ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, 2020-2021
Σ. ΤΟΥΜΠΗΣ

1η Ομάδα Ασκήσεων

1. **(Άθροισμα Minkowski)** Εκτός από την ένωση και την τομή, μπορούμε να ορίσουμε και το *άθροισμα* δύο συνόλων. Συγκεκριμένα, ορίζουμε το άθροισμα Minkowski $A + B$ δύο συνόλων A, B, ως το νέο σύνολο που αποτελείται από όλους τους αριθμούς z που μπορούν να γραφούν ως το άθροισμα $a + b$ ενός αριθμού a που ανήκει στο A και ενός αριθμού b που ανήκει στο B. Πιο συνοπτικά:

$$A + B \triangleq \{z \in \mathbb{R} : z = a + b,\ a \in A,\ b \in B\}.$$

Με δεδομένο τον άνω ορισμό, προσδιορίστε τα ακόλουθα αθροίσματα Minkowski:

$$[0, 1] + [2, 3], \quad \mathbb{Z} + (0, 1), \quad \mathbb{Z} + [0, 1], \quad \mathbb{Q} + \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q} + (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}).$$

Λύση:

(α΄) Οποιοσδήποτε αριθμός z εντός του $[2, 4]$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ενός αριθμού εντός του $[0, 1]$ και ενός αριθμού εντός του $[2, 3]$. Πράγματι, αν $z \in [2, 3]$, τότε $z = (z - 2) + 2$, όπου $(z - 2) \in [0, 1]$ και $2 \in [2, 3]$. Αν πάλι $z \in (3, 4]$, τότε $z = 1 + (z - 1)$, όπου $1 \in [0, 1]$ και $(z - 1) \in [2, 3]$. Επομένως, αποδείξαμε πως $[2, 4] \subseteq ([0, 1] + [2, 3])$.
Επιπλέον, αν $0 \leq a \leq 1$ και $2 \leq b \leq 3$, τότε $2 \leq a + b \leq 4$, επομένως $([0, 1] + [2, 3]) \subseteq [2, 4]$.
Με συνδυασμό των άνω αποτελεσμάτων, προκύπτει τελικά πως $[0, 1] + [2, 3] = [2, 4]$.

(β΄) Ένας οποιοσδήποτε μη ακέραιος x μπορεί να γραφτεί ως $x = k + y$, όπου k είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος από τον x, και $y \in (0, 1)$. Αντίθετα, ένας ακέραιος x δεν μπορεί να γραφτεί ως $x = k + y$ με k ακέραιο και $y \in (0, 1)$, διότι σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε ότι ο ακέραιος $x - k$ ανήκει στο $(0, 1)$, που είναι άτοπο. Άρα, τελικά $\mathbb{Z} + (0, 1) = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

(γ΄) Ένας οποιοδήποτε αριθμός z μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ενός ακεραίου και ενός αριθμού που ανήκει στο $[0, 1]$. Πράγματι, αν το $z \in \mathbb{Z}$, τότε μπορεί να γραφτεί ως $z = z + 0$, με $z \in \mathbb{Z}$ και $0 \in [0, 1]$. Αν όμως $z \notin \mathbb{Z}$, τότε μπορεί να γραφτεί ως $z = k + y$ με k τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος του z και $y \in (0, 1) \subseteq [0, 1]$. Άρα τελικά $\mathbb{Z} + [0, 1] = \mathbb{R}$.

(δ΄) Το άθροισμα δύο ρητών r_1 και r_2 είναι πάντα ρητός, επομένως θα πρέπει $\mathbb{Q} + \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$. Από την άλλη, οποιοδήποτε ρητός μπορεί να γραφτεί ως $r + 0$, με $r \in \mathbb{Q}$ και $0 \in \mathbb{Q}$, επομένως τελικά $\mathbb{Q} + \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$.

(ε΄) Αν προσθέσουμε ένα ρητό x και έναν άρρητο y, το άθροισμα $z = x + y$ θα είναι σίγουρα άρρητο, διότι διαφορετικά ο άρρητος y μπορεί να γραφεί ως διαφορά $y = z - x$ δύο ρητών, που είναι άτοπο. Άρα $\mathbb{Q} + (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subseteq (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
Από την άλλη, οποιοσδήποτε άρρητος x μπορεί να γραφτεί ως $x = x + 0$, όπου το x είναι άρρητος και το 0 ρητός, επομένως $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q} + (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
Συνδυάζοντας τα άνω αποτελέσματα, $\mathbb{Q} + (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

2. **(Επιμεριστική ιδιότητα)** Να αποδείξετε ότι η ένωση επιμερίζει την τομή και η τομή επιμερίζει την ένωση: για κάθε $A,\ B,\ C \subseteq \mathbb{R}$,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ότι δύο σύνολα A, B είναι ίσα αν και μόνο αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

Λύση: Σχετικά με την πρώτη ισότητα, έστω $x \in A \cup (B \cap C)$. Τότε, είτε $x \in A$, είτε $x \in B \cap C$. Στην πρώτη περίπτωση, το x ανήκει και στο $A \cup B$ και στο $A \cup C$, άρα τελικά θα ανήκει και στην τομή τους, $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Στην δεύτερη περίπτωση, το x θα ανήκει και στο B, άρα και στο $A \cup B$, και στο C, άρα και στο $A \cup C$. Άρα, πάλι θα ανήκει και στην τομή $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Επομένως, αποδείξαμε πως $x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, δηλαδή

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Έστω, τώρα, ένα $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Υπάρχουν δύο ενδεχόμενα. Το πρώτο είναι $x \in A$, στην οποία περίπτωση το x θα ανήκει και στο $A \cup (B \cap C)$. Στη δεύτερη περίπτωση, $x \notin A$, οπότε θα πρέπει $x \in B$ και $x \in C$, διότι σε διαφορετική περίπτωση είτε $x \notin A \cup B$ είτε $x \notin A \cup C$, και έχουμε άτοπο, αφού δεν θα ανήκει στην τομή τους. Άρα, θα πρέπει και $x \in B \cap C$, και τελικά, και πάλι, $x \in A \cup (B \cap C)$. Επομένως, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$, δηλαδή

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C).$$

Με συνδυασμό των δύο άνω αποτελεσμάτων, προκύπτει, τελικά, η ζητούμενη ισότητα.

Σχετικά με τη δεύτερη ισότητα, έστω πρώτα κάποιο $x \in A \cap (B \cup C)$. Άρα σίγουρα $x \in A$, και είτε $x \in B$, είτε $x \in C$, οπότε θα έχουμε είτε $x \in A \cap B$ είτε $x \in A \cap C$, άρα σίγουρα το x θα ανήκει στην ένωση $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Επομένως, αποδείξαμε πως $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ και επομένως

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Έστω, τώρα, ένα $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Θα πρέπει $x \in A$, ειδάλλως το $x \notin (A \cap B)$, και $x \notin (A \cap C)$, άρα και $x \notin (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Επιπλέον, θα πρέπει και $x \in B \cup C$, διότι αλλιώς το x δεν ανήκει ούτε στο B, άρα ούτε και στο $A \cap B$, ούτε και στο C, άρα και στο $A \cap C$, άρα έχουμε άτοπο, γιατί δεν θα ανήκει και στην ένωσή τους. Άρα τελικά το x ανήκει στην τομή των A και $(B \cup C)$ και αποδείξαμε πως $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$, άρα

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C).$$

Με συνδυασμό των δύο άνω αποτελεσμάτων, προκύπτει, τελικά, και η δεύτερη ζητούμενη ισότητα.

3. **(Πρόσθεση αρχείων)** Δίνονται δύο σκληροί δίσκοι, έστω A και B, με χωρητικότητα 1 TB ο καθένας, εντελώς γεμάτοι με δεδομένα που δεν μπορούν να συμπιεστούν. Σας δίνεται και ένας τρίτος δίσκος, έστω C, κενός, της ίδιας χωρητικότητας. Πώς μπορείτε να τον χρησιμοποιήσετε ώστε να μην χάσετε καθόλου δεδομένα των A, B, σε περίπτωση που χαθεί ένας (οποιοσδήποτε) από τους τρεις; Χρησιμοποιήστε πρόσθεση modulo 2 μεταξύ αντίστοιχων bits των δίσκων A και B.

Λύση: Πρέπει να θέσουμε το n-οστό bit του δίσκου C ίσο με το άθροισμα modulo 2 των n-οστών bits των δίσκων A και B. Παρατηρήστε πως ισχύει το εξής:

A	B	$C = A \oplus B$	$A \oplus C$	$B \oplus C$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1

Επομένως:

(α´) Αν χαθούν τα περιεχόμενα του δίσκου A, τα ανακτούμε προσθέτοντας τα αντίστοιχα bits των δίσκων B, C (δείτε την πέμπτη στήλη του άνω πίνακα, και παρατηρήστε ότι είναι ίδια με την πρώτη).

(β´) Αν χαθούν τα περιεχόμενα του δίσκου B, τα ανακτούμε προσθέτοντας τα αντίστοιχα bits των δίσκων B, C (δείτε την τέταρτη στήλη του άνω πίνακα και παρατηρήστε ότι είναι ίδια με τη δεύτερη).

(γ´) Αν χαθούν τα περιεχόμενα του δίσκου C, τότε συνεχίζουμε να διαθέτουμε τα πλήρη δεδομένα των δίσκων A, B.

4. **(Ιδιότητες πεδίου)** Αποδείξτε ότι ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες για κάθε $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Εννοείται ότι αν για κάποιο αριθμό εμφανίζεται ο αντίστροφός του, ο αριθμός αυτός είναι διάφορος του 0. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μόνο τα Αξιώματα Πεδίου και ιδιότητες που εμφανίζονται στο βιβλίο. Σε κάθε ισότητα ή ισοδυναμία που γράφετε, αναφέρετε το αξίωμα ή την ιδιότητα που χρησιμοποιείτε.

(α´) Αν $xy = 0$, τότε είτε το $x = 0$, είτε το $y = 0$, είτε $x = y = 0$.

(β´) $x(y - z) = xy - xy$.

(γ´) $(x + y)/z = x/z + y/z$.

(δ´) $(x/y)/(z/w) = (xw)/(yz)$.

Λύση:

(α´) Έστω πως έχουμε $x \neq 0$ και $y \neq 0$. Τότε, φτάνουμε εύκολα σε άτοπο, ως εξής:

$$xy = 0 \Rightarrow x^{-1}(xy) = x^{-1}0 \Rightarrow \left(x^{-1}x\right) y = 0 \Rightarrow 1 \cdot y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Παρατηρήστε ότι ξέρουμε ότι το x^{-1} υπάρχει, αφού έχουμε υποθέσει ότι $x \neq 0$.

(β΄) Έχουμε
$$x(y-z) = x(y+(-z)) = xy + x(-z) = xy + (-xz) = xy - xz.$$
(γ΄) Έχουμε
$$(x+y)/z = (x+y)z^{-1} = xz^{-1} + yz^{-1} = x/z + y/z.$$
(δ΄)
$$(x/y)/(z/w) = (xy^{-1})(zw^{-1})^{-1} = xy^{-1}z^{-1}(w^{-1})^{-1} = xw(yz)^{-1} = (xw)/(yz).$$

Σε όλες τις περιπτώσεις, βεβαιωθείτε ότι καταλαβαίνετε πώς προκύπτει κάθε ένα από τα βήματα που εκτελούμε.

5. **(Εύρεση supremum και infimum)** Προσδιορίστε τα supremum, infimum, maximum και minimum των ακόλουθων συνόλων:
$$[0,1), \quad (0,1], \quad \mathbb{Q}, \quad \left\{1-\frac{1}{2},\, 1-\frac{1}{3},\, 1-\frac{1}{4}, \dots\right\}, \quad A = \{x : (x-\sqrt{2})(x-3) \le 0\}, \quad A \cap \mathbb{Q}.$$

Λύση:

(α΄) Προφανώς $\inf[0,1) = \min[0,1) = 0$ και $\sup[0,1) = 1$. Όμως, δεν υπάρχει το $\max[0,1)$ διότι το 1 δεν ανήκει στο $[0,1)$.

(β΄) Ανάλογα, $\sup(0,1] = \max(0,1] = 1$ και $\inf(0,1] = 0$. όμως δεν υπάρχει το $\min(0,1]$ διότι το 0 δεν ανήκει στο σύνολο.

(γ΄) Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ούτε άνω, ούτε κάτω φραγμένο, άρα δεν έχει supremum, infimum, maximum ή minimum.

(δ΄) Παρατηρήστε ότι το ελάχιστο στοιχείο αυτού του συνόλου είναι το πρώτο, επομένως έχουμε
$$\inf\left\{1-\frac{1}{2},\, 1-\frac{1}{3},\, 1-\frac{1}{4}, \dots\right\} = \min\left\{1-\frac{1}{2},\, 1-\frac{1}{3},\, 1-\frac{1}{4}, \dots\right\} = \frac{1}{2}.$$
Από την άλλη, υπάρχουν στοιχεία του συνόλου αυθαίρετα κοντά στο 1, χωρίς όμως το 1 να ανήκει στο σύνολο. Άρα το σύνολο δεν έχει maximum, αλλά
$$\sup\left\{1-\frac{1}{2},\, 1-\frac{1}{3},\, 1-\frac{1}{4}, \dots\right\} = 1.$$

(ε΄) Κατά τα γνωστά μας για τα τριώνυμα, το σύνολο μπορεί να γραφεί και ως $[\sqrt{2}, 3]$. Επομένως,
$$\inf A = \min A = \sqrt{2}, \qquad \sup A = \max A = 3.$$

(ϛ΄) Αυτό που αλλάζει σε αυτή την περίπτωση είναι ότι το $\sqrt{2}$ δεν ανήκει στο σύνολο. Επομένως, έχουμε μεν
$$\inf A \cap \mathbb{Q} = \sqrt{2}, \qquad \sup A \cap \mathbb{Q} = \max A \cap \mathbb{Q} = 3,$$
αλλά δεν υπάρχει το $\min A \cap \mathbb{Q}$.

6. **(Supremum αθροίσματος Minkowski)** Έστω δύο μη κενά και φραγμένα άνω σύνολα A και B με suprema $\sup A$ και $\sup B$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το άθροισμα Minkowski $A+B$ έχει επίσης supremum, τον αριθμό $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Λύση: Καταρχάς, θα δείξουμε ότι το $\sup(A+B)$ υπάρχει. Αφού το A δεν είναι κενό, θα περιέχει ένα a_1. Ομοίως, το B θα περιέχει ένα b_1. Επομένως, το $A+B$ θα περιέχει το a_1+b_1, άρα δεν είναι κενό. Επίσης, αφού τα A, B είναι φραγμένα, θα υπάρχουν U_1, U_2 τέτοια ώστε $a \le U_1$ για κάθε $a \in A$ και $b \le U_2$ για κάθε $b \in B$. Έστω οποιοδήποτε $x \in A+B$. Τότε θα υπάρχουν a, b τέτοια ώστε $x = a+b$, με $a \in A$, $b \in B$, άρα τελικά $x = a+b \le U_1 + U_2$. Επομένως, το $A+B$ έχει άνω φράγμα, το U_1+U_2. Από το Αξίωμα της Πληρότητας, το $A+B$ θα έχει supremum.

Έχοντας εξασφαλίσει την ύπαρξη του $\sup(A+B)$, θα δείξουμε ότι $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$. Παρατηρήστε πως για κάθε $x \in A+B$, έχουμε $x = a+b \le \sup A + \sup B$, αφού τα $\sup A$, $\sup B$ είναι άνω φράγματα των A, B. Άρα, το $\sup A + \sup B$ είναι άνω φράγμα του $A+B$. Είναι, όμως, και το ελάχιστο άνω φράγμα. Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$. Τότε και $\epsilon/2 > 0$, και κατά τα γνωστά για το supremum, θα υπάρχουν $a_1 \in A$ και $b_1 \in B$ τέτοια ώστε
$$a_1 > \sup A - \epsilon/2, \quad b_1 > \sup B - \epsilon/2,$$
επομένως και
$$a_1 + b_1 > \sup A + \sup B - \epsilon.$$
Επομένως, βρήκαμε ένα $x = a_1 + b_1 \in A+B$ που να είναι μεγαλύτερο του $\sup A + \sup B - \epsilon$, επομένως το $\sup A + \sup B$ δεν είναι απλώς άνω φράγμα, αλλά και το ελάχιστο άνω φράγμα, αφού αν το μικρύνουμε για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ παύει να είναι άνω φράγμα, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

7. **(Αυθαίρετα κοντινά σύνολα)** Έστω δύο μη κενά σύνολα A και B τέτοια ώστε για κάθε $x \in A$ και $y \in B$ έχουμε $x \leq y$, και επιπλέον για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $x \in A$, $y \in B$, τέτοια ώστε $y - x < \epsilon$. Να δείξετε ότι υπάρχουν τα $\sup A$, $\inf B$ και μάλιστα είναι ίσα.

   Λύση: Καταρχάς, το A είναι μη κενό και φραγμένο άνω, από οποιοδήποτε $y \in B$ (που επίσης είναι μη κενό). Άρα, έχει supremum, από το Αξίωμα της Πληρότητας. Ομοίως, το B έχει infimum.

   Σχετικά με την ισότητα των $\sup A$, $\inf B$, θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Συγκεκριμένα, θα υποθέσουμε πρώτα πως $\sup A > \inf B$, και θα φτάσουμε σε άτοπο, και μετά θα υποθέσουμε ότι $\sup A < \inf B$, και θα φτάσουμε και πάλι σε άτοπο, οπότε το μόνο ενδεχόμενο είναι η ισότητα.

   Έστω, λοιπόν, πως $\sup A > \inf B$. Έστω $\epsilon > 0$ η θετική ποσότητα $\epsilon = \sup A - \inf B$. Έστω το $\epsilon/2$. Γνωρίζουμε ότι, αφού το $\sup A$ είναι supremum του A, θα υπάρχει κάποιο x τέτοιο ώστε

   $$\sup A - \epsilon/2 < x \Rightarrow \sup A - \frac{\sup A - \inf B}{2} < x \Rightarrow \frac{\sup A + \inf B}{2} < x.$$

   Ανάλογα, επειδή το $\inf B$ είναι infimum του B, θα υπάρχει κάποιο y τέτοιο ώστε

   $$y < \inf B + \epsilon/2 \Rightarrow y < \inf B + \frac{\sup A - \inf B}{2} \Rightarrow y < \frac{\sup A + \inf B}{2}.$$

   Επομένως, $y < x$ που είναι άτοπο, διότι εξ υποθέσεως για κάθε ζεύγος x, y, άρα και για το συγκεκριμένο, θα πρέπει να έχουμε $y \geq x$.

   Έστω τώρα πως $\sup A < \inf B$. Έστω $\epsilon > 0$ η θετική ποσότητα $\epsilon = \inf B - \sup A$. Έστω οποιοδήποτε $x \in A$ και ένα οποιοδήποτε $y \in B$. Θα έχουμε $x \leq \sup A$ αφού το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A, και $y \geq \inf B$ διότι το $\inf B$ είναι κάτω φράγμα του B. Άρα, αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει

   $$y - x \geq \inf B - \sup A = \epsilon.$$

   Και αυτό είναι άτοπο, διότι θα έπρεπε, σύμφωνα με την υπόθεση, για το συγκεκριμένο $\epsilon > 0$ να υπάρχουν $y \in B, x \in A$ τέτοια ώστε $y - x < \epsilon$, όμως από τα άνω προκύπτει ότι για το συγκεκριμένο $\epsilon > 0$, ισχύει ότι $y - x \geq \epsilon$ για *κάθε* ζεύγος x, y.

8. **(Ιδιότητα κλειστών συνόλων)** Να δείξετε ότι όλα τα κλειστά, μη κενά, φραγμένα άνω *σύνολα* (όχι απαραιτήτως διαστήματα) έχουν μέγιστο στοιχείο.

   Λύση: Έστω σύνολο S μη κενό και φραγμένο άνω. Από το Αξίωμα της Πληρότητας θα έχει supremum $\sup S$. Θα δείξουμε ότι το $\sup S$ ανήκει στο S, επομένως, ως άνω φράγμα, είναι και μέγιστο στοιχείο. Θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Έστω, λοιπόν, πως το $\sup S$ δεν ανήκει στο S. Αφού το S είναι κλειστό, εξ ορισμού το συμπλήρωμά του S^c είναι ανοικτό. Το $\sup S$ ανήκει στο S^c, αφού δεν ανήκει στο S, και θα πρέπει, αφού το S^c είναι ανοικτό, να είναι εσωτερικό του S^c. Θα υπάρχει, λοιπόν, διάστημα (a, b) τέτοιο ώστε $\sup S \in (a, b)$ και $(a, b) \subseteq S^c$ Εδώ έχουμε το άτοπο, αφού αν πάρουμε έναν αριθμό y στο διάστημα $(a, \sup S)$, ο αριθμός y θα είναι και αυτός άνω φράγμα του S, αφού $[y, \sup S] \subseteq S^c$, και μάλιστα μικρότερος από το $\sup S$ που εξ ορισμού είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του S.

