Ονομ/νυμο: ΑΛΒΙΟΝΑ ΜΑΝΤΣΟ

Αρ.Μητρ.: 3200098

ΕΡΓΑΣΙΑ 2.

1. Έχουμε 39 διαφορετικούς αριθμούς.

- Οι δυνατοί συνδυασμοί όταν δεν επαναλαμβάνεται κανένας αριθμός (μορφή xyz) είναι

$$P(39,3) = \frac{39!}{(39-3)!} = \frac{39!}{36!} = \frac{\cancel{36!}\cdot 37\cdot 38\cdot 39}{\cancel{36!}} = 54834$$

Επιπλέον,

- Στις θέσεις 1 και 3 μπορεί ταυτόχρονα να εμφανιστεί ένας από τους 39 αριθμούς, δηλ. έχουμε 39 δυνατές περιπτώσεις. Για κάθε έναν από αυτούς τους συνδυασμούς, έχουμε 39-1=38* δυνατές περιπτώσεις για την κατάληψη της δεύτερης θέσης (*από τους 39 αριθμούς αφαιρείται εκείνος που σε κάθε περίπτωση καταλαμβάνει τις θέσεις 1,3 αφού δεν υφίστανται συνδυασμοί της μορφής xxx)

Για την μορφή xyx, λοιπόν, έχουμε 38·39 = 1482 δυνατές περιπτώσεις

Συνολικά οι δυνατοί συνδυασμοί είναι 54834 + 1432 = 56.316

2. $\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{7 \text{ θέσεις}}$

- Υπάρχουν 6 πιθανές περιπτώσεις για τις θέσεις της συμβολοσειράς ba:
  θέσεις 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7

  Αν η ba έχει τοποθετηθεί στις θέσεις 1-2 ή 6-7 υπάρχουν 4 πιθανές περιπτώσεις για τις θέσεις της συμβολοσειράς gf ενώ για καθεμιά από τις υπόλοιπες περιπτώσεις θέσεων της ba (4 περιπτώσεις ακόμη) υπάρχουν 3 πιθανές περιπτώσεις για τις θέσεις της gf.

  Συνεπώς για τις θέσεις των συμβολοσειρών ba, gf έχουμε 2·4 + 4·3 = 8+12 = 20 διαφορετικές περιπτώσεις.

- Αφού οι συμβολοσειρές ba, gf έχουν τοποθετηθεί (καταλαμβάνουν 4 εκ των 7 θέσεων) μένουν 7-4=3 θέσεις στις οποίες τοποθετούνται με μετάθεση τα 3 στοιχεία c, d, e. P(3,3) = 3! = 6 διαφορετικές περιπτώσεις

Συνολικά οι δυνατές περιπτώσεις είναι $\underbrace{20}_{\text{συμβολοσειρές ba, gf}} \cdot \overbrace{6}^{c,d,e} = 120$

3. (i) Θα έχουμε 6 μηδενικά και 6 μονάδες σε κάθε 0-1 λέξη

$M(6,6) = \frac{12!}{6!\cdot 6!}$ οι 0-1 λέξεις με ίσο αριθμό μηδενικών και μονάδων

(ii) Όλες οι 0-1 λέξεις μήκους 12 είναι $P^*(2,12) = 2^{12} = 4096$

Από αυτές, εκείνες που <u>δεν</u> περιέχουν τουλάχιστον 3 μονάδες είναι:

- όσες περιέχουν 0 μονάδες και 12 μηδενικά και είναι

  $M(12,0) = \frac{12!}{12!0!} = 1$ λέξη

- όσες περιέχουν 1 μονάδα και 11 μηδενικά και είναι

  $M(11,1) = \frac{12!}{11!\cdot 1!} = 12$ λέξεις

- όσες περιέχουν 2 μονάδες και 10 μηδενικά και είναι

  $M(10,2) = \frac{12!}{10!\cdot 2!} = \frac{\cancel{10!}\cdot 11\cdot \overset{6}{\cancel{12}}}{\cancel{10!}\cdot \cancel{2}} = 66$ λέξεις

Συνολικά, οι 0-1 λέξεις που <u>δεν</u> περιέχουν τουλάχιστον 3 μονάδες είναι $1+12+66=79$.

Άρα οι 0-1 λέξεις που <u>περιέχουν</u> τουλάχιστον 3 μονάδες είναι $4096-79=4017$

4. $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A_1 \cap A_2 = A_1$ ①

$A_2 \subseteq A_3 \Rightarrow A_2 \cap A_3 = A_2$ ②

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \Rightarrow A_1 \subseteq A_3 \Rightarrow A_1 \cap A_3 = A_1$ ③

Από την αρχή εγκλεισμού και αποκλεισμού έχουμε:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \sum_{1\le i\le 3} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le 3} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le 3} |A_i \cap A_j \cap A_k| =$$

$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \overset{①,②,③}{=}$$

$$= \cancel{|A_1|} + \cancel{|A_2|} + |A_3| - \cancel{|A_1|} - |A_1| - \cancel{|A_2|} + |(A_1 \cap A_2) \cap A_3| \overset{①}{=} |A_3| - |A_1| + |A_1 \cap A_3| \overset{③}{=}$$

$$= |A_3| - \cancel{|A_1|} + \cancel{|A_1|} = |A_3| = 10.000$$

5. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα δεν έχει έννοια η διάταξη των κρουασάν. (είναι συλλογές) Συνεπώς θα εργαστούμε με συνδυασμούς.
Επειδή σε κάθε συλλογή θα πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον δύο κρουασάν από κάθε κατηγορία, τα $2 \cdot 5^{*} = 10$ κρουασάν θα είναι ίδια σε κάθε συλλογή
(* 5 διαφορετικές κατηγορίες κρουασάν αναφέρονται)
Αυτό, λοιπόν, που θα διαφοροποιεί τις συλλογές/συνδυασμούς μεταξύ τους είναι η κατανομή των 5-κατηγοριών κρουασάν στα 10 εναπομείναντα κενά κάθε συλλογής/συνδυασμού. Έχουμε $C^{*}(5,10) = \frac{(5+10-1)!}{10! \cdot (5-1)!} = \frac{14!}{10! \cdot 4!} = 1001$ δυνατούς συνδυασμούς (συλλογές) κρουασάν.

