



拓扑四日谈

原文标题	<u>Topology in Four Days</u>
作者	<u>時枝正 (Tadashi Tokieda)</u>
发表时间	<u>2001</u>
译者	<u>熊锐</u>
翻译时间	<u>2019 年 8 月 4 日</u>

Contents

1	用形变来解题	1
2	如何搭建流形	2
3	同伦	6
4	相交数	7
5	不动点定理	10
6	向量场的平衡点	13
7	映射度	16
8	Gauss 映射	18
9	推荐阅读	20
	感谢	21
	参考文献	21

部分原文的打印错误在翻译过程中被修复.

本作原文是An Introduction to the Geometry and Topology of Fluid Flows的一节. 虽然最初并非面向数学家, 但本文在专业性和生动性取得了很好的平衡, 是很好的拓扑学素材. 本文的一大特点是手绘的插图栩栩如生, 这源自作者的美术功底. 总之, 希望本文的翻译能够帮助有需要的人.

拓扑四日谈

時枝 正

魁北克大学数学系

C.P. 8888, succ. 中心城区

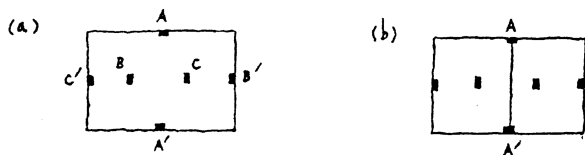
蒙特利尔 H3C 3P8, 加拿大

电子邮箱: tokieda@math.uqam.ca

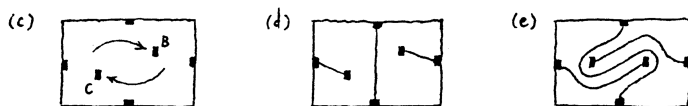
摘要. 本文是 2000 年 12 月 Newton 研究所一系列共计四个报告的转录, 面向的对象是一位流体动力学家和一位天体物理学家. 本文阐释了如何使用两个最简单但很有用的拓扑工具 — 相交数和映射度.

1 用形变来解题

例 1.1 (Pólya). 让我们从一个趣题开始. 我们能够用不自交的曲线在长方形 (a) 内部连接 AA' , BB' , CC' 吗?



如果我们像 (b) 那样连接 AA' , 似乎答案是否定的. 不过, 让我们假想长方形是橡皮制作的, 可以形变 B 和 C 到 (c) 的位置:



形变之后, 非常容易在 (d) 上解决. 通过形变回到 (e), 我们就会得到原本问题的解答.

很多困难问题的解决 (例如, 某些非线性偏微分方程的问题) 是非形变敏感的, 因此可用形变这种拓扑方法来简化问题.

例 1.2. 对每个方阵 L , $\det e^L = e^{\text{tr } L}$.

这个恒等式有很多代数证明, 下面则是一个拓扑的论证. 首先, 这个恒等式对可对角矩阵 L 是成立的: 如果记 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是对角化之后的对角元, 两边都是 $e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$. 而“通常”的矩阵是可对角化的: 可对角矩阵的一个小的摄动还是可对角的, 并且每一个不可对角矩阵都是一系列可对角矩阵的极限. (实际上, 若矩阵 L 的特征多项式是 χ_L , 只有单根, 那么 L 是可对角化的, 并且“通常”的多项式都只有单根 — 当系数发生摄动, 重根分解为单根.) 为了对不可对角化的 L 证明这个恒等式, 将其表达成可对角矩阵的极限; 等式对后者总成立, 于是根据连续性也对 L 成立.

问题在“通常”的情形下逐渐容易上手, 接着我们只需要用连续性靠近奇异的情况.

例 1.3 (Cayley-Hamilton). $\chi_L(L) = 0$.

只需仿照上面的论证.

评注 1.4. 在1.2和1.3里, 论证依赖于在 \mathbb{C} 上的假设, 因为这样才能将多项式分解成线性因子. 但是最后的结果中的恒等式是 L 中位置的组合关系, 所以他们在任何交换环上依旧正确.

格言 1.5. 形变问题, 着眼通常.

2 如何搭建流形

通常, 我们在应用中遇见的大部分光滑空间, 或曰流形, 是由一些基本部件组装而成的.

