(58) ! Να ρωτήσω

Ονομ/νυμο: ΑΛΒΙΟΝΑ ΜΑΝΤΣΟ
Ομάδα ασκ.: 9η
Αρ. μητρώου: 3200098

9η Ομάδα Ασκήσεων

55. (Καταχρηστικά ολοκληρώματα)

(α') $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_{0^+}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx + \int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{h\to 0^+}\int_h^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx + \lim_{h\to+\infty}\int_1^h\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ (1)

Είναι $\displaystyle\int_h^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_h^1 2\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2\int_h^1(\sqrt{x})'dx = 2(1-\sqrt{h})$

$\displaystyle\int_1^h\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\int_1^h(\sqrt{x})'dx = 2(\sqrt{h}-1)$

(1) $\displaystyle= \lim_{h\to 0^+} 2(1-\sqrt{h}) + \lim_{h\to+\infty} 2(\sqrt{h}-1) = 2(1-0) + 2(+\infty-1) = 2+\infty = +\infty$

(β') $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log|x|}{x}dx = \int_{-\infty}^{0^-}\frac{\log|x|}{x}dx + \int_{0^+}^{+\infty}\frac{\log|x|}{x}dx = \int_{-\infty}^{0^-}\frac{\log(-x)}{x}dx + \int_{0^+}^{+\infty}\frac{\log(x)}{x}dx =$

$\displaystyle= \int_{-\infty}^{-1}\frac{\log(-x)}{x}dx + \int_{-1}^{0^-}\frac{\log(-x)}{x}dx + \int_{0^+}^{1}\frac{\log(x)}{x}dx + \int_1^{+\infty}\frac{\log(x)}{x}dx =$

$\displaystyle= \lim_{h\to-\infty}\int_h^{-1}\frac{\log(-x)}{x}dx + \lim_{h\to 0^-}\int_{-1}^{h}\frac{\log(-x)}{x}dx + \lim_{h\to 0^+}\int_h^1\frac{\log(x)}{x}dx + \lim_{h\to+\infty}\int_1^h\frac{\log(x)}{x}dx$ (2)

Είναι $\displaystyle\int_h^{-1}\frac{\log(-x)}{x}dx = \int_h^{-1}(\log(-x))'\log(-x)\,dx = \log(1)\cdot\log(1) - \log(-h)\cdot\log(-h) -$

$\displaystyle- \int_h^{-1}\frac{\log(-x)}{x}dx \Rightarrow 2\int_h^{-1}\frac{\log(-x)}{x}dx = -\log^2(-h) \Rightarrow \int_h^{-1}\frac{\log(-x)}{x}dx = -\frac{\log^2(-h)}{2}$

Ομοίως $\displaystyle\int_{-1}^{h}\frac{\log(-x)}{x}dx = \frac{\log(-h)\cdot\log(-h) - \log(1)\cdot\log(1)}{2} = \frac{\log^2(-h)}{2}$

$\displaystyle\int_h^1\frac{\log(x)}{x}dx = \frac{\log(1)\cdot\log(1) - \log(h)\cdot\log(h)}{2} = -\frac{\log^2(h)}{2}$

$\displaystyle\int_1^h\frac{\log(x)}{x}dx = \frac{\log(h)\cdot\log(h) - \log(1)\cdot\log(1)}{2} = \frac{\log^2(h)}{2}$

(2) $\displaystyle= \lim_{h\to-\infty} -\frac{\log^2(-h)}{2} + \lim_{h\to 0^-}\frac{\log^2(-h)}{2} + \lim_{h\to 0^+} -\frac{\log^2(h)}{2} + \lim_{h\to+\infty}\frac{\log^2(h)}{2} =$

$\displaystyle= -\lim_{h\to+\infty}\frac{\log^2(h)}{2} + \lim_{h\to 0^+}\frac{\log^2(h)}{2} - \lim_{h\to 0^+}\frac{\log^2(h)}{2} + \lim_{h\to+\infty}\frac{\log^2(h)}{2} =$

$= (-\infty) + (-\infty) + (+\infty) + (+\infty)$ Άρα το καταχρηστικό ολοκλήρωμα δεν υπάρχει (γ') $\int_0^{\pi} |\tan x|\, dx = \int_0^{\pi/2^-} |\tan x|\, dx + \int_{\pi/2^+}^{\pi} |\tan x|\, dx = \int_0^{\pi/2^-} \tan x\, dx + \int_{\pi/2^+}^{\pi} -\tan x\, dx =$

