ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ
Σ. ΤΟΥΜΠΗΣ

1η Ομάδα Ασκήσεων

1. **(Η ένωση επιμερίζει την άπειρη τομή)** Να δείξετε ότι

$$A \cup (\cap_{i=1}^{\infty} B_i) = \cap_{i=1}^{\infty} (A \cup B_i).$$

Λύση: Έστω $C = A \cup (\cap_{i=1}^{\infty} B_i)$ και $D = \cap_{i=1}^{\infty} (A \cup B_i)$. Θα αποδείξουμε ότι τα C, D ταυτίζονται, χρησιμοποιώντας την συνήθη μέθοδο: θα δείξουμε ότι το ένα είναι υποσύνολο του άλλου και αντιστρόφως.

Έστω λοιπόν ένα στοιχείο $x \in C$. Τότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις. Αν $x \in A$, τότε $x \in A \cup B_i$ για όλα τα i, και επομένως θα ανήκει και στην άπειρη τομή τους D. Αν $x \notin A$, τότε θα ανήκει σε όλα τα B_i, αλλιώς δεν θα ανήκει σε κάποιο B_i, άρα ούτε και στην άπειρη τομή τους, και επομένως ούτε στο C, δηλαδή οδηγούμαστε σε άτοπο. Αφού λοιπόν ανήκει σε όλα τα B_i, θα ανήκει και σε όλα τα $A \cup B_i$, άρα και στην τομή τους D. Αποδείξαμε λοιπόν ότι αν $x \in C$, τότε $x \in D$, δηλαδή $C \subseteq D$.

Έστω τώρα ένα στοιχείο $x \in D$. Τότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις. Αν ανήκει στο A, τότε ανήκει και στην ένωση $C = A \cup (\cap_{i=1}^{\infty} B_i)$. Αν δεν ανήκει στο A, είναι απαραίτητο να ανήκει σε όλα τα B_i, γιατί αν δεν ανήκει έστω και σε ένα, έστω B_i, τότε δεν θα ανήκει και στην ένωση $A \cup B_i$, άρα ούτε και στην άπειρη τομή $D = \cap_{i=1}^{\infty} (A \cup B_i)$, και θα έχουμε άτοπο. Αφού λοιπόν το x ανήκει σε όλα τα B_i, θα ανήκει και στην άπειρη τομή τους $\cap_{i=1}^{\infty} B_i$ άρα και στην ένωση $C = A \cup (\cap_{i=1}^{\infty} B_i)$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι αν $x \in D$, τότε $x \in C$, δηλαδή $D \subseteq C$.

Αφού $C \subseteq D$ και $D \subseteq C$, τελικά $C = D$.

2. **(Λειτουργία δικτύου)** Έστω τα ενδεχόμενα $A =$«Σήμερα θα πέσει το δίκτυο», $B =$«Σήμερα είναι εργάσιμη μέρα», $C =$«Σήμερα ο τεχνικός είναι στο εργαστήριο». Να εκφραστούν τα πιο κάτω ενδεχόμενα ως σύνολα, συναρτήσει των συνόλων A, B, C:

(α΄) $D =$«Σήμερα θα πέσει το δίκτυο και είναι εργάσιμη μέρα».

(β΄) $E =$«Σήμερα είναι αργία και θα πέσει το δίκτυο».

(γ΄) $F =$«Σήμερα θα πέσει το δίκτυο, είναι εργάσιμη, και ο τεχνικός δεν είναι στο εργαστήριο».

(δ΄) $G =$«Σήμερα θα πέσει το δίκτυο και είναι αργία, ή θα πέσει το δίκτυο και ο τεχνικός είναι στο εργαστήριο, ή δεν θα πέσει το δίκτυο». (Πρέπει να γίνει ένα ή περισσότερα από τα ενδεχόμενα.)

Λύση: Έχουμε: $D = A \cap B$, $E = A \cap B'$, $F = A \cap B \cap C'$, $G = (A \cap B') \cup (A \cap C) \cup A'$.

3. **(Σταθερά και κινητά τηλέφωνα)** Ένα δίκτυο τηλεφωνίας αποτελείται από 400 σταθερά τηλέφωνα και 50 κινητά. Επιλέγουμε δύο τηλέφωνα στην τύχη, όπου στην 2^{η} επιλογή δεν επιτρέπουμε να επιλεγεί το ίδιο τηλέφωνο με την 1^{η}. Η σειρά επιλογής δεν έχει σημασία, μας ενδιαφέρει μόνο το ζεύγος που σχηματίζεται. Περιγράψτε τον δειγματικό χώρο. Επιπλέον, αν η επιλογή σταθερού τηλεφώνου έχει κόστος 1 ευρώ και η επιλογή κινητού 5 ευρώ, περιγράψτε τα ενδεχόμενα Α =«συνολικά οι 2 επιλογές κόστισαν 6 ευρώ» και Β =«συνολικά οι 2 επιλογές κόστισαν 11 Ευρώ».

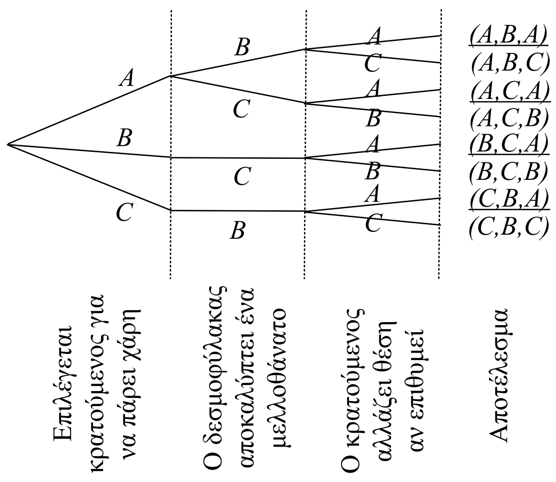
Λύση: Για το δειγματικό χώρο έχουμε,

$$\Omega = \{\text{όλες οι μη διατεταγμένες δυάδες διαφορετικών αριθμών από τα } 1, 2, 3, \ldots, 450\}.$$

Για το πρώτο ζητούμενο ενδεχόμενο,

$$\begin{aligned} A &= \text{«επιλέξαμε ένα σταθερό και ένα κινητό»} \\ &= \{(1,401), \ldots, (1,450), \\ &\qquad (2,401), \ldots, (2,450), \\ &\qquad (3,401), \ldots, (3,450), \\ &\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ &\qquad (400,401), \ldots, (400,450)\}, \end{aligned}$$

δηλαδή όλες οι μη διατεταγμένες δυάδες ακεραίων (m, n) που έχουν $1 \leq m \leq 400$ και $401 \leq n \leq 450$. Τέλος, Β$= \emptyset$, γιατί δεν υπάρχει συνδυασμός τηλεφώνων που να δίνει αυτό το κόστος.



Σχήμα 1: Ο δειγματικός χώρος της Άσκησης 4.

4. **(Το πρόβλημα των τριών φυλακισμένων)** Σε μια φυλακή, ο διευθυντής αποφασίζει να απονείμει χάρη σε έναν από τους τρεις φυλακισμένους (η φυλακή είναι μικρή!) και να εκτελέσει τους άλλους δύο. Ένας από τους τρεις φυλακισμένους, ζητά από τον δεσμοφύλακα να του αποκαλύψει ποιος από τους άλλους δύο κρατούμενους θα εκτελεστεί, με τη λογική ότι υπάρχει πάντοτε κάποιος τέτοιος. Ο δεσμοφύλακας το κάνει, και κατόπιν του παρέχει τη δυνατότητα να αλλάξει θέση με αυτόν του οποίου την τύχη δεν αποκάλυψε. Ο φυλακισμένος έχει την επιλογή να δεχθεί ή να αρνηθεί. Να περιγράψετε τον δειγματικό χώρο αυτού του τυχαίου πειράματος.

   Λύση: Το πρόβλημα αυτό είναι παρόμοιο με το πρόβλημα Monty Hall, όπου στη θέση του δώρου έχουμε την απονομή χάριτος, στη θέση του διαγωνιζόμενου τον φυλακισμένο, και στη θέση του δεσμοφύλακα τον παρουσιαστή. Μια επιλογή για τον δειγματικό χώρο είναι αυτή του Σχήματος 1. Συγκεκριμένα, έστω A ο κρατούμενος που ρωτά για την τύχη του, και B, C οι άλλοι δύο. Το πρώτο στοιχείο της τριάδας είναι το όνομα του φυλακισμένου που θα πάρει χάρη, το δεύτερο στοιχείο της τριάδας είναι το όνομα του φυλακισμένου που ο δεσμοφύλακας αποκαλύπτει ότι δεν θα πάρει χάρη, και το τρίτο στοιχείο είναι το όνομα του φυλακισμένου του οποίου θα πάρει τη θέση ο φυλακισμένος A που ρωτά (πιθανόν τη δικιά του).

5. **(Περιγραφή ενδεχόμενων)** Έστω A, B, C τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Βρείτε κατάλληλες εκφράσεις για τα ενδεχόμενα:

   (α΄) Πραγματοποίηση μόνο του B.
   (β΄) Πραγματοποιήθηκαν το A και το B αλλά όχι το C.
   (γ΄) Τουλάχιστον ένα από τα συγκεκριμένα ενδεχόμενα πραγματοποιείται.
   (δ΄) Τουλάχιστον δύο από τα ενδεχόμενα πραγματοποιούνται.
   (ε΄) Και τα τρία ενδεχόμενα πραγματοποιούνται.
   (ϛ΄) Κανένα από τα ενδεχόμενα δεν πραγματοποιείται.
   (ζ΄) Το πολύ ένα πραγματοποιείται.
   (η΄) Το πολύ δύο πραγματοποιούνται.

   Λύση:

   (α΄) $A'BC'$.
   (β΄) ABC'.
   (γ΄) $A \cup B \cup C$.
   (δ΄) $AB \cup AC \cup BC$.
   (ε΄) ABC.
   (ϛ΄) $A'B'C' = (A \cup B \cup C)'$.
   (ζ΄) $A'B'C' \cup AB'C' \cup A'BC' \cup A'B'C = (AB \cup AC \cup BC)'$.

(η´) $(ABC)' = A' \cup B' \cup C'$.

6. **(Μαρκαδόροι)** Σε ένα συρτάρι έχουμε 4 μαρκαδόρους, δύο που γράφουν μπλε και δυο που γράφουν κόκκινα.

   (α´) Αφαιρούμε στην τύχη από το συρτάρι έναν έναν τους μαρκαδόρους (εννοείται χωρίς επανάθεση), μέχρι να βρούμε έναν μπλε. Υποθέτουμε ότι όλοι οι μαρκαδόροι διαφέρουν στην όψη, και μας ενδιαφέρει ποιος επιλέχθηκε κάθε φορά. Κατασκευάστε ένα δειγματικό χώρο που να περιγράφει το πείραμα.

   (β´) Έστω πως επαναλαμβάνουμε το πείραμα του προηγούμενου σκέλους, αλλά οι μαρκαδόροι είναι εξωτερικά πανομοιότυποι (πέραν του ότι 2 γράφουν μπλε και 2 γράφουν κόκκινα). Κατασκευάστε ένα δειγματικό χώρο που να περιγράφει το πείραμα.

   (γ´) Αφαιρούμε στην τύχη από το συρτάρι έναν έναν τους μαρκαδόρους (εννοείται χωρίς επανάθεση), μέχρι να βρούμε και τους δύο που γράφουν μπλε. Υποθέτουμε ότι οι μαρκαδόροι διαφέρουν στην όψη (αλλά δεν ξέρουμε ποιος γράφει μπλε και ποιος κόκκινα), και μας ενδιαφέρει ποιος επιλέχθηκε κάθε φορά. Κατασκευάστε ένα δειγματικό χώρο που να περιγράφει το πείραμα.

   (δ´) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα του προηγούμενου σκέλους, αλλά οι μαρκαδόροι είναι πανομοιότυποι (πέραν του ότι 2 γράφουν μπλε και 2 γράφουν κόκκινα). Κατασκευάστε ένα δειγματικό χώρο που να περιγράφει το πείραμα.

   Λύση:

   (α´) Έστω R_1 και R_2 οι κόκκινοι μαρκαδόροι, και B_1, B_2 οι μπλε μαρκαδόροι που γράφουν. Επειδή μας ενδιαφέρει ποιος μαρκαδόρος επιλέχθηκε κάθε φορά, έχουμε συνολικά τα εξής ενδεχόμενα:

$$\Omega = \{R_1R_2B_1,\ R_2R_1B_1,\ R_1R_2B_2,\ R_2R_1B_2, \quad R_1B_1,\ R_2B_1,\ R_1B_2,\ R_2B_2, \quad B_1,\ B_2\}$$

   (β´) Έστω $B =$«παίρνω μαρκαδόρο που γράφει μπλε» και $R =$«παίρνω μαρκαδόρο που γράφει κόκκινα».

$$\Omega = \{RRB,\ RB,\ \}.$$

   (γ´) Επεκτείνοντας το συλλογισμό του πρώτου σκέλους, έχουμε:

$$\begin{aligned}\Omega \;=\; \{&R_1R_2B_1B_2,\ R_1R_2B_2B_1,\ R_2R_1B_1B_2,\ R_2R_1B_2B_1,\\ &R_1B_1B_2,\ R_1B_2B_1,\ R_2B_1B_2,\ R_2B_2B_1,\\ &R_1B_1R_2B_2,\ R_1B_2R_2B_1,\ R_2B_1R_1B_2,\ R_2B_2R_1B_1,\\ &B_1R_1R_2B_2,\ B_1R_2R_1B_2,\ B_2R_1R_2B_1,\ B_2R_2R_1B_1,\\ &B_1R_1B_2,\ B_2R_1B_1,\ B_1R_2B_2, B_2R_2B_1,\\ &B_1B_2,\ B_2B_1\}.\end{aligned}$$

   (δ´) Επεκτείνοντας το συλλογισμό του δεύτερου σκέλους, έχουμε:

$$\Omega = \{RRBB,\ RBRB,\ RBB,\ BRRB,\ BRB,\ BB\}.$$

7. **(Πρόβλημα Γαλιλαίου)** Ρίχνουμε 3 συνηθισμένα ζάρια. Θεωρούμε ότι τα $6^3 = 216$ δυνατά αποτελέσματα του πειράματος είναι ισοπίθανα.

   (α´) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου A το άθροισμα των ενδείξεών τους να ισούται με 9;

   (β´) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου B το άθροισμα των ενδείξεών τους να ισούται με 10;

   Λύση: Υπάρχουν συνολικά $6^3 = 216$ δυνατά αποτελέσματα, και υποθέτουμε ότι είναι όλα ισοπίθανα. Προκειμένου να υπολογίσουμε τις ζητούμενες πιθανότητες, πρέπει να βρούμε από πόσα αποτελέσματα αποτελείται καθένα από τα δύο ενδεχόμενα.

   (α´) Παρατηρούμε πως το ενδεχόμενο A είναι το ακόλουθο:

$$\begin{aligned}A = \{&126, 216, 135, 225, 315, 144, 234, 324, 414, 153, 243, 333, 423,\\ &513, 162, 252, 342, 432, 522, 612, 261, 351, 441, 531, 621\}.\end{aligned}$$

   Καθώς υπάρχουν 25 αποτελέσματα, όλα ισοπίθανα, και καθένα με πιθανότητα $1/216$, προκύπτει τελικά πως η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{25}{216}.$$

(β΄) Παρατηρούμε πως το ενδεχόμενο B είναι το ακόλουθο:

$$= \{136, 226, 316, 145, 235, 325, 415, 154, 244, 334, 424, 514, 163, 253,$$
$$343, 433, 523, 613, 262, 352, 442, 532, 622, 361, 451, 541, 631\}.$$

Καθώς υπάρχουν 27 αποτελέσματα, όλα ισοπίθανα, και καθένα με πιθανότητα $1/216$, προκύπτει τελικά πως η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{27}{216}.$$

8. **(Τρεις σφαίρες)** Ένα κουτί περιέχει μία κόκκινη (R) μία μπλε (B) και μία πράσινη (G) σφαίρα. Θεωρήστε ένα πείραμα κατά το οποίο επιλέγουμε τυχαία μία σφαίρα από το κουτί, και αφού την επανατοποθετήσουμε στο κουτί επιλέγουμε τυχαία άλλη μία σφαίρα. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος; Αν όλα τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα, ποια είναι η πιθανότητα εκλογής μίας τουλάχιστον κόκκινης σφαίρας στις δύο δοκιμές; Απαντήστε τα άνω εκ νέου, υποθέτοντας ότι η πρώτη σφαίρα δεν επανατοποθετείται στο κουτί.

Λύση: Ο δειγματικός χώρος είναι ο

$$\Omega_1 = \{RR, RB, RG, BR, BB, BG, GR, GB, GG\}.$$

Επειδή όλα τα αποτελέσματα έχουν την ίδια πιθανότητα, το ενδεχόμενο $A_1 = \{RR, RB, RG, BR, GR\}$ έχει πιθανότητα

$$P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega_1|} = \frac{5}{9}.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η πρώτη σφαίρα δεν επανατοποθετείται στο κουτί. Ο νέος δειγματικός χώρος είναι ο

$$\Omega_2 = \{RB, RG, BR, BG, GR, GB\}.$$

Επειδή όλα τα αποτελέσματα έχουν την ίδια πιθανότητα, το ενδεχόμενο $A_2 = \{RB, RG, BR, GR\}$ έχει πιθανότητα

$$P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega_2|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

9. **(Ανισότητα Bonferroni)** Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε δύο ενδεχόμενα A, B, ισχύει η ανισότητα

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

Ακολούθως να δείξετε ότι, πιο γενικά,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - (n-1).$$

Λύση: Σχετικά με την πρώτη ανισότητα, παρατηρούμε πως

$$1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

Σχετικά με την δεύτερη ανισότητα, παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned}
&1 - P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \\
&\quad = \quad P\left((A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)'\right) = P\left(A_1' \cup A_2' \cup \cdots \cup A_n'\right) \\
&\quad \leq \quad P(A_1') + P(A_2') + \cdots + P(A_n') = (1 - P(A_1)) + (1 - P(A_2)) + \cdots + (1 - P(A_n)) \\
&\quad = \quad n - P(A_1) - P(A_2) - \cdots - P(A_n),
\end{aligned}$$

και το ζητούμενο προκύπτει άμεσα. (Βεβαιωθείτε ότι καταλαβαίνετε κάθε ένα από τα άνω βήματα.)

10. **(Αυστηρή ανισότητα)** Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, ισχύει η ιδιότητα $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$, όπου A, B ενδεχόμενα. Να αποδείξετε ότι ισχύει και η ακόλουθη, ή να δώσετε αντιπαράδειγμα:

$$A \subset B \Rightarrow P(A) < P(B).$$

Λύση: Η ιδιότητα δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω ένα ζάρι του οποίου τα αποτελέσματα έχουν τις ακόλουθες πιθανότητες:

$$P(1) = P(2) = \frac{1}{4}, \quad P(3) = P(4) = 0, \quad P(5) = P(6) = \frac{1}{4}.$$

Παρατηρήστε ότι αν $A = \{1, 2\}$ και $B = \{1, 2, 3, 4\}$ τότε $A \subset B$ αλλά $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Μπορείτε να φτιάξετε μερικά παραδείγματα ακόμα;

2η Ομάδα Ασκήσεων

11. **(Τράπουλα)** Μοιράζουμε στην τύχη 10 φύλλα από μια συνηθισμένη τράπουλα 52 φύλλων. Ποια η πιθανότητα να περιέχει η μοιρασιά:

    (α´) κανέναν άσσο;

    (β´) το πολύ τρεις άσσους;

    (γ´) τουλάχιστον έναν άσο και τουλάχιστον μια φιγούρα (δηλαδή βαλέ, ντάμα, ή ρήγα);

    Λύση:

    Για να απαντήσουμε τα άνω ερωτήματα, καταρχάς παρατηρούμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω του προβλήματος περιλαμβάνει όλες τις δυνατές (μη διατεταγμένες) 10άδες φύλλων που μπορούν να επιλεγούν από 52 φύλλα, οπότε $|\Omega| = \binom{52}{10} = \frac{52!}{(52-10)!10!} = 15,820,024,220$. Ακολούθως έχουμε:

    (α´) Έστω A το ενδεχόμενο να μην επιλεγεί κανένας άσσος. Υπάρχουν $\binom{48}{10}$ τρόποι με τους οποίους μπορεί να σχηματισθεί το A, ένας για κάθε μια επιλογή των 10 φύλλων από τα υπόλοιπα 48. Συνεπώς, $P(A) = \binom{48}{10}/\binom{52}{10} \simeq 0.41$.

    (β´) Έστω B το ενδεχόμενο να πάρουμε το πολύ τρεις άσσους. Το ενδεχόμενο B' περιέχει όλες τις μοιρασιές στις οποίες πήραμε και τους 4 άσσους, και ο υπολογισμός της πιθανότητας του είναι απλούστερος. Πράγματι, υπάρχουν $\binom{4}{4}$ τρόποι να επιλέξουμε τους 4 άσσους και $\binom{48}{6}$ τρόποι να επιλέξουμε τα υπόλοιπα 6 φύλλα. Συνεπώς,

    $$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{\binom{4}{4}\binom{48}{6}}{\binom{52}{10}} \simeq 0.992.$$

    (γ´) Έστω C το ενδεχόμενο να πάρουμε τουλάχιστον ένα άσο. Έστω D το ενδεχόμενο να πάρουμε τουλάχιστον μια φιγούρα. Ζητείται η πιθανότητα του ενδεχόμενου $C \cap D$. Για να την υπολογίσουμε, παρατηρούμε ότι:

    $$\begin{aligned} P(C \cap D) &= 1 - P(C' \cup D') = 1 - P(C') - P(D') + P(C' \cap D') \\ &= 1 - \frac{\binom{4}{0}\binom{48}{10} + \binom{12}{0}\binom{40}{10} - \binom{4}{0}\binom{12}{0}\binom{36}{10}}{\binom{52}{10}} \simeq 0.55. \end{aligned}$$

    Εναλλακτικά, το ενδεχόμενο $C \cap D$ μπορεί να γραφεί ως

    $$C \cap D = \bigcup_{\{i=1,\ldots,4,\ j=1,\ldots,9,\ i+j \leq 10\}} \text{«Λαμβάνονται } i \text{ άσοι και } j \text{ φιγούρες».} \tag{1}$$

    Τα ενδεχόμενα είναι ξένα, συνεπώς οι πιθανότητες τους μπορούν να προστεθούν για να προκύψει η πιθανότητα του C. Επιπλέον, οι πιθανότητές τους ισούνται με

    $$P(\text{«Λαμβάνονται } i \text{ άσοι και } j \text{ φιγούρες»}) = \frac{\binom{4}{i}\binom{12}{j}\binom{36}{10-i-j}}{\binom{52}{10}}, \tag{2}$$

    όπου $1 \leq i \leq 4,\ 1 \leq j \leq 9$. Με αντικατάσταση των (2) στην (1) προκύπτει η $P(C \cap D)$.

