Ονομ/νυμο: ΑΛΒΙΟΝΑ ΜΑΝΤΖΟ
Αρ. Μητρ.: 3200098
Ομ. Ασκ.: 8η

8η Ομάδα Ασκήσεων

48. (Συνδυασμός πυκνοτήτων)

(α') Πρέπει $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (af(x) + (1-a)g(x))\,dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} af(x)\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (1-a)g(x)\,dx$

$= 1 \Rightarrow a\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx + (1-a)\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = 1 \xrightarrow{f,g \to \text{πυκνότητες}} a\cdot 1 + (1-a)\cdot 1 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{a} + 1 - \cancel{a} = 1$, που ισχύει. Άρα η $h(x)$ είναι πράγματι πυκνότητα πιθανότητας

(β') $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,(af(x) + (1-a)g(x))\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,af(x)\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} x(1-a)g(x)\,dx =$

$= a\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx + (1-a)\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\,dx = aE(X) + (1-a)E(Y)$

(γ') $E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(h(x))\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(af(x) + (1-a)g(x))\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} ax^2f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty}(1-a)x^2g(x)\,dx$

$= a\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)\,dx + (1-a)\int_{-\infty}^{+\infty} x^2g(x)\,dx = aE(X^2) + (1-a)E(Y^2)$

(δ') $VAR(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \left[aE(X^2) + (1-a)E(Y^2)\right] - \left(aE(X) + (1-a)E(Y)\right)^2 =$

$= aE(X^2) + (1-a)E(Y^2) - \left[a^2(E(X))^2 + 2aE(X)(1-a)E(Y) + (1-a)^2(E(Y))^2\right] =$

$= aE(X^2) + E(Y^2) - aE(Y^2) - a^2(E(X))^2 - 2aE(X)(1-a)E(Y) - (1-a)^2(E(Y))^2 =$

$= aE(X^2) - a^2(E(X)^2) + (1-a)E(Y^2) - (1-a)^2E(Y) - 2aE(X)(1-a)E(Y) =$

$= a(E(X^2) - a(E(X)^2) + (1-a)(E(Y^2) - (1-a)E(Y)) - 2aE(X)(1-a)E(Y)$

49. (Τετράγωνο κανονικής Τ.Μ.)

- Είναι $G(y) = P(Y \leq y) = P(aX^2 \leq y) = P\left(X^2 \leq \frac{y}{a}\right) = P\left(-\sqrt{\frac{y}{a}} \leq X \leq \sqrt{\frac{y}{a}}\right) \overset{\mu=0,\ \sigma=\sqrt{\sigma^2}}{=}$

$= P\left(\frac{-\sqrt{\frac{y}{a}}}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\sqrt{\frac{y}{a}}}{\sigma}\right)$ ①

Αν θέσουμε $Z = \frac{X-\cancel{\mu}^{0}}{\sigma}$ ① $\Rightarrow P\left(\frac{-\sqrt{\frac{y}{a}}}{\sigma} \leq Z \leq \frac{\sqrt{\frac{y}{a}}}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{\frac{y}{a}}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{\frac{y}{a}}}{\sigma}\right) =$

$= \Phi\left(\frac{\sqrt{\frac{y}{a}}}{\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{y/a}}{\sigma}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{y/a}}{\sigma}\right) - 1$

- Επίσης γνωρίζουμε ότι $g(y) = G'(y) = \left(2\Phi\left(\frac{\sqrt{y/a}}{\sigma}\right) - 1\right)' = 2\Phi'\left(\frac{\sqrt{y/a}}{\sigma}\right) =$

$= 2\phi\left(\frac{\sqrt{y/a}}{\sigma}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{y/a}}{\sigma}\right)' = 2\phi\left(\frac{\sqrt{y/a}}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \left(\sqrt{y}/\sqrt{a}\right)' = 2\phi\left(\frac{\sqrt{y/a}}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} =$

$= 2\phi\left(\frac{\sqrt{y/a}}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{2\sigma\sqrt{ay}}$

- Τέλος $E(Y) = E(aX^2) = a\,E(X^2) = a\left(VAR(X) - (E(X))^2\right) \overset{E(X)=0,\ VAR(X)=\sigma^2}{=}$

$= a(\sigma^2 - 0) = a\sigma^2$

50. (Προσδιορισμός παραμέτρων)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<4 \\ Ax+B-\frac{4}{x}, & x \geq 4 \end{cases}$$

(α΄) Πρέπει $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(Ax+B-\frac{4}{x}\right) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} Ax + \lim\limits_{x\to+\infty} B + \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{4}{x} = 1 \Rightarrow$

