$5^{\underline{\eta}}$ Ομάδα Ασκήσεων

31. (Το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης)

Έστω η Τ.Μ. K που δηλώνει την πρώτη ρίψη στην οποία έρχεται κορώνα. $S_K=\{1,2,\dots\}$
Η πιθανότητα να έρθει κορώνα είναι $\frac{1}{2}$ (αμερόληπτο κέρμα), οπότε:
$K \sim \text{Γεωμ.}\left(\frac{1}{2}\right)$
Είναι $p_K(k) = P(K=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k}$

Έστω επίσης η Τ.Μ. Π για το κέρδος, ώστε $\Pi = 2^K$
Έχουμε $E(\Pi) = \sum_{k\in S_K} 2^k \cdot p_K(k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$

Προκύπτει δηλ. ότι η μέση τιμή για το κέρδος είναι άπειρη(!)
(Ωστόσο το ποσό των 50€ φαίνεται μεγάλο για το παιχνίδι και μάλλον δεν θα το κατέβαλε κάποιος)

32. (Δύο κορώνες)

Έστω x ο αριθμός της ρίψης όπου εμφανίζεται η δεύτερη κορώνα.
Έστω επίσης τα ενδεχόμενα:

$A = \{$"Η x-στή ρίψη είναι κορώνα"$\}$

$B = \{$"1 ακριβώς κορώνα στις πρώτες $(x-1)$ ρίψεις"$\}$

$C = \{$"Χρειάζονται ακριβώς x ρίψεις για να έρθει η $2^{\underline{\eta}}$ κορώνα"$\}$

Είναι προφανές ότι $C = A \cap B$.
Αναζητούμε την $P(C) = P(A\cap B) \overset{\text{Ανεξαρτησία}}{=\!=\!=} P(A)\cdot P(B)$ ①

- $P(A) = p$ (=[η πιθανότητα να έρθει κορώνα])

- $P(B)$: Μπορούμε να θεωρήσουμε την Τ.Μ. K για το πλήθος των κορώνων στις πρώτες $(x-1)$ ρίψεις. Τότε $K \sim \text{Διων}(x-1, p)$, $S_K = \{0,1,\dots,x-1\}$
Ουσιαστικά είναι $P(B) = P(K=1) = p_K(1) = \binom{x-1}{1}(p)^1\cdot(1-p)^{x-2}$
$= (x-1)\cdot p\cdot(1-p)^{x-2}$

Τελικά ① $\Rightarrow P(C) = p\cdot(x-1)\cdot p\cdot(1-p)^{x-2} = (x-1)\,p^2\cdot(1-p)^{x-2}$

33. (Αυτιά και μύτες)

Έστω τα ενδεχόμενα:

$A = \{$" Μεγάλα Αυτιά"$\}$,

$M = \{$" Μεγάλη Μύτη"$\}$.

Τότε για ένα οποιοδήποτε από τα παιδιά ισχύει:

- $P(A) = 1/2$, • $P(M) = 1/2$, • $P(A \cap M) \overset{\text{Ανεξαρτησία}}{=\!=\!=} P(A) \cdot P(M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (και μεγάλα αυτιά και μεγάλη μύτη)
- $P(A \cup M) = P(A) + P(M) - P(A \cap M) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (είτε μεγάλα αυτιά, είτε μεγάλη μύτη είτε και τα δύο)

(α') Για την Τ.Μ. Χ έχουμε $X \sim$ Διων. $(5, \frac{1}{4})$

5 παιδιά (για το πρόβλημα: 5 "πειράματα")

Το ενδεχόμενο $(A \cap M)$ θεωρείται "επιτυχία" $(P(A \cap M) = \frac{1}{4})$

Είναι $S_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ (από τα 5 παιδιά, κανένα έως όλα δύνανται να έχουν μεγάλη μύτη και μεγάλα αυτιά)

Για το ζητούμενο έχουμε $P(X = x) = p_X(x) = \binom{5}{x} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}$

