LAPORAN TAHAP 1
PROJEK KALKULUS II

DISUSUN OLEH

KLAUDIUS ANDHIKA TJIPUTRA (M0520042)

MOHAMMAD FARRELL NAUFAL RAMADHANI (M0520048)

MUHAMMAD ALWIZA ANSYAR (M0520051)

MUHAMMAD DAFFA RAMADHAN (M0520052)

PROGRAM STUDI INFORMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

2021

Real Problem (Mohammad Farrell Naufal R. & Klaudius Andhika T.)

Masalah : Melakukan prediksi harga berdasarkan penawaran dan permintaan
Penyelesaian :

Dengan permintaan/*demand* disimbolkan dengan D, penawaran/*supply* disimbolkan dengan S, dan harga/*price* disimbolkan dengan P

Permintaan tergantung pada harga. Jadi secara umum dapat dituliskan
$D = D(P)$
tetapi model yang akan dibuat adalah linier, sehingga model yang mungkin hanyalah
$D(P) = a + bP$ .... (1)
dengan a,b konstanta dan $b < 0$, b bernilai negatif karena harga naik mengakibatkan permintaan turun

Penawaran juga tergantung pada harga, sehingga secara umum dapat ditulis
$S = S(P)$
Akan tetapi, karena modelnya linier maka model yang mungkin hanyalah

$S(P) = c + dP$ .... (2)
dengan c, d konstanta dan $d < 0$, d bernilai negatif karena harga naik mengakibatkan permintaan turun

Untuk menggambarkan situasi ini dalam model matematika dengan batasan dari model linier kita gunakan persamaan diferensial
$\frac{dP}{dt} = Y(D - S)$ .... (3)
dengan Y konstanta, $Y > O$.

Sekarang model menjadi lengkap. Dipunyai tiga persamaan yaitu persamaan (1), (2) dan (3) dengan tiga peubah D, S, dan P. Bila persamaan (1) dan (2) disubstitusikan ke persamaan (3) diperoleh bentuk PDB
$$\frac{dP}{dt} = Y(a + bP - c - dP)$$
atau
$\frac{dP}{dt} + Y(d - b)P = Y(a - c)$ .... (4).

Penyelesaian PDB (menggunakan U(t)):

Dengan membandingkan persamaan (4) dengan bentuk,

$$\frac{dy}{dt} + f(t)y = g(t)$$

Sehingga, $y = P,\ f(t) = Y(d-b),\ g(t) = Y(a-c)$

Maka, $U(t) = exp \int f(t)dt = exp \int Y(d-b)dt$

$$U(t) = \exp(Y(d-b)t) = e^{Y(d-b)t}$$

Kemudian, U(t) dikalikan ke semua bagian pada persamaan (4)

$$U(t)\frac{dP}{dt} + U(t)Y(d-b)P = U(t)Y(a-c)$$

$$e^{Y(d-b)t}\frac{dP}{dt} + e^{Y(d-b)t}Y(d-b)P = e^{Y(d-b)t}Y(a-c)$$

Dengan menggunakan sifat

$$\frac{d(UV)}{dt} = U\frac{dV}{dt} + \frac{dU}{dt}V$$

Maka, bagian kiri persamaan dapat diubah menjadi

$$\frac{d\left(Pe^{Y(d-b)t}\right)}{dt} = e^{Y(d-b)t}Y(a-c)$$

$$d\left(Pe^{Y(d-b)t}\right) = e^{Y(d-b)t}Y(a-c)dt$$

Lalu, dengan mengintegralkan bagian kiri dan kanan

$$\int d\left(Pe^{Y(d-b)t}\right) = \int e^{Y(d-b)t}Y(a-c)dt$$

$$Pe^{Y(d-b)t} = \frac{a-c}{d-b}e^{Y(d-b)t} + k,$$

$$P(t) = \frac{a-c}{d-b} + \frac{k}{e^{Y(d-b)t}}$$

Demikian didapat fungsi P(t) untuk memprediksi harga dalam kurun waktu tertentu menggunakan fungsi D(P) dan S(P)

Penyelesaian Eksak (Muhammad Alwiza Ansyar)

