ΕΡΓΑΣΙΑ 1.

Ονομ/νυμο: ΑΛΒΙΟΝΑ ΜΑΝΤΖΟ
Αρ. Μητρώου: 3200098

1. $A=\mathbb{R}$

$S=\{(a,b)/|a-b|\leq 5\}$

- $\forall a\in A$ έχουμε ότι $|a-a|=|0|=0\leq 5$, δηλ. aSa άρα η σχέση S είναι αυτοπαθής
- Αν aSb τότε $|a-b|\leq 5 \Rightarrow |-(b-a)|\leq 5 \xrightarrow{|-x|=|x|} |b-a|\leq 5$, δηλ. bSa άρα η σχέση S είναι συμμετρική.
- Αν aSb και bSc τότε $\left.\begin{array}{l}|a-b|\leq 5\\ |b-c|\leq 5\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-5\leq a-b\leq 5\\ -5\leq b-c\leq 5\end{array}\right\} \Rightarrow -10\leq a-\cancel{b}+\cancel{b}-c\leq 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow |a-c|\leq 10$

Όμως για $a=4$, $b=0$, $c=-3$ έχουμε $|a-b|=|4-0|=4\leq 5$ και $|b-c|=|0-(-3)|=3\leq 5$ αλλά $|a-c|=|4-(-3)|=|4+3|=7>5$

Δηλαδή ισχύει πράγματι ότι $|a-c|\leq 10$ αλλά όχι απαραίτητα $|a-c|\leq 5$ που είναι το ζητούμενο. Άρα η σχέση S δεν είναι μεταβατική

Συνεπώς η σχέση S δεν είναι σχέση ισοδυναμίας.

2. Σύμφωνα με τον ορισμό της αυτοπαθούς ιδιότητας, μια σχέση S είναι αυτοπαθής αν $\forall a\in A$ (όπου A το σύνολο στο οποίο ορίζεται η S) ισχύει aSa.
Για το τυχαίο στοιχείο $x\in A$ έχουμε πράγματι ότι xSx.
Το λάθος, λοιπόν έγκειται στο γεγονός ότι ο συλλογισμός αναφέρεται σε κάποιο τυχαίο στοιχείο $x\in A$ και όχι σε κάθε στοιχείο του A, όπως απαιτεί ο ορισμός. Ένα αντιπαράδειγμα: $A'=\{1,2,3\}$ και $S'=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$
Η σχέση S' είναι συμμετρική και μεταβατική, αλλά όχι αυτοπαθής καθώς απουσιάζει το ζεύγος $(3,3)$.

3. $A=\mathbb{Z}$ $\quad S=\{(x,y)/\ x^2-y^2=4m,\ m\in\mathbb{Z}\}$

(α') • $\forall x\in A$ ισχύει $x^2-x^2=0=4\cdot 0$ και $0\in\mathbb{Z}$, δηλ. xSx άρα η σχέση S είναι αυτοπαθής

- Αν xSy τότε $x^2-y^2=4m \Rightarrow -y^2+x^2=4m \Rightarrow y^2+x^2=-4m \Rightarrow$
  $\Rightarrow y^2-x^2=4(-m)$ και $-m\in\mathbb{Z}$, δηλ. ySx άρα η σχέση S είναι συμμετρική
- Αν xSy και ySz τότε $\left.\begin{array}{l}x^2-y^2=4m_1\\ y^2-z^2=4m_2\end{array}\right\} \Rightarrow x^2-\cancel{y^2}+\cancel{y^2}-z^2=4m_1+4m_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-z^2=4(m_1+m_2)$ και $(m_1+m_2)\in\mathbb{Z}$, δηλ. xSz

Άρα η σχέση S είναι μεταβατική

Συνεπώς η σχέση S είναι σχέση ισοδυναμίας.