2η Ομάδα Ασκήσεων

9. **(Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση)** Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $B \subseteq A$ τότε για κάθε $x_1, x_2 \in B$, έχουμε
$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

   Λύση: Καταρχάς, παρατηρούμε ότι από τον ορισμό της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης, έχουμε
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$
   Άρα, πρέπει να αποδείξουμε την αντίστροφη συνεπαγωγή. Έστω, λοιπόν, πως $f(x_1) > f(x_2)$. Τότε αποκλείεται να έχουμε $x_1 = x_2$ διότι τότε αναγκαστικά $f(x_1) = f(x_2)$. Αποκλείεται, επίσης, $x_1 > x_2$ διότι τότε, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, θα πρέπει $f(x_1) < f(x_2)$. Το μόνο ενδεχόμενο που μένει, λοιπόν, είναι $x_1 < x_2$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

10. **(Αυθαίρετα μικρές περίοδοι)** Βρείτε μια μη σταθερή συνάρτηση $f(x)$ η οποία να έχει άπειρες, αυθαίρετα μικρές περιόδους. Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$, να υπάρχει περίοδος $p \in (0, \epsilon)$.

    Λύση: Μια επιλογή είναι η συνάρτηση Dirichlet:
$$f_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$
    Παρατηρήστε ότι για αυτή τη συνάρτηση, οποιοσδήποτε ρητός $p > 0$ είναι περίοδος. Πράγματι, έστω ένας ρητός $p > 0$. Πρώτον, επειδή το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$, αυτόματα έχουμε πως το $x + p$ ανήκει στο πεδίο ορισμού για κάθε x στο πεδίο ορισμού. Επιπλέον, αν το x είναι ρητός,
$$f_D(x + p) = 1 = f_D(x),$$
    διότι το άθροισμα δύο ρητών είναι και αυτό ρητός. Αν το x είναι άρρητος, τότε
$$f_D(x + p) = 0 = f_D(x),$$
    διότι το άθροισμα $x+p$ ενός ρητού p και ενός άρρητου x είναι άρρητος (αν ήταν ρητός, θα μπορούσαμε να γράψουμε τον άρρητο x ως διαφορά $(x + p) - p$ των ρητών $(x + p)$ και p, που είναι άτοπο). Αφού το p μπορεί να είναι οποιοσδήποτε ρητός, και υπάρχουν ρητοί αυθαίρετα κοντά στο 0 (και απο τα δεξιά), το ζητούμενο αποδείχτηκε.

11. **(Infimum αθροίσματος)** Έστω συναρτήσεις $f, g : B \to \mathbb{R}$ κάτω φραγμένες στο σύνολο B. Να δείξετε ότι
$$\inf_{x\in B}\{f + g\} \geq \inf_{x\in B}\{f\} + \inf_{x\in B}\{g\}.$$
    Μπορείτε να βρείτε μια γενική περίπτωση όπου ισχύει η ισότητα;

    Λύση: Παρατηρήστε πως
$$f(y) \geq \inf\{f(x) : x \in B\}$$
    για κάθε $y \in B$, εξ ορισμού του $\inf\{f(x) : x \in B\}$. Ανάλογα,
$$g(y) \geq \inf\{g(x) : x \in B\}$$
    για κάθε $y \in B$, και αν προσθέσουμε κατά μέλη,
$$f(y) + g(y) \geq \inf\{f(x) : x \in B\} + \inf\{g(x) : x \in B\}.$$
    Άρα, η ποσότητα στα δεξιά είναι κάτω φράγμα όλων των $f(y) + g(y)$, και επομένως θα είναι μικρότερη ή ίση του *μέγιστου* κάτω φράγματος όλων των $f(y) + g(y)$, δηλαδή του $\inf\{f(y) + g(y) : y \in B\}$, επομένως προκύπτει το ζητούμενο.

    Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Έστω πως ισχύει το ανάποδο, δηλαδή
$$\inf\{f(x) + g(x) : x \in B\} < \inf\{f(x) : x \in B\} + \inf\{g(x) : x \in B\}.$$
    Έστω μάλιστα $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε
$$\inf\{f(x) + g(x) : x \in B\} + \epsilon = \inf\{f(x) : x \in B\} + \inf\{g(x) : x \in B\}.$$

Κατά τα γνωστά για το infimum, θα υπάρχει κάποιο x_1 τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned}\inf\{f(x)+g(x):x\in B\} &\le f(x_1)+g(x_1)\\ &< \inf\{f(x)+g(x):x\in B\}+\epsilon = \inf\{f(x):x\in B\}+\inf\{g(x):x\in B\}.\end{aligned}$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί ξέρουμε πως

$$f(x_1)\ge \inf\{f(x):x\in B\},\qquad g(x_1)\ge \inf\{g(x):x\in B\},$$

και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει πως

$$f(x_1)+g(x_1)\ge \inf\{f(x):x\in B\}+\inf\{g(x):x\in B\}.$$

Σχετικά με το τελευταίο ερώτημα, η ισότητα ισχύει, εκτός των άλλων, και οποτεδήποτε οι συναρτήσεις λαμβάνουν τις ελάχιστες τιμές τους και επιπλέον τις λαμβάνουν στο ίδιο σημείο x_0. Μπορείτε να βρείτε άλλες περιπτώσεις;

12. **(Υπερβολικές τριγωνικές συναρτήσεις – ορισμός και βασικές ιδιότητες)** Το υπερβολικό ημίτονο $\sinh x$, το υπερβολικό συνημίτονο $\cosh x$, η υπερβολική εφαπτομένη $\tanh x$ και η υπερβολική συνεφαπτομένη $\coth x$, όλα με $x\in\mathbb{R}$, ορίζονται, αντιστοίχως, ως

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x},\quad \coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι οι $\sinh x,\ \tanh x,\ \coth x$ είναι περιττές συναρτήσεις, ενώ η $\cosh x$ είναι άρτια.

(β΄) Να αποδείξετε τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1,$$

$$\begin{gathered}\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y,\\ \cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y,\\ \sinh 2x=2\sinh x\cosh x,\quad \cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x,\\ \sinh 2x=\frac{2\tanh x}{1-\tanh^2 x},\quad \cosh 2x=\frac{1+\tanh^2 x}{1-\tanh^2 x},\quad \tanh 2x=\frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}.\end{gathered}$$

Παρατηρήστε ότι όλες οι άνω ιδιότητες είναι ανάλογες αντίστοιχων ιδιοτήτων τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Αυτό δεν είναι τυχαίο, καθώς οι τριγωνομετρικές και οι υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις συνδέονται στενά, αλλά για να μελετήσουμε τη σχέση τους χρειαζόμαστε γνώσεις μιγαδικής ανάλυσης.

(Δεν έχουμε ακόμα ορίσει αυστηρά την εκθετική συνάρτηση e^x. Αυτό θα γίνει σε κατοπινό κεφάλαιο. Επειδή όμως η συνάρτηση αυτή, καθώς και η αντίστροφή της, $\log x$, του φυσικού λογαρίθμου, σας είναι γνωστές από το Λύκειο, θα τις δούμε πριν τον αυστηρό ορισμό τους σε αυτήν και σε ορισμένες ακόμα ασκήσεις. Θα συμβολίζουμε, επίσης, την εκθετική συνάρτηση και ως $\exp x$.)

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε απλώς πως

$$\begin{aligned}\sinh(-x)&=\frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2}=-\frac{e^x-e^{-x}}{2}=-\sinh x,\\ \cosh(-x)&=\frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x,\\ \tanh(-x)&=\frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)}=-\frac{\sinh x}{\cosh x}=-\tanh x,\\ \coth(-x)&=\frac{1}{\tanh(-x)}=-\frac{1}{\tanh x}=-\coth x.\end{aligned}$$

(β΄) i.

$$\begin{aligned}\cosh^2 x-\sinh^2 x&=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2\\ &=\frac{1}{4}\left(e^{2x}+e^{-2x}+2-e^{2x}-e^{-2x}+2\right)=1.\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
&\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y\\
&= \frac{\left(e^x-e^{-x}\right)\left(e^y+e^{-y}\right)}{4}+\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^y-e^{-y}\right)}{4}\\
&= \frac{1}{4}\left(e^{x+y}-e^{-x+y}+e^{x-y}-e^{-x-y}+e^{x+y}+e^{-x+y}-e^{x-y}-e^{-x-y}\right)\\
&= \frac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{2}=\sinh(x+y).
\end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned}
&\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y\\
&= \frac{\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^y+e^{-y}\right)}{4}+\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)\left(e^y-e^{-y}\right)}{4}\\
&= \frac{1}{4}\left(e^{x+y}+e^{y-x}+e^{x-y}+e^{-x-y}+e^{x+y}-e^{-x+y}-e^{x-y}+e^{-x-y}\right)\\
&= \frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2}=\cosh(x+y).
\end{aligned}$$

iv. Προκύπτει εφαρμόζοντας τη δεύτερη για $y=x$.

v. Προκύπτει εφαρμόζοντας την τρίτη για $y=x$.

vi.

$$\sinh 2x=2\sinh x\cosh x=\frac{2\sinh x\cosh x}{\cosh^2 x-\sinh^2 x}=\frac{2\frac{\sinh x}{\cosh x}}{1-\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)^2}=\frac{2\tanh x}{1-\tanh^2 x}.$$

vii.

$$\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x=\frac{\cosh^2 x+\sinh^2 x}{\cosh^2 x-\sinh^2 x}=\frac{1+\tanh^2 x}{1-\tanh^2 x}.$$

viii.

$$\tanh 2x=\frac{\sinh 2x}{\cosh 2x}=\frac{\frac{2\tanh x}{1-\tanh^2 x}}{\frac{1+\tanh^2 x}{1-\tanh^2 x}}=\frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}.$$

13. **(Εξίσωση κύκλου)** Να δείξετε ότι το σύνολο των σημείων

$$\left\{[r,\theta]:\ r=2\cos\theta,\quad -\frac{\pi}{2}\leq\theta<\frac{\pi}{2}\right\}, \tag{1}$$

δηλαδή όλα τα σημεία του επιπέδου για τα οποία $-\frac{\pi}{2}\leq\theta<\frac{\pi}{2}$ και επιπλέον, με δοσμένο το θ, έχουμε $r=2\cos\theta$, είναι ένας κύκλος με ακτίνα 1 και κέντρο το σημείο $(1,0)$.

Λύση: Έστω ένα οποιοδήποτε από τα άνω σημεία. Παρατηρήστε πως $x=r\cos\theta$ και $y=r\sin\theta$, επομένως

$$r=2\cos\theta\Rightarrow r^2=2r\cos\theta\Rightarrow x^2+y^2=2x\Rightarrow(x-1)^2+y^2=1,$$

που πράγματι είναι εξίσωση του κύκλου με κέντρο το $(1,0)$ και ακτίνα 1. Επομένως, όλα αυτά τα σημεία ανήκουν στο δοσμένο κύκλο.

Αντιστρόφως, οποιοδήποτε σημείο πάνω στον κύκλο θα έχει πολικές συντεταγμένες $[r,\theta]$ που ικανοποιούν τις εξισώσεις της (1) για κάποιο ζεύγος $[r,\theta]$. Πράγματι, η αρχή των αξόνων $(x,y)=(0,0)$ αντιστοιχεί στις πολικές συντεταγμένες $\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$, ενώ για όλα τα άλλα σημεία του κύκλου, έχουμε $x>0$ άρα και $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, ενώ για την ακτίνα r έχουμε

$$(r\cos\theta-1)^2+(r\sin\theta)^2=1\Rightarrow r^2\cos^2\theta+1-2r\cos\theta+r^2\sin\theta=1\Rightarrow r^2=2r\cos\theta\Rightarrow r=2\cos\theta.$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι $r\neq 0$, αφού το σημείο δεν είναι στην αρχή των αξόνων.

3η Ομάδα Ασκήσεων

14. **(Αλλαγή μεταβλητής)** Έστω $a \neq 0$. Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό του ορίου, ότι το όριο

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

υπάρχει και είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{h \to \frac{x_0 - b}{a}} f(ah + b)$$

και είναι πεπερασμένο.

Λύση: Έστω πως υπάρχει το πρώτο όριο. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει το δεύτερο. Έστω $\epsilon > 0$. Λόγω της ύπαρξης του πρώτου ορίου, θα υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \tag{2}$$

Θέτουμε $\delta_1 = \frac{\delta}{a}$, και παρατηρούμε πως

$$0 < \left| h - \frac{x_0 - b}{a} \right| < \delta_1 \Rightarrow 0 < |ah + b - x_0| < \delta. \tag{3}$$

Δείτε ξανά την συνεπαγωγή (2). Το x μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός, άρα μπορούμε να θέσουμε $x = ah + b$, επομένως η συνεπαγωγή γίνεται

$$0 < |ah + b - x_0| < \delta \Rightarrow |f(ah + b) - L| < \epsilon, \tag{4}$$

οπότε συνδυάζοντας τις δύο συνεπαγωγές (3), (4), τελικά προκύπτει

$$0 < \left| h - \frac{x_0 - b}{a} \right| < \delta_1 \Rightarrow |f(ah + b) - L| < \epsilon,$$

και επομένως αποδείξαμε ότι υπάρχει το ζητούμενο όριο. (Παρατήρηση: η απόδειξη γενικεύεται και στην περίπτωση που έχουμε τη σύνθεση μιας συνάρτησης f με μια συνάρτηση g που *δεν* είναι γραμμική, όπως η $ax + b$ που έχουμε εδώ).

Το αντίστροφο σκέλος μπορεί να αποδειχθεί είτε με την ίδια μέθοδο, είτε χρησιμοποιώντας το προηγούμενο σκέλος! Ουσιαστικά πρέπει να εισάγουμε ακόμα μια σύνθεση της δοσμένης συνάρτησης με μια άλλη γραμμική συνάρτηση $a'x + b'$, αντίστροφη αυτής που ήδη υπάρχει, ώστε να εξουδετερωθούν οι δύο γραμμικές συναρτήσεις και να μείνουμε μόνο με τη f. Παρατηρήστε, λοιπόν, πως

$$a(a'x + b') + b = x \Rightarrow (aa' - 1)x + (ab' + b) = 0 \Rightarrow a' = \frac{1}{a}, \quad b' = -\frac{b}{a}.$$

Επομένως, εφαρμόζουμε το προηγούμενο σκέλος στην περίπτωση που το αρχικό όριο είναι το

$$\lim_{h \to \frac{x_0 - b}{a}} f(ah + b),$$

και η νέα γραμμική συνάρτηση είναι η

$$h = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}.$$

Το πρώτο σκέλος δίνει ότι

$$\lim_{x \to \frac{\frac{x_0 - b}{a} - \left(\frac{-b}{a}\right)}{\frac{1}{a}}} f\left(a \left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a} \right) + b \right) = \lim_{h \to \frac{x_0 - b}{a}} f(ah + b) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{h \to \frac{x_0 - b}{a}} f(ah + b).$$

(Τα άνω ίσως γίνουν πιο εύκολα κατανοητά αν τα επαναλάβουμε έχοντας πρώτα ορίσει την βοηθητική συνάρτηση $f'(h) = f(ah + b)$ και το βοηθητικό σημείο $x_0' = \frac{x_0 - b}{a}$.)

15. **(Όριο ⇒ φράγμα)** Έστω $\lim_{x \to x_0} f(x) = k > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ανοικτή γειτονιά (a, b) περί το x_0, δηλαδή $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < x_0 < b$, και *θετικός* $P \in \mathbb{R}_+^*$ τέτοια ώστε

$$x \in (a, b) - \{x_0\} \Rightarrow f(x) > P,$$

Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι πιο ισχυρό από το

$$x \in (a, b) - \{x_0\} \Rightarrow f(x) > 0,$$

διότι στην πρώτη περίπτωση οι τιμές του x δεν μπορούν να πλησιάσουν αυθαίρετα κοντά στο 0. Διαισθητικά, η ιδιότητα μας λέει ότι αν σε κάποιο x_0 το όριο είναι θετικό, τότε υπάρχει μια γειτονιά γύρω από το x_0 στην οποία οι τιμές της συνάρτησης κρατιούνται μακρυά από το 0.

Λύση: Θέτουμε $\epsilon = k/2$, επομένως από τον ορισμό του ορίου υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - k| < \epsilon = k/2 \Rightarrow f(x) - k > -k/2 \Rightarrow f(x) > k/2.$$

Θέτουμε $a = x_0 - \delta$, $b = x_0 + \delta$, και $P = k/2$, και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

16. **(Όριο γινομένου)** Αποδείξτε την γνωστή ιδιότητα ότι αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ και η $g(x_0)$ είναι φραγμένη σε μια ανοιχτή γειτονιά του x_0, τότε θα έχουμε και $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$.

Λύση: Αφού η $g(x)$ είναι φραγμένη σε μια ανοιχτή γειτονιά (a, b) του x_0, θα μπορούμε να βρούμε ένα M και ένα $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε $|g(x)| < M$ για κάθε x τέτοιο ώστε $|x - x_0| < \delta_1$. Έστω ένα $\epsilon > 0$. Τότε και $\frac{\epsilon}{M} > 0$. Από την ύπαρξη του ορίου $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, θα υπάρχει κάποιο $\delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε όποτε $0 < |x - x_0| < \delta_2$, να έχουμε $|f(x)| < \frac{\epsilon}{M}$. Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, και παρατηρούμε πως αν $0 < |x - x_0| < \delta$, τότε θα έχουμε και $0 < |x - x_0| < \delta_2$, οπότε $|f(x)| < \frac{\epsilon}{M}$, και $|x - x_0| < \delta_1$, οπότε $|g(x)| < M$, άρα, πολλαπλασιάζοντας,

$$|f(x)g(x)| < \frac{\epsilon}{M} M \Rightarrow |f(x)g(x) - 0| < \epsilon.$$

Άρα, για την συγκεκριμένη επιλογή $\epsilon > 0$ βρήκαμε κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα x με $0 < |x - x_0| < \delta$ να έχουμε $|f(x)g(x) - 0| < \epsilon$, άρα πράγματι $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$.

17. **(Όριο περιοδικής συνάρτησης)** Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδική με περίοδο $T > 0$. Να αποδείξετε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου στο άπειρο, ότι η f δεν μπορεί να έχει όριο το ∞ καθώς $x \to \infty$.

Λύση: Έχουμε ότι $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει κάποιο $X \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $x > X$ να έχουμε και $f(x) > M$. Αυτό δεν μπορεί να ισχύει αν η f είναι περιοδική.

Πράγματι, έστω οποιοδήποτε x_0. Θέτουμε M οποιονδήποτε αριθμό μεγαλύτερο του $f(x_0)$, για παράδειγμα $M = 2|f(x_0)| + 1$. Έστω πως υπάρχει το όριο ως άνω. Τότε θα υπάρχει κάποιο X τέτοιο ώστε $x > X$ να συνεπάγεται $f(x) > M > f(x_0)$. Όμως θα υπάρχει και N φυσικός ώστε $x = x_0 + NT > X$, και $f(x) = f(x_0 + NT) = f(x_0)$, επομένως έχουμε άτοπο.

18. **(Όρια)** Να προσδιορίσετε τα παρακάτω όρια, εφόσον υπάρχουν:

(α΄) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{|\cos x|}{2} \right)^x$.

(β΄) $\lim_{x \to \infty} |\cos x|^x$.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$0 \leq \frac{|\cos x|}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \left(\frac{|\cos x|}{2} \right)^x \leq \left(\frac{1}{2} \right)^x,$$

και επειδή $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$, από το Κριτήριο της Παρεμβολής τελικά η συνάρτηση τείνει στο 0 καθώς $x \to \infty$.

(β΄) Σε αυτή την περίπτωση, παρατηρούμε πως για όλα τα $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, με $k \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση λαμβάνει την τιμή 0, ενώ για όλα τα $x = 2k\pi$, με $k \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση λαμβάνει την τιμή 1. Επομένως, το όριο δεν υπάρχει.