$= \lim_{h\to \pi/2^-} \int_0^h \tan x\, dx + \lim_{h\to \pi/2^+} \int_h^{\pi} -\tan x\, dx$ ③

Είναι $\int_0^h \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int_0^h -\frac{1}{\cos x} (\cos x)'\, dx = \int_0^h -(\log(\cos x))'\, dx = -\log(\cos h) + \log(\cos 0) =$

$= -\log(\cosh)$

$\int_h^{\pi} -\tan x\, dx = -\int_h^{\pi} \tan x\, dx = -\int_h^{\pi} -(\log(-\cos x))'\, dx = \log(-\cos \pi) - \log(-\cosh)) =$

$= \log(1) - \log(-\cosh) = -\log(-\cosh)$

③ $= \lim_{h\to \frac{\pi}{2}^-} -\log(\cosh)^{(a)} + \lim_{h\to \frac{\pi}{2}^+} -\log(-\cosh)^{(b)}$

Θέτουμε $\cosh = y$ και $\lim_{h\to \frac{\pi}{2}^-} y = \lim_{h\to \frac{\pi}{2}^-} \cosh = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

Άρα $(a) = \lim_{y\to 0^+} -\log y = -(-\infty) = +\infty$

Θέτουμε $-\cosh = \omega$ και $\lim_{h\to \frac{\pi}{2}^+} \omega = \lim_{h\to \frac{\pi}{2}^+} -\cosh = -\cos\frac{\pi}{2} = 0$

Άρα $(b) = \lim_{y\to 0^+} -\log y = -(-\infty) = +\infty$

Οπότε το αναζητούμενο είναι $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

56. (Όγκος στερεού εκ περιστροφής)

Ο όγκος (V) του στερεού που ζητείται θα είναι ο ίδιος με εκείνον που προκύπτει αν περιστρέψουμε την μετατοπισμένη κατά μια μονάδα προς τα πάνω συνάρτηση f (έστω $g(x)=f(x)+1=\sin x+1$) γύρω από τον άξονα $x'x$ $(y=0)$

Είναι λοιπόν $V=\pi\int_0^\pi g^2=\pi\int_0^\pi(\sin x+1)^2dx=\pi\int_0^\pi(\sin^2x+2\sin x+1)\,dx=$

$=\pi\int_0^\pi \sin^2x\,dx+\pi\int_0^\pi 2\sin x\,dx+\pi\int_0^\pi 1\,dx$ (1)

Είναι • $\pi\int_0^\pi\sin^2x\,dx=\pi\int_0^\pi\frac{1-\cos2x}{2}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi 1\,dx-\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\cos2x\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi(x)'dx-$

$-\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{(\sin2x)'}{2}dx=\frac{\pi}{2}(\pi-0)-\frac{\pi}{4}(\underbrace{\sin2\pi-\sin0}_{0})=\frac{\pi^2}{2}$

• $\pi\int_0^\pi 2\sin x\,dx=2\pi\int_0^\pi(-\cos x)'dx=2\pi(-\cos\pi+\cos0)=2\pi(1+1)=4\pi$

• $\pi\int_0^\pi 1\,dx=\pi\int_0^\pi(x)'dx=\pi(\pi-0)=\pi^2$

(1) $\Rightarrow V=\frac{\pi^2}{2}+4\pi+\pi^2=\frac{3\pi^2}{2}+4\pi$

57. (Καρπούζια)

(α') $V=\pi\int_0^{40}f^2(x)\,dx=\pi\int_0^{40}\left(\sqrt{300\left(1-\frac{(x-20)^4}{20^4}\right)}\right)^2dx=\pi\int_0^{40}300\left|1-\frac{(x-20)^4}{20^4}\right|dx$ (1)

Για $0\le x\le 40$ έχουμε $-20\le x-20\le 20\Rightarrow|x-20|\le 20\Rightarrow(x-20)^4\le 20^4\Rightarrow$

$\Rightarrow 20^4-(x-20)^4\ge 0\Rightarrow 1-\frac{(x-20)^4}{20^4}\ge 0$

Άρα (1) $\Rightarrow V=\pi\int_0^{40}300\left(1-\frac{(x-20)^4}{20^4}\right)dx$

(β') $V = 300\pi \int_0^{40} 1 - \frac{(x-20)^4}{20^4}\, dx = 300\pi \int_0^{40} 1\, dx - \frac{300\pi}{20^4} \int_0^{40} (x-20)^4\, dx$