12. **(Τυχαίες λέξεις)** Έστω ότι οποιαδήποτε επαναληπτική διάταξη 5 γραμμάτων από τα 24 της ελληνικής αλφαβήτου θεωρείται από μια βάση δεδομένων κειμένου ως λέξη. Π.χ. το «ΚΑΠΩΣ» και το «ΑΕΝΦΟ» είναι λέξεις ενώ το «ΜΑΘΗΜΑ» και το «ΝΑΙ» δεν είναι. Από όλο αυτό το πλήθος λέξεων επιλέγουμε μια στην τύχη. Ποια η πιθανότητα να:

    (α´) Περιέχει το γράμμα Α.

    (β´) Περιέχει το Α ή το Β ή και τα δύο.

    (γ´) Περιέχει το Α και το Β.

    (δ´) Περιέχει το Β αλλά όχι το Α.

    Λύση: Έστω A το ενδεχόμενο η λέξη να περιέχει το A, και B το ενδεχόμενο η λέξη να περιέχει το B.

    (α´)

    $$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{|A'|}{|\Omega|} = 1 - \frac{23^5}{24^5} \simeq 19\%.$$

(β΄) Το ενδεχόμενο που μας ενδιαφέρει είναι το $A \cup B$. Έχουμε:

$$P(A \cup B) = 1 - P((A \cup B)') = 1 - \frac{|A' \cap B'|}{|\Omega|} = 1 - \frac{22^5}{24^5} \simeq 35\%.$$

(γ΄) Το ενδεχόμενο που μας ενδιαφέρει είναι το $A \cap B$. Έχουμε $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$, όπου $P(A) = P(B) \simeq 19\%$ και $P(A \cup B) \simeq 35\%$. Άρα $P(A \cap B) \simeq 3\%$.

(δ΄) Το ενδεχόμενο που μας ενδιαφέρει είναι το $A' \cap B$. Από το νόμο της ολικής πιθανότητας:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B) \Rightarrow P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \simeq 16\%.$$

13. **(Το παράδοξο των γενεθλίων)** Σε μια αίθουσα βρίσκονται $M \leq 365$ άτομα. Ποια η πιθανότητα του ενδεχόμενου A τουλάχιστον δύο άτομα να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα του χρόνου; Ποιο είναι το μικρότερο M για το οποίο η πιθανότητα είναι μεγαλύτερη από 0.5; Έστω τώρα ένα συγκεκριμένο άτομο. Ποια η πιθανότητα του ενδεχόμενου B να έχει τουλάχιστον ένας από τους υπόλοιπους $M - 1$ γενέθλια μαζί με *αυτό το άτομο*; Να αγνοηθεί η ύπαρξη δίσεκτων ετών.

    Λύση: Ο χρόνος έχει 365 μέρες. Για τα M άτομα υπάρχουν 365 δυνατές M-άδες γενεθλίων. Ο αριθμός των M-άδων για τις οποίες κανείς δεν έχει γενέθλια με άλλον είναι

    $$365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times (365 - M + 1) = \frac{365!}{(365 - M)!}.$$

    Άρα η πιθανότητα του ενδεχόμενου A' κανείς να μην έχει γενέθλια με άλλον ισούται με

    $$P(A') = \frac{365!}{365(365 - M)!} \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{365!}{365(365 - M)!}.$$

    Η πιθανότητα $P(A)$ προφανώς είναι αύξουσα συνάρτηση του M και περνά το 0.5 όταν $M = 23$, δηλαδή συνολικά έχουμε 23 άτομα. Επειδή αυτός ο αριθμός είναι μικρότερος από τον αναμενόμενο σύμφωνα με τη διαίσθηση των περισσότερων, το αποτέλεσμα καλείται το *παράδοξο των γενεθλίων*.

    Έστω τώρα ένα συγκεκριμένο άτομο. Υπάρχουν 364^{M-1} τρόποι με τους οποίους μπορούν να τοποθετηθούν τα γενέθλια των υπόλοιπων ώστε να μην συμπίπτουν με τα γενέθλια αυτού του ατόμου. Ο ολικός αριθμός τρόπων όμως είναι 365^{M-1}. Άρα,

    $$P(B') = \frac{364^{M-1}}{365^{M-1}} \Rightarrow P(B) = 1 - P(B') = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{M-1}.$$

    Σε αυτή την περίπτωση, το μικρότερο M για το οποίο η πιθανότητα είναι μεγαλύτερη από το 0.5 είναι το $M = 254$.

14. **(Superleague)** Η Superleague έχει 16 ομάδες, και όλες πρέπει να παίξουν με όλες, ακριβώς δύο φορές, μια φορά σε κάθε έδρα. Πόσοι αγώνες πρέπει να γίνουν συνολικά; Ποια ομάδα θα πάρει το πρωτάθλημα;

    Λύση: Υπάρχουν δύο τρόποι να λύσουμε την άσκηση. Πρώτον, παρατηρήστε πως υπάρχουν συνολικά $\binom{16}{2}$ ζεύγη ομάδων, και άρα πρέπει να γίνουν $2 \times \binom{16}{2} = 240$ αγώνες. Εναλλακτικά, παρατηρήστε πως κάθε μια από τις 16 ομάδες θα υποδεχτεί κάθε μια από τις άλλες 15 ομάδες στο γήπεδό της, άρα θα γίνουν $16 \times 15 = 240$ αγώνες.

15. **(Λόττο)** Για να κερδίσουμε το Λόττο πρέπει να προβλέψουμε 6 αριθμούς ανάμεσα στους $1, 2, 3, \ldots, 49$, χωρίς διάταξη και χωρίς επανατοποθέτηση. Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσουμε αγοράζοντας μόνο ένα λαχνό;

    Λύση: Υπάρχουν $\binom{49}{6} = 13983816$ δυνατοί συνδυασμοί, όλοι τους ισοπίθανοι. Συνεπώς, η πιθανότητα να κερδίσουμε με ένα μόνο λαχνό είναι $1/\binom{49}{6} \simeq 7.15112384 \times 10^{-8}$, δηλαδή μικρότερη από μία στα 10 εκατομμύρια.

16. **(Seven Card Stud)** Κατά τα γνωστά, μια τράπουλα αποτελείται από $4 \times 13 = 52$ φύλλα, που χωρίζονται, με δύο διαφορετικούς τρόπους, σε 4 φυλές ($\diamondsuit$, $\spadesuit$, $\heartsuit$, $\clubsuit$) και 13 νούμερα ($A, 2, 3, \ldots, 10, J, Q, K$). Σε ένα παιχνίδι Seven Card Stud κάθε παίκτης λαμβάνει 7 φύλλα από μια τράπουλα.

    (α΄) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου A ένας παίκτης να έχει 7 φύλλα της ίδιας φυλής; (Για παράδειγμα, 7 κούπες.)

    (β΄) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου B ένας παίκτης να έχει τουλάχιστον 5 φύλλα της ίδιας φυλής; (Για παράδειγμα 5,6 ή 7 κούπες).

    (γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου C ένας παίκτης να έχει τρία ζεύγη αλλά καμία τριάδα ή τετράδα; (Ένα αποτέλεσμα που ανήκει στο ενδεχόμενο είναι να έχει τα φύλλα ($3\spadesuit, 3\heartsuit, 7\heartsuit, 7\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, 8\spadesuit$)).

Λύση:

(α΄) Συνολικά, οι συνδυασμοί φύλλων που μπορούμε να έχουμε είναι $\binom{52}{7}$. Οι συνδυασμοί φύλλων μιας συγκεκριμένης φυλής είναι $\binom{13}{7}$, και επειδή υπάρχουν 4 φυλές, τελικά η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$P(A) = \frac{4\binom{13}{7}}{\binom{52}{7}} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{51 \times 50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46} = \frac{4}{77963}.$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε δεσμευμένες πιθανότητες. Μπορείτε να γράψετε την απόδειξη;

(β΄) Και πάλι, υπάρχουν $\binom{52}{7}$ συνδυασμοί φύλλων που μπορεί να έχει ένας παίκτης. Οι συνδυασμοί που περιλαμβάνουν ακριβώς 5 κούπες είναι $\binom{13}{5}\binom{39}{2}$, αφού έχουμε $\binom{13}{5}$ επιλογές για τις 5 κούπες, και $\binom{39}{2}$ για τα άλλα 2 φύλλα. Επειδή έχουμε 4 φυλές, προκύπτει τελικά ότι υπάρχουν $4\binom{13}{5}\binom{39}{2}$ συνδυασμοί που περιλαμβάνουν 5 ακριβώς φύλλα μιας φυλής. Με παρόμοιο τρόπο, προκύπτει πως υπάρχουν $4\binom{13}{6}\binom{39}{1}$ συνδυασμοί που περιλαμβάνουν 6 ακριβώς φύλλα μιας φυλής. Στο άνω σκέλος, βρήκαμε πως υπάρχουν $4\binom{13}{7}\binom{39}{0} = 4\binom{13}{7}$ συνδυασμοί που περιλαμβάνουν 7 ακριβώς φύλλα μιας φυλής. Άρα, τελικά

$$P(B) = \frac{4\binom{13}{5}\binom{39}{2} + 4\binom{13}{6}\binom{39}{1} + 4\binom{13}{7}\binom{39}{0}}{\binom{52}{7}} = \frac{208}{6805}.$$

(γ΄) Και πάλι, οι συνδυασμοί όλου του δειγματικού χώρου είναι $\binom{52}{7}$. Θα μετρήσουμε τους συνδυασμούς που αντιστοιχούν στο ενδεχόμενο C. Έχουμε $\binom{13}{3}$ επιλογές για τα τρία ζεύγη που μπορούμε να έχουμε. Έχουμε επίσης $\binom{4}{2}$ για τα 2 από τα 4 φύλλα που θα απαρτίζουν το κάθε ζεύγος. Τέλος, έχουμε 40 επιλογές για το έβδομο φύλλο. Άρα τελικά

$$P(C) = \frac{40\binom{13}{3}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{52}{7}} = \frac{78}{4223}.$$

17. **(Παπουτσοθήκη)** Σε μια παπουτσοθήκη υπάρχουν 10 ζευγάρια παπούτσια, και συνεπώς συνολικά 20 παπούτσια. Ανοίγουμε την παπουτσοθήκη και παίρνουμε 4 παπούτσια, χωρίς προτίμηση στο συνδυασμό τους. Ποια είναι η πιθανότητα ανάμεσα στα 4 παπούτσια που πήραμε:

(α΄) Να μην υπάρχει ούτε ένα ζευγάρι;

(β΄) Να υπάρχει ακριβώς 1 ζευγάρι;

(γ΄) Να υπάρχουν 2 ζευγάρια;

Λύση: Έστω X το πλήθος από ζευγάρια παπουτσιών με το οποίο καταλήγουμε. Παρατηρούμε πως η Τ.Μ. X μπορεί να λάβει τις τιμές $0, 1, 2$. Θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες με τις οποίες λαμβάνει τις τιμές αυτές χρησιμοποιώντας συνδυαστική ανάλυση. Παρατηρούμε καταρχήν πως υπάρχουν 20 παπούτσια από τα οποία επιλέγονται τα 4, και επομένως υπάρχουν $\binom{20}{4}$ συνδυασμοί παπουτσιών που μπορεί να προκύψουν.

(α΄) Μετράμε καταρχήν τους συνδυασμούς παπουτσιών στους οποίους δεν υπάρχει ζευγάρι. Υπάρχουν $\binom{10}{4}$ τρόποι να επιλεγούν τα ζευγάρια από τα οποία να επιλέξουμε ακριβώς ένα παπούτσι, και εκ των υστέρων έχουμε 2 επιλογές για το παπούτσι που θα πάρουμε από κάθε ένα από τα 4 ζευγάρια. Επομένως,

$$P(X = 0) = \frac{\binom{10}{4}2^4}{\binom{20}{4}} = \frac{224}{323}.$$

(β΄) Μετράμε τώρα τους συνδυασμούς παπουτσιών που περιέχουν ένα ζευγάρι ακριβώς. Υπάρχουν 10 τρόποι να επιλέξουμε το ζευγάρι, $\binom{9}{2}$ τρόποι για να επιλέξουμε τα άλλα 2 ζευγάρια που θα εκπροσωπηθούν στην επιλογή μας, και για κάθε ένα από αυτά υπάρχουν 2 επιλογές για το ποιο από τα 2 παπούτσια θα επιλεγεί. Τελικά,

$$P(X = 1) = \frac{10\binom{9}{2}2^2}{\binom{20}{4}} = \frac{96}{323}.$$

(γ΄) Τέλος, παρατηρούμε πως υπάρχουν $\binom{10}{2}$ συνδυασμοί παπουτσιών που αποτελούνται από ακριβώς 2 από τα διαθέσιμα 10 ζευγάρια, και επομένως,

$$P(X = 2) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{3}{323}.$$

18. **(Age of Empires Logic)** 20 πολεμικοί ελέφαντες και 30 πεζικάριοι επιχειρούν να επιβιβαστούν σε ένα αποβατικό σκάφος και από αυτούς επιλέγονται μόνο οι 10, χωρίς προτίμηση στο ποιοι θα επιβιβαστούν. Ποια είναι η πιθανότητα να επιβιβαστούν τουλάχιστον 7 ελέφαντες;

    Λύση: Παρατηρούμε ότι υπάρχουν 10 θέσεις για 50 «άτομα)) (όπου ένα άτομο μπορεί να είναι πεζικάριος ή ελέφαντας), και επομένως ο δειγματικός χώρος έχει $\binom{50}{10}$ συνδυασμούς. Μετράμε καταρχήν τους συνδυασμούς με τους 7 ελέφαντες (και προφανώς 3 πεζικάριους). Έχουμε $\binom{20}{7}$ τρόπους για να διαλέξουμε τους 7 ελέφαντες από τους 20 διαθέσιμους, και μένουν 3 θέσεις που πρέπει να γεμίσουν με 3 από τους 30 πεζικάριους. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{30}{3}$ τρόπους, και τελικά υπάρχουν $\binom{20}{7}\binom{30}{3}$ συνδυασμοί με ακριβώς 7 ελέφαντες. Παρόμοια μπορεί να υπολογιστούν οι συνδυασμοί με 8, 9, 10 ελέφαντες, και τελικά το ενδεχόμενο A να υπάρχουν τουλάχιστον 7 ελέφαντες έχει πιθανότητα

$$P(A) = \frac{\binom{20}{7}\binom{30}{3} + \binom{20}{8}\binom{30}{2} + \binom{20}{9}\binom{30}{1} + \binom{20}{10}}{\binom{50}{10}} \simeq 0.0365.$$

19. **(n ζευγάρια διαγωνιζόμενων)** Σε ένα διαγωνισμό παίρνουν μέρος n ζευγάρια ατόμων. Αν πρόκειται να απονεμηθούν τυχαία στους $2n$ διαγωνιζόμενους n βραβεία, έτσι ώστε κάθε ένα άτομο να πάρει το πολύ ένα βραβείο, και χωρίς κάποια προτίμηση στα άτομα που θα πάρουν τα βραβεία, ποια είναι η πιθανότητα να πάρει βραβείο ακριβώς ένα από τα δύο άτομα σε κάθε ένα από τα ζευγάρια;

    Λύση: Παρατηρήστε ότι υπάρχουν $\binom{2n}{n}$ τρόποι με τους οποίους τα n βραβεία μπορούν να καταλήξουν στα $2n$ άτομα, αφού υπάρχουν $\binom{2n}{n}$ τρόποι για να επιλέξουμε τους n που θα πάρουν βραβείο. Επίσης, υπάρχουν 2^n τρόποι με τους οποίους κάθε ζευγάρι θα πάρει από ένα βραβείο. Πράγματι, υπάρχουν 2 επιλογές για το ποιος από το πρώτο ζευγάρι θα πάρει το πρώτο βραβείο, 2 επιλογές για το δεύτερο, κ.ο.κ., και το σύνολο των επιλογών είναι $2 \times 2 \times \ldots 2 = 2^n$. Προκύπτει τελικά πως η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$2^n \Big/ \binom{2n}{n}.$$

20. **(n ζευγάρια κατασκόπων)** Από n ζευγάρια κατασκόπων ($2n$ συνολικά άτομα) διαλέγουμε στην τύχη $k \leq n$ άτομα για να τα συμπεριλάβουμε σε μία μυστική αποστολή, χωρίς κάποια προτίμηση σε άτομα. Ποια είναι η πιθανότητα

    (α΄) να συμπεριληφθούν ακριβώς j άνδρες στην αποστολή; Προφανώς $0 \leq j \leq k$.

    (β΄) να μην συμπεριληφθούν άτομα του ίδιου ανδρόγυνου στη αποστολή;

    Λύση: Καταρχήν παρατηρούμε πως υπάρχουν $\binom{2n}{k}$ τρόποι για να φτιάξουμε την ομάδα των κατασκόπων που θα συμμετάσχουν στην μυστική αποστολή.

    (α΄) Υπάρχουν $\binom{n}{j}$ συνδυασμοί να επιλεγούν οι j άντρες, και, για κάθε ένα από αυτούς τους συνδυασμούς, $\binom{n}{k-j}$ συνδυασμοί για να επιλεγούν οι $k-j$ γυναίκες που υπολείπονται. Επομένως, υπάρχουν $\binom{n}{j}\binom{n}{k-j}$ τρόποι για να φτιάξουμε ομάδες με j άντρες, και τελικά η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\binom{n}{j}\binom{n}{k-j} \Big/ \binom{2n}{k}.$$

    (β΄) Υπάρχουν $\binom{n}{k}$ συνδυασμοί με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε τα k ζευγάρια ένα μέλος των οποίων θα συμμετάσχει. Για κάθε τέτοιο συνδυασμό, έχουμε 2 τρόπους να διαλέξουμε το μέλος του πρώτου ζευγαριού, 2 τρόπους να επιλέξουμε το μέλος του δεύτερου, κ.ο.κ., μέχρι το ζευγάρι k. Άρα, υπάρχουν $\binom{n}{k}2^k$ αποτελέσματα που δεν συμπεριλαμβάνουν άτομα του ίδιου ζευγαριού στην αποστολή, και τελικά η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\binom{n}{k}2^k \Big/ \binom{2n}{k}.$$

3η Ομάδα Ασκήσεων

21. **(Τέσσερα ζάρια)** Ρίχνουμε τέσσερα δίκαια ζάρια, με τα αποτελέσματα κάθε ζαριάς να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

(α΄) Δεδομένου ότι τα αποτελέσματα της πρώτης και της τέταρτης ζαριάς είναι διαφορετικά μεταξύ τους, ποια είναι η πιθανότητα να είναι και οι τέσσερις διαφορετικές;

(β΄) Δεδομένου ότι τα αποτελέσματα της πρώτης και της τέταρτης ζαριάς είναι διαφορετικά μεταξύ τους, ποια η πιθανότητα να έχουμε δύο διαφορετικά ζευγάρια όμοιων αποτελεσμάτων; (Π.χ., (2,2,4,4) και (1,5,1,5)).

Λύση: Παρατηρήστε ότι ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από $6^4 = 1296$ διατεταγμένες τετράδες των αριθμών $1, 2, \ldots, 6$. Καθώς τα ζάρια είναι δίκαια και ανεξάρτητα, τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα.

Έστω $A = (1 \neq 6)$ το ενδεχόμενο το πρώτο και το τέταρτο ζάρι να είναι διαφορετικά. Το A αποτελείται από $6 \times 6 \times 6 \times 5 = 1080$ αποτελέσματα, επομένως $P(A) = \frac{1080}{1296} = \frac{5}{6}$. Το αποτέλεσμα προκύπτει και αν παρατηρήσουμε ότι όταν ρίχνουμε το τελευταίο ζάρι, αρκεί να προκύψουν 5 από 6 δυνατά αποτελέσματα, για να προκύψει το ενδεχόμενο A.

(α΄) Έστω $B = (i \neq j)$ το ενδεχόμενο όλα τα ζάρια να είναι διαφορετικά. Το B αποτελείται από $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ αποτελέσματα. Έχουμε:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{360/1296}{1080/1296} = \frac{1}{3}.$$

Στην δεύτερη ισότητα, χρησιμοποιήσαμε το ότι $B \subset A$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να λύσουμε την άσκηση χωρίς χρήση Συνδυαστικής, ως εξής: έστω επιπλέον $C = (3 \neq 1, 3 \neq 4)$ το ενδεχόμενο να είναι το ζάρι 3 διάφορο των $1, 4$, $D = (2 \neq 1, 2 \neq 4)$ το ενδεχόμενο να είναι το ζάρι 2 διάφορο των $1, 4$, και $E = (2 \neq 3)$ το ενδεχόμενο τα ζάρια $2, 3$ να είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Έχουμε $B = ACD$, επομένως

$$\begin{aligned} P(B|A) = P(ACD|A) = \frac{P(ACDEA)}{P(A)} &= \frac{P(ACDE)}{P(A)} = P(CDE|A) \\ &= P(C|A)P(D|AC)P(E|ACD) = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε η λύση που χρησιμοποιεί Συνδυαστική είναι αρκετά πιο απλή.