19. **(Όριο ρητής συνάρτησης)** Να δείξετε, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τον ορισμό του ορίου, ότι

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{x+5}=10.$$

Λύση: Έστω $\epsilon>0$. Παρατηρούμε πως

$$\left|\frac{10x}{x+5}-10\right|<\epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{10x-10x-50}{x+5}\right|<\epsilon \Leftrightarrow \frac{50}{|x+5|}<\epsilon \Leftrightarrow \frac{|x+5|}{50}>\frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow |x+5|>\frac{50}{\epsilon}. \tag{5}$$

Θέτουμε $M=\max\{-5,\frac{50}{\epsilon}-5\}$. Παρατηρούμε πως

$$x>M \Rightarrow x>-5 \Rightarrow x+5>0 \Rightarrow |x+5|=x+5. \tag{6}$$

Επομένως,

$$x>M \Rightarrow x>\frac{50}{\epsilon}-5 \Rightarrow x+5>\frac{50}{\epsilon} \Rightarrow |x+5|>\frac{50}{\epsilon} \Rightarrow \left|\frac{10x}{x+5}-10\right|<\epsilon.$$

Η τρίτη συνεπαγωγή ισχύει λόγω της (6). Η τελευταία συνεπαγωγή ισχύει λόγω της ακολουθίας ισοδυναμιών (5). Επομένως, πράγματι ισχύει το δοσμένο όριο.

20. **(Αύξουσα συγκλίνουσα συνάρτηση)** Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ είναι αύξουσα και υπάρχει το όριο $L=\lim_{x\to\infty}f(x)$, τότε είναι φραγμένη άνω.

Λύση: Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση είναι φραγμένη άνω από το L. Πράγματι, έστω πως $f(x_0)>L$ για κάποιο x_0, και έστω πως $\epsilon=f(x_0)-L>0$. Τότε, επειδή η συνάρτηση είναι αύξουσα, θα έχουμε

$$x>x_0 \Rightarrow f(x)\geq f(x_0)=L+\epsilon. \tag{7}$$

Θα φτάσουμε σε άτοπο. Πράγματι, για το άνω $\epsilon>0$, λόγω του δοσμένου ορίου θα υπάρχει κάποιο X τέτοιο ώστε

$$x>X \Rightarrow |f(x)-L|<\epsilon \Rightarrow f(x)<L+\epsilon.$$

Αυτό, όμως, είναι άτοπο, γιατί αντιβαίνει την (7).

21. **(Όρια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

(α΄) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

(β΄) $\lim_{h\to 0^+}\sup_{\{0<x<h\}}\sin\frac{1}{x}$. Παρατηρήστε οτι η συνάρτηση $g(h)=\sup_{\{0<x<h\}}\sin\frac{1}{x}$ της οποίας το όριο θέλουμε να υπολογίσουμε λαμβάνει, στη θέση h, το supremum όλων των τιμών που λαμβάνει η συνάρτηση $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ στο διάστημα $(0,h)$.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{|\sin x|}\lim_{x\to 0}\sqrt{1+\cos x}$$

Το δεύτερο όριο ισούται με $\sqrt{2}$, καθώς η συνάρτηση είναι συνεχής. Σχετικά με το δεύτερο όριο, παρατηρούμε πως

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|\sin x|}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{|\sin x|}=1,$$

ενώ

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|\sin x|}=\lim_{x\to 0-}-\frac{x}{\sin x}=-1.$$

Επομένως, αφού τα πλευρικά όρια διαφέρουν, το όριο δεν υπάρχει, και επομένως δεν υπάρχει και το δοσμένο όριο.

Σε περίπτωση που επιχειρήσουμε να εφαρμόσουμε απευθείας τον Κανόνα του L’Hôpital, παρατηρούμε πως

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}} &= \lim_{\frac{\to}{2}\overline{\sqrt{1-\cos x}}} \sin x = \lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1-\cos x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{2\cos x\sqrt{1-\cos x}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} = 1\times \lim_{\cos x 2\overline{\sqrt{1-\cos x}}\to \sin x} = \lim_{x\to 0}\cos x \lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1-\cos x}}{\sin x},
\end{aligned}
$$

επομένως διαφορετικές εφαρμογές του Κανόνα μας επιστρέφουν στα ίδια όρια, και δεν μπορούμε να τον εφαρμόσουμε, τουλάχιστον με απλό τρόπο.

(β΄) Παρατηρούμε πως

$$\lim_{h\to 0^+}\sup_{0<x<h}\sin\frac{1}{x} = 1,$$

διότι για κάθε h υπάρχει κάποιο $x\in(0,h)$ τέτοιο ώστε $\sin\frac{1}{x}=1$, επομένως η συνάρτηση

$$g(h) = \sup_{0<x<h}\sin\frac{1}{x} = 1$$

για κάθε $h>0$.

4η Ομάδα Ασκήσεων

22. **(Η $|x|$ είναι παντού συνεχής)** Χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τον ορισμό της συνέχειας της Πρότασης 4.1, να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι παντού συνεχής.

    Λύση: Θα δείξουμε πρώτα τη συνέχεια στο $x_0 = 0$. Έστω $\epsilon > 0$. Διαλέγουμε $\delta = \epsilon > 0$. Έχουμε

    $$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x| < \epsilon \Rightarrow ||x| - |0|| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

    Έστω τώρα κάποιο $x_0 > 0$. Έστω $\epsilon > 0$. Θέτω $\delta = \min\{x_0, \epsilon\} > 0$. Τότε:

    $$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta \leq \epsilon,$$

    και άρα η $f(x) = |x|$ είναι συνεχής για $x_0 > 0$. Η απαίτηση $\delta \leq x_0$ χρειάζεται προκειμένου να εξασφαλιστεί ότι $x > 0$ όταν $|x - x_0| < \delta$. Στα άνω χρησιμοποιήσαμε το ότι $x, x_0 > 0$, άρα $x = |x| = f(x)$ και $x_0 = |x_0| = f(x_0)$.

    Τέλος, έστω $x_0 < 0$. Έστω $\epsilon > 0$. Θέτω $\delta = \min\{-x_0, \epsilon\} > 0$. Τότε:

    $$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |-x - (-x_0)| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta \leq \epsilon,$$

    και άρα η $f(x) = |x|$ είναι συνεχής και για $x_0 < 0$. Η απαίτηση $\delta \leq -x_0$ χρειάζεται προκειμένου να εξασφαλιστεί ότι $x < 0$ όταν $|x - x_0| < \delta$. Στα άνω χρησιμοποιήσαμε το ότι $x, x_0 < 0$, άρα $-x = |x| = f(x)$ και $-x_0 = |x_0| = f(x_0)$.

23. **(Υπολογισμός ορίων)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

    (α΄) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\sin x$.

    (β΄) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\sin x$.

    (γ΄) $\lim\limits_{x\to 1} \tan\frac{x^2+1}{x^3+2}$.

    Λύση:

    (α΄) Η συνάρτηση του ημιτόνου είναι συνεχής, επομένως μπορούμε να περάσουμε το όριο εντός της, δύο φορές, και, πολύ απλά, έχουμε:

    $$\lim_{x\to 0} \sin\sin x = \sin\lim_{x\to 0} \sin x = \sin\sin\lim_{x\to 0} x = \sin\sin 0 = \sin 0 = 0.$$

    (β΄) Ανάλογα, αφού και η συνάρτηση του συνημιτόνου είναι συνεχής,

    $$\lim_{x\to 0} \cos\sin x = \cos\lim_{x\to 0} \sin x = \cos\sin\lim_{x\to 0} x = \cos\sin 0 = \cos 0 = \pi/2.$$

    (γ΄) Σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να περάσουμε και πάλι το όριο εντός της εφαπτομένης, απλώς πρέπει να βεβαιωθούμε εκ των υστέρων ότι το όριο που δημιουργείται εντός της εφαπτομένης δεν ισούται με κάποια τιμή εκτός του πεδίου ορισμού της (σε όλες τις τιμές εντός του πεδίου ορισμού της, η εφαπτομένη είναι συνεχής συνάρτηση). Σε αυτή την περίπτωση, όπως προκύπτει, δεν υπάρχει τέτοιο πρόβλημα:

    $$\lim_{x\to 1} \tan\frac{x^2+1}{x^3+2} = \tan\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^3+2} = \tan\frac{1+1}{1+2} = \tan 2/3.$$

24. **(Κοινό πρόσημο σε ανοικτή γειτονιά)** Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 με $f(x_0) > 0$ (εναλλακτικά, $f(x_0) < 0$), τότε υπάρχει ένα διάστημα της μορφής $I = (a, b)$ με $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x) > 0$ (εναλλακτικά, $f(x) < 0$) παντού στο I.

    Λύση: Υποθέτουμε ότι $f(x_0) > 0$. Η απόδειξη στην περίπτωση που $f(x_0) < 0$ είναι ανάλογη και παραλείπεται.

    Έστω, λοιπόν, το $\epsilon = f(x_0) > 0$. Από τον ορισμό της συνέχειας έχουμε ότι για εκείνο το ϵ θα υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

    $$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon = f(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) > -f(x_0) \Rightarrow f(x) > 0.$$

    Επομένως, το ζητούμενο διάστημα είναι το $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

25. **(Σύνθεση συνεχούς συνάρτησης με ακολουθία)** Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής σε κάποιο x_0. Έστω ακολουθία $a_n \to x_0$ με $\{f(a_n) : n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq A$. Να δείξετε ότι υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ και μάλιστα $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(x_0)$. Να χρησιμοποιήσετε αποκλειστικά τους ορισμούς των σχετικών ορίων και της συνέχειας.

 Λύση: Θα πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$n > N \Rightarrow |f(a_n) - f(x_0)| < \delta.$$

 Έστω, λοιπόν, κάποιο $\epsilon > 0$. Λόγω της ύπαρξης της συνέχειας της f στο x_0, ξέρουμε ότι για εκείνο το $\epsilon > 0$ θα υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

 Η άνω ισοδυναμία ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα και για αυτά τα x της μορφής $x = a_n$, επομένως έχουμε ότι

$$|a_n - x_0| < \delta \Rightarrow |f(a_n) - f(x_0)| < \epsilon.$$

 Επιπλέον, για το παραπάνω δ, λόγω της ύπαρξης του ορίου $\lim_{n\to\infty} a_n$, ξέρουμε ότι θα υπάρχει κάποιο $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$n > N \Rightarrow |a_n - x_0| < \delta.$$

 Συνδυάζοντας τις άνω ισοδυναμίες, τελικά έχουμε ότι υπάρχει κάποιο $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$n > N \Rightarrow |f(a_n) - f(x_0)| < \epsilon,$$

 και επομένως η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

26. **(Συνεχής συνάρτηση με πεπερασμένο όριο στο άπειρο)** Να δείξετε ότι αν μια συνεχής συνάρτηση $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ έχει το πεπερασμένο όριο $L = \lim_{x\to\infty} f(x)$, τότε είναι φραγμένη άνω και κάτω. Πριν προχωρήσετε στη λύση, βεβαιωθείτε ότι έχετε κατανοήσει την γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος.

 Λύση: Γεωμετρικά, το αποτέλεσμα ισχύει διότι το γράφημα της συνάρτησης είναι μια συνεχής γραμμή που ξεκινά από το $(a, f(a))$ και πηγαίνει στο ∞ προς την κατεύθυνση του άξονα των x χωρίς όμως να απομακρύνεται απεριόριστα από αυτόν. Αναπόφευκτα, κάποια στιγμή θα βρεθεί στην μέγιστη απόσταση από αυτόν.

 Αναλυτικά, έστω $\epsilon = 1 > 0$. Από την ύπαρξη του δοσμένου ορίου, θα υπάρχει κάποιο $X \geq a$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x > X$, να έχουμε

$$|f(x) - L| < 1 \Leftrightarrow L - 1 < f(x) < L + 1.$$

 Εξετάζουμε το κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, X]$. Αν $X = a$, τότε το διάστημα είναι μονοσύνολο, και σε αυτό το σύνολο η συνάρτηση λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της $M = f(a)$ καθώς και την ελάχιστη τιμή της $m = f(a)$. Αν $X > a$, τότε από το Θεώρημα των Ακροτάτων προκύπτει πως και πάλι η συνάρτηση λαμβάνει κάποια μέγιστη τιμή M και κάποια ελάχιστη τιμή m.

 Παρατηρήστε ότι ο αριθμός $\max\{L + 1, M\}$ είναι άνω φράγμα της συνάρτησης σε όλο το πεδίο ορισμού $[a, \infty)$. Πράγματι, αν $x > X$, τότε $f(x) < L + 1 \leq \max\{L + 1, M\}$, ενώ αν $x \in [a, X]$ τότε $f(x) < M \leq \max\{L + 1, M\}$.

 Ανάλογα, προκύπτει πως ο αριθμός $\min\{L - 1, M\}$ είναι κάτω φράγμα της συνάρτησης σε όλο το πεδίο ορισμού $[a, \infty)$. Πράγματι, αν $x > X$, τότε $f(x) > L - 1 \geq \min\{L - 1, m\}$, ενώ αν $x \in [a, X]$ τότε $f(x) > m \geq \max\{L - 1, m\}$.

 Άρα, εν τέλει η συνάρτηση είναι και άνω και κάτω φραγμένη.

27. **(Συνεχής ρητή συνάρτηση)** Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα I και λαμβάνει μόνο ρητές τιμές στο I, τότε είναι σταθερή στο I. Πριν προχωρήσετε στη λύση, βεβαιωθείτε ότι έχετε κατανοήσει την γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος.

 Λύση: Έστω f συνεχής συνάρτηση που λαμβάνει μόνο ρητές τιμές. Θα δείξουμε ότι είναι σταθερή χρησιμοποιώντας απαγωγή σε άτοπο. Έστω, λοιπόν, πως η f δεν είναι σταθερή, και άρα θα πρέπει να λαμβάνει δύο διαφορετικές τιμές r_1 και r_2, ρητές. Από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής, θα πρέπει να λαμβάνει και όλες τις ενδιάμεσές τους. Όμως, στο διάστημα (r_1, r_2) υπάρχει σίγουρα ένας άρρητος, επομένως οδηγούμαστε σε άτοπο διότι η συνάρτηση δεν μπορεί να λάβει άρρητες τιμές.

28. **(Εύρεση ρίζας)** Να δείξετε ότι αν το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $f : [2, 4] \to \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $(2, 2)$ και $(4, 1)$, τότε υπάρχει κάποιο x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{x_0}{2}$.

 Λύση: Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{x}{2}$. Παρατηρήστε πως $g(2) = f(2) - 1 = 1$ και $g(4) = f(4) - 2 = -1$, επομένως υπάρχει x_0 στο διάστημα $[2, 4]$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \frac{x_0}{2}$.

29. **(Αντίστροφη υπερβολικού συνημιτόνου)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση του υπερβολικού συνημίτονου

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

είναι $1-1$ στο υποσύνολο $[0, \infty)$ του πεδίου ορισμού της $\mathbb{R}$ και έχει πεδίο τιμών το $[1, \infty)$. Επίσης, να δείξετε ότι η αντίστροφή της στο υποσύνολο $[0, \infty)$ του πεδίου ορισμού της $\mathbb{R}$ είναι η

$$\operatorname{arccosh} y = \log\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right), \qquad y \in [1, \infty), \tag{8}$$

όπου $\log x$ είναι ο φυσικός λογάριθμος του x. Κατόπιν, σχεδιάστε και τις δύο συναρτήσεις.

Λύση: Παρατηρήστε πως

$$\cosh x = y \Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow e^{2x} + 1 - 2ye^x = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι η $4y^2 - 4$. Επομένως, για $y \in (-1, 1)$, δεν υπάρχει x τέτοιο ώστε $\cosh x = y$. Έστω λοιπόν $y \in \mathbb{R} - (-1, 1)$. Έχουμε

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} \Leftrightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

Επιπλέον, αν $y \leq -1$, τότε και οι δύο άνω ρίζες είναι αρνητικές, και δεν μπορούν να ισούνται με e^x. Άρα, ούτε για $y \leq -1$ υπάρχει x τέτοιο ώστε $\cosh x = y$. Παρατηρήστε, τέλος, ότι αν $y > 1$ τότε $y - 1 > 0$ και μπορούμε να γράψουμε

$$\sqrt{y-1}\sqrt{y-1} < \sqrt{y-1}\sqrt{y+1} \Rightarrow y - 1 < \sqrt{y^2 - 1} \Rightarrow y - \sqrt{y^2 - 1} < 1,$$

επομένως, αφού $x > 0 \Rightarrow e^x > 1$, η μια ρίζα του τριωνύμου πρέπει να αποκλειστεί. Έχουμε, λοιπόν,

$$\cosh x = y \Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 - 1} \Leftrightarrow x = \log\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right).$$

Επομένως, προκύπτει ότι για κάθε $y \in (1, \infty)$, και μόνο για αυτά τα y, υπάρχει μόνο ένα $x > 0$ για το οποίο $e^x = y$. Επιπλέον, για $x = 0$ έχουμε $y = 1$. Επομένως πράγματι η $\cosh x$ με πεδίο ορισμού το $[0, \infty)$ λαμβάνει όλες τις τιμές στο $[1, \infty)$ και είναι $1 - 1$ σε αυτό. Η άνω διαδικασία μας δείχνει ότι η αντίστροφή είναι η δοσμένη. Οι δύο συναρτήσεις έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 1.

30. **(Υλοποίηση Μεθόδου Διχοτόμησης)** Να υλοποιήσετε τη Μέθοδο της Διχοτόμησης σε μια γλώσσα προγραμματισμού της επιλογής σας. Το πρόγραμμα που θα υλοποιήσετε θα πρέπει να δέχεται ως εισόδους:

    (α´) Ένα αρχικό διάστημα στο οποίο είναι γνωστό ότι υπάρχει μια ρίζα.

    (β´) Το μέγιστο επιτρεπτό σφάλμα στη θέση της ρίζας.

    (γ´) Την μέγιστη επιτρεπτή απόλυτη τιμή της συνάρτησης στο σημείο που επιστρέφεται ως εκτίμηση της ρίζας.

    Η συνάρτηση $f(x)$ της οποίας αναζητείται η ρίζα μπορεί να δίνεται είτε σαν όρισμα (προτιμότερο), είτε να υλοποιείται εντός του προγράμματος (αν δεν ξέρετε πως να την περάσετε στην συνάρτηση ως όρισμα).

    Το πρόγραμμα πρέπει να παρέχει ως έξοδο την εκτίμηση για τη ρίζα, καθώς και να εκτυπώνει ενδιάμεσα αποτελέσματα, σε επτά στήλες, με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών στοιχείων, όπως και στο Παράδειγμα 4.9, ως εξής:

    (α´) Η πρώτη στήλη να δείχνει την επανάληψη n.

    (β´) Η δεύτερη στήλη να δείχνει το αριστερό άκρο a του τρέχοντος διαστήματος στην αρχή της επανάληψης.

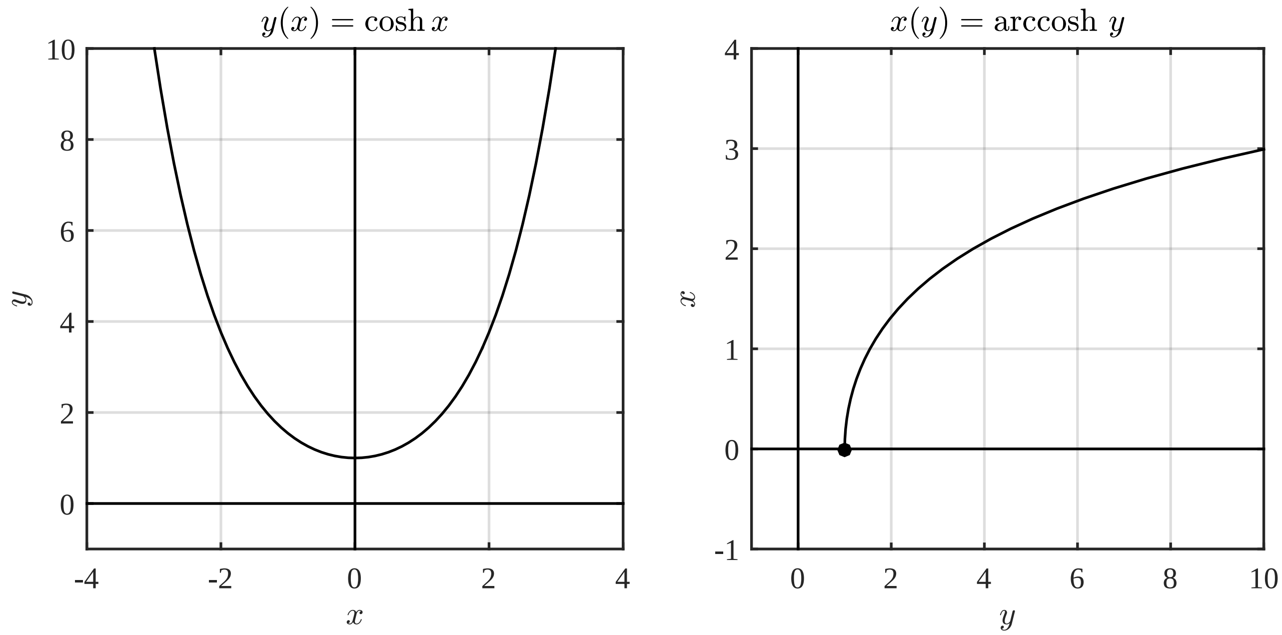
    (γ´) Η τρίτη στήλη να δείχνει το δεξί άκρο b του τρέχοντος διαστήματος στην αρχή της επανάληψης.

