Ονομ./νυμο: ΑΛΒΙΟΝΑ ΜΑΝΤΣΟ
Ομ. Ασκ. : $10^{η}$
Αρ. Μητρ. : 3200098

$10^{η}$ Ομάδα Ασκήσεων

57. (Ενεργοποιημένες συνδέσεις)

Δίνεται Τ.Μ. X με $\mu = 2000$, $\sigma = 500$

Θέλουμε $P(|X-\mu|>S) \leq 0.01$ ①

Όμως από την ανισότητα Chebychev $P(|X-\mu| \geq S) \leq \dfrac{\sigma^2}{S^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(|X-2000| \geq S) \leq \dfrac{250000}{S^2}$

Είναι $P(|X-\mu|>S) \leq P(|X-\mu| \geq S) \leq \dfrac{250.000}{S^2}$, και συνεπώς αν

απαιτήσουμε $\dfrac{250.000}{S^2} \leq 0.01$ θα προκύψει το ζητούμενο (1)

Έχουμε $\dfrac{250.000}{0.01} \leq S^2 \Leftrightarrow S^2 \geq 25.000.000 \Rightarrow S \geq 5000$ και ένα

τέτοιο S θα μπορούσε για παράδειγμα να είναι το 5000.

58. (Πυκνότητα πιθανότητας)

(α') Πρέπει $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} c e^{-4|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} c e^{4x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} c e^{-4x}\,dx =$

$\displaystyle= \frac{c}{4}\int_{-\infty}^{0} (e^{4x})'\,dx - \frac{c}{4}\int_{0}^{+\infty} (e^{-4x})'\,dx = \frac{c}{4}\lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0}(e^{4x})'\,dx - \frac{c}{4}\lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t}(e^{-4x})'\,dx$

$\displaystyle= \frac{c}{4}\left(\lim_{t\to-\infty}(1-e^{4t})\right) - \frac{c}{4}\left(\lim_{t\to+\infty}(e^{-4t}-1)\right) =$

$\displaystyle= \frac{c}{4}(1-0) - \frac{c}{4}(0-1) = 1 \Leftrightarrow \frac{c}{4}+\frac{c}{4} = 1 \Leftrightarrow 2c = 4 \Leftrightarrow c = 2$

Σαρώθηκε με το CamScanner

β')

Είναι $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot 2e^{-4|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 2e^{4x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} x \cdot 2e^{-4x}\,dx =$

$= \frac{2}{4}\int_{-\infty}^{0} x (e^{4x})'\,dx - \frac{2}{4}\int_{0}^{+\infty} x (e^{-4x})'\,dx = \frac{1}{2}\left(\left[x e^{4x}\right]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^{4x}\,dx\right) -$

$- \frac{1}{2}\left(\left[x e^{-4x}\right]_{0}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} e^{-4x}\,dx\right) \overset{(\alpha')}{=} \frac{1}{2}\left(-\lim_{x\to-\infty} x e^{4x} - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to+\infty} x e^{-4x} - \frac{1}{4}\right) =$

$= -\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-4x}} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{4x}} - \frac{1}{4}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) DLH}{=}$

$= -\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-4e^{-4x}} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4e^{4x}} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{4}\right) = \cancel{-\frac{1}{8}} + \cancel{\frac{1}{8}}$

$= 0$

γ') Όπως γνωρίζουμε $VAR(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ ①

Είναι $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 2e^{4x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} x^2 \cdot 2e^{-4x}\,dx =$

$= \frac{2}{4}\int_{-\infty}^{0} x^2 (e^{4x})'\,dx - \frac{2}{4}\int_{0}^{+\infty} x^2 (e^{-4x})'\,dx = \frac{1}{2}\left(\left[x^2 e^{4x}\right]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} 2x e^{4x}\,dx\right) -$

$- \frac{1}{2}\left(\left[x^2 e^{-4x}\right]_{0}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} 2x e^{-4x}\,dx\right) \overset{(\beta')}{=} \frac{1}{2}\left(-\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-4x}} + \frac{1}{8}\right) -$

$- \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{4x}} - \frac{1}{8}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) DLH}{=} \frac{1}{2}\left(-\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{e^{-4x}} + \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{4x}} - \frac{1}{8}\right) =$

$\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) DLH}{=} \frac{1}{2}\left(-\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-4x}} + \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^{4x}} - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$

$= \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

Οπότε ① $\Rightarrow VAR(X) = \frac{1}{8} - (0)^2 = \frac{1}{8}$

Σαρώθηκε με το CamScanner

(δ') Είναι $P(|X|>\frac{1}{2})=1-P(-\frac{1}{2}\leq X\leq \frac{1}{2})=1-\int_{-1/2}^{1/2} f(x)dx=1-\int_{-1/2}^{0} 2e^{4x}dx-\int_{0}^{1/2} 2e^{-4x}dx$

$=1-\frac{2}{4}\int_{-1/2}^{0}(e^{4x})'dx+\frac{2}{4}\int_{0}^{1/2}(e^{-4x})'dx=1-\frac{1}{2}(1-e^{-2})+\frac{1}{2}(e^{-2}-1)=$

