Programación básica
Proyecto 1: Órbita de un planeta entorno a una estrella.

Prof. Alma González

October 4, 2021

Entrega: 6 de Octubre de 2021.

1 Introducción

La dinámica de un planeta moviendose alrededor de una estrella de masa M_* (sin considerar la presencia de otros planetas u otras estrellas) puede obtenerse a partir de resolver la ecuación :

$$\vec{F} = m_p \, \vec{a_p}. \tag{1}$$

Donde m_p y a_p son la masa y aceleración del planeta respectivamente. La fuerza que siente el planeta es la fuerza de atracción gravitacional debido a la presencia de la estrella, dada por:

$$\vec{F} = -\frac{GM_* m_p}{r^3}\vec{r}, \tag{2}$$

donde $G = 4\pi^2 yr^{-2} AU M_{\odot}^{-1}$ es la constante de Gravitación Universal. Como podrás notar no está escrita en el SI sino en un sitema de unidades donde las masas se miden en unidades de Masas Solares, las distancias en unidades astronomicas, y los tiempos en años [1].

Combinando las ecuaciones 1 y 2 se obtiene la ecuación de movimiento:

$$m_p \ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_* m_p \vec{r}}{r^3}. \tag{3}$$

Nota que $\vec{r} = (x, y, z)$ es el vector distancia entre la estrella y el planeta, y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es su magnitud,donde hemos considerado coordenadads cartesianas.

Dado que la ecuación 3 es vectorial, podemos separarla en componentes (usaremos coordenadas cartesianas centradas en la estrella) :

$$\ddot{x} = -\frac{GM_* x}{r^3}, \tag{4}$$

$$\ddot{y} = -\frac{GM_* y}{r^3}, \tag{5}$$

$$\ddot{z} = -\frac{GM_* z}{r^3}, \tag{6}$$

Las ecuaciones anteriores son ecuaciones diferenciales de segundo orden, las cuales pueden reescribirse como 6 ecuaciiones diferenciales de primer orden (como verán es su clase de cálculo), de la siguiente forma:

[1] En este sistema de unidades las velocidades estarían medidas en unidades astronomicas por año (AU/yr)

$$
\begin{aligned}
\dot{v_x} &= -\frac{GM_* x}{r^3} &(7)\\
\dot{x} &= v_x &(8)\\
\dot{v_y} &= -\frac{GM_* y}{r^3} &(9)\\
\dot{y} &= v_y &(10)\\
\dot{v_z} &= -\frac{GM_* z}{r^3} &(11)\\
\dot{z} &= v_z &(12)
\end{aligned}
$$

Entonces, resolver la órbita del planeta significa resolver las ecuaciones anteriores, para encontrar las posiciones como función del tiempo, i.e. $x(t), y(t), z(t)$; en el proceso también se calcula $v_x(t), v_y(t), v_z(t)$. Es decir se calculan las posiciones y las velocidades del planeta a cada paso de tiempo.

El método númerico más sencillo para resolver las ecuaciones de movimiento, es decir calcular $x(t), y(t), z(t), v_x(t), v_y(t), v_z(t)$, es el método de Euler (cómo veras en tu clase de métodos numéricos).

El método de Euler consiste en establecer un conjunto de posiciones (x_0, y_0, z_0) y velocidades iniciales $(v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0})$ a un tiempo inicial t_i y utilizarlas para obtener las nuevas posiciones y velocidades en siguiente instante de tiempo (t_{i+1}), siguiendo las siguiente ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
x_{i+1} &= x_i + v_{x_i} * h &(13)\\
y_{i+1} &= y_i + v_{y_i} * h &(14)\\
z_{i+1} &= z_i + v_{z_i} * h &(15)\\
vx_{i+1} &= vx_i - h * \frac{GM_* x_i}{r_i^3} &(16)\\
vy_{i+1} &= vy_i - h * \frac{GM_* y_i}{r_i^3} &(17)\\
vz_{i+1} &= vz_i - h * \frac{GM_* z_i}{r_i^3} &(18)\\
& &(19)
\end{aligned}
$$

donde h es el paso de tiempo, el cual es constanteconstante. Cómo se puede ver, las nuevas coordenadas y velocidades al tiempot_{i+1} dependen de las velocidades y las posiciones al tiempo anterior t_i. Para obtener un nuevo paso de tiempo, hemos de reemplazar las posiciones y velocidades iniciales por las nuevas. Consideraremos un paso de tiempo constante, h, y daremos un valor suficientemente pequeño para que la evolución de la órbita sea precisa ($h \approx 0.001$ es un buen valor de inicio cuando la velocidad está dada en AU/yr). Nota que h es un parámetro con el que se deberán hacer pruebas, hasta obtener un buen resultado.