    (δ´) Η τέταρτη στήλη να δείχνει το μέσο m του τρέχοντος διαστήματος στην αρχή της επανάληψης.

    (ε´) Η πέμπτη στήλη να δείχνει την τιμή $f(a)$.

    (ς´) Η έκτη στήλη να δείχνει την τιμή $f(b)$.

    (ζ´) Η έβδομη στήλη να δείχνει την τιμή $f(m)$.



Σχήμα 1: Η συνάρτηση του υπερβολικού συνημιτόνου και η αντίστροφή της στο διάστημα $[0, \infty)$.

31. **(Αριθμητικός υπολογισμός ρίζας της συνάρτησης** $f(x) = 2\cos x - x$**)** Χρησιμοποιήστε το πρόγραμμα που αναπτύξατε στην προηγούμενη άσκηση, με τέτοιες παραμέτρους εισόδου ώστε να εκτελούνται τουλάχιστον 10 επαναλήψεις και με αρχικό διάστημα το $[1, 3]$, προκειμένου να προσδιορίσετε την θετική ρίζα της εξίσωσης $2\cos x = x$. (Πόσες ρίζες έχει η συνάρτηση;)

   Λύση: Παίρνοντας παραγώγους, είναι εύκολο να δούμε πως η ρίζα είναι μοναδική. Καθώς θέλουμε ακρίβεια μικρότερη του 0.1, και στο τέλος της επανάληψης n έχουμε μήκος διαστήματος (και άρα ακρίβεια) ίσο με $4/2^n$, προκύπτει πως χρειαζόμαστε $n = 6$ επαναλήψεις, για να επιτύχουμε ακρίβεια $4/2^6 = 0.0625$. Στον ακόλουθο πίνακα δείχνουμε το διάστημα μετά το τέλος της n επανάληψης, για $n = 0, \ldots, 10$.

Επανάληψη	Διάστημα
0	[0 4]
1	[0 2]
2	[1 2]
3	[1 1.5]
4	[1 1.25]
5	[1 1.125]
6	[1 1.0625]
7	[1 1.0313]
8	[1.0156 1.0313]
9	[1.0234 1.0313]
10	[1.0273 1.0313]

32. **(Συνέχεια Lipschitz συνημιτόνου)** Δείξτε ότι η $f(x) = A\cos(ax + b)$ όπου $A, a, b \in \mathbb{R}$, είναι Lipschitz συνεχής στο $\mathbb{R}$.

   Λύση: Έστω δύο οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |A\cos(ax_1 + b) - A\cos(ax_2 + b)| \\ &= A|\cos(ax_1 + b) - \cos(ax_2 + b)| \\ &= 2A\left|\sin\left(\frac{a(x_1 + x_2) + 2b}{2}\right)\sin\left(\frac{a(x_1 - x_2)}{2}\right)\right| \\ &\leq 2A\left|\sin\left(\frac{a(x_1 - x_2)}{2}\right)\right| \leq \frac{2Aa}{2}|x_1 - x_2| = Aa|x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

Η πρώτη ισότητα προέκυψε με χρήση της τριγωνομετρικής ισότητας

$$\cos x - \cos y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{y-x}{2}\right).$$

Η πρώτη ανισότητα προέκυψε από το ότι $|\sin x| \leq 1$, ενώ η δεύτερη από το ότι $|\sin x| \leq |x|$. Επομένως, η συνάρτηση $f(x)$ είναι πράγματι Lipschitz συνεχής, με $C = Aa$. Παρατηρήστε ότι η ποσότητα αυτή ισούται με τη μέγιστη τιμή που λαμβάνει η απόλυτη τιμή της παραγώγου της δοσμένης συνάρτησης.

5η Ομάδα Ασκήσεων

33. **(Εφαπτόμενη και συνεφαπτόμενη)** Να δείξετε ότι

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

με χρήση του ορισμού της παραγώγου και γνωστών τριγωνομετρικών ορίων.

Λύση: Σχετικά με την εφαπτόμενη, παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned}
(\tan x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\frac{\sin x}{\cos x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)\cos x-\sin x\cos(x+h)}{h\cos(x+h)\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+h-x)}{h\cos(x+h)\cos x} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(x+h)\cos x} = 1\times\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.
\end{aligned}$$

Στην τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y.$$

Η απόδειξη για την συνεφαπτομένη προκύπτει ανάλογα.

34. **(Παράγωγος)** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Να υπολογίσετε την παράγωγό της στη θέση $x = 0$.

Λύση: Έχουμε

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 e^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x\to 0} x e^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} = 0.$$

Το όριο προκύπτει επειδή η συνάρτηση στην οποία καταλήγουμε είναι το γινόμενο μιας φραγμένης συνάρτησης (της $e^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$), με μια που τείνει στο 0 (της x).

35. **(Παράγωγος της $\operatorname{arccot}(y)$)** Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης της αντίστροφης συνεφαπτομένης, που ορίζεται στο Παράδειγμα 4.7 (Σχήμα 4.8) είναι η

$$(\operatorname{arccot} y)' = -\frac{1}{1+y^2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Λύση: Από γνωστή άσκηση έχουμε

$$\cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Επομένως,

$$(\operatorname{arccot} y)' = \frac{1}{(\cot x)'} = -\sin^2 x = -\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x} = -\frac{1}{1+\cot^2 x} = -\frac{1}{1+y^2}.$$

36. **(Ανισότητα παραγώγων)** Έστω συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε $f(a) = g(a)$ και $f'(x) \geq g'(x)$ παντού σε ένα διάστημα $I = [a, b]$, $I = [a, b)$, ή $I = [a, \infty)$. Να δείξετε ότι $f(x) \geq g(x)$ παντού στο I.

Λύση: Ορίζουμε τη συνάρτηση $h : I \to \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) - g(x)$. Παρατηρήστε πως $h'(x) = f'(x) - g'(x) \geq 0$ παντού στο I, επομένως η h είναι αύξουσα στο I, επομένως, για κάθε $x \in I$, έχουμε

$$h(x) \geq h(a) \Rightarrow f(x) - g(x) \geq f(a) - g(a) \Rightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq g(x),$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

37. **(Υπολογισμοί αόριστων ολοκληρωμάτων)** Υπολογίστε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα. Σε όλες τις περιπτώσεις, επιβεβαιώστε ότι βρήκατε το σωστό αποτέλεσμα, παραγωγίζοντάς το.

(α΄) $\int x^2 \sin x \, dx$.

(β΄) $\int x^2 \cos x \, dx$.

(γ΄) $\int \arcsin x \, dx$.

(δ΄) $\int \arccos x \, dx$.

(ε΄) $\int \sin^2 x \, dx$.

(ϛ΄) $\int \cos^2 x \, dx$.

(ζ΄) $\int \tan^2 x \, dx$.

(η΄) $\int \sqrt{1+\sqrt{x}} \, dx$.

Λύση:

(α΄) Αρχικά παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, dx &= \int x (\sin x)' \, dx = x \sin x - \int x' (\sin x) \, dx \\ &= x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε πως:

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x \, dx &= \int x^2 (-\cos x)' \, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C. \end{aligned}$$

Πράγματι,

$$(-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C)' = -2x \cos x + x^2 \sin x + 2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x = x^2 \sin x.$$

(β΄) Εχουμε

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= \int x (-\cos x)' \, dx = -x \cos x - \int x' (-\cos x)' \, dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

και ακολούθως

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x \, dx &= \int x^2 (\sin x)' \, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C. \end{aligned}$$

Πράγματι,

$$(x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C)' = 2x \sin x + x^2 \cos x + 2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x = x^2 \cos x.$$

(γ΄) Παρατηρούμε πως

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} \int \arcsin x \, dx = \int (x)' \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ = x \arcsin x - \int \left(-\sqrt{1-x^2}\right)' \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Πράγματι,

$$\left(x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C\right)'=\arcsin x+x(\arcsin x)'+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x.$$

(δ΄) Παρατηρούμε πως
$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
Επομένως, έχουμε
$$\int \arccos x\,dx=\int (x)'\arccos x\,dx=x\arccos x+\int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$=x\arccos x-\int\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\,dx=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C.$$
Πράγματι,
$$\left(x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C\right)'=\arccos x+x(\arccos x)'-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\arccos x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\arccos x.$$

(ε΄)
$$\int \cos^2 x\,dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\int\frac{1}{2}\,dx+\int\frac{\cos 2x}{2}\,dx$$
$$=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\int(\sin 2x)'\,dx=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C.$$
Πράγματι,
$$\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C\right)'=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x=\cos^2 x.$$

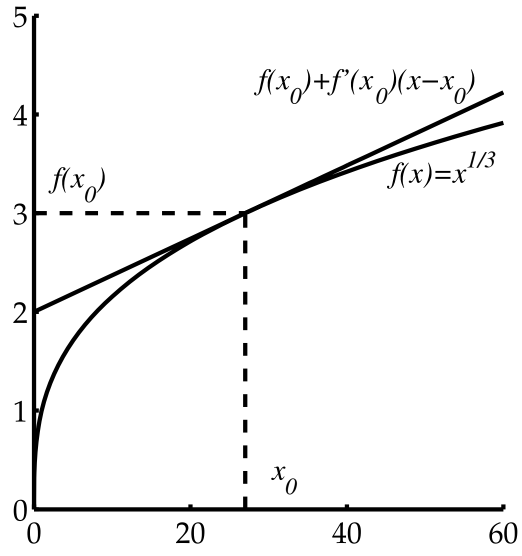
(ς΄)
$$\int \sin^2 x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\int\frac{1}{2}\,dx-\int\frac{\cos 2x}{2}\,dx$$
$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\int(\sin 2x)'\,dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C.$$
Πράγματι,
$$\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C\right)'=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=\sin^2 x.$$

(ζ΄) Παρατηρούμε πως
$$\int\tan^2 x\,dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx=\int\left(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)\,dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}-\int\,dx=\tan x-x+C.$$
Πράγματι,
$$(\tan x-x)'=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\tan^2 x.$$

(η΄) Θέτουμε $t=1+\sqrt{x}$, επομένως $dt=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$, και το ολοκλήρωμα γίνεται
$$\int\sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx=\int 2\sqrt{t}(t-1)\,dt=2\int\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)\,dt=2\int\left(\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)'\,dt=\frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$$
$$=\frac{4}{5}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}+C.$$

Πράγματι,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{4}{5}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}\right)' &= \frac{2\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{x}}-\frac{2\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{x}} \\
&= \sqrt{1+\sqrt{x}}\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\sqrt{1+\sqrt{x}}.
\end{aligned}
$$



Σχήμα 2: Η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ και η γραμμική της προσέγγιση γύρω από το $x_0 = 27$, $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

6η Ομάδα Ασκήσεων

38. **(Υπολογισμός των τιμών της $x^{\frac{1}{3}}$)** Συμπληρώστε έναν πίνακα όπως αυτόν του Παραδείγματος 6.1, πάλι για την συνάρτηση $x^{\frac{1}{3}}$, αλλά τώρα εξετάστε για το x τις τιμές $20,\ 26,\ 26.5,\ 27,\ 27.5,\ 28,\ 34$.

    Λύση: Ισχύει ότι $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$. Βάσει αυτού, εύκολα συμπληρώνεται ο ακόλουθος πίνακας:

x	$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$	$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$	Διαφορά
20	2.7144	2.7407	0.0263
26	2.9625	2.9630	0.0005
26.5	2.9814	2.9815	0.0001
27	3	3	0
27.5	3.0185	3.0185	0.0001
28	3.0370	3.0370	0.0004
34	3.2593	3.2593	0.0196

    Η συνάρτηση και η γραμμική της προσέγγιση έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 2. Τόσο ο πίνακας όσο και η γραφική παράσταση δείχνουν όσο πιο κοντά είναι το x στο x_0, τόσο πιο κοντά είναι η γραμμική προσέγγιση στην συνάρτηση.

39. **(Διαφορετικές απροσδιοριστίες $0/0$)** Παρατηρήστε ότι τα ακόλουθα όρια εμφανίζουν, και τα τρία, απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^4}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}.$$

    Να υπολογίσετε τα παραπάνω όρια ή να δείξετε ότι δεν υπάρχουν. Να χρησιμοποιήσετε γνωστά τριγωνομετρικά όρια και τον ορισμό του ορίου, αλλά όχι παραγώγους.

    Λύση: Σχετικά με το πρώτο όριο, παρατηρούμε πως

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \times \lim_{x\to 0}\sin x = 1 \times 0 = 1.$$

    Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γνωστό τριγωνομετρικό όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{9}$$

    Σχετικά με το δεύτερο όριο, παρατηρήστε πως

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2} \times \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = 1 \times \infty = \infty.$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε και πάλι το γνωστό όριο (9) και το, επίσης γνωστό, όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty.$$

Σχετικά με το τρίτο όριο, παρατηρήστε πως

$$\frac{\sin x}{x^2}=\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{x}.$$

Από τους δύο όρους του γινόμενου, ο πρώτος έχει όριο το 1, ενώ ο δεύτερος είναι γνωστό ότι δεν έχει όριο. Επομένως, δεν έχει όριο και το γινόμενό τους. Πράγματι, αν είχε όριο, τότε περνώντας τον πρώτο όρο στο αριστερό μέλος της εξίσωσης, δηλαδή γράφοντας

$$\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-1}=\frac{1}{x},$$

προκύπτει άτοπο, διότι το αριστερό μέλος έχει όριο, ως πηλίκο δύο συναρτήσεων που έχουν όριο και η δεύτερη δεν έχει όριο το 0, ενώ το δεξί μέλος δεν έχει όριο.

40. **(Ιδιότητα κυρτών συναρτήσεων)** Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα I, τότε είναι αδύνατο να βρεθούν τρία σημεία $x_0 < x_1 < x_2$ εντός του I τέτοια ώστε $f(x_1) > f(x_0)$ και $f(x_1) > f(x_2)$.

    Λύση: Αφού το x_1 βρίσκεται μεταξύ των x_0 και x_2, μπορούμε να το θέσουμε ίσο με $x_1 = \theta x_0 + (1-\theta)x_2$, για κάποιο $\theta \in (0,1)$. (Πράγματι, η συνεχής συνάρτηση $g(\theta) = \theta x_0 + (1-\theta)x_2$ μεταβάλλεται από την τιμή $g(0) = x_2$ στην τιμή $g(1) = x_0$, άρα για κάποιο $\theta \in (0,1)$ θα λαμβάνει και την ενδιάμεση τιμή x_1.)

    Από τον ορισμό της κυρτότητας, θα πρέπει να έχουμε

    $$f(x_1) \le \theta f(x_0) + (1-\theta)f(x_2).$$

    Ταυτοχρόνως, όμως, χρησιμοποιώντας τη δοσμένη υπόθεση, έχουμε

    $$f(x_1) = \theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_1) > \theta f(x_0) + (1-\theta)f(x_2),$$

    και έτσι καταλήγουμε σε άτοπο. Η γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος είναι σαφής: Αν το σημείο $(x_1, f(x_1))$ πρέπει να είναι κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα που σχηματίζουν τα σημεία $(x_0, f(x_0))$ και $(x_2, f(x_2))$, τότε δεν μπορεί να είναι «πάνω» και από τα δύο.

41. **(Κυρτή σύνθεση)** Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτές συναρτήσεις. Δείξτε ότι αν η g είναι αύξουσα, τότε και η σύνθεση $g \circ f$ είναι κυρτή.

    Λύση: Έστω x, y και $\theta \in [0,1]$. Παρατηρήστε πως:

    $$\begin{aligned}(g\circ f)((1-\theta)x+\theta y) &= g(f((1-\theta)x+\theta y))\\ &\le g((1-\theta)f(x)+\theta f(y))\\ &\le (1-\theta)g(f(x))+\theta g(f(y))\\ &= (1-\theta)g\circ f(x)+\theta g\circ f(y).\end{aligned}$$

    Οι ισότητες προκύπτουν από τον ορισμό της σύνθεσης συναρτήσεων. Η πρώτη ανισότητα ισχύει γιατί η f είναι κυρτή, οπότε

    $$f((1-\theta)x+\theta y) \le (1-\theta)f(x)+\theta f(y),$$

    και από το ότι η $g(x)$ είναι αύξουσα, οπότε όταν μεγαλώνει το όρισμά της, μεγαλώνει και η g. Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από την κυρτότητα της g.

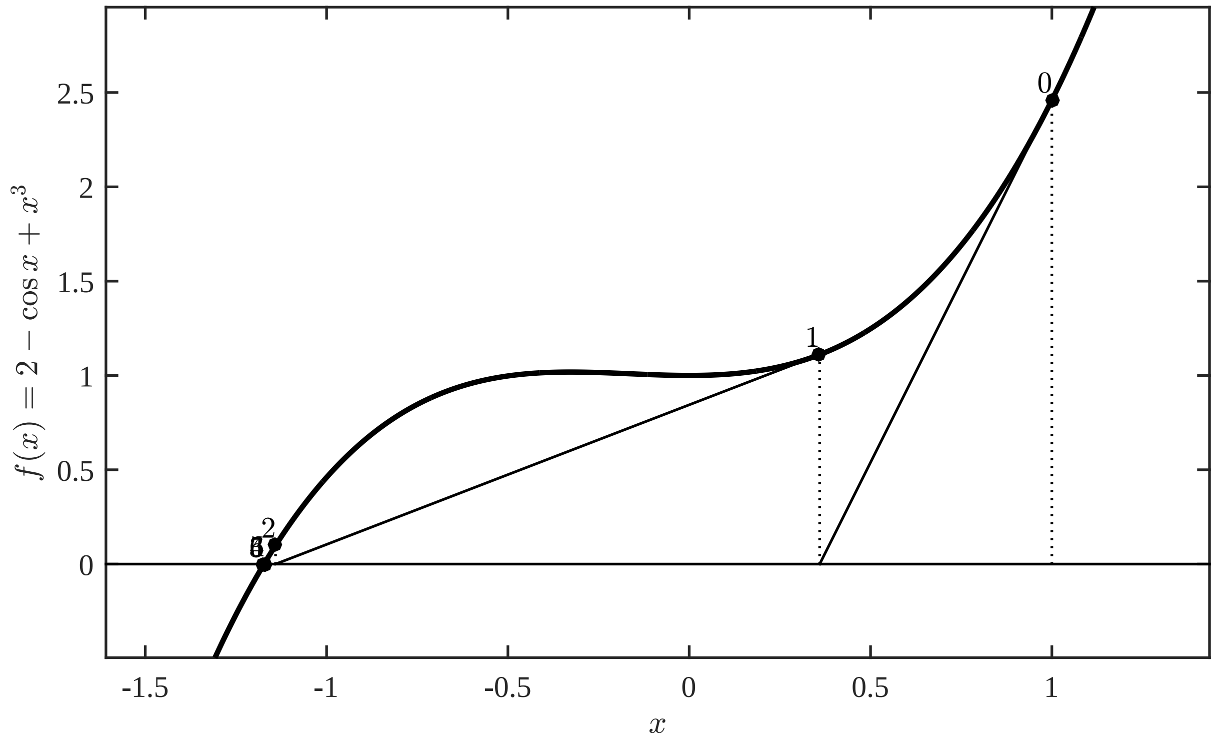
    Λύση:

42. **(Τοπικό ελάχιστο = ολικό ελάχιστο)** Έστω f ορισμένη σε κάποιο διάστημα I και κυρτή σε αυτό, με τοπικό ελάχιστο σε κάποιο x_0. Τότε, να δείξετε ότι το x_0 είναι και ολικό ελάχιστο.

    Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Έστω, λοιπόν, πως στο x_0 δεν έχουμε ολικό ελάχιστο. Θα υπάρχει, λοιπόν, κάποιο $y \ne x_0$, για το οποίο $f(y) < f(x_0)$. Θα έχουμε είτε $y < x_0$, είτε $y > x_0$. Υποθέτουμε ότι ισχύει το πρώτο ενδεχόμενο (το δεύτερο ενδεχόμενο αντιμετωπίζεται ανάλογα).