零件 2.1.

$$\begin{array}{ll} \underline{n \text{ 维球}} D^n &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_k^2 \leq 1\}, \\ \underline{n-1 \text{ 维球面}} S^{n-1} &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_k^2 = 1\}, \\ \underline{\text{单位区间}} I &= [0, 1]. \end{array}$$



现代数学的语汇总是习惯性地区分球 (实心) 和球面 (只有外壳).

记号 2.2.

∂ 表示边界: $S^{n-1} = \partial D^n$.

\simeq 表示同胚, 即 “拓扑完全一样”: $I \simeq D^1$.



由2.1的零件搭建复杂的空间有以下方法: 乘积, 商, 手术.

方法一: 乘积

例 2.3. n 维方块 $I^n = \underbrace{I \times \cdots I}_n \simeq D^n$.



例 2.4. n 维轮胎面 $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots S^1}_n$.

$T^2 \simeq$ 马克杯  的表面 \simeq 组成结的水管 .

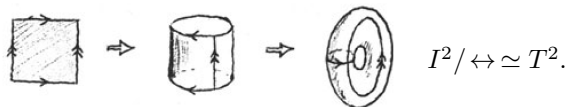
评注 2.5. 在2.4, 组成结的水管不能 “形变” 成 T^2 . 同胚是弱的, 且相比形变更加本原 (参见下面的3.9).

方法二: 商 (又名等同)

例 2.6. 在 D^n 中, 将 ∂D^n 的所有点等同起来:



例 2.7. 在 I^2 中, 等同 $(0, y) \leftrightarrow (1, y)$ 和 $(x, 0) \leftrightarrow (x, 1)$:

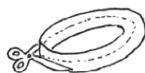


如果等同 $(0, y) \leftrightarrow (1, 1 - y)$:



而等同 $(0, y) \leftrightarrow (1, y)$ 以及 $(x, 0) \leftrightarrow (-x, 1)$ 被称为 Klein 瓶.

问题 2.8. 如果我们将 Möbius 带从中间 ($=1/2$) 剪开, 会得到什么? 从 $1/3$ 处剪开呢?



例 2.9. 在 S^n 中, 对极映射等同 $\vec{x} \leftrightarrow -\vec{x}$ 之后会得到

$\mathbb{R}P^n = S^n / \leftrightarrow$, 实射影空间.

(在 n 是奇数时可定向, 偶数时不可定向)



用其他方式描述 $\mathbb{R}P^n$:

$\mathbb{R}P^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0) / \alpha$, 其中 α 表示共线, 即



$\mathbb{R}P^n = \{\text{所有 } \mathbb{R}^{n+1} \text{ 中经过原点的直线}\}.$

在 D^n 上, 对极地等同 ∂D^n (对比 2.6) 就可得到 $\mathbb{R}P^n$.

忽视北半球

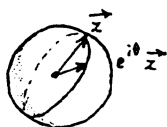


. 特别地, $\mathbb{R}P^1 \simeq S^1$.



例 2.10. 复射影空间 $\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0) / \alpha$, 其中 α 是复向量共线的等同.

其他方法: 不用 $\vec{z} \sim re^{i\theta}\vec{z}$ 等同, 我们先把 $\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0$ 限制到 $S^{2n+1} = \{\vec{z} \in \mathbb{C}^{n+1} : |\vec{z}| = 1\}$, 并且等同 $\vec{z} \sim e^{i\theta}\vec{z}$.



S^{2n+1}
 $\downarrow \pi$ 商映射.
 $\mathbb{C}P^n$

$\forall p \in \mathbb{C}P^n$

$\pi^{-1}(p) \simeq \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta < 2\pi\}.$

这就是 S^{2n+1} 在 $\mathbb{C}P^n$ 上以 S^1 为纤维的 Hopf 纤维.

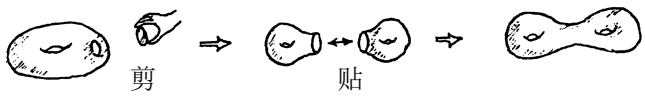
这正是特征值都相等的简谐振子的自然几何模型.

$\mathbb{C}P^1 \simeq S^2$, Riemann 球.

方法三: 手术 (又名剪贴)

例 2.11.

