Esta guía, es simplemente una guía. **NO reemplaza ni incluye todo el material que se da en clase.**

Guía de Funciones Racionales

Definición de una función racional:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ $(Q(x) \neq 0)$ son polinomios.

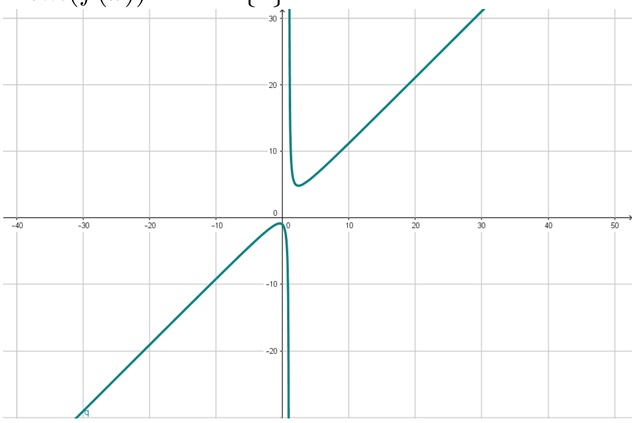
$Dom(f(x)) = \{x \in \mathbb{R} \backslash \ Q(x) \neq 0\}$ o $Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{x \backslash \ Q(x) = 0\}$.

Esto se lee: x perteneciente a los números Reales ($\mathbb{R}$) tal que $Q(x)$ es distinto de 0; o los reales menos los x tales que $Q(x)$ es igual a 0.

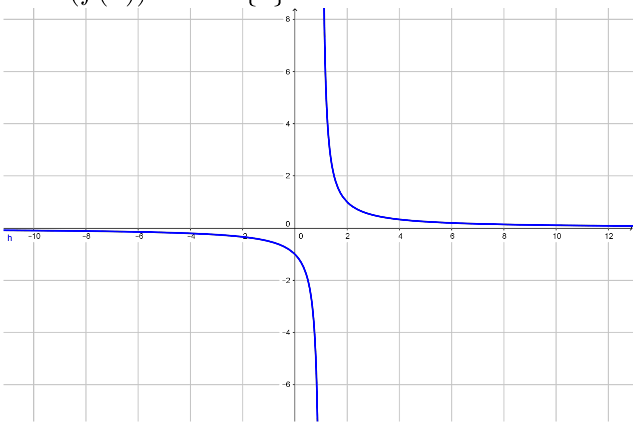
Lo cual es esperable, ya que el dominio de los polinomios son todos los reales, tanto para $P(x)$ como para $Q(x)$. Pero tengo que tener cuidado de no dividir por 0.

Ejemplos:

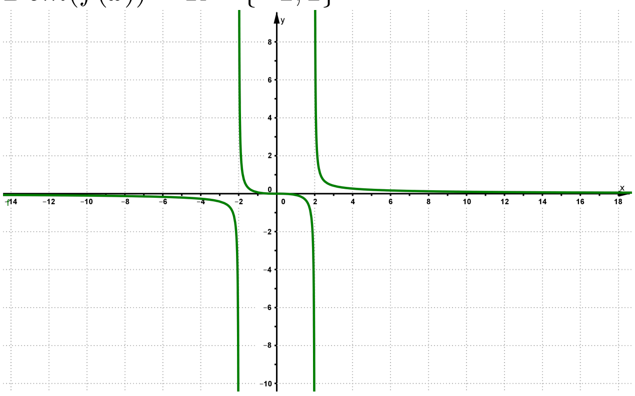
$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} \Rightarrow P(x) = x^2 + 1$; $Q(x) = x - 1$
$Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{1\}$



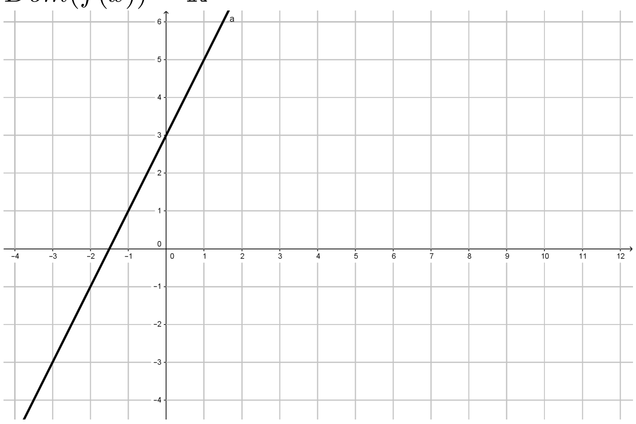
$f(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow P(x) = 1$; $Q(x) = x - 1$
$Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{1\}$