    Επειδή το x_0 είναι τοπικό ελάχιστο, θα υπάρχει κάποιο $z \in (y, x_0)$ τέτοιο ώστε

    $$f(z) \ge f(x_0) > f(y).$$



Σχήμα 3: Η εκτέλεση της Μεθόδου του Νεύτωνα για την συνάρτηση $f(x) = 2 - \cos x + x^3$.

Όμως επιπλέον, αφού $z \in (y, x_0)$, θα υπάρχει $\theta \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $z = \theta y + (1-\theta)x_0$, οπότε

$$f(z) = f(\theta y + (1-\theta)x_0) \leq \theta f(y) + (1-\theta)f(x_0) < \theta f(x_0) + (1-\theta)f(x_0) = f(x_0) \Rightarrow f(z) < f(x_0),$$

οπότε τελικά προκύπτει άτοπο. Η πρώτη ανισότητα οφείλετε στο ότι η f είναι κυρτή. Η δεύτερη επειδή $f(y) < f(x_0)$. Άρα, τελικά, προκύπτει ότι κάθε σημείο x_0 ενός τοπικού ελάχιστου είναι και σημείο ολικού ελάχιστου.

43. **(Υλοποίηση Μεθόδου Νεύτωνα)** Υλοποιήστε τη Μέθοδο του Νεύτωνα σε μια γλώσσα προγραμματισμού της προτίμησής σας, χρησιμοποιώντας, ως βάση, τον ψευδοκώδικα αυτής της παραγράφου. Τα ορίσματα εισόδου του προγράμματος που θα δημιουργήσετε πρέπει να περιλαμβάνουν τουλάχιστον το αρχικό σημείο όπου υπολογίζεται η τιμή της συνάρτησης και της παραγώγου της, το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων, και την ανοχή E_f στην τιμή της συνάρτησης. (Επομένως, το πρόγραμμα θα διακόπτεται είτε όταν βρεθεί x_n με $|f(x_n)| \leq E_f$, είτε όταν ολοκληρωθεί το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων.) Είναι επιθυμητό, αλλά όχι απαραίτητο, να δίνονται ως ορίσματα και η συνάρτηση της οποία ζητείται η ρίζα καθώς και η παράγωγός της. Επομένως, αν δεν γνωρίζετε πώς να δίνετε συναρτήσεις ως ορίσματα, μπορείτε για κάθε συνάρτηση της οποίας τη ρίζα θέλετε να υπολογίσετε να τροποποιείτε ανάλογα τον κώδικά σας. Το πρόγραμμα θα πρέπει να επιστρέφει ένα πίνακα όπως αυτούς των παραδειγμάτων αυτής της παραγράφου, με ακρίβεια τουλάχιστον 8 δεκαδικών ψηφίων για κάθε επανάληψη της μεθόδου, δεν είναι όμως απαραίτητο να παράγει κάποιο σχήμα.

44. **(Συνάρτηση $f(x) = 2 - \cos x + x^3$)** Χρησιμοποιήστε την υλοποίηση της προηγούμενης άσκησης για να εντοπίσετε μια ρίζα της συνάρτησης $f(x) = 2 - \cos x + x^3$.

    Λύση: Τα αριθμητικά δεδομένα που προκύπτουν με χρήση του κώδικα της προηγούμενης άσκησης είναι τα ακόλουθα:

n	$x(n)$	$f(x(n))$	$f'(x(n))$
0	1.000000000000000	2.459697694131860	3.841470984807897
1	0.359699004923015	1.110536256841587	0.740142639412997
2	-1.140736448603007	0.098657650020360	2.994898148938707
3	-1.173678353507293	-0.003528641742777	3.210383151160293
4	-1.172579219361419	-0.000004018593081	3.203072256222498
5	-1.172577964755603	-0.000000000005232	3.203063915985184
6	-1.172577964753970	0	3.203063915974326

Στον άνω πίνακα, n είναι η επανάληψη, $x(n)$ είναι η εκτίμηση της ρίζας στο τέλος της επανάληψης n, $f(x(n))$ είναι η τιμή της συνάρτησης στη θέση $x(n)$, και $f'(x(n))$ είναι η τιμή της παραγώγου της συνάρτησης στη θέση $x(n)$. Ειδικά για την περίπτωση $n = 0$, το $x(0)$ είναι η προσέγγιση για την ρίζα που δίνουμε ως είσοδο στη ρουτίνα. Επομένως, σε αυτή την περίπτωση ξεκινήσαμε τις επαναλήψεις από το σημείο $x(0) = 1$. Παρατηρήστε ότι η επιθυμητή ακρίβεια στη θέση της ρίζας επιτυγχάνεται μετά από 5 επαναλήψεις. Η εκτέλεση της μεθόδου απεικονίζεται γραφικά στο Σχήμα 3.

7η Ομάδα Ασκήσεων

45. **(Απόδειξη Λήμματος 7.1)** Να αποδείξετε το Λήμμα 7.1 συγκρίνοντας τα $s(f;P)$, $S(f;P)$ όρο προς όρο.

Λύση: Παρατηρήστε ότι $m_i \leq M_i$, αφού το m_i είναι το infimum και το M_i είναι το supremum του ίδιου συνόλου $\{f(x) : p_{i-1} \leq x \leq p_i\}$. Πολλαπλασιάζοντας με $p_i - p_{i-1}$ έχουμε $m_i(p_i - p_{i-1}) \leq M_i(p_i - p_{i-1})$. Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες για $i = 1, \ldots, n$, προκύπτει τελικά το ζητούμενο

$$s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(p_i - p_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(p_i - p_{i-1}) = S(f;P).$$

46. **(Απόδειξη Λήμματος 7.2)** Να αποδείξετε το Λήμμα 7.2. Μπορείτε να αποδείξετε το ζητούμενο υποθέτοντας, καταρχάς, ότι $P' = P \cup \{q\}$, όπου $q \notin P$, και κατόπιν γενικεύοντας.

Λύση: Θα αποδείξουμε την πρώτη ανισότητα. Η δεύτερη προκύπτει με τον ίδιο τρόπο, mutatis mutandis.

Θα ακολουθήσουμε την υπόδειξη, και αρχικά θα αποδείξουμε ότι η ζητούμενη ανισότητα ισχύει όταν $P' = P \cup \{q\}$. Πράγματι, έστω

$$\begin{aligned} P &= \{p_0, p_1, \ldots, p_k, p_{k+1}, \ldots, p_n\}, \\ P' &= \{p_0, p_1, \ldots, p_k, q, p_{k+1}, \ldots, p_n\}, \end{aligned}$$

με $1 \leq k \leq n-1$. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} m'_{k+1} &= \inf\{f(x) : p_k \leq x \leq q\}, \\ m''_{k+1} &= \inf\{f(x) : q \leq x \leq p_{k+1}\}. \end{aligned}$$

Έχουμε, επίσης,

$$m_{k+1} = \inf\{f(x) : p_k \leq x \leq p_{k+1}\}.$$

Θα πρέπει, όμως

$$m'_{k+1} \geq m_{k+1}, \qquad m''_{k+1} \geq m_{k+1}. \tag{10}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} s(f;P) - s(f;P') &= \sum_{i=1}^{k} m_i(p_i - p_{i-1}) + m_{k+1}(p_{k+1} - p_k) + \sum_{i=k+2}^{n} m_i(p_i - p_{i-1}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k} m_i(p_i - p_{i-1}) - m'_{k+1}(q - p_k) - m''_{k+1}(p_{k+1} - q) - \sum_{i=k+2}^{n} m_i(p_i - p_{i-1}) \\ &= m_{k+1}(p_{k+1} - p_k) - m'_{k+1}(q - p_k) - m''_{k+1}(p_i - p_{i-1}) \\ &\leq m_{k+1}(p_{k+1} - p_k) - m_{k+1}(q - p_k) - m_{k+1}(p_i - p_{i-1}) = 0. \end{aligned}$$

Η ανισότητα προκύπτει με χρήση των (10). Τελικά, έχουμε

$$s(f;P') \geq s(f;P). \tag{11}$$

Η γενικότερη περίπτωση που η P' έχει $n > 1$ στοιχεία παραπάνω από την P μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή. Πράγματι, αποδείξαμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει όταν $n = 1$. Έστω πως το αποτέλεσμα ισχύει και για κάποιο $n > 1$, δηλαδή όταν μια διαμέριση P' έχει n στοιχεία παραπάνω από μια άλλη P, θα έχουμε $s(f;P') \geq s(f;P)$. Τότε θα ισχύει και για το $n+1$. Πράγματι, σε αυτή την περίπτωση, υπάρχει διαμέριση P_1 με n παραπάνω στοιχεία από την P και ένα λιγότερο από την P', τέτοια ώστε $P \subset P_1 \subset P'$, επομένως

$$s(f;P') \geq s(f;P_1) \geq s(f;P).$$

Η πρώτη ανισότητα ισχύει λόγω της (11), και η δεύτερη λόγω του επαγωγικού βήματος. Επομένως, αποδείξαμε το ζητούμενο και για την περίπτωση του $n+1$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Η γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος είναι απλή: αν εκλεπτύνουμε μια διαμέριση, τότε κάνουμε μια καλύτερη δειγματοληψία της συνάρτησης, και το αντίστοιχο κάτω άθροισμα Darboux πλησιάζει ακόμα περισσότερο, από κάτω, το κάτω ολοκλήρωμα Darboux της f.

47. **(Εμβαδόν τριγώνου)** Να επαναλάβετε τη μεθοδολογία του Παραδείγματος 7.4 προκειμένου να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, a]$ με ολοκλήρωμα $a^2/2$.

Λύση: Όπως και στο Παράδειγμα 7.4, θα δημιουργήσουμε μια ακολουθία από διαμερίσεις P_n, και θα υπολογίσουμε τα κάτω και άνω αθροίσματά τους $s(f; P_n)$, $S(f; P_n)$ αντίστοιχα. Έστω, λοιπόν, η διαμέριση

$$P_n = \left\{ p_0 = 0,\ p_1 = \frac{a}{n},\ p_2 = \frac{2a}{n}, \ldots,\ p_n = \frac{na}{n} = a \right\},$$

για την οποία γενικά έχουμε

$$p_i = \frac{ia}{n}, \qquad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

Καθώς και αυτή η συνάρτηση είναι αύξουσα, για να υπολογίσουμε το κάτω άθροισμα $s(f; P_n)$ αρκεί να πάρουμε την τιμή της συνάρτησης στο αριστερό άκρο του κάθε υποδιαστήματος, επομένως $m_i = f(p_{i-1}) = p_{i-1}$, και

$$\begin{aligned} s(f; P_n) &= \sum_{i=1}^{n} m_i (p_i - p_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} p_{i-1} \cdot (p_i - p_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)a}{n} \cdot \frac{a}{n} \\ &= a^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)}{n^2} = \frac{(n-1)n}{2n^2} a^2 = \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Στην πέμπτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την Άσκηση 1.11. Παρατηρήστε ότι η ακολουθία $s(f; P_n)$ είναι αύξουσα και συγκλίνει στο $\frac{a^2}{2}$.

Ακολούθως, υπολογίζουμε, με ανάλογο τρόπο, το άνω άθροισμα $S(f; P_n)$, λαμβάνοντας για κάθε υποδιάστημα της διαμέρισης την τιμή της συνάρτησης στο δεξί άκρο, αφού η συνάρτηση είναι αύξουσα. Έχουμε $M_i = f(p_i) = p_i$, και

$$\begin{aligned} S(f; P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i (p_i - p_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (p_i - p_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{ia}{n} \cdot \frac{a}{n} \\ &= a^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} a^2 = \frac{a^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Στην πέμπτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε και πάλι την Άσκηση 1.11. Παρατηρήστε πως η ακολουθία $S(f; P_n)$ είναι φθίνουσα και συγκλίνει και αυτή στο ίδιο όριο, $a^2/2$.

Στο Σχήμα 4 έχουμε σχεδιάσει τις κλιμακωτές συναρτήσεις που αντιστοιχούν στο κάτω άθροισμα και στο άνω άθροισμα Darboux για την περίπτωση $a = 1$ και για $n = 11,\ 51$.

Παρόμοια με το Παράδειγμα 7.4, τελικά προκύπτει πως το ολοκλήρωμα της f ισούται με το $\frac{a^2}{2}$.

48. **(Ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης)** Να δείξετε ότι αν η $f \geq 0$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, και επιπλέον $\int_a^b f = 0$, τότε υποχρεωτικά $f = 0$ παντού στο $[a, b]$.

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Έστω πως υπάρχει κάποιο x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0) > 0$. Έστω πως το x_0 είναι εσωτερικό στο $[a, b]$. (Οι περιπτώσεις $x_0 = a$ και $x_0 = b$ αντιμετωπίζονται ανάλογα.) Έστω $\epsilon = f(x_0)/2$. Από τον ορισμό της συνέχειας κατά Cauchy, προκύπτει πως υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq [a, b]$ και για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \Rightarrow f(x) - f(x_0) > -f(x_0)/2 \Rightarrow f(x) > f(x_0)/2.$$

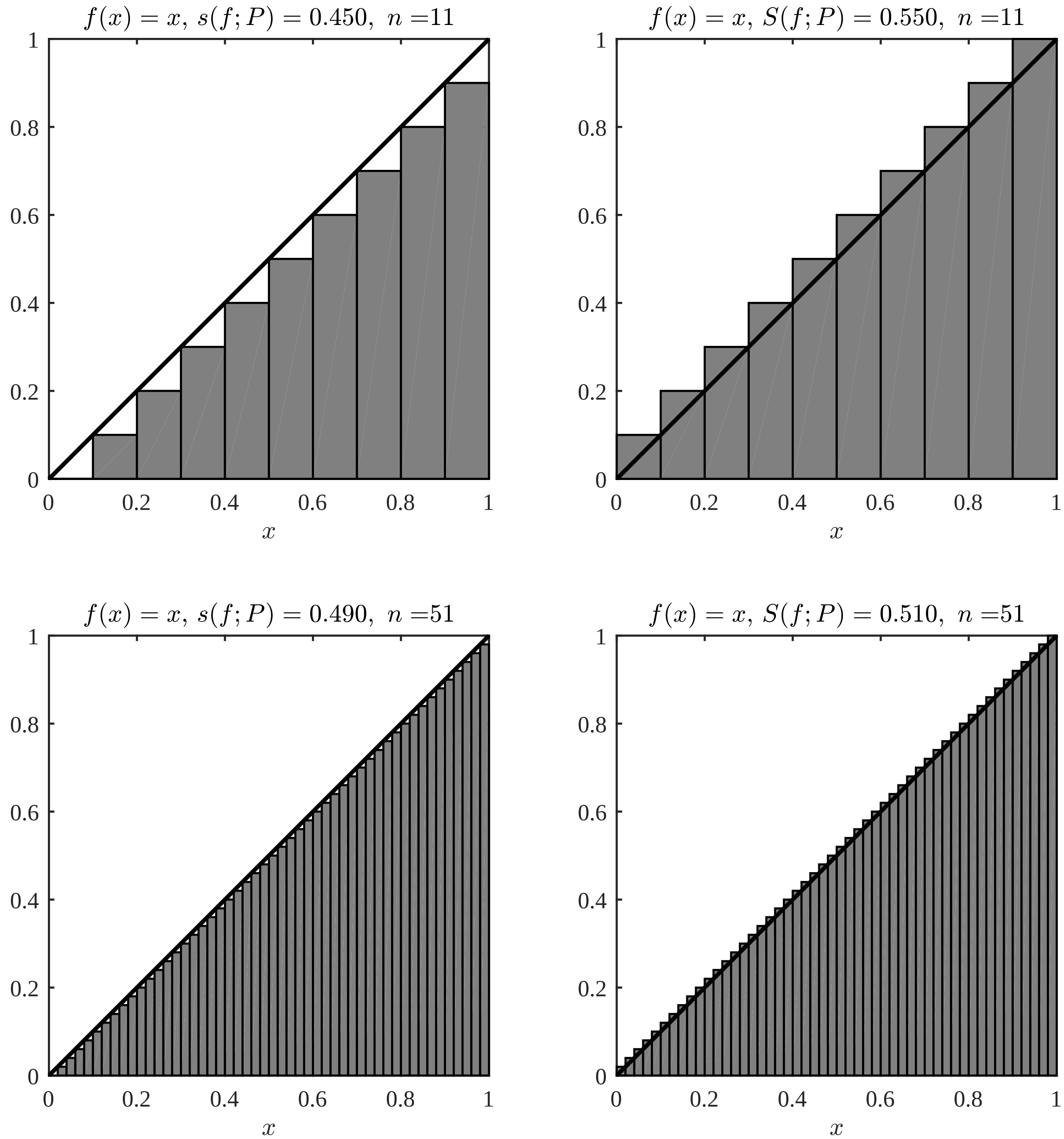
Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} f(x_0)/2, & x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \\ 0, & x \in [a, b] \setminus (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \end{cases}$$

Παρατηρήστε πως, παντού στο $[a, b]$, έχουμε $g(x) \leq f(x)$, επομένως,

$$\int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \Rightarrow 2\delta f(x_0)/2 \leq \int_a^b f(x)\, dx \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx > 0.$$

Η τελευταία ανισότητα προκύπτει διότι $\delta > 0$ και $f(x_0) > 0$. Επομένως, έχουμε άτοπο, και θα πρέπει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.



Σχήμα 4: Οι κλιμακωτές συναρτήσεις για τη συνάρτηση $f(x) = x$.

49. **(Ανισότητα Cauchy-Schwarz)** Να δείξετε ότι η ανισότητα Cauchy-Schwarz (Παράδειγμα 7.7) ισχύει με ισότητα αν για τις δύο συναρτήσεις f, g έχουμε ότι η μια είναι πολλαπλάσιο της άλλης στο διάστημα $[a, b]$. Είναι αναγκαία αυτή η συνθήκη ώστε να ισχύει η ισότητα;

Λύση: Έστω πως $f = \lambda g$. Αν $\int_a^b g^2 = 0$, τότε η ισότητα ισχύει. Αν $\int_a^b g^2 \neq 0$, τότε το τριώνυμο του θ

$$F(\theta) = \int_a^b (f + \theta g)^2$$

μηδενίζεται όταν $\theta = -\lambda$, επομένως η διακρίνουσά του Δ πρέπει να είναι 0, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

Έστω τώρα πως $g = \lambda f$. Αν $\lambda = 0$, τότε $g = 0$, άρα $\int_a^b g^2 = 0$, και η ισότητα ισχύει. Αν $\lambda \neq 0$, τότε $f = \frac{1}{\lambda} g$, και ερχόμαστε στο προηγούμενο σκέλος, οπότε και πάλι η ισότητα ισχύει. (Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να επικαλεστούμε συμμετρία, αφού τίποτα στην ανισότητα και στην εκφώνηση δεν διαχωρίζει την f από την g.)

Σχετικά με το τελευταίο ερώτημα, η δοσμένη συνθήκη είναι ικανή, δεν είναι όμως και αναγκαία. Πράγματι, αν ξεκινήσουμε με δύο f, g τέτοιες ώστε $f = \lambda g$ παντού στο $[a, b]$, τότε η ισότητα ισχύει. Αν αλλάξουμε τις τιμές της f ή της g έστω και σε ένα σημείο, τότε παύει να ισχύει η ισότητα των συναρτήσεων παντού στο $[a, b]$, αλλά η ανισότητα Cauchy-Schwarz συνεχίζει να ισχύει με ισότητα.

50. **(Περίπου μηδενική συνάρτηση)** Να δείξετε ότι αν $\int_a^b g^2 = 0$, τότε για κάθε f ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ θα έχουμε $\int_a^b fg = 0$. Βεβαιωθείτε ότι αντιλαμβάνεστε την φυσική ερμηνεία αυτής της ιδιότητας.

Λύση: Η ιδιότητα προκύπτει εύκολα με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz.

Πράγματι, καταρχάς, ισχύει το ακόλουθο:

$$\int_a^b fg \leq \left[\int_a^b f^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b g^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Επιπλέον, έστω δύο συναρτήσεις f, g. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz για τις $f, -g$, προκύπτει πως

$$\begin{aligned} \int_a^b f(-g) &\leq \left[\int_a^b f^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b (-g)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\Rightarrow -\int_a^b fg \leq \left[\int_a^b f^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b g^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\Rightarrow \int_a^b fg \geq -\left[\int_a^b f^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b g^2\right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

το οποίο, σε συνδυασμό με την αρχική ανισότητα Cauchy Schwarz, δίνει

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \left[\int_a^b f^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b g^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Στην ειδική περίπτωση που $\int_a^b g^2 = 0$, η άνω αυτόματα δίνει και

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq 0 \Rightarrow \int_a^b fg = 0.$$

Η εξήγηση του αποτελέσματος είναι η ακόλουθη: αφού $\int g^2 = 0$, η συνάρτηση g είναι σχεδόν παντού μηδενική, και επομένως αν πολλαπλασιαστεί με μια άλλη συνάρτηση f, το γινόμενό τους θα είναι επίσης σχεδόν παντού 0, και επομένως θα έχει μηδενικό ολοκλήρωμα.