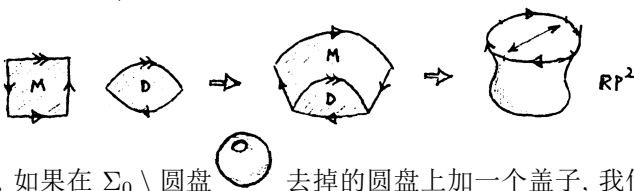
$T^2 \# T^2$ (连通和)



$\underbrace{\text{...}}_g$ 是亏格为 g 的 Riemann 面, $\Sigma_g = \underbrace{T^2 \# \dots \# T^2}_g$; $\Sigma_0 = S^2$.



例 2.12. $\partial(\text{Möbius 带}) = S^1 \xrightarrow{\text{粘}} S^1 = \partial D^2$:

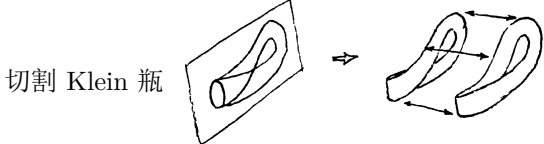


所以, 如果在 $\Sigma_0 \setminus \text{圆盘}$ 去掉的圆盘上加一个盖子, 我们得到 $S^2 = S^2 \# S^2$ (S^2 相当于运算 $\#$ 的零元), 但是对于 Möbius 带, 我们则会得到 $\mathbb{R}P^2$.

更一般地, 给 $\Sigma_0 \setminus g$ 个圆盘 黏上 g 个 Möbius 带可得 N_g (不可定向曲面). 这个曲面似乎没有约定俗成的名字.

定理 2.13 (Möbius). 任何闭曲面 $\simeq \Sigma_g$ 或 N_g 之一.

问题 2.14. 当你把两个 Möbius 带粘在一起时, 你必定会得到2.13分类中的某个曲面, 是哪一个呢? (换言之, 计算 $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$.) 在任何曲面上钻孔并放上圆盘或放上 Möbius 带会得到什么曲面? 试建立计算方法.



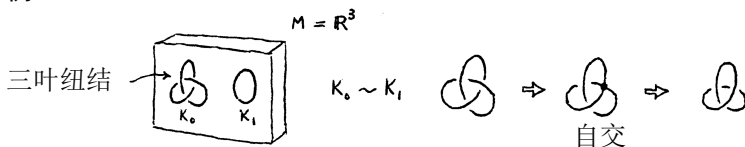
3 同伦

现在,我们为两种形变赋予姓名:一种允许自交,另一种则不.

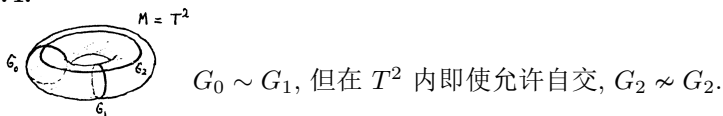
定义 3.1. 流形 M 的子流形 P_0, P_1 被称为在 M 上同伦, $P_0 \sim P_1$ 如果他们可以连续地在 M 内互相形变——通过允许自交的中间态 P_t .

侧记 3.2. 本文的上述“定义”是故意从面向数学家的形式准确定义中简化而来, 希望能于此获得感觉层面的理解吸收.

例 3.3.



例 3.4.

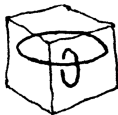
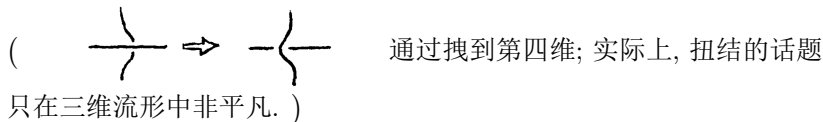


定义 3.5. 如果形变能不通过自交得到, P_0, P_1 就在 M 上同痕.

例 3.6. 在3.3中, K_0 和 K_1 在 \mathbb{R}^3 中不同痕.

评注 3.7. 同伦和同痕的概念取决于底空间 M .

在3.3中, 如果我们把 M 换成 \mathbb{R}^4 , K_0 和 K_1 就同痕了.



在3.4中, 如果 $M = \mathbb{R}^3$ , G_1 和 G_2 便同伦 (甚至同痕).

问题 3.8.



