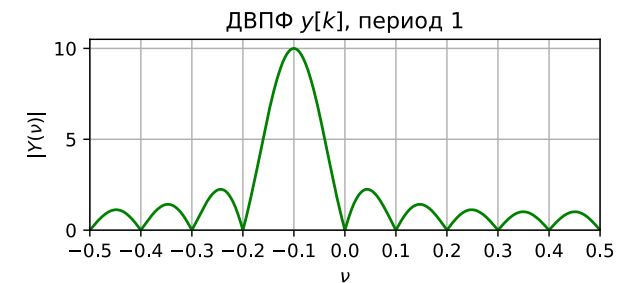
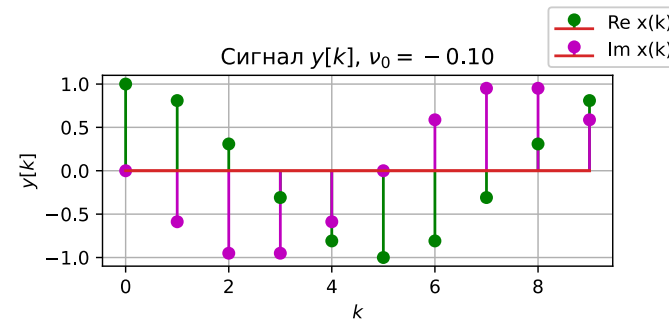
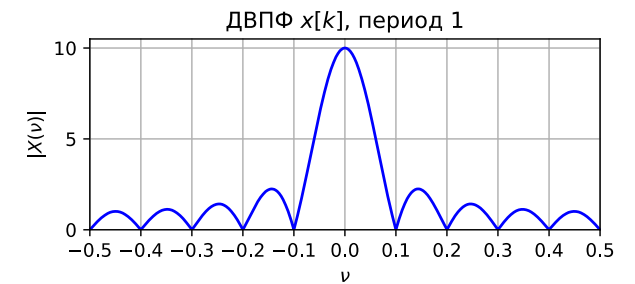
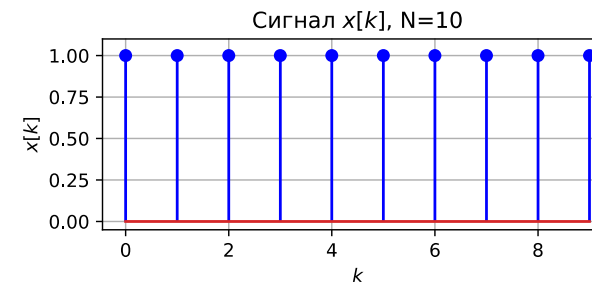


Лекция 6 по курсу «Дискретные преобразования сигналов»

11 марта 2025 г.

4. Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ).

Свойства ДВПФ: линейность, теорема запаздывания, теорема сдвига, равенство Парсеваля, теоремы о свертке, ДВПФ периодических последовательностей.



Различные формы записи ДВПФ

Различные формы записи ДВПФ (повторение)

На прошлой лекции мы установили, что пара дискретного во времени преобразования Фурье (ДВПФ) имеет вид

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t),$$
$$x[k] = \frac{1}{f_d} \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X(f) \exp(j2\pi f k \Delta t) df.$$

Введем нормированные частоты $\nu = f / f_d = f \Delta t$. Тогда пара ДВПФ может быть записана следующим образом:

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi \nu k),$$
$$x[k] = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) \exp(j2\pi \nu k) d\nu.$$

Если принять $2\pi f = \omega$, а частоту дискретизации взять в рад/с $\omega_d = 2\pi / \Delta t$, то

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j\omega k \Delta t),$$
$$x[k] = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} X(\omega) \exp(j\omega k \Delta t) d\omega.$$

Приняв $\theta = 2\pi \nu$ (нормированный угол в радианах), получаем

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j\theta k),$$
$$x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) \exp(j\theta k) d\theta.$$

Частотная переменная	Размерность	Период повторения спектра	
f	Гц	$f_d = 1 / \Delta t$	$[-f_d / 2; f_d / 2]$
$\omega = 2\pi f$	рад/с	$\omega_d = 2\pi / \Delta t$	$[-\omega_d / 2; \omega_d / 2]$
$\nu = f / f_d$	безразмерная	1	$[-0,5; 0,5]$
$\theta = 2\pi f / f_d$	рад	2π	$[-\pi; \pi]$

Свойства ДВПФ

1) Линейность

Если $\overset{DTFT}{x[k]} \leftrightarrow X(v)$ и $\overset{DTFT}{y[k]} \leftrightarrow Y(v)$, то

$\overset{DTFT}{\alpha x[k] + \beta y[k]} \leftrightarrow \alpha X(v) + \beta Y(v)$, где α, β — фиксированные числа.

Это свойство следует непосредственно из соответствующих свойств интеграла и суммы.

