4^{η} Ομάδα Ασκήσεων

27. (Κολοκύθες)

Έστω η Τ.Μ. Κ για το καθαρό κέρδος (κ) του μανάβη. Δίνεται $S_X = \{5,6,7,8\}$.
Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις αναφορικά με τις κολοκύθες που αγοράζει ο μανάβης:

- 5 κολοκύθες:

x	$P_X(x)=P(X=x)$	κ
5	$\frac{9-5}{10}=\frac{4}{10}$	$4\cdot5-2\cdot5=20-10=10$
6	$\frac{9-6}{10}=\frac{3}{10}$	$4\cdot5-2\cdot5=20-10=10$ (1 πελάτης δε βρίσκει)
7	$\frac{9-7}{10}=\frac{2}{10}$	$4\cdot5-2\cdot5=20-10=10$ (2 πελάτες δε βρίσκουν)
8	$\frac{9-8}{10}=\frac{1}{10}$	$4\cdot5-2\cdot5=20-10=10$ (3 πελάτες δε βρίσκουν)

$P_K(\kappa)=P(K=\kappa)$, $\kappa=10$

κ	$P_K(\kappa)$
10	$\frac{4+3+2+1}{10}=1$

Συνεπώς το αναμενόμενο κέρδος είναι: $E(K)=\kappa\cdot p_K(\kappa)=10\cdot1=10$

(όπως ήταν αναμενόμενο αφού αν αγοραστούν 5 κολοκύθες θα πωληθούν σίγουρα όλες και το κέρδος θα είναι $5\cdot4-5\cdot2=20-10=10$)

- 6 κολοκύθες:

x	$P_X(x)=P(X=x)$	κ
5	$\frac{4}{10}$	$4\cdot5-2\cdot6=20-12=8$ (1 κολοκύθα απούλητη)
6	$\frac{3}{10}$	$4\cdot6-2\cdot6=24-12=12$
7	$\frac{2}{10}$	$4\cdot6-2\cdot6=24-12=12$ (1 πελάτης δε βρίσκει)
8	$\frac{1}{10}$	$4\cdot6-2\cdot6=24-12=12$ (2 πελάτες δε βρίσκουν)

$P_K(\kappa)=P(K=\kappa)$, $\kappa=8,12$

κ	$P_K(\kappa)$
8	$\frac{4}{10}$
12	$\frac{3}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}=\frac{6}{10}$

Συνεπώς το αναμενόμενο κέρδος είναι: $E(K) = 8 \cdot \frac{4}{10} + 12 \cdot \frac{6}{10} = \frac{32}{10} + \frac{72}{10} = \frac{104}{10} = 10{,}4$

- 7 κολοκύθες:

x	$P_X(x) = P(X=x)$	κ
5	$\frac{4}{10}$	$4 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 20 - 14 = 6$ (2 κολοκύθες απούλητες)
6	$\frac{3}{10}$	$4 \cdot 6 - 2 \cdot 7 = 24 - 14 = 10$ (1 κολοκύθα απούλητη)
7	$\frac{2}{10}$	$4 \cdot 7 - 2 \cdot 7 = 28 - 14 = 14$
8	$\frac{1}{10}$	$4 \cdot 7 - 2 \cdot 7 = 28 - 14 = 14$ (1 πελάτης δε βρίσκει)

$P_K(\kappa) = P(K=\kappa)$, $\kappa = 6, 10, 14$

κ	$P_K(\kappa)$
6	$\frac{4}{10}$
10	$\frac{3}{10}$
14	$\frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$

Συνεπώς το αναμενόμενο κέρδος είναι: $E(K) = 6 \cdot \frac{4}{10} + 10 \cdot \frac{3}{10} + 14 \cdot \frac{3}{10} = \frac{24+30+42}{10} = \frac{96}{10} = 9{,}6$

- 8 κολοκύθες:

x	$P_X(x) = P(X=x)$	κ
5	$\frac{4}{10}$	$4 \cdot 5 - 2 \cdot 8 = 20 - 16 = 4$ (3 κολοκύθες απούλητες)
6	$\frac{3}{10}$	$4 \cdot 6 - 2 \cdot 8 = 24 - 16 = 8$ (2 κολοκύθες απούλητες)
7	$\frac{2}{10}$	$4 \cdot 7 - 2 \cdot 8 = 28 - 16 = 12$ (1 κολοκύθα απούλητη)
8	$\frac{1}{10}$	$4 \cdot 8 - 2 \cdot 8 = 32 - 16 = 16$

$P_K(\kappa) = P(K=\kappa)$, $\kappa = 4, 8, 12, 16$

κ	$P_K(\kappa)$
4	$\frac{4}{10}$
8	$\frac{3}{10}$
12	$\frac{2}{10}$
16	$\frac{1}{10}$

Συνεπώς το αναμενόμενο κέρδος είναι: $E(K) = 4 \cdot \frac{4}{10} + 8 \cdot \frac{3}{10} + 12 \cdot \frac{2}{10} + 16 \cdot \frac{1}{10} = \frac{16+24+24+16}{10}$
$= 8$

→ Τον μανάβη συμφέρει η επιλογή για την οποία μεγιστοποιείται το αναμενόμενο κέρδος δηλ. θα πρέπει να αγοράσει 6 κολοκύθες.