在 \mathbb{R}^3 中, 这两个曲面 Σ_2 是同伦的. 他们同痕吗?

总结 3.9.

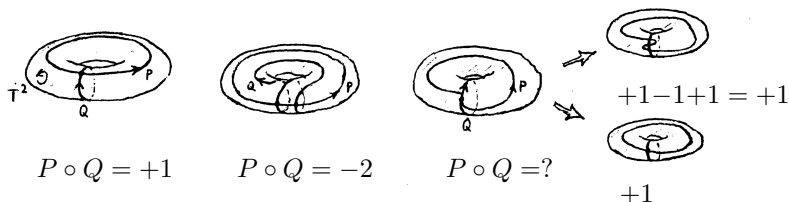
同痕 \implies 同伦 $\not\Rightarrow$ 同胚

以上箭头反向是不对的. “同痕”和“同伦”是外蕴概念 (3.7), 但“同胚”是内蕴的.

4 相交数

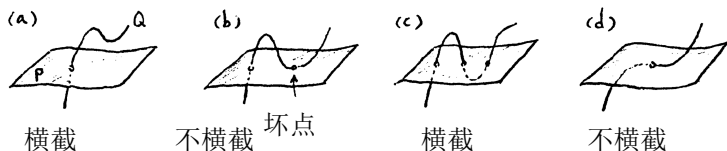
我们在这个报告中用到的所有拓扑工具都基于这样一个想法 — 几何对象的相交与否, 以及聪明地计算相交的数量.

例 4.1. 下图中有多少交点? 在计算的时候考虑方向.



定义 4.2. 若流形 M 的子流形 P, Q 维数互补 ($\dim P + \dim Q = \dim M$), 称 P, Q 是横截的如果他们呈一个非零角度相交 (也称处在一般位置).

例 4.3. 在 $M = \mathbb{R}^3$ 上,



原则 4.4. 横截的相交是“通常的”: 他们在扰动下鲁棒¹. 相反, 非横截的相交不是“通常的”: 在扰动下它们会变成横截的 (在 4.3, (b) \rightarrow (a), (d) \rightarrow (a) 或 (c)) 或消失 ((b) \rightarrow (a) 如前所述).

评注 4.5. 对一般的流形 (不一定是互补的) 也有横截的概念; 不过我们不需要.

对于 M 中合适的 P, Q , 我们期望 $\dim(P \cap Q) = \dim P + \dim Q - \dim M$, 于是在 4.2 的背景下, P 和 Q 交一个离散 (零维) 的点集.

¹原文: they are robust under perturbations.

定义 4.6. 在一个可定向流形 M 上, 令 P, Q 是两个横截的子流形. P 和 Q 的相交数是

$$P \circ Q = \sum_{x \in P \cap Q} \operatorname{sgn} x$$

其中 $\operatorname{sgn} x = +1$ 或 -1 取决于 P 和 Q 相交的方向 — 在此顺序下和 x 处 M 的定向相同与否.

如果 P, Q 不是横截的, 首先把他们“振动”到一般位置上再计算 $P \circ Q$.

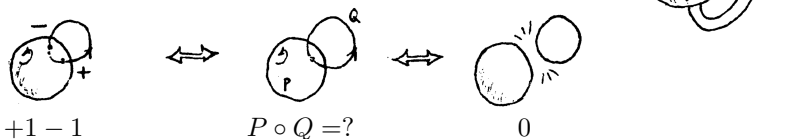
推广 4.7. 在不可定向的情况, mod2 计数 (参见下方的4.14).

事实 4.8. $P \circ Q = (-1)^{pq} Q \circ P$, 其中 $p = \dim P, q = \dim Q$.

这是显然的? 例如说 P 的定向由 u_1, \dots, u_p 给出, Q 的由 v_1, \dots, v_q 给出. 合计 P 和 Q 的定向是 $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q$, 但 Q 和 P 的定向是 $v_1, \dots, v_q, u_1, \dots, u_p$. 为了把前者调整成后者, 我们需要 pq 次对调.

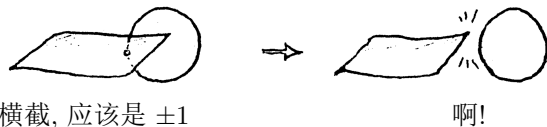
定理 4.9. 相交数是同伦不变的: 如果 $Q_0 \sim Q_1$, 那么 $P \circ Q_0 = P \circ Q_1$. 特别地, 在 4.6 里, $P \circ Q$ 不依赖我们“振动”的方式.