De forma explicita, los primeros pasos (para cualquier planeta serían)

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \quad (20)$$
$$x_1 = x_0 + v_{x_0} * h \quad (21)$$
$$y_1 = y_0 + v_{y_0} * h \quad (22)$$
$$z_1 = z_0 + v_{z_0} * h \quad (23)$$
$$v_1 = v_{x0} - h * \frac{GM_* x_0}{r_0^3} \quad (24)$$
$$v_1 = v_{y0} - h * \frac{GM_* y_0}{r_0^3} \quad (25)$$
$$v_1 = v_{z0} - h * \frac{GM_* z_0}{r_0^3} \quad (26)$$
$$(27)$$

aunque no aparece explicitamente en las ecuaciones, este paso corresponde al tiempo $t1 = t0 + h$, ya que h es el paso de tiempo que estamos haciendo. Para calcular el segundo paso haríamos:

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \quad (28)$$
$$x_2 = x_1 + v_{x_1} * h \quad (29)$$
$$y_2 = y_1 + v_{y_1} * h \quad (30)$$
$$z_2 = z_1 + v_{z_1} * h \quad (31)$$
$$v_2 = v_{x1} - h * \frac{GM_* x_1}{r_1^3} \quad (32)$$
$$v_2 = v_{y1} - h * \frac{GM_* y_1}{r_1^3} \quad (33)$$
$$v_2 = v_{z1} - h * \frac{GM_* z_1}{r_1^3} \quad (34)$$
$$(35)$$

y así sucesivamente hasta completar el paso i-esimo para el cual el tiempo que le corresponde es $t_{i+1} = t_i + h$ y que es menor que el tiempo total de la evolución. Cómo podrás ver en el segundo paso se cambiaon las posiciones originales, por las que calculamos en el paso 1...

2 Proyecto

Se usará la infomación anterior para calcular la órbita de los planetas de nuestro sistema solar entorno al sol. Por ejemplo: en unidades usuales en astronomía, la masa del sol es M_{sol}=$1M_\odot$, mientras que la masa de los planeta es una fracción de ésta, por ejemplo la masa de la tierra es $M_T = 3 \times 10^{-6} M_\odot$. La distancia de la tierra al sol es de $d = 1AU$.

Para completar este proyecto se requiere :

1. Hacer el algoritmo y el diagrama de flujo del programa que permita calcular la órbita de un planeta.

3600.5 | 17.142 47 | 110.2894 | 224.1250 | 39.698 62 | 0.003 940 405 | 0.253 3034 | 246.881 49