28 (Διαγωνισμός)

Κατ' αρχάς, η υψηλότερη σειρά που μπορεί να καταλάβει γυναίκα (δηλ. οι δυνατές τιμές για το X) είναι 1, 2, 3, 4, 5, 6. [Αν $X > 6$ σημαίνει ότι η πρώτη μεταξύ των γυναικών θα καταλαμβάνει μια από τις θέσεις 7, 8, 9, 10, με αποτέλεσμα 1, 2, 3, 4 γυναίκες αντίστοιχα να βρίσκονται σε υψηλότερες θέσεις → άτοπο]. Συνεπώς $S_X = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Για να βρίσκεται η πρώτη γυναίκα στη θέση x, όπου $x \in S_X$, θα πρέπει όσοι βρίσκονται υψηλότερα στην κατάταξη από εκείνη να είναι άντρες, δηλ. οι $(x-1)$ πρώτοι θα είναι άντρες και υπάρχουν 5 επιλογές για την κάλυψη της $1^{ης}$ θέσης, 4 για τη $2^{η}$, ..., κ.ο.κ. Η x-στή θέση θα καλύπτεται από μια εκ των 5 γυναικών. Τέλος, οι $(10-x)$ τελευταίες θέσεις θα καλυφθούν από τους υπόλοιπους διαγωνιζόμενους (άντρες και γυναίκες) με οποιαδήποτε δυνατή σειρά. Επομένως έχουμε:

$$P_X(X=x) = \frac{(5)_{x-1} \cdot 5 \cdot (10-x)!}{10!}$$

Παρακάτω:
Α: Άντρες , Γ: Γυναίκες
Υ: οι Υπόλοιποι

Έτσι προκύπτει:

$$P_X(1) = \frac{5 \cdot 9!}{10!} = \frac{1}{2}, \quad P_X(2) = \frac{\overset{A}{5} \cdot \overset{\Gamma}{5} \cdot \overset{Y}{8!}}{10!} = \frac{5}{18}, \quad P_X(3) = \frac{\overbrace{5 \cdot 4}^{A} \cdot \overset{\Gamma}{5} \cdot \overset{Y}{7!}}{10!} = \frac{5}{36}$$

$$P_X(4) = \frac{\overbrace{5 \cdot 4 \cdot 3}^{A} \cdot \overset{\Gamma}{5} \cdot \overset{Y}{6!}}{10!} = \frac{5}{84}, \quad P_X(5) = \frac{\overbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}^{A} \cdot \overset{\Gamma}{5} \cdot \overset{Y}{5!}}{10!} = \frac{5}{252}, \quad P_X(6) = \frac{\overbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}^{A} \cdot \overset{\Gamma}{5} \cdot \overset{Y}{4!}}{10!} = \frac{1}{252}$$

δηλ. $$P_X(x) = \begin{cases} 1/2, & x=1 \\ 5/18, & x=2 \\ 5/36, & x=3 \\ 5/84, & x=4 \\ 5/252, & x=5 \\ 1/252, & x=6 \end{cases}$$

29. (Κορώνες μείον γράμματα)

(α΄) – Έστω πως συμβολίζουμε με Κ τις κορώνες και με Γ τα γράμματα. Ο δειγματικός χώρος Ω θα αποτελείται από επαναληπτικές διατάξεις μεγέθους n των στοιχείων Κ, Γ. (για παράδειγμα η διάταξη ΚΚΓ...Κ θα είναι ένα στοιχειώδες ενδεχόμενο στον Ω με την εξής σημασία: "Την $1^η$ φορά ήρθε κορώνα, την $2^η$ κορώνα, την $3^η$ γράμματα, ..., την n-οστή ήρθε κορώνα")
Θα είναι $|\Omega| = 2^n$

– Για το σύνολο τιμών της Τ.Μ. Υ έχουμε $S_Y = \{-n, -n+2, -n+4, \dots, n-4, n-2, n\}$, όπου η τιμή $-n$ λαμβάνεται όταν σε όλες τις ρίψεις έρχονται γράμματα, η τιμή n αντιστοιχεί στην περίπτωση που όλες οι ρίψεις φέρουν κορώνα, ενώ για τις υπόλοιπες περιπτώσεις η Υ λαμβάνει μια τιμή ανάμεσα σε αυτές τις δύο όπως περιγράφονται στη S_Y.