6. Επειδή κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 15 βαθμούς τουλάχιστον, σε κάθε δυνατή κατανομή των βαθμών, οι 150 εκ των 200 βαθμών θα είναι ισόποσα κατανεμειμένοι στις 10 ερωτήσεις $(10 \cdot 15 = 150)$. Μένουν λοιπόν $200 - 150 = 50$ βαθμοί και το ερώτημα που τίθεται είναι με πόσους τρόπους μπορούν να κατανεμηθούν οι 50 βαθμοί στις 10 ερωτήσεις.
Έστω x_i οι βαθμοί επιπλέον των 15 που λαμβάνει η ερώτηση i για $1 \leq i \leq 10$
Πρέπει $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 50, \; x_i \geq 0$ (1). Οι τρόποι κατανομής των 50 βαθμών δίνονται από το πλήθος των μη αρνητικών λύσεων της προηγούμενης εξίσωσης.

Έστω πως έχουμε 50 * και $10 - 1 = 9$ | ώστε ο τρόπος τοποθέτησης των διαχωριστικών (|) μεταξύ των αστερίσκων (*) να δίνει τα $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ ως εξής:

$$\underbrace{** * \ldots **}_{x_1 \geq 0} \,|\, \underbrace{*** \ldots ***}_{x_2 \geq 0} \,|\, \ldots \,|\, \underbrace{*** \ldots **}_{x_{10} \geq 0}$$

$\oplus$
50

Οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να διαλέξουμε τις θέσεις των διαχωριστικών (|) από ένα σύνολο με $\underset{(*)}{50} + \underset{(|)}{9} = 59$ θέσεις είναι $C(59,9) = \frac{59!}{9!(59-9)!} = \frac{59!}{9! \cdot 50!}$

Αυτό είναι και το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης (1) άρα τελικά τόσοι είναι και οι τρόποι που αναζητούσαμε εξαρχής.

7. (i) Στη λέξη ΔΙΑΚΡΙΤΑ εμφανίζονται 6 διαφορετικά γράμματα, τα Α, Δ, Ι, Κ, Ρ, Τ όπου τα Α, Ι εμφανίζονται 2 φορές το καθένα και τα υπόλοιπα από μια φορά το καθένα.

Άρα υπάρχουν $M(2,1,2,1,1,1) = \dfrac{8!}{2!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 10.080$ τρόποι να αναδιατάξουμε τα 8 γράμματα της λέξης ΔΙΑΚΡΙΤΑ

(ii) $\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{8 \text{ θέσεις}}$

• Η συμβολοσειρά ΑΑ μπορεί να τοποθετηθεί στις 8 θέσεις με 7 διαφορετικούς τρόπους: θέσεις 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8

• Στη συνέχεια μένουν 8-2=6 θέσεις και 5 διαφορετικά γράμματα εκ των οποίων: • Το Ι εμφανίζεται 2 φορές
• Τα υπόλοιπα εμφανίζονται από 1 φορά το καθένα

Άρα έχουμε $M(1,2,1,1,1) = \dfrac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \dfrac{6!}{2!} = 360$ δυνατούς τρόπους να τοποθετηθούν τα υπόλοιπα (εκτός του Α) γράμματα

Συνολικά έχουμε $\underbrace{7}_{\text{για το ΑΑ}} \cdot \underbrace{360}_{\text{για τα υπόλοιπα γράμματα}} = 2520$ αναδιατάξεις όπου τα Α εμφανίζονται το ένα δίπλα στο άλλο.

8. • Συνολικά, τα υποσύνολα του Α με 10 στοιχεία είναι $C(26,10) = \dfrac{26!}{10!(26-10)!} = \dfrac{26!}{10!\cdot 16!} = 5311735$

• Για τα υποσύνολα του Α με 10 στοιχεία που <u>περιέχουν</u> το $\{a,b,c,d\}$ γνωρίζουμε ότι: όλα περιέχουν τα 4 γράμματα a, b, c, d και διαφοροποιούνται ως προς τα υπόλοιπα 6 γράμματα που επιλέγονται από τα 22 εναπομείναντα γράμματα (αφού τα a,b,c,d έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί)

Άρα έχουμε $C(22,6) = \dfrac{22!}{6!(22-16)!} = \dfrac{22!}{6!\,16!} = 74.613$ υποσύνολα του Α με 10 στοιχεία που <u>περιέχουν</u> το $\{a,b,c,d\}$ ως υποσύνολό τους.

Συνεπώς τα υποσύνολα του Α που <u>δεν περιέχουν</u> το $\{a,b,c,d\}$ ως υποσύνολό τους είναι $5.311.735 - 74.613 = 5.237.122$