Обратное ДВПФ взвешенной суммы спектров

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_d - f_a/2} \int_{f_a/2}^{f_a/2} (\alpha X(v) + \beta Y(v)) \exp(j2\pi f k \Delta t) df &= \\ = \frac{\alpha}{f_d - f_a/2} \int_{f_a/2}^{f_a/2} X(v) \exp(j2\pi f k \Delta t) df + \frac{\beta}{f_d - f_a/2} \int_{f_a/2}^{f_a/2} Y(v) \exp(j2\pi f k \Delta t) df &= \\ = \alpha x[k] + \beta y[k]. \end{aligned}$$

ДВПФ взвешенной суммы сигналов

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha x[k] + \beta y[k]) \exp(-j2\pi f k \Delta t) &= \\ = \alpha \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t) + \beta \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t) &= \\ = \alpha X(v) + \beta Y(v). \end{aligned}$$

Теорема запаздывания

2) Теорема запаздывания

Если $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu)$, то $x[k-l] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu)\exp(-j2\pi\nu l)$.

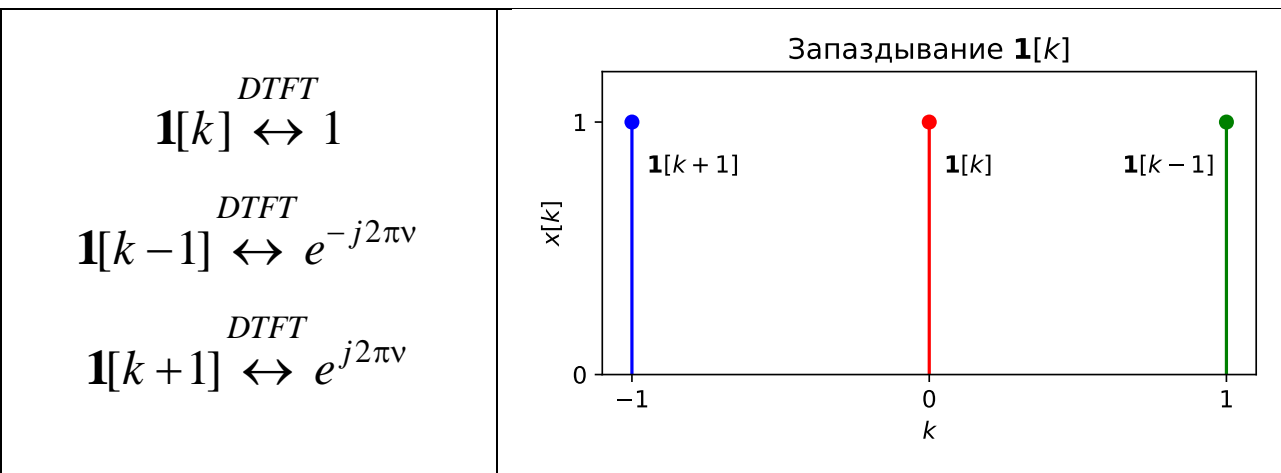
Здесь $x[k-l]$ — это сигнал, запаздывающий по времени относительно сигнала $x[k]$ на l отсчетов в случае $l > 0$ и опережающий сигнал $x[k]$ на $-l$ отсчетов в случае $l < 0$.

Докажем свойство. Для этого возьмем обратное ДВПФ для правой части выражения:

$$\int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)\exp(-j2\pi\nu l)\exp(j2\pi\nu k)d\nu =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)\exp(j2\pi\nu(k-l))d\nu = x[k-l].$$

Пример



Стоит отметить, что $|X(\nu)|$ для запаздывающего и исходного сигнала одинаков:

$$|X(\nu)\exp(-j2\pi\nu l)| = |X(\nu)| \cdot |\exp(-j2\pi\nu l)| = |X(\nu)|.$$

Это означает, что АЧХ сигнала не зависит от выбора нулевого отсчета времени ($k = 0$).

Теорема смещения

3) Теорема смещения

Если $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu)$, то $x[k] \exp(j2\pi\nu_0 k) \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu - \nu_0)$.

Умножение сигнала на комплексную экспоненту вида $\exp(j2\pi\nu_0 k)$, $\nu_0 \in \mathbb{R}$ приводит к сдвигу спектральной функции вдоль оси частот на ν_0 вправо в случае $\nu_0 > 0$ и на $-\nu_0$ влево в случае $\nu_0 < 0$.

Пример.