(Β') $[0]_S = \{x \in \mathbb{Z} / 0^2 - x^2 = 4m,\ m \in \mathbb{Z}\}$

$-x^2 = 4m \Rightarrow x^2 = -4m \Rightarrow x^2 = 4(-m) \Rightarrow x = \pm\sqrt{4(-m)} = \pm 2\sqrt{-m}$

Πρέπει $-m \geq 0 \Rightarrow m \leq 0$

Άρα $[0]_S = \{x \in \mathbb{Z} / x = \pm 2\sqrt{-m}$ με $m \in \mathbb{Z}_-\}$

$= \{\ldots, 0, -2, 2, \cancel{-2\sqrt{2}}, \cancel{2\sqrt{2}}, \cancel{-2\sqrt{3}}, \cancel{2\sqrt{3}}, -4, 4, \ldots\}$

$= \{\ldots, 0, -2, 2, -4, 4, \ldots\}$ (αφού πρέπει $x \in \mathbb{Z}$)

$[1]_S = \{x \in \mathbb{Z} / 1^2 - x^2 = 4m,\ m \in \mathbb{Z}\}$

$1 - x^2 = 4m \Rightarrow -x^2 = 4m - 1 \Rightarrow x^2 = 1 - 4m \Rightarrow x = \pm\sqrt{1-4m}$

Πρέπει $1 - 4m \geq 0 \Rightarrow 4m - 1 \leq 0 \Rightarrow 4m \leq 1 \Rightarrow m \leq \frac{1}{4}$ και επειδή $m \in \mathbb{Z}$ πρέπει $m \leq 0$

Άρα $[1]_S = \{x \in \mathbb{Z} / x = \pm\sqrt{1-4m}$ με $m \in \mathbb{Z}_-\}$

$= \{\ldots, -1, 1, \cancel{-\sqrt{5}}, \cancel{+\sqrt{5}}, -3, 3, \cancel{-\sqrt{13}}, \cancel{+\sqrt{13}}, \cancel{-\sqrt{17}}, \cancel{\sqrt{17}}, \cancel{-\sqrt{21}}, \cancel{\sqrt{21}}, -5, 5, \ldots\}$

$= \{\ldots, -1, 1, -3, 3, -5, 5 \ldots\}$ (αφού πρέπει $x \in \mathbb{Z}$)

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι η κλάση ισοδυναμίας του 0 αποτελείται από όλους τους άρτιους ενώ η κλάση ισοδυναμίας του 1 αποτελείται από όλους τους περιττούς. Άρα $\forall x \in A$ θα ισχύει
- $x \in [0]_S$ αν $x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$ ή
- $x \in [1]_S$ αν $x = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z}$

δηλαδή
- $xS0$ οπότε $[x]_S = [0]_S$ ή
- $xS1$ οπότε $[x]_S = [1]_S$

Συνεπώς οι μόνες διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας είναι $[0]_S$ και $[1]_S$.

4. $R = \{(x,y) / (x,y) \in S$ και $(y,x) \in S\}$

- $\forall x \in A$ $(x,x) \in S$ (αφού S είναι αυτοπαθής) και $(x,x) \in S$. Άρα $(x,x) \in R$, δηλ. xRx, οπότε η R είναι αυτοπαθής
- Αν xRy τότε $(x,y) \in S$ και $(y,x) \in S \Rightarrow (y,x) \in S$ και $(x,y) \in S \Rightarrow (y,x) \in R$, δηλ. yRx, άρα η R είναι συμμετρική
- Αν xRy και yRz τότε $((x,y) \in S$ και $(y,x) \in S)$ και $((y,z) \in S$ και $(z,y) \in S) \Rightarrow$
$\Rightarrow ((x,y) \in S$ και $(y,z) \in S)$ και $((z,y) \in S$ και $(y,x) \in S)$ ①

Από την μεταβατικότητα της S ① $\Rightarrow$ $(x,z) \in S$ και $(z,x) \in S \Rightarrow (x,z) \in R$, δηλ. xRz, άρα η R είναι μεταβατική

Συνεπώς η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

5. Έστω $U = P_1 \cup P_2$

- $\forall a \in A$ ισχύει $(a,a) \in P_1$ και $(a,a) \in P_2 \Rightarrow (a,a) \in U$, δηλ. aUa, άρα η U είναι αυτοπαθής
- Αν aUb και $bUa \Rightarrow ((a,b) \in P_1$ ή $(a,b) \in P_2)$ και $((b,a) \in P_1$ ή $(b,a) \in P_2)$

Παρακάτω δίνεται ένα αντιπαράδειγμα:

Έστω $A = \{0, 2, 5\}$, $P_1 = \{(0,0), (2,2), (5,5), (2,5)\}$ και $P_2 = \{(0,0), (2,2), (5,5), (5,2)\}$

Σε αυτήν την περίπτωση $U = P_1 \cup P_2 = \{(0,0), (2,2), (5,5), (2,5), (5,2)\}$.