Jika fungsi D(P) dan S(P) adalah
$D(P) = 50 - P$
$S(P) = 30 + 3P$
Dan jika konstanta Y bernilai 2
Didapat
$a = 50, \qquad b = -1, \qquad c = 30, \qquad d = 3, \qquad Y = 2$

Bentuk PDB menjadi
$$\frac{dP}{dt} = 2(50 - P - 30 - 3P)$$
$$\frac{dP}{dt} = 40 - 8P$$

Jika harga saat $t = 0$ adalah 105, maka
$$P(0) = \frac{50 - 30}{3 + 1} + \frac{k}{e^{2(3+1)0}}$$
$$105 = \frac{20}{4} + \frac{k}{1}$$
$$k = 100$$

Sehingga, dengan menggunakan MNA yang diberikan, didapat fungsi eksak
$$P(t) = \frac{50 - 30}{3 + 1} + \frac{100}{e^{2(3+1)t}}$$

$$P(t) = 5 + \frac{100}{e^{8t}}$$

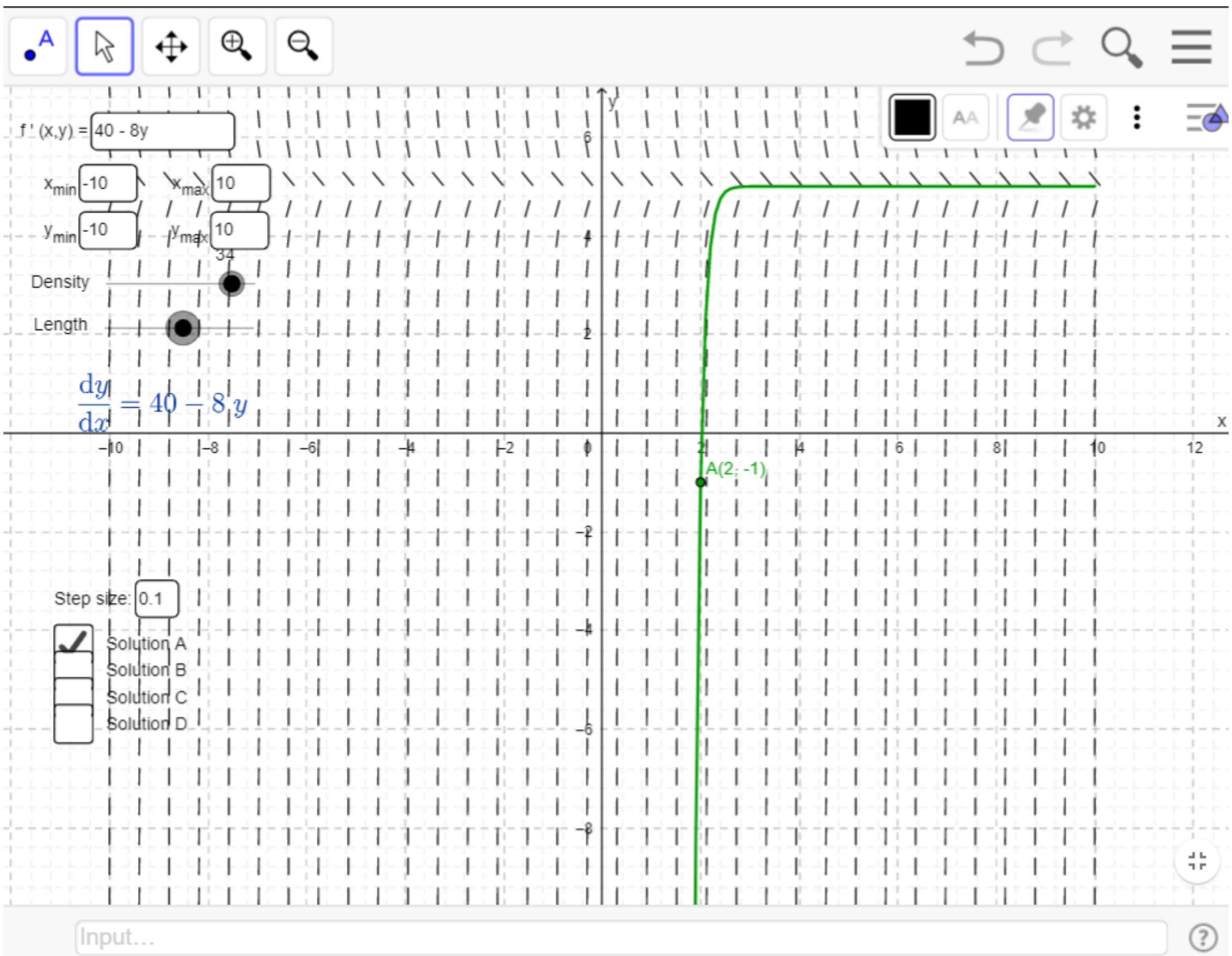
Slope Field (Muhammad Daffa Ramadhan)

