Ονομ/νυμο : ΑΛΒΙΟΝΑ ΜΑΝΤΣΟ
Ομάδα ασκ.: 1η
Αρ.Μητρ. 3200098

1η Ομάδα Ασκήσεων

1. (Άθροισμα Minkowski)

- $[0,1]+[2,3]=[2,4]$

Απόδειξη

Έστω $a\in[0,1]$ και $b\in[2,3]$, δηλ. $0\le a\le 1$ και $2\le b\le 3$. Αθροίζοντας κατά μέλη έχουμε $0+2\le a+b\le 1+3 \Leftrightarrow 2\le a+b\le 4 \Leftrightarrow 2\le z\le 4 \Leftrightarrow z\in[2,4]$

Άρα $[0,1]+[2,3]\subseteq[2,4]$ ①

Έστω τώρα ότι $z\in[2,4]$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1) $z=2$ οπότε $z=0+2$ όπου $0\in[0,1]$ και $2\in[2,3]$
2) $z\in(2,3)$ δηλ. $2<z<3$. Τότε $2-2<z-2<3-2 \Leftrightarrow 0<z-2<1$ δηλ. $(z-2)\in(0,1)$ και $(0,1)\subseteq[0,1]$. Άρα $z=(z-2)+2$ με $(z-2)\in[0,1]$ και $2\in[2,3]$
3) $z=3$ οπότε $z=1+2$ όπου $1\in[0,1]$ και $2\in[2,3]$
4) $z\in(3,4)$ δηλ. $3<z<4$. Τότε $3-3<z-3<4-3 \Leftrightarrow 0<z-3<1$ δηλ. $(z-3)\in(0,1)$ όπου $(0,1)\subseteq[0,1]$. Άρα $z=(z-3)+3$ με $(z-3)\in[0,1]$ και $3\in[2,3]$
5) $z=4$ οπότε $z=1+3$ όπου $1\in[0,1]$ και $3\in[2,3]$

Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις το $z\in[2,4]$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ενός αριθμού a: $a\in[0,1]$ και ενός αριθμού b: $b\in[2,3]$. Άρα $[2,4]\subseteq[0,1]+[2,3]$ ②

Από τα ① και ② έχουμε ότι $[0,1]+[2,3]=[2,4]$

- $\mathbb{Z}+(0,1)=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

Απόδειξη

Έστω $a\in\mathbb{Z}$ και $b\in(0,1)$, δηλαδή $b\notin\mathbb{Z}$. Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα ενός ακεραίου με κάποιον μη ακέραιο είναι μη ακέραιος αριθμός. Άρα αν $z=a+b$ τότε $z\notin\mathbb{Z} \Leftrightarrow z\in\mathbb{Z}^c \Leftrightarrow z\in(\mathbb{R}-\mathbb{Z})$. Συνεπώς $\mathbb{Z}+(0,1)\subseteq\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ③

Έστω τώρα ότι $z\in(\mathbb{R}-\mathbb{Z})$. Τότε $z\notin\mathbb{Z}$ και το z μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα των a,b όπου $a=\lfloor z\rfloor$ δηλ. $a\in\mathbb{Z}$ και $b=z-\lfloor z\rfloor$ δηλ. $b\in(0,1)$. Άρα $\mathbb{R}-\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Z}+(0,1)$ ④

Από τα ③ και ④ έχουμε ότι $\mathbb{Z}+(0,1)=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

- $\mathbb{Z}+[0,1]=\mathbb{R}$

Απόδειξη

Έστω $a\in\mathbb{Z}$ και $b\in[0,1]$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1) $b\in(0,1)$ οπότε $a+b=z \Rightarrow z\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ (αποδείχτηκε προηγουμένως)

2) $b=0$ ή $b=1$. Σε αυτήν την περίπτωση αν $z=a+b$ τότε $z\in\mathbb{Z}$ δηλ. $\mathbb{Z}+\{0,1\}\subseteq\mathbb{Z}$

Έστω τώρα ότι $z\in\mathbb{Z}$. Τότε το z μπορεί να εκφραστεί ως εξής: $z=z+0$, όπου $z\in\mathbb{Z}$ και $0\in\{0,1\}$. Άρα $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Z}+\{0,1\}$

