

---

# Robotique: modélisation et commande

---

## GMC714 - DEVOIR DYNAMIQUE DES VÉHICULES

Préparé par  
Pr. Alexandre GIRARD



Université de  
Sherbrooke

### INSTRUCTIONS:

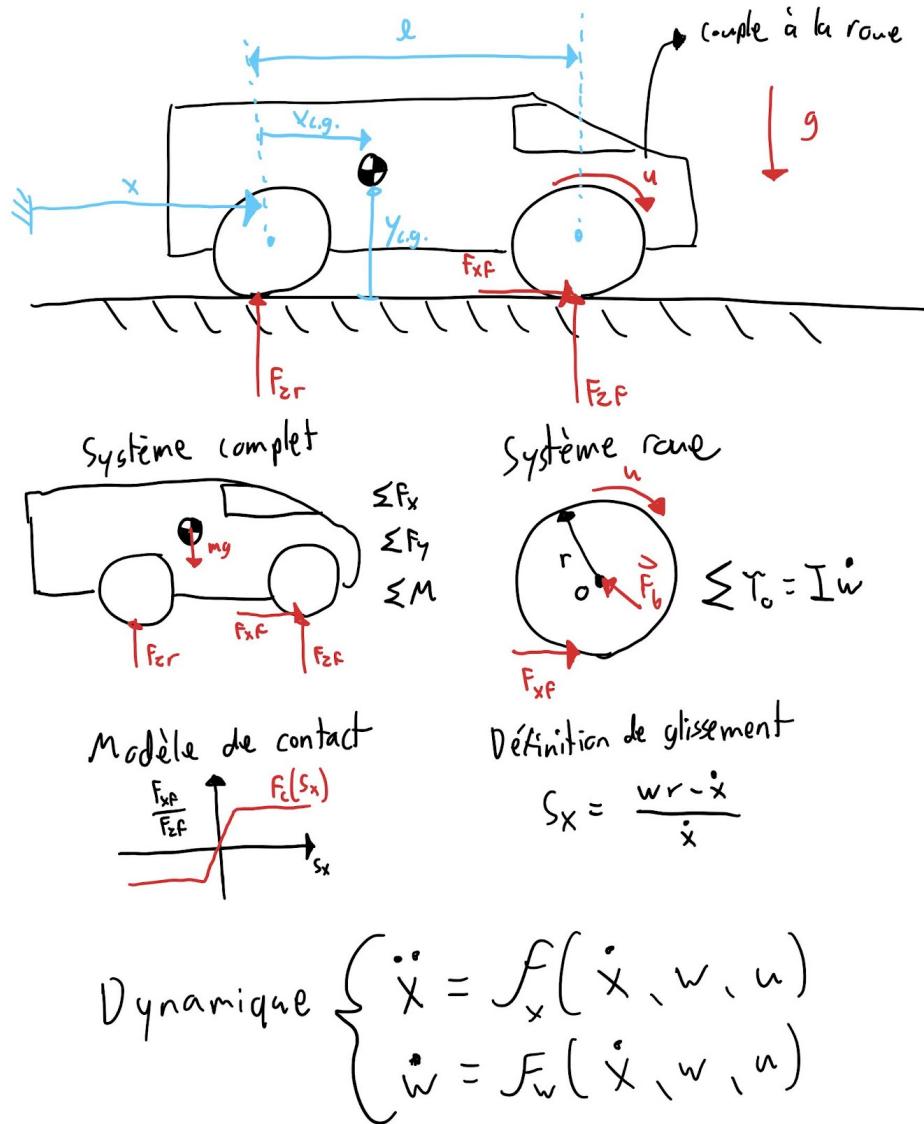
Vous pouvez faire les calculs à la main ou avec un script Matlab ou Python.  
Vous pouvez consulter vos collègues pour vous entraider, mais chacun doit individuellement effectuer une résolution et produire un devoir.  
La remise doit être un seul *pdf* qui contient tous vos résultats et calculs.

