$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Ahora que tengo su atención...

Esta guía es simplemente una guía. **<u>NO</u> reemplaza ni incluye todo el material que se da en clase.**

Guía de Números Complejos

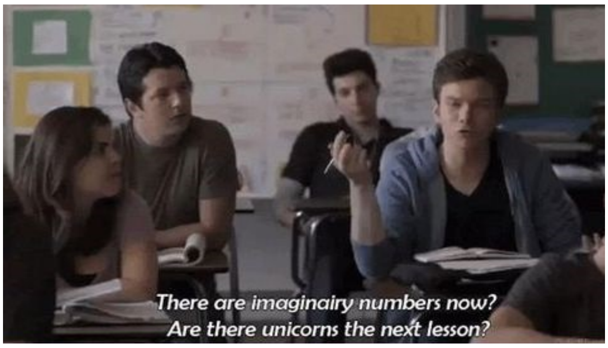
Numero Imaginario:

Se define al numero Imaginario como un numero "i"que cumple que

$$i^2 = -1$$

O también:

$$i = \sqrt{-1}$$



Números Complejos:

$$z = a + ib = Re(z) + i.Im(z) \qquad \begin{cases} \text{a}\equiv\text{Re(z)} & \text{'Parte Real de z'} \\ \text{b}\equiv\text{Im(z)} & \text{'Parte imaginaria de z'} \end{cases}$$

ejemplo: $z = 2 + 3i$

Representación Gráfica:

Cada numero complejo se puede representar como un punto en el plano. Donde el eje x denota el conjunto de los números Reales , y el eje y el conjunto de los números Imaginarios.

$Re(z) \to x \qquad Im(z) \to y$

1. Operaciones:

Propiedades: Al igual que con los Reales, los Complejos cumplen la mayoría de las propiedades que solemos usar con los números reales respecto de la suma y el producto:

Suma y producto: Neutro, Inverso, conmutatividad, asociatividad.

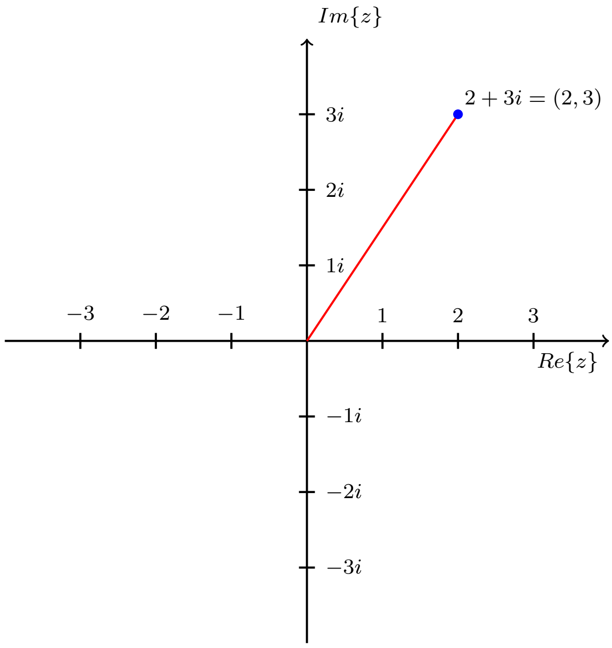


Figura 1: Represantacion grafica del numero ***2+3i*** en el Plano Complejo (diagrama de Argand).

- Suma:

$$z_1 = a + ib \qquad z_2 = c + id \qquad \Rightarrow z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$$

ejemplo: $\begin{cases} z_1 = 1 + 2i \\ z_2 = 2 + 3i \end{cases} \qquad \Rightarrow z_1 + z_2 = 3 + 5i$

- Multiplicacion:

$$z_1 = a + ib \qquad z_2 = c + id \qquad \Rightarrow z_1.z_2 = (a + ib).(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

ejemplo: $\begin{cases} z_1 = 1 + 2i \\ z_2 = 2 + 3i \end{cases} \qquad \Rightarrow z_1.z_2 = 2 - 6 + i(3 + 4) = -4 + 7i$

- División:

$$z_1 = a + ib \qquad z_2 = c + id \qquad \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{a + ib}{c + id} \cdot \frac{c - id}{c - id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2}$$

- Conjugación:

  Sea $z = a + ib$.