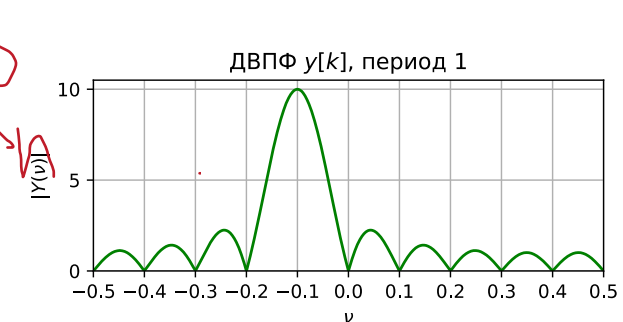
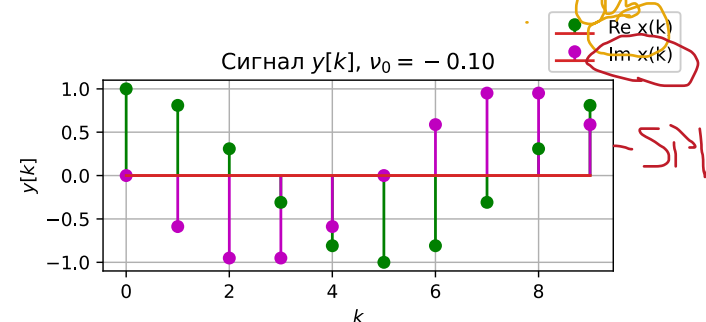
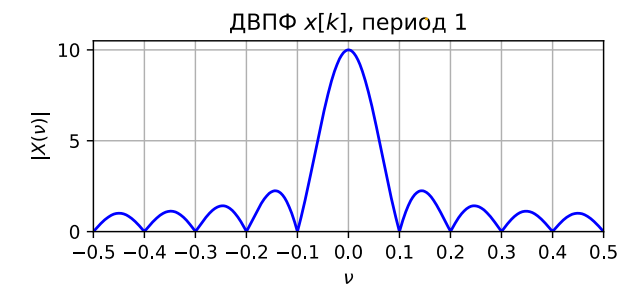
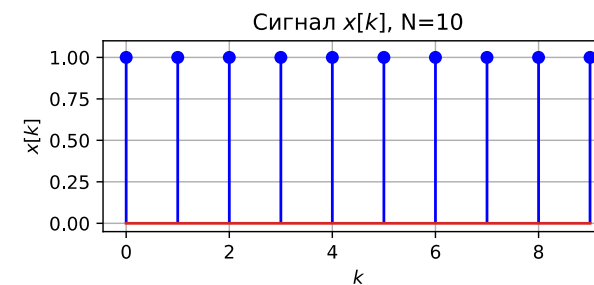
$$y[k] = x[k] \exp(j2\pi\nu_0 k), \text{ где } x[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k-m].$$

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j2\pi\nu k) = \\ &= \frac{1 - \exp(-j2\pi\nu N)}{1 - \exp(-j2\pi\nu)} = \\ &= \frac{2j e^{-j\pi\nu N} (e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N})}{2j e^{-j\pi\nu} (e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu})} = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \exp(-j(N-1)\pi\nu). \end{aligned}$$

$\times [k] = 1$

$$|X(\nu)| = \left| \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \right|.$$

$$Y(\nu) = X(\nu - \nu_0) = \frac{\sin(N\pi(\nu - \nu_0))}{\sin(\pi(\nu - \nu_0))} \exp(-j(N-1)\pi(\nu - \nu_0))$$



Теорема смещения

4) Равенство Парсеваля

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(v)|^2 dv$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y^*[k] = \int_{-1/2}^{1/2} X(v)Y^*(v)dv$$

Пример.

Предположим, что имеется финитная последовательность

$x[k] = \{1; 1; 1\}$. Тогда $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = 3$. При этом

$$X(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j2\pi vk} = x[-1]e^{j2\pi v} + x[0]e^0 + x[1]e^{-j2\pi v} =$$

$$= \exp(j2\pi v) + 1 + \exp(-j2\pi v) = 1 + 2\cos(2\pi v).$$

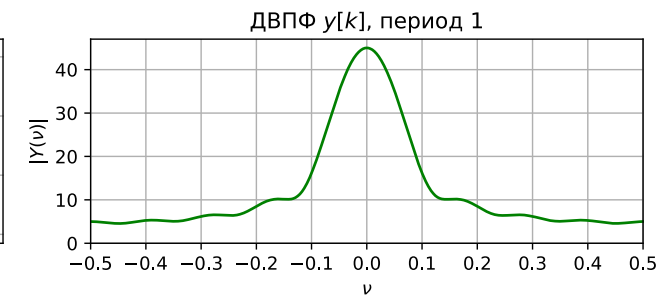
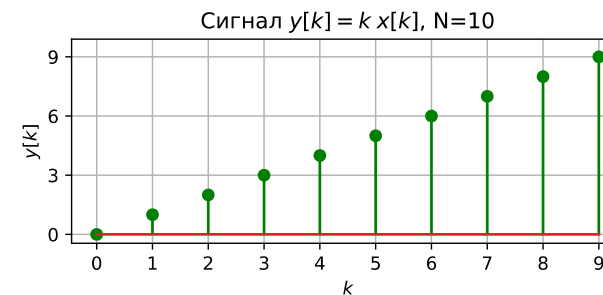
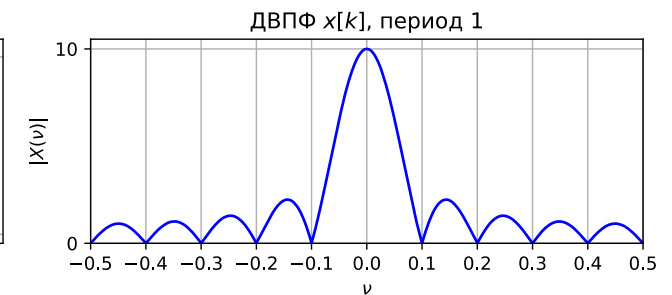
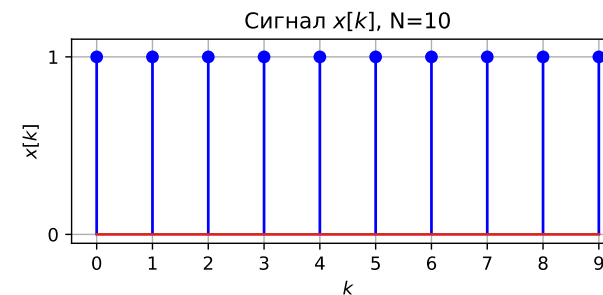
$$\int_{-1/2}^{1/2} |X(v)|^2 dv = \int_{-1/2}^{1/2} |1 + 2\cos(2\pi v)|^2 dv = 3.$$

