Анализ и прогнозирование временных рядов

Лекция 1. 06.09.2018

40% экзамен (устный) + 25% лаб. 1 + 25% лаб.2 + 10% (?)

stroller@rambler.ru

skype: vasilii.gromov

- Развитие классичиеской науки предполагает построение мат. моделей реальных процессов и анализ этих моделей с помощью логики.
- В 20 веке выяснилось, что многообразие явлений в большинстве случаев не сводится к моделям, которые мы можем вывести из фундаментальных законов. Однако надо ясно понимать, что мы не должны сбрасывать со счетов фундаментальные модели.

Когда речь идет о ВР, мы предполагаем, что кроме базового объекта с которым мы работаем

$$y_0, y_1, \dots, y_n, \dots, \quad y_i \in R^n, i = 0, .., n$$

есть некоторая динамическая система, которая этот ряд породила.

Т.е. в дискретном случае есть отображение $y_{i+1} = \Phi(y_1, \dots, y_{i-p})$, которое предыдущим p наблюдениям ставит в соответствие следующее.

В непрерывном случае $\dot{y} = \Phi(y)$ - система ОДУ.

Проблема: в значительных случаях мы ничего не знаем о систему (и не хотим знать).

Существуют:

- регулярные ряды (можно восстановить систему)
- хаотические (очень сложно восстановить систему)

Два пути:

1. Пытаться прогнозировать, не думая о системе.
2. Восстановить систему - получить прогноз.

Способ 2 не так хорош. Если можем решить задачу напрямую, то лучше ее и решать.

Классификация ВР

1. Детерминированные и стохастические (случайные процессы).
2. Стационарные и нестационарные.

   Если предполагается, что наблюдамый ряд является результатом движения некоторой системы в окрестности некоторого простого геометрического объекта: точки, линии, поверхности, фрактальной структуры, и что переходные процессы в этой системе завершены, то речь идет о стационарном ряде. В противном случае ряд является нестационарным. Обычно их пытаются привести к стационарным и работать уже со стационарными рядами.

Например, если в ряде есть линейный тренд, то в таком случае ряд раскладывается на две компоненты: тренд и стационарный ряд.

3. Регулярные и хаотические.

   Единого определения хаоса не существует. Смотрим на некоторые характеристики и типичные свойства, которые обычно присущи хаотическим и не присущи регулярным рядам.

   а) Наличие горизонта прогнозирования.

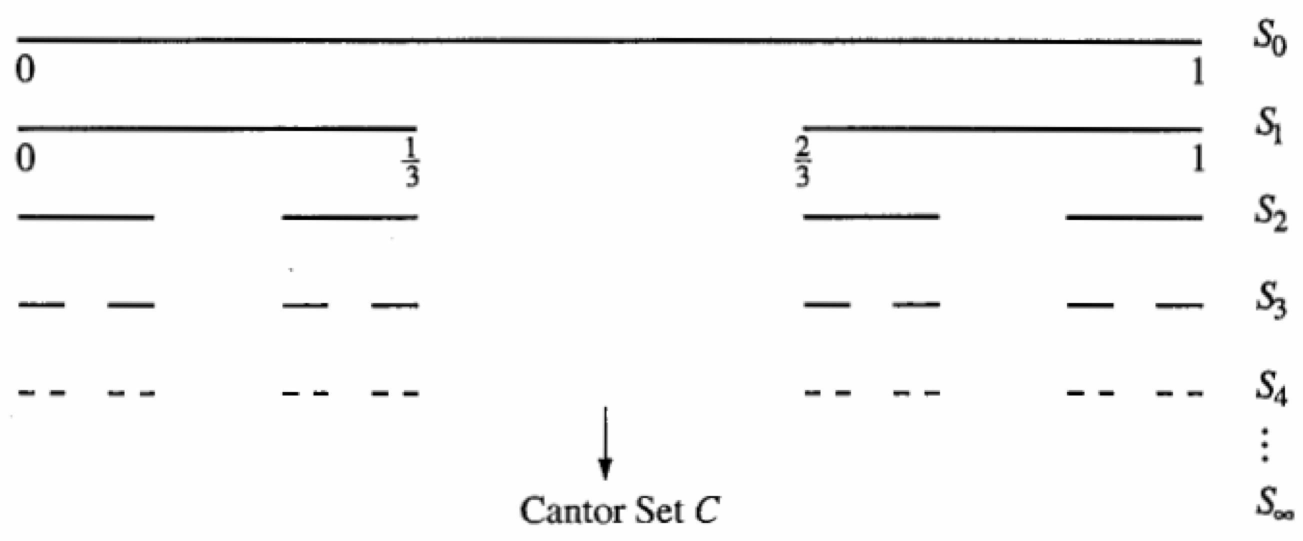
   В регулярных рядах: если система, порождающая ряд, остается неизменной и если в распоряжении есть эффективный метод прогнозирования, то мы можем прогнозировать этот ряд до бесконечности.