$=\cancel{1}-\cancel{\frac{1}{2}}+\frac{e^{-2}}{2}+\frac{e^{-2}}{2}\cancel{-\frac{1}{2}}=e^{-2}$

(ε') $P(|X|>\frac{1}{2})=P(|X-0|\geq \frac{1}{2})=P(|X-E(X)|\geq \frac{1}{2})\leq \frac{\frac{1}{8}}{(\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{\underset{2}{\cancel{8}}}\cdot\frac{\cancel{4}}{1}=\frac{1}{2}$

Σαρώθηκε με το CamScanner

59. (Δημοσκόπηση)

Έστω οι Τ.Μ. Bernoulli $X_i = 1$ αν ο i-οστός πολίτης που ρωτήθηκε συμφωνεί με τη δημοσκόπηση και $X_i = 0$ εάν διαφωνεί για $i = 1, 2, \ldots, 100$
$X \sim$ Bernoulli (0.3). Ουσιαστικά εκείνοι που θα συμφωνήσουν είναι $\sum_{i=1}^{100} X_i$
Εφόσον οι ερωτηθέντες είναι 100, θέλουμε την πιθανότητα να συμφωνήσουν περισσότεροι από 50, δηλ. αναζητούμε την $P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 50\right) = P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 51\right)$

Έχουμε $E(X_i) = 0.3$, $VAR(X_i) = 0.3(1-0.3) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{21}{100}$

Οπότε $P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 50.5\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \cdot 0.3}{\cancel{10} \cdot \frac{\sqrt{21}}{\cancel{10}}} \geq \frac{50.5 - 100 \cdot 0.3}{\cancel{10} \cdot \frac{\sqrt{21}}{\cancel{10}}}\right) \simeq$

$\simeq P(\bar{S}_N \geq 4.47) \simeq 1 - \Phi(4.47) = 1 - 1 = 0$

60. (Καρπούζια)

Έστω η Τ.Μ. X_i για το βάρος του καρπουζιού i με $E(X_i) = 15$, $\sigma = 1$
Το συνολικό βάρος όλων των καρπουζιών είναι $\sum_{i=1}^{N_0} X_i$ και αναζητούμε το N_0 ώστε $P\left(\sum_{i=1}^{N_0} X_i > 3000\right) < 10^{-4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{\sum_{i=1}^{N_0} X_i - 15N_0}{\sqrt{N_0}} > \frac{3000 - 15N_0}{\sqrt{N_0}}\right) < 10^{-4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(\bar{S}_N > \frac{3000 - 15N_0}{\sqrt{N_0}}\right) < 10^{-4} \Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{3000 - 15N_0}{\sqrt{N_0}}\right) < 10^{-4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{3000 - 15N_0}{\sqrt{N_0}}\right) > 1 - 10^{-4} \overset{\Phi \uparrow}{\Rightarrow} \frac{3000 - 15N_0}{\sqrt{N_0}} > \Phi^{-1}(\underbrace{1 - 10^{-4}}_{0.9999})$ ①

Είναι $\Phi(3.7190) = 0.9999$ οπότε $\Phi^{-1}(0.9999) = 3.7190$

① $\Rightarrow \frac{3000 - 15N_0}{\sqrt{N_0}} > 3.7190 \Leftrightarrow 3000 - 15N_0 > 3.7190 \cdot \sqrt{N_0} \Leftrightarrow (3000 - 15N_0)^2 > (3.7190)^2 N_0$

$\Rightarrow 9000000 - 6000 \cdot 15N_0 + 225N_0^2 > 13{,}8N_0 \Rightarrow 225N_0^2 - 90013{,}8N_0 + 9000000 > 0$
είναι η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί το N_0.

φροντιστήρια πουκαμισάς

Σαρώθηκε με το CamScanner

☺

61. (Μπιφτέκια)

(α') $X_i \sim U[180, 220]$ όπου X_i το βάρος ενός μπιφτεκιού. Θα είναι

$E(X_i) = \frac{180+220}{2} = \frac{400}{2} = 200$ και $\sigma = \sqrt{\frac{(220-180)^2}{12}} = \frac{40}{2\sqrt{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}}$

Ουσιαστικά αναζητούμε την $P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 20200\right) =$

$$= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100\cdot 200}{\sqrt{100}\cdot\frac{20}{\sqrt{3}}} \leq \frac{20200 - 100\cdot 200}{\sqrt{100}\cdot\frac{20}{\sqrt{3}}}\right) =$$

$$= P\left(\bar{S}_N \leq \frac{20200-20000}{\frac{10\cdot 20}{\sqrt{3}}}\right) = P\left(\bar{S}_N \leq \frac{\cancel{200}}{\frac{\cancel{200}}{\sqrt{3}}}\right) = P(\bar{S}_N \leq \sqrt{3}) \simeq \Phi(\sqrt{3}) \simeq$$

