Diagonalización

Sesión 08

Lilia Alanís López

2023-08-27

Objetivos de la Sesión

- Matrices de cambio de base.
- Diagonalización de transformaciones lineales.

Matrices de cambio de base

> Supongamos que tenemos un espacio vectorial V y dos bases para V, digamos B_1 y B_2. La matriz de cambio de base de B_1 a B_2 es la matriz P tal que $[v]_{B_2} = P[v]_{B_1}$ para todo $v \in V$.
>
> **Ejemplo**
>
> Calcule la matriz de cambio de base de $\mathbb{R}^2$ con las bases $\{(1,0),(0,1)\}$ y $\{(-3,2),(2,3)\}$.

La matriz de cambio de base es

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo:

> Calcule la matriz de cambio de base de $\mathbb{R}^2$ con las bases $\{(1,2),(3,4)\}$ y $\{(1,1),(1,-1)\}$.
>
> Escribir la base $\{(1,2),(3,4)\}$ en combinaciones lineales de $\{(1,1),(1,-1)\}$:
>
> $$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right)$$

Diagonalización de transformaciones lineales

> **Definición:** Sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Decimos que T es diagonalizable si existe una base B de V tal que $[T]_B$ es una matriz diagonal.

En el caso de matrices, una matriz A es diagonalizable si existe una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal. Entonces, si los vectores propios de A forman una base, la matriz de cambio de base de la canónica al conjunto de vectores propios es la matriz que funciona para diagonalizar.

Ejemplo

Encuentra la diagonalización de la transformación $T(x, y) = (5x - 12y, -12x - 5y)$ y la matriz de cambio de bases para la diagonalización.

Solución:

El polinomio característico de T es $\lambda^2 - 169$ cuyas raíces son 13 y -13. Los vectores propios asociados son $(-2, 3)$ y $(3, 2)$. La matriz de cambio de base de estandar a los vectores propios es

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Así que la diagonalización es

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ejemplo

Encuentra la diagonalización de la transformación $T(x, y) = (7x - 2y, 2x + 2y)$ y la matriz de cambio de bases para la diagonalización.

Solución:

El polinomio característico de T es $\lambda^2 + 9\lambda - 18$ y sus raíces son 3 y 6. Los vectores propios esta transformación son $(1, 2)$ y $(2, 1)$. La matriz de cambio de base canónica a la de los vectores propios es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así que la diagonalización es

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$