Συνεπώς $\mathbb{Z}+\{0,1\}=\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}+[0,1]=\mathbb{Z}+(0,1)\cup\{0,1\}=(\mathbb{Z}+(0,1))\cup(\mathbb{Z}+\{0,1\})=(\mathbb{R}-\mathbb{Z})\cup\mathbb{Z}=\mathbb{Z}^c\cup\mathbb{Z}=\mathbb{R}$$

- $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα ρητών είναι ρητός αριθμός. Άρα αν $a,b\in\mathbb{Q}$ και $z=a+b$ τότε $z\in\mathbb{Q}$. Επομένως $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}$ (5)

Αν τώρα $z\in\mathbb{Q}$, τότε προφανώς το z μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα των $a=z$ και $b=0$ όπου $a\in\mathbb{Q}$ (αφού $z\in\mathbb{Q}$) και $b\in\mathbb{Q}$. Επομένως $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}+\mathbb{Q}$ (6)

Από τα (5) και (6) έχουμε ότι $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$

- $\mathbb{Q}+(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα ενός ρητού με έναν άρρητο είναι άρρητος αριθμός. Άρα αν $a\in\mathbb{Q}$ και $b\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ τότε για τα $z=a+b$ θα ισχύει $z\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$. Επομένως $\mathbb{Q}+(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\subseteq\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (7)

Αν τώρα $z\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ τότε z μπορεί να εκφραστεί ως εξής $z=\lfloor z\rfloor+(z-\lfloor z\rfloor)$ όπου $\lfloor z\rfloor\in\mathbb{Z}$ με $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$ και $z-\lfloor z\rfloor\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ (αφού αν $z\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ θα είναι το δεκαδικό του μέρος εκείνο που τον καθιστά άρρητο). Επομένως $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}+(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ (8)

Από τα (7) και (8) έχουμε ότι $\mathbb{Q}+(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

2. (Επιμεριστική ιδιότητα)

- $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

Απόδειξη

Έστω $x\in A\cup(B\cap C)$. $x\in A\cup(B\cap C)\Rightarrow x\in A$ ή $x\in(B\cap C)\Rightarrow x\in A$ ή $(x\in B$ και $x\in C)$

- Αν $x\in A$ τότε $x\in(A\cup B)$ και $x\in(A\cup C)$ δηλ. $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$
- Αν $x\notin A$ τότε $x\in B$ και $x\in C$. Άρα $x\in(B\cup A)$ και $x\in(C\cup A)$ δηλ. $x\in(B\cup A)\cap(C\cup A)$ $\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

Συνεπώς $A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$ ①

Έστω τώρα ότι $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$. $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)\Rightarrow(x\in A$ ή $x\in B)$ και $(x\in A$ ή $x\in C)$

- Αν $x\in A$ τότε $x\in A\cup(B\cap C)$
- Αν $x\notin A$ τότε $x\in B$ και $x\in C\Rightarrow x\in(B\cap C)$ οπότε $x\in A\cup(B\cap C)$.

Συνεπώς $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$ ②

Από ① και ② έχουμε $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

- $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

Απόδειξη

Έστω $x\in A\cap(B\cup C)$. $x\in A\cap(B\cup C)\Rightarrow x\in A$ και $x\in(B\cup C)\Rightarrow x\in A$ και $(x\in B$ ή $x\in C)$

Έχουμε ότι $x\in A$. - Αν $x\in B$ τότε $x\in(A\cap B)$ οπότε $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$
- Αν $x\in C$ τότε $x\in(A\cap C)$ οπότε $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Συνεπώς $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ③

Έστω τώρα ότι $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\Rightarrow x\in(A\cap B)$ ή $x\in(A\cap C)\Rightarrow$
$\Rightarrow(x\in A$ και $x\in B)$ ή $(x\in A$ και $x\in C)$.

Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις $x\in A$.

Έχουμε, λοιπόν, ότι $x\in A$. - Αν $x\in B$ τότε $x\in B\cup C$ και, αφού $x\in A$, $x\in A\cap(B\cup C)$
- Αν $x\in C$ τότε $x\in B\cup C$ και, αφού $x\in A$, $x\in A\cap(B\cup C)$

Συνεπώς $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$ ④

Από ③ και ④ έχουμε $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

3. (Πρόσθεση αρχείων)