(β΄) Έστω F το ενδεχόμενο να έχουμε δύο ζευγάρια όμοιων αποτελεσμάτων. Ζητείται η $P(F|A) = \frac{P(AF)}{P(A)}$. Θα μετρήσουμε το πλήθος των αποτελεσμάτων που βρίσκονται εντός του AF. Υπάρχουν δύο ομάδες αποτελεσμάτων εντός του AF, αυτή στην οποία είναι ίδια τα ζάρια $1, 2$ και τα ζάρια $3, 4$, αλλά όχι τα ζάρια $1, 4$, που απαρτίζουν το ενδεχόμενο $G_1 = (1 = 2, 3 = 4, 1 \neq 4)$, και αυτή στην οποία είναι ίδια τα ζάρια $1, 3$ και τα ζάρια $2, 4$, αλλά όχι τα ζάρια $1, 4$, που απαρτίζουν το ενδεχόμενο $G_2 = (1 = 3, 2 = 4, 1 \neq 4)$. Στην πρώτη ομάδα αποτελεσμάτων βρίσκονται $6 \times 1 \times 5 \times 1 = 30$ αποτελέσματα (γιατί έχουμε 6 επιλογές για το πρώτο, 1 επιλογή για το δεύτερο, που πρέπει να είναι ίδιο με το πρώτο, 5 επιλογές για το τρίο, που πρέπει να είναι διάφορο των πρώτων 2, και μια για το τέταρτο, που πρέπει να είναι ίδιο με το τρίτο). Στην δεύτερη ομάδα αποτελεσμάτων παρόμοια προκύπτει πως υπάρχουν 30 αποτελέσματα. Άρα, τελικά, $P(AF) = \frac{60}{1296}$, και επομένως

$$P(F|A) = \frac{P(FA)}{P(A)} = \frac{60/1296}{1080/1296} = \frac{1}{18}.$$

Εναλλακτικά, χωρίς τη χρήση Συνδυαστικής, παρατηρήστε ότι τα ενδεχόμενα G_1, G_2, που έχουν ορισθεί ως άνω, είναι ξένα, άρα

$$P(F|A) = \frac{P(AF)}{P(A)} = \frac{P(G_1) + P(G_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{18}.$$

Η πιθανότητα του G_1 προκύπτει ως άνω γιατί έχουμε πιθανότητα $\frac{1}{6}$ το δεύτερο ζάρι να ισούται με το πρώτο, πιθανότητα $\frac{5}{6}$ το τρίτο ζάρι να μην είναι ίδιο με τα πρώτα δύο, και $\frac{1}{6}$ το τέταρτο ζάρι να είναι ίδιο με το τρίτο. Παρόμοια υπολογίζεται και η πιθανότητα του G_2.

22. **(Πινιάτα)** Μια πινιάτα σπάει αν δεχτεί ένα δυνατό χτύπημα ή δύο μέτρια χτυπήματα. Σε ένα πάρτι, αν ένα παιδί χτυπήσει την πινιάτα έχει πιθανότητες $\frac{1}{4}$ να δώσει ένα δυνατό χτύπημα, $\frac{1}{4}$ να δώσει ένα μέτριο χτύπημα, και $\frac{1}{2}$ να

αστοχήσει. 4 παιδιά μπαίνουν σε σειρά για να χτυπήσουν μια πινιάτα, διαδοχικά, και μια φορά το καθένα. Ποια είναι η πιθανότητα να τη σπάσουν; Όλα τα χτυπήματα είναι ανεξάρτητα.

Λύση: Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(F)$ τα 4 παιδιά να μην καταφέρουν να σπάσουν την πινιάτα, που προκύπτει κάπως πιο εύκολα. Έστω M_i το ενδεχόμενο το παιδί i να προσπάθησε να χτυπήσει την πινιάτα και να αστόχησε, έστω S_i το ενδεχόμενο το παιδί i να προσπάθησε να χτυπήσει την πινιάτα και να την χτύπησε δυνατά, και έστω A_i το ενδεχόμενο το παιδί i να προσπάθησε να χτυπήσει την πινιάτα και να την χτύπησε μέτρια. Στα άνω, $i = 1, 2, 3, 4$. Θα έχουμε

$$\begin{aligned}
P(F) &= P(M_1M_2M_3M_4) + P(A_1M_2M_3M_4) + P(M_1A_2M_3M_4) + P(M_1M_2A_3M_4) + P(M_1M_2M_3A_4) \\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{3}{16},
\end{aligned}$$

και τελικά η πιθανότητα να σπάσει η πινιάτα είναι $1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$.

23. **(Ασθένειες)** Σύμφωνα με το γιατρό του, ένας ασθενής έχει μία ακριβώς από τις ασθένειες A, B, C, με πιθανότητες $1/3$ για κάθε μια. Ο γιατρός υποβάλει τον ασθενή σε μια εξέταση με δύο δυνατά αποτελέσματα, το *θετικό* και το *αρνητικό*. Η εξέταση έχει το θετικό αποτέλεσμα με πιθανότητες 0.9 αν έχει την ασθένεια A, 0.5 αν έχει την ασθένεια B, και 0.1 αν έχει την ασθένεια C. Η εξέταση τελικά προκύπτει με το θετικό αποτέλεσμα. Ποιες είναι οι νέες πιθανότητες ο ασθενής να έχει τις ασθένειες A, B, και C;

    Λύση: Έστω A, B, C, τα ενδεχόμενα ο ασθενής να έχει τις ασθένειες A, B, και C αντιστοίχως. Είναι δοσμένο ότι $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$. Παρατηρήστε ότι τα A, B, C είναι διαμέριση του δειγματικού χώρου. Έστω επίσης K το ενδεχόμενο να προκύψει θετικό αποτέλεσμα στην εξέταση. Έχουμε, με εφαρμογή του Κανόνα του Bayes:

$$\begin{aligned}
P(A|K) &= \frac{P(K|A)P(A)}{P(K|A)P(A) + P(K|B)P(B) + P(K|C)P(C)} \\
&= \frac{0.9\times\frac{1}{3}}{0.9\times\frac{1}{3} + 0.5\times\frac{1}{3} + 0.1\times\frac{1}{3}} = \frac{9}{9+5+1} = \frac{3}{5}, \\
P(B|K) &= \frac{P(K|B)P(B)}{P(K|A)P(A) + P(K|B)P(B) + P(K|C)P(C)} \\
&= \frac{0.5\times\frac{1}{3}}{0.9\times\frac{1}{3} + 0.5\times\frac{1}{3} + 0.1\times\frac{1}{3}} = \frac{5}{9+5+1} = \frac{1}{3}, \\
P(C|K) &= 1 - P(A|K) - P(B|K) = 1 - \frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}.
\end{aligned}$$

24. **(Τριαδικό Κανάλι)** Στο Σχήμα 2 έχουμε σχεδιάσει ένα μαθηματικό μοντέλο για το τριαδικό κανάλι επικοινωνίας. Σε αυτό το κανάλι, δεν μεταδίδουμε μόνο δύο σύμβολα, όπως γίνεται συνήθως (το 0 και το 1), αλλά τρία, το 0, το 1, και το 2. Τα σύμβολα εισόδου 0, 1, 2 εμφανίζονται με πιθανότητες $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ και $\frac{1}{2}$ αντιστοίχως, και μεταδίδονται μέσω του καναλιού. Δυστυχώς, στο κανάλι γίνονται σφάλματα, λόγω θορύβου. Συγκεκριμένα, με πιθανότητα $1 - \epsilon$ μεταδίδεται το σωστό σύμβολο, και με πιθανότητα ϵ κάποιο λάθος, όπως φαίνεται στο σχήμα.

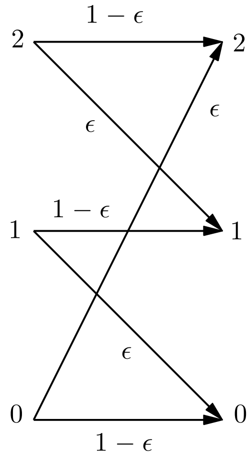
    (α΄) Βρείτε τις πιθανότητες με τις οποίες εμφανίζονται τα σύμβολα στην έξοδο.

    (β΄) Έστω ότι παρατηρήσαμε 1 στην έξοδο. Ποια είναι η πιθανότητα η είσοδος να ήταν 0; 1; 2;

    Λύση:

    (α΄) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα A_i το σύμβολο εισόδου να είναι το i, και B_i το σύμβολο εξόδου να είναι το i, όπου $i = 0, 1, 2$. Η άσκηση μας δίνει ότι:

$$\begin{gathered}
P(B_2|A_2) = 1-\epsilon,\ \ P(B_1|A_2) = \epsilon,\ \ P(B_0|A_2) = 0, \\
P(B_2|A_1) = 0,\ \ P(B_1|A_1) = 1-\epsilon,\ \ P(B_0|A_1) = \epsilon, \\
P(B_2|A_0) = \epsilon,\ \ P(B_1|A_0) = 0,\ \ P(B_0|A_0) = 1-\epsilon.
\end{gathered}$$



Σχήμα 2: Άσκηση 24.

Από το νόμο της ολικής πιθανότητας, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
P(B_2) &= P(B_2|A_2)P(A_2) + P(B_2|A_1)P(A_1) + P(B_2|A_0)P(A_0) \\
&= (1-\epsilon) \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{4} + \epsilon \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{4}, \\
P(B_1) &= P(B_1|A_2)P(A_2) + P(B_1|A_1)P(A_1) + P(B_1|A_0)P(A_0) \\
&= \epsilon \times \frac{1}{2} + (1-\epsilon) \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{4}, \\
P(B_0) &= P(B_0|A_2)P(A_2) + P(B_0|A_1)P(A_1) + P(B_0|A_0)P(A_0) \\
&= 0 \times \frac{1}{2} + \epsilon \times \frac{1}{4} + (1-\epsilon) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι $P(B_0) + P(B_1) + P(B_2) = 1$, όπως αναμενόταν.

(β´) Ουσιαστικά εφαρμόζουμε τον Κανόνα του Bayes:

$$\begin{aligned}
P(A_2|B_1) &= \frac{P(B_1|A_2)P(A_2)}{P(B_1)} = \frac{2\epsilon}{1+\epsilon}, \\
P(A_1|B_1) &= \frac{P(B_1|A_1)P(A_1)}{P(B_1)} = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}, \\
P(A_0|B_1) &= \frac{P(B_1|A_0)P(A_0)}{P(B_1)} = 0.
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι $P(A_2|B_1) + P(A_1|B_1) + P(A_0|B_1) = 1$, όπως επίσης αναμενόταν.

25. **(Στίγμα)** Από το σύνολο κάποιου πληθυσμού, το 1% των ατόμων έχει το γενετικό στίγμα κάποιας εν μέρει κληρονομικής ασθένειας. Αν και οι δύο γονείς έχουν το στίγμα, κάθε παιδί τους έχει πιθανότητα 50% να έχει το στίγμα. Αν μόνο ένας από τους δύο γονείς έχει το στίγμα, κάθε παιδί τους έχει πιθανότητα 2% να έχει το στίγμα. Αν δεν έχει το στίγμα κανένας από τους δύο, τότε δεν το έχει και το παιδί. Υποθέτουμε ότι η κληρονομικότητα είναι ανεξάρτητη από παιδί σε παιδί είτε έχουν οι γονείς το στίγμα είτε όχι, και ότι οι γονείς έχουν το στίγμα ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο. (Παρατηρήστε ότι το τελευταίο μπορεί αν μην ισχύει σε αντίστοιχες πραγματικές περιπτώσεις, καθώς ζεύγη ατόμων που έχουν και οι δύο το στίγμα μπορεί να αποθαρρύνονται από το να κάνουν παιδιά.)

(α´) Ποια η πιθανότητα τα δύο παιδιά ενός ζευγαριού στο οποίο μόνο ο ένας γονιός έχει το στίγμα, να έχουν και τα δύο το στίγμα;

(β´) Αν δεν γνωρίζουμε τίποτα για τους γονείς, ποια η πιθανότητα τα δύο παιδιά ενός τυχαίου ζευγαριού να έχουν και τα δύο το στίγμα;

(γ´) Αντίστροφα, δεδομένου ότι διαπιστώνουμε πως και τα δύο παιδιά ενός ζευγαριού έχουν το στίγμα, ποια η πιθανότητα ακριβώς ένας γονιός (οποιοσδήποτε από τους δύο) να έχει το στίγμα; Ποια η πιθανότητα να έχουν το στίγμα και οι δύο;

Λύση: Έστω A το ενδεχόμενο να έχουν και οι δύο γονείς στίγμα. Λόγω ανεξαρτησίας, $P(A) = 0.01^2 = 10^{-4}$. Έστω C το ενδεχόμενο να μην έχει κανείς από τους γονείς στίγμα. Και πάλι λόγω ανεξαρτησίας, $P(C) = 0.99^2 = 0.9801$. Τέλος, έστω B το ενδεχόμενο να έχει ακριβώς ένας από τους γονείς στίγμα. Καθώς τα A, B, C είναι διαμέριση, θα έχουμε $P(B) = 1 - P(A) - P(C) = 1 - 0.01^2 - 0.99^2 = 0.0198$.

Επίσης, έστω S_1, S_2 τα ενδεχόμενα να έχουν στίγμα το πρώτο και το δεύτερο παιδί αντιστοίχως.

Καταρχήν παρατηρήστε ότι τα ενδεχόμενα S_1, S_2 είναι ανεξάρτητα με δέσμευση σε κάποιο από τα A, B, C, δηλαδή

$$P(S_1S_2|A) = P(S_1|A)P(S_2|A), \quad P(S_1S_2|B) = P(S_1|B)P(S_2|B), \quad P(S_1S_2|C) = P(S_1|C)P(S_2|C),$$

αλλά τα S_1, S_2 δεν είναι ανεξάρτητα, δηλαδή δεν ισχύει ότι

$$P(S_1S_2) = P(S_1)P(S_2).$$

Διαισθητικά, αν δεν γνωρίζουμε αν έχουν οι γονείς στίγμα, και μάθουμε ότι το ένα παιδί έχει στίγμα, αυτόματα αυξάνεται η πιθανότητα να έχει στίγμα και το άλλο παιδί, διότι αυξήθηκαν οι πιθανότητες να έχουν στίγμα οι γονείς. Σαν εύκολη άσκηση, επαληθεύστε πως δεν ισχύει η άνω.

(α΄) Έχουμε, λόγω της υπόθεσης της ανεξαρτησίας:

$$P(S_1S_2|B) = P(S_1|B)P(S_2|B) = 0.02^2 = 0.0004.$$

(β΄) Εφαρμόζουμε τον Νόμο της Ολικής Πιθανότητας:

$$\begin{aligned}
P(S_1S_2) &= P(S_1S_2|A)P(A) + P(S_1S_2|B)P(B) + P(S_1S_2|C)P(C) \\
&= P(S_1|A)P(S_2|A)P(A) + P(S_1|B)P(S_2|B)P(B) + P(S_1|C)P(S_2|C)P(C) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 10^{-4} + (0.02)^2 \times 0.0198 + 0 = 3.292 \times 10^{-5}.
\end{aligned}$$

(γ΄) Για να υπολογίσουμε την πρώτη πιθανότητα, ουσιαστικά εφαρμόζουμε τον Κανόνα του Bayes:

$$P(B|S_1S_2) = \frac{P(BS_1S_2)}{P(S_1S_2)} = \frac{P(S_1S_2|B)P(B)}{P(S_1S_2)} = \frac{0.02^2 \times 0.0198}{3.292 \times 10^{-5}} = 0.2406.$$

Τέλος, αφού προφανώς $P(C|S_1S_2) = 0$, θα έχουμε

$$P(A|S_1S_2) = 1 - P(B|S_1S_2) - P(C|S_1S_2) = 1 - 0 - 0.2406 = 0.7594.$$

26. **(Δύο κέρματα)** Διαθέτουμε δύο φαινομενικά όμοια κέρματα N_1, N_2, πλην όμως, το ένα φέρνει κορώνα με πιθανότητα $p_1 = 1/2$ (είναι δηλαδή δίκαιο) ενώ το άλλο με πιθανότητα $p_2 = 3/4$ (δηλαδή είναι κίβδηλο). Διαλέγουμε ένα νόμισμα στην τύχη (χωρίς προτίμηση), και το ρίχνουμε δύο ανεξάρτητες φορές. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A να είναι η πρώτη ρίψη κορώνα, και B να είναι η δεύτερη ρίψη κορώνα. Είναι τα A, B ανεξάρτητα;

Λύση: Έστω F το ενδεχόμενο να επιλέξουμε το δίκαιο νόμισμα. Υπολογίζουμε καταρχήν την πιθανότητα του ενδεχόμενου A, με χρήση του κανόνα της ολικής πιθανότητας:

$$P(A) = P(F)P(A|F) + P(F')P(A|F') = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{8}.$$

Παρομοίως προκύπτει επίσης ότι $P(B) = \frac{5}{8}$. Επίσης, πάλι από τον νόμο της ολικής πιθανότητας,

$$\begin{aligned}
P(AB) &= P(AB|F)P(F) + P(AB|F')P(F') \\
&= P(A|F)P(B|F)P(F) + P(A|F')P(B|F')P(F') = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{13}{32}.
\end{aligned}$$

Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι *με δεδομένο* ότι γνωρίζουμε ποιο κέρμα έχει επιλεγεί, οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες. Τελικά προκύπτει ότι

$$P(A)P(B) = \frac{25}{64} \neq \frac{26}{64} = P(AB),$$

επομένως τα A, B δεν είναι ανεξάρτητα (στο τσακ!). Αυτό αναμενόταν. Πράγματι, για παράδειγμα αν μάθουμε ότι η πρώτη ρίψη ήταν κορώνα, αυξάνεται η πιθανότητα να έχει επιλεγεί το κέρμα που φέρνει κορώνες πιο συχνά, και επομένως αυξάνεται η πιθανότητα του ενδεχόμενου να έρθει κορώνα και η δεύτερη ρίψη.

4η Ομάδα Ασκήσεων

27. **(Κολοκύθες)** Κάθε εβδομάδα, ένα μανάβης έχει X πελάτες που ζητούν να αγοράσουν μια κολοκύθα, εφόσον έχουν μείνει απούλητες κολοκύθες, όπου η Τ.Μ. X έχει την ακόλουθη συνάρτηση μάζας πιθανότητας:

$$p_X(x) = \frac{9-x}{10}, \quad x = 5, 6, 7, 8.$$

Στην αρχή της εβδομάδας ο μανάβης αγοράζει κολοκύθες προς 2 ευρώ τη μια, ενώ κατά τη διάρκεια της εβδομάδας τις πουλά προς 4 ευρώ τη μία. Στο τέλος της εβδομάδας ο μανάβης πετά όσες κολοκύθες του έχουν απομείνει. Αν ο μανάβης θέλει να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο ΚΑΘΑΡΟ κέρδος του, πόσες κολοκύθες πρέπει να αγοράσει στην αρχή της εβδομάδας; *(Υπόδειξη: υπολογίστε τα αναμενόμενα καθαρά κέρδη του μανάβη αν αγοράσει στην αρχή της εβδομάδας x κολοκύθες, με $x = 5, 6, 7, 8$, και συγκρίνετέ τα.)*

Λύση: Ο μανάβης βγάζει 2 ευρώ καθαρό κέρδος για κάθε κολοκύθα που αγοράζει και κατόπιν πουλάει, και -2 καθαρό κέρδος για κάθε κολοκύθα που αγοράζει και δεν καταφέρνει να μεταπωλήσει. Έστω Z το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του μανάβη. Το αναμενόμενο κέρδος του εξαρτάται από το πόσες κολοκύθες επιλέγει να αγοράσει. Παίρνουμε περιπτώσεις:

(α΄) Έστω πως ο μανάβης αγοράζει 8 κολοκύθες. Έχουμε:

$$Z = \begin{cases} 8 \times 2 = 16, & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{10}, \\ 7 \times 2 - 2 = 12, & \text{με πιθανότητα } \frac{2}{10}, \\ 6 \times 2 - 2 \times 2 = 8, & \text{με πιθανότητα } \frac{3}{10}, \\ 5 \times 2 - 3 \times 2 = 4, & \text{με πιθανότητα } \frac{4}{10}. \end{cases}$$

με μέση τιμή

$$() = 16 \times \frac{1}{10} + 12 \times \frac{2}{10} + 8 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{4}{10} = 8.$$

(β΄) Έστω πως ο μανάβης αγοράζει 7 κολοκύθες. Έχουμε:

$$Z = \begin{cases} 7 \times 2 = 14, & \text{με πιθανότητα } \frac{3}{10}, \\ 6 \times 2 - 2 = 10, & \text{με πιθανότητα } \frac{3}{10}, \\ 5 \times 2 - 2 \times 2 = 6, & \text{με πιθανότητα } \frac{4}{10}. \end{cases}$$

με μέση τιμή

$$() = 14 \times \frac{3}{10} + 10 \times \frac{3}{10} + 6 \times \frac{4}{10} = \frac{96}{10}.$$

(γ΄) Έστω πως ο μανάβης αγοράζει 6 κολοκύθες. Έχουμε:

$$Z = \begin{cases} 6 \times 2 = 12, & \text{με πιθανότητα } \frac{6}{10}, \\ 5 \times 2 - 2 = 8, & \text{με πιθανότητα } \frac{4}{10}. \end{cases}$$

με μέση τιμή

$$() = 12 \times \frac{6}{10} + 8 \times \frac{4}{10} = \frac{104}{10}.$$

(δ΄) Έστω πως ο μανάβης αγοράζει 5 κολοκύθες. Θα τις πουλήσει σίγουρα όλες, άρα θα έχει κέρδος 10.