(β') Για την Τ.Μ. Υ έχουμε $Y \sim$ Διων $(5, \frac{3}{4})$

5 παιδιά

Το ενδεχόμενο $(A \cup M)$ θεωρείται "επιτυχία" $P(A \cup M) = \frac{3}{4}$

Είναι $S_Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ (από τα 5 παιδιά, κανένα έως όλα δύνανται να έχουν είτε μεγάλη μύτη, είτε μεγάλα αυτιά είτε και τα δύο)

Για το ζητούμενο έχουμε $P(Y = y) = p_Y(y) = \binom{5}{y} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^y \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{5-y}$

(γ') Έστω Κ το ενδεχόμενο ένα παιδί να είναι κορίτσι. Θα είναι $P(K) = \frac{1}{2}$.

Έστω επίσης οι Τ.Μ. M_K, A_K για το πλήθος των κοριτσιών με μεγάλη μύτη και αυτιά, αντίστοιχα, και C για το κόστος των πλαστικών επεμβάσεων.

Θα είναι $C = 2000 \cdot M_K + 4000 \cdot A_K$.

Αναζητούμε το $E(C) = E(2000 \cdot M_K + 4000 \cdot A_K) = 2000 \cdot E(M_K) + 4000 \cdot E(A_K)$

- Για το $E(M_K)$ έχουμε:

Η πιθανότητα να έχουμε μύτη προς επέμβαση είναι $P(M \cap K) \overset{\text{Ανεξαρτ.}}{=\!=\!=} P(M) \cdot P(K)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Άρα $M_K \sim$ Διων. $(5, \frac{1}{4})$

Είναι λοιπόν $E(M_K) = 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

- Για το $E(A_K)$ έχουμε:

Η πιθανότητα με την οποία έχουμε αυτιά προς επέμβαση είναι

$P(A \cap K) \overset{\text{Ανεξαρτ.}}{=\!=} P(A) \cdot P(K) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Άρα $A_K \sim$ Διων. $(5, \frac{1}{4})$

Είναι λοιπόν $E(A_K) = 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

↳ Τελικά $E(C) = \overset{500}{\cancel{2000}} \cdot \frac{5}{\cancel{4}} + \overset{1000}{\cancel{4000}} \cdot \frac{5}{\cancel{4}} = 2500 + 5000 = 7500$

34. (Ιούλιος 2014)

Έστω Σ η Τ.Μ. για το πλήθος των επιβατικών αεροσκαφών που συντρίβονται κάθε μέρα. Δίνεται ότι $\Sigma \sim \text{Poisson}(p)$

Έστω τα ενδεχόμενα:

$A = \{$"Συντρίβονται και τα τρία την ίδια μέρα"$\}$

$B = \{$"Συντρίβονται τα 2 σε μια μέρα και το 3ο σε άλλη μέρα"$\}$

$C = \{$"Συντρίβονται σε διαφορετική μέρα το καθένα"$\}$

$D = \{$"Συντρίβονται 3 αεροσκάφη"$\}$

Προφανώς $D = A \cup B \cup C$ οπότε για το ζητούμενο $P(D)$ έχουμε $P(D) = P(A \cup B \cup C) =$
$= P(A) + P(B) + P(C)$

- Για το $P(A)$: Υπάρχουν 8 επιλογές για τη μέρα που θα συντριφθούν τα 3 αεροσκάφη και σε κάθε μία από αυτές η πιθανότητα να συντριφθούν είναι $P_\Sigma(3) = \frac{e^{-p} \cdot p^3}{3!} = \frac{e^{-p} \cdot p^3}{6}$
  Τέλος, θα γίνουν 0 συντριβές τις υπόλοιπες 7 μέρες με πιθανότητα $P_\Sigma(0) = \frac{e^{-p} \cdot p^0}{0!} = e^{-p}$ την κάθε μέρα

Άρα $P(A) = 8 \cdot \left(\frac{e^{-p} \cdot p^3}{6}\right) \cdot (e^{-p})^7 = \overset{4}{\cancel{8}} \cdot \frac{e^{-8p} \cdot p^3}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{4 e^{-8p} \cdot p^3}{3}$