Είναι $300\pi \int_0^{40} 1\, dx = 300\pi \int_0^{40} (x)'\, dx = 300\pi (40-0) = 12000\pi$

$$\frac{300\pi}{20^4} \int_0^{40} (x-20)^4 dx = \frac{300\pi}{20^4} \int_0^{40} \left(\frac{(x-20)^5}{5}\right)' dx = \frac{300\pi}{20^4} \left(\frac{(40-20)^5}{5} - \frac{(-20)^5}{5}\right)$$

$$= \frac{300\pi}{20^4} \left(\frac{20^5}{5} + \frac{20^5}{5}\right) = \frac{300\pi}{\cancel{20^4}} \cdot \frac{2 \cdot \cancel{20^5}^{\,4}}{\cancel{5}} = 2400\pi$$

Άρα $V = 12000\pi - 2400\pi = 9600\pi$

(γ') Για το μήκος του κιβωτίου γνωρίζουμε ότι θα είναι 40 αφού $0 \leq x \leq 40$.

Όσον αφορά το πλάτος και το ύψος, θα πρέπει να υπολογίσουμε τη μέγιστη τιμή της f (που θα δίνει και το μέγιστο ύψος και πλάτος του καρπουζιού)

Η f είναι παρ/μη στο $[0,40]$ με $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{300\left(1 - \frac{(x-20)^4}{20^4}\right)}} \cdot \left(\frac{-300 \cdot 4 (x-20)^3}{20^4} \cdot 1\right)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \left(\frac{-300 \cdot 4 (x-20)^3}{20^4}\right) = 0 \Rightarrow (x-20)^3 = 0 \Rightarrow (x-20) = 0 \Rightarrow x = 20$

Το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή αφού όπως δείξαμε στο ερώτημα (α') ο παρονομαστής είναι θετικός για $x \in [0,40]$

Για $x < 20$, λοιπόν, έχουμε $(x-20) < 0 \Rightarrow (x-20)^3 < 0 \Rightarrow \frac{-300 \cdot 4 (x-20)^3}{20^4} > 0$
$\Rightarrow f'(x) > 0$

Ομοίως, $x > 20 \Rightarrow f'(x) < 0$

Συνεπώς:

x	0		20		40
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	max	↘	

$f \uparrow [0,20]$
$f \downarrow [20,40]$ (αφού είναι και συνεχής στο 20)

Επομένως η f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο για $x = 20$ το
$f_{max} = f(20) = \sqrt{300\left(1 - \frac{(20-20)^4}{20^4}\right)} = \sqrt{300}$

Το πλάτος και το ύψος του καρπουζιού, λοιπόν, θα είναι $2f_{max} = 2\sqrt{300}$

Άρα οι διαστάσεις του κιβωτίου θα πρέπει να είναι:

$\mu \times \eta \times \upsilon = 40 \times 2\sqrt{300} \times 2\sqrt{300}$

58. (Όρια)

(α΄) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{10+5e^{\frac{1}{x^3}}}$ ①

Θέτουμε $y=\frac{1}{x^3}$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} y = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$ οπότε $\lim\limits_{y\to -\infty}(10+5e^y) = 10+5\cdot 0 = 10$

$\lim\limits_{x\to 0^+} y = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$ οπότε $\lim\limits_{y\to +\infty}(10+5e^y) = 10+5(+\infty) = +\infty$

① $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\tan x}{10+5e^{\frac{1}{x^3}}} = \dfrac{\tan 0}{10} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\tan x}{10+5e^{\frac{1}{x^3}}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{10+5e^{\frac{1}{x^3}}}\cdot \tan x\right) = 0\cdot 0 = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{10+5e^{\frac{1}{x^3}}} = 0$

(β΄) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\log n}{\sqrt{n}}\right)^7 = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(\log n)^7}{n^{1/2}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\log n}{n^{1/14}}\right)^7 = \left(\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\log n}{n^{1/14}}\right)^7$

Για το $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\log n}{n^{1/14}}$ έχουμε απροσδιοριστία $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\log n}{n^{1/14}} \overset{(\frac{\infty}{\infty})DLH}{=} \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{14}n^{\frac{1}{14}-1}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{14}{n^{-13/14}\cdot n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{14}{n^{-13/14+1}} =$

