Ονομ./νυμο: ΑΛΒΙΟΝΑ ΜΑΝΤΣΟ
Ομ. Ασκ. : 9η
Αρ. Μητρ. : 3200098

# 9η Ομάδα Ασκήσεων

52. (Από κοινού συνεχείς Τ.Μ.)

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{5}(x+2y), & (x,y) \in [0,1]\times[0,2] \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(α') Είναι $E(X\cdot Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot y\cdot f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^2 x\cdot y\cdot \frac{1}{5}(x+2y)\,dy\right)dx =$

$$= \int_0^1\left(\int_0^2 \left(\frac{1}{5}x^2y + \frac{2}{5}x\cdot y^2\right)dy\right)dx = \int_0^1\left(\int_0^2 \left(\frac{1}{10}x^2y^2 + \frac{2}{15}x\cdot y^3\right)'dy\right)dx =$$

$$= \int_0^1\left(\frac{1}{\cancel{10}_{5}}x^2\cdot \cancel{4}^{2} + \frac{2}{15}\cdot x\cdot 8\right)dx = \int_0^1\left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{16}{15}x\right)dx = \int_0^1\left(\frac{2}{15}x^3 + \frac{16}{30}x^2\right)'dx =$$

$$= \frac{2}{15} + \frac{16}{30} = \frac{4}{30} + \frac{16}{30} = \frac{2\cancel{0}}{3\cancel{0}} = \frac{2}{3}$$

(β') Για την $f_X(x)$ έχουμε:

- Αν $x \notin [0,1]$ τότε $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\,dy = 0$
- Αν $x \in [0,1]$ τότε $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_0^2 \frac{1}{5}(x+2y)\,dy = \int_0^2\left(\frac{1}{5}xy + \frac{\cancel{2}}{\cancel{10}_{5}}y^2\right)'dy$

$$= \frac{1}{5}x\cdot 2 + \frac{1}{5}\cdot 4 = \frac{2}{5}(x+2)$$

Για την $f_Y(y)$ έχουμε:

- Αν $y \notin [0,2]$ τότε $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\,dx = 0$
- Αν $y \in [0,2]$ τότε $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{5}(x+2y)\,dx = \int_0^1\left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y\right)dx$

$$= \int_0^1\left(\frac{1}{10}x^2 + \frac{2}{5}yx\right)'dx = \frac{1}{10} + \frac{2}{5}y = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2} + 2y\right)$$

Συνεπώς $f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}(x+2), & x\in[0,1] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ $\quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}+2y\right), & y\in[0,2] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

53. (Από κοινού πυκνότητα)

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}6x^c y, & (x,y)\in[0,1]\times[0,1]\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

(α') Πρέπει $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy\right)dx = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^1\left(\int_0^1 6x^c y\,dy\right)dx=1 \Rightarrow \int_0^1\left(\int_0^1 (3x^c y^2)'\,dy\right)dx = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^1 3x^c\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1\left(\frac{3x^{c+1}}{c+1}\right)'dx = 1 \Rightarrow \frac{3\cdot 1}{c+1} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 = c+1 \Rightarrow c=2$

(β') Για την $f_X(x)$ έχουμε:

- Αν $x\notin[0,1]$ τότε $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0\,dy=0$

- Αν $x\in[0,1]$ τότε $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_0^1 6x^2y\,dy =$

$= \int_0^1 (3x^2y^2)'\,dy = 3x^2$

Για την $f_Y(y)$ έχουμε:

- Αν $y\notin[0,1]$ τότε $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0\,dx=0$

- Αν $y\in[0,1]$ τότε $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_0^1 6x^2y\,dx =$

$= \int_0^1 (2yx^3)'\,dx = 2y$

Συνεπώς $f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & x\in[0,1]\\ 0, & x\notin[0,1]\end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases}2y, & y\in[0,1]\\ 0, & y\notin[0,1]\end{cases}$

(γ') • $P(X<1/3)=\int_{-\infty}^{1/3} f_X(x)\,dx=\int_0^{1/3} 3x^2\,dx=\int_0^{1/3}(x^3)'\,dx=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

• $P(Y>2X)$ : Σε αυτήν την περίπτωση, αν $x\notin[0,1]$ τότε $f_{XY}(x,y)=0$

$=1-P(Y\leq 2X)$ Επιπλέον, αν $y\notin[0,1]$ τότε $f_{XY}(x,y)=0$ και πρέπει ταυτόχρονα $y\leq 2x$. Έτσι έχουμε τις εξής συνθήκες για τα όρια ολοκλήρωσης:

- $0\leq x\leq 1$
- Αν $0\leq x\leq 0.5$ τότε $0\leq y\leq 2x$ ενώ αν $0.5\leq x\leq 1$ τότε $0\leq y\leq 1$

Είναι λοιπόν $P(Y\leq 2X)=\int_0^{0.5}\left(\int_0^{2x} 6x^2y\,dy\right)dx+\int_{0.5}^{1}\left(\int_0^{1} 6x^2y\,dy\right)dx=$

$=\int_0^{0.5}\left(\int_0^{2x}(3x^2y^2)'\,dy\right)dx+\int_{0.5}^{1}\left(\int_0^{1}(3x^2y^2)'\,dy\right)dx=$

$=\int_0^{0.5}3x^2\cdot 4x^2\,dx+\int_{0.5}^{1}3x^2\,dx=\int_0^{0.5}\left(\frac{12}{5}x^5\right)'dx+\int_{0.5}^{1}(x^3)'\,dx=$

$=\frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{5}\cdot\frac{1}{\underset{8}{\cancel{32}}}+1-\frac{1}{8}=\frac{3}{40}+\frac{7}{8}=\frac{3+35}{40}=\frac{38}{40}$

Τελικά $P(Y>2X)=1-\frac{38}{40}=\frac{2}{40}=\frac{1}{20}$

54. (Μη αρνητικές συνεχείς Τ.Μ.)