Έστω b το πλήθος των bits σε κάθε δίσκο A, B, C και A_i, B_i, C_i τα bits των A, B, C για i από 1 μέχρι b. Εφαρμόζουμε πρόσθεση modulo 2 μεταξύ των bits των δίσκων A και B ως εξής:

$$A_1 \oplus B_1$$
$$A_2 \oplus B_2$$
$$\vdots$$
$$A_b \oplus B_b$$

και το αποτέλεσμα της πρόσθεσης modulo 2 το αποθηκεύουμε στην αντίστοιχη θέση του δίσκου C οπότε έχουμε

$$C_1 = A_1 \oplus B_1$$
$$C_2 = A_2 \oplus B_2$$
$$\vdots$$
$$C_b = A_b \oplus B_b$$

Τα μόνα 4 ($=2^2$) διαφορετικά ζεύγη bits στα οποία μπορούμε να εφαρμόσουμε την πρόσθεση modulo 2 είναι 0-0, 0-1, 1-0, 1-1. Μπορούμε λοιπόν να κατασκευάσουμε τον ακόλουθο πίνακα:

	A_i	B_i	C_i
1)	0	0	$0 \oplus 0 = 0$
2)	0	1	$0 \oplus 1 = 1$
3)	1	0	$1 \oplus 0 = 1$
4)	1	1	$1 \oplus 1 = 0$

Υπολογίζοντας τα αθροίσματα (modulo 2) $C_i + A_i$ και $C_i + B_i$ (για i από 1 μέχρι b) έχουμε

	$C_i \oplus A_i$	$C_i \oplus B_i$
1)	$0 \oplus 0 = 0$	$0 \oplus 0 = 0$
2)	$1 \oplus 0 = 1$	$1 \oplus 1 = 0$
3)	$1 \oplus 1 = 0$	$1 \oplus 0 = 1$
4)	$0 \oplus 1 = 1$	$0 \oplus 1 = 1$

Άρα $C_i \oplus A_i = B_i$ και $C_i \oplus B_i = A_i$ σε όλες τις πιθανές περιπτώσεις. Συνεπώς αν χαθεί ένας εκ των δίσκων A και B, μπορούμε να ανακτήσουμε τα δεδομένα του εφαρμόζοντας πρόσθεση modulo 2 μεταξύ των bits του άλλου (που δεν χάθηκε) και του C. Αν πάλι χαθεί ο δίσκος C, τότε ούτως ή άλλως δεν χάνονται καθόλου δεδομένα από τους A, B.

4. (Ιδιότητες πεδίου)

(α΄) Έχουμε $x \cdot y = 0$

- Έστω $x \neq 0$. Τότε για το x υπάρχει αντίστροφος (Α.8), ο x^{-1} (Ορισμός 1.2)

Άρα $x \cdot y = 0 \xRightarrow{\cdot(x^{-1})} x^{-1} \cdot x \cdot y = x^{-1} \cdot 0 \xRightarrow{A.6} (x^{-1} \cdot x) \cdot y = x^{-1} \cdot 0 \xRightarrow{A.8} 1 \cdot y = x^{-1} \cdot 0 \Rightarrow$
$\xRightarrow{A.7} y = x^{-1} \cdot 0 \xRightarrow{A.5} y = 0 \cdot x^{-1} \xRightarrow{1.2.7} y = 0$

- Έστω $y \neq 0$. Τότε για το y υπάρχει αντίστροφος (Α.8), ο y^{-1} (Ορισμός 1.2)

Άρα $x \cdot y = 0 \xRightarrow{\cdot(y^{-1})} y^{-1} \cdot x \cdot y = y^{-1} \cdot 0 \xRightarrow{A.5} y^{-1} \cdot y \cdot x = y^{-1} \cdot 0 \xRightarrow{A.6} (y^{-1} \cdot y) \cdot x = y^{-1} \cdot 0 \Rightarrow$
$\xRightarrow{A.8} 1 \cdot x = y^{-1} \cdot 0 \xRightarrow{A.7} x = y^{-1} \cdot 0 \xRightarrow{A.5} x = 0 \cdot y^{-1} \xRightarrow{1.2.7} x = 0$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι αν το γινόμενο δυο αριθμών ισούται με το 0, τότε απαραίτητα ένας από τους δυο ισούται με 0.

Επειδή, όμως, αν $x=0$ και $y=0$ έχουμε $x \cdot y = 0 \cdot 0 = 0$, το παραπάνω συμπέρασμα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Αν το γινόμενο δυο αριθμών ισούται με το 0, τότε ένας τουλάχιστον από τους δύο ισούται με 0.

Δηλαδή αν $x \cdot y = 0$ τότε $x=0$ ή $y=0$ ή $x=y=0$.