Έχουμε, δηλαδή, $2U5$ και $5U2$ χωρίς να ισχύει $2=5$. Άρα η σχέση U δεν είναι αντισυμμετρική

Εφόσον η σχέση δεν είναι αντισυμμετρική, δεν είναι σχέση μερικής διάταξης

6. $A = T(\Gamma)$

$S = \{(p,q) / p \wedge q$ είναι ταυτολογία$\}$

- Έχουμε:

p	p^p
A	A
Ψ	Ψ

Δηλαδή δεν ισχύει $\forall p \in A$ ότι $p \wedge p$ είναι ταυτολογία. Άρα η σχέση S δεν είναι αυτοπαθής

• Αν pSq, δηλ. $p \wedge q$ είναι ταυτολογία, τότε θα ισχύει $\bar{v}(p) = \bar{v}(q) = A$ για κάθε αποτίμηση v. Σε αυτήν την περίπτωση θα είναι και $q \wedge p$ ταυτολογία, δηλ. qSp. Οπότε η σχέση S είναι συμμετρική.

• Αν pSq και qSr, δηλ. $p \wedge q$ είναι ταυτολογία και $q \wedge r$ είναι ταυτολογία, τότε θα ισχύει $\bar{v}(p) = \bar{v}(q) = \bar{v}(r) = A$ για κάθε αποτίμηση v. Σε αυτήν την περίπτωση θα είναι και $p \wedge r$ ταυτολογία, δηλ. pSr. Οπότε η σχέση S είναι μεταβατική.

7.

p	q	r	$\neg p$	$q \to r$	$\neg p \to (q \to r)$
A	A	A	Ψ	A	A
A	A	Ψ	Ψ	Ψ	A
A	Ψ	A	Ψ	A	A
A	Ψ	Ψ	Ψ	A	A
Ψ	A	A	A	A	A
Ψ	A	Ψ	A	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	A	A	A	A
Ψ	Ψ	Ψ	A	A	A

p	q	r	$p \vee r$	$q \to (p \vee r)$
A	A	A	A	A
A	A	Ψ	A	A
A	Ψ	A	A	A
A	Ψ	Ψ	A	A
Ψ	A	A	A	A
Ψ	A	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	A	A	A
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A

Πράγματι οι προτ. τύποι $\neg p \to (q \to r)$ και $q \to (p \vee r)$ είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι γιατί παρατηρούμε ότι:

- κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί τον πρώτο ικανοποιεί και τον δεύτερο (δηλ. $\neg p \to (q \to r) \models q \to (p \vee r)$)
- κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί τον δεύτερο ικανοποιεί και τον πρώτο (δηλ. $\neg p \to (q \to r) \Dashv q \to (p \vee r)$)

και επομένως ισχύει

$\neg p \to (q \to r) \models\Dashv q \to (p \vee r)$

8.

p_0	p_1	p_2	$p_1 \leftrightarrow p_2$	$p_0 \to (p_1 \leftrightarrow p_2)$	$\neg(p_0 \to (p_1 \leftrightarrow p_2))$
Α	Α	Α	Α	Α	Ψ
Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ

Μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση Boole f τέτοια ώστε

$\bar{v}(\phi) = f(v(p_0), v(p_1), v(p_2))$ (όπου ϕ ο προτ. τύπος $\neg(p_0 \to (p_1 \leftrightarrow p_2))$)

Έχουμε ότι $f(A, A, \Psi) = A$ και

$f(A, \Psi, A) = A$

Ο προτασιακός τύπος που προκύπτει είναι ο $(p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2)$