Είναι $E(X)=\int_0^{+\infty} y f_X(y)\,dy=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{y}dx\right)f_X(y)\,dy=$

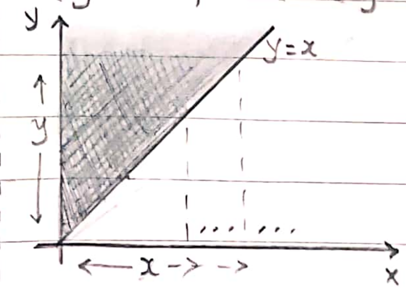
$=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{y} f_X(y)\,dx\right)dy \overset{(*)}{=}$

$=\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} f_X(y)\,dy\right)dx=\int_0^{+\infty}P(X>x)\,dx=$

$=\int_0^{+\infty}\left(1-P(X\leq x)\right)dx=\int_0^{+\infty}\left(1-F_X(x)\right)dx$

(*) Για τα αρχικά όρια ολοκλήρωσης είχαμε:

$0\leq y<\infty$ , $0\leq x\leq y$




Άρα αν $0\leq x<\infty$ θα πρέπει $x\leq y<\infty$ για να μένουμε στο σκιασμένο χωρίο

55. (Δείγματα ρύπων)

Έστω η τυχαία μεταβλητή $X_i$ για την περιεκτικότητα σε ρύπους του δείγματος $i$ για $i = 1,2,\dots,5$

Είναι λοιπόν $P(A') = P((X_1 < 3.5) \cap (X_2 < 3.5) \cap \dots \cap (X_5 < 3.5)) \underset{\text{Ανεξαρτησία}}{=}$

$= P(X_1 < 3.5) \cdot P(X_2 < 3.5) \cdot \dots \cdot P(X_5 < 3.5) =$

$= F_{X_1}(3.5) \cdot F_{X_2}(3.5) \cdot \dots \cdot F_{X_5}(3.5)$ ①

Οι $X_i$ ακολουθούν όλες την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,12]$

και συνεπώς $F_{X_i}(3.5) = \frac{3.5 - 0}{12 - 0} = \frac{3.5}{12}$

οπότε ① $\Rightarrow P(A') = (F_{X_i}(3.5))^5 = \left(\frac{3.5}{12}\right)^5 \simeq 0.00211$

Άρα τελικά για το ζητούμενο έχουμε $P(A) = 1 - P(A') = 1 - 0.00211 = 0.99789$

56. (Ομοιόμορφη Τ.Μ. με παράμετρο γεωμετρική Τ.Μ.)

(α') Με χρήση του κανόνα της ολικής πιθανότητας έχουμε

$$P(Y > \tfrac{3}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[P(Y > \tfrac{3}{2} \mid X = k)\,P(X = k)\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(1 - P(Y \leq \tfrac{3}{2} \mid X = k)\right) \cdot P(X = k)\right]$$

$$= (1 - 1) \cdot P(X = k) \overset{(*)}{+} \sum_{k=2}^{\infty}\left[\left(1 - P(Y \leq \tfrac{3}{2} \mid X = k)\right) \cdot P(X = k)\right] =$$

$$= 0 + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\left(1 - \frac{\frac{3}{2} + k}{k + k}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{4}\right] = \sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{2k - 3/2 - k}{2k} \cdot \frac{3^{k-1}}{4^k}\right] =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{k - 3/2}{2k} \cdot \frac{3^{k-1}}{4^k}\right] = \sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3^k}{4^k} - \frac{3}{4k} \cdot \frac{3^{k-1}}{4^k}\right] =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k\right] - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{4}\left[\frac{1}{k} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k\right] = \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k - \frac{1}{4}\left(-\log\left(1 - \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4}\right)$$

γιατί ξεκινούσε από $k=2$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{(3/4)^2}{1 - \frac{3}{4}} - \frac{1}{4}\left(\log 4 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{4}{1} + \frac{3}{16} - \frac{\log 4}{4} = \frac{9}{16} - \frac{\log 4}{4} \simeq 0.412$$

(*) Γιατί για $X=1$ είναι $Y \sim U[-1,1]$ και συνεπώς $P(Y \leq \frac{3}{2}) = F(\frac{3}{2}) = 1$

(β΄) Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε

$$P(X=2 \mid Y>\frac{3}{2}) = \frac{P(Y>\frac{3}{2} \mid X=2) \cdot P(X=2)}{P(Y>\frac{3}{2})} = \frac{\left(1-P(Y\leq\frac{3}{2} \mid X=2)\right)}{0.412} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{\frac{3}{2}+2}{4}\right)}{0.412} \cdot \frac{3}{16} = \frac{4-\frac{7}{2}}{4 \cdot 0.412} \cdot \frac{3}{16} \simeq 0.056$$