(β΄) $x(y-z) \xlongequal{\text{Ορισμός } 1.2} x(y+(-z)) \xlongequal{A.9} x \cdot y + x \cdot (-z) \xlongequal{1.2.8} x \cdot y - x \cdot z$.

(γ΄) $(x+y)/z \xlongequal{\text{Ορισμός } 1.2} (x+y) \cdot z^{-1} \xlongequal{A.9} x \cdot z^{-1} + y \cdot z^{-1} \xlongequal{\text{Ορισμός } 1.2} x/z + y/z$

(δ΄) $(x/y)/(z/w) \xlongequal{\text{Ορισμός } 1.2} (x \cdot y^{-1})/(z \cdot w^{-1}) \xlongequal{\text{Ορισμός } 1.2} (x \cdot y^{-1})(z \cdot w^{-1})^{-1} \xlongequal{A.6}$
$= (x \cdot y^{-1})(z^{-1} \cdot w^{(-1)\cdot(-1)}) = (x \cdot y^{-1})(z^{-1} \cdot w^{1}) = (x \cdot y^{-1})(z^{-1} \cdot w) \xlongequal{A.6} x \cdot (y^{-1} \cdot z^{-1}) \cdot w =$
$\xlongequal{A.5} x \cdot w \cdot (y^{-1} \cdot z^{-1}) \xlongequal{1.2.6} x \cdot w \cdot (y \cdot z)^{-1} \xlongequal{A.6} (x \cdot w) \cdot (y \cdot z)^{-1} \xlongequal{\text{Ορισμός } 1.2} (x \cdot w)/(y \cdot z)$

* (<u>Σημ.</u>: Με 1.2.x αναφέρεται το σκέλος x της πρότασης 1.2)

5) (Εύρεση supremum και infimum)

- $[0,1)$ Τα άνω φράγματα αποτελούν το σύνολο $[1,+\infty)$. Το ελάχιστο εκ των άνω φραγμάτων είναι το 1 άρα $\sup[0,1)=1$. Το σύνολο δεν έχει μέγιστο. Τα κάτω φράγματα αποτελούν το σύνολο $(-\infty,0]$. Το μέγιστο εκ των κάτω φραγμάτων είναι το 0 άρα $\inf[0,1)=0$. Επειδή, επιπλέον, $\inf[0,1)\in[0,1)$ θα είναι $\min[0,1)=\inf[0,1)=0$.

- $(0,1]$ Και αυτό το σύνολο έχει $\sup(0,1]=1$. Επειδή, επιπλέον, $\sup(0,1]\in(0,1]$ θα είναι $\max(0,1]=1$.
  Επίσης $\inf(0,1]=0$ αλλά το σύνολο δεν έχει ελάχιστο.

- $\mathbb{Q}$ Το σύνολο των ρητών δεν είναι φραγμένο, άρα τα $\sup\mathbb{Q}, \inf\mathbb{Q}$ δεν υπάρχουν. Επίσης το $\mathbb{Q}$ δεν είναι πεπερασμένο, ώστε δεν υπάρχουν τα $\min\mathbb{Q}, \max\mathbb{Q}$.

- $S=\left\{1-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{4}, \dots\right\}$ Τα άνω φράγματα απαρτίζουν το σύνολο $[1,+\infty)$ αφού αν $x\geq 1$ τότε σίγουρα $x\geq \frac{\nu-1}{\nu}$ για κάθε ν. Όμως αν $x<1$ τότε υπάρχουν ν: $\frac{\nu-1}{\nu}>x$ άρα δεν έχουμε άνω φράγματα $x<1$. Το ελάχιστο άνω φράγμα είναι λοιπόν το 1, δηλ. $\sup S=1$. Δεν υπάρχει όμως το $\max S$ γιατί αν υποθέσουμε ότι $\max S=1-\frac{1}{\nu}=\frac{\nu-1}{\nu}$ για κάποιο ν, τότε θα υπάρχει $\frac{\nu+1-1}{\nu+1}=\frac{\nu}{\nu+1}>\frac{\nu-1}{\nu}$, δηλ. οδηγούμαστε σε άτοπο.
  Για το ελάχιστο στοιχείο του S έχουμε ότι $\min S=$ $=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ οπότε και $\inf S=\min S=\frac{1}{2}$