5) Умножение на k и дифференцирование по частоте

Если $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(v)$, то $y[k] = kx[k] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{j}{2\pi} \frac{dX(v)}{dv}$.

Пример.

$$x[k] = \sum_{m=0}^9 \mathbf{1}[k-m].$$



Теорема смещения

6) Изменение масштаба

Если $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu)$, то $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \mathbf{1}[k - mL] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu L)$.

Для того, чтобы доказать свойство, вычислим ДВПФ для последовательности в левой части.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \mathbf{1}[k - mL] \exp(-j2\pi\nu k) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL] \exp(-j2\pi\nu k) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \exp(-j2\pi(\nu L)m) = X(\nu L). \end{aligned}$$

Пример

Рассмотрим последовательность из 10 единичных

импульсов. $x[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k - m]$.

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j2\pi\nu k) = \\ &= \frac{1 - \exp(-j2\pi\nu N)}{1 - \exp(-j2\pi\nu)} = \end{aligned}$$

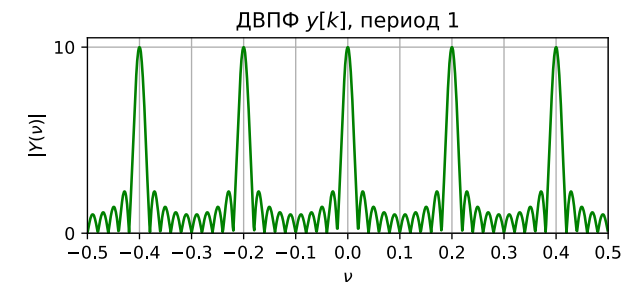
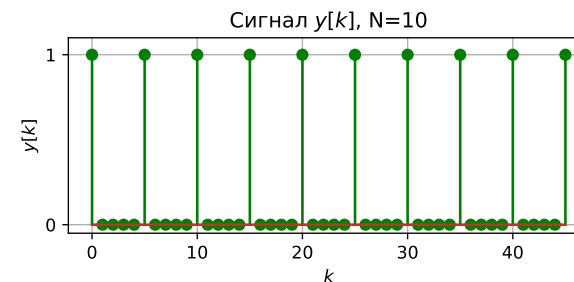
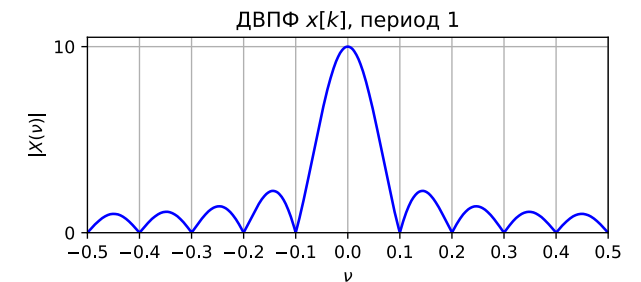
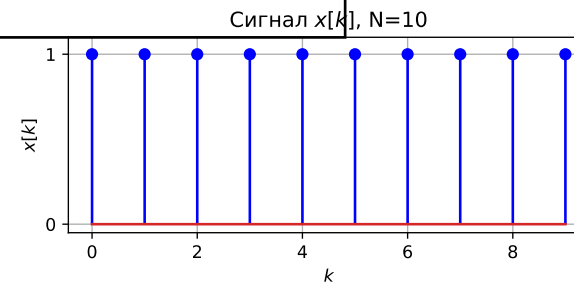
$$= \frac{e^{-j\pi\nu N} (e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N})}{e^{-j\pi\nu} (e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu})} = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \exp(-j(N-1)\pi\nu).$$

$$|X(\nu)| = \left| \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \right|.$$

Между каждой парой отсчетов добавим $L-1$ нулевой отсчет. Тогда модуль ДВПФ получившейся последовательности