Kami menggunakan bentuk dP/dt, untuk menyesuaikan dengan web yang menggunakan bentuk dy/dx, maka dikonversi dahulu menjadi seperti ini:

P = y dan t = x.

$\frac{dP}{dt} = 40 - 8p$ menjadi $\frac{dy}{dx} = 40 - 8y$

Dan hasil slope field dari penyelesaian eksak yang telah di cari bisa dilihat pada gambar dibawah ini (menggunakan website https://www.geogebra.org/m/W7dAdgqc)



Penyelesaian PDB dengan Euler Method

- PDB permasalahan:

  $$\frac{dP}{dt} = 40 - 8P, \quad P(0) = 105$$

- Untuk memudahkan, penamaan diganti menjadi:

  $$\frac{dy}{dx} = 40 - 8y$$

- Selanjutnya, diketahui :

  $F(x, y) = \frac{dy}{dx} = 40 - 8y$ dengan $y(0) = 105, x_0 = 0$ dengan $n = 10$

  $y(x_0) = 105$

- Interval yang digunakan ialah [0,1] dengan nilai $b = 0{,}5$, maka nilai h dapat diperoleh dengan rumus sebagai berikut.

  $$h = \frac{b - x_0}{n}$$

  $$= 0{,}05$$

- Dengan menggunakan rumus *euler* yaitu:

  $$x_k = x_{k-1} + h$$

  $$y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1})$$

  Akan dilakukan perbandingan dengan hasil menggunakan penyelesaian eksak yaitu

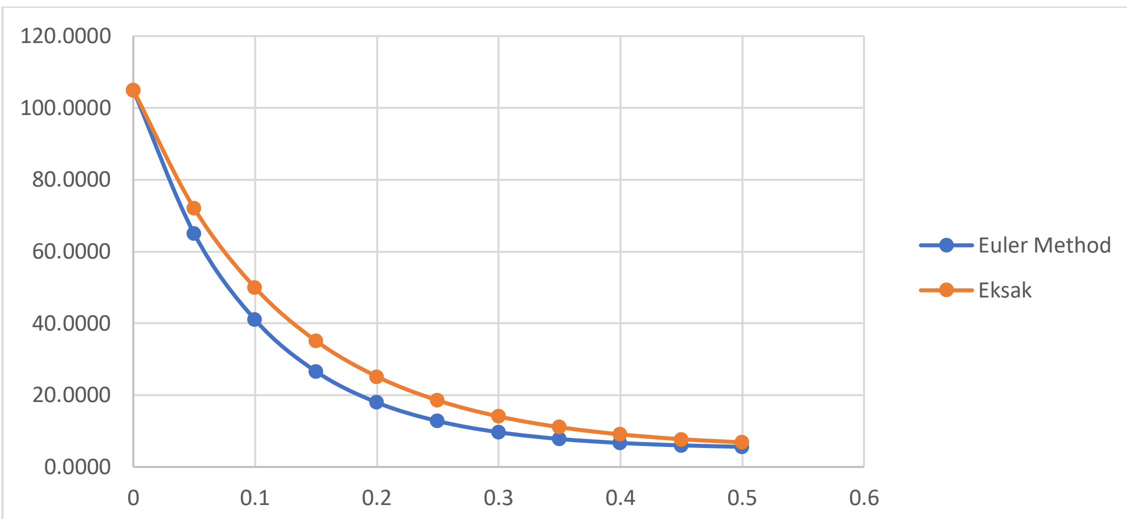
  $$y(x) = \frac{5+100}{e^{8x}}$$

- Perhitungan dari rumus di atas dengan melihat beberapa faktor yang telah diketahui maka akan menghasilkan data sebagai berikut.