证明. 用 4.4, 当 Q_t 与 P 横截时, $P \circ Q_t$ 不会变. 当我们陷入不横截的瞬间, 或增加或消去一对符号相反相交点.



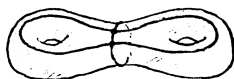
所以 $P \circ Q_t$ 依旧不变. \square

注释 4.10. 需要 P 和 Q 的闭性来保证相交不会从边界消解相消.



评注 4.11. 可能发生 $P \circ Q = 0$, 但 P 和 Q 并不在同伦意义可以“解开”.

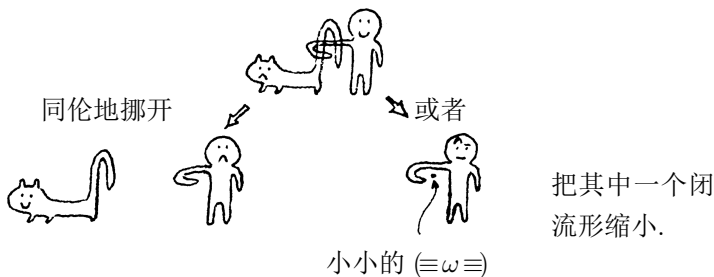
当然, 如果它们可以“解开”,
那么 $P \circ Q = 0$.



$$-1 + 1 = 0$$

定理 4.12. 在 \mathbb{R}^n 中, 闭流形总是可以“解开”的, 所以相交数是 0.

证明.



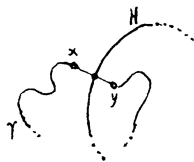
□

推论 4.13. 每个 \mathbb{R}^n 的闭超曲面 H (维数是 $n-1$) 将 \mathbb{R}^n 分成两部分.

$n=2$ 给出 *Jordan* 曲线定理. 这是不尽显然的:



证明. 否则, H 两侧两个相近的点 x, y 可以用不穿过 H 的曲线相连. 给 x 和 y 之间搭桥构成一个圈 γ . 那么 $\gamma \circ H = \pm 1$, 违背了 4.12. □



注释 4.14. 即使 H 不可定向, 我们的证明可用 mod 2 理论继续 (4.7). 4.13 表明所有 \mathbb{R}^n 的闭曲面都有两面, 于是可定向.

4.12 和 4.13 在 S^n 上也成立 ($n \geq 2$), 只需利用“缩离”法, 参见 4.12 的第二个证明.

例 4.15. $\mathbb{R}P^2$, 是不可定向的 (2.9), 不能在 \mathbb{R}^3 中不自交地实现.

将高维流形描写成漂浮在某个空间中是诱人的. 4.14说明我们必须当心. 我们需要多少扭曲的空间来令我们的描绘合法?

定理 4.16 (Whitney). 每个 n 维闭曲面可以实现为 \mathbb{R}^{2n} 的子流形.

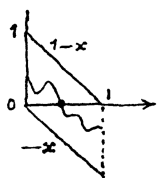
5 不动点定理

解任何一类方程 (微分方程, 整数方程, 代数方程, ...) 通过如下的套路可归结于找不动点:

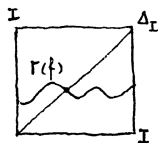
$$\text{解 } f(x) = 0 \iff \text{为 } x \mapsto x + f(x) \text{ 找不动点}$$

而不动点问题最终可被转译为相交理论.

例 5.1. 假设 f 连续且在 I 上 $-x \leq f(x) \leq 1-x$. $f(x) = 0$ 可解吗?



貌似是对的.



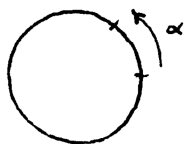
或者说, $x \mapsto x + f(x)$ 将 I 映入 I . 并且一个 $I \rightarrow I$ 的连续映射必有不动点, 因为其图像 $\Gamma(f)$ 与对角线 $\Delta_I = \{(x, x) | x \in I\} \subseteq I \times I$ 相交.