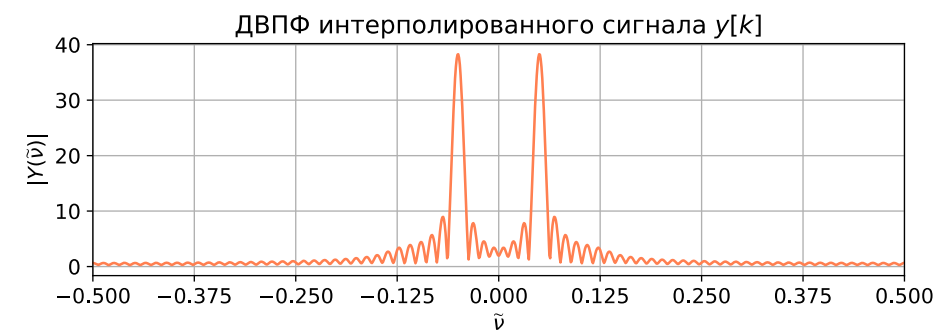
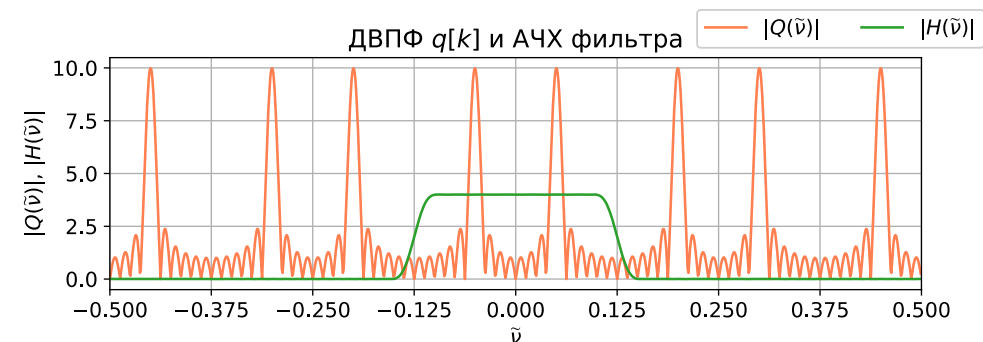
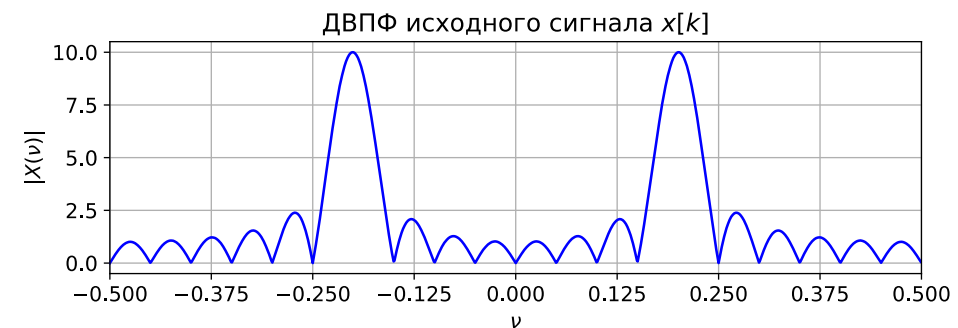
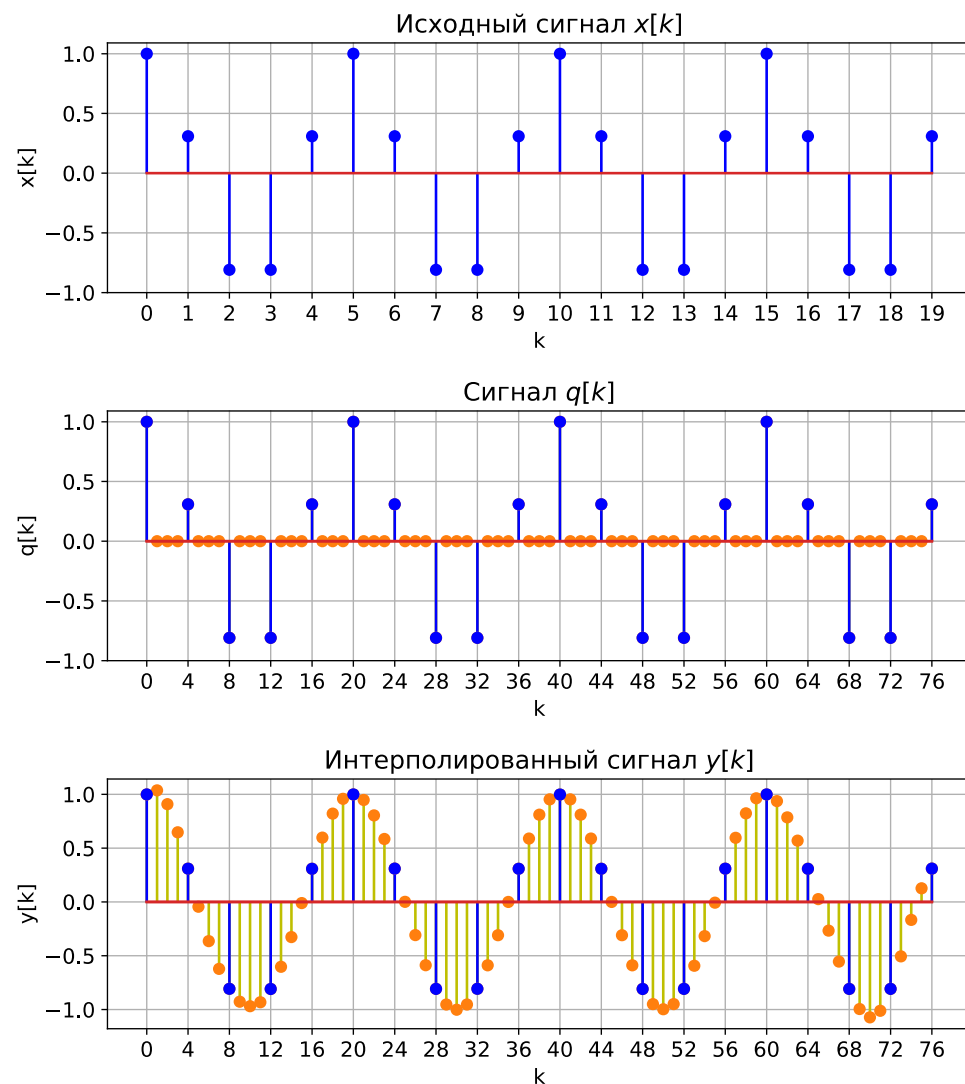
$$|X_L(\nu)| = \left| \frac{\sin(10\pi\nu L)}{\sin(\pi\nu L)} \right|.$$