Άρα, τελικά, συμφέρει τον μανάβη να αγοράσει 6 κολοκύθες, διότι τότε μεγιστοποιείται το αναμενόμενο κέρδος του.

28. **(Διαγωνισμός)** Σε ένα διαγωνισμό συμμετέχουν 5 άντρες και 5 γυναίκες. Κατατάσσονται σύμφωνα με την επίδοσή τους, και δεν προβλέπεται δύο ή περισσότερα άτομα να καταταγούν στην ίδια θέση. Υπάρχουν 10! δυνατές κατατάξεις, και δίνεται πως είναι όλες ισοπίθανες. Έστω X η υψηλότερη σειρά που κατέλαβε γυναίκα. (Για παράδειγμα, έχουμε $X = 1$ αν πρώτη αναδείχτηκε μια γυναίκα, οποιαδήποτε από τις 5, ενώ έχουμε $X = 6$ αν οι 5 γυναίκες κατέλαβαν τις τελευταίες 5 θέσεις.) Να βρείτε την μάζα του X.

Λύση: Η Τ.Μ. X μπορεί να λάβει τις τιμές $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Υπολογίζουμε την πιθανότητα να προκύψει η κάθε μια από τις άνω τιμές χωριστά. Παρατηρούμε καταρχήν ότι υπάρχουν 10! διαφορετικές διατάξεις για τα 10 άτομα.

(α΄) Λόγω συμμετρίας, $P(X = 1) = \frac{1}{2}$.

(β΄) Σε αυτή την περίπτωση, πρώτος βγαίνει ένας άντρας, και ακολουθεί μια γυναίκα. Υπάρχουν 5 επιλογές για τον πρώτο άντρα, 5 επιλογές για την πρώτη γυναίκα, και 8! επιλογές για την διάταξη των υπολοίπων ατόμων. Άρα,

$$P(X=2)=\frac{5\times 5\times 8!}{10!}=\frac{5}{18}.$$

(γ΄) Ομοίως, υπάρχουν 5 επιλογές για τον πρώτο άντρα, 4 για τον δεύτερο, 5 επιλογές για την πρώτη γυναίκα, και 7 επιλογές για τα υπόλοιπα άτομα. Άρα,

$$P(X=3)=\frac{5\times 4\times 5\times 7!}{10!}=\frac{5}{36}.$$

(δ΄) Ομοίως,

$$P(X=4)=\frac{5\times 4\times 3\times 5\times 6!}{10!}=\frac{5}{84}.$$

(ε΄) Ομοίως,

$$P(X=5)=\frac{5\times 4\times 3\times 2\times 5\times 5!}{10!}=\frac{5}{252}.$$

(ς΄) Τέλος,

$$P(X=6)=\frac{5!\times 5!}{10!}=\frac{1}{252}.$$

Παρατηρήστε πως από τις άνω τιμές προκύπτει πως

$$\sum_{i=1}^{6}P(X=i)=1,$$

όπως θα έπρεπε.

29. **(Κορώνες μείον γράμματα)** Ένα κέρμα ρίπτεται n φορές. Έστω η Τ.Μ. Y που ορίζεται ως η διαφορά (όχι κατ' απόλυτο τιμή) ανάμεσα στον αριθμό των φορών που εμφανίζονται κορώνες μείον τον αριθμό των φορών που εμφανίζονται γράμματα.

(α΄) Περιγράψτε τον αρχικό δειγματικό χώρο Ω και το σύνολο τιμών της Y. Περιγράψτε (με λόγια) το ενδεχόμενο του Ω για το οποίο $Y=0$. Περιγράψτε (με λόγια) το ενδεχόμενο του Ω για το οποίο $Y\leq K$, όπου K θετικός ακέραιος.

(β΄) Προσδιορίστε την μάζα και την κατανομή της Y για $n=4$, υποθέτοντας ότι οι ρίψεις είναι δίκαιες και ανεξάρτητες.

(γ΄) Επαναλάβετε το προηγούμενο σκέλος για $n=5$.

Λύση:

(α΄) Ο δειγματικός χώρος Ω περιλαμβάνει όλους τους 2^n δυνατούς συνδυασμούς αποτελεσμάτων:

$$\Omega=\{\text{ΓΓΓ}\ldots\text{ΓΓ},\ \text{ΓΓΓ}\ldots\text{ΓΚ},\ \text{ΓΓΓ}\ldots\text{ΚΓ},\ \ldots,\ \text{ΚΚΚ}\ldots\text{ΚΚ}\}.$$

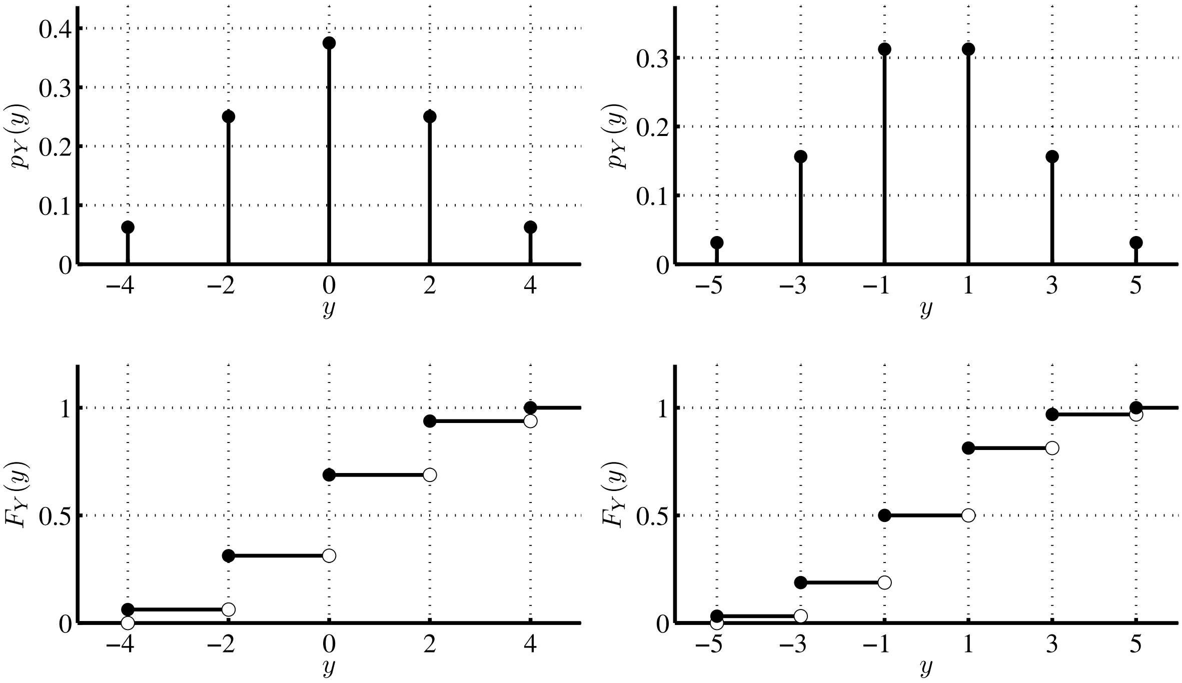
Το σύνολο τιμών της Y είναι το

$$S_Y=\{n,n-2,n-4,\ldots,-n+2,-n\}.$$

Το πρώτο στοιχείο αντιστοιχεί στην περίπτωση που εμφανίζονται μόνο κορώνες, το δεύτερο στην περίπτωση που εμφανίζονται γράμματα ακριβώς μια φορά, κ.ο.κ. Επίσης, $Y=0$ αν και μόνο αν έχουμε ακριβώς τόσα γράμματα, όσα και κορώνες. Παρατηρήστε ότι το ενδεχόμενο αυτό είναι το κενό σύνολο αν το Y είναι περιττό. Τέλος, $Y\leq K$ αν και μόνο αν οι ρίψεις καταλήγουν σε K το πολύ περισσότερες κορώνες από γράμματα.

(β΄) Αν $n=4$, η Y μπορεί να πάρει τις τιμές $4,2,0,-2,-4$. Η μάζα πιθανότητας της Y προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned}
p_Y(4) &= P(\text{ΓΓΓΓ})=\frac{1}{16},\\
p_Y(2) &= P(\{\text{ΓΓΓΚ},\text{ΓΓΚΓ},\text{ΓΚΓΓ},\text{ΚΓΓΓ}\})=\frac{4}{16},\\
p_Y(-2) &= \frac{4}{16},\ \text{(Λόγω συμμετρίας)}\\
p_Y(-4) &= \frac{1}{16},\ \text{(Λόγω συμμετρίας)}\\
p_Y(0) &= 1-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}-\frac{4}{16}-\frac{4}{16}=\frac{6}{16}.
\end{aligned}$$



Σχήμα 3: Άσκηση 29, $n = 4$ (αριστερά) και $n = 5$ (δεξιά).

Έχοντας την μάζα, εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε την κατανομή:

$$F_Y(x) = \sum_{x_i:\, x_i \leq x} p_Y(x_i) = \begin{cases} 0, & x < -4, \\ 1/16, & -4 \leq x < -2, \\ 5/16, & -2 \leq x < 0, \\ 11/16, & 0 \leq x < 2, \\ 15/16, & 2 \leq x < 4, \\ 1, & 4 \leq x. \end{cases}$$

Και οι δύο εμφανίζονται στο Σχήμα 3 (αριστερά).

(γ΄) Αν $n = 5$, η Y μπορεί να πάρει τις τιμές $5, 3, 1, -1, -3, -5$. Η μάζα πιθανότητας της Y προκύπτει παρόμοια με το προηγούμενο σκέλος:

$$p_Y(5) = \frac{1}{32},\ p_Y(3) = \frac{5}{32},\ p_Y(1) = \frac{10}{32},\ p_Y(-1) = \frac{10}{32},\ p_Y(-3) = \frac{5}{32},\ p_Y(-5) = \frac{1}{32}.$$

Έχοντας την μάζα, εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε την κατανομή:

$$F_Y(x) = \sum_{x_i:\, x_i \leq x} p_Y(x_i) = \begin{cases} 0, & x < -5, \\ 1/32, & -5 \leq x < -3, \\ 6/32, & -3 \leq x < -1, \\ 16/32, & -1 \leq x < 1, \\ 26/32, & 1 \leq x < 3, \\ 31/32, & 3 \leq x < 5, \\ 1, & 5 \leq x. \end{cases}$$

Και οι δύο εμφανίζονται στο Σχήμα 3 (δεξιά).

30. **(20 μπάλες)** Από ένα δοχείο που περιέχει 20 μπάλες αριθμημένες από το 1 μέχρι το 20 εξάγουμε χωρίς επανάθεση 3 μπάλες, χωρίς να σημειώσουμε τη σειρά της επιλογής.

(α΄) Να ορισθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος. Πόσα αποτελέσματα περιλαμβάνει;

(β΄) Να υπολογισθεί η κατανομή $F_X(x)$ της μέγιστης ένδειξης X στις 3 μπάλες του δείγματος, για $x = 1, 2, \ldots, 20$.

(γ΄) Να υπολογισθεί η μάζα πιθανότητας $p_X(x)$.

(δ΄) Αν στοιχηματίσουμε ότι βγάζοντας 3 μπάλες θα έχουμε μια τουλάχιστον μπάλα με ένδειξη μεγαλύτερη ή ίση του 17, ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσουμε το στοίχημα;

Λύση:

(α΄) Έστω $B = \{1, 2, \ldots, 20\}$. Ο δειγματικός χώρος Ω είναι το σύνολο όλων των $\binom{20}{3}$ δυνατών συνδυασμών των 20 μπαλών χωρίς επανάθεση:

$$\Omega = \{(a_1, a_2, a_3) : a_1, a_2, a_3 \in B, i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j\}.$$

Περιλαμβάνει $\binom{20}{3}$ αποτελέσματα.

(β΄) Προφανώς $F_X(x) = 0$, για $x = 1, 2$, και $F_X(20) = 1$. Για $x = 3, 4, \ldots, 19$, έχουμε:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{\binom{x}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{x(x-1)(x-2)}{20 \times 19 \times 18}.$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει γιατί υπάρχουν συνολικά $\binom{20}{3}$ συνδυασμοί, εκ των οποίων ακριβώς $\binom{x}{3}$ καταλήγουν σε μέγιστη ένδειξη *το πολύ* x.

(γ΄) Προφανώς $p_X(x) = 0$ για $x = 1, 2$. Για να υπολογίσουμε τη μάζα πιθανότητας για τις υπόλοιπες τιμές του x, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο σκέλος, ή εναλλακτικά να παρατηρήσουμε ότι, για $x = 3, \ldots, 20$,

$$p_X(x) = P(X = x) = \frac{\binom{x-1}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{(x-1)(x-2)}{2280}.$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει γιατί, για να έχουμε μέγιστο x, πρέπει μια από τις μπάλες να έχει ένδειξη x, και οι άλλες δύο οποιοδήποτε συνδυασμό ενδείξεων μικρότερων του x. Υπάρχουν $\binom{x-1}{2}$ συνδυασμοί για να συμβεί αυτό, από τους συνολικά $\binom{20}{3}$.

(δ΄) Χρησιμοποιώντας το δεύτερο σκέλος προκύπτει ότι η ζητούμενη πιθανότητα p ισούται με:

$$p = P(X \geq 17) = 1 - P(X \leq 16) = 1 - F_X(16) = 1 - \frac{\binom{16}{3}}{\binom{20}{3}} \simeq 0.508.$$

5η Ομάδα Ασκήσεων

31. **(Το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης)** Παίζουμε το εξής παιχνίδι. Ένα αμερόληπτο νόμισμα ρίχνεται διαδοχικά, και αν η ένδειξη κορώνα εμφανίζεται για πρώτη φορά στην k ρίψη τότε κερδίζουμε 2^k Ευρώ. Ποιο είναι το μέσο κέρδος του παιχνιδιού; Θα δίνατε 50 Ευρώ για να παίξετε το παιχνίδι;

    Λύση: Έστω Z η πρώτη δοκιμή κατά την οποία εμφανίζεται η κορώνα, και έστω $X = 2^Z$ το κέρδος μας. Προφανώς η Z ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p = 1/2$ και μάζα $P(Z = k) = 2^{-k}$. Επομένως

    $$E(X) = (2) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k P(Z = k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k 2^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

    Το παράδοξο είναι ότι ενώ η μέση τιμή είναι άπειρη και επομένως οποιαδήποτε πεπερασμένη τιμή για να παίξουμε το παιχνίδι είναι μεγάλη έκπτωση, κανείς δεν προτίθεται να δώσει μεγάλο ποσό για να παίξει. 50 Ευρώ θεωρείται ακριβή τιμή για το παιχνίδι. Το παράδοξο διατυπώθηκε το 1713 από τον Nicolas Bernoulli.

32. **(Δύο κορώνες)** Ένα νόμισμα ρίπτεται επανειλημμένως. Οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες, και σε κάθε μια έρχεται κορώνα με πιθανότητα p. Να βρεθεί η πιθανότητα η δεύτερη κορώνα να εμφανιστεί στη ρίψη υπ' αριθμόν . (*Υπόδειξη: παρατηρήστε ότι το ενδεχόμενο C να χρειάζονται ακριβώς ρίψεις για να δούμε την δεύτερη κορώνα μπορεί να γραφεί ως $C = A \cap B$, όπου A είναι το ενδεχόμενο η ρίψη να είναι κορώνα και B το ενδεχόμενο στις πρώτες $K - 1$ ρίψεις να έχουμε ακριβώς μία κορώνα.*)

    Λύση: Σύμφωνα με την υπόδειξη, θα χρειαστούν *ακριβώς* K ρίψεις, αν και μόνο αν στις πρώτες $K - 1$ ρίψεις έρθει μια κορώνα, και στην ρίψη έρθει κορώνα. Τα δύο αυτά ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα. Επιπλέον, η πιθανότητα να έρθει ακριβώς μία κορώνα σε $K - 1$ ρίψεις ισούται με $P(B) = \binom{K-1}{1} p(1-p)^{K-2}$, αφού ο αριθμός από κορώνες ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $K - 1$, p, και η πιθανότητα να έρθει κορώνα στην K ρίψη είναι p. Συνεπώς:

    $$P(C) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = p \times \binom{K-1}{1} p(1-p)^{K-2} = \binom{K-1}{1} p^2 (1-p)^{K-2}.$$

33. **(Αυτιά και μύτες)** Ο Σταύρος έχει μεγάλη μύτη και η Μαρία έχει μεγάλα αυτιά. Ο Σταύρος και η Μαρία κάνουν 5 παιδιά. Καθένα από αυτά κληρονομεί τα μεγάλα αυτιά της Μαρίας με πιθανότητα 0.5 και τη μεγάλη μύτη του Σταύρου με πιθανότητα 0.5. Κάθε παιδί κληρονομεί τη μεγάλη μύτη του Σταύρου ανεξάρτητα από το αν κληρονομεί τα μεγάλα αυτιά της Μαρίας, και ανεξάρτητα από το τι συνέβη στα άλλα παιδιά.

    (α΄) Έστω X το πλήθος των παιδιών που έχουν κληρονομήσει *και* τα μεγάλα αυτιά του Σταύρου *και* τη μεγάλη μύτη της Μαρίας. Γράψτε ένα μαθηματικό τύπο για την πιθανότητα $P(X = x)$, αναφέροντας τις δυνατές τιμές του x.

    (β΄) Έστω Y το πλήθος των παιδιών που έχουν κληρονομήσει *είτε* τα μεγάλα αυτιά, *είτε* τη μεγάλη μύτη, *είτε* και τα δύο. Γράψτε ένα μαθηματικό τύπο για την πιθανότητα $P(Y = y)$, αναφέροντας τις δυνατές τιμές του y.

    (γ΄) Μια πλαστική επέμβαση που επαναφέρει τη μύτη σε κανονικό μέγεθος κοστίζει 2000 ευρώ και μια πλαστική επέμβαση που επαναφέρει τα αυτιά (και τα δύο) σε κανονικό μέγεθος κοστίζει 4000 ευρώ. Αν ο Σταύρος και η Μαρία επιδιορθώσουν με πλαστική όλες τις μεγάλες μύτες και τα μεγάλα αυτιά των *κοριτσιών* τους, ποια είναι η μέση τιμή των χρημάτων που θα χρειαστούν;

    Λύση:

    (α΄) Το ενδεχόμενο A ένα παιδί να έχει μεγάλα αυτιά και το ενδεχόμενο B να έχει μεγάλη μύτη είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Επομένως, η πιθανότητα να συμβαίνουν και τα δύο ενδεχόμενα ισούται με $P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{4}$. Κάθε παιδί έχει μεγάλα αυτιά και μύτη ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα, επομένως το πλήθος των παιδιών με μεγάλα αυτιά και μύτη ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 5$ και $p = \frac{1}{4}$. Επομένως,

    $$P(X = x) = \binom{5}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

    (β΄) Το ενδεχόμενο A ένα παιδί να έχει μεγάλα αυτιά και το ενδεχόμενο B να έχει μεγάλη μύτη είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Επομένως, η πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον ένα από τα δύο ενδεχόμενα είναι

    $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Κάθε παιδί έχει μεγάλα αυτιά ή μεγάλη μύτη ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα, επομένως το πλήθος των παιδιών με μεγάλα αυτιά ή μεγάλη μύτη ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 5$ και $p = \frac{3}{4}$. Επομένως,

$$P(X = x) = \binom{5}{x} \left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{5-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

(γ΄) Έστω W το πλήθος από κορίτσια με μεγάλη μύτη. Έστω επίσης V το πλήθος από κορίτσια με μεγάλα αυτιά. Παρατηρήστε ότι ορισμένα κορίτσια ενδέχεται να ανήκουν και στις δύο ομάδες. Παρατηρήστε επίσης ότι κάθε παιδί θα είναι κορίτσι με μεγάλη μύτη ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα παιδιά με πιθανότητα $\frac{1}{4}$ (γιατί τα ενδεχόμενα να έχει μεγάλη μύτη και να είναι κορίτσι είναι επίσης ανεξάρτητα), επομένως η Τ.Μ. W ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 5$ και $p = \frac{1}{4}$, και μέση τιμή $E(W) = Np = \frac{5}{4}$. Εντελώς ανάλογα, η Τ.Μ. V ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με τις ίδιες παραμέτρους $N = 5$ και $p = \frac{1}{4}$, και μέση τιμή επίσης $E(V) = Np = \frac{5}{4}$. Τα χρήματα που θα δαπανηθούν είναι η Τ.Μ. $= 2000W + 4000V$, με μέση τιμή

$$E(2000W + 4000V) = 2000E(W) + 4000E(V) = 7500.$$

34. **(Ιούλιος 2014)** Το πλήθος των επιβατικών αεροσκαφών διεθνών αερογραμμών που συντρίβεται *κάθε μέρα* ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο p. Τα πλήθη των συντριβών διαφορετικών ημερών είναι ανεξάρτητα. Δίνεται συγκεκριμένο διάστημα 8 συνεχόμενων ημερών. Να υπολογίσετε την πιθανότητα σε αυτό το διάστημα να πέσουν *ακριβώς* 3 αεροπλάνα.

Λύση: Υπάρχουν δύο τρόποι να υπολογιστεί η απάντηση.