$= \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{14}{n^{1/14}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{14}{\sqrt[14]{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(14\cdot\dfrac{1}{\sqrt[14]{n}}\right) = 14\cdot 0 = 0$

Άρα $\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\log n}{n^{1/14}}\right)^7 = 0^7 = 0$

59. (Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα 1)

(α') $\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{x}\,dx = \lim_{h\to+\infty} \int_1^h \frac{2+\cos x}{x}\,dx$ ①

Είναι $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \cos x + 2 \leq 3 \xrightarrow{x>0} \frac{1}{x} \leq \frac{\cos x + 2}{x} \leq \frac{3}{x} \Rightarrow \int_1^h \frac{1}{x}\,dx \leq \int_1^h \frac{\cos x + 2}{x}\,dx$ ②

$\lim_{h\to+\infty} \int_1^h \frac{1}{x}\,dx = \lim_{h\to+\infty} \int_1^h (\log x)'\,dx = \lim_{h\to+\infty} (\log h - \underbrace{\log 1}_{0}) = \lim_{h\to+\infty} \log h = +\infty$

Λόγω της σχέσης (2) λοιπόν θα είναι ① $\Rightarrow \lim_{h\to+\infty} \int_1^h \frac{2+\cos x}{x}\,dx = +\infty.$

(β') Κατ'αρχάς $\int_0^h \frac{2+\cos x}{x}\,dx = \int_{0^+}^1 \frac{2+\cos x}{x}\,dx + \int_1^h \frac{2+\cos x}{x}\,dx = \lim_{h\to 0^+} \int_h^1 \frac{2+\cos x}{x}\,dx + \int_1^h \frac{2+\cos x}{x}$

Είναι $\lim_{h\to 0^+} \int_h^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{h\to 0^+} (\cancel{\log 1} - \log h) = \lim_{h\to 0^+} -\log h = -(-\infty) = +\infty$

Οπότε και πάλι λόγω της σχέσης (2) έχουμε $\lim_{h\to 0^+} \int_h^1 \frac{2+\cos x}{x}\,dx = +\infty$

Συνεπώς $\lim_{h\to+\infty} \int_0^h \frac{2+\cos x}{x}\,dx = \lim_{h\to+\infty} \left(\int_{0^+}^1 \left(\frac{2+\cos x}{x}\right)dx + \int_1^h \left(\frac{2+\cos x}{x}\right)dx \right) =$

$= (+\infty) + \lim_{h\to+\infty} \int_1^h \left(\frac{2+\cos x}{x}\right) \cdot dx \overset{(\alpha')}{=} (+\infty) + (+\infty) = +\infty$

Άρα $\lim_{h\to+\infty} \frac{1}{h} \int_0^h \left(\frac{2+\cos x}{x}\right) \cdot dx = \lim_{h\to+\infty} \frac{\int_0^h \left(\frac{2+\cos x}{x}\right) \cdot dx}{h} \underset{DLH}{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}$

$= \lim_{h\to+\infty} \frac{\left(\int_0^h \left(\frac{2+\cos x}{x}\right)dx\right)'}{h'} \overset{*}{=} \lim_{h\to+\infty} \frac{\frac{2+\cos h}{h}}{1}$

* λόγω του 1ου Θεμελιώδους Θεωρήματος Λογισμού

Έχουμε (όπως δείξαμε στο α) ότι $\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x + 2}{x} \leq \frac{3}{x}$

Είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ και $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x + 2}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{h\to+\infty} \frac{1}{h} \int_0^h \frac{2+\cos x}{x}\,dx = 0$

60. (Ολοκληρώματα)

(α') $\int_{-e}^{e} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-e}^{e}\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-e}^{e}(\log(x^2+1))'\,dx = \frac{1}{2}\left(\log(e^2+1) - \log((-e)^2+1)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\log(e^2+1) - \log(e^2+1)\right) = 0$

(Αναμενόμενο αφού $f(-x) = \frac{-x}{1+x^2} = -f(x)$, δηλ. η f είναι περιττή, και το διάστημα ολοκλήρωσης είναι της μορφής $[-a,a]$, $a\in\mathbb{R}$.)