L = 3K | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 y[k] | | | x[0] | 0 | 0 | x[1] | 0 | 0 | x[2] | 0 .. . k



Теорема смещения

Р.С. Применение свойства изменения масштаба для однократной интерполяции с коэффициентом $L=4$.

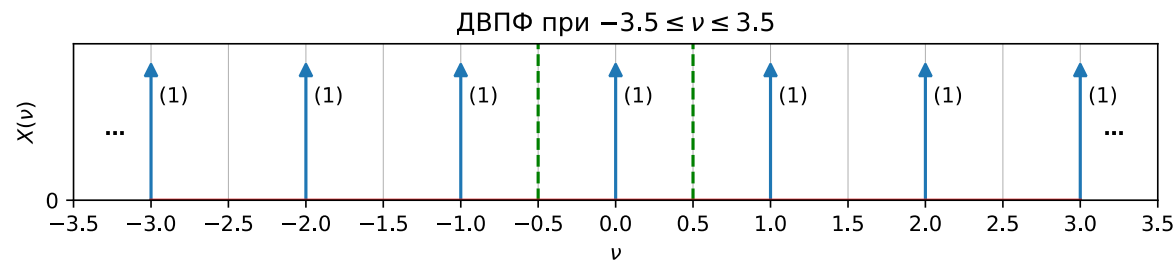
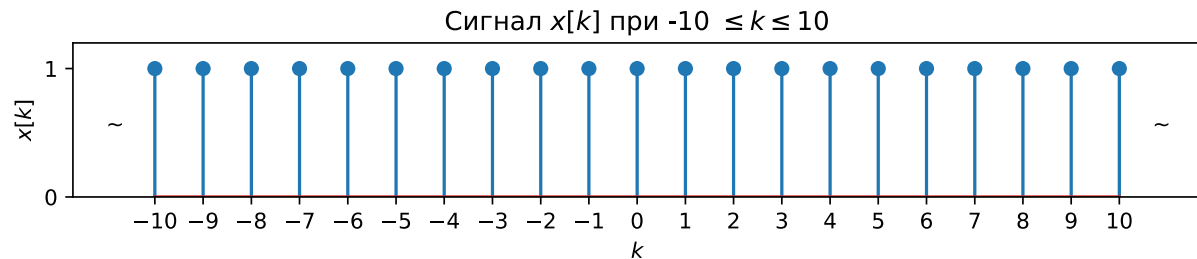


Теорема смещения

7) ДВПФ периодических последовательностей

а) последовательность единичных импульсов с периодом 1

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n)$$



Вычислим ДВПФ для последовательности $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m]$.

$$X(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi vk) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \right) \exp(-j2\pi vk) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \exp(-j2\pi vk).$$

$$X(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi vm).$$

Заметим, что $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi vm)$ — это ряд Фурье для периодической (по частоте) последовательности δ -функций с периодом 1

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{-m} \exp(-j2\pi vm),$$

где коэффициенты Фурье

$$C_{-m} = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(v) \exp(j2\pi vm) dv = e^0 = 1.$$

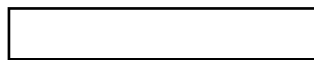
Тогда получаем, что

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n).$$

Теорема смещения

б) Периодическая последовательность единичных импульсов с периодом L .

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{n}{L}\right)$$



Найдем ДВПФ для последовательности $x[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL]$.