8η Ομάδα Ασκήσεων

51. **(Ολοκληρώματα)**

(α΄) Να υπολογίσετε το ακόλουθο ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση με αντικατάσταση:

$$\int_{-3}^{3} \sqrt{3 - x^2}\, dx.$$

(β΄) Μπορείτε να υπολογίσετε το άνω αποτέλεσμα χωρίς να κάνετε την ολοκλήρωση;

(γ΄) Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)}.$$

Λύση:

(α΄) Θέτουμε $x = 3\sin\theta \Rightarrow dx = 3\cos\theta\, d\theta$. Επομένως, $x = -3 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$, και $x = 3 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{3} \sqrt{3 - x^2}\, dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\sqrt{1 - \sin^2\theta}(3\cos\theta)\, d\theta = 9\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta \\
&= 9\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{9\pi}{2} + \frac{9}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin 2\theta}{4}\right]' d\theta = \frac{9\pi}{2} + \frac{9}{2}\left[\frac{\sin\pi}{4} - \frac{\sin(-\pi)}{4}\right] = \frac{9\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(β΄) Εναλλακτικά, μπορούμε να παρατηρήσουμε πως το δοσμένο ολοκλήρωμα είναι το εμβαδόν ενός ημικυκλίου με ακτίνα 3, άρα πρέπει να ισούται με $\frac{1}{2}\pi 3^2 = \frac{9}{2}$.

(γ΄) Θα υπολογίσουμε τα A, B για τα οποία

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{Ax}{1+x^2} + \frac{B}{x}.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο σκέλη με $x(1+x^2)$, έχουμε

$$1 = Ax^2 + B + Bx^2 \Leftrightarrow B = 1, A = -1.$$

Επομένως, έχουμε

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \log x - \frac{1}{2}\int \left(\log(1+x^2)\right)' dx = \log\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right] + C.$$

52. **(Μικρό όμικρον)** Στην Πληροφορική συχνά χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό: αν $f(n)$ και $g(n)$ είναι δύο θετικές ακολουθίες, τότε γράφουμε $f(n) = o(g(n))$ αν ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, δηλαδή αν για μεγάλες τιμές του n, η ακολουθία $f(n)$ είναι πολύ μικρότερη της ακολουθίας $g(n)$. Παρατηρήστε ότι το $o(\cdot)$ ΔΕΝ εκφράζει κάποια άγνωστη συνάρτηση, αλλά είναι ένας απλός συμβολισμός, με τον οποίο μπορούμε να γράψουμε συνοπτικά μια σχέση μεταξύ δύο ακολουθιών.

Για κάθε μια από τις ακόλουθες προτάσεις, είτε αποδείξτε ότι είναι σωστή, είτε δώστε ένα αντιπαράδειγμα που να δείχνει ότι είναι λάθος:

(α΄) Αν $f(n)$ είναι ένα πολυώνυμο του n και $g(n) = e^n$, τότε $f(n) = o(g(n))$.

(β΄) Αν $f_1(n) = o(g(n))$ και $f_2(n) = o(g(n))$, τότε και $f_1(n)f_2(n) = o(g(n))$.

(γ΄) Αν $f(n) = o(g(n))$ και $g(n) = o(h(n))$, τότε και $f(n) = o(h(n))$.

(δ΄) Αν η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει, τότε $a_n = o(1)$.

Λύση:

(α΄) Η ιδιότητα ισχύει. Πράγματι, έστω το πολυώνυμο $f(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i n^i$. Τότε,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{k} a_i n^i}{a_k n^k} = 1,$$

καθώς το όριο ισούται με το πηλίκο των μεγιστοβάθμιων όρων.

Επιπλέον, με k διαδοχικές εφαρμογές του Κανόνα του L'Hôpital, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{k a_k n^{k-1}}{e^n} = \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{(k!) a_k}{e^n} = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο άνω όρια, προκύπτει το ζητούμενο.

(β΄) Η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει. Πράγματι, έχουμε $n^2 = o(n^3)$ και $n^2 = o(n^3)$, αλλά δεν ισχύει οτι $n^4 = n^2 \times n^2 = o(n^3)$.

(γ΄) Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = 0,$$

και πολλαπλασιάζοντας τα άνω, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{h(n)} = 0,$$

επομένως πράγματι η ιδιότητα ισχύει.

(δ΄) Η ιδιότητα ισχύει, διότι, από το αναγκαίο κριτήριο του Cauchy, αν μια σειρά συγκλίνει, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1} = 0 \Rightarrow a_n = o(1).$$

53. **(Όρια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

(α΄) $\lim_{h\to\infty} \frac{\int_1^h \sqrt{x}\log x\, dx}{h^2}$.

(β΄) $\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

(γ΄) $\lim_{x\to 0^-} x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

(δ΄) $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n + \cos n + \log n}{e^n}$.

(ε΄) $\lim_{x\to 0^+} (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$.

(ς΄) $\lim_{h\to\infty} \int_1^h \frac{1+|\cos t|}{t}\, dt$.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως και ο αριθμητής και ο παρονομαστής τείνουν στο άπειρο, επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον Κανόνα του L'Hôpital, και έχουμε

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\int_1^h \sqrt{x}\log x\, dx}{h^2} = \frac{\sqrt{h}\log h}{2h} = \lim_{h\to\infty} \frac{\log h}{2\sqrt{h}} = \lim_{h\to\infty} \frac{\frac{1}{h}}{\frac{2}{2\sqrt{h}}} = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{\sqrt{h}} = 0.$$

(β΄) Παρατηρούμε πως

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{2}{x^3}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{2}{x^2}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2} = \infty.$$

(γ΄) Σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει απροσδιοριστία, καθώς και οι δύο όροι του γινομένου τείνουν στο 0, επομένως

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

(δ´) Παρατηρούμε πως έχουμε απροσδιοριστία της μορφής ∞/∞. Μπορούμε να γράψουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n+\cos n+\log n}{e^n}=1+\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{e^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{e^n}.$$

Σχετικά με το πρώτο όριο, με χρήση του Κριτηρίου της Παρεμβολής και τη διπλή ανισότητα

$$-\frac{1}{e^n}\leq\frac{\cos n}{e^n}\leq\frac{1}{e^n}$$

προκύπτει πως ισούται με 0.
Σχετικά με το δεύτερο όριο, με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital, εύκολα προκύπτει πως

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{e^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{ne^n}=0.$$

Επομένως, τελικά

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n+\cos n+\log n}{e^n}=1+0+0=1.$$

(ε´) Παρατηρούμε πως έχουμε απροσδιοριστία της μορφής 0^0, η οποία μπορεί να αντιμετωπιστεί, παρατηρώντας, καταρχάς, πως

$$\lim_{x\to0^+}(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\exp(\sqrt{x}\log\sqrt{x})=\exp\left(\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\log\sqrt{x}\right),$$

υποθέτοντας, φυσικά, ότι τα άνω όρια υπάρχουν. Ακολούθως, χρησιμοποιώντας τον Κανόνα του L'Hôpital,

$$\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\log\sqrt{x}=\lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\log\frac{1}{h}=\lim_{h\to\infty}-\frac{\log h}{h}=\lim_{h\to\infty}-\frac{1}{h}=0,$$

επομένως, τελικά,

$$\lim_{x\to0^+}(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}=e^0=1.$$

(ς´) Το δοσμένο ολοκλήρωμα δεν μπορεί να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή. Μπορούμε, όμως, να παρατηρήσουμε πως

$$\lim_{h\to\infty}\int_1^h\frac{1+|\cos t|}{t}\,dt\geq\lim_{h\to\infty}\int_1^h\frac{1}{t}\,dt=\lim_{h\to\infty}\log h=\infty,$$

επομένως και το δοσμένο όριο τείνει στο άπειρο.

54. **(Αόριστα Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

(α´) $\displaystyle\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx.$

(β´) $\displaystyle\int\frac{e^x}{\cos^2(e^x)}\,dx.$

Λύση:

(α´) Θέτουμε $t=\sin x+\cos x$, επομένως $dt=(\cos x-\sin x)dx$, και έχουμε:

$$\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx=-\int\frac{dt}{t}=-\log|t|+C=-\log|\sin x+\cos x|+C.$$

(β´) Θέτουμε $t=e^x$, επομένως $dt=e^x\,dx$, άρα και

$$\int\frac{e^x}{\cos^2(e^x)}\,dx=\int\frac{dt}{\cos^2 t}=\tan t+C=\tan e^x+C.$$

9η Ομάδα Ασκήσεων

55. **(Καταχρηστικά Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε την τιμή των ακόλουθων καταχρηστικών ολοκληρωμάτων, εφόσον αυτή υπάρχει:

(α΄) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$.

(β΄) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\log|x|}{x}\, dx$.

(γ΄) $\int_0^\pi |\tan x|\, dx$.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε ότι η ολοκληρωτέα απειρίζεται στο αριστερό άκρο ολοκληρωσης, ενώ το δεξί άκρο ολοκλήρωσης είναι το ∞. Επομένως,

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \int_h^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx + \lim_{h\to\infty} \int_1^h \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{h\to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_h^1 + \lim_{h\to\infty} \left[2\sqrt{x}\right]_1^h = 2 + \infty = \infty.$$

(β΄) Παρατηρούμε πως η ολοκληρωτεά συνάρτηση απειρίζεται στο 0, επομένως πρέπει να σπάσουμε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα στα 4:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\log|x|}{x}\, dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{\log|x|}{x}\, dx + \int_{-1}^{0} \frac{\log|x|}{x}\, dx + \int_{0}^{1} \frac{\log|x|}{x}\, dx + \int_{1}^{\infty} \frac{\log|x|}{x}\, dx.$$

Για κάθε ένα από τα ολοκλήρωματα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-1} \frac{\log|x|}{x}\, dx &= \lim_{h\to-\infty} \int_h^{-1} \frac{\log|x|}{x}\, dx = \lim_{h\to-\infty} \left[\frac{1}{2}(\log|x|)^2\right]_h^{-1} = -\infty,\\
\int_{-1}^{0} \frac{\log|x|}{x}\, dx &= \lim_{h\to0^-} \int_{-1}^{h} \frac{\log|x|}{x}\, dx = \lim_{h\to0^-} \left[\frac{1}{2}(\log|x|)^2\right]_{-1}^{h} = \infty,\\
\int_{0}^{1} \frac{\log|x|}{x}\, dx &= \lim_{h\to0^+} \int_{h}^{1} \frac{\log|x|}{x}\, dx = \lim_{h\to0^+} \left[\frac{1}{2}(\log|x|)^2\right]_{h}^{1} = -\infty,\\
\int_{1}^{\infty} \frac{\log|x|}{x}\, dx &= \lim_{h\to\infty} \int_{1}^{\infty} \frac{\log|x|}{x}\, dx = \lim_{h\to\infty} \left[\frac{1}{2}(\log|x|)^2\right]_{1}^{h} = \infty,
\end{aligned}$$

και τελικά, επειδή προσθέτουμε ∞ με $-\infty$, το καταχρηστικό ολοκλήρωμα δεν υπάρχει.

(γ΄) Παρατηρούμε πως το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό διότι η συνάρτηση της εφαπτόμενης απειρίζεται στην θέση $x = \pi/2$. Επομένως, πρέπει να σπάσουμε το ολοκλήρωμα σε δύο καταχρηστικά ολοκληρώματα δεύτερου τύπου:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi |\tan x|\, dx &= \int_0^{\pi/2} |\tan x|\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} |\tan x|\, dx\\
&= \lim_{h\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \int_0^h |\tan x|\, dx + \lim_{h\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \int_h^\pi |\tan x|\, dx\\
&= \lim_{h\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \int_0^h \tan x\, dx + \lim_{h\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \int_h^\pi (-\tan x)\, dx.
\end{aligned}$$

Σχετικά με το πρώτο καταχρηστικό ολοκλήρωμα, έχουμε

$$\lim_{h\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \int_0^h \tan x\, dx = \lim_{h\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \int_0^h -(\log|\cos x|)'\, dx = \lim_{h\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} -\left(\log|\cos h|\right) + \log|\cos 0| = \infty.$$

Παρόμοια,

$$\lim_{h\to(\frac{\pi}{2})^+}\int_h^{\pi}(-\tan x)\,dx = \lim_{h\to(\frac{\pi}{2})^+}\int_h^{\pi}(\log|\cos x|)'\,dx = \log|\cos\pi| - \lim_{h\to(\frac{\pi}{2})^+}(\log|\cos h|) = \infty.$$

Άρα, τελικά, το καταχρηστικό ολοκλήρωμα ισούται με ∞.

56. **(Όγκος στερεού εκ περιστροφής)** Να προσδιορίσετε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται αν περιστρέψουμε το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = \sin x$, με $0 \le x \le \pi$, γύρω από την ευθεία $y = -1$.

Λύση: Επειδή η περιστροφή είναι γύρω από την ευθεία $y = -1$, το στερεό που δημιουργείται είναι το ίδιο που θα δημιουργούταν αν περιστρέφαμε γύρω από τον άξονα των x την συνάρτηση $f(x) + 1$. Επομένως,

$$\begin{aligned} V(S) = \int_0^{\pi}\pi(1+\sin x)^2\,dx = \int_0^{\pi}\pi\,dx + \int_0^{\pi}2\pi\sin x\,dx + \int_0^{\pi}\pi\sin^2 x\,dx \\ = \pi^2 + 2\pi\int_0^{\pi}(-\cos x)'\,dx + \pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \pi^2 + 2\pi(1+1) + \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}dx - \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx \\ = \frac{3}{2}\pi^2 + 4\pi - \pi\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{4}\right)'dx = \frac{3}{2}\pi^2 + 4\pi. \end{aligned}$$

57. **(Καρπούζια)** Το Διεθνές Ινστιτούτο Βαρέων Φρούτων Αμαλιάδος έχει ορίσει ως πρότυπο σχήμα ενός πλήρως γινομένου αυγουστιάτικου καρπουζιού το στερεό που προκύπτει από την περιστροφή της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{300\left(1 - \frac{(x-20)^4}{20^4}\right)}, \quad 0 \le x \le 40,$$

περί τον άξονα των x.

(α΄) Δώστε ένα τύπο για τον όγκο του άνω καρπουζιού ως ολοκλήρωμα.

(β΄) Υπολογίστε το άνω ολοκλήρωμα.

(γ΄) Ποιες είναι οι μικρότερες δυνατές διαστάσεις ενός ορθογωνίου κιβωτίου στο οποίο μπορούμε να τοποθετήσουμε το άνω καρπούζι; Αγνοήστε το πάχος των τοιχωμάτων του κιβωτίου.

Λύση: Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned} V(S) &= \pi\int_0^{40} f^2(x)\,dx = 300\pi\int_0^{40}\left[1 - \frac{(x-20)^4}{20^4}\right]dx \\ &= 300\pi\int_0^{40}\left[x - \frac{(x-20)^5}{5\times 20^4}\right]'dx = 300\pi\left[40 - 2\times\frac{20^5}{5\times 20^4}\right] = 9600\pi. \end{aligned}$$

Σχετικά με το μικρότερο δυνατόν κιβώτιο, το μήκος θα είναι 40, ενώ οι άλλες διαστάσεις θα είναι ίσες με το διπλάσιο της μέγιστης δυνατής τιμής της συνάρτησης, δηλαδή $2\sqrt{300}$.

58. **(Όρια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

(α΄) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{10 + 5e^{\frac{1}{x^3}}}$.

(β΄) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(\log n)^7}{\sqrt{n}}$. Μην χρησιμοποιήσετε, στον υπολογισμό, άλλα γνωστά σας όρια που αφορούν την λογαριθμική συνάρτηση.

Λύση:

(α΄) Θα υπολογίσουμε τα πλευρικά όρια. Καταρχάς,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{10 + 5e^{\frac{1}{x^3}}} = 0,$$

διότι $\tan 0 = 0$ και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3} = \infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x^3}} = \infty.$$

Επίσης,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\tan x}{10+5e^{\frac{1}{x^3}}} = \left(\lim_{x\to 0^-} \tan x\right)\left(\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{10+5e^{\frac{1}{x^3}}}\right) = 0 \times \frac{1}{10+0} = 0.$$

Επομένως, το δοσμένο όριο υπάρχει, και ισούται με 0.

(β΄) Θα εφαρμόσουμε τον Κανόνα του L'Hôpital:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^7}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7(\log n)^6 \frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\times 7(\log n)^6}{\sqrt{n}}$$

$$= \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{2^6 7! \log n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^6 7! \frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^7 7!}{\sqrt{n}} = 0.$$

Εναλλακτικά, παρατηρήστε πως

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^7}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\log n}{n^{\frac{1}{14}}}\right)^7 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{\frac{1}{14}}}\right)^7 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{14}n^{-\frac{13}{14}}}\right)^7 = \left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{14}{n^{\frac{1}{14}}}\right)\right)^7 = 0^7 = 0.$$

59. **(Καταχρηστικό ολοκλήρωμα 1)**

(α΄) Υπολογίστε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \frac{2+\cos x}{x}\,dx.$$

Μην επιχειρήσετε να υπολογίσετε παράγουσα για την ολοκληρωτέα συνάρτηση.

(β΄) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{h}\int_0^h \frac{2+\cos x}{x}\,dx.$$

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το προηγούμενο σκέλος.

Λύση:

(α΄) Η συγκεκριμένη ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν έχει παράγωγο που να μπορεί να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή. Παρατηρούμε, όμως, πως

$$\int_1^\infty \frac{2+\cos x}{x}\,dx \quad=\quad \lim_{h\to\infty}\int_1^h \frac{2+\cos x}{x}\,dx \quad\geq\quad \lim_{h\to\infty}\int_1^h \frac{1}{x}\,dx \quad=\quad \lim_{h\to\infty} \log h \quad=\quad \infty,$$

επομένως και το αρχικό ολοκλήρωμα είναι άπειρο.