(β') $\int_{-1}^{1} \log\left(\frac{x+10}{x+100}\right)dx = \int_{-1}^{1}\log(x+10) - \log(x+100)\,dx = \int_{-1}^{1}\log(x+10)\,dx - \int_{-1}^{1}\log(x+100)\,dx$ ①

- $\int_{-1}^{1}\log(x+10) = \int_{-1}^{1}(x+10)'\log(x+10)\,dx = 11\log 11 - 9\log 9 - \int_{-1}^{1}(x+10)\cdot\frac{1}{x+10}\,dx =$

$= 11\log 11 - 9\log 9 - \int_{-1}^{1} 1\,dx = 11\log 11 - 9\log 9 - \int_{-1}^{1}(x)'\,dx = 11\log 11 - 9\log 9 - (1+1)$

$= 11\log 11 - 9\log 9 - 2$

- $\int_{-1}^{1}\log(x+100) = \int_{-1}^{1}(x+100)'\log(x+100)\,dx = 101\log 101 - 99\log 99 - \int_{-1}^{1}(x+100)\cdot\frac{1}{x+100}\,dx$

$= 101\log 101 - 99\log 99 - \int_{-1}^{1} 1\,dx = 101\log 101 - 99\log 99 - \int_{-1}^{1}(x)'\,dx =$

$= 101\log 101 - 99\log 99 - (1+1) = 101\log 101 - 99\log 99 - 2$

① $\Rightarrow \int_{-1}^{1}\log\left(\frac{x+10}{x+100}\right)dx = 11\log 11 - 9\log 9 - 2 - 101\log 101 + 99\log 99 + 2$

(γ') $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{h\to+\infty}\int_{0}^{h}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{h\to+\infty}\int_{0}^{h}(\arctan x)'\,dx =$

$= \lim_{h\to+\infty}(\arctan h - \arctan 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

61. (Καταχρηστικό ολοκλήρωμα 2)

$$\int_0^3 \frac{x+5}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \lim_{h\to 3^-}\int_0^h \frac{x+5}{\sqrt{9-x^2}}\,dx \quad (1)$$

Είναι $\displaystyle\int_0^h \frac{x+5}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int_0^h\left(\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}+\frac{5}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx = \int_0^h \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx + \int_0^h \frac{5}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

- $\displaystyle -\int_0^h \frac{(9-x^2)'}{2\sqrt{9-x^2}}\,dx = -\int_0^h \left(\sqrt{9-x^2}\right)'\,dx = -\sqrt{9-h^2}+3$

- $\displaystyle\int_0^h \frac{5}{\sqrt{9-x^2}}\,dx \quad (2)$. Θέτουμε $x=3\sin\theta \Rightarrow \theta=\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)$ οπότε $d\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)'dx =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{9\sin^2\theta}{9}}}\cdot\frac{1}{3}dx = \frac{1}{3\sqrt{\cos^2 x}}\,dx = \frac{1}{3|\cos\theta|}\,dx \Rightarrow dx = 3|\cos\theta|\cdot d\theta$$

Για τα άκρα $0, h$ έχουμε:

$x=0 \Rightarrow 3\sin\theta=0 \Rightarrow \sin\theta=0 \Rightarrow \theta=0$

$x=h \Rightarrow 3\sin\theta=h \Rightarrow \theta=\arcsin\left(\frac{h}{3}\right)$

$$(2) = \int_0^{\arcsin(\frac{h}{3})} \frac{5}{\sqrt{9-9\sin^2\theta}}\cdot 3|\cos\theta|\,d\theta = \int_0^{\arcsin(\frac{h}{3})} \frac{5}{\cancel{3}\sqrt{\cos^2\theta}}\cdot\cancel{3}|\cos\theta|\,d\theta = \int_0^{\arcsin(\frac{h}{3})} \frac{5}{\cancel{|\cos\theta|}}\cdot\cancel{|\cos\theta|}\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\arcsin(\frac{h}{3})} (5\theta)'\,d\theta = 5\arcsin\left(\frac{h}{3}\right)$$

Οπότε $(1) \Rightarrow \displaystyle\lim_{h\to 3^-}\int_0^h \frac{x+5}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \lim_{h\to 3^-}\int_0^h \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx + \lim_{h\to 3^-}\int_0^h \frac{5}{\sqrt{9-x^2}} =$

$$= \lim_{h\to 3^-}\left(-\sqrt{9-h^2}+3\right) + \lim_{h\to 3^-} 5\arcsin\left(\frac{h}{3}\right) = -\cancel{3}+\cancel{3}+5\arcsin\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{5\pi}{2}$$