Используя свойство об изменении масштаба

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \mathbf{1}[k - mL] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} X(vL), \text{ из}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - m] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v - n) \text{ получаем}$$

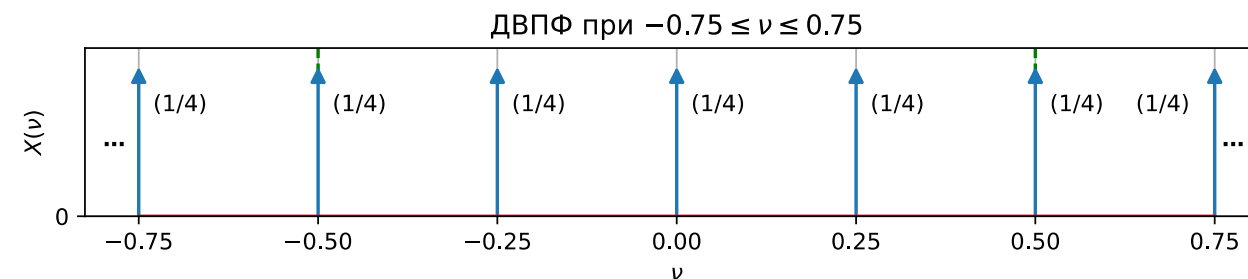
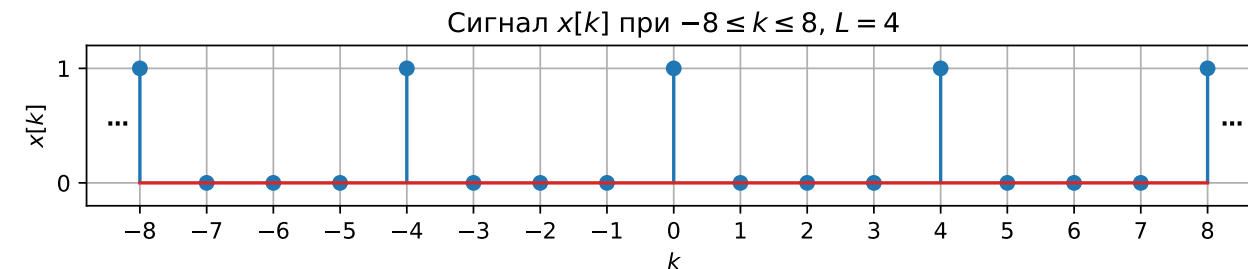
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(vL - n)$$

Воспользовавшись свойством δ -функции

$$\delta(av - b) = \frac{1}{|a|} \delta\left(v - \frac{b}{a}\right),$$

получаем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{n}{L}\right)$$



Теорема смещения

в) Гармонические сигналы

$$\exp(j2\pi\nu_0 k) \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n).$$

Докажем свойство.

1) По теореме смещения для ДВПФ если $x[k] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu)$, то

$$x[k]\exp(j2\pi\nu_0 k) \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu - \nu_0).$$

2) ДВПФ последовательности единичных импульсов с периодом 1

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n).$$

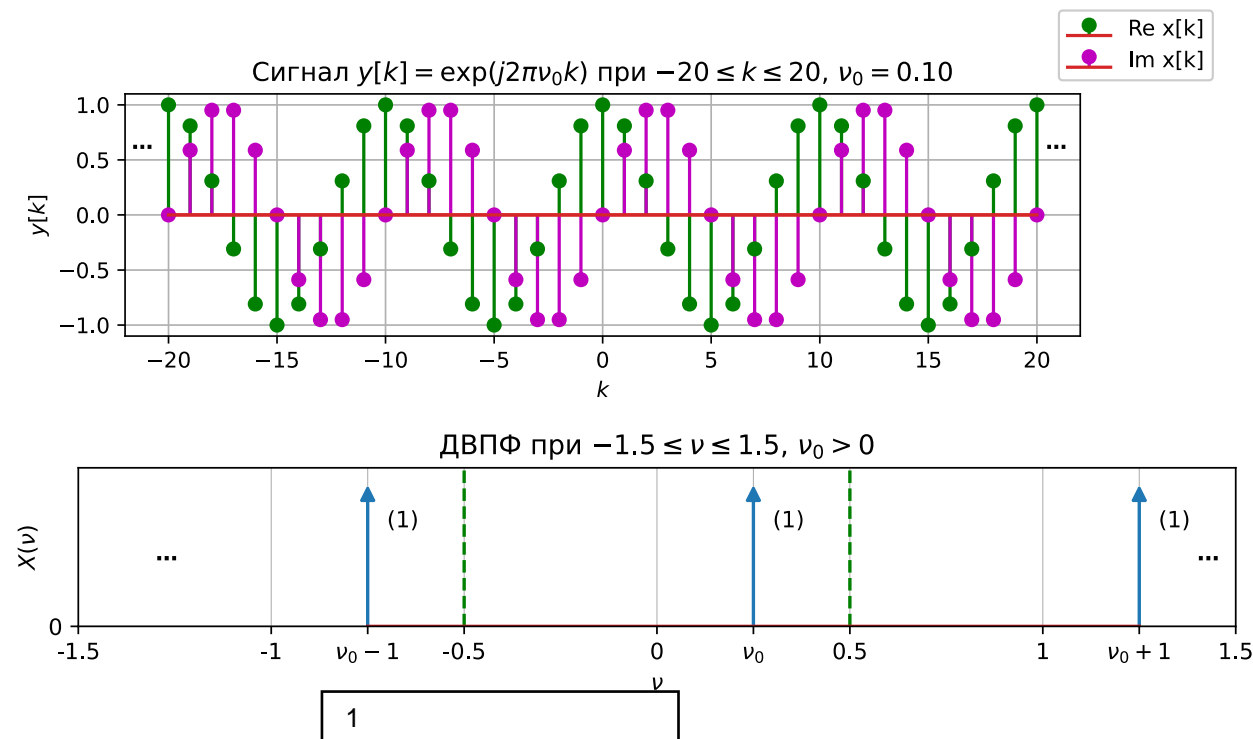
3) Получаем, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m]\exp(j2\pi\nu_0 k) \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n).$$

Это эквивалентно

$$\exp(j2\pi\nu_0 k) \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n).$$

$$y[k] = \exp(j2\pi\nu_0 k)$$



Теорема смещения

8) Теорема о свертке во временной области.

