Ονομ/νυμο: ΑΛΒΙΟΝΑ ΜΑΝΤΣΟ
Ομάδα ασκ: 6η
Αρ. Μητρ.: 3200098

6η Ομάδα Ασκήσεων

38. (Υπολογισμός των τιμών της $x^{1/3}$)

- $f(x) = x^{1/3}$, $x_0 = 27$

$f(27) = 27^{1/3} = 3$

- $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$

$f'(27) = \frac{1}{3} \cdot 27^{-2/3} = \frac{1}{3 \cdot 27^{2/3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{3 \cdot 9} = \frac{1}{27}$

$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(27) + f'(27)(x-27) = 3 + \frac{1}{27}(x-27)$

x	$f(x) = x^{1/3}$	$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$	$x - x_0$	$E(x)$
20	2.7144	2.7407	-7	0.0263
26	2.9625	2.9630	-1	0.0005
26.5	2.9814	2.9815	-0.5	0.0001
27	3	3	0	0
27.5	3.0184	3.0185	0.5	0.0001
28	3.0366	3.0370	1	0.0004
34	3.2396	3.2593	7	0.0197

39. (Διαφορετικές απροσδιοριστίες 0/0)

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\sin x \cdot \frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \sin x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0 \cdot 1 = 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \overset{(1)}{} \cdot \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = (+\infty) \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 =$

$= (+\infty) \cdot 1 = +\infty$

(1) $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ και $x^2 > 0$ κοντά στο 0 άρα $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)$

Έχουμε $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ αφού $x < 0$ στο 0^- και

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ αφού $x > 0$ στο 0^+

Αφού $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} \neq \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}$ το $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει και συνεπώς δεν υπάρχει και το αρχικό όριο.

40. (Ιδιότητα κυρτών συναρτήσεων)

Επειδή η f είναι κυρτή, για τα x_0, x_2 έχουμε ότι $\forall \theta \in [0,1]$

$f((1-\theta)x_0 + \theta x_2) \leq (1-\theta)f(x_0) + \theta(f(x_2))$ (σχέση 1α)

Επειδή $x_0 < x_1 < x_2$ $\exists\, \theta_1 \in (0,1)$: $(1-\theta_1)x_0 + \theta_1 x_2 = x_1$ οπότε για $\theta = \theta_1$

$① \Rightarrow f(x_1) \leq (1-\theta_1)f(x_0) + \theta_1 f(x_2)$

Είναι επίσης $f(x_1) = (1-\theta_1)f(x_1) + \theta_1 f(x_1)$ (σχέση 1β)

Έστω ότι $f(x_1) > f(x_0)$ ② και $f(x_1) > f(x_2)$ ③.

$② \xrightarrow{\cdot(1-\theta_1)>0} (1-\theta_1)f(x_1) > (1-\theta_1)f(x_0)$ ④

$③ \xrightarrow{\cdot\theta_1>0} \theta_1 f(x_1) > \theta_1 f(x_2)$ ⑤

Με πρόσθεση των σχέσεων ④ και ⑤ κατά μέλη έχουμε $(1-\theta_1)f(x_1) + \theta_1 f(x_1) >$
$> (1-\theta_1)f(x_0) + \theta_1 f(x_2) \overset{(1β)}{\Rightarrow} f(x_1) > (1-\theta_1)f(x_0) + \theta_1 f(x_2)$ που είναι άτοπο λόγω της σχέσης (1α)

ταυτόχρονα ότι $f(x_1) > f(x_0)$ και $f(x_1) > f(x_2)$

41. (Κυρτή σύνθεση)

Έστω $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ και $\theta \in [0,1]$.

Επειδή η f είναι κυρτή έχουμε $f((1-\theta)x_0 + \theta x_1) \leq (1-\theta)f(x_0) + \theta f(x_1) \xrightarrow{g:\text{αύξουσα}}$

$g(f((1-\theta)x_0 + \theta x_1)) \leq g((1-\theta)f(x_0) + \theta f(x_1))$ ①

Επειδή η g είναι κυρτή, $g((1-\theta)f(x_0) + \theta f(x_1)) \leq (1-\theta)g(f(x_0)) + \theta g(f(x_1))$ ②