### ÉVALUATION SELON UNE ÉCHELLE DESCRIPTIVE GLOBALE:

- A :** L'étudiant arrive à toute les solutions, avec seulement des erreurs mineures, et démontre qu'il maîtrise les notions abordées dans le devoir.
- B :** L'étudiant n'arrive pas à obtenir toutes les solutions, mais démontre qu'il a en bonne partie assimilé les notions abordées dans le devoir du à un effort soutenu de résoudre chacun des numéros.
- C :** L'étudiant n'arrive pas à obtenir la majorité des solutions, ne démontre pas qu'il a assimilé les notions abordées dans le devoir et travaillé sérieusement sur chacun des numéros.
- E :** L'étudiant ne présente aucune démarche sérieuse.

# 1 Modèle de propulsion/freinage planaire

Développez les équations différentielles qui caractérisent le comportement du déplacement longitudinal d'un véhicule comme une fonction du couple  $u$  appliqué à la roue avant, avec les hypothèses de modélisation indiquées dans la Figure ci-dessous:



Déterminez les deux équations pour l'accélération du véhicule  $\ddot{x}$  et l'accélération de la roue  $\dot{w}$ , comme des fonctions de la vitesse du véhicule  $\dot{x}$ , de la roue  $w$  et le couple  $u$ . Vous pouvez laisser dans les équations une fonction  $f_c(s_x)$  qui serait un modèle d'adhérence du pneu sur la route. Assumez que les suspensions du véhicule sont infiniment rigides et que le véhicule a seulement un déplacement horizontal en  $x$ .

## 2 Sur-virage d'une voiture

À partir des équations du modèle de bicyclette dynamique et en utilisant un modèle de pneu linéaire, analysons la stabilité en virage d'une voiture. Voir section 10.5.3 dans les notes de cours pour les équations <https://www.overleaf.com/project/5c2e5ec67908a512af01c1a7>

### 2.1 Simplifications des équations

Nous allons simplifier le problème avec comme hypothèse que la vitesse longitudinale  $u$  du véhicule est constante. Une des trois équations peut donc être éliminé pour avoir seulement deux équations dynamiques dans le repère du corps du véhicule:

$$\dot{u} = 0 \quad (1)$$

$$m(\dot{v} + uw) = F_1^b + F_2^b \quad (2)$$

$$I\dot{w} = aF_1^b - bF_2^b \quad (3)$$

### 2.2 Calcul des forces

Développer l'expression des forces, exprimées dans le repère du véhicule, pour obtenir des équations qui ne dépendent que des vitesses  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , angle de la direction  $\delta$  et des coefficient des pneus  $C_\alpha$ .

### 2.3 Linéarisation

Linéarisez les équations ( $\sin \delta \approx \delta$ ,  $\cos \delta \approx 1$ ).

### 2.4 Combinaison

Combinez les deux équations d'ordre un pour obtenir une équation d'ordre deux pour la dynamique de la rotation:

$$A\ddot{w} + B\dot{w} + Cw = D\delta \quad (4)$$

### 2.5 Stabilité statique

Le terme  $C$  dans cette équation donne le lien direct entre la vitesse angulaire et l'angle du volant.

- 1) Établissez les conditions pour qu'un véhicule sous-vire, i.e. qu'un angle de volant  $\delta$  plus grand soit nécessaire à haute vitesse pour maintenir la même vitesse angulaire.
- 2) Établissez les conditions qui rendent la voiture instable, i.e. lorsque  $C$  devient négatif.
- 3) Comparer vos résultats avec des simulations numériques, voir amorce de code au lien ci-dessous. Il est toutefois à noter que les simulations numériques incluent des effets non-linéaires, contrairement à l'équation obtenue.



#### Exercice de code

#### *Simulation bicycle dynamique*

<https://colab.research.google.com/drive/1NHcn2yDk9K5yCRhXo7X1MNb1Sp-bSHZh?usp=sharing>