HELIOCENTRIC COORDINATES AND VELOCITY COMPONENTS
REFERRED TO THE MEAN EQUATOR AND EQUINOX OF J2000.0

	x	y	z	$\dot{x}$	$\dot{y}$	$\dot{z}$
MERCURY						
3400.5	+ 0.050 8011	− 0.401 1642	− 0.219 5576	+ 0.022 318 75	+ 0.004 855 53	+ 0.000 279 24
3600.5	+ 0.350 5095	+ 0.026 3391	− 0.022 2775	− 0.006 660 05	+ 0.025 747 34	+ 0.014 444 11
VENUS						
3400.5	+ 0.065 5112	− 0.658 9741	− 0.300 6194	+ 0.020 008 33	+ 0.002 054 77	− 0.000 341 78
3600.5	− 0.405 5750	− 0.556 6662	− 0.224 7787	+ 0.016 617 54	− 0.010 033 06	− 0.005 565 54
EARTH*						
3400.5	− 0.634 9052	+ 0.691 0548	+ 0.299 5998	− 0.013 434 43	− 0.010 232 23	− 0.004 436 07
3600.5	+ 0.830 0348	− 0.531 5723	− 0.230 4572	+ 0.009 567 03	+ 0.012 884 96	+ 0.005 586 11
MARS						
3400.5	− 0.832 6456	− 1.178 2356	− 0.517 9253	+ 0.012 276 03	− 0.005 700 21	− 0.002 946 25
3600.5	+ 1.384 5017	− 0.074 2960	− 0.071 4886	+ 0.001 509 93	+ 0.013 794 28	+ 0.006 286 26
JUPITER						
3400.5	− 5.385 202	− 0.840 171	− 0.229 015	+ 0.001 099 944	− 0.006 518 169	− 0.002 820 667
3600.5	− 4.972 632	− 2.097 550	− 0.778 010	+ 0.003 001 098	− 0.005 978 895	− 0.002 635 800
SATURN						
3400.5	− 3.743 403	+ 7.568 504	+ 3.287 166	− 0.005 379 637	− 0.002 232 371	− 0.000 690 547
3600.5	− 4.786 640	+ 7.063 202	+ 3.123 356	− 0.005 039 375	− 0.002 813 054	− 0.000 944 995
URANUS						
3400.5	+ 18.381 75	− 7.257 98	− 3.438 75	+ 0.001 544 588	+ 0.003 135 267	+ 0.001 351 424
3600.5	+ 18.677 30	− 6.625 73	− 3.166 00	+ 0.001 410 659	+ 0.003 186 556	+ 0.001 375 761
NEPTUNE						
3400.5	+ 21.253 32	− 19.490 23	− 8.506 58	+ 0.002 199 232	+ 0.002 084 787	+ 0.000 798 469
3600.5	+ 21.688 70	− 19.069 02	− 8.345 03	+ 0.002 154 366	+ 0.002 127 234	+ 0.000 816 972
PLUTO						
3400.5	− 4.112 18	− 29.568 80	− 7.989 70	+ 0.003 169 840	− 0.000 584 314	− 0.001 138 225
3600.5	− 3.477 24	− 29.679 71	− 8.215 73	+ 0.003 179 375	− 0.000 524 679	− 0.001 121 897

* Values labelled for the Earth are actually for the Earth/Moon barycenter (see note on page E2).
Distances are in astronomical units. Velocity components are in astronomical units per day.

Figure 1: Tabla de posiciones, respecto a la posición del sol, y velocidades de los planetas correspondientes a dos días separados por aproximadamente 7 meses. Las posiciónes están dadas en unidades astronómicas. Las velocidades están dadas en unidades astronómicas por día.

2. El programa debe :

   - Leer a partir de un archivo los parámetros necesarios (e.g. masa del planeta, masa de la estrella, tiempo total de la evolución, etc, etc.), y el tamaño del incremento temporal (h), el cuál se da en las mismas unidades que el tiempo total, y suele ser una fracción pequeña del mismo (pueden iniciar con h=0.001, y posteriormente hacerlo mas grande o pequeño). Del mismo archivo también se deben leer las posiciones y velocidades iniciales del planeta (x0,y0,z0,vx0,vy0,vz0), las cuáles debén tomar de la tabla en la figura 1. (NOTA: En este proyecto solo estámos resolviendo la orbita de 1 planeta a la vez).
   - Se deben calcular las posiciones y velocidades del planeta tiempo usando el método de Euler, para el número de pasos de tiempo definidos por las variables tiempo total de evolución y tamaño del incremento temporal.
   - Se deberán guardar las posiciones y velocidades calculadas en un archivo, las columnas corresponderan con las coordenadas x,y,x,vx,vy,vz (en ese orden), y las filas con las coordenadas a cada paso de tiempo,

pueden incluir una columna que indique el tiempo que corresponde a cada fila.

3. Gráficar la órbita obtenida ($x\,vs\,y$, $x\,vs\,z$, $y\,vs\,z$), pueden usar el graficador de su preferencia .

4. El programa debe estár debidamente comentado, compilar y ejecutarse correctamente . En github solamente deberán poner su código, las instrucciones para ejecutarlo en un archivo Readme.md y la gráfica resultante para el planeta de su elección, todo en una carpeta llamada Proyecto_1. El repositorio debe mostrar actualizaciones, no solo el resultado en la fecha limite...

Extra (1 punto): Generalizar el programa anterior para obtener la orbita de todos los planetas en una sola ejecución del código. En este caso, se puede guardar la trayectoria de cada planeta en un archivo independiente para cada uno.