(β΄) Εφόσον τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής τείνουν στο άπειρο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον Κανόνα του L'Hôpital, επομένως

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{h}\int_0^h \frac{2+\cos x}{x}\,dx = \lim_{h\to\infty} \frac{2+\cos h}{h}\,dx,$$

το οποίο ισούται με 0, όπως προκύπτει χρησιμοποιώντας το κριτήριο της παρεμβολής και την διπλή ανισότητα

$$\frac{1}{h} \leq \frac{2+\cos h}{h} \leq \frac{3}{h}.$$

60. **(Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τις τιμές των ακόλουθων ολοκληρωμάτων:

(α΄) $\displaystyle\int_{-e}^{e} \frac{x}{1+x^2}\,dx.$

(β΄) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \log\left(\frac{x+10}{x+100}\right)dx.$

(γ΄) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx.$

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$\left(\frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)\right)' = \frac{x}{1+x^2},$$

επομένως

$$\int_{-e}^{e} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_{-e}^{e} \left(\frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)\right)' dx = \left(\frac{1}{2}\log\left(1+e^2\right)\right) - \left(\frac{1}{2}\log\left(1+(-e)^2\right)\right) = 0.$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι περιττή, επομένως το ολοκλήρωμα πρέπει να είναι μηδενικό, αφού, για οποιαδήποτε $f(x)$ περιττή, και για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

(β΄) Καταρχάς παρατηρούμε πως

$$\int_{-1}^{1} \log\left(\frac{x+10}{x+100}\right) dx = \int_{-1}^{1} \log(x+10)\,dx - \int_{-1}^{1} \log(x+100)\,dx,$$

επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε τα δύο ολοκληρώματα χωριστά.
Σχετικά με το πρώτο ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \log(x+10)\,dx &= \int_{-1}^{1} (x)'\log(x+10)\,dx = [x\log(x+10)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{x}{x+10}\,dx \\
&= \log 11 + \log 9 - \int_{-1}^{1} \frac{x+10-10}{x+10}\,dx = \log 11 + \log 9 - 2 + 10\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x+10} \\
&= \log 11 + \log 9 - 2 + 10\int_{-1}^{1} [\log(x+10)]'\,dx \\
&= \log 11 + \log 9 - 2 + 10\log 11 - 10\log 9 = 11\log 11 - 9\log 9 - 2.
\end{aligned}$$

Ανάλογα, το δεύτερο ολοκλήρωμα προκύπτει

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \log(x+100)\,dx &= \int_{-1}^{1} (x)'\log(x+100)\,dx = [x\log(x+100)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{x}{x+100}\,dx \\
&= \log 101 + \log 99 - \int_{-1}^{1} \frac{x+100-100}{x+100}\,dx \\
&= \log 101 + \log 99 - 2 + 100\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x+100} \\
&= \log 101 + \log 99 - 2 + 100\int_{-1}^{1} [\log(x+100)]'\,dx \\
&= \log 101 + \log 99 - 2 + 100\log 101 - 100\log 99 = 101\log 101 - 99\log 99 - 2.
\end{aligned}$$

Τελικά,

$$\int_{-1}^{1} \log\left(\frac{x+10}{x+100}\right) dx = 11\log 11 - 9\log 9 - 101\log 101 + 99\log 99.$$

(γ΄) Παρατηρούμε πως το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παρατήρηση ότι η ολοκληρωτέα έχει παράγουσα την αντίστροφη εφαπτόμενη. Εναλλακτικά, και χωρίς να γράψουμε αναλυτικά τον ορισμό του καταχρηστικού ολοκληρώματος, θέτουμε $x = \tan\theta$, επομένως $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$ και $x = \infty \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$, επομένως

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = \frac{\pi}{2}.$$

61. **(Καταχρηστικό ολοκλήρωμα 2)** Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^3 \frac{x+5}{\sqrt{9-x^2}}\, dx.$$

Λύση: Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, έχουμε

$$\int_0^3 \frac{x+5}{\sqrt{9-x^2}}\, dx = \lim_{h\to 3^-} \int_0^h \frac{(x+5)}{\sqrt{9-x^2}}\, dx.$$

Σχετικά με το ολοκλήρωμα, θέτουμε $x = 3\sin\theta$, επομένως $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$, $x = h \Rightarrow \theta = \arcsin\frac{h}{3}$, και $dx = 3\cos\theta d\theta$, επομένως

$$\int_0^h \frac{(x+5)}{\sqrt{9-x^2}}\, dx = \int_0^{\arcsin\frac{h}{3}} \frac{3\sin\theta+5}{3|\cos\theta|} 3\cos\theta\, d\theta = \int_0^{\arcsin\frac{h}{3}} (3\sin\theta+5)\, d\theta = \left[-3\cos\theta + 5\theta\right]_0^{\arcsin\frac{h}{3}}.$$

Στα άνω, χρησιμοποιήσαμε το ότι σε όλο το διάστημα ολοκλήρωσης $\theta \in [0,\pi/2)$, επομένως $\cos\theta > 0$. Το καταχρηστικό ολοκλήρωμα ισούται με

$$\int_0^3 \frac{x+5}{\sqrt{9-x^2}}\, dx = \lim_{h\to 3^-} \left[-3\cos\theta + 5\theta\right]_0^{\arcsin\frac{h}{3}} = -3\cos\frac{\pi}{2} + 5\frac{\pi}{2} + 3\cos 0 - 0 = \frac{5\pi}{2} + 3.$$

10η Ομάδα Ασκήσεων

62. **(Διαφορική Εξίσωση 1)**

(α΄) Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$(\tan y(x))y'(x) = x\sin x.$$

(β΄) Να βρείτε την ειδική λύση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(γ΄) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει καμία ειδική λύση που να ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$(\tan y(x))y'(x) = x\sin x \Leftrightarrow \tan y(x)dy = x\sin x dx \Leftrightarrow \int \tan y(x)\, dy = \int x\sin x\, dx$$
$$\Leftrightarrow -\log(|\cos y(x)|) + C = -\int x(\cos x)'\, dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x$$
$$\Leftrightarrow \log(|\cos y(x)|) = x\cos x - \sin x + C \Leftrightarrow \cos y(x) = \pm e^{x\cos x - \sin x + C}$$
$$\Leftrightarrow \cos y(x) = Ce^{x\cos x - \sin x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(β΄) Με αντικατάσταση στη γενική λύση, έχουμε:

$$\cos 0 = Ce^{0\cos 0 - \sin 0} \Leftrightarrow C = 1.$$

(γ΄) Παρατηρούμε πως η συνάρτηση $x\cos x$ λαμβάνει αυθαίρετα μεγάλες τιμές στο $\mathbb{R}$. Επομένως, όποια τιμή και να επιλέξουμε για το C, υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες

$$|Ce^{x\cos x - \sin x}| > 1,$$

επομένως δεν θα έχει λύση ως προς $y(x)$ η εξίσωση $\cos y(x) = \left[Ce^{x\cos x - \sin x}\right]$, αφού $|\cos\theta| \leq 1$.

63. **(Διαφορική εξίσωση 2ης τάξης)**

(α΄) Να βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ

$$z'(x) - z(x) = xe^x.$$

(β΄) Να βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ δεύτερης τάξης

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = xe^x,$$

χρησιμοποιώντας το προηγούμενο σκέλος και κάνοντας την αντικατάσταση $z(x) = y'(x) - y(x)$.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως η ΔΕ είναι γραμμική πρώτης τάξης, επομένως κατά τα γνωστά από τη θεωρία

$$z'(x) - z(x) = xe^x \Leftrightarrow z'(x)e^{-x} - e^{-x}z(x) = x \Leftrightarrow \left(z(x)e^{-x}\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \Leftrightarrow z(x) = \frac{x^2}{2}e^x + C_1e^x.$$

Πράγματι, για τη λύση που βρήκαμε,

$$z'(x) = xe^x + \frac{x^2}{2}e^x + C_1e^x,$$

επομένως

$$z'(x) - z(x) = xe^x + \frac{x^2}{2}e^x + C_1e^x - \frac{x^2}{2}e^x - C_1e^x = xe^x.$$

(β΄) Παρατηρήστε πως

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = xe^x \Leftrightarrow (y'(x) - y(x))' - (y'(x) - y(x)) = xe^x \Leftrightarrow z'(x) - z(x) = xe^x$$
$$\Leftrightarrow z(x) = e^x \frac{x^2}{2} + C_1 e^x.$$

Η τελευταία συνεπαγωγή προέκυψε από το πρώτο σκέλος. Επομένως,

$$y'(x) - y(x) = e^x \frac{x^2}{2} + C_1 e^x \Leftrightarrow y'(x)e^{-x} - y(x)e^{-x} = \frac{x^2}{2} + C_1 \Leftrightarrow \left(y(x)e^{-x}\right)' = (\frac{x^3}{6} + C_1 x)'$$
$$\Leftrightarrow y(x)e^{-x} = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \Leftrightarrow y(x) = \frac{x^3}{6}e^x + C_1 xe^x + C_2 e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Πράγματι, για τη λύση που βρήκαμε,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{x^2}{2}e^x + \frac{x^3}{6}e^x + C_1 e^x + C_1 xe^x + C_2 e^x, \\ y''(x) &= xe^x + \frac{x^2}{2}e^x + \frac{x^2}{2}e^x + \frac{x^3}{6}e^x + C_1 e^x + C_1 e^x + C_1 xe^x + C_2 e^x, \end{aligned}$$

άρα

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = xe^x + \frac{x^2}{2}e^x + \frac{x^2}{2}e^x + \frac{x^3}{6}e^x + C_1 e^x + C_1 e^x + C_1 xe^x + C_2 e^x - x^2 e^x$$
$$- \frac{x^3}{3}e^x - 2C_1 e^x - 2C_1 xe^x - 2C_2 e^x + \frac{x^3}{6}e^x + C_1 xe^x + C_2 e^x = xe^x.$$

64. **(Διαφορική Εξίσωση 2)** Να προσδιορίσετε τη γενική λύση της ΔΕ

$$(\tan y(x))y'(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

Λύση: Παρατηρούμε πως

$$\tan y(x)dy = \frac{xdx}{x^2+1} \Leftrightarrow \int \tan y\, dy = \int \frac{xdx}{x^2+1} \Leftrightarrow -\int \frac{(\cos y)'}{\cos y}\, dy = \frac{1}{2}\int \frac{2x\, dx}{x^2+1}$$
$$\Leftrightarrow -\log|\cos y| = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C \Leftrightarrow \left|\frac{1}{\cos y}\right| = e^C\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow \cos y = \pm\frac{e^{-C}}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\Leftrightarrow y(x) = \arccos\left(\frac{K}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

65. **(Διαφορική Εξίσωση 3)** Να προσδιορίσετε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'(x) + (\tan x)y(x) = \frac{1}{\cos x}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Ακολούθως, να επαληθεύσετε ότι έχετε υπολογίσει σωστά την γενική λύση παραγωγίζοντας.

Λύση: Καταρχάς παρατηρούμε πως

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int \frac{(-\cos x)'}{\cos x}\, dx = -\int (\log\cos x)'\, dx = -\log(\cos x) + C.$$

Επομένως, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ΔΕ με το $\exp(-\log(\cos x)) = \frac{1}{\cos x}$, και έχουμε

$$\frac{y'(x)}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}y(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \left(\frac{y(x)}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} = (\tan x)' \Leftrightarrow \frac{y(x)}{\cos x} = \tan x + C \Leftrightarrow y(x) = \sin x + C\cos x.$$

Πράγματι, για την άνω λύση έχουμε

$$y'(x) + (\tan x)y(x) = \cos x - C\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}(\sin x + C\cos x) = \cos x - C\sin x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} + C\sin x$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

66. **(Διαφορική Εξίσωση 4)** Να προσδιορίσετε τη γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) + (2\log x + 5)y(x) = e^{-2x\log x}.$$

Λύση: Αρχικά θα υπολογίσουμε την παράγουσα της $2\log x + 5$. Έχουμε

$$\int 2\log x\,dx = 2\int \log x\,dx = 2\int (x)'\log x\,dx = 2x\log x - 2\int x(\log x)'\,dx = 2x\log x - 2\int dx = 2x\log x - 2x + C.$$

Επίσης,

$$\int 5\,dx = 5x + C,$$

άρα, τελικά,

$$\int (2\log x + 5)\,dx = 2x\log x + 3x + C.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} y'(x) + (2\log x + 5)y(x) = e^{-2x\log x} &\Leftrightarrow e^{2x\log x + 3x}y'(x) + (2\log x + 5)y(x)e^{2x\log x + 3x} = e^{3x} \\ \Leftrightarrow \left(e^{2x\log x + 3x}y(x)\right)' = \frac{1}{3}(e^{3x})' &\Leftrightarrow y(x)e^{2x\log x + 3x} = \frac{1}{3}e^{3x} + C \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{3}e^{-2x\log x} + Ce^{-2x\log x - 3x}. \end{aligned}$$

67. **(Πεδίο ορισμού ειδικών λύσεων)**

(α΄) Να προσδιορίσετε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\tan y(x) = y'(x).$$

(β΄) Να βρείτε την ειδική λύση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Ποιο είναι το μεγαλύτερο πεδίο ορισμού που μπορεί να έχει;

(γ΄) Να βρείτε την ειδική λύση που διέρχεται από το σημείο $(0, \frac{\pi}{6})$. Ποιο είναι το μεγαλύτερο πεδίο ορισμού που μπορεί να έχει;

Λύση:

(α΄) Η διαφορική εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών, και, κατά τα γνωστά από τη θεωρία, υποθέτοντας πως $y(x) \neq 0$,

$$\begin{aligned} \tan y(x) = y'(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{\tan y} = dx \Leftrightarrow \int \frac{\cos y\,dy}{\sin y} = \int dx \\ \Leftrightarrow \log|\sin y(x)| = x + C \Leftrightarrow \sin y(x) = \pm e^{x+C} \Leftrightarrow \sin y(x) = Ke^x, \end{aligned}$$

όπου $K = \pm e^C$, επομένως $K \in \mathbb{R}^*$. Υπάρχει, όμως, και η λύση $y(x) = 0$, επομένως, η γενική λύση είναι η ακόλουθη:

$$y(x) = \arcsin(Ke^x), \quad K \in \mathbb{R}.$$

(β΄) Προφανώς σε αυτή την περίπτωση $K = 0$, επομένως $y(x) = 0$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

(γ΄) Σε αυτή την περίπτωση, πρέπει

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin(Ke^0) \Leftrightarrow K = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

επομένως η ειδική λύση είναι η

$$y(x) = \arcsin\frac{e^x}{2}.$$

Σχετικά με το πεδίο ορισμού της, θα πρέπει

$$\frac{e^x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \log 2,$$

επομένως το πεδίο ορισμού είναι το $(-\infty, \log 2)$.

68. **(Κορωνοϊός)** Έστω πως η διάδοση του κορωνοϊού σε μια χώρα περιγράφεται με την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$y'(x) = y^2(x)(1 - y(x)),$$

όπου x ο χρόνος και $y(x) \in [0, 1]$ είναι το ποσοστό του πληθυσμού που έχει μολυνθεί.

(α΄) Βρείτε συντελεστές A, B, C, για τους οποίους, για κάθε x, ισχύει

$$\frac{1}{x^2(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1-x}.$$

(β΄) Βρείτε μια εξίσωση για τη γενική λύση της άνω ΔΕ. Δεν χρειάζεται να λύσετε την εξίσωση που θα βρείτε ως προς τη γενική λύση. Αναφέρετε τις παραδοχές που κάνατε.

(γ΄) Υπάρχουν λύσεις της άνω ΔΕ που δεν περιλαμβάνονται στην άνω γενική λύση, λόγω των παραδοχών που έχετε κάνει;

Λύση:

(α΄)

$$\frac{1}{x^2(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1-x} \Leftrightarrow 1 = Ax(1-x) + B(1-x) + Cx^2$$
$$\Leftrightarrow x^2(C - A) + x(A - B) + (B - 1) = 0 \Leftrightarrow A = B = C = 1.$$

(β΄) Η ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών. Υποθέτουμε ότι $y(x) \neq 0, 1$, επομένως έχουμε, κατά τη γνωστή μέθοδο,

$$y'(x) = y^2(x)(1-y(x)) \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2(1-y)} = dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2(1-y)} = \int dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{y^2} + \int \frac{dy}{1-y} = x + C$$
$$\Leftrightarrow \log|y| - \frac{1}{y} - \log|1-y| = x + C \Leftrightarrow \log\left|\frac{y}{1-y}\right| = x + \frac{1}{y} + C.$$

(γ΄) Στο προηγούμενο σκέλος, υποθέσαμε πως $y(x) \neq 0, 1$. Δύο λύσεις που δεν περιλαμβάνονται στην άνω γενική λύση είναι οι $y(x) = 0$ (δεν είναι κανείς μολυσμένος) και $y(x) = 1$ (είναι όλοι μολυσμένοι).

11η Ομάδα Ασκήσεων

69. **(Ίσες παράγωγοι)** Να δείξετε ότι αν δύο πολυώνυμα βαθμού μέχρι n έχουν ίσες όλες τις παραγώγους τους από μηδενικής μέχρι n τάξης σε ένα δοσμένο σημείο x_0, τότε είναι ίσα. Θεωρήστε $n \in \mathbb{N}$, με την παράγωγο μηδενικής τάξης μιας συνάρτησης να είναι η ίδια η συνάρτηση.

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή.

Παρατηρούμε, καταρχάς, ότι η ιδιότητα ισχύει για $n = 0$, αφού, πράγματι, αν δύο πολυώνυμα μηδενικού βαθμού $P_1(x) = a_0$ και $P_2(x) = b_0$ είναι ίσα σε ένα σημείο x_0, τότε $a_0 = b_0$ και άρα τα πολυώνυμα είναι ίσα παντού.

Έστω, ακολούθως, ότι η ιδιότητα ισχύει για κάποιο n. Επομένως, αν δύο πολυώνυμα

$$\begin{aligned} P_1(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \\ P_2(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n, \end{aligned}$$

έχουν ίσες παραγώγους από μηδενικής μέχρι και n τάξης σε ένα σημείο x_0, τότε $a_k = b_k$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$.

Θα αποδείξουμε ότι αν ισχύει η ιδιότητα για το n, θα ισχύει και για το $n+1$. Έστω, λοιπόν, δύο πολυώνυμα μέχρι $n+1$ βαθμού

$$\begin{aligned} P_1(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1}, \\ P_2(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + b_{n+1}x^{n+1}, \end{aligned}$$

τα οποία έχουν όλες τις παραγώγους τους από 0 μέχρι $n+1$ τάξεως ίσες, στο x_0. Εξετάζουμε τις παραγώγους αυτών των πολυωνύμων:

$$\begin{aligned} P_1'(x) &= a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + (n+1)a_{n+1}x^n, \\ P_2'(x) &= b_1 + 2b_2x + \cdots + nb_nx^{n-1} + (n+1)b_{n+1}x^n. \end{aligned}$$

Τα πολυώνυμα αυτά είναι μέχρι n βαθμού, και έχουν όλες τις παραγώγους από 0 μέχρι n τάξης ίσες, σε κάποιο σημείο x_0, αφού οι παράγωγοι k τάξης των $P_1(x)$ και $P_2(x)$ είναι οι παράγωγοι $k-1$ τάξης των παραγώγων τους $P_1'(x)$ και $P_2'(x)$, αντιστοίχως. Άρα, τα πολυώνυμα $P_1'(x)$ και $P_2'(x)$ είναι ίσα, και επομένως για κάθε $k = 1, \ldots, n+1$ έχουμε

$$ka_k = kb_k \Rightarrow a_k = b_k.$$

Μένει να αποδείξουμε ότι και $a_0 = b_0$. Αυτό προκύπτει παρατηρώντας πως

$$\begin{aligned} &P_1(x_0) = P_2(x_0) \Rightarrow a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n + a_{n+1}x_0^{n+1} = b_0 + b_1x_0 + b_2x_0^2 + \cdots + b_nx_0^n + b_{n+1}x_0^{n+1} \\ &\Rightarrow a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n + a_{n+1}x_0^{n+1} = b_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n + a_{n+1}x_0^{n+1} \Rightarrow a_0 = b_0, \end{aligned}$$

άρα η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

70. **(Πολυώνυμο Taylor)**

(α΄) Να προσδιορίσετε το πολυώνυμο Taylor 4ου βαθμού της συνάρτησης $f(x) = xe^x$ στη θέση $x_0 = 1$.

(β΄) Να γράψετε ένα τύπο για το πολυώνυμο Taylor n-οστου βαθμού της συνάρτησης $f(x) = xe^x$ στη θέση $x_0 = 1$.

Λύση:

(α΄) Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= xe^x \Rightarrow f(1) = e, \\ f'(x) &= e^x + xe^x \Rightarrow f'(1) = 2e, \\ f''(x) &= e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x \Rightarrow f''(1) = 3e, \\ f'''(x) &= 2e^x + e^x + xe^x = 3e^x + xe^x \Rightarrow f'''(1) = 4e, \\ f^{(4)}(x) &= 3e^x + e^x + xe^x = 4e^x + xe^x \Rightarrow f^{(4)} = 5e, \end{aligned}$$

επομένως

$$\begin{aligned} P_4(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)(x-1)}{4!}(x-1)^4 \\ &= e\left[1 + 2(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{4}{3!}(x-1)^3 + \frac{5}{4!}(x-1)^4\right]. \end{aligned}$$

(β΄) Παρατηρούμε ότι στη γενική περίπτωση

$$f^{(n)}(x) = ne^x + xe^x \Rightarrow f^{(n)}(1) = (n+1)e,$$

επομένως

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e(k+1)}{k!}(x-1)^k.$$

71. **(Πολυωνύμα Taylor)** Να προσδιορίσετε τα ακόλουθα πολυώνυμα Taylor:

(α΄) Το πολυώνυμο Taylor δευτέρου βαθμού της συνάρτησης $f_1(x) = x^3 + x^2 + 4x + 6$ στο $x_1 = 2$.

(β΄) Το πολυώνυμο Taylor τρίτου βαθμού της συνάρτησης $f_2(x) = \arctan x$ στο $x_2 = 2$.

Σε κάθε περίπτωση, σχεδιάστε τόσο τη συνάρτηση όσο και το πολυώνυμο Taylor, αν προτιμάτε με χρήση υπολογιστή.