Если $x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(v)$ и $y[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} Y(v)$, то

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]y[k-m] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(v)Y(v).$$

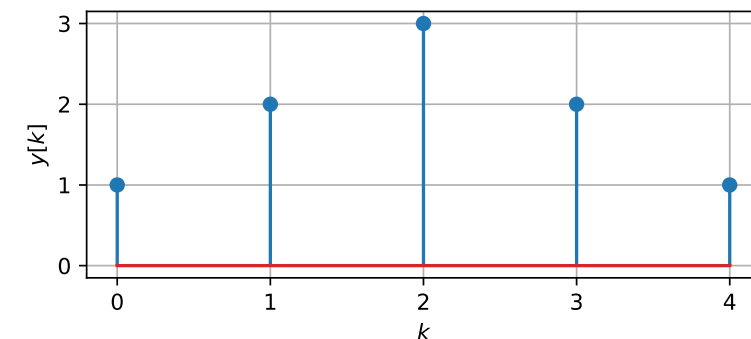
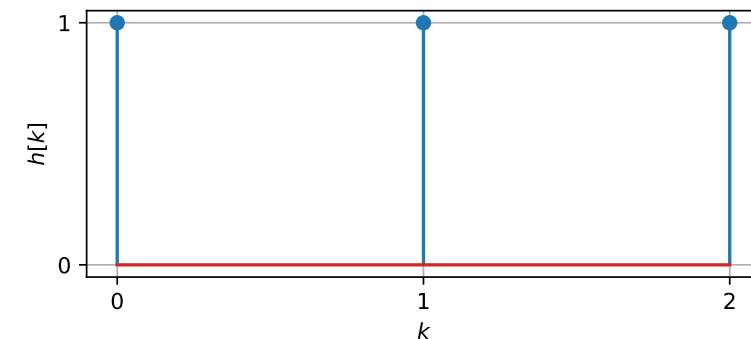
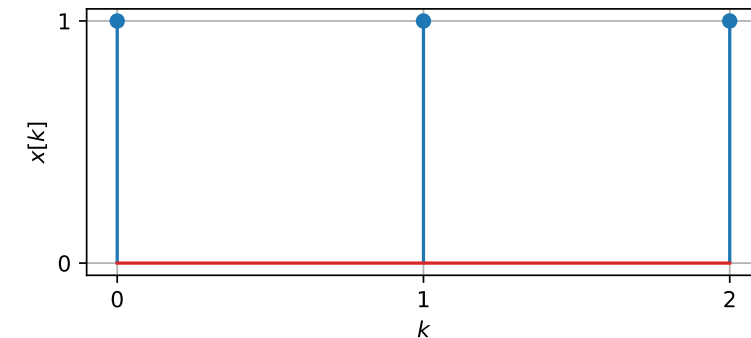
В левой части стоит дискретная свертка сигналов, в правой — произведение спектров.

9) Теорема о свертке в частотной области (теорема о спектре произведения).

Если $x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(v)$ и $y[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} Y(v)$, то

$$x[k]y[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{v})Y(v-\tilde{v})d\tilde{v}.$$

В левой части стоит произведение сигналов, в правой — циклическая свертка спектров.



Задачи для самостоятельного решения

№1. Пусть $X(v)$ — ДВПФ спектр некоторой последовательности $x[k]$. Как нужно изменить последовательность $x[k]$, чтобы ее ДВПФ спектр был сдвинут влево относительно исходного на $v_0 = 1/10$?

№2. Предположим, что имеется финитная последовательность

$$x[k] = \{1; 5; 2; 4; 1; 1; 3\}.$$

$k=0$

Определите значения следующих выражений:

$$X(0); X(1/2); \int_{-1/2}^{1/2} X(v) dv; \int_{-1/2}^{1/2} |X(v)|^2 dv; \int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{dX(v)}{dv} \right|^2 dv.$$

№3. Докажите для ДВПФ свойство: если $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(v)$, то

$$kx[k] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{j}{2\pi} \frac{dX(v)}{dv}.$$

Получите аналогичное свойство для спектра сигнала (последовательности) $k^M x[k]$, где M — натуральное число.

№4. Используя свойство

$$\exp(j2\pi v_0 k) \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v - v_0 - n).$$

получить ДВПФ последовательностей отсчетов $\sin(2\pi v_0 k)$ и $\cos(2\pi v_0 k)$, где $v_0 = 0,1$.

№5. Определить ДВПФ изображенного на рисунке отсчетов треугольного импульса $y[k]$, который может быть представлен как свертка двух одинаковых последовательностей вида

$$x[k] = \mathbf{1}[k] + \mathbf{1}[k-1] + \mathbf{1}[k-2].$$