  Se le llama z^* al conjugado de z:

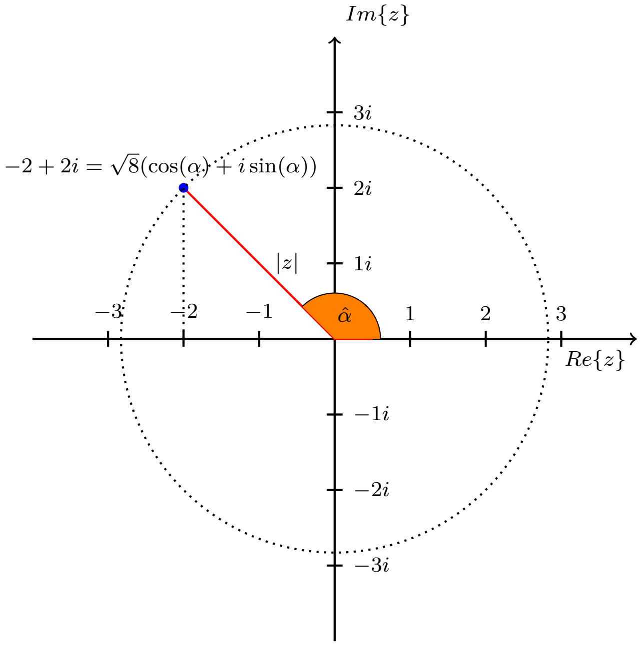
$$z^* = a - ib$$

  Ejemplo: $z_1 = 1 + 2i$: $\qquad \Rightarrow z_1^* = 1 - 2i$

Modulo y fase de un numero complejo:

Se le llama 'Modulo', 'Norma ' o distancia de un numero complejo, a la distancia al origen de coordenadas del numero z, y se escribe como:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z.z^*}$$



Se le llama 'fase' o 'argumento' de un numero complejo, al angulo que forma el vector del numero complejo con el eje de los números Reales.

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Representaciones:

- Binomica o Cartesiana: $z = (a, b)$
- Algebraica: $z = a + ib$
- Polar: $z = \sqrt{a^2+b^2}.(\cos(\alpha) + i.\sin(\alpha)) = |z|.(\cos(\alpha) + i.\sin(\alpha))$

  Donde α es el angulo de hace el numero complejo con el eje de los números Reales ($\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$).

Ejemplo: $1 + i = (1, 1) = \sqrt{2}(\cos(45) + i.\sin(45))$

Ejercicios

TP: Los que necesiten nota, pueden entregar esta guía de ejercicios resuelta como trabajo practico. Para aprobar el trabajo practico hace falta resolver (justificados) almenos el 70 porciento de cada sección.

Los ejercicios con ★ son obligatorios, menos el que tiene ★★.

Si se traban con algún ejercicio, pasen al siguiente, y vuelvan al ejercicio difícil mas tarde.

2. Completar:

i^2	i^3	i^4	i^5	i^{16}	i^{10}	i^{-1}	$i^{4.n} \quad n \in \mathbb{N}$	$i^{4.n+1} \quad n \in \mathbb{N}$

3. Graficos:

Representar los siguientes números en su forma cartesiana y polar. Graficarlos en el plano complejo.

1. $z = 2 - i$
2. $z = 1 + i$
3. $z = -2 + 3i$
4. $z = -1 - i$
5. $z = 2(\cos(0) + i.\sin(0))$
6. $z = 2(\cos(\pi/3) + i.\sin(\pi/3))$
7. $z = 2(\cos(7\pi/4) + i.\sin(7\pi/4))$
8. $z = \frac{1}{2}(\cos(\pi/2) + i.\sin(\pi/2))$

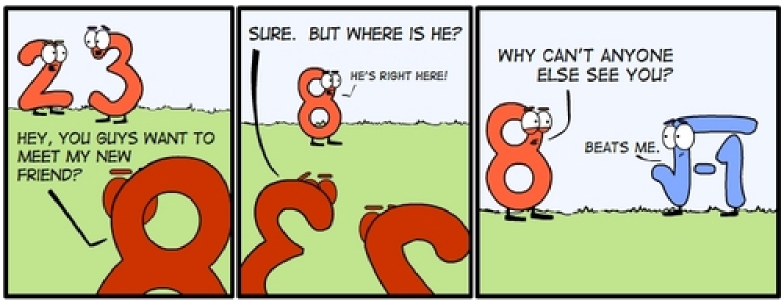
4. Calcular:

1. $(2 + 5i) + (-3 + 4i) + (2 - 8i)$
2. $(1/2 + i1/3) + (-1/3 + i1/2)$
3. $(2/3 - i1/2) - (-3/2 + i1/3)$
4. $(5 + 5i).(-3 + 5i)$
5. $(5 - 3i).(-3 + 5i)$
6. $\dfrac{3 - 2i}{2 + i}$
7. $\dfrac{1 + i}{3 - i}$
8. $\dfrac{(-1 + i) + (2 - 4i)}{-2 + 3i}$
9. $\dfrac{(5 - 2i).(1 - i)}{-1 - i}$

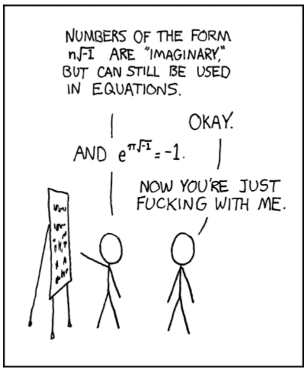
5. Graficar y escribir las cuadraticas en todas sus formas:

(Les sirve de repaso para la integradora)

1. $x^2 + 1$
2. $x^2 + 4x + 5$
3. $(x - 1)^2 + 1$
4. $-2x^2 + 8x - 11$



6. Resolver



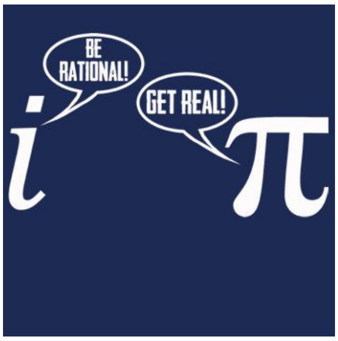
1. $(2+3i)^2$
2. $(2-i)^2$
3. $(-3+2i)^2$
4. $(-2-3i)^3$
5. $(-3-2i)^3$
6. $\dfrac{(1+i)^2}{1-i}$
7. $\dfrac{(2-3i)^2}{2+i}$
8. $\dfrac{3-i}{(1+i)^2}$
9. $\dfrac{(5+i)i^2}{(-1-i)^2}$
10. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{10}i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}i}$

★ Dados $z_1 = 2-1$; $z_2 = -2+3i$; $z_3 = 1-i$.

11. $(z_1+z_2)^2$
12. $\dfrac{z_1}{z_2.z_3}$
13. $|z_1|^2 + \left(\dfrac{z_2}{z_3}\right)^{-1}$
14. $z_1 + z_1^*$
15. $\dfrac{z_2^2 + |z_3|^2}{z_1^*}$
16. $i^{43}.z_1 + \dfrac{i^{37}}{z_2} - i^{122}.z_3^*$

7. Ecuaciones:

★ Calcular los valores de x e y para que es cumplan las siguientes igualdades



1. $(2x; y+2) = (4; -1)$
2. $3x - 1 + (1-y)i = (2; 3)$
3. $(-\frac{1}{2}x + 3; -y + \frac{1}{4}) = (0; 1)$
4. $(2x-5)i - 4y + 1 = 3 - i$

Hallar el valor de z:

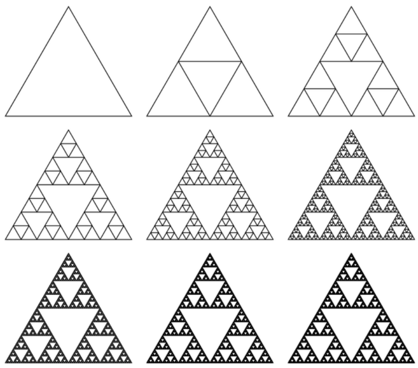
5. $i^2(5-3z) = z.i^{16} + 4i$
6. $-z(4+i.z) + 1 = (4+2i)z + i^4$

Observación: Para saber si hiciste bien un ejercicio, reemplaza por tu valor de x.

Extra y curiosidades

- Una de las cosas mas llamativas y conocidas relacionadas con los numeros complejos es el conjunto o Fractal de Mandelbrot. El cual fue 'descubierto' o 'inventado' por Benoit mandelbrot en 1980 .

Un fractal es una elemento que repite alguna propiedad o forma a medida que uno hace zoom sobre el mismo. Se dice que un fractal es autosemejante, ya que cada parte de si mismo, se asemeja a si mismo.