Λύση:

(α΄) Έχουμε $f_1'(x) = 3x^2 + 2x + 4$ και $f_1''(x) = 6x + 2$, επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία, το ζητούμενο πολυώνυμο είναι το

$$P_1(x) = f_1(2) + f_1'(2)(x-2) + f_1''(2)(x-2)^2/2 = 26 + 20(x-2) + 7(x-2)^2.$$

(β΄) Σχετικά με τις παραγώγους της συνάρτησης $f_2(x) = \arctan x$, έχουμε

$$\begin{aligned}
(\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2},\\
(\arctan x)'' &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2},\\
(\arctan x)''' &= \frac{-2(1+x^2)^2 + 4x(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2 - 2x^2 + 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}.
\end{aligned}$$

Επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία των πολυωνύμων Taylor, το πολυώνυμο Taylor τρίτης τάξης στο $x_2 = 2$ είναι το

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= f_2(2) + f_2'(2)(x-2) + \frac{f_2''(2)}{2}(x-2)^2 + \frac{f_2'''(2)}{6}(x-2)^3\\
&= \arctan(2) + \frac{1}{5}(x-2) - \frac{2}{25}(x-2)^2 + \frac{11}{375}(x-2)^3.
\end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις και τα αντίστοιχα πολυώνυμα Taylor έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 5.

72. **(Ολοκληρώματα)**

(α΄) Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x \log x \, dx$ και κατόπιν να επαληθεύσετε ότι βρήκατε το σωστό αποτέλεσμα παραγωγίζοντας.

(β΄) Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x \log^2 x \, dx$ και κατόπιν να επαληθεύσετε ότι βρήκατε το σωστό αποτέλεσμα παραγωγίζοντας.

(γ΄) Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα $\int_0^\infty x \log x \, dx$

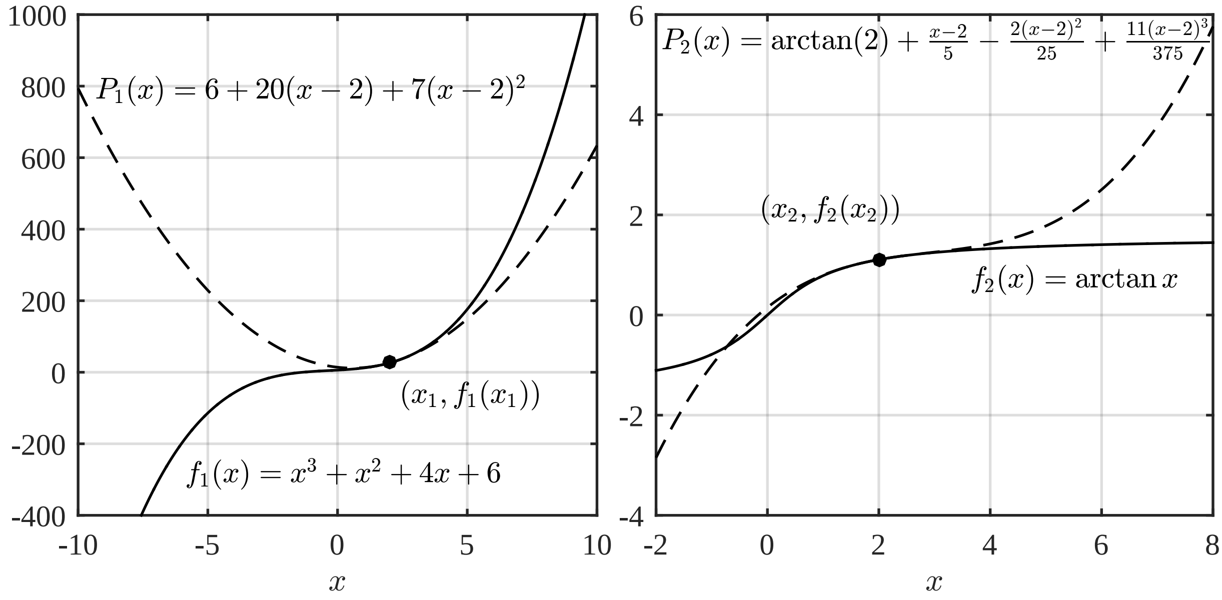
Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$\int x \log x \, dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log x \, dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2x}\, dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x}{2}\, dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Πράγματι,

$$\left(\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}\right)' = x\log x + \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} - \frac{x}{2} = x\log x.$$



Σχήμα 5: Οι συναρτήσεις και τα πολυώνυμα Taylor για τις $f_1(x), f_2(x)$.

(β΄) Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\int x\log^2 x\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log^2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\log^2 x - \int x\log x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\log^2 x - \left[\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + C\right] = \frac{1}{2}x^2\log^2 x - \frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4} + C.$$

Πράγματι,

$$\left(\frac{1}{2}x^2\log^2 x - \frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4}\right)' = x\log^2 x + x^2\log x\left(\frac{1}{x}\right) - x\log x - \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x} + \frac{x}{2}$$
$$= x\log^2 x + x\log x - x\log x - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x\log^2 x.$$

(γ΄) Το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό λόγω απειρισμού στο ∞. Σχετικά με το $x=0$, στην πραγματικότητα αυτό το άκρο ολοκλήρωσης δεν δημιουργεί πρόβλημα, διότι η συνάρτηση παραμένει φραγμένη (όπως μπορούμε να δούμε με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital). Μπορούμε όμως και πάλι να γράψουμε το ολοκλήρωμα ως καταχρηστικό, επομένως

$$\int_0^\infty x\log x\,dx = \int_0^1 x\log x\,dx + \int_1^\infty x\log x\,dx.$$

Σχετικά με το πρώτο ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 x\log x\,dx = \lim_{h\to 0}\int_h^1 x\log x\,dx = \lim_{h\to 0}\left[\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}\right]_h^1 = \lim_{h\to 0}\left[-\frac{1}{4} - \frac{h^2}{2}\log h + \frac{h^2}{4}\right]$$
$$= -\frac{1}{4} - \lim_{h\to 0^+}\frac{h^2}{2}\log h = -\frac{1}{4} - \lim_{h\to 0^+}\frac{\log h}{\frac{2}{h^2}} = -\frac{1}{4} - \lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{1}{h}}{-\frac{4}{h^3}} = -\frac{1}{4}.$$

Σχετικά με το δεύτερο ολοκλήρωμα:

$$\int_1^\infty x\log x\,dx = \lim_{h\to\infty}\left[\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}\right]_1^h = \lim_{h\to\infty} h^2\left[\frac{\log h}{2} - \frac{1}{4}\right] + \frac{1}{4} = \infty.$$

73. **(Όριο)** Να υπολογίσετε το όριο
$$\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^{(\tan x)}.$$

Λύση: Παρατηρούμε πως
$$\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^{(\tan x)} = \lim_{x\to 0^+} \exp\left[(\log\tan x)(\tan x)\right] = \exp \lim_{x\to 0^+} \left[(\log\tan x)(\tan x)\right].$$

Όμως,
$$\lim_{x\to 0^+} (\log\tan x)(\tan x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log\tan x}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\tan^2 x}\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} (-\tan x) = 0.$$
Η δεύτερη ισότητα προέκυψε από τον Κανόνα του L'Hôpital. Επομένως, τελικά,
$$\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^{(\tan x)} = e^0 = 1.$$

74. **(Αόριστα Ολοκληρώματα)**

(α΄) Να υπολογίσετε την παράγωγο της $\tan x$ και κατόπιν το αόριστο ολοκληρωμα $\int \tan^2 x\, dx$.

(β΄) Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x\tan^2 x\, dx$.

Λύση:

(α΄) Καταρχάς έχουμε
$$(\tan x)' = \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$
Σχετικά με το ολοκλήρωμα, παρατηρούμε πως
$$\int \tan^2 x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x}\right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - \int dx = \tan x - x + C.$$
Πράγματι,
$$(\tan x - x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x.$$

(β΄) Παρατηρούμε πως
$$\int x\tan^2 x\, dx = \int x\left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x}\right) dx = \int \frac{x dx}{\cos^2 x} - \int x\, dx = \int x(\tan x)'\, dx - \frac{x^2}{2} + C$$
$$= x\tan x - \int \tan x\, dx - \frac{x^2}{2} + C = x\tan x + \int (\log|\cos x|)'\, dx - \frac{x^2}{2} + C = x\tan x + \log|\cos x| - \frac{x^2}{2} + C.$$
Πράγματι,
$$\left(x\tan x + \log|\cos x| - \frac{x^2}{2}\right)' = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} - x = x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)$$
$$= x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) = x\tan^2 x.$$

75. **(Υπολογισμός Ορίων)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

(α΄) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \left(1 + e^{-h^2}\right) dh$.

(β΄) $\lim_{x\to 0^+} x\log^2 x$.

(γ΄) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$.

Λύση:

(α΄) Παρατηρήστε οτι το ολοκλήρωμα τείνει στο άπειρο καθώς $x \to \infty$. Πράγματι:

$$\int_0^x \left(1 + e^{-h^2}\right) dh > \int_0^x dh = x,$$

που τείνει στο άπειρο καθώς $x \to \infty$.

Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον Κανόνα του L'Hôpital, βάσει του οποίου, σε συνδυασμό με το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \left(1 + e^{-h^2}\right) dh = \frac{1 + e^{-x^2}}{1} = 1.$$

(β΄) Χρησιμοποιούμε τον Κανόνα του L'Hôpital, ως εξής:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x \log^2 x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2(\log x)\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} - 2\frac{\log x}{\frac{1}{x}} \\ = \lim_{x\to 0^+} - 2\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0.\end{aligned}$$

(γ΄) Παρατηρούμε πως

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \exp\left((\log x)(\sin x)\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0^+} (\log x)(\sin x)\right).$$

Σχετικά με το παραπάνω όριο, έχουμε απροσδιοριστιά $\infty \times 0$, και από τον Κανόνα του L'Hôpital προκύπτει

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} (\log x)(\sin x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\frac{1}{\log x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{-\frac{1}{x \log^2 x}} \\ = \lim_{x\to 0^+} (\cos x)(x \log^2 x) = \lim_{x\to 0^+} (\cos x) \lim_{x\to 0^+} x \log^2 x = 0,\end{aligned}$$

άρα τελικά το ζητούμενο όριο ισούται με 1. Στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε το προηγούμενο σκέλος.

12η Ομάδα Ασκήσεων

76. **(Σειρές 1)** Να προσδιορίσετε αν συγκλίνουν οι ακόλουθες σειρές:

$$\sum \frac{\sin\frac{1}{n}}{n}, \quad \frac{e^{-\sqrt{n}}}{n}$$

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$\frac{\frac{\sin\frac{1}{n}}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

Γνωρίζουμε, όμως, ότι η $\sum \frac{1}{n^2}$. Θα συγκλίνει, επομένως, και η δοσμένη.

(β΄) Θα εφαρμόσουμε το Κριτήριο του Λόγου. Παρατηρούμε πώς

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{e^{-\sqrt{n+1}}}{n+1}}{\frac{e^{-\sqrt{n}}}{n}} = \frac{n}{n+1} \exp\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right) = \frac{n}{n+1} \exp\left(\frac{n-n-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)$$
$$= \frac{n}{n+1} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right),$$

το οποίο τείνει στο 0, επομένως πράγματι η σειρά συγκλίνει.

77. **(Σειρές 2)** Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν:

(α΄) $\displaystyle\sum_n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

(β΄) $\displaystyle\sum \frac{(\log n)^2}{n^3}$.

(γ΄) $\displaystyle\sum \frac{e^{n^2}}{(3n)!}$.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sin h}{h} = 1,$$

και με δεδομένο ότι η αρμονική σειρά $\sum \frac{1}{n}$ αποκλίνει, από το Κριτήριο της Σύγκρισης στο όριο θα αποκλίνει και η δοσμένη.

(β΄) Παρατηρούμε πως

$$\lim_{h\to\infty} \frac{(\log n)^2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\log n \frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\log n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}}{1} = 0.$$

Επομένως,

$$\frac{(\log n)^2}{n^3} \leq \frac{1}{n^2},$$

για αρκούντως μεγάλα n, και αφού η σειρά $\sum \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, κατά τα γνωστά από τη θεωρία, θα συγκλίνει και η δοσμένη.

(γ΄) Παρατηρούμε πως

$$\frac{\frac{e^{(n+1)^2}}{(3n+3)!}}{\frac{e^{n^2}}{(3n)!}} = \frac{e^{2n+1}}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)},$$

το οποίο τείνει στο άπειρο, όπως προκύπτει με εφαρμογή του Κανόνα του L'Hôpital. Επομένως, από το Κριτήριο Σύγκρισης στο Όριο, η σειρά αποκλίνει.

78. **(Σειρές 3)** Να προσδιορίσετε αν αποκλίνουν ή συγκλίνουν οι ακόλουθες σειρές:

(α΄) $\sum \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

(β΄) $\sum \frac{\arccos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}$.

(γ΄) $\sum a_n$ όπου

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & n \text{ περιττό}, \\ \frac{2}{n}, & n \text{ άρτιο}. \end{cases}$$

Λύση:

(α΄) Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του ολοκληρώματος, έχουμε

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^\infty \left(-2e^{-\sqrt{x}}\right)'\, dx = \left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_0^\infty = 0 + 2,$$

που είναι πεπερασμένο, επομένως, η σειρά συγκλίνει.

(β΄) Παρατηρούμε πως $0 \le \arccos x \le \pi$, επομένως οι όροι της σειράς είναι όλοι θετικοί, και επιπλέον

$$\frac{\arccos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2} \le \frac{\pi}{n^2}$$

Όμως, η σειρά $\sum \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, επομένως θα συγκλίνει και η δοσμένη.

(γ΄) Παρατηρήστε οτι οι όροι που αντιστοιχούν σε άρτια n από μόνοι τους δημιουργούν την αρμονική σειρά, η οποία αποκλίνει. Επομένως η αρχική σειρά, που περιλαμβάνει επιπλέον όρους, και αυτή θα αποκλίνει.

79. **(Σειρές 4)** Να προσδιορίσετε αν συγκλίνουν οι σειρές

(α΄) $\displaystyle\sum \frac{(\log n)^7}{n^2}$.

(β΄) $\displaystyle\sum \frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$.

(γ΄) $\displaystyle\sum \frac{n^3 + n^2 + 1}{n!}$.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^7}{\sqrt{n}} = 0,$$

επομένως από κάποιο n_0 και μετά, έχουμε

$$\frac{(\log n)^7}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{(\log n)^7}{n^2} \le \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}},$$

και αφού η σειρά $\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η δοσμένη, σύμφωνα με το κριτήριο της

(β΄) Παρατηρούμε πως

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n} = \cos 0 = 1,$$

επομένως, σύμφωνα με το κριτήριο της σύγκρισης στο όριο η δοσμένη σειρά αποκλίνει, αφού αποκλίνει η αρμονική σειρά $\sum \frac{1}{n}$.

(γ΄) Παρατηρούμε πως

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3+(n+1)^2+1}{(n+1)!}}{\frac{n^3+n^2+1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \times \frac{\frac{(n+1)^3}{n^3} + \frac{(n+1)^2}{n^3} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} = 0 \times 1 = 0,$$

επομένως, σύμφωνα με το κριτήριο του λόγου, η σειρά συγκλίνει.

80. **(Σειρές 5)**

(α΄) Να προσδιορίσετε αν συγκλίνει ή όχι η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log(\log n))^{2n}}.$$

(β΄) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 \log x$, με $x > 0$. Να προσδιορίσετε το όριο $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ και να εντοπίσετε όλες τις ρίζες της.

(γ΄) Να αποδείξετε ότι αν συγκλίνει η σειρά $\sum a_n$, τότε θα συγκλίνει και η σειρά $\sum a_n^3 \log(a_n)$.

(δ΄) Να αποδείξετε ότι μπορεί η σειρά $\sum a_n^3 \log(a_n)$ να συγκλίνει χωρίς όμως να συγκλίνει η σειρά $\sum a_n$, δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

Λύση:

(α΄) Το απλούστερο είναι να χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο της Ρίζας:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(\log(\log n))^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\log(\log n))^{2}} = 0,$$

επομένως η σειρά συγκλίνει.

(β΄) Σχετικά με το όριο, έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \log x = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{h^2} \log \frac{1}{h} = \lim_{h\to\infty} \frac{-\log h}{h^2} = \lim_{h\to\infty} \frac{\frac{1}{h}}{2h} = 0.$$

Σχετικά με τις ρίζες, παρατηρούμε ότι για κάθε ρίζα x_0,

$$x_0^2 \log x_0 = 0 \Rightarrow \log x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 1,$$

επομένως υπάρχει μόνο μια ρίζα, το $x_0 = 1$.

(γ΄) Θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο του Λόγου:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^3 \log a_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n^2 \log a_n = 0.$$

Το όριο προκύπτει χρησιμοποιώντας το δεύτερο σκέλος και παρατηρώντας οτι θα πρέπει $a_n \to 0$, αφού η $\sum a_n$ συγκλίνει.

(δ΄) Ένα αντιπαράδειγμα είναι στην περίπτωση $a_n = 1$. Πράγματι, η σειρά $\sum 1$ δεν συγκλίνει, όμως η σειρά $\sum 1^3 \log 1 = 0$.

81. **(Σειρές 6)**

(α΄) Να προσδιορίσετε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η ακόλουθη σειρά:

$$\sum \frac{e^n + n}{n^2 e^n + n^{10}}.$$

(β΄) Έστω $a_n > 0$. Αν συγκλίνει η $\sum a_n$, τότε τι από τα τρια συμβαίνει, και γιατί;

i. Η $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ αποκλίνει.
ii. Η $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ συγκλίνει.
iii. Η $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει, ανάλογα με την μορφή της a_n.

(γ΄) Έστω $a_n > 0$. Αν συγκλίνει η $\sum a_n$, τότε τι από τα τρια συμβαίνει, και γιατί;

i. Η $\sum \sqrt{a_n}$ αποκλίνει.
ii. Η $\sum \sqrt{a_n}$ συγκλίνει.
iii. Η $\sum \sqrt{a_n}$ μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει, ανάλογα με την μορφή της a_n.

Λύση:

(α΄) Έστω $a_n = \frac{e^n+n}{n^2e^n+n^{10}}$ και $b_n = \frac{1}{n^2}$. Παρατηρήστε πως

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e^n+n}{n^2e^n+n^{10}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2e^n+n^3}{n^2e^n+n^{10}} = \frac{1+ne^{-n}}{1+n^8e^{-n}} = 1.$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} ne^{-n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^n} = 0,\\ \lim_{n\to\infty} n^8e^{-n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^8}{e^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{8n^7}{e^n} = \cdots = \frac{8!}{e^n} = 0.\end{aligned}$$

Επειδή, όμως, συγκλίνει η $\sum b_n$, από το Κριτήριο της Σύγκρισης στο Όριο προκύπτει οτι θα συγκλίνει και η δοσμένη σειρά.

(β΄) Εφόσον η $\sum a_n$ συγκλίνει, θα έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Από το Κριτήριο της Σύγκρισης στο Όριο, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{a_n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a_n} = 1,$$

επομένως θα συγκλίνει σίγουρα και η $\frac{a_n}{1+a_n}$.

(γ΄) Σε αυτή την περίπτωση, δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι για την σύγκλιση ή απόκλιση της $\sum\sqrt{a_n}$. Πράγματι,

i. Στην περίπτωση που $a_n = \frac{1}{n^2}$, η $\sum a_n$ συγκλίνει, κατά τα γνωστά από τη θεωρία για σειρές της μορφής $\sum\frac{1}{n^p}$ με $p > 1$, αλλά η $\sum\sqrt{a_n}$ είναι η αρμονική σειρά, που αποκλίνει.

ii. Στην περίπτωση που $a_n = \frac{1}{n^4}$, η $\sum a_n$ αλλά και η $\sum\sqrt{a_n}$ συγκλίνουν, κατά τα γνωστά από τη θεωρία για σειρές της μορφής $\sum\frac{1}{n^p}$ με $p > 1$.

82. **(Όχι σειρές)**

Να προσδιορίσετε τα όρια

$$\lim_{n\to\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n, \quad \lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\sin x}, \quad \lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{(\sin x)^{(\sin x)}}.$$

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n &= \lim_{n\to\infty}\exp\left[n\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = \exp\left[\lim_{n\to\infty} n\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]\\ &= \exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n}}\right] = \exp\left[\lim_{h\to 0^+}\frac{\log(\cos h)}{h}\right] = \exp\left[-\lim_{h\to 0^+}\frac{\sin h}{\cos h}\right] = \exp(0) = 1.\end{aligned}$$

(β΄) Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\sin x} &= \lim_{x\to 0^+}\exp\left[(\sin x)\log\sin x\right] = \exp\left[\lim_{x\to 0^+}(\sin x)\log\sin x\right]\\ &= \exp\left[\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}\right] = \exp\left[\lim_{x\to 0^+}(-\sin x)\right] = \exp 0 = 1.\end{aligned}$$

(γ΄) Αφού, από το προηγούμενο σκέλος, $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\sin x} = 1$, έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{(\sin x)^{(\sin x)}} = \lim_{x\to 0^+}(\sin x)^1 = 0^1 = 0.$$