$f(x) = \frac{x^3}{x^4-16} \Rightarrow P(x) = x^3$; $Q(x) = x^4 - 16$
$Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$



$f(x) = 2x + 3 \Rightarrow P(x) = 2x + 3$; $Q(x) = 1$
$Dom(f(x)) = \mathbb{R}$



Las funciones Racionales tiene **asintota vertical (A.V.)** para cualquier valor α que anule al denominador, pero no al numerador.

Por lo tanto α es **asintota vertical** $\Leftrightarrow \quad Q(\alpha) = 0 \wedge P(x) \neq 0$

Mientras que tiene una **asintota horizontal (A.H.)** , si el grado del numerador $(P(x))$ es menor o igual al grado del denominador$(Q(x))$. La asintota horizontal es $y = 0$ cuando el grado de $P(x)$ es menor a $Q(x)$.

En el caso de que P y Q sean del mismo grado. Sean $P(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + ... + a_{n-1}.x^{n-1} + a_n.x^n$ y $Q(x) = b_0 + b_1.x + b_2.x^2 + ... + b_{n-1}.x^{n-1} + b_n.x^n$ dos polinomios de grado n, la asintota horizontal es $y = \frac{a_n}{b_n}$.

Ejemplo de la vida real: El Potencial de Lennard-Jones $V_{LJ}(r) = [\frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}]$ modela la energía (y por lo tanto la fuerza) que existe en la unión entre dos átomos o dos moléculas, donde A y B son números que se obtienen realizando experimentos.

Caso particular: **Función de proporcionalidad inversa**

$$f(x) = \frac{k}{x}$$

A esta curva se la llama **Hiperbola**.

$Dom(f(x)) = \{x \in \mathbb{R} \backslash\ x \neq 0\}$ o $Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Esto se lee: x perteneciente a los números Reales ($\mathbb{R}$), tal que x es distinto de 0. Lo cual es esperable, ya que no existe dividir por 0.

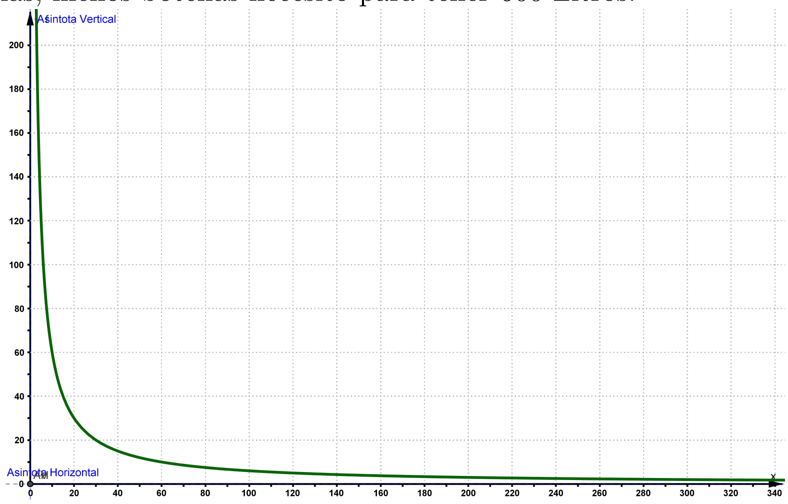
El producto de $y.x$ para cada punto de la curva es constante, ya que $y = \frac{k}{x} \Leftrightarrow y.x = k$. A k se la llama constate de proporcionalidad.

Ejemplo: Para envasar 600 litros de jugo, la cantidad de botellas que se necesitan (y) es función de la capacidad de botellas a utilizar (x). Como la cantidad de botellas que necesito es inversamente proporcional a la capacidad que tiene cada una, esta es una *función de proporcionalidad inversa*.

(cantidad de botellas)×(capacidad de las botellas)= 600 litros $\Rightarrow y.x = 600 \Leftrightarrow y = \frac{600}{x}$

Mientras mas capacidad tengan las botellas, menos botellas necesito para tener 600 Litros.