Ο πιο εύκολος είναι να παρατηρήσουμε πως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία, το άθροισμα δύο ανεξάρτητων Τ.Μ. Poisson με παραμέτρους λ και μ είναι επίσης Poisson με παράμετρο $\lambda + \mu$. Με επαγωγή, το αποτέλεσμα μπορεί να γενικευτεί για οποιοδήποτε πλήθος Τ.Μ. Poisson, και επομένως το πλήθος των αεροπλάνων που θα συντριβούν σε αυτές τις 8 μέρες είναι επίσης Poisson με παράμετρο $8p$. Επομένως, η πιθανότητα να συντριβούν ακριβώς 3 αεροπλάνα είναι

$$P(X = 3) = \frac{(8p)^3}{3!} e^{-8p}.$$

Ο δεύτερος τρόπος να λύσουμε την άσκηση είναι να παρατηρήσουμε πως θα πέσουν ακριβώς 3 αεροπλάνα με έναν από τους ακόλουθους τρόπους:

(α΄) Θα πέσουν και τα τρία την ίδια μέρα. Αυτό μπορεί να γίνει με 8 τρόπους, ο καθένας εκ των οποίων έχει πιθανότητα $\left(\frac{p^3}{3!} e^{-p}\right) (e^{-p})^7$. (Παρατηρήστε ότι τις άλλες 7 μέρες δεν πρέπει να πέσει ούτε ένα αεροπλάνο.)

(β΄) Θα πέσουν δύο την ίδια μέρα, και άλλο ένα κάποια άλλη μέρα. Αυτό μπορεί να γίνει με $8 \times 7 = 56$ τρόπους, καθένας εκ των οποίων έχει πιθανότητα $\left(\frac{p^2}{2!} e^{-p}\right) (pe^{-p}) (e^{-p})^6$.

(γ΄) Θα πέσουν σε τρεις διαφορετικές μέρες. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{8}{3} = 56$ τρόπους, καθένας εκ των οποίων έχει πιθανότητα $(pe^{-p})^3 (e^{-p})^5$.

Επομένως, η πιθανότητα να συντριβούν ακριβώς 3 αεροπλάνα στις συγκεκριμένες 8 ημέρες είναι

$$P(X = 3) = 8 \left(\frac{p^3}{3!} e^{-p}\right) (e^{-p})^7 + 56 \left(\frac{p^2}{2!} e^{-p}\right) pe^{-p} (e^{-p})^6 + 56 (pe^{-p})^3 (e^{-p})^5,$$

που πολύ εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι είναι ίση με την απάντηση στην οποία φτάνουμε με τον πρώτο, πολύ πιο απλό, τρόπο.

35. **(Ελαττωματικοί υπολογιστές)** Έστω ότι από ένα πλήθος 2000 υπολογιστών σε ένα δίκτυο, οι 12 είναι ελαττωματικοί. Δειγματοληπτικά επιλέγουμε (με επανατοποθέτηση) και ελέγχουμε 10 από αυτούς.

(α΄) Ποια η πιθανότητα να βρούμε τουλάχιστον 2 ελαττωματικούς;

(β΄) Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του πλήθους X των ελαττωματικών υπολογιστών ανάμεσα σε αυτούς που επιλέξαμε;

(γ΄) Έστω ότι αντί για 10, επιλέγουμε υπολογιστές μέχρι να βρούμε έναν ελαττωματικό, και έστω Y ο αύξων αριθμός του πρώτου ελαττωματικού. Ποια η κατανομή του Y, η μέση τιμή και η διασπορά του;

Λύση:

(α΄) Επειδή γίνεται επανατοποθέτηση κατά τη δειγματοληψία των υπολογιστών, κάθε επιλογή έχει πιθανότητα να καταλήξει σε ελαττωματικό υπολογιστή ίση με $\frac{12}{2000} = \frac{3}{500}$ ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες. Έχουμε 10 ανεξάρτητα πειράματα, καθένα επιτυχημένο με πιθανότητα, $\frac{3}{500}$, όπου ως επιτυχία ορίζουμε την πιθανότητα να επιλεγεί ελαττωματικός υπολογιστής. Επομένως, το πλήθος X των ελαττωματικών υπολογιστών ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 10$ και $p = \frac{3}{500}$, άρα, κατά τα γνωστά για τη διωνυμική κατανομή,

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=1) - P(X=0) = 1 - \binom{10}{1}\left(\frac{3}{500}\right)^1\left(\frac{497}{500}\right)^9 - \binom{10}{0}\left(\frac{3}{500}\right)^0\left(\frac{497}{500}\right)^{10}$$
$$= 1 - 10\left(\frac{3}{500}\right)^1\left(\frac{497}{500}\right)^9 - \left(\frac{497}{500}\right)^{10} \simeq 0.0016.$$

(β΄) Κατά τα γνωστά για τη διωνυμική κατανομή,

$$E(X) = Np = \frac{3}{50} = 0.06, \quad \mathrm{VAR}(X) = Np(1-p) = 10 \times \frac{3}{500} \times \frac{497}{500} \simeq 0.0596.$$

(γ΄) Σε αυτή την περίπτωση, επαναλαμβάνουμε ανεξάρτητα πειράματα, όλα με την ίδια πιθανότητα επιτυχίας $p = \frac{3}{500}$, μέχρι την πρώτη επιτυχία. Επομένως, η κατανομή του αύξοντα αριθμού της πρώτης επιτυχίας Y είναι η γεωμετρική με παράμετρο p, επομένως

$$P(Y = y) = p(1-p)^{y-1},\ y = 1, 2, \ldots, \qquad E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{500}{3} \simeq 166.67, \quad \mathrm{VAR}(Y) = \frac{1-p}{p^2} \simeq 27611.$$

36. **(Γινόμενο Bernoulli)** Έστω X και Y ανεξάρτητες Bernoulli τυχαίες μεταβλητές, με παραμέτρους p και $1/2$ αντίστοιχα, και έστω Z το γινόμενό τους. Υπολογίστε την μέση τιμή και την διασπορά του Z.

Λύση: Παρατηρήστε πως το γινόμενο $Z = XY$ επίσης θα ισούται με 0 ή 1, επομένως και η Z είναι Bernoulli. Μένει να υπολογίσουμε την παράμετρό της p', και παρατηρούμε ότι

$$p' = P(Z = 1) = P(XY = 1) = P(X = 1)P(Y = 1) = p \times \frac{1}{2} = \frac{p}{2}.$$

Άρα, κατά τα γνωστά για τις Τ.Μ. Bernoulli, έχουμε

$$E(Z) = \frac{p}{2}, \quad \mathrm{VAR}(Z) = \frac{p}{2}\left(1 - \frac{p}{2}\right).$$

37. **(Κλήσεις υπολογιστή)** Κάθε νέα κλήση ενός υπολογιστή προς κάποιο δίκτυο αποτυγχάνει με πιθανότητα 0.2%, και οι διαφορετικές κλήσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

(α΄) Αν ο υπολογιστής πραγματοποιεί 25 τέτοιες κλήσεις κάθε μέρα, υπολογίστε την μέση τιμή και τη διασπορά του πλήθους των αποτυχημένων κλήσεων σε δύο ημέρες, καθώς και την πιθανότητα σε μια ημέρα να υπάρχει το πολύ μια αποτυχημένη κλήση.

(β΄) Αν ο υπολογιστής πραγματοποιεί ασταμάτητα κλήσεις μέχρι να αποτύχει, υπολογίστε την πιθανότητα η πρώτη αποτυχημένη κλήση να είναι η 100η, και επίσης το μέσο πλήθος των επιτυχημένων κλήσεων που θα γίνουν μέχρι την πρώτη που θα αποτύχει.

Λύση:

(α΄) Έστω X το πλήθος των αποτυχημένων κλήσεων σε 2 μέρες. Κάθε μια από τις 50 κλήσεις θα είναι αποτυχημένη ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες με πιθανότητα 0.002. Επομένως, η X εκφράζει το πλήθος των επιτυχιών (όπου εδώ επιτυχία είναι να αποτύχει η κλήση) σε 50 ανεξάρτητα και όμοια πειράματα. Επομένως, η X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 50$ και $p = 0.02$. Επομένως,

$$E(X) = Np = 0.1, \quad \mathrm{VAR}(X) = Np(1-p) = 0.0998.$$

Ομοίως, αν Y είναι το πλήθος των αποτυχιών σε μια μέρα, τότε η Y ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 25$ και $p = 0.002$, επομένως,

$$P(Y \leq 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1) = \binom{25}{0}(0.002)^0(1-0.002)^{25} + \binom{25}{1}(0.002)^1(1-0.002)^{24} = 0.9988.$$

(β΄) Έστω Z η πρώτη κλήση που θα αποτύχει. Καθώς τα πειράματα είναι ανεξάρτητα, και όλα έχουν την ίδια πιθανότητα «επιτυχίας» (δηλαδή να αποτύχει η κλήση), η Z ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p = 0.002$, επομένως

$$P(Y = 100) = p(1-p)^{99} = 0.002 \times 0.998^{99} \simeq 0.00164.$$

Το πλήθος των *επιτυχημένων* κλήσεων θα είναι $Z-1$, δηλαδή το πλήθος *όλων* των κλήσεων πλην μίας, επομένως

$$E(Z-1) = E(Z) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = 499.$$

38. **(Καλαθοσφαίριση)** Σε ένα αγώνα μεταξύ των ομάδων Π και Ο, η Π κερδίζει με πιθανότητα 0.6 και η Ο με πιθανότητα 0.4. (Δεν υπάρχει ισοπαλία.) Διαδοχικοί αγώνες μεταξύ των ομάδων είναι πάντα ανεξάρτητοι.

(α΄) Αν οι ομάδες παίξουν 10 αγώνες, να δοθεί τύπος για την πιθανότητα να κερδίσει η Π περισσότερους αγώνες από την Ο. Μην κάνετε προσεγγίσεις. Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε την τιμή της πιθανότητας, απλώς να δώσετε ένα τύπο.

(β΄) Αν οι ομάδες παίζουν διαδοχικούς αγώνες μέχρι να κερδίσει η Ο για πρώτη φορά, ποια η πιθανότητα να παίξουν ακριβώς 6 αγώνες;

(γ΄) Αν οι ομάδες παίζουν μέχρι να κερδίσει η Ο δύο αγώνες (όχι απαραίτητα διαδοχικούς), ποια η πιθανότητα να παίξουν ακριβώς 5 αγώνες;

(δ΄) Αν οι ομάδες παίξουν διαδοχικούς αγώνες μέχρι κάποια από τις δύο να κερδίσει 4 συνολικά αγώνες (όχι απαραίτητα διαδοχικούς), ποια η πιθανότητα να παιχτούν συνολικά ακριβώς 6 αγώνες;

Λύση:

(α΄) Επειδή το πλήθος των αγώνων είναι προκαθορισμένο, και οι αγώνες ανεξάρτητοι, το πλήθος των αγώνων που θα κερδίσει η Π δίνεται από την διωνυμική κατανομή, με αριθμό πειραμάτων $N = 10$ και πιθανότητα επιτυχίας $p = 0.6$. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι να έχουμε 6 έως 10 επιτυχίες, δηλαδή

$$p_1 = \sum_{i=6}^{10} \binom{10}{i} 0.6^i (1-0.6)^{10-i} \simeq 0.6331.$$

(β΄) Αφού έχουμε διαδοχικούς αγώνες μέχρι να προκύψει ένα αποτέλεσμα από τα δύο, και οι αγώνες είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους, ο αριθμός των αγώνων που θα γίνουν ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας να συμβεί το συγκεκριμένο αποτέλεσμα, δηλαδή $q = 1-0.6 = 0.4$. Άρα, η πιθανότητα να χρειαστούν 6 προσπάθειες ισούται με

$$p_2 = 0.6^5 \times 0.4 \simeq 0.0311.$$

δηλαδή η πιθανότητα να έχουμε 5 νίκες της ομάδας Π, και ακολούθως 1 νίκη της ομάδας Ο.

(γ΄) Το ενδεχόμενο C να κερδίσει τον δεύτερο αγώνα της η ομάδα Ο στον 5ο αγώνα ισούται με την τομή του ενδεχόμενου A να κερδίσει η Ο έναν από τους 4 πρώτους αγώνες, και του ενδεχόμενου B να κερδίσει η Ο τον 5ο αγώνα. Παρατηρήστε ότι τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα, γιατί αφορούν διαφορετικά σετ αγώνων (δηλαδή τους πρώτους 4 και τον 5ο), και επιπλέον η πιθανότητα του ενδεχόμενου A προκύπτει με άμεση χρήση της διωνυμικής κατανομής. Τελικά, έχουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$p_3 = P(C) = P(A \cap B) = P(A)P(B) = \binom{4}{1} \times 0.4 \times (0.6)^3 \times 0.4 \simeq 0.1382.$$

(δ΄) Το ενδεχόμενο D να παιχτούν 6 αγώνες αποτελείται από τα ξένα ενδεχόμενα E να κατακτήσει η ομάδα Π την τέταρτη νίκη της στον 6ο αγώνα, και το ενδεχόμενο F να κατακτήσει η ομάδα Ο την τέταρτη νίκη της στον 6ο αγώνα. Οι πιθανότητες $P(E)$ και $P(F)$ μπορούν να υπολογιστούν όπως και στο προηγούμενο σκέλος:

$$P(E) = \binom{5}{3} \times 0.6^3 \times 0.4^2 \times 0.6,\ P(F) = \binom{5}{3} \times 0.4^3 \times 0.6^2 \times 0.4,\ p_4 = P(D) = P(E) + P(F) \simeq 0.2995.$$

6η Ομάδα Ασκήσεων

39. **(Αμπελώνας)** Σύμφωνα με τις πιο πρόσφατες οινολογικές μελέτες, η ποιότητα ενός είδους κρασιού Eiswein που παράγεται σε ένα αμπελώνα, σε μια κλίμακα με άριστα το 10, ισούται με $Z = X + Y - |X - Y|$, όπου X είναι το πλήθος των ημερών που βρέχει και Y το πλήθος των ημερών που χιονίζει κατά το μήνα που προηγείται της συγκομιδής των σταφυλιών. Η από κοινού μάζα των X, Y, είναι η ακόλουθη:

y / x	1	2	3	4	5
3	2/15	2/15	1/15	1/15	1/30
4	2/15	1/15	1/15	1/15	1/30
5	1/15	1/30	1/30	1/30	1/30

(α΄) Ποια είναι η συνδιακύμανση των X, Y;

(β΄) Ποια είναι η μάζα της Τ.Μ. Z;

(γ΄) Πόση είναι η μέση τιμή $E(Z)$ της Τ.Μ. Z;

Λύση:

(α΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned}
E(X) &= 3 \times \left(\frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30}\right) + 4 \times \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30}\right) \\
&\quad + 5 \times \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30}\right) = 3 \times \frac{13}{30} + 4 \times \frac{11}{30} + 5 \times \frac{6}{30} = \frac{113}{30}, \\
E(Y) &= 1 \times \left(\frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15}\right) + 2 \times \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30}\right) + 3 \times \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30}\right) \\
&\quad + 4 \times \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30}\right) + 5 \times \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30}\right) \\
&= 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{7}{30} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{10} = \frac{37}{15}, \\
E(XY) &= 3 \times 1 \times \frac{2}{15} + 3 \times 2 \times \frac{2}{15} + 3 \times 3 \times \frac{1}{15} + 3 \times 4 \times \frac{1}{15} + 3 \times 5 \times \frac{1}{30} \\
&\quad + 4 \times 1 \times \frac{2}{15} + 4 \times 2 \times \frac{1}{15} + 4 \times 3 \times \frac{1}{15} + 4 \times 4 \times \frac{1}{15} + 4 \times 5 \times \frac{1}{30} \\
&\quad + 5 \times 1 \times \frac{1}{15} + 5 \times 2 \times \frac{1}{30} + 5 \times 3 \times \frac{1}{30} + 5 \times 4 \times \frac{1}{30} + 5 \times 5 \times \frac{1}{30} \\
&= \frac{143}{15}, \\
\mathrm{COV}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{143}{15} - \frac{113}{30} \times \frac{37}{15} = \frac{109}{450}.
\end{aligned}$$

(β΄) Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζεται η τιμή της συνάρτησης Z για κάθε ζεύγος (X, Y)

y / x	1	2	3	4	5
3	2	4	6	6	6
4	2	4	6	8	8
5	2	4	6	8	10

Από τον άνω πίνακα, προκύπτει πως

$$
\begin{aligned}
P(Z=2) &= \frac{2}{15}+\frac{2}{15}+\frac{1}{15}=\frac{1}{3},\\
P(Z=4) &= \frac{2}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{30}=\frac{7}{30},\\
P(Z=6) &= \frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{30}+\frac{1}{30}=\frac{4}{15},\\
P(Z=8) &= \frac{1}{15}+\frac{1}{30}+\frac{1}{30}=\frac{2}{15},\\
P(Z=10) &= \frac{1}{30}.
\end{aligned}
$$

(γ΄) Έχοντας τη μάζα της Z, εύκολα υπολογίζουμε πως

$$E(Z)=2\times\frac{1}{3}+4\times\frac{7}{30}+6\times\frac{4}{15}+8\times\frac{2}{15}+10\times\frac{1}{30}=\frac{23}{5}.$$

40. **(Πεπόνια)** Σε ένα καλάθι υπάρχουν 5 πεπόνια, εκ των οποίων τα 2 είναι καλά, και τα άλλα τρία χαλασμένα. Αρχίζουμε και κόβουμε τα πεπόνια, μέχρι να βρούμε και τα δύο καλά, και μετά σταματάμε. (Επομένως, ενδεχομένως υπάρχουν κάποια χαλασμένα πεπόνια που δεν θα κόψουμε.) Έστω X το πλήθος των πεπονιών που κόβουμε μέχρι να βρούμε το πρώτο καλό, και έστω Y το πλήθος των ΕΠΙΠΛΕΟΝ πεπονιών που κόβουμε μέχρι να βρούμε και το δεύτερο καλό. Επομένως, οι Τ.Μ. X, Y λαμβάνουν τις τιμές $1, 2, 3, 4$. Ποια είναι η από κοινού μάζα πιθανότητας των Τ.Μ. X, Y; Υπολογίστε τις $E(X), E(Y), \mathrm{COV}(X, Y)$.

Λύση: Αφού οι X, Y λαμβάνουν τις τιμές $1, 2, 3, 4$, συνολικά πρέπει να εξετάσουμε $4\times 4 = 16$ περιπτώσεις, για να προσδιορίσουμε την από κοινού μάζα πιθανότητας. Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
P(X=1,Y=1) &= \frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10},\\
P(X=1,Y=2) &= \frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10},\\
P(X=1,Y=3) &= \frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10},\\
P(X=1,Y=4) &= \frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{10},\\
P(X=2,Y=1) &= \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10},\\
P(X=2,Y=2) &= \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10},\\
P(X=2,Y=3) &= \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{10},\\
P(X=3,Y=1) &= \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10},\\
P(X=3,Y=2) &= \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{10},\\
P(X=4,Y=1) &= \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{10}.
\end{aligned}
$$

Όλα τα άλλα ζεύγη έχουν μηδενική πιθανότητα να συμβούν. Δεν είναι τυχαίο ότι όλα τα ζεύγη με θετική πιθανότητα έχουν την ίδια πιθανότητα. Πράγματι, έχουμε να τοποθετήσουμε τα δύο καλά πεπόνια σε δύο από 5 διαθέσιμες θέσεις. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{5}{2} = 10$ τρόπους, όλους με την ίδια πιθανότητα (λόγω συμμετρίας), άρα αυτή η πιθανότητα είναι $\frac{1}{10}$. Προκύπτει επομένως η ακόλουθη από κοινού μάζα:

x / y	1	2	3	4	$p_Y(y)$
1	1/10	1/10	1/10	1/10	4/10
2	1/10	1/10	1/10	0	3/10
3	1/10	1/10	0	0	2/10
4	1/10	0	0	0	1/10
$p_X(x)$	4/10	3/10	2/10	1/10	

Ακολούθως, εύκολα έχουμε

$$\begin{aligned}
E(X) &= 1\times\frac{4}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times\frac{1}{10}=2,\\
E(Y) &= 1\times\frac{4}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times\frac{1}{10}=2,\\
E(XY) &= \frac{1}{10}\times(1\times1+1\times2+1\times3+1\times4+2\times1+2\times2+2\times3+3\times1+3\times2+4\times1)=\frac{35}{10},\\
\mathrm{COV}(X,Y) &= E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{35}{10}-2\times2=-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ήταν αναμενόμενο ότι η συνδιακύμανση είναι αρνητική. Πράγματι, αν αργήσουμε να βρούμε το πρώτο καλό πεπόνι, σημαίνει ότι έχουνε ανοίξει πολλά χαλασμένα, επομένως θα είναι πλέον πιο εύκολο να βρούμε το δεύτερο καλό πεπόνι.

41. **(Anti-doping control)** Μια αποστολή ποδοσφαίρου αποτελείται από 30 άτομα. Εξ αυτών, επιλέγονται οι 10, από την υπηρεσία ελέγχου A, χωρίς κάποια ιδιαίτερη προτίμηση στον συνδυασμό που επιλέγεται και στη σειρά επιλογής, για να περάσουν από έλεγχο anti-doping. Κατόπιν επιλέγονται, από άλλη υπηρεσία, συγκεκριμένα την υπηρεσία B, 5 άτομα από τα 30, χωρίς προτίμηση στο συνδυασμό που επιλέγεται και στη σειρά επιλογής, και χωρίς να λαμβάνεται υπόψη ο έλεγχος που έχει ήδη γίνει από την υπηρεσία A. Επομένως, οι επιλογές των συνδυασμών που κάνουν οι δύο υπηρεσίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

(α΄) Έστω ένα συγκεκριμένο άτομο M. Ποια είναι η πιθανότητα ο M να ελεγχθεί z φορές, για $z=0,1,2$;

(β΄) Έστω X το πλήθος των ατόμων που ελέγχονται **τουλάχιστον μια φορά**. Ποια είναι η πιθανότητα $P(X=x)$ για $x=10,11,12,13,14,15$; (Μπορείτε να δώσετε ως απάντηση ένα γενικό τύπο.)

(γ΄) Υπολογίστε τη μέση τιμή $E(X)$ της Τ.Μ. του προηγούμενου σκέλους **χωρίς** να χρησιμοποιήσετε τα αποτελέσματα του προηγούμενου σκέλους, ορίζοντας κατάλληλες βοηθητικές Τ.Μ. Bernoulli.