– Αν $Y=0$, τότε οι ρίψεις θα έχουν φέρει ισάριθμες κορώνες και γράμματα. Επιπλέον μπορούμε να συμπεράνουμε πως σε αυτή την περίπτωση ο αριθμός n θα είναι άρτιος και # κορώνες = # γράμματα = $\frac{n}{2}$.

– Αν $Y \le K$ με Κ θετικό ακέραιο τότε # κορώνες − # γράμματα $\le K \Rightarrow$
$\Rightarrow$ # κορώνες $\le K +$ # γράμματα δηλ. οι ρίψεις έφεραν το <u>πολύ</u> Κ περισσότερες κορώνες από ότι γράμματα.

(β΄)

Για $n=4$ έχουμε: $|\Omega| = 2^4 = 16$ και $S_Y = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$
Έστω x το πλήθος των κορώνων σε μια διάταξη. Οι διατάξεις με x κορώνες θα είναι όσες και οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να διαλέξουμε από τις 4 θέσεις τις x για να τις "παραχωρίσουμε" στις κορώνες, δηλ. με $\binom{4}{x}$

Επομένως $P_Y(-4) = P(Y=-4) = P(\{\text{"0 κορώνες"}\}) = \frac{\binom{4}{0}}{16} = \frac{4!}{0!4!} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$

$P_Y(-2) = P(Y=-2) = P(\{\text{"1 κορώνα"}\}) = \frac{\binom{4}{1}}{16} = \frac{4!}{1!3!} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

$P_Y(0) = P(Y=0) = P(\{\text{"2 κορώνες"}\}) = \frac{\binom{4}{2}}{16} = \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

$P_Y(2) = P(Y=2) = P(\{\text{"3 κορώνες"}\}) = \frac{\binom{4}{3}}{16} = \frac{4!}{3!1!} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

$P_Y(4) = P(Y=4) = P(\{\text{"4 κορώνες"}\}) = \frac{\binom{4}{4}}{16} = \frac{4!}{0!4!} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$ ← ΚΑΤΑΝΟΜΗ (πιο κάτω)

(γ') Για $n=5$ έχουμε $|\Omega| = 2^5 = 32$ και $S_Y = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$

Θεωρώντας και πάλι το x που ορίσαμε προηγουμένως, οι διατάξεις με x κορώνες θα είναι $\binom{5}{x}$

Επομένως
- $P_Y(-5) = P(Y=-5) = P(\{\text{"0 κορώνες"}\}) = \frac{\binom{5}{0}}{32} = \frac{5!}{0!5!} \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{32}$
- $P_Y(-3) = P(Y=-3) = P(\{\text{"1 κορώνα"}\}) = \frac{\binom{5}{1}}{32} = \frac{5!}{1!4!} \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{32}$
- $P_Y(-1) = P(Y=-1) = P(\{\text{"2 κορώνες"}\}) = \frac{\binom{5}{2}}{32} = \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{1}{32} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$
- $P_Y(1) = P(Y=1) = P(\{\text{"3 κορώνες"}\}) = \frac{\binom{5}{3}}{32} = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{1}{32} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$
- $P_Y(3) = P(Y=3) = P(\{\text{"4 κορώνες"}\}) = \frac{\binom{5}{4}}{32} = \frac{5!}{4!1!} \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{32}$
- $P_Y(5) = P(Y=5) = P(\{\text{"5 κορώνες"}\}) = \frac{\binom{5}{5}}{32} = \frac{5!}{5!0!} \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{32}$

Για την κατανομή έχουμε:
- $F_Y(y) = 0, \ y < -5$
- Για $-5 \le y < -3$: $F_Y(y) = P_Y(-5) = \frac{1}{32}$
- Για $-3 \le y < -1$: $F_Y(y) = P_Y(-3) + P_Y(-5) = \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$
- Για $-1 \le y < 1$: $F_Y(y) = P_Y(-1) + P_Y(-3) + P_Y(-5) = \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$
- Για $1 \le y < 3$: $F_Y(y) = P_Y(1) + P_Y(-1) + P_Y(-3) + P_Y(-5) = \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{26}{32} = \frac{13}{16}$
- Για $3 \le y < 5$: $F_Y(y) = P_Y(3) + P_Y(1) + P_Y(-1) + P_Y(-3) + P_Y(-5) =$
  $= \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$
- Για $y \ge 5$: $F_Y(y) = P_Y(5) + P_Y(3) + P_Y(1) + P_Y(-1) + P_Y(-3) + P_Y(-5) =$
  $= \frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{32}{32} = 1$