$y = \frac{600}{x}$
$Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{0\}$



Caso Particular: Si $P(x)$ y $Q(x)$ son ambas **Polinomios de grado 1** entonces se la llama **Función Homografica**.

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$

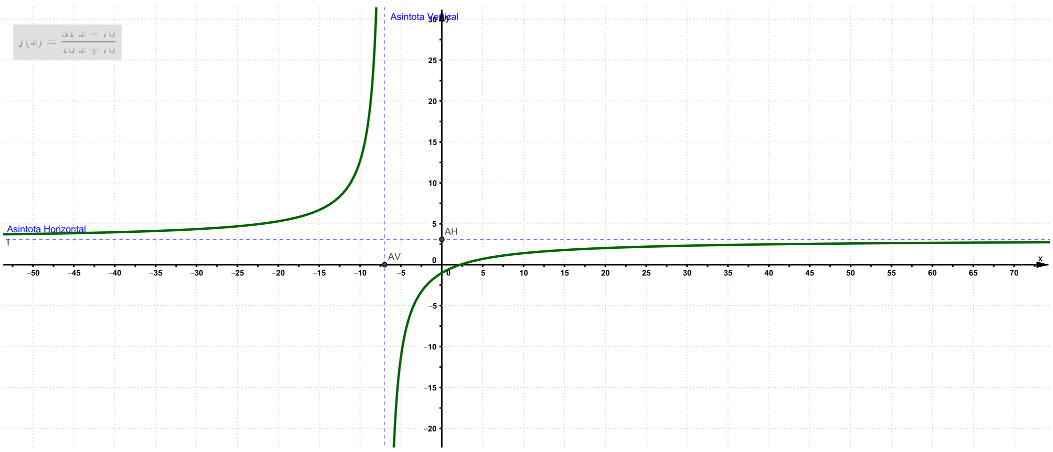


Figura 1: Ejemplo de una función homografica $f(x) = \frac{43x-70}{10x+70}$. En Geogebra pueden ver un gráfico interactivo de funciones homograficas

En este caso particular, hay una única *asintota vertical*, que se encuentra en $x = -\frac{d}{c}$.
Mientras que la *asintota horizontal* se encuentra en $y = \frac{a}{c}$.

Observar que la función de proporcionalidad inversa es un caso particular de las homograficas, ya que con $a = d = 0 \longrightarrow f(x) = \frac{b}{cx} = \frac{b/c}{x}$.

De hecho, se puede demostrar que TODAS las las funciones homograficas se pueden escribir como corrimientos en el eje x e y de una función inversa.

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Longleftrightarrow f(x) = \frac{k}{x - x_A} + y_A$$

donde x_A es la asintota vertical, e y_A es la asintota horizontal.

De la demostración, se ve que $x_A = -\frac{d}{c}$, $y_A = \frac{a}{c}$ (como ya sabiamos) y $k = b/c + (y_A.x_A)$

Ejercicios

TP: Los que necesiten nota, pueden entregar esta guía de ejercicios resuelta como trabajo practico. Para aprobar el trabajo practico hace falta resolver(justificados) almenos el 70 por ciento de cada sección.

Los ejercicios con ★ son obligatorios, menos el que tiene ★★.

Si se traban con algún ejercicio, pasen al siguiente, y vuelvan al ejercicio difícil mas tarde.

1. Encontrar la función:

1. Sea un rectángulo de área $10m^2$ y lados a y b. Encontrar como varia la longitud del lado a al variar b , y graficar $a(b)$ explicitando el dominio, la imagen y las asintotas de la función.
2. Si 3 pintores tardan 15 días en pintar un edificio. Cuanto tardan 4 pintores? Encontra una función $(t(p))$ que describa cuanto tarda (t) una cierta cantidad de pintores(p) en pintar el edificio. Graficar.
3. Si un auto tarda $2hs$ en recorrer $200km$, a que velocidad media tiene que ir para recorrer esos $200km$ en $30min$. Encontrar una función $(t(v))$ que describa el tiempo que tarda el auto en recorrer $200km$ en función de la velocidad media (v). Graficar.
4. ★ Pensa en un problema en el que tengas que usar una proporcionalidad inversa. Resolvelo y grafica.