n	xn	yn	$eksak$
0	0	105.0000	105.0000
1	0.05	65.0000	72.0320
2	0.1	41.0000	49.9329
3	0.15	26.6000	35.1194

4	0.2	17.9600	25.1897
5	0.25	12.7760	18.5335
6	0.3	9.6656	14.0718
7	0.35	7.7994	11.0810
8	0.4	6.6796	9.0762
9	0.45	6.0078	7.7324
10	0.5	5.6047	6.8316

- Berdasarkan data di atas, maka menghasilkan grafik sebagai berikut.



Penyelesaian PDB dengan Improved Euler Method

- PDB permasalahan:

  $\frac{dP}{dt} = 40 - 8P, \quad P(0) = 105$

- Untuk memudahkan, penamaan diganti menjadi:

  $\frac{dy}{dx} = 40 - 8y$

- Selanjutnya, diketahui :

  $F(x,y) = \frac{dy}{dx} = 40 - 8y$ dengan $y(0) = 105, x_0 = 0$ dengan $n = 10$

  $y(x_0) = 105$

- Interval yang digunakan ialah $[0,1]$ dengan nilai $b = 0{,}5$, maka nilai h dapat diperoleh dengan rumus sebagai berikut.

  h = $\frac{b - x_0}{n}$

  $= 0{,}05$

- Dengan menggunakan rumus *improved euler* yaitu:

  $x_k = x_{k-1} + h$

  $y_k + 1 = y_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k, y_k) + f\big(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k)\big)\right)$

  Akan dilakukan perbandingan dengan hasil menggunakan penyelesaian eksak yaitu

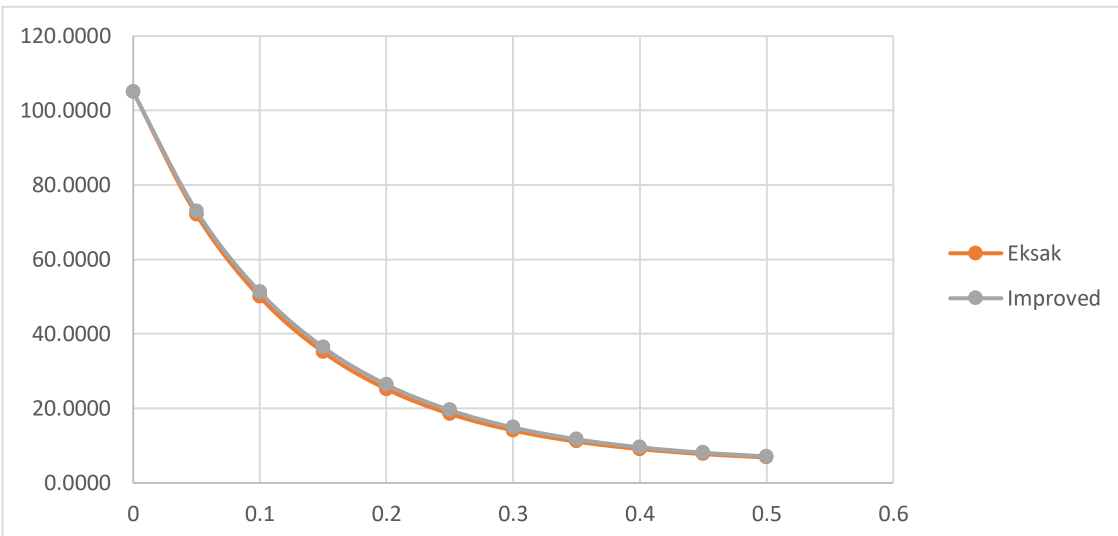
  $y(x) = \frac{5+100}{e^{8x}}$

- Perhitungan dari rumus di atas dengan melihat beberapa faktor yang telah diketahui maka akan menghasilkan data sebagai berikut:

n	x_n	y_n	$eksak$
0	0	105,0000	105,0000
1	0,05	73,0000	72,0320
2	0,1	51,2400	49,9329
3	0,15	36,4432	35,1194