• Για το $P(B)$: Υπάρχουν 8 επιλογές για τη μέρα που θα συντριφθούν τα 2 από τα 3 αεροσκάφη και αυτό θα γίνει με πιθανότητα $P_\Sigma(2) = \frac{e^{-p} \cdot p^2}{2!}$. Στη συνέχεια υπάρχουν $8-1=7$ επιλογές για τη μέρα που θα συντριφθεί το 3º αεροσκάφος και αυτό θα γίνει με πιθανότητα $P_\Sigma(1) = \frac{e^{-p} \cdot p}{1!} = e^{-p} \cdot p$

Τέλος θα γίνουν 0 συντριβές τις υπόλοιπες $8-2=6$ μέρες με πιθανότητα $P_\Sigma(0) = e^{-p}$ την κάθε μέρα.

Άρα $P(B) = \overset{4}{\cancel{8}} \cdot \frac{e^{-p} \cdot p^2}{\cancel{2}} \cdot 7 \cdot e^{-p} \cdot p \cdot (e^{-p})^6 = 28 \cdot e^{-8p} \cdot p^3$

• Για το $P(C)$: Υπάρχουν $\binom{8}{3}$ επιλογές για τις τρεις μέρες σε κάθε μια από τις οποίες συντρίβεται 1 αεροσκάφος και για κάθε μια η πιθανότητα είναι $P_\Sigma(1) = e^{-p} \cdot p$. Τις υπόλοιπες $8-3=5$ μέρες γίνονται 0 συντριβές με πιθανότητα e^{-p} την κάθε μέρα

Άρα $P(C) = \binom{8}{3} \cdot (P_\Sigma(1))^3 \cdot (e^{-p})^5 = \frac{8!}{5!3!} \cdot (e^{-p} \cdot p)^3 \cdot (e^{-p})^5 = 56 \cdot e^{-8p} \cdot p^3$

↳ Τελικά $P(D) = P(A) + P(B) + P(C) = e^{-8p} \cdot p^3 \left(\frac{4}{3} + 28 + 56\right) = e^{-8p} \cdot p^3 \cdot \left(\frac{256}{3}\right)$

35. (Ελαττωματικοί υπολογιστές)

Έστω το ενδεχόμενο $F = \{$"Ελαττωματικός υπολογιστής"$\}$

$P(F) = \frac{12}{2000} = \frac{3}{500}$

Έστω η Τ.Μ. X για το πλήθος των ελαττωματικών υπολογιστών που βρίσκουμε κατά τη δειγματοληψία. Θα ισχύει $X \sim$ Διων. $(10, \frac{3}{500})$

(α') $P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) = 1 - (P_X(0) + P_X(1)) =$

$= 1 - \left(\binom{10}{0} \cdot \left(\frac{3}{500}\right)^0 \cdot \left(\frac{497}{500}\right)^{10} + \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{3}{500}\right)^1 \cdot \left(\frac{497}{500}\right)^9\right) =$

$= 1 - \left(\left(\frac{497}{500}\right)^{10} + 1\cancel{0} \cdot \frac{3}{50\cancel{0}} \cdot \left(\frac{497}{500}\right)^9\right) \simeq 0{,}001569$

(β') $VAR(X) = 10\left(\frac{3}{500}\right)\left(1 - \frac{3}{500}\right) = 1\cancel{0} \cdot \frac{3}{50\cancel{0}} \cdot \frac{497}{500} = 0{,}05964$

$E(X) = \frac{1\cancel{0} \cdot 3}{50\cancel{0}} = \frac{3}{50} = 0{,}06$

(γ') Θα ισχύει $Y \sim \text{Γεωμ}\left(\frac{3}{500}\right)$

$$E(Y) = \frac{1}{\frac{3}{500}} = \frac{500}{3}$$

$$VAR(Y) = \frac{\left(1 - \frac{3}{500}\right)}{\left(\frac{3}{500}\right)^2} = \frac{497}{\cancel{500}} \cdot \frac{500^{\cancel{2}}}{9} \simeq 27611{,}1$$

36. (Γινόμενο Bernoulli)

Για την X έχουμε:

$S_X = \{0,1\}$

$P_X(1) = p$

$P_X(0) = 1-p$

Για την Y έχουμε:

$S_Y = \{0,1\}$

$P_Y(1) = 1/2$

$P_Y(0) = 1/2$

Έτσι για την Z παίρνουμε:

$S_Z = \{0,1\}$ (αυτά είναι τα πιθανά γινόμενα των X, Y που μπορούν να προκύψουν)

- $P_Z(1) = P(Z=1) = P(X \cdot Y = 1) = P((X=1) \cap (Y=1)) \overset{*}{=} P(X=1) \cdot P(Y=1)$ (* Ανεξαρτησία)

$= p \cdot \frac{1}{2} = \frac{p}{2}$

- $P_Z(0) = P(Z=0) = P(X \cdot Y = 0) = P([(X=1) \cap (Y=0)] \cup [(X=0) \cap (Y=1)] \cup [(X=0) \cap (Y=0)])$

$= P(X=1) \cdot P(Y=0) + P(X=0) \cdot P(Y=1) + P(X=0) \cdot P(Y=0) =$

$= p \cdot \frac{1}{2} + (1-p)\frac{1}{2} + (1-p) \cdot \frac{1}{2} = \frac{\cancel{p} + 1 - \cancel{p} + 1 - p}{2} = \frac{2-p}{2} = 1 - \frac{p}{2}$

(πιο απλά $P_Z(0) = 1 - P_Z(1) = 1 - \frac{p}{2}$)

Έχουμε $E(Z) = P_Z = \frac{p}{2}$

$$VAR(Z) = \frac{p}{2}\left(1 - \frac{p}{2}\right) = \left(\frac{p}{2} - \frac{p^2}{4}\right)$$

37. (Κλήσεις υπολογιστή)

(α') Σε δύο ημέρες ο υπολογιστής θα πραγματοποιήσει $25 \cdot 2 = 50$ κλήσεις

Έστω X η Τ.Μ. η τυχαία μεταβλητή για το πλήθος των αποτυχημένων κλήσεων σε 2 ημέρες. $X \sim \Delta\iota\omega\nu(50, 0{,}002)$

Επομένως έχουμε $E(X) = 50 \cdot 0{,}002$

$$VAR(X) = 50 \cdot 0{,}002 \cdot 0{,}998 = 0{,}0998$$

Για την πιθανότητα να υπάρχει το πολύ μια αποτυχημένη κλήση σε μια μέρα θεωρούμε την Τ.Μ. Y για το πλήθος των αποτ. κλήσεων και έχουμε: $Y \sim \Delta\iota\omega\nu(25, 0{,}002)$

Οπότε $P(Y \leq 1) = P(Y=0) + P(Y=1) = \binom{25}{0} \cdot (0{,}002)^0 \cdot (0{,}998)^{25} + \binom{25}{1} \cdot (0{,}002)^1 \cdot (0{,}998)^{24} =$

$= (0{,}998)^{25} + 25 \cdot 0{,}002 \cdot (0{,}998)^{24} = (0{,}998)^{24}(0{,}998 + 0{,}05) \simeq 0{,}95 \cdot 1{,}048 = 0{,}9956$

(β') Έστω η Τ.Μ. W για την πρώτη κλήση που θα αποτύχει. Τότε $W \sim \Gamma\varepsilon\omega\mu.(0{,}002)$

και επομένως $P(W = 100) = (1 - 0{,}002)^{99} \cdot 0{,}002 \simeq 0{,}0016$

Τέλος $E(W) = \frac{1}{0{,}002} = \frac{1}{\frac{0{,}2}{100}} = \frac{1000}{2} = 500$

38. (Καλαθοσφαίριση)

Έστω οι Τ.Μ. N_Π, N_O για τις νίκες της ομάδας Π και Ο αντίστοιχα.

(α') Για να κερδίσει η Π περισσότερους αγώνες από την Ο θα πρέπει $N_\Pi = 6, 7, 8, 9, 10$

$N_\Pi \sim \Delta\iota\omega\nu.(10, 0{,}6)$.