Τελικά,

$$P_Y(y)=\begin{cases} 1/32, & y=-5 \\ 5/32, & y=-3 \\ 5/16, & y=-1 \\ 5/16, & y=1 \\ 5/32, & y=3 \\ 1/32, & y=5 \end{cases}, \qquad F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y<-5 \\ 1/32, & -5\le y<-3 \\ 3/16, & -3\le y<-1 \\ 1/2, & -1\le y<1 \\ 13/16, & 1\le y<3 \\ 31/32, & 3\le y<5 \\ 1, & y\ge 5 \end{cases}$$

(Β') συνέχεια... (υπολογισμός κατανομής)

- $F_Y(y)=0, \quad y<-4$
- Για $-4\le y<-2$: $F_Y(y)=P_Y(-4)=\frac{1}{16}$
- Για $-2\le y<0$: $F_Y(y)=P_Y(-2)+P_Y(-4)=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{4+1}{16}=\frac{5}{16}$
- Για $0\le y<2$: $F_Y(y)=P_Y(0)+P_Y(-2)+P_Y(-4)=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{6+4+1}{16}=\frac{11}{16}$
- Για $2\le y<4$: $F_Y(y)=P_Y(2)+P_Y(0)+P_Y(-2)+P_Y(-4)=$
$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{4+6+4+1}{16}=\frac{15}{16}$$

- $F_Y(y)=1, \quad y\ge 4$

Τελικά,

$$P_Y(y)=\begin{cases} 1/16, & y=-4 \\ 1/4, & y=-2 \\ 3/8, & y=0 \\ 1/4, & y=2 \\ 1/16, & y=4 \end{cases}, \qquad F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y<-4 \\ 1/16, & -4\le y<-2 \\ 5/16, & -2\le y<0 \\ 11/16, & 0\le y<2 \\ 15/16, & 2\le y<4 \\ 1, & 4\le y \end{cases}$$

30. (20 μπάλες)

(α') Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλες τις μη διατεταγμένες 3άδες αριθμών από το 1 μέχρι το 20 που μπορούν να σχηματιστούν (συνδυασμοί χωρίς επανάληψη)
Θα είναι $|\Omega| = \binom{20}{3} = \frac{20!}{17!3!} = 1140$.

(β') • Για $x<3$ είναι $F_X(x)=0$ γιατί είναι αδύνατον από τις τρεις μπάλες που θα επιλεγούν η πρώτη ή/και η δεύτερη να έχουν τη μέγιστη ένδειξη ενώ και οι υπόλοιπες τιμές (εκτός από 1, 2) δεν ανήκουν καθόλου στο S_X. Ουσιαστικά $S_X = \{3, 4, \ldots, 20\}$

• Για $a \leq x < a+1$ όπου $a \in \{3, 4, \ldots, 19\}$ θα είναι

$F_X(x) = F_X(a) = \frac{\binom{a}{3}}{1140}$ αφού για να είναι η μέγιστη ένδειξη μπάλας μικρότερη ή ίση του a θα πρέπει οι τρεις μπάλες να έχουν επιλεχθεί από τις a πρώτες.

• Για $x \geq 20$ $F_X(x) = 1$

Συνεπώς $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<3 \\ \binom{x}{3}/1140, & 3 \leq x < 20 \quad x \in \mathbb{N} \\ 1, & x \geq 20 \end{cases}$

(γ') Όπως γνωρίζουμε, $P_X(x) = F_X(x) - F_X(x^-) \overset{(β')}{=} \frac{\binom{x}{3}}{1140} - \frac{\binom{x-1}{3}}{1140}$, $x \in S_X$

(δ') Έστω το ενδεχόμενο $A = \{$"1 τουλάχιστον ένδειξη ≥ 17"$\}$. Τότε
$A' = \{$"Όλες οι ενδείξεις ≤ 16"$\}$. $|A'| = \binom{16}{3}$, δηλ. για να είναι όλες οι ενδείξεις μικρότερες του 17, θα πρέπει οι 3 μπάλες να επιλεχθούν μεταξύ των 16 πρώτων.

Άρα $P(A') = \frac{|A'|}{|\Omega|} = \frac{\binom{16}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{16!}{\cancel{3!}13!} \cdot \frac{\cancel{3!}17!}{20!} = \frac{14 \cdot 15 \cdot 16}{18 \cdot 19 \cdot 20} = \frac{336}{684} = \frac{56}{114} \simeq 0{,}49$

και τελικά $P(A) = 1 - P(A') = 1 - 0{,}49 = 0{,}51$