$\simeq \Phi(1{,}73) = 0.9582$

(β') Θέλουμε $P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq B\right) \geq 0.99$

B: το βάρος του μείγματος

Είναι $P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100\cdot 200}{\sqrt{100}\cdot\frac{20}{\sqrt{3}}} \leq \frac{B - 100\cdot 200}{10\cdot\frac{20}{\sqrt{3}}}\right) = 0{,}99 \Rightarrow$

$$\Rightarrow P\left(\bar{S}_N \leq \frac{B-20000}{\frac{200}{\sqrt{3}}}\right) = 0{,}99 \Rightarrow \Phi\left(\frac{B-20000}{\frac{200}{\sqrt{3}}}\right) = 0.99 \overset{\Phi\uparrow}{\Rightarrow}$$

$$\overset{\Phi\uparrow}{\Rightarrow} \frac{B-20000}{\frac{200}{\sqrt{3}}} = \Phi^{-1}(0{,}99) \Rightarrow B - 20000 = \frac{200}{\sqrt{3}}\cdot\Phi^{-1}(0{,}99)$$

$$\Rightarrow B = 20000 + \frac{200}{\sqrt{3}}\Phi^{-1}(0{,}99)$$

Θα πρέπει λοιπόν $B \geq 20000 + \frac{200}{\sqrt{3}}\Phi^{-1}(0{,}99)$

Σαρώθηκε με το CamScanner

62. (Τηλεφωνικό κέντρο)

$X_i \sim \text{Εκθ}(40)$, $E(X_i)=40$ και είναι $VAR(X_i)=40^2 \Rightarrow \sigma=40$

(α') Καταρχάς $2h\ 50\ min = 10200$ sec

$$P\left(\sum_{i=1}^{250} X_i > 10200\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{250} X_i - 250\cdot 40}{40\cdot\sqrt{250}} > \frac{10200-250\cdot 40}{40\cdot\sqrt{250}}\right) \simeq$$

$$\simeq P(\bar{S}_N > 0{,}32) \simeq 1-\Phi(0.32) = 1-0.6255 = 0.3745$$

(β') Η πιθανότητα μια κλήση να έχει διάρκεια περισσότερο από ένα λεπτό $P(X_i \geq 60) = 1-P(X_i \leq 60) = 1-F(60) = 1-e^{-\frac{60}{40}} = 1-e^{-3/2}$

και έστω η Τ.Μ. Bernoulli $Y_i=1$ αν η κλήση i διαρκεί περισσότερο από ένα λεπτό και 0 αν διαρκεί λιγότερο από ή ίσο με ένα λεπτό.

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{με πιθ. } 1-e^{-3/2} \\ 0, & \text{με πιθ. } e^{-3/2} \end{cases}$$ Τότε $E(Y_i)=1-e^{-3/2}$ και $\sigma=\sqrt{(1-e^{-3/2})e^{-3/2}}$

Θέλουμε να υπάρχουν λιγότερες από 75 κλήσεις με διάρκεια μεγαλύτερη του ενός λεπτού οπότε αναζητούμε την

$$P\left(\sum_{i=1}^{250} Y_i < 75\right) = P\left(\sum_{i=1}^{250} Y_i < 74.5\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{250} Y_i - 250\cdot(1-e^{-3/2})}{\sqrt{(1-e^{-3/2})e^{-3/2}}\sqrt{250}} < \frac{74{,}5-250(1-e^{-3/2})}{\sqrt{(1-e^{-3/2})e^{-3/2}}\sqrt{250}}\right)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{74{,}5-250(1-e^{-3/2})}{\sqrt{(1-e^{-3/2})e^{-3/2}}\sqrt{250}}\right)$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

63. (Ζυγοβίστι)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100}, & x \in [30,130] \\ 0, & x \notin [30,130] \end{cases}$$

(α') Παρατηρούμε ότι $X \sim U[30,130]$ οπότε $E(X) = \frac{30+130}{2} = \frac{160}{2} = 80$ εκατοστά

Για τη διασπορά έχουμε $VAR(X) = \frac{(130-30)^2}{12} = \frac{100^2}{12} = \frac{10000}{12} \simeq 833,\overline{3}$

(β') $Y = 20X + 500$ οπότε $E(Y) = E(20X+500) = 20E(X) + 500 = 20 \cdot 80 + 500 =$
$= 2100$ τόνους καρύδια

(γ') Ουσιαστικά αναζητούμε την $P\left(\sum_{i=1}^{25} X_i \geq 1800\right)$ όπου X_i η βροχή τον i-οστό χρόνο

Είναι $P\left(\sum_{i=1}^{25} X_i \geq 1800\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{25} X_i - 25 \cdot 80}{\frac{100}{\sqrt{12}}\sqrt{25}} \geq \frac{1800 - 25 \cdot 80}{\frac{100}{\sqrt{12}} \cdot 5}\right) \simeq$

$\simeq P(\overline{S}_N \geq -1,39) \simeq 1 - \Phi(-1,39) = 1 - 0.0823 = 0,9177$

Σαρώθηκε με το CamScanner