh^2x}}=\dfrac{\frac{\cosh^2x+\sinh^2x}{\cancel{\cosh^2x}}}{\frac{\cosh^2x-\sinh^2x}{\cancel{\cosh^2x}}}=\dfrac{\cosh^2x+\sinh^2x}{\cosh^2x-\sinh^2x}\overset{(3)}{=}$

$$=\frac{\cosh^2x+\sinh^2x}{1}\overset{(5)}{=}\cosh 2x$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

• $\dfrac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x} = \dfrac{2\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)}{1+\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)^2} = \dfrac{2\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)}{1+\frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}} = \dfrac{2\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)}{\frac{\cosh^2 x+\sinh^2 x}{\cosh^2 x}} =$

$= \dfrac{2\sinh x}{\cancel{\cosh x}} \cdot \dfrac{\cosh^{\cancel{2}} x}{\cosh^2 x+\sinh^2 x} = \dfrac{2\sinh x\cdot\cosh x}{\cosh^2 x+\sinh^2 x} = \dfrac{\sinh 2x}{\cosh 2x} = \tanh 2x$

13. (Εξίσωση κύκλου)

Ο κύκλος με ακτίνα 1 και κέντρο το σημείο (1,0) έχει εξίσωση

$$(x-1)^2+(y-0)^2=1^2 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$$

Έστω C το σύνολο όλων σημείων του παραπάνω κύκλου,

δηλ. $C=\{(x,y):\ (x-1)^2+y^2=1\}$

Προφανώς, επειδή $y^2=1-(x-1)^2$ και πρέπει $y^2\geq 0$, έχουμε $1-(x-1)^2\geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-1)^2\leq 1 \Leftrightarrow |x-1|\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq x-1\leq 1 \Leftrightarrow 0\leq x\leq 2$

Έστω, ακόμη, $P=\{[r,\theta]: r=2\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2}\leq\theta<\frac{\pi}{2}\}$

Πρέπει, λοιπόν, να δείξουμε ότι $C=P$

- Για τις καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων του συνόλου P γνωρίζουμε ότι $x=r\cos\theta$ και $y=r\sin\theta$ για κάθε σημείο. Επειδή $r=2\cos\theta$ έχουμε $x=r\cos\theta=2\cos\theta\cdot\cos\theta=2\cos^2\theta$ και $y=r\sin\theta=2\cos\theta\cdot\sin\theta$.
  Για οποιοδήποτε σημείο $(x,y)\in P$ (όπου $(x,y)\equiv[r,\theta]$) ισχύει:

$$(x-1)^2+y^2=(2\cos^2\theta-1)^2+(2\cos\theta\cdot\sin\theta)^2=4\cos^4\theta-4\cos^2\theta+1+$$
$$+4\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta=4\cos^2\theta(\cos^2\theta-1+\sin^2\theta)+1=4\cos^2\theta(1-1)+1=$$
$$=0+1=1,$$ δηλ. οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου και συνεπώς το σημείο ανήκει στο σύνολο C.

Άρα $P\subseteq C$ (1)

Σαρώθηκε με το CamScanner

- Έστω ένα σημείο $(x,y)\in C$

Οι συντεταγμένες του σημείου θα επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου δηλ.

$(x-1)^2+y^2=1 \Rightarrow y^2=1-(x-1)^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{1-(x-1)^2}=\pm\sqrt{\cancel{1}-x^2+2x-\cancel{1}}=\pm\sqrt{2x-x^2}$, (2)

με $0\leq x\leq 2$ (όπως δείξαμε).

Για τις πολικές συντεταγμένες του σημείου (x,y) γνωρίζουμε ότι:

$r=\sqrt{x^2+y^2} \overset{(2)}{=} \sqrt{x^2+(\pm\sqrt{2x-x^2})^2}=\sqrt{x^2+(2x-x^2)}=\sqrt{\cancel{x^2}+2x-\cancel{x^2}}=\sqrt{2x}\geq 0$, αφού $x\geq 0$ $(0\leq x\leq 2)$

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{x}{\sqrt{2x}}=\dfrac{\cancel{x}\sqrt{2x}}{2\cancel{x}}=\dfrac{\sqrt{2x}}{2}\geq 0$, αφού $x\geq 0$

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}\overset{(2)}{=}\pm\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{2x}}=\pm\dfrac{\sqrt{2x-x^2}\cdot\sqrt{2x}}{2x}=\pm\dfrac{\sqrt{(2x-x^2)2x}}{2x}=\pm\dfrac{\sqrt{4x^2-2x^3}}{2x}=$

$=\pm\dfrac{\sqrt{x^2(4-2x)}}{2x}=\pm\dfrac{|x|\sqrt{4-2x}}{2x}\overset{x\geq 0}{=}\pm\dfrac{\cancel{x}\sqrt{4-2x}}{2\cancel{x}}=\pm\dfrac{\sqrt{4-2x}}{2}$

Επειδή $\cos\theta\geq 0$ $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

Επιπλέον $r=\sqrt{2x}=\dfrac{2\sqrt{2x}}{2}=2\cos\theta$

} Άρα όλα τα σημεία $(x,y)\in C$ (ή, σε πολικές συντεταγμένες, τα σημεία $[r,\theta]\in C$) ανήκουν στο σύνολο P, δηλ. $C\subseteq P$ (3)

Από (1), (3) $\Rightarrow C=P$.

Σαρώθηκε με το CamScanner