   В хаотических рядах: горизонт прогнозирования конечен и это конкретное число, которое можно вычислить по ВР.

   б) Регулярный ряд: движение системы, порождающей ряд, происходит в окрестности некоторого достаточно простого с геометрической точки зрения объекта: точки, замкнутой кривой или поверхности.

   Хаотический ряд: движение вокрестности некоторого объекта, геометрически очень непростого. Это так называемое фрактальное множество, которое не является поверхностью даже локально. В частности, отсюда следует весьма контринтуитивный вывод, что размерность фрактального множества является иррациональным числом.

Канторово совершенное множество



То, что остается в результате носит название канторова совершенного множества или канторовой пыли. Если посчитать сумму выкидываемых отрезком, то она равна 1.

Факт: Общее число чисел, которое содержится в КСМ такое же, как и в R (это равномощные множества).

Считаем размерность. На шаге k:

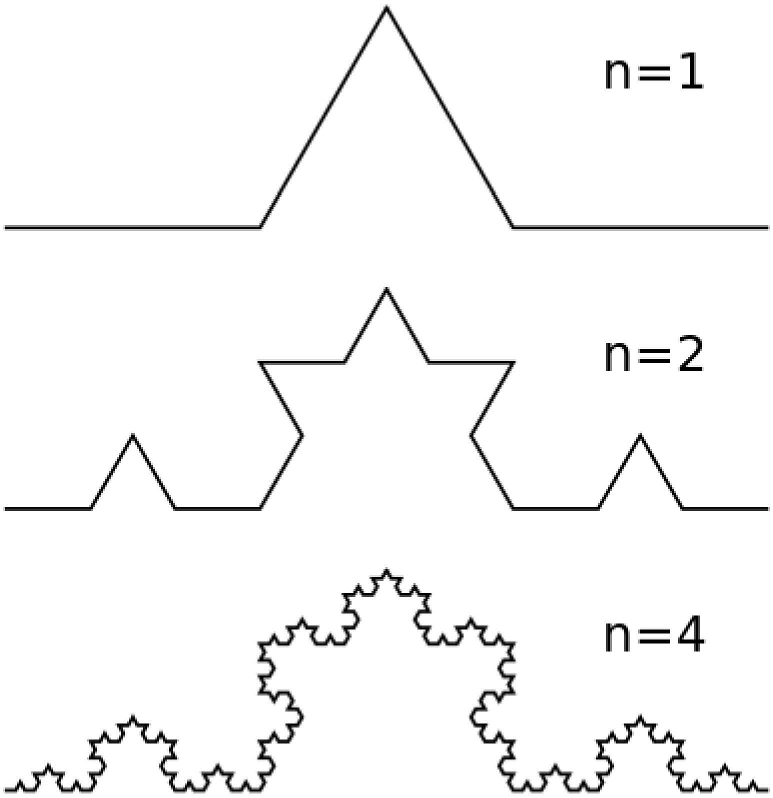
$2^k \cdot \left[(\frac{1}{3})^k\right]^p$, где p - размерность.

$k \to \infty$, при каком p число конечно и $\neq 0$?

$\lim_{k\to\infty} 2^k \cdot 3^{-kp}$, отсюда $p = \log_3 2$

Снежинка Коха

Всюду непрерывна и нигде не дифференцируема. Размерность от 1 до 2.