Λύση:

(α΄) Έστω A το ενδεχόμενο να εξεταστεί το άτομο M από την υπηρεσία ελέγχου A, έστω B το ενδεχόμενο να εξεταστεί από την υπηρεσία ελέγχου B, και έστω Z το πλήθος των ελέγχων που γίνονται στο άτομο M. Παρατηρήστε πως το Z μπορεί να λάβει τις τιμές $0,1,2$. Επίσης, $P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$, με τα ενδεχόμενα A και B ανεξάρτητα, σύμφωνα με την υπόθεση. Επομένως:

$$\begin{aligned}
P(Z=0) &= P(A'B')=P(A')P(B')=(1-P(A))(1-P(B))=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{10}{18},\\
P(Z=2) &= P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18},\\
P(Z=1) &= 1-P(Z=0)-P(Z=2)=1-\frac{10}{18}-\frac{1}{18}=\frac{7}{18}.
\end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της $P(Z=0)$ χρησιμοποιήσαμε το ότι αν είναι ανεξάρτητα δύο ενδεχόμενα, τότε είναι ανεξάρτητα και τα συμπληρώματά τους.

(β΄) Καταρχήν παρατηρήστε ότι για να έχουμε $X=10$, πρέπει αυτοί που θα ελεγχθούν από την δεύτερη εταιρεία να έχουν όλοι ήδη ελεγχθεί από την πρώτη εταιρεία. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{10}{5}$ συνδυασμούς, από τους συνολικά $\binom{30}{5}$ συνδυασμούς. Επομένως,

$$P(X=10)=\frac{\binom{10}{5}}{\binom{30}{5}}=\frac{10\times9\times8\times7\times6}{30\times29\times28\times27\times26}=\frac{2}{1131}.$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλήξουμε και με χρήση κανόνων της δεσμευμένης πιθανότητας.

Στη γενικότερη περίπτωση, θα έχουμε $X=x$ αν και μόνο αν η δεύτερη εταιρεία ελέγξει $15-x$ από τους 10 που έχουν ήδη ελεγχθεί, και $5-(15-x)=x-10$ από τους 20 που δεν έχουν ήδη ελεγχθεί. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{10}{15-x}\times\binom{20}{x-10}$ τρόπους. Άρα:

$$P(X=x)=\frac{\binom{10}{15-x}\times\binom{20}{x-10}}{\binom{30}{5}},$$

και με αντικατάσταση έχουμε

$$P(X=10)=\frac{\binom{10}{5}\binom{20}{0}}{\binom{30}{5}}=\frac{2}{1131}\simeq 0.0018, \qquad P(X=11)=\frac{\binom{10}{4}\binom{20}{1}}{\binom{30}{5}}=\frac{100}{3393}\simeq 0.0295,$$
$$P(X=12)=\frac{\binom{10}{3}\binom{20}{2}}{\binom{30}{5}}=\frac{951}{5944}\simeq 0.1600, \qquad P(X=13)=\frac{\binom{10}{2}\binom{20}{3}}{\binom{30}{5}}=\frac{950}{2639}\simeq 0.0900,$$
$$P(X=14)=\frac{\binom{10}{1}\binom{20}{4}}{\binom{30}{5}}=\frac{477}{1403}\simeq 0.3400, \qquad P(X=15)=\frac{\binom{10}{0}\binom{20}{5}}{\binom{30}{5}}=\frac{308}{2831}\simeq 0.1088.$$

Εναλλακτικά, παρατηρήστε ότι το πλήθος των ατόμων που επιλέχθηκαν από την εταιρεία B αλλά όχι από την εταιρεία A ακολουθεί την υπεργεωμετρική κατανομή. (Μπορείτε να συμπληρώσετε τις λεπτομέρειες;)

(γ΄) Έστω οι Τ.Μ. Bernoulli X_i, για $i=1,\ldots,30$, για τις οποίες $X_i=1$ αν το άτομο i περάσει από έλεγχο, και $X_i=0$ αλλιώς. Παρατηρήστε πως

$$E(X_i)=1\times P(X_i=1)+0\times P(X_i=0)=P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=1-P(Z=0)=\frac{8}{18},$$

όπου η $P(Z=0)$ έχει υπολογιστεί στο πρώτο σκέλος. Ακολούθως, έχουμε

$$E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{30}X_i\right)=\sum_{i=1}^{30}E(X_i)=30\times\frac{8}{18}=\frac{40}{3}.$$

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της μέσης τιμής και τα αποτελέσματα του προηγούμενου σκέλους:

$$E(X)=10\times P(X=10)+11\times P(X=11)+12\times P(X=12)$$
$$+13\times P(X=13)+14\times P(X=14)+15\times P(X=15)=\frac{40}{3}.$$

42. **(Το πρόβλημα του συλλέκτη κουπονιών)** Υποθέτουμε ότι υπάρχουν n είδη διαφορετικών κουπονιών, και κάθε φορά που κάποιος αγοράζει ένα κουπόνι, αυτό μπορεί να είναι ισοπίθανα οποιοδήποτε από τα n διαφορετικά είδη. Ποια είναι η μέση τιμή του αριθμού κουπονιών που πρέπει να αγοράσει κανείς ώστε να έχει συλλέξει ένα κουπόνι από κάθε είδος;

Λύση: Έστω X ο αριθμός των απαιτούμενων δοκιμών ώσπου να δούμε και τα n διαφορετικά κουπόνια, και για $i=1,2,\ldots,n$, έστω X_i ο αριθμός των δοκιμών που απαιτείται από την στιγμή που έχουμε δει $i-1$ διαφορετικά κουπόνια μέχρι την στιγμή που θα δούμε ένα νέο διαφορετικό από τα προηγούμενα. Η X_i είναι γεωμετρική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $p_i=(n-(i-1))/n$, και επομένως με μέση τιμή $1/p_i=n/(n-i+1)$. Επειδή $X=X_1+\cdots+X_n$, η γραμμικότητα της μέσης τιμής δίνει

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n-i+1}=n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\simeq n\log n.$$

Η τελευταία προσεγγιστική ισότητα ισχύει για μεγάλα n, λόγω της διπλής ανισότητας

$$\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n.$$

Και τα δύο σκέλη μπορούν να αποδειχτούν αν συγκρίνετε την $f(x)=1/x$ με κατάλληλα ορισμένη κλιμακωτή συνάρτηση και πάρετε το ολοκλήρωμα από 1 έως n. Το άθροισμα είναι γνωστό ως αρμονική σειρά.

7η Ομάδα Ασκήσεων

43. **(Ακέραιο μέρος)** Έστω η συνεχής Τ.Μ. X με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} c + \frac{x}{4}, & 0 \le x < 2, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α΄) Ποια είναι η τιμή της σταθεράς c;

(β΄) Ποια είναι η μέση τιμή $E(X)$;

(γ΄) Ορίζουμε την Τ.Μ. $Y = \lfloor X \rfloor$, δηλαδή το ακέραιο μέρος του X. (Επομένως, το Y είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος από τον X.) Ποια είναι η μάζα του Y;

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^2 \left(c + \frac{x}{4}\right) dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^2 \left(cx + \frac{x^2}{8}\right)' dx = 1 \Leftrightarrow 2c + \frac{4}{8} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{4}.$$

Εναλλακτικά, παρατηρήστε ότι το ολοκλήρωμα της $f(x)$ ισούται με το εμβαδόν τραπεζίου ύψους 2 και βάσεων με μήκη c και $c + \frac{1}{2}$.

(β΄) Έχουμε:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_0^2 x \left(\frac{1}{4} + \frac{x}{4}\right) dx = \frac{1}{4} \int_0^2 (x + x^2)\, dx$$
$$= \frac{1}{4} \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)' dx = \frac{1}{4}\left(2 + \frac{8}{3}\right) = \frac{7}{6}.$$

(γ΄) Η Τ.Μ. Y μπορεί να λάβεις τις τιμές 0 και 1, και η μάζα της υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= P(0 \le X < 1) = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{1}{4}(x+1)\, dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + x\right)' dx = \frac{3}{8}, \\ P(Y=1) &= 1 - P(Y=0) = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Οι άνω πιθανότητες θα μπορούσαν να υπολογιστούν παρατηρώντας ότι η πρώτη ισούται με το εμβαδόν τραπεζίου ύψους 1 και πλευρών $\frac{1}{4}$ και $\frac{1}{2}$, και η δεύτερη ισούται με το εμβαδόν τραπεζίου ύψους 1 και πλευρών $\frac{1}{2}$ και $\frac{3}{4}$.

44. **(Πατάτες)** Πρόσφατες έρευνες γεωπόνων έδειξαν ότι το βάρος μιας πατάτας Ζυγοβιστίου είναι Τ.Μ. X με πυκνότητα

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Δίνεται επίσης ότι $E(X) = 1$.

(α΄) Προσδιορίστε τις τιμές των παραμέτρων a, b.

(β΄) Να υπολογίσετε τα $P(X < 1)$ και $\mathrm{VAR}(X)$. (Αν δεν έχετε υπολογίσει τις τιμές των a, b, δώστε τη λύση σας συναρτήσει αυτών.)

Λύση: Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, το ολοκλήρωμα της πυκνότητας πρέπει να είναι μονάδα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^2 (ax + bx^2)\, dx = 1 \Leftrightarrow a \int_0^2 x\, dx + b \int_0^2 x^2\, dx = 1$$
$$\Leftrightarrow a \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + b \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 \Leftrightarrow 2a + \frac{8}{3} b = 1.$$

Επιπλέον, δίνεται ότι $E(X) = 1$, επομένως

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^2 \left(ax^2 + bx^3\right)\,dx = 1 \Leftrightarrow a\int_0^2 x^2\,dx + b\int_0^2 x^3\,dx = 1$$
$$\Leftrightarrow a\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + b\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{8}{3}a + 4b = 1.$$

Από το γραμμικό σύστημα εξισώσεων που προκύπτει, μπορούμε να βρούμε ότι $a = \frac{3}{2}$ και $b = -\frac{3}{4}$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
P(X<1) &= \int_0^1 (ax+bx^2)\,dx = a\int_0^1 x\,dx + b\int_0^1 x^2\,dx \\
&= a\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + b\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{a}{2} + \frac{b}{3} = \frac{1}{2}, \\
E(X^2) &= \int_0^2 x^2(ax+bx^2)\,dx = a\int_0^2 x^3\,dx + b\int_0^2 x^4\,dx = \left[a\frac{x^4}{4}\right]_0^2 + b\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 \\
&= 4a + \frac{32b}{5} = \frac{6}{5}, \\
\mathrm{VAR}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

45. **(Μη φραγμένη πυκνότητα)** Δίνεται συνεχής Τ.Μ. X με τη συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2\sqrt{x}, & 0 < x < 1/4, \\ 1, & x \ge 1/4. \end{cases}$$

Υπολογίστε τα $P\left(X > \frac{1}{9} | X > \frac{1}{16}\right)$, $E(X)$, και $E(|X - \frac{1}{8}|)$.

Λύση: Καταρχήν, έχουμε:

$$\begin{aligned}
P\Big(X > \frac{1}{9}\,\Big|\, X > \frac{1}{16}\Big) &= \frac{P(X > 1/9 \text{ και } X > 1/16)}{P(X > 1/16)} = \frac{P(X > 1/9)}{P(X > 1/16)} \\
&= \frac{1 - P(X \le 1/9)}{1 - P(X \le 1/16)} = \frac{1 - F(1/9)}{1 - F(1/16)} = \frac{1 - 2\sqrt{1/9}}{1 - 2\sqrt{1/16}} = 2/3.
\end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε την $E(X)$ και την $E(|X - \frac{1}{8}|)$, θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την πυκνότητα $f(x)$ (ή, ακριβέστερα, *μια* πυκνότητα $f(x)$):

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & 0 < x < 1/4, \\ 0, & x \ge 1/4. \end{cases}$$

Οι τιμές της $f(x)$ στα 0, $\frac{1}{4}$ είναι αυθαίρετες, και επιλέχθηκαν για λόγους απλότητας. Η πυκνότητα και η κατανομή έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 4.

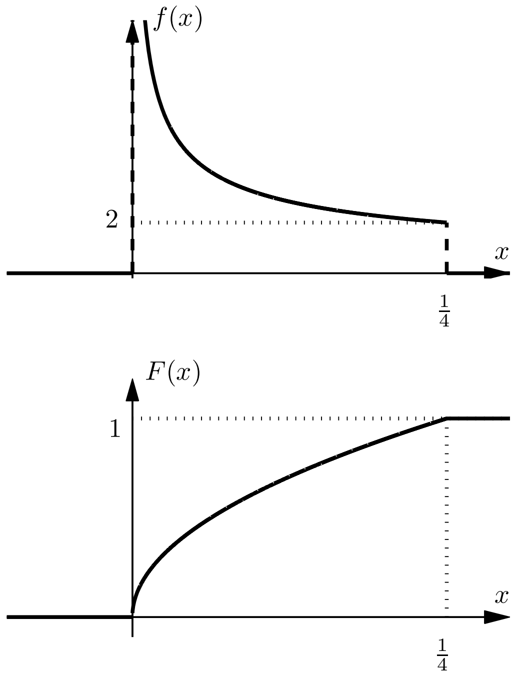
Παρατηρήστε πως η $f(x)$ απειρίζεται καθώς το $x \to 0^+$. Παρόλα αυτά, το (καταχρηστικό) ολοκλήρωμά της στο διάστημα $(-\infty, \infty)$ υπάρχει και ισούται με τη μονάδα, όπως πρέπει, αφού η $f(x)$ είναι πυκνότητα. Παρατηρήστε πως μπορούμε να ανακτήσουμε την $F(x)$ από την $f(x)$ μέσω της $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που $0 < x < \frac{1}{4}$, έχουμε:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \left[2\sqrt{t}\right]_0^x = 2\sqrt{x},$$

ενώ οι περιπτώσεις $x \ge \frac{1}{4}$ και $x \le 0$ προκύπτουν ανάλογα.

Για τη μέση τιμή της X έχουμε:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{12}.$$



Σχήμα 4: Άσκηση 45.

Τέλος, για την $E(|X-\frac{1}{8}|)$ έχουμε:

$$
\begin{aligned}
E\left(\left|X-\frac{1}{8}\right|\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left|x-\frac{1}{8}\right| f(x)\,dx = \int_{0}^{1/4}\left|x-\frac{1}{8}\right|\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \\
&= \int_{0}^{1/8}\left(\frac{1}{8}-x\right)\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \int_{1/8}^{1/4}\left(x-\frac{1}{8}\right)\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \\
&= \left[\frac{\sqrt{x}}{4}\right]_{0}^{1/8} - \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{0}^{1/8} + \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{1/8}^{1/4} - \left[\frac{\sqrt{x}}{4}\right]_{1/8}^{1/4} = \frac{1}{6\sqrt{2}} - \frac{1}{24}.
\end{aligned}
$$

46. **(Πυκνότητα πιθανότητας 1)** Δίνεται η ακόλουθη πυκνότητα πιθανότητας:

$$
f_X(x) = \begin{cases} c(1-x^2), & x \in (-1,1), \\ 0, & x \notin (-1,1). \end{cases}
$$

Να υπολογιστούν η παράμετρος c, η μέση τιμή $E(X)$, η διασπορά $\mathrm{VAR}(X)$, και η κατανομή $F_X(x)$. Να σχεδιάσετε τις $f_X(x)$ και $F_X(x)$.

Λύση: Καταρχήν, έχουμε

$$
1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} c(1-x^2)\,dx = 2c - c\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4c}{3} \Rightarrow c = \frac{3}{4}.
$$

Λόγω συμμετρίας γύρω από το 0, πρέπει να έχουμε $E(X)=0$. Επίσης,

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\frac{3}{4}x^2(1-x^2)\,dx = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{5}\right)'\,dx = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right] = \frac{1}{2}, \\
\mathrm{VAR}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Η κατανομή πιθανότητας θα προκύψει από τη σχέση

$$
F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.
$$

Προφανώς, αν $x \leq -1$, τότε $F_X(x) = 0$. Επιπλέον, αν $x \geq 1$, τότε $F_X(x) = 1$. Αν $-1 < x < 1$, τότε:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-1}^{x} \frac{3}{4}(1-t^2)\,dt = \frac{3}{4}(x+1) + \int_{-1}^{x} \left(\frac{t^3}{3}\right)' dt = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$$

Συγκεντρώνοντας όλα τα αποτελέσματα, έχουμε:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ -x^3/4 + 3x/4 + 1/2, & -1 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Οι $f_X(x)$ και $F_X(x)$ έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 5.

47. **(Πυκνότητα πιθανότητας 2)** Έστω συνεχής Τ.Μ. X με πυκνότητα

$$f_X(x) = \begin{cases} Cx + e^{-x} & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

(α΄) Να βρεθεί η τιμή του C.

(β΄) Να βρεθεί η μέση τιμή του X.

(γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα $P(X < 0.5)$;

(δ΄) Υπολογίστε και σχεδιάστε τη συνάρτηση κατανομής $F(x)$ της X.

Λύση:

(α΄) Έχουμε:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} (Cx + e^{-x})\,dx = \Big[\frac{C}{2}x^2 - e^{-x}\Big]_0^1 = \frac{C}{2} - e^{-1} + 1 \Rightarrow C = \frac{2}{e} \simeq 0.7358.$$

(β΄)

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^1 (\frac{2}{e}x^2 + xe^{-x})\,dx = \int_0^1 \frac{2}{e}x^2\,dx + \int_0^1 xe^{-x}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{2}{e}x^2\,dx - \int_0^1 x(e^{-x})'\,dx = \Big[\frac{2}{e}\frac{x^3}{3}\Big]_0^1 - \Big[xe^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = \frac{2}{e} \times \frac{1}{3} - e^{-1} - \Big[e^{-x}\Big]_0^1 \\ &= \frac{2}{3e} - e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - \frac{4}{3e} \simeq 0.5095. \end{aligned}$$

(γ΄)

$$P(X < 0.5) = \int_0^{0.5} \left(\frac{2}{e}x + e^{-x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{e} - e^{-x}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{4e} - e^{-1/2} + 1 \simeq 0.4854.$$

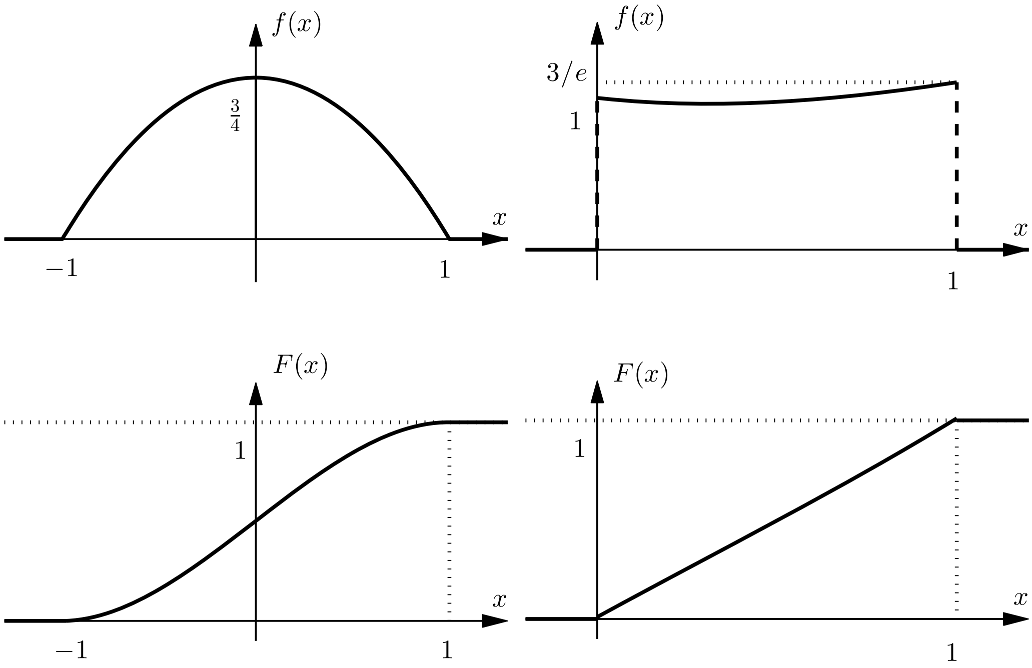
(δ΄) Όταν $x \in [0,1]$, έχουμε

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \int_0^x \left(\frac{2}{e}y + e^{-y}\right) dy = \Big[\frac{y^2}{e} - e^{-y}\Big]_0^x = \frac{x^2}{e} - e^{-x} + 1.$$

Προφανώς $F_X(x) = 0$ για $x < 0$ και $F_X(x) = 1$ για $x > 1$, άρα συγκεντρωτικά

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{e} - e^{-x} + 1, & x \in [0,1], \\ 0, & x < 0, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Η πυκνότητα $f_X(x)$ και η κατανομή $F_X(x)$ έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 5. Παρατηρήστε πως η πυκνότητα είναι περίπου οριζόντια, επομένως και η κατανομή είναι περίπου ευθεία.



Σχήμα 5: Ασκήσεις 46, 47.

8η Ομάδα Ασκήσεων

48. **(Συνδυασμός πυκνοτήτων)** Έστω $f(x)$ και $g(x)$ δύο πυκνότητες πιθανότητας, των Τ.Μ. X και Y αντίστοιχα. Έστω η συνάρτηση $h(x) = af(x) + (1-a)g(x)$, όπου $a \in (0,1)$.

    (α΄) Να δείξετε ότι η $h(x)$ είναι επίσης πυκνότητα πιθανότητας, έστω μιας Τ.Μ. Z.

    (β΄) Πόση είναι η $E(Z)$;

    (γ΄) Πόση είναι η $E\left(Z^2\right)$;

    (δ΄) Πόση είναι η $\mathrm{VAR}(Z)$;

    Οι απαντήσεις σας στα σκέλη (β'), (γ'), (δ') να δοθούν συναρτήσει των $E(X)$, $E(Y)$, $E\left(X^2\right)$, $E\left(Y^2\right)$ και a.

