Espacios Métricos

Sesión 02

Alejandro Ucan

2025-02-10

Objetivos de la Sesión

- Introducir el concepto de Métrica.
- Definir el concepto de Espacio Métrico.
- Establecer ejemplos de Espacios Métricos.
- Definir la equivalencia entre métricas.

Motivación:

> Consideremos el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, dados dos números reales x y y, la distancia entre ellos se puede medir por la diferencia $|x-y|$.

> Consideremos el conjunto de los pares de números reales $\mathbb{R}^2$, dados dos pares de números reales (x_1, x_2) y (y_1, y_2), la distancia entre ellos se puede medir por la fórmula $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$.

Métrica

> **Definición:** Una **métrica** en un conjunto X (no vacío) es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades para cualesquiera $x, y, z \in X$:
>
> - $d(x, y) \geq 0,$
> - $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y,$
> - $d(x, y) = d(y, x),$
> - $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$
>
> **Definición:** Un conjunto X se dice que es **espacio métrico** si está equipado con una métrica.

Ejemplos y Contraejemplos

1. La función $d(x, y) = |x - y|$ es métrica.

2. La función $f(x, y) = |xy|$ no es métrica.

3. La función $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ es métrica.

4. La función $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \frac{1}{1 - \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}}$ no es métrica.

Espacio Euclidiano

> Sea $\mathbb{R}^n$ el conjunto de los n-tuplas de números reales, la función $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ es una métrica en $\mathbb{R}^n$.

Grafos Métricos

> Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido, la función $d(u, v)$ que asigna a cada par de vértices $u, v \in V$ la longitud del camino más corto entre u y v es una métrica en V.

Un Espacio Múltiples Métricas:

Consideremos el conjunto de pares de números reales $\mathbb{R}^2$.

> La métrica euclidiana $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ es una métrica en $\mathbb{R}^2$.
>
> Pero si consideramos la función $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$, esta también es una métrica en $\mathbb{R}^2$.
>
> De igual manera sucede con la función $d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$.

¿Qué tan similares serán estas métricas?

Veamos un ejemplo con los puntos $\mathbf{x} = (3, 6, 9)$ y $\mathbf{y} = (1, 0, 1)$.

```python
from scipy.spatial import distance
x = [3,6,9]
y = [1,0,1]
print("Manhattan distance: ", distance.cityblock(x,y))
print("Euclidean distance: ", distance.euclidean(x,y))
print("Minkoswki distance: ",distance.minkowski(x,y,p=3))
print("Chebyshev distance: ", distance.chebyshev(x,y))
```

[3] ✓ 0.0s Python

```
Manhattan distance:  16
Euclidean distance:  10.198039027185569
Minkoswki distance:  9.028714870948003
Chebyshev distance:  8
```

Comparación de algunas métricas.

Equivalencia de Métricas

> **Definición:** Dos métricas d_1 y d_2 en un conjunto X se dicen **equivalentes** si existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene que $c_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq c_2 d_1(x,y)$.

> *Afirmación:* En \mathbb{R}}^n todas las métricas son equivalentes.

Métricas en $\mathbb{R}^n$

- Métrica Euclidiana: $d_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$.

- Métrica Manhattan: $d_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |x_1-y_1|+\cdots+|x_n-y_n|$.

- Métrica del Chebysev: $d_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max\{|x_1-y_1|,\cdots,|x_n-y_n|\}$.
- Métrica de Minkowski: $d_p(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i-y_i|^p\right)^{1/p}$.
- Métrica Discreta: $d_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$.

¿Qué métricas son usadas en la Ciencia de Datos?