PDB/ MNA ORDER SATU

Persamaan diferensial: Persamaan yang melibatkan turunan atau derivatif fungsi-fungsi Persamaan diferensial berorde n: Persamaan diferensial yang memuat turunan fungsi tertinggi berorde n

Persamaan diferensial berorde satu (first order): Persamaan diferensial yang turunan fungsi tertingginya berorde 1

PD Biasa : hanya mengandung satu variabel bebas

PD Parsial : mengandung lebih dari satu variabel bebas

Contoh:

PD Biasa $\rightarrow \frac{dy}{dx} + 2yx = x^2 + 3$

$\rightarrow\; y" - 4y' + 3y = e^{-x}$

PD parsial $\rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2xy = 0$

$\rightarrow Zxx + Zyy = 0$

Berdasarkan persoalan syarat atau nilainya:

a. Persamaan diferensial dengan persoalan syarat/nilai awal (intial value problem, IVP). Yakni jika semua syarat diberikan pada satu nilai perubah bebas (yakni pada nol atau x0)

Misal: $\frac{d^2y}{d^2x} = -y \quad dengan\; y(0) = 2\; dan\; y'(0) = 1$

b. Persamaan diferensial dengan persoalan syarat/nilai batas (boundary value problem, BVP). Yakni jika syarat-syarat diberikan pada lebih dari satu nilai perubah bebas.

Misal: $\frac{d^2y}{d^2x} = -y \quad dengan\; y(0) = 2\; dan\; y'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$

1. Diberikan masalah nilai awal :

$$2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0 \quad ; y(1) = 1$$

Selesaikan maslah nilai awal tersebut dengan menyelesaikan persamaan diferensialnya menggunakan 2 cara.

Penyelesaian:

$2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0 \qquad ; y(1) = 1$

$2xy^3 + 3x^2y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy^3}{3x^2y^2}$

$3x^2y^2dy + 2xy^3dx = 0$

$a. Cara\ 1\ dipandang\ sebagai\ PD\ mudah\ dipisah$

$3x^2y^2dy + 2xy^3dx = 0\ \left(\times \frac{1}{x^2y^2}\right)$

$\frac{3}{y}dy + \frac{2}{x}dx = 0$

$\int \frac{3}{y}dy + \int \frac{2}{x}dx = c$

$3 \ln y + 2 \ln x = c$

$\ln y^3 + \ln x^2 = 0$

$\ln(y^3x^2) = c$

$substitusi\ y(1) = 1\ , maka \ln(1^3 1^2) = c$

$\ln(1) = c$

$c = 0 \quad \rightarrow\ \ln(y^3x^2) = 0\ \rightarrow \quad y^3x^2 = e^0 = 1$

Jadi, penyelesaian persamaan MNA persamaan differensial tersebut adalah $y^3x^2 = 1$

b. Cara 2 : Pandang sebagai Eksak

$3x^2y^2dy + 2xy^3dx = 0$

$2xy^3dx + 3x^2y^2dy = 0$

$M(x,y) = 2xy^3 \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2$

$N(x,y) = 3x^2y^2 \rightarrow \frac{\partial N}{\partial y} = 6xy^2$

$F(x,y) = \int M(x,y)dx + f(y)$

$= \int 2xy^3 + f(y)$

$= x^2y^3 + f(y)$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2y^2 + f'(y) = N(x,y)$$

Sehingga

$$f'(y) = 0 \quad \rightarrow f(y) = c$$

$F(x,y) = C_1$

$y^3x^2 + C_0 = C_1$

$x^2y^3 = C$

$y(1) = 1 \rightarrow \quad 1^2 1^3 = C \quad \rightarrow C = 1$

$x^2y^3 = 1$

Jadi, penyelesaian persamaan MNA persamaan differensial tersebut adalah $y^3x^2 = 1$