    Λύση:

    (α΄) Η $h(x)$ είναι παντού μη αρνητική, αφού $a > 0$, $1-a > 0$, $f(x) \geq 0$, και $g(x) \geq 0$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι έχει ολοκλήρωμα στο διάστημα $(-\infty, \infty)$ ίσο με τη μονάδα. Πράγματι,

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(af(x) + (1-a)g(x)\right)\,dx = a\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx + (1-a)\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = a + (1-a) = 1.$$

    Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι πυκνότητες, επομένως το ολοκλήρωμά τους είναι μονάδα.

    (β΄) Θα έχουμε:

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} xh(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(af(x) + (1-a)g(x)\right)\,dx$$
$$= a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx + (1-a)\int_{-\infty}^{\infty} xg(x)\,dx = aE(X) + (1-a)E(Y).$$

    (γ΄) Με ανάλογες πράξεις, έχουμε

$$E\left(Z^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 h(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\left(af(x) + (1-a)g(x)\right)\,dx$$
$$= a\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx + (1-a)\int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x)\,dx = aE\left(X^2\right) + (1-a)E\left(Y^2\right).$$

(δ΄) Συνδυάζοντας τα δύο προηγούμενα σκέλη, έχουμε τελικά

$$\mathrm{VAR}(Z) = E\left(Z^2\right) - (E(Z))^2 = aE\left(X^2\right) + (1-a)E\left(Y^2\right) - (aE(X) + (1-a)E(Y))^2.$$

49. **(Τετράγωνο κανονικής Τ.Μ.)** Έστω μια Τ.Μ. $X \sim N(0, \sigma^2)$ και μια σταθερά $a > 0$. Να βρεθούν η συνάρτηση κατανομής $G(y)$, και η πυκνότητα $g(y)$, της $Y = aX^2$. Τέλος, να βρεθεί η μέση τιμή της Y.

Λύση: Υπολογίζουμε πρώτα την συνάρτηση κατανομής. Για την περίπτωση $y < 0$, προφανώς $G(y) = 0$. Για την περίπτωση $y \geq 0$:

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(aX^2 \leq y) = P\left(|X| \leq \sqrt{\frac{y}{a}}\right) = \Phi\left(\sqrt{\frac{y}{a\sigma^2}}\right) - \Phi\left(-\sqrt{\frac{y}{a\sigma^2}}\right).$$

Άρα τελικά

$$G(y) = \begin{cases} \Phi\left(\sqrt{\frac{y}{a\sigma^2}}\right) - \Phi\left(-\sqrt{\frac{y}{a\sigma^2}}\right), & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Υπολογίζουμε ακολούθως την πυκνότητα $g(y)$. Για $y > 0$, με παραγώγιση προκύπτει ότι

$$g(y) = \left[\Phi\left(\sqrt{\frac{y}{a\sigma^2}}\right)\right]' - \left[\Phi\left(-\sqrt{\frac{y}{a\sigma^2}}\right)\right]'.$$

Όμως,

$$\Phi'(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

άρα

$$g(y) = \phi\left(\sqrt{\frac{y}{a\sigma^2}}\right)\left(\sqrt{\frac{y}{a\sigma^2}}\right)' - \phi\left(-\sqrt{\frac{y}{a\sigma^2}}\right)\left(-\sqrt{\frac{y}{a\sigma^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi a\sigma^2 y}} \exp\left[-\frac{y}{2a\sigma^2}\right].$$

Άρα τελικά

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi a\sigma^2 y}} \exp\left[-\frac{y}{2a\sigma^2}\right], & y > 0. \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

Στην θέση $y = 0$ δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την $g(y)$ με παραγώγιση, μπορούμε όμως να τη θέσουμε ίση με οποιαδήποτε τιμή χωρίς να επηρεάζεται ο υπολογισμός των πιθανοτήτων. Έχουμε λοιπόν επιλέξει $g(0) = 0$.

Παρατηρήστε ότι η πυκνότητα απειρίζεται στο όριο $y \to 0^+$. Επιπλέον, στην ειδική περίπτωση που $a\sigma^2 = 1$, η άνω πυκνότητα αντιστοιχεί στην (γνωστή στη βιβλιογραφία) κατανομή χ_k^2, με $k = 1$, η οποία γνωρίζουμε ότι έχει μέση τιμή 1.

Για να υπολογίσουμε τη μέση τιμή στη γενική περίπτωση, έχουμε:

$$\begin{aligned} E(Y) = \int_0^\infty \frac{y}{\sqrt{2\pi a\sigma^2 y}} \exp\left[-\frac{y}{2a\sigma^2}\right] dy &= \int_0^\infty \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-t^2/2\right] 2a\sigma^2 t\, dt \\ &= a\sigma^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-t^2/2\right]\, dt = a\sigma^2. \end{aligned}$$

Στην δεύτερη ισότητα, χρησιμοποιήσαμε την αλλαγή μεταβλητών $\frac{y}{a\sigma^2} = t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{y}{a\sigma^2}}$. Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι το ολοκλήρωμα είναι η διασπορά μιας τυπικής κανονικής Τ.Μ.

50. **(Προσδιορισμός παραμέτρων)** Η συνάρτηση κατανομής μιας συνεχούς Τ.Μ. X δίνεται από τον τύπο:

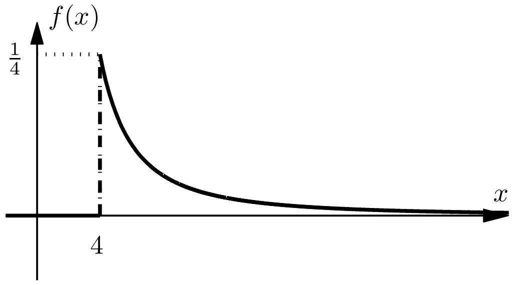
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 4, \\ Ax + B - \frac{4}{x}, & x \geq 4. \end{cases}$$

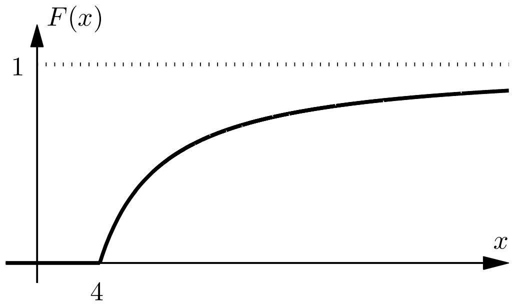
(α΄) Να βρεθούν οι τιμές των A και B.

(β΄) Να υπολογιστεί η πυκνότητα $f(x)$ της X και να γίνει η γραφική της παράσταση.

(γ΄) Βρείτε πιθανότητα το X να είναι μικρότερο του 5, δεδομένου ότι είναι μικρότερο του 6.

Λύση:





Σχήμα 6: Γραφική αναπαράσταση της πυκνότητας $f(x)$ και της συνάρτησης κατανομής $F(x)$ στην Άσκηση 50.

(α΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, πρέπει να έχουμε $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$, οπότε θα πρέπει το A να ισούται με μηδέν, γιατί διαφορετικά θα είχαμε, $\lim_{x\to\infty} F(x) = \pm\infty$. Άρα για $x \geq 4$, $F(x) = B - 4/x$, και

$$1 = \lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \left(B - \frac{4}{x}\right) = ,$$

συνεπώς πρέπει να έχουμε και $B = 1$, δηλαδή,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 4, \\ 1 - \frac{4}{x}, & x \geq 4. \end{cases}$$

Η γραφική αναπαράσταση της $F(x)$ δίνεται στο Σχήμα 6.

(β΄) Για την πυκνότητα, θα έχουμε, παραγωγίζοντας,

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{4}{x^2}, & x \geq 4, \\ 0, & x < 4. \end{cases}$$

Η γραφική αναπαράσταση της $f(x)$ δίνεται στο Σχήμα 6.

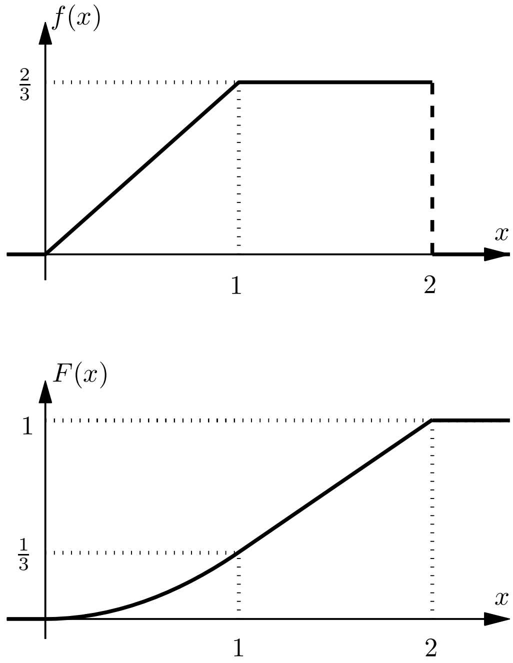
(γ΄) Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, και χρησιμοποιώντας την συνάρτηση κατανομής $F(x)$,

$$\begin{aligned} P(X < 5 | X < 6) &= \frac{P\big(\{X < 5\} \cap \{X < 6\}\big)}{P(X < 6)} = \frac{P(X < 5)}{P(X < 6)} \\ &= \frac{F(5)}{F(6)} = \frac{1 - 4/5}{1 - 4/6} = \frac{1/5}{1/3} = 0.6. \end{aligned}$$

51. **(Τμηματικά γραμμική πυκνότητα)** Έστω μια συνεχής Τ.Μ. X με πυκνότητα

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ cx, & 0 \leq x \leq 1, \\ c, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

(α΄) Σχεδιάστε το γράφημα της $f(x)$ και βρείτε την τιμή της σταθεράς c.



Σχήμα 7: Η πυκνότητα και η κατανομή στην Άσκηση 51.

(β΄) Βρείτε την πιθανότητα το X να είναι μεγαλύτερο από 1.5 ή μικρότερο από 0.5.

(γ΄) Υπολογίστε την μέση τιμή της X.

Λύση:

(α΄) Το ολοκλήρωμα της πυκνότητας από το $-\infty$ ως το ∞ πρέπει να ισούται με τη μονάδα, οπότε, αφού

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d(x) = \int_0^1 cx\,dx + \int_1^2 c\,dx = \Big[c\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 + \Big[cx\Big]_0^1 = \frac{1}{2}c + c = \frac{3}{2}c,$$

πρέπει να έχουμε $c = 2/3$, και τελικά

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{2}{3}x, & 0 \le x \le 1, \\ \frac{2}{3}, & 1 \le x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

(β΄) Η ζητούμενη πιθανότητα εύκολα υπολογίζεται από την πυκνότητα ως εξής:

$$\begin{aligned} P(\{X > 1.5\} \cup \{X < 0.5\}) &= P(X > 1.5) + P(X < 0.5) = \int_{1.5}^{\infty} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{0.5} f(x)\,dx \\ &= \int_{1.5}^{2} \frac{2}{3}\,dx + \int_0^{0.5} \frac{2}{3}x\,dx = \Big[\frac{2}{3}x\Big]_{1.5}^2 + \Big[\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big]_0^{0.5} \\ &= \frac{4}{3} - 1 + \frac{1}{12} - 0 = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

(γ΄) Από τον ορισμό της μέσης τιμής,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^1 \frac{2}{3}x^2\,dx + \int_1^2 \frac{2}{3}x\,dx \\ &= \Big[\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Big]_0^1 + \Big[\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big]_1^2 = \frac{2}{9} - 0 + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{11}{9}. \end{aligned}$$

Η πυκνότητα και η κατανομή έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 7.

9η Ομάδα Ασκήσεων

52. **(Από κοινού συνεχείς Τ.Μ.)** Οι από κοινού συνεχείς Τ.Μ. X, Y έχουν την από κοινού πυκνότητα

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{5}\left(x+2y\right), & (x,y) \in [0,1]\times[0,2], \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α΄) Ποια είναι η μέση τιμή $E[XY]$;

(β΄) Ποιες είναι οι περιθώριες $f_X(x)$, $f_Y(y)$;

Λύση:

(α΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$E(XY) = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} xy f_{XY}(x,y)\,dA = \frac{1}{5}\iint_{[0,1]\times[0,2]} xy(x+2y)\,dA = \frac{1}{5}\int_0^1\left(\int_0^2\left(x^2y+2xy^2\right)\,dy\right)\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^1\left(\int_0^2\left(\frac{x^2y^2}{2}+\frac{2}{3}xy^3\right)'\,dy\right)\,dx = \frac{1}{5}\int_0^1\left(2x^2+\frac{16}{3}x\right)\,dx = \frac{1}{5}\left[\frac{2x^3}{3}+\frac{8}{3}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{5}\times\frac{10}{3} = \frac{2}{3}.$$

(β΄) Επίσης κατά τα γνωστά από τη θεωρία, έχουμε

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy, \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx.$$

Υπολογίζουμε καταρχήν την $f_X(x)$. Όταν $x \in [0,1]$, έχουμε

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_0^2 \frac{1}{5}(x+2y)\,dy = \frac{1}{5}\int_0^2\left(xy+y^2\right)'\,dy = \frac{1}{5}(2x+4),$$

ενώ όταν $x \notin [0,1]$,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 0\,dy = 0.$$

Συγκεντρωτικά,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(2x+4), & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Με ανάλογο τρόπο, όταν $y \in [0,2]$, έχουμε

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{5}(x+2y)\,dx = \frac{1}{5}\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+2xy\right)'\,dx = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}+2y\right),$$

ενώ όταν $y \notin [0,2]$,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} 0\,dy = 0.$$

Συγκεντρωτικά,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{5}(\frac{1}{2}+2y), & y \in [0,2], \\ 0, & y \notin [0,2]. \end{cases}$$

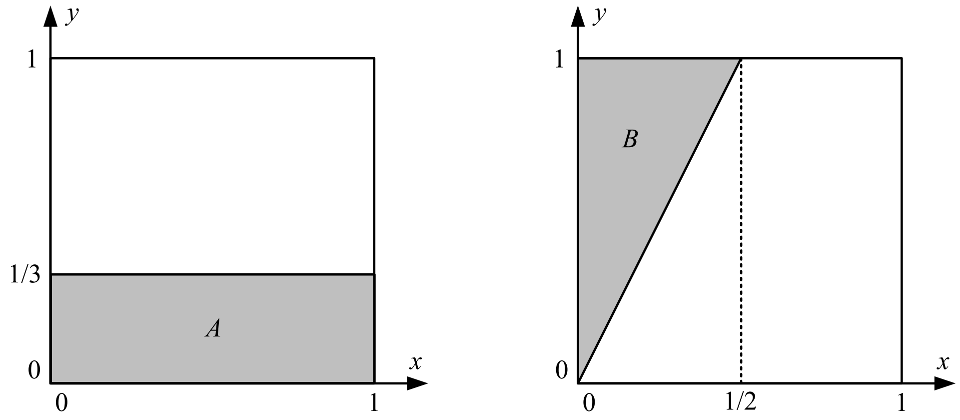
53. **(Από κοινού πυκνότητα)** Έστω X, Y από κοινού τυχαίες μεταβλητές με πυκνότητα

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 6x^c y, & (x,y) \in [0,1]\times[0,1], \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου $c > 0$ άγνωστη σταθερά.

(α΄) Ποια η τιμή της σταθεράς c;

(β΄) Να βρεθούν οι περιθώριες πυκνότητες των X, Y.



Σχήμα 8: Άσκηση 53.

(γ΄) Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(X < 1/3)$, $P(Y > 2X)$.

Λύση: Παρατηρούμε καταρχήν πως

$$1 = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f_{XY}\,dA = \int_0^1 \left(\int_0^1 6x^c y\,dy\right)\,dx = 6\int_0^1 x^c \left(\int_0^1 y\,dy\right)\,dx$$
$$= 3\int_0^1 x^c\,dx = \frac{3}{c+1}\int_0^1 \left(x^{c+1}\right)'\,dx = \frac{3}{c+1} \Rightarrow c = 2.$$

Σχετικά με τις περιθώριες, κατά τα γνωστά από τη θεωρία έχουμε:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy, \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx.$$

Αν $x \in [0,1]$, τότε

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_0^1 6x^2 y\,dy = 6x^2\int_0^1 (y^2/2)'\,dy = 3x^2,$$

ενώ αν $x \notin [0,1]$, τότε

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} 0\,dy = 0.$$

Συγκεντρωτικά,

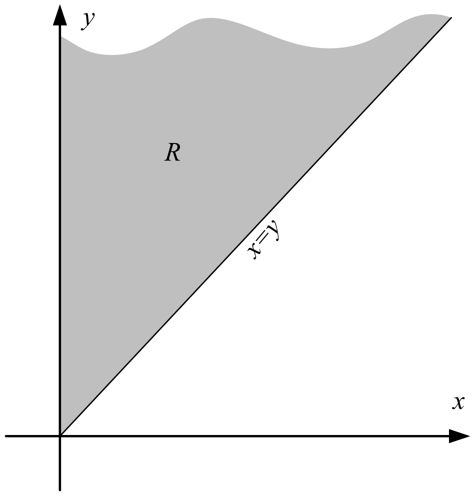
$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Με εντελώς ανάλογο τρόπο, προκύπτει πως

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & y \in [0,1], \\ 0, & y \notin [0,1]. \end{cases}$$

Σχετικά με τις ζητούμενες πιθανότητες, επειδή η από κοινού πυκνότητα είναι μηδενική εκτός του τετραγώνου $[0,1]\times[0,1]$, τελικά υπολογίζονται ολοκληρώνοντας την από κοινού κατανομή στα χωρία

$$A = \{(x,y) :\ 0 \le x \le \frac{1}{3},\ 0 \le y \le 1\}, \quad B = \{(x,y) :\ 0 \le x, y \le 1,\ y \ge 2x\},$$



Σχήμα 9: Άσκηση 54.

που εμφανίζονται εμφανίζονται στο Σχήμα 8. Επομένως,

$$\begin{aligned}
P(X < 1/3) &= \iint_A f_{XY}(x,y)\,dA = \int_0^1 \left(\int_0^{1/3} 6x^2 y\,dx \right) dy = 6 \int_0^1 \left(y \int_0^{1/3} (x^3/3)'\,dx \right) dy \\
&= \frac{6}{3^4} \int_0^1 y\,dy = (1/3)^3 = 1/27, \\
P(Y > 2X) &= \iint_B f(x,y)\,dA = \int_0^1 \left(\int_0^{y/2} 6x^2 y\,dx \right) dy = 6 \int_0^1 \left(y \int_0^{y/2} x^2\,dx \right) = \int_0^1 \frac{y^4}{4}\,dy = 1/20.
\end{aligned}$$

Για την πρώτη πιθανότητα θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει και την περιθώρια πυκνότητα της X.

54. **(Μη αρνητικές συνεχείς Τ.Μ.)** Στη γενική περίπτωση που η X είναι μη αρνητική Τ.Μ. με κατανομή πιθανότητας $F_X(\cdot)$ δείξτε ότι

$$E(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(x))\,dx.$$

(Υπόδειξη: Παρατηρήστε πως

$$E(X) = \int_0^\infty y f_X(y)\,dy = \int_0^\infty \left(\int_0^y dx \right) f_X(y)\,dy,$$

και αλλάξτε τη σειρά ολοκλήρωσης με εφαρμογή του Θεωρήματος του Fubini.)

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^\infty y f_X(y)\,dy = \int_0^\infty \left(\int_0^y dx \right) f_X(y)\,dy = \int_0^\infty \left(\int_0^y f_X(y)\,dx \right) dy \\
&= \int_0^\infty \left(\int_x^\infty f_X(y)\,dy \right) dx = \int_0^\infty P(X > x)\,dx = \int_0^\infty (1 - F_X(x))\,dx.
\end{aligned}$$

Στην τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα του Fubini. Συγκεκριμένα, τα δύο σκέλη ισούνται και τα δύο με το ολοκλήρωμα της $f_X(y)$ στο σκιασμένο άπειρο τριγωνικό χωρίο

$$R = \{(x,y) :\ y \geq 0, 0 \leq x \leq y\ \} = \{(x,y) :\ x \geq 0, y \geq x\ \}$$

του Σχήματος 9.

55. **(Δείγματα ρύπων)** Σε μια διαδικασία μέτρησης ρύπων συλλέγονται 5 δείγματα αέρα. Καθένα από αυτά έχει, ανεξάρτητα από τα άλλα, περιεκτικότητα σε ρύπους που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή με ελάχιστη τιμή 0 $\mathrm{gr/m^3}$

και μέγιστη τιμή 12 $\mathrm{gr/m^3}$. Το αποτέλεσμα είναι αρνητικό αν και τα 5 δείγματα έχουν ρύπους σε περιεκτικότητα μικρότερη των 3.5 $\mathrm{gr/m^3}$. Ποια η πιθανότητα του ενδεχόμενου A το αποτέλεσμα να βγει θετικό;

Λύση: Έστω X_i η περιεκτικότητα σε ρύπους του i-οστού δείγματος. Η πιθανότητα του ενδεχόμενου A είναι:

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A') \\ &= 1 - P(X_1 < 3.5, X_2 < 3.5, X_3 < 3.5, X_4 < 3.5, X_5 < 3.5) \\ &= 1 - P(X_1 < 3.5)P(X_2 < 3.5)P(X_3 < 3.5)P(X_4 < 3.5)P(X_5 < 3.5), \end{aligned}$$

μια και τα 5 δείγματα συλλέγονται ανεξάρτητα. Επιπλέον, εφόσον η περιεκτικότητα κάθε δείγματος i ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή, έχουμε ότι για κάθε i

$$P(X_i < 3.5) = \int_0^{3.5} \frac{1}{12}\,dx = \frac{3.5}{12} \simeq 0.292,$$

κι έτσι τελικά:

$$P(A) \simeq 1 - (0.292)^5 \simeq 0.998.$$

56. **(Ομοιόμορφη Τ.Μ. με παράμετρο γεωμετρική Τ.Μ.)** Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $1/4$. Δεδομένης της X, η Y έχει ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-X, X]$.