4	0,2	26,3814	25,1897
5	0,25	19,5393	18,5335
6	0,3	14,8867	14,0718
7	0,35	11,7230	11,0810
8	0,4	9,5716	9,0762
9	0,45	8,1087	7,7324
10	0,5	7,1139	6,8316

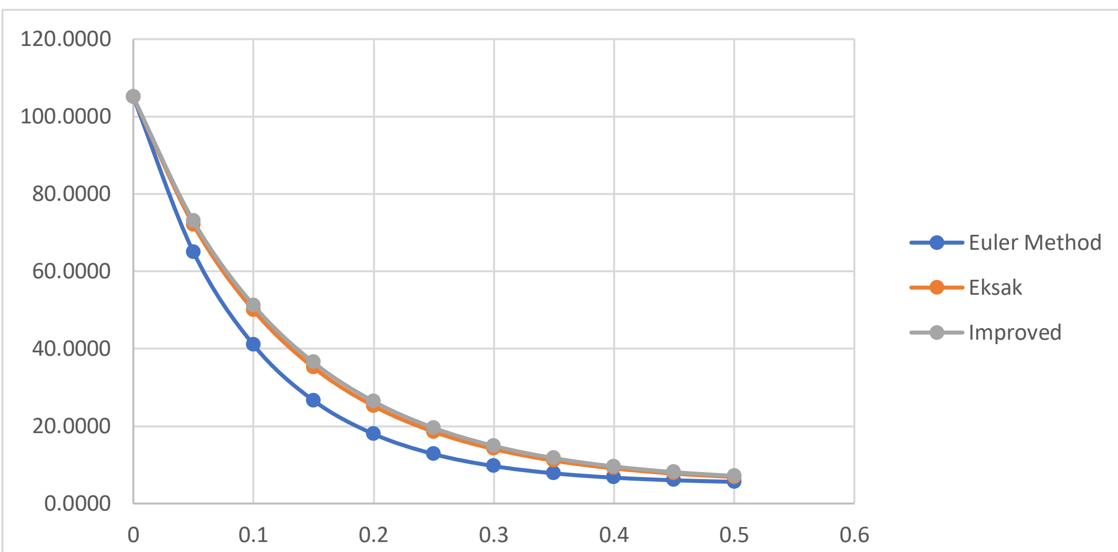
- Berdasarkan data di atas, maka menghasilkan grafik sebagai berikut.



Kesimpulan Penyelesaian PDB dengan Euler & Improved Euler Method

Penyelesaian PDB tersebut dengan menggunakan rumus *improved euler* $y_k + 1 = y_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k, y_k) + f\left(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k)\right)\right)$ lebih mendekati perhitungan eksak daripada menggunakan rumus *euler* $y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1})$. Grafik pada metode *euler* lebih landai daripada grafik perhitungan eksak dan *improved euler*. Untuk lebih detailnya, dapat dilihat pada tabel data dan grafik di bawah ini.

n	xn	yn $(euler\ method)$	yn $(improved\ euler\ method)$	$eksak$
0	0	105.0000	105.0000	105.0000
1	0.05	65.0000	73.0000	72.0320
2	0.1	41.0000	51.2400	49.9329
3	0.15	26.6000	36.4432	35.1194
4	0.2	17.9600	26.3814	25.1897
5	0.25	12.7760	19.5393	18.5335
6	0.3	9.6656	14.8867	14.0718
7	0.35	7.7994	11.7230	11.0810
8	0.4	6.6796	9.5716	9.0762
9	0.45	6.0078	8.1087	7.7324
10	0.5	5.6047	7.1139	6.8316



Penyeleseaian menggunakan Tranformasi Laplace

Persamaan Diferensial:

$$\frac{dP}{dt} = 40 - 8P, \quad P(0) = 105$$

Untuk memudahkan, penamaan variabel diubah menjadi

$$\frac{df}{dt} = 40 - 8f, \quad f(0) = 105$$

Tahap 1: Tranformasi persamaan diferensial menjadi bentuk aljabar

$$L[f'(t)] = L[40] - L[8f(t)]$$

$$8L[f(t)] + L[f'(t)] = L[40]$$

Menggunakan sifat:

$$L[1] = \tfrac{1}{s}, \qquad L[f(t)] = F(s), \qquad L[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