2. Graficos:

Graficar (aproximadamente) las siguientes funciones, especificando las asintotas verticales y horizontales; la ordenada al origen y las raíces:

Inversas:

1. $y = \frac{3}{5x-5}$
2. $y = \frac{-2}{2x+2}$
3. $f(x) = \frac{2}{x-1}$
4. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Homograficas:

5. $f(x) = \frac{3x}{x+2}$ ★
6. $f(x) = \frac{4x+5}{3x-6}$
7. $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

Racionales:

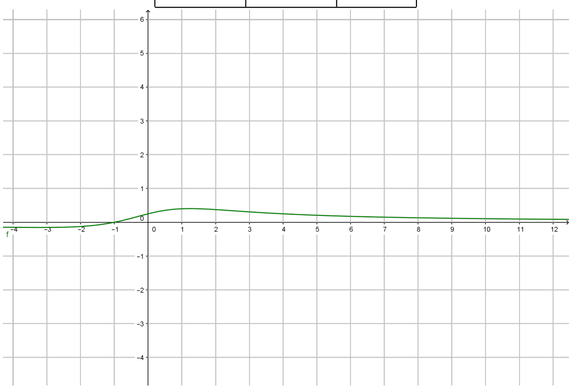
8. $f(x) = \frac{x^2(1-x)}{x^2-1}$
9. $f(x) = \frac{3x+1}{x^3+8}$
10. $f(x) = \frac{x^2-4}{2x^2-1}$
11. $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$
12. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$
13. $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$
14. $f(x) = \frac{6x^2}{9-x^2}$
15. ★ Pensa en una función que tenga almenos dos asintotas verticales pero ninguna asintota horizontal.

3. Completar:

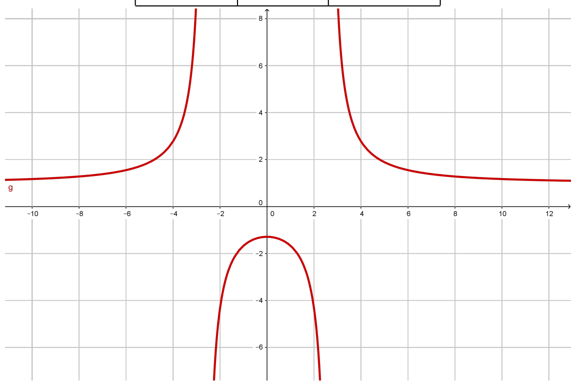
	A.V.	A.H.	Raíces	Ordenada al Origen	Dominio
$y = \frac{1}{x}$					
$y = \frac{3}{5x-5}$					
$y = \frac{-2}{2x+2}$					
$y = \frac{2x-4}{x-1}$					
$y = \frac{2}{x^2-16}$					
$y = \frac{1}{-x^2+x+2}$					
$y = \frac{2}{4x^2-8x+3}$					
$y = \frac{3}{x^2-x+2}$					
$y = \frac{2x^2+3x-4x^3}{5x^2+4}$					
$y = \frac{4(x+2)(x+3)}{(x-3)(x-1)(x+1)}$					
$y = -\frac{5(x+1)(x-1)}{(x-3)}$					

4. Cual función corresponde al gráfico.

$\frac{x+1}{x^2+4}$	$\frac{x+1}{x^2-4}$	$\frac{x+4}{x+1}$



$\frac{x^2-9}{2x^2-7}$	$\frac{x^2+9}{x^2-7}$	$\frac{2x^2-7}{x^2-9}$

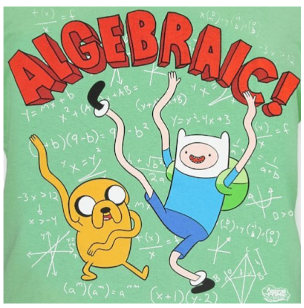


5. Encontrar, si es posible, el valor de x :

1. $\frac{5x+4}{2x-1} = 1$
2. $\frac{3x-1}{x+1} = 10$
3. $\frac{x^2-x-1}{x^3+x+3} = 3$
4. $\frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{x^3} = 4$
5. $\frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{x} = 4$
6. $\frac{x+2}{x^2-4} = -\frac{1}{2}$