Pengantar : Banyak masalah ilmu pengetahuan dan Rekayasa yang bilamana dirumuskan secara matematis menjadi masalah nilai batas (Boundary-Value Problems) yaitu persamaan diferensial dan syarat-syarat yang berhubungan dengannya. Penyelesaian masalah ini sangat bernilai bagi seseorang yang ingin mendalami masalah fisika, mekanika biologi, kedokteran dan sebagainya. Dalam perumusan matematis suatu masalah fisis dipilih suatu model matematis dan seringkali mendekati situasi sebenarnya. Sebagai contoh dalam gerakan perputaran bumi mengelilingi matahari, kita memandang matahari dan bumi itu sebagai suatu titik. Jika suatu model matematis dan perumusan matematis yang berkaitan menjadi sangat baik dengan yang diramalkan dari pengamatan atau percobaan, maka model itu baik. Sebaliknya suatu model baru mungkin dipilih.

Hukum Aksi Massa

Suatu larutan A bereaksi dengan larutan B untuk membentuk larutan ketiga C dengan cara sedemikian rupa sehingga laju perolehan C dengan perkalian dari sisa jumlah A dan sisa jumlah B setiap waktu yang diberikan.

Andaikan bahwa pada saat awal ada $\propto gram\ zat\ A$ dan $\beta\ gram\ zat\ B$ dan bahwa r gram zat A bercampur dengan s gram zat B membentuk (r+s) gram zat C . Jika x gram c terbentuk pada t satuan waktu, maka C memuat $\frac{(rx)}{(r+s)}\ gram\ zat\ A$ dan $\frac{sx}{(r+s)}\ gram\ zat\ B$.

Sisa larutan A tinggal $\propto = -\frac{rx}{r+s}\ dan\ sisa\ larutan\ B\ tinggal\ \beta = -\frac{sx}{r+s}\ gram$

Dengan hukum aksi massa diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = K\left(\propto - \frac{rx}{r+s}\right)\left(\beta - \frac{sx}{r+s}\right)$$

Atau

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Krs}{(r+s)^2}\left(\frac{r+s}{r} \propto -x\right)\left(\frac{r+s}{r}\beta - x\right)$$

Dengan K = konstanta perbandingan

Jika K = $\frac{Krs}{(r+s)^2}$, $\alpha = \frac{(r+s)}{2}\alpha$, $\beta = \frac{(r+s)}{2}\beta$ $, maka\ PD\ menjadi$

$$\frac{dx}{dt} = k(\alpha - x)(b - x) \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

Contoh:

Suatu reaksi kimia menyebabkan suatu larutan A yang dicampur dengan larutan B membentuk larutan C. Jika dalam PD (1) $a = 8\ dan\ b = 6$ dan dalam 10 menit terbentuk 2 gram larutan C, berapa gram larutan C yang terbentuk setelah 20 menit

Penyelesaian:

$$PD: \frac{dx}{dt} = k(8-x)(6-x), untuk\ t = 0, x = 0; t = 10, x = 2\ ; t = 20, x = ?$$

PD dapat diselesaikan menjadi

$$\int \frac{dx}{(8-x)(6-x)} = k\int dt$$

$$\frac{1}{2}\ln(8-x) - \frac{1}{2}(6-x) + C_1 = kt$$

$$-\frac{1}{2}\ln(8-x) + \frac{1}{2}(6-x) - \frac{1}{2}C = -kt$$

$$\frac{6-x}{8-x} = Ce^{-2kt}$$

Jika $t = 0, x = 0, maka\ \frac{6-0}{8-0} = Ce^{-2k(0)} \leftrightarrow \quad C = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Sehingga PD menjadi

$$\frac{6-x}{8-x} = \frac{3}{4}e^{-2kt}$$

Jika $t = 10\ , x = 2\ , maka \frac{6-2}{8-2} = \frac{3}{4}e^{-2k(10)} \leftrightarrow \quad e^{-20k} = \frac{8}{9}$

Sehingga pada saat t = 20

$$\frac{6-x}{8-x}=\frac{3}{4}e^{-2k(20)}$$

$$4(6-x)=3(8-x)e^{-40}$$

$$4(6-x)=3(8-x)(e^{-20})^2$$

$$x=3.1$$

Jadi, selama 20 menit akan terbentuk 3,1 gram larutan C