Είναι λοιπόν $P(N_\Pi \geq 6) = P(N_\Pi = 6) + P(N_\Pi = 7) + P(N_\Pi = 8) + P(N_\Pi = 9) + P(N_\Pi = 10)$

$$= \sum_{\nu=6}^{10} P_{N_\Pi}(\nu) = \sum_{\nu=6}^{10} \binom{10}{\nu} \cdot (0{,}6)^\nu \cdot (0{,}4)^{10-\nu}$$

(β') Έστω W οι αγώνες που παίζονται μέχρι να κερδίσει η Ο για πρώτη φορά

$W \sim \Gamma\varepsilon\omega\mu.(0{,}4)$

Έχουμε λοιπόν $P(W = 6) = (0{,}6)^5 \cdot 0{,}4 \simeq 0{,}031$

(γ') Έστω τα ενδεχόμενα: A = {"Η Ο κερδίζει μία (1) φορά στους πρώτους 4 αγώνες"}

B = {"Η Ο κερδίζει τον 5º αγώνα"}

C = {"Χρειάζονται ακριβώς 5 αγώνες για να κερδίσει η Ο 2 φορές"}

Προφανώς $C = A \cap B$ και $P(C) = P(A \cap B) \overset{\text{Ανεξαρτησία}}{=} P(A) \cdot P(B)$

- Για το P(A): Μπορούμε να θεωρήσουμε την Τ.Μ. K για τις φορές που κέρδισε η Ο στους πρώτους 4 αγώνες. $K \sim \Delta\iota\omega\nu.(4, 0{,}4)$

Ουσιαστικά $P(A) = P(K=1) = P_K(1) = \binom{4}{1} \cdot (0,4)^1 \cdot (0,6)^3 = 4 \cdot 0,4 \cdot (0,6)^3 = 0,3456$

• $P(B) = 0,4$

Άρα τελικό $P(C) = P(A) \cdot P(B) = 0,13824$

(δ') Έστω τα ενδεχόμενα:

$D = \{$"Η Ο κερδίζει 3 αγώνες από τους 5 πρώτους αγώνες"$\}$

$E = \{$"Η Ο κερδίζει τον 6ο αγώνα"$\}$

$F = \{$"Χρειάζονται ακριβώς 6 αγώνες για να κερδίσει 4 αγώνες η Ο"$\}$

$G = \{$"Η Π κερδίζει 3 αγώνες από τους 5 πρώτους"$\}$

$H = \{$"Η Π κερδίζει τον 6ο αγώνα"$\}$

$I = \{$"Χρειάζονται ακριβώς 6 αγώνες για να κερδίσει 4 αγώνες η Π"$\}$

▷ Προφανώς $F = D \cap E$ και $I = G \cap H$ άρα $P(F) = P(D \cap E) = P(D) \cdot P(E)$ ① και $P(I) = P(G \cap H) = P(G) \cdot P(H)$ ②

Αν θεωρήσουμε $J = \{$"Χρειάζονται ακριβώς 6 αγώνες για να κερδίσει 4 αγώνες 1 ομάδα"$\}$

τότε προφανώς $J = F \cup I \Rightarrow P(J) = P(F \cup I) \xRightarrow{F, I \text{ ξένα}} P(J) = P(F) + P(I)$ ③

Έχουμε • $P(D) = \binom{5}{3} \cdot (0,4)^3 \cdot (0,6)^2 = \frac{5!}{3!\,2!} \cdot (0,4)^3 \cdot (0,6)^2 = 0,2304$ [διωνυμική κατανομή]

• $P(E) = 0,4$

↳ Άρα ① $\Rightarrow P(F) = 0,2304 \cdot 0,4 = 0,09216$

Επίσης • $P(G) = \binom{5}{3} \cdot (0,6)^3 \cdot (0,4)^2 = \frac{5!}{3!\,2!} (0,6)^3 \cdot (0,4)^2 = 0,3456$

• $P(H) = 0,6$

↳ Άρα ② $\Rightarrow P(I) = 0,3456 \cdot 0,6 = 0,20736$

Τελικά ③ $\Rightarrow P(J) = 0,2304 + 0,20736 = 0,43776$