El mismo se consigue iterando para algun valor complejo 'c' la siguiente sucesion por recursion:

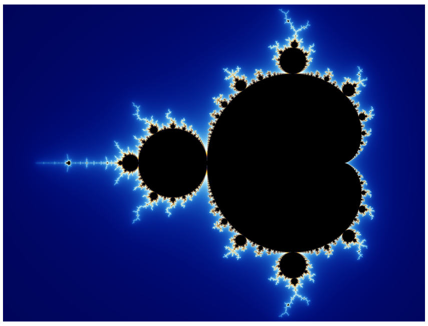
$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$$

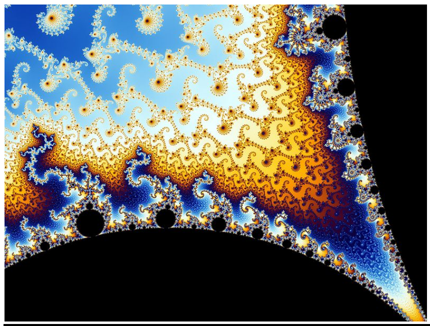
Y separando a los puntos 'c' para los cuales la sucesion tiende a un valor determinado (converge), o sigue variando indefinidamente hacia el infinito (diverge). Para los valores divergentes se le asigna un color a cada punto según que tan rápido crece su modulo .

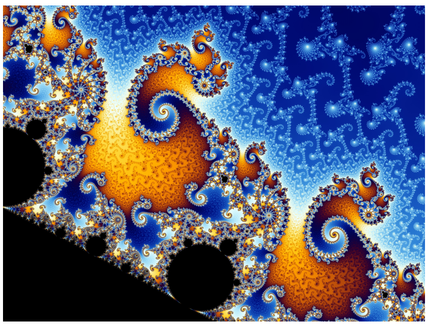
Cerca de un conjunto de valores, en el limite entre los dos casos, existe un conjunto de valores para los cuales la sucesión converge, pero cada punto o hace de manera distinta y a velocidades distintas, sin importar que tan cerca estén entre si.

Sin embargo lo hacen de tal manera que al graficarlos ciertas propiedades se repiten a medida que uno se 'acerca' (hace zoom) a un punto, asi indefinidamente.

Por ejemplo, la forma del escarabajo del mandelbrot se repite infinitas veces cerca de la frontera del escarabajo.







Romanesco Broccoli, una de las tantas cosas autosemejantes de la naturaleza.

El estudio del fractal de mandelbrot no solo nos da una idea de lo antintuitiva que puede ser la matemática aveces, sino que también tiene utilidades. Por ejemplo, los gráficos de videojuegos y muchas peliculas y muchas peliculas son generados a partir de fractales. Y muchas cosas en la naturaleza tiene propiedades parecidas a los fractales .

Axiomas de $\mathbb{R}$

Suma:

- S1. Conmutatividad: $a + b = b + a$
- S2. Asociatividad: $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$
- S3. Existe el Neutro de Suma : $\exists\, 0/ \quad a + 0 = a$
- S4. Existe el inverso aditivo: $\forall a,\ \exists\, (-a)/ \quad a + (-a) = 0$

Producto:

- P1. Conmutatividad: $a.b = b.a$
- P2. Asociatividad: $(a.b).c = a.(b.c) = a.b.c$
- P3. Existe el Neutro del Producto: $\exists\, 1/ \quad a \cdot 1 = a$
- P4. Existe el inverso del Producto: $\forall a \neq\ 0,\ \exists\, a^{-1}/ \quad a.a^{-1} = 1$

- SP. Distributiva: $a.(b + c) = a.b + a.c$

Axiomas de Orden:

- O1. Tricotomia: Solo una de las siguientes posibilidades es verdadera: $a < b$, $a = b$, $a > b$
- O2. Transitividad: Si $a < b$; $b < c \Rightarrow a < c$ (idem para el = y el >)
- O3. Monotonía de Suma respecto del Orden: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ (idem para el = y el >)
- O4. Monotonía del Producto respecto del Orden: $a < b \Rightarrow a.c < b.c$ (idem para el = y el >)

Axioma de Completitud:

- C1. Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, acotado superiormente $\Rightarrow \exists S = sup(A)$ (S = Supremo de A).