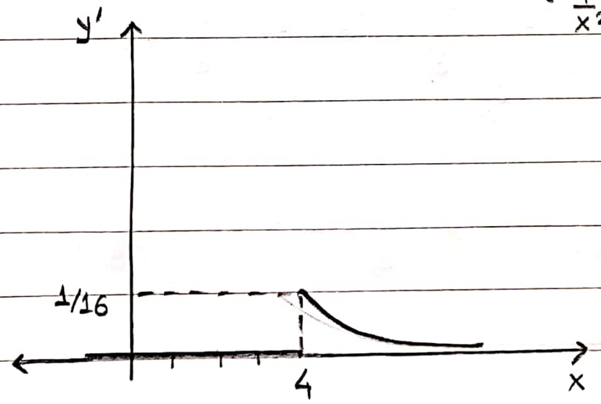
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(Ax) + B + 0 = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} Ax = 1-B$ ①

Αν $A>0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} Ax = +\infty \neq (1-B)$
Αν $A<0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} Ax = -\infty \neq (1-B)$
Οπότε πρέπει $\boxed{A=0}$

Άρα ① $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} 0 = 1-B \Rightarrow 0 = 1-B \Rightarrow \boxed{B=1}$

Συνεπώς $F(x) = \begin{cases} 0, & x<4 \\ 1-\frac{4}{x}, & x\geq 4 \end{cases}$

(β΄) Γνωρίζουμε ότι $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x<4 \\ \frac{4}{x^2}, & x \geq 4 \end{cases}$ (η τιμή στο 4 δεν χρειάζεται να καθοριστεί με κάποιον αυστηρό τρόπο



(γ΄) Έχουμε $P(X<5 \mid X<6) = \dfrac{P(X<5 \text{ και } X<6)}{P(X<6)} = \dfrac{P(X<5)}{P(X<6)} = \dfrac{F(5)}{F(6)} = \dfrac{-\frac{4}{5}+1}{-\frac{4}{6}+1} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{5}$

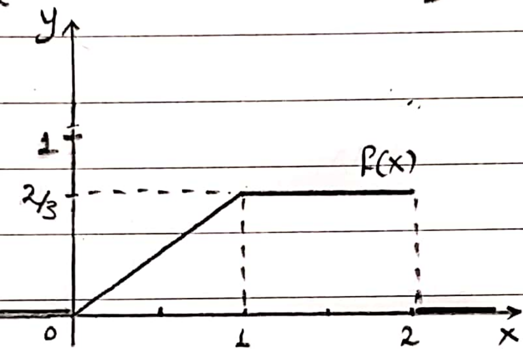
51. (Τμηματικά γραμμική πυκνότητα)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ cx, & 0 \leq x \leq 1 \\ c, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$$

(α') Πρέπει $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 cx\,dx + \int_1^2 c\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 \left(c\frac{x^2}{2}\right)' dx + \int_1^2 (cx)'\,dx = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow c \cdot \frac{1}{2} + 2c - c = 1 \Rightarrow \frac{c}{2} + c = 1 \Rightarrow 3c = 2 \Rightarrow c = \frac{2}{3}$

Συνεπώς $f(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{2}{3}x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{2}{3}, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$



(β') Είναι $P((X>1.5) \cup (X<0.5)) \overset{\text{ξένα}}{=} P(X>1.5) + P(X<0.5) =$

$= (1 - P(X \leq 1.5)) + P(X<0.5) = 1 - \int_{-\infty}^{1.5} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{0.5} f(x)\,dx =$

$= 1 - \int_0^1 f(x)\,dx - \int_1^{1.5} f(x)\,dx + \int_0^{0.5} f(x)\,dx = 1 - \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x\right) dx - \int_1^{1.5} \frac{2}{3}\,dx + \int_0^{0.5} \left(\frac{2}{3}x\right) dx =$

$= 1 - \int_0^1 \left(\frac{\cancel{2}}{3}\frac{x^2}{\cancel{2}}\right)' dx - \int_1^{1.5} \left(\frac{2}{3}x\right)' dx + \int_0^{0.5} \left(\frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}}\right)' dx = \cancel{1} - \frac{1}{3} - \cancel{1} + \frac{2}{3} + \frac{0.25}{3} =$

$= \frac{1.25}{3} \simeq 0,41\overline{6}$

(γ') $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{2}{3}x^2\,dx + \int_1^2 \frac{2}{3}x\,dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3}\right)' dx + \int_1^2 \left(\frac{\cancel{2}}{3}\frac{x^2}{\cancel{2}}\right)' dx =$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{9} + 1 = \frac{11}{9}$