Didapat:

$$8\big(F(s)\big) + \big(sF(s) - f(0)\big) = \frac{40}{s}$$

$$F(s)(8 + s) - 105 = \frac{40}{s}$$

$$F(s)(8 + s) = \frac{40 + 105s}{s}$$

$$F(s) = 5\frac{(21s + 8)}{s(s + 8)}$$

Tahap 2: Penyelesaian bentuk aljabar dan pendekatan ke bentuk pada tabel

$$F(s) = 5\frac{21s + 8}{s(s + 8)}$$

Lakukan *Partial Fraction*

$$\frac{21s + 8}{s(s + 8)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 8}$$

Untuk s:

$$\frac{21s+8}{(s+8)}, s=0 \rightarrow \frac{21(0)+8}{(0)+8} = \frac{8}{8} = 1, \quad A = 1$$

Untuk $s+8$:

$$\frac{21s+8}{s}, s=-8 \rightarrow \frac{21(-8)+8}{(-8)} = \frac{20(-8)}{(-8)} = 20, \; B = 20$$

Sehingga didapatkan

$$F(s) = 5\left(\frac{1}{s} + \frac{20}{s+8}\right)$$

Tahap 3: Melakukan *Inverse Laplace Transformation*

$$F(s) = 5\left(\frac{1}{s} + \frac{20}{s+8}\right)$$

$$f(t) = 5\left(L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + L^{-1}\left[\frac{20}{s+8}\right]\right)$$

Menggunakan sifat:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1, \qquad L^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] = e^{-at}$$

Didapat:

$$f(t) = 5(1 + 20e^{-8t})$$

$$f(t) = 5 + 100e^{-8t}$$

$$f(t) = 5 + \frac{100}{e^{8t}}$$

Dengan mengembalikan nama variabel seperti semula, didapat penyelesaian eksak:

$$P(t) = 5 + \frac{100}{e^{8t}}$$

Kesimpulan

Kelompok kami menggunakan PDB linear yang diambil dari real problem bertema ekonomi. PDB tersebut telah dicari penyelesaian eksaknya menggunakan beberapa metode. Metode-metode tersebut yaitu penyelesaian secara umum, Euler Method, Improved Euler Method, dan Transformasi Laplace.

Pada metode penyelesaian secara umum, digunakan teknik U(t) untuk mendapatkan penyelesaian eksak. Pada Euler Method dan Improved Euler method, digunakan rumus yang terkait dan dilakukan 10 kali perulangan pada masing-masing metode. Dikarenakan kedua metode tersebut adalah metode numerik, maka digunakan hasil penyelesaian eksak yang telah didapat untuk dibandingkan dengan hasil dari metode numerik ini. Pada metode Transformasi Laplace, digunakan rumus dari tabel Laplace yang dibutuhkan untuk menyelesaikan PDB

Setelah dilakukan metode-metode diatas, ditemukan bahwa hasil menggunakan metode penyelesaian umum dan transformasi Laplace adalah sama. Untuk metode numerik, ditemukan bahwa Euler Method dan Improved Euler Method menghasilkan grafik yang mendekati grafik dari penyelesaian eksak, dengan grafik dari Improved Euler memiliki tingkat kemiripan yang lebih tinggi daripada grafik dari Euler Method.

Pembagian Tugas Tahap 1:

- Real Problem: Klaudius Andhika & Mohammad Farrell Naufal R.
- Penyelesaian Eksak: Muhammad Alwiza Ansyar
- Slope Field: Muhammad Daffa Ramadhan

Pembagian Tugas Tahap 2:

- Penyelesaian PDB dengan Euler Method + Kesimpulan (Euler & Imp. Euler): Klaudius Andhika
- Penyelesaian PDB dengan Improved Euler Method: Muhammad Daffa Ramadhan
- Penyelesaian dengan Transformasi Laplace + Kesimpulan: Muhammad Alwiza Ansyar
- Penyusunan Makalah: Mohammad Farrell Naufal R.