6. Inecuaciones

1. $5x + 4 > 2x - 1$
2. $\frac{3}{x} > -2$
3. $2x^2 - 8 < x^2 - 2x + 7$
4. $-1 < \frac{1}{x-3} < 2$
5. $\frac{3x-1}{x+1} < 3$
6. $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{2x+1}{3x}$
7. $\frac{2}{x^2} \geq 1$
8. $\frac{4}{x} < x - 3$
9. $\frac{1}{x} > 2 + 1 - \frac{5}{x}$
10. $\dfrac{x^2+4}{x+2} \leq x$



7. Ejemplos Practicos

1. Hacia un tanque de agua que contiene agua pura fluye agua salada de modo tal que la concentración de sal en un tiempo t está dada por la función $c(t) = \frac{t}{10t+10}$ para $(t > 0)$. Graficar $c(t)$ y discutir el comportamiento de la función después de que paso mucho tiempo $(t \longrightarrow \infty)$. Interpretar .

2. ★★ La regla de Young es una fórmula que se usa para modificar la dosis de medicamentos para adultos (representada por "a" y medida en mg) a fin de que sirvan para niños: $f(t) = \frac{a.t}{t+12}$ con $(t > 0)$ y a en mg. Hasta qué edad un niño debe consumir menos de la mitad de la dosis máxima. Suponiendo $a = 2mg$. ¿Cuál es el gráfico que permite visualizar la variación de la dosis con el tiempo?

8. Ejercicios Teóricos

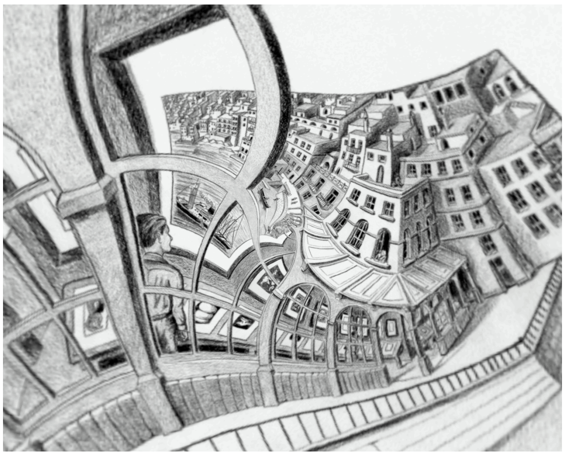
.★ ★ Teorema: Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones racionales. Entonces $f+g$, $f.g$ y $f(g(x))$ también son funciones racionales. Si $g(x) \neq 0$, f/g también es una función racional.

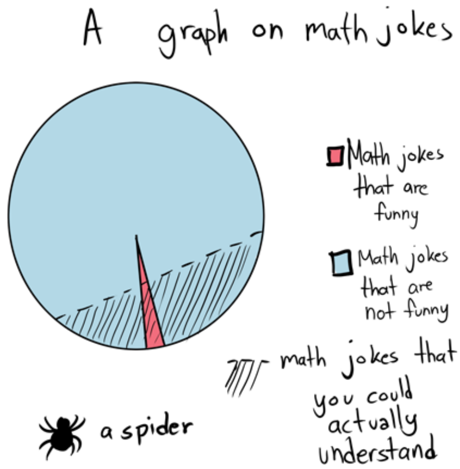
1. Dadas $f(x) = (1+x)/(1-x)$ y $g(x) = 1+x^2$, Calcular $f+g$, $2.f$, $f.g$, $f(g(x))$ y mostrar que son funciones racionales.

Observación: Para saber si hiciste bien un ejercicio, reemplaza por tu valor de x.

Extra y curiosidades

- Para que sirven las matemáticas? Charla TED de Eduado Saenz de Cabezon "Las matemáticas son para siempre".
- El 6 de agosto se cumplió el 70 aniversario del bombardeo nuclear a Hiroshima y el 9 de agosto a Nagasaki. Como forma de conmemoración , y para tomar conciencia, desde esta pagina puede ver una simulación que consecuencias tendría tirar una bomba nuclear en la ciudad que quieran.





Apéndice

Casos de Factoreo

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Formas de la lineal y la cuadrática

Lineal:

$y = m.x + b$

$y = A(x - r_1)$

Cuadrática:
$y = ax^2 + bx + c$
$y = A(x - r_1)(x - r_2)$
$y = C(x - x_v)^2 + y_v$