- $A=\{x : (x-\sqrt{2})(x-3)\leq 0\}$ Για να αντιληφθούμε από ποια στοιχεία αποτελείται το σύνολο A, λύνουμε καταρχάς την ανίσωση $(x-\sqrt{2})(x-3)\leq 0$.
  $(x-\sqrt{2})(x-3)=0 \Rightarrow x-\sqrt{2}=0$ ή $x-3=0 \Rightarrow x=\sqrt{2}$ ή $x=3$
  (οι ρίζες του τριωνύμου)

x	$-\infty$	$\sqrt{2}$		3	$+\infty$	
$x-\sqrt{2}$	$-$	0	$+$		$+$	$x-\sqrt{2}<0 \Rightarrow x<\sqrt{2}$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$	$x-3<0 \Rightarrow x<3$
$(x-\sqrt{2})(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Σαρώθηκε με το CamScanner

Άρα $(x-\sqrt{2})(x-3)\leq 0$ για $x\in[\sqrt{2},3]$ Δηλαδή $A=[\sqrt{2},3]$
Για το ελάχιστο στοιχείο του A έχουμε $\min A=\sqrt{2}$ άρα και $\inf A=\min A=\sqrt{2}$
Για το μέγιστο στοιχείο του A έχουμε $\max A=3$ άρα και $\sup A=\max A=3$

- $A\cap\mathbb{Q}=[\sqrt{2},3]\cap\mathbb{Q}$ Όπως και πριν θα είναι $\inf(A\cap\mathbb{Q})=\sqrt{2}$ και $\sup(A\cap\mathbb{Q})=3$
Επιπλέον, επειδή 3 είναι ρητός ($3\in\mathbb{Q}$), $3\in[\sqrt{2},3]\cap\mathbb{Q}$ άρα $\max A\cap\mathbb{Q}=3$. Όμως $\sqrt{2}$ είναι άρρητος ($\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$), οπότε $\sqrt{2}\notin([\sqrt{2},3]\cap\mathbb{Q})$ και επομένως το $\min(A\cap\mathbb{Q})$ δεν υπάρχει.

6. (Supremum αθροίσματος Minkowski)

Επειδή τα σύνολα A, B είναι μη κενά, υπάρχουν $a: a\in A$ και $b: b\in B$.
Άρα αφού $a+b=z$ για $a\in A, b\in B$, θα υπάρχουν $z=a+b: z\in(A+B)$ δηλ. το άθροισμα Minkowski A+B είναι επίσης μη κενό.
Αφού υπάρχουν τα $\sup A$, $\sup B$ θα ισχύει $a\leq\sup A\ \forall a\in A$ και $b\leq\sup B\ \forall b\in B$
Με πρόσθεση των σχέσεων κατά μέλη έχουμε $a+b\leq\sup A+\sup B\Rightarrow z\leq\sup A+\sup B$ ① $\forall z\in(A+B)$. Άρα το σύνολο $(A+B)$ είναι άνω φραγμένο.
Συνεπώς, αφού το $(A+B)$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο θα έχει supremum, το $\sup(A+B)$.
Για τα suprema των συνόλων A, B έχουμε ότι:

Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $a\in A$ τέτοιο ώστε $a>\sup A-\frac{\varepsilon}{2}$ ②

Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $b\in B$ τέτοιο ώστε $b>\sup B-\frac{\varepsilon}{2}$ ③

Προσθέτοντας τις σχέσεις ② και ③ κατά μέλη έχουμε $a+b>\sup A+\sup B-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow$
$\Rightarrow z>\sup A+\sup B-\varepsilon$ ④
Επειδή το $\sup A+\sup B$ είναι άνω φράγμα του $(A+B)$ (σχέση ①) και επιπλέον για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει z τέτοιο ώστε να ισχύει η σχέση ④, το $\sup A+\sup B$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A+B, δηλ. $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

7. (Αυθαίρετα κοντινά σύνολα)

- Επειδή $x \le y$ για κάθε $x \in A$ και $y \in B$, τα y είναι άνω φράγματα του A. Άρα, αφού το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο, θα έχει supremum, το $\sup A$
- Επίσης, επειδή $y \ge x$ για κάθε $x \in A$ και $y \in B$, τα x είναι κάτω φράγματα του B. Άρα, αφού το B είναι μη κενό και κάτω φραγμένο, θα έχει infimum, το $\inf B$