(α΄) Ποια η πιθανότητα το $Y > 3/2$;

(β΄) Ποια η πιθανότητα $P(X = 2|Y > 3/2)$;

Υπόδειξη: θα χρειαστείτε την ακόλουθη ισότητα:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} = -\log(1-z), \qquad |z| < 1.$$

Λύση: Η X είναι διακριτή ενώ η Y συνεχής τυχαία μεταβλητή. Για να βρούμε τη ζητούμενη πιθανότητα έχουμε, από τον κανόνα ολικής πιθανότητας και τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας:

(α΄)

$$\begin{aligned} P\left(Y > \frac{3}{2}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(Y > \frac{3}{2}, X = k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P\left(Y > \frac{3}{2}\Big| X = k\right) P(X = k) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \left(\int_{3/2}^{k} \frac{1}{k-(-k)}\,dx\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{k-1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k - 3/2}{2k} \times \frac{3^{k-1}}{4^k} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^k - \frac{1}{4k}\left(\frac{3}{4}\right)^k\right) = \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k - \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{(3/4)^2}{1 - 3/4} - \frac{1}{4}\left(-\log\left(1 - \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{3}{8} - \frac{\log 4}{4} + \frac{3}{16} = \frac{9}{16} - \frac{\log 4}{4} \simeq 0.2959. \end{aligned}$$

(β΄)

$$\begin{aligned} P\left(X = 2\Big|Y > \frac{3}{2}\right) &= \frac{P(X = 2, Y > 3/2)}{P(Y > 3/2)} = \frac{P(X = 2)P(Y > 3/2|X = 2)}{P(Y > 3/2)} \\ &= \frac{\left(\frac{3}{16}\right)\int_{3/2}^{2} 1/4\,dx}{9/16 - (\log 4)/4} = \frac{3/128}{9/16 - (\log 4)/4} =\simeq 0.1875. \end{aligned}$$

10η Ομάδα Ασκήσεων

57. **(Ενεργοποιημένες συνδέσεις)** Το πλήθος των ενεργοποιημένων συνδέσεων σε ένα δίκτυο είναι X, όπου η X έχει κάποια άγνωστη κατανομή με μέση τιμή 2000 και τυπική απόκλιση 500. Αν κάποια στιγμή το πλήθος των συνδέσεων αποκλίνει από το μέσο πλήθος κατά περισσότερο από $\pm S$, τότε το δίκτυο 'πέφτει'. Βρείτε μια τιμή για το S ώστε το ενδεχόμενο να πέσει το δίκτυο να έχει πιθανότητα το πολύ 1%.

Λύση: Σύμφωνα με την ανισότητα του Chebychev έχουμε ότι:

$$P(|X-\mu| \geq S) \leq \frac{\sigma^2}{S^2}.$$

Θέλουμε να βρούμε μια τιμή για το S ώστε το ενδεχόμενο του να πέσει το δίκτυο να έχει πιθανότητα το πολύ 1%, δηλαδή θέλουμε

$$P(|X-\mu| \geq S) \leq 0.01.$$

Επομένως, θέτοντας $\sigma^2/S^2 = 0.01$ πετυχαίνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. Άρα, η τιμή του S θα είναι σε αυτή την περίπτωση:

$$S^2 = \frac{\sigma^2}{0.01} = 100 \times \sigma^2 = 100 \times 500^2 \Rightarrow S = 10 \times 500 = 5000.$$

58. **(Πυκνότητα πιθανότητας)** Δίνεται η ακόλουθη πυκνότητα πιθανότητας:

$$f(x) = ce^{-4|x|}, \qquad -\infty \leq x \leq \infty,$$

όπου c άγνωστη θετική παράμετρος. Απαντήστε στα ακόλουθα:

(α΄) Ποια είναι η τιμή της παραμέτρου c ;

(β΄) Πόση είναι η μέση τιμή $E(X)$;

(γ΄) Πόση είναι η διασπορά VAR(X);

(δ΄) Υπολογίστε, χωρίς να κάνετε κάποια προσέγγιση, την πιθανότητα $P(|X| > \frac{1}{2})$.

(ε΄) Υπολογίστε το φράγμα Chebychev για την πιθανότητα $P(|X| > \frac{1}{2})$.

Λύση:

(α΄) Η τιμή της c θα προσδιοριστεί χρησιμοποιώντας την απαίτηση το ολοκλήρωμα της πυκνότητας στο $\mathbb{R}$ να ισούται με τη μονάδα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} ce^{4x}\,dx + \int_{0}^{\infty} ce^{-4x}\,dx = 2c\int_{0}^{\infty} e^{-4x}\,dx = 2c\left[-\frac{e^{-4x}}{4}\right]_0^{\infty} = \frac{c}{2} \Rightarrow c = 2.$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει με αλλαγή μεταβλητής $x \to -x$ στο πρώτο ολοκλήρωμα, ή πιο απλά παρατηρώντας ότι η $f(x)$ είναι άρτια.

(β΄) Εφαρμόζοντας τον ορισμό της $E(X)$, προκύπτει ότι

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 2xe^{4x}\,dx + \int_{0}^{\infty} 2xe^{-4x}\,dx = -\int_{0}^{\infty} 2xe^{-4x}\,dx + \int_{0}^{\infty} 2xe^{-4x}\,dx = 0.$$

Η τρίτη ισότητα προκύπτει με αλλαγή μεταβλητής $x \to -x$ στο πρώτο ολοκλήρωμα, ή πιο απλά παρατηρώντας ότι η $xf(x)$ είναι περιττή.

(γ΄)

$$\begin{aligned}
\text{VAR}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 2x^2 e^{4x}\,dx + \int_{0}^{\infty} 2x^2 e^{-4x}\,dx = 4\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-4x}\,dx \\
&= -\int_{0}^{\infty} x^2\left(e^{-4x}\right)'\,dx = -\left[x^2 e^{-4x}\right]_0^{\infty} + 2\int_{0}^{\infty} xe^{-4x}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} x(e^{-4x})'\,dx = -\frac{1}{2}\left[xe^{-4x}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-4x}\,dx = -\frac{1}{8}\int_{0}^{\infty}(e^{-4x})'\,dx = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Η πέμπτη ισότητα προκύπτει είτε με αλλαγή μεταβλητής $x \to -x$, είτε παρατηρώντας ότι η $x^2 f(x)$ είναι άρτια. Το όρια που εμφανίζονται είναι όλα 0, όπως προκύπτει με απλή εφαρμογή του κανόνα του L'Hôpital.

(δ΄) Από τον ορισμό της πυκνότητας, προκύπτει πως

$$\begin{aligned} P(|X| \geq \frac{1}{2}) &= P(X \geq \frac{1}{2}) + P(X \leq -\frac{1}{2}) \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} 2e^{-4x}\,dx + \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} 2e^{4x}\,dx = 4\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-4x}\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \left(-e^{-4x}\right)'\,dx = e^{-2}. \end{aligned}$$

Η τρίτη ισότητα και πάλι προκύπτει με αλλαγή μεταβλητής $x \to -x$, ή παρατηρώντας ότι η $f(x)$ είναι άρτια.

(ε΄) Εφαρμόζοντας την ανισότητα Chebychev, προκύπτει πως

$$P(|X| \geq \frac{1}{2}) = P(|X - 0| \geq \frac{1}{2}) \leq \mathrm{VAR}(X)/\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}/\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Όπως αναμένεται, το φράγμα Chebychev είναι μεγαλύτερο από την πραγματική τιμή της πιθανότητας, που υπολογίσαμε στο προηγούμενο σκέλος.

59. **(Δημοσκόπηση)** Θέλουμε να μελετήσουμε την ακρίβεια μιας δημοσκόπησης όπου 100 τυχαία επιλεγμένοι πολίτες ερωτώνται εάν συμφωνούν ή όχι με κάποιο μέτρο της κυβέρνησης. Έστω ότι το αληθινό ποσοστό (στο συνολικό πληθυσμό) που συμφωνεί με το μέτρο είναι 30%. Ποια η πιθανότητα ότι στη δημοσκόπηση το ποσοστό αυτό θα βρεθεί να είναι μεγαλύτερο του 50%; *(Υπόδειξη: Έστω $X_i = 1$ εάν ο i-οστός πολίτης που ερωτήθηκε στη δημοσκόπηση συμφωνεί με το μέτρο και $X_i = 0$ εάν διαφωνεί, για $i = 1, \ldots, 100$. Ακολούθως χρησιμοποιήστε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.)*

Λύση: Ακολουθώντας την υπόδειξη, έχουμε $\mu = E(X_i) = 0.3$ και $\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X_i) = 0.3 \times (1 - 0.3) = 0.21$. Ακολούθως,

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i > \frac{1}{2}\right) &= P\left(\frac{\sqrt{100}}{\sigma}\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i - \mu\right) > \left(\frac{1}{2} - \mu\right)\frac{\sqrt{100}}{\sigma}\right) \\ &\simeq P\left(Z > \frac{20}{\sqrt{21}}\right) \simeq 1 - \Phi(4.3644) \simeq 6.37 \times 10^{-6}, \end{aligned}$$

όπου $Z \sim N(0,1)$ και στην πρώτη προσεγγιστική ισότητα χρησιμοποιήσαμε το Κ.Ο.Θ.

Η ακριβής τιμή της $P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 50\right)$ είναι:

$$1 - \sum_{n=0}^{50} \binom{100}{n} 0.3^n (1 - 0.3)^{100-n} = 9.03 \times 10^{-6},$$

χρησιμοποιώντας λογισμικό αριθμητικών υπολογισμών για τη διωνυμική κατανομή. Θα χαρακτηρίζατε την προσέγγιση που δίνει το Κ.Ο.Θ. καλή ή κακή;

60. **(Καρπούζια)** Ένα ανοιχτό φορτηγάκι μπορεί να αντέξει συνολικά 3000 κιλά φορτίου πριν πάθει βλάβη. Το βάρος κάθε καρπουζιού από μια καλλιέργεια είναι Τ.Μ. με μέση τιμή 15 κιλά και τυπική απόκλιση 1 κιλό. Έστω N_0 το μέγιστο πλήθος των καρπουζιών που μπορούμε να φορτώσουμε στο φορτηγάκι ώστε η πιθανότητα να υπερβεί το βάρος τους τα 3000 κιλά να είναι μικρότερη από 10^{-4}. Βρείτε μια συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί το N_0. Η συνθήκη μπορεί να εμφανίζει τη συνάρτηση $\Phi(\cdot)$.

Λύση: Το N_0 είναι ο μέγιστος ακέραιος N για τον οποίο ισχύει το ακόλουθο:

$$\begin{aligned} &P\left(\sum_{n=1}^{N} X_n > 3000\right) < 10^{-4} \Leftrightarrow P\left(\sum_{n=1}^{N} X_n \leq 3000\right) > 1 - 10^{-4} \\ &\Leftrightarrow P\left(\frac{\sum_{n=1}^{N} X_n - 15N}{\sqrt{N}} \leq \frac{3000 - 15N}{\sqrt{N}}\right) > 1 - 10^{-4} \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{3000 - 15N}{\sqrt{N}}\right) > 1 - 10^{-4} \\ &\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{3000 - 15N}{\sqrt{N}}\right) > 1 - 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{3000 - 15N}{\sqrt{N}} > \Phi^{-1}(1 - 10^{-4}), \end{aligned}$$

όπου η Τ.Μ. Z είναι, σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, τυπική κανονική Τ.Μ. Η τελευταία ισοδυναμία προκύπτει από το ότι η $\Phi(\cdot)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

Παρατηρήστε ότι το αριστερό σκέλος της τελευταίας ανισότητας, όταν $N \in \mathbb{R}$ και $N > 0$, είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του N, έχει όριο το ∞ για $N \to 0^+$ και όριο το $-\infty$ για $N \to \infty$. Επομένως, πράγματι, όπως αναμενόταν από τη διαίσθησή μας, η συνθήκη ικανοποιείται για όλα τα θετικά ακέραια N μέχρι κάποιο μέγιστο ακέραιο N_0.

Ακολούθως, θα βρούμε το N_0. Θέτουμε $a = \Phi^{-1}(1 - 10^{-4})$, $X = \sqrt{N}$ και λύνουμε την εξίσωση

$$\frac{3000 - 15X^2}{X} = a \Leftrightarrow 3000 - 15X^2 = aX \Leftrightarrow 15X^2 + aX - 3000 = 0$$
$$\Leftrightarrow X = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4 \times 15 \times 3000}}{30} \Leftrightarrow X = 14.0187 \Leftrightarrow N = 196.52.$$

Στην τέταρτη ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε το ότι το $a = \Phi^{-1}(1 - 10^{-4}) \simeq 3.7190$ (όπως προκύπτει με χρήση πινάκων ή Η/Υ) και το ότι το $X > 0$.

Επειδή το N είναι ακέραιο, προκύπτει το πασίγνωστο εμπειρικό αποτέλεσμα ότι μπορούμε να φορτώσουμε μέχρι 196 καρπούζια ένα φορτηγάκι τριών τόνων χωρίς η πιθανότητα βλάβης να υπερβεί το 10^{-4}.

61. **(Μπιφτέκια)** Ένας μάγειρας θέλει να φτιάξει 100 μπιφτέκια. Ετοιμάζει το μείγμα, και αρχίζει να πλάθει τα μπιφτέκια, σκοπεύοντας το καθένα να έχει βάρος 200 γραμμάρια. Επειδή δεν μπορεί να υπολογίσει το βάρος του κάθε μπιφτεκιού επακριβώς, τα μπιφτέκια καταλήγουν να έχουν βάρη, σε γραμμάρια, που μοντελοποιούνται ως συνεχείς Τ.Μ. ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα $[180, 220]$.

   (α΄) Αν το μείγμα που έχει στη διάθεσή του ο μάγειρας έχει βάρος 20200 γραμμάρια, ποια είναι η πιθανότητα να μπορέσει να φτιάξει τουλάχιστον 100 μπιφτέκια;

   (β΄) Πόσο μείγμα πρέπει να έχει στη διάθεσή του ώστε η πιθανότητα να μπορέσει να φτιάξει τουλάχιστον 100 μπιφτέκια να είναι τουλάχιστον 99%;

Υποθέστε ότι *και* το τελευταίο μπιφτέκι που θα φτιάξει ο μάγειρας *πρέπει* να ακολουθεί την άνω κατανομή. Δηλαδή, ο μάγειρας δεν προχωρά στην κατασκευή ενός μπιφτεκιού που, κατά την εκτίμησή του, είναι μικρότερο του κανονικού.

Λύση: Έστω X_i, $i = 1, \ldots, 100$ τα βάρη, σε γραμμάρια, των διαδοχικών μπιφτεκιών που φτιάχνει ο μάγειρας. Επειδή τα X_i είναι ομοιόμορφες Τ.Μ., κατά τα γνωστά από τη θεωρία έχουμε

$$\mu = E(X_i) = \frac{180 + 220}{2} = 200, \quad \sigma^2 = \frac{(220 - 180)^2}{12} = \frac{400}{3}.$$

(α΄) Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα το άθροισμα των X_i να μην υπερβαίνει τα 20200 γραμμάρια, για την οποία έχουμε

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 20200\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \times 200}{\sqrt{100 \times \frac{400}{3}}} \leq \frac{20200 - 100 \times 200}{\sqrt{100 \times \frac{400}{3}}}\right)$$
$$\simeq P\left(\leq \frac{20200 - 100 \times 200}{\sqrt{100 \times \frac{400}{3}}}\right) = \Phi\left(\sqrt{3}\right) \simeq 0.9584.$$

Στην πρώτη προσεγγιστική ισότητα, χρησιμοποιήσαμε το Κ.Ο.Θ.

(β΄) Έστω πως ο μάγειρας έχει στη διάθεσή του μείγμα βάρους K. Έχουμε, ανάλογα με το προηγούμενο σκέλος,

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq \right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \times 200}{\sqrt{100 \times \frac{400}{3}}} \leq \frac{- 100 \times 200}{\sqrt{100 \times \frac{400}{3}}}\right)$$
$$\simeq P\left(\leq \frac{- 20000}{\sqrt{100 \times \frac{400}{3}}}\right) \geq 0.99 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{- 20000}{\sqrt{100 \times \frac{400}{3}}}\right) \geq 0.99 \Leftrightarrow \frac{- 20000}{\sqrt{100 \times \frac{400}{3}}} \geq \Phi^{-1}(0.99)$$
$$\Leftrightarrow K \geq 20000 + \frac{200}{\sqrt{3}}\Phi^{-1}(0.99) \Leftrightarrow K \gtrapprox 20269.$$

62. **(Τηλεφωνικό κέντρο)** Σε ένα τηλεφωνικό κέντρο, οι διάρκειες X_i των κλήσεων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και έχουν εκθετική κατανομή με μέση διάρκεια τα 40 δευτερόλεπτα.

(α΄) Ποια η πιθανότητα η συνολική διάρκεια 250 διαδοχικών κλήσεων να ξεπερνά τις δύο ώρες και πενήντα λεπτά;

(β΄) Ποια η πιθανότητα, ανάμεσα σε αυτές τις 250 κλήσεις, λιγότερες από 75 να έχουν διάρκεια μεγαλύτερη από 1 λεπτό;

Λύση:

(α΄) Έστω $X_i, i = 1, \ldots, 250$ οι διάρκειες των κλήσεων. Κατά τα γνωστά από τη θεωρία για την εκθετική κατανομή, $E(X_i) = 40$, $\text{VAR}(X_i) = 40^2 = 1600$, $\sigma = 40$. Έχουμε:

$$P\left(\sum_{i=1}^{250} X_i > 170 \times 60 = 10200\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{250} X_i - 250 \times 40}{40\sqrt{250}} > \frac{10200 - 250 \times 40}{40\sqrt{250}}\right)$$
$$\simeq P\left(Z > \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \simeq 0.3759.$$

Στην πρώτη προσεγγιστική ισότητα χρησιμοποιήσαμε το Κ.Ο.Θ.

(β΄) Κάθε μια από τις 250 κλήσεις θα έχει διάρκεια μεγαλύτερη του λεπτού με πιθανότητα, κατά τα γνωστά για την εκθετική κατανομή, ίση με $p = e^{-60/40}$, ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες. Έστω Y_i Τ.Μ. Bernoulli με $Y_i = 1$ όταν η διάρκεια της κλήσης i είναι πέραν του λεπτού, και $Y_i = 0$ όταν η διάρκεια της κλήσης είναι το πολύ μέχρι ένα λεπτό. Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$P\left(\sum_{i=1}^{250} Y_i < 75\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{250} Y_i - 250 \times p}{\sqrt{250 \times p \times (1-p)}} < \frac{75 - 250 \times p}{\sqrt{250 \times p \times (1-p)}}\right) \simeq P\left(Z < \frac{75 - 250 \times p}{\sqrt{250 \times p \times (1-p)}}\right)$$
$$= \Phi\left(\frac{75 - 250 \times p}{\sqrt{250 \times p \times (1-p)}}\right) = \Phi(2.9193) = 0.9982.$$

Στην προσεγγιστική ισότητα χρησιμοποιήσαμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

63. **(Ζυγοβίστι)** Η ετήσια βροχόπτωση στο Ζυγοβίστι Αρκαδίας είναι Τ.Μ. με την ακόλουθη πυκνότητα:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100}, & x \in [30, 130], \\ 0, & x \notin [30, 130]. \end{cases}$$

Το X μετράται σε εκατοστά.

(α΄) Κατά μέσο όρο, πόσα εκατοστά βροχής πέφτουν κάθε χρόνο στο Ζυγοβίστι; Ποια είναι η διασπορά τους;

(β΄) Έχει παρατηρηθεί ότι η ποσότητα των καρυδιών που παράγει κάθε χρόνο το Ζυγοβίστι, σε τόνους, είναι τυχαία μεταβλητή $Y = 20X + 500$. Κατά μέσο όρο, πόσους τόνους καρύδια παράγει το Ζυγοβίστι κάθε χρόνο;

(γ΄) Για να πετύχει μια δεντροφύτευση, απαιτείται για τα επόμενα 25 χρόνια, διάστημα κατά το οποίο μεγαλώνουν τα δέντρα, να πέσουν τουλάχιστον 1800 εκατοστά βροχής. Ποια είναι η πιθανότητα να επιτύχει η δεντροφύτευση; Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε δικαιολογημένες προσεγγίσεις.

Λύση:

(α΄) Ζητείται η μέση τιμή $E(X)$ και η διασπορά $\text{VAR}(X)$ της X. Παρατηρήστε ότι η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη, επομένως, κατά τα γνωστά για την ομοιόμορφη κατανομή, έχουμε

$$E(X) = \frac{30 + 130}{2} = 80, \quad \text{VAR}(X) = \frac{(130 - 30)^2}{12} = \frac{2500}{3}.$$

(β΄) Δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε την πυκνότητα ή την κατανομή της Y (αν και σε αυτή την περίπτωση ο υπολογισμός τους δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολος). Απλώς έχουμε

$$E(Y) = E(20X + 500) = 20E(X) + 500 = 20 \times 80 + 500 = 2100.$$

(γ΄) Θα χρησιμοποιήσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Έστω X_i, $i = 1, \ldots, 25$, η βροχόπτωση για κάθε ένα από τα 25 χρόνια. Η πιθανότητα να πετύχει η δενδροφύτευση ισούται με

$$P\left(\sum_{i=1}^{25} X_i \geq 1800\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{25} X_i - 25 \times 80}{\sqrt{25 \times \frac{2500}{3}}} \geq \frac{1800 - 25 \times 80}{\sqrt{25 \times \frac{2500}{3}}}\right)$$
$$\simeq P\left(Z \geq -8\sqrt{3}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{4\sqrt{3}}{5}\right) \simeq 0.9171.$$