Старший показатель Ляпунова или “как отличить регулярный ряд от хаотического”

ДЗ: Вспомнить устойчивость по Ляпунову (1 и 2 теоремы)

Прежде чем рассматривать способ различения регулярных и хаотических рядов, постараемся понять, как отличить их, если задача задана аналитически.

Рассмотрим систему ОДУ $\dot{x} = F(x),\ x = (x_1, \ldots, x_n), F = (f_1, \ldots, f_n)$.

Рассмотрим некоторое ее решение $x(t)$ при начальном условии $x(0)$. Эта траектория будет устойчива по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 :\ ||\tilde{x}(0) - x(0)|| < \delta \implies ||\tilde{x}(t) - x(t)|| < \varepsilon\ \ \forall t > 0$

Траектория неустойчива по Ляпунову, если:

$\forall \delta > 0\ \exists E(\delta) > 0\ \exists T > 0 :\ ||\tilde{x}(t) - x(t)|| > E,\ ||\tilde{x}(0) - x(0)|| < \delta$

Решение хаотической системы неустойчиво по Ляпунову. Его расходимость экспоненциальна и равна $\varepsilon(t) = \delta e^{\lambda t}$, где δ -начальная ошибка, ε - ошибка (ее нужно ограничить), λ - старший показатель Ляпунова (свойство системы).

Для хаотических рядов $\lambda > 0$, для регулярных $\lambda < 0$, квазипериодическое движение - $\lambda = 0$.

Горизонт событий: $t = \frac{\log \varepsilon/\delta}{\lambda}$. Обычно ищут λ, а не горизонт событий.

Старший показатель Ляпунова можно вычислить, если система задана аналитически.

Кроме исходной системы $\dot{x} = F(x)$ и исследуемой траектории $x(t)$ мы должны рассмотреть соответствующую линеаризованную систему в виде $\dot{u} = A(t)u$, где $A(t)$ - матрица линейных членов разложения функции $F(x)$ в ряд Тейлора, вычисленных на траектории $x = x(t)$.

$\dot{u}(t) = DF(x)|_{x=x_0} \cdot u$, где DF - матрица Якоби.

ДЗ:

- найти аттрактор и репеллер системы
- найти особые точки системы, исследовать их на устойчивость по Ляпунову

1. $\dot{x} = \sin x$
2. $\begin{cases} \dot{x} = x - x^2 + y \\ \dot{y} = x + y + y^2 \end{cases}$

Старший показатель Ляпунова равен:

$\lambda = \overline{\lim}_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log ||u(t)||$,

где $u(t)$ - некоторое решение линеаризованной системы. Поскольку могут быть различные начальные условия, то могут быть различные решения $u(t)$, то можем получить разные значения λ и на первый взгляд кажется, что показатель Ляпунова является характеристикой конкретной траектории $x(t)$, а не всей системы.

Однако, было установлено, что при некоторых весьма нестрогих ограничениях, показатель Ляпунова может принимать только n различных значений (n - размерность системы) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (мультипликативная эргодическая теорема).

Эти значения, отсортированные в порядке убывания - ляпуновский спектр.

$\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$

λ_1 - старший показатель Ляпунова (the highest Lyapunovv exponent).

- Для большинства хаотических рядов только $\lambda_1 > 0$, остальные равны 0 или отрицательны.
- Если несколько показателей > 0, то это гиперхаос.

Кроме линейных показателей Ляпунова существуют многомерные показатели Ляпунова, которые определяются следующим образом:

Пусть $u_1, \dots, u_n$ - решения линеарезированной системы. Тогда показатель Ляпунова m-го порядка равен:

$$\varkappa_m = \overline{\lim}_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \sqrt{\det \begin{pmatrix} (u_1, u_1), \dots, (u_1, u_m) \\ \dots \\ (u_m, u_1), \dots, (u_m, u_m) \end{pmatrix}}$$

$\varkappa_m = \lambda_1 + \ldots + \lambda_m$ - случай общего положения (сумма первых m элементов ляпуновского спектра).

Отдельный случай - $\varkappa_n$ ($m = n$).

Литература: Потапов “Современные проблемы нелинейной динамики”