• Έστω τώρα ότι $\sup A > \inf B$, οπότε θα υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\sup A = \inf B + \varepsilon$ (1). Για τα $\sup A$, $\inf B$ θα ισχύει ότι υπάρχουν $x \in A$, $y \in B$ ώστε $x > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ και $y < \inf B + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow -y > -\inf B - \frac{\varepsilon}{2}$. Οπότε με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $x - y > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} - \inf B - \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow x - y > \sup A - \inf B - \varepsilon \overset{(1)}{\Rightarrow} x - y > 0$ που είναι άτοπο αφού $x \le y$ για κάθε $x \in A$ και $y \in B$. Άρα $\sup A \le \inf B$ (2)

• Έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $y_0 - x < \varepsilon \Rightarrow -y_0 + x > -\varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow x > y_0 - \varepsilon$ (3) όπου y_0 είναι κάποιο στοιχείο του B. Αφού, λοιπόν, τα $y \in B$ είναι άνω φράγματα του A, και το y_0 θα είναι άνω φράγμα του A. Επειδή, επιπλέον για το y_0 ισχύει η σχέση (3), θα είναι $y_0 = \sup A$ (4)

Με τον ίδιο τρόπο έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $y \in B$ τέτοιο ώστε $y - x_0 < \varepsilon \Rightarrow y < x_0 + \varepsilon$ (5) όπου x_0 είναι κάποιο στοιχείο του A. Αφού, λοιπόν, τα $x \in A$ είναι κάτω φράγματα του B, και το x_0 θα είναι κάτω φράγμα του B. Επειδή επιπλέον για το x_0 ισχύει η σχέση (5), θα είναι $x_0 = \inf B$ (6)

Η σχέση $x \le y$ ισχύει για κάθε $x \in A$ και για κάθε $y \in B$. Επομένως, αν θέσουμε στη σχέση $x = x_0$ και $y = y_0$ έχουμε $x_0 \le y_0 \xRightarrow{(4),(6)} \inf B \le \sup A$

Παρατηρούμε ότι για τα $\inf B$, $\sup A$ ισχύουν ταυτόχρονα:

$$\sup A \le \inf B \quad (\text{σχέση } 2)$$

$$\sup A \ge \inf B$$

Άρα ισχύει η ισότητα, δηλ. $\sup A = \inf B$

B. (Ιδιότητα Κλειστών Συνόλων)

Έστω S ένα σύνολο μη κενό, κλειστό και άνω φραγμένο. Από το αξίωμα της πληρότητας προκύπτει ότι το S θα έχει supremum, το $\sup S$.

Έστω τώρα ότι $\sup S \notin S$. Τότε $\sup S \in S^c$.

Επειδή το S είναι κλειστό, το S^c θα είναι ανοικτό (εξ ορισμού). Συνεπώς όλα τα σημεία του S^c θα είναι εσωτερικά, άρα και το $\sup S$ είναι εσωτερικό.

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα (a,b) τέτοιο ώστε $\sup S \in (a,b)$ και $(a,b) \subseteq S^c$. Για να είναι $a < \sup S < b$ θα είναι $a = \sup S - \varepsilon$ και $b = \sup S + \delta$ με $\varepsilon, \delta > 0$, οπότε πρέπει $(\sup S - \varepsilon, \sup S + \delta) \subseteq S^c$

Από την ιδιότητα του supremum τώρα, έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in S$ τέτοιο ώστε $x > \sup S - \varepsilon$. Επομένως $\sup S - \varepsilon < x \leq \sup S < \sup S + \delta$ για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ που σημαίνει ότι $x \in (\sup S - \varepsilon, \sup S + \delta)$. Όμως $(\sup S - \varepsilon, \sup S + \delta) \subseteq S^c$, άρα $x \in S^c$ που είναι άτοπο αφού $x \in S$. Άρα δεν μπορεί να υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $(\sup S - \varepsilon, \sup S + \delta) \subseteq S^c$. Αυτό όμως σημαίνει ότι το $\sup S$ δεν είναι εσωτερικό σημείο του S^c που είναι άτοπο γιατί το S^c είναι ανοικτό και εξ ορισμού όλα τα σημεία του είναι εσωτερικά. Άρα $\sup S \notin S^c$. Συνεπώς $\sup S \in S$.

Επειδή, λοιπόν, $\sup S \in S$, το $\sup S$ είναι το μέγιστο στοιχείο (maximum) του S.

Άρα το μη κενό, κλειστό και άνω φραγμένο σύνολο S έχει maximum.