诀窍 5.2. 5.1的过程是典范的. 为了解 $f(x) = 0$:

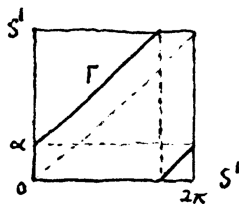
- (1) 得到 f 的一个先验估计;
- (2) 用 (1) 来决定集合上 $x \mapsto x + f(x)$ 的行为;
- (3) 使用某个不动点定理 (确定 $\Delta \cap \Gamma(f)$).

例 5.3.

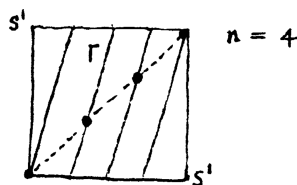
$\Gamma(S^1)$ 上角度为 $\alpha \bmod 2\pi$ 的旋转)



没有不动点



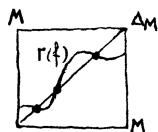
$\Gamma(z \mapsto z^n \text{ 在 } S^1 \subseteq \mathbb{C} \text{ 上})$



$n-1$ 个不动点

宣 5.4. 现在起, 我们假设 M 闭且可定向. 于是 $M \times M$ 也如是.

定义 5.5. 映射 $f: M \rightarrow M$ 的图像 $\Gamma(f)$ 与 Δ_M 横截, 则称为通常的.



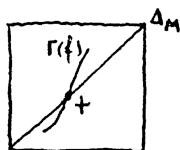
定义 5.6. 把一个通常的 f 写作坐标 $\begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$. f 的 Lefschetz 数 是

$$L(f) = \sum_{x \text{ 是 } f \text{ 的不动点}} \text{sgn det} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \delta_j^i \right)_x.$$

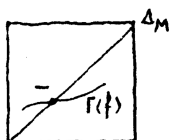
例 5.7. $L \left(\begin{matrix} S^1 \rightarrow S^1 \\ z \mapsto z^n \end{matrix} \right) = n - 1.$

定理 5.8 (Lefschetz). 如果 f 是横截的, 那么 $L(f) = \Delta_M \circ \Gamma(f).$

证明. 在 1 维



这对应于 $\frac{df}{dx} - 1 > 0$.



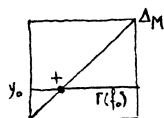
这对应于 $\frac{df}{dx} - 1 < 0$.

□

推论 5.9. 如果 $f : M \rightarrow M$ 可以形变成常数映射 $f_0 : M \rightarrow y_0$, 那么 $L(f) = (-1)^{(\dim M)^2}$ 那么 f 有不动点.

证明. $\Gamma(f) \sim \Gamma(f_0)$, 所以根据4.9, 5.8, 4.8,

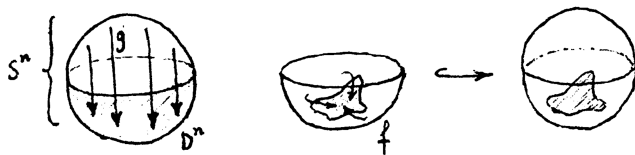
$$L(f) = \Delta_M \circ \Gamma(f) = (-1)^{\dim M^2} \underbrace{\Gamma(f) \circ \Delta_M}_{+1}.$$



□

推论 5.10 (Brouwer). 每一个连续映射 $f : D^n \rightarrow D^n$ 都有不动点.

证明. 把 D^n 看做 S^n 的南半球并考虑南北半球的对叠:



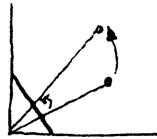
复合映射 $S^n \xrightarrow{g} D^n \xrightarrow{f} D^n \xrightarrow{\text{包含}} S^n$ 是可形变成一个常映射的 (例如, 把 $f(D^n)$ 缩到南极点). 根据5.9, 有坐落在南半球的不动点, 同样也被 f 固定住. □

警告 5.11. 我们看到, D^n 包含了所有边界点 (2.1), 5.10对开球并不对.

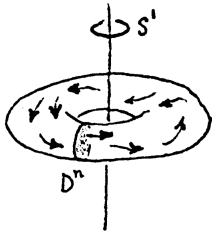


$$\dim 1 : x \mapsto \frac{x+1}{2}.$$

例 5.12 (Perron-Frobenius). 一个方阵如果所有位置都是正