$① \overset{(2)}{\Rightarrow} g(f((1-\theta)x_0 + \theta x_1)) \leq (1-\theta)g(f(x_0)) + \theta g(f(x_1)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (g\circ f)((1-\theta)x_0 + \theta x_1) \leq (1-\theta)(g\circ f)(x_0) + \theta(g\circ f)(x_1)$, που σημαίνει ότι η $g\circ f$ είναι κυρτή

42. (Τοπικό ελάχιστο = Ολικό ελάχιστο)

Έστω $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο στο $(a,\beta) \subseteq I$. Άρα $\forall x \in (a,\beta)$ ισχύει $f(x_0) \leq f(x)$

Έστω ότι η f δεν παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο. Θα υπάρχει τότε $x_1 \in I$ με $x_1 \neq x_0$: $f(x_1) < f(x_0)$ ②

Θα ισχύει $x_0 < x_1 \Rightarrow a < x_0 < \beta < x_1$ ή $a < x_0 < x_1 < \beta$

ή

$x_0 > x_1 \Rightarrow x_1 < a < x_0 < \beta$ ή $a < x_1 < x_0 < \beta$

Σε κάθε περίπτωση $\exists x_M \in (a,\beta)$: $x_1 < x_M < x_0$ επομένως υπάρχει $\theta_M \in (0,1)$: $x_M = (1-\theta_M)x_0 + \theta_M x_1$ ①

Για το x_M έχουμε ότι $f(x_M) > f(x_1)$ και $f(x_M) \geq f(x_0)$ αφού $x_M \in (a,\beta)$, δηλαδή $f(x_1) < f(x_0) < f(x_M)$ ⑤

Λόγω της κυρτότητας της f, για τα x_M, x_0, x_1 έχουμε:

$$f((1-\theta_M)x_0 + \theta_M x_1) \overset{①}{=} f(x_M) \leq (1-\theta_M)f(x_0) + \theta_M f(x_1) = f(x_0) - \theta_M f(x_0) + \theta_M f(x_1)$$
$$= f(x_0) - \theta_M(f(x_0) - f(x_1)) \quad ③$$

$$② \Rightarrow f(x_0) - f(x_1) > 0 \xrightarrow{\theta_M \in (0,1)} \theta_M(f(x_0) - f(x_1)) > 0 \Rightarrow -\theta_M(f(x_0) - f(x_1)) < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x_0) - \theta_M(f(x_0) - f(x_1)) < f(x_0) \quad ④$$

$$③ \Rightarrow f(x_M) \leq f(x_0) - \theta_M(f(x_0) - f(x_1)) \overset{(4)}{\Longrightarrow} f(x_M) < f(x_0)$$ που είναι άτοπο λόγω της σχέσης 5.

Άρα το $f(x_0)$ είναι και ολικό ελάχιστο της f

```python
def newton_raphson_method(f, f_deriv, x, M, Ef):
    print("n \t x(n) \t\t f(x(n)) \t f'(x(n))")
    n=0
    print(n,'\t', "{:.8f}".format(round (x,8)),'\t',\
          "{:.8f}".format(round(f(x),8)),'\t',\
          "{:.8f}".format(round(f_deriv(x),8)))
    while n < M and abs(f(x))>Ef and abs(f_deriv(x))>0:
        x = x - f(x)/f_deriv(x)
        n = n + 1
        print(n,'\t', "{:.8f}".format(round (x,8)),'\t',\
              "{:.8f}".format(round(f(x),8)),'\t',\
              "{:.8f}".format(round(f_deriv(x),8)))
    return x

from math import cos
funct = lambda x: 2 - cos(x) + x**3

from math import sin
funct_derivative = lambda x: sin(x) + 3*x**2

newton_raphson_method(funct, funct_derivative, -1, 10, 10**(-8))
```

PROBLEMS OUTPUT DEBUG CONSOLE TERMINAL

```
PS C:\Users\Alviona> & python c:/Users/Alviona/Desktop/html/newton_raphson.py
n         x(n)          f(x(n))        f'(x(n))
0         -1.00000000   0.45969769     2.15852902
1         -1.21296804   -0.13487043    3.47721475
2         -1.17418113   -0.00514357    3.21373013
3         -1.17258063   -0.00000852    3.20308161
4         -1.17257796   -0.00000000    3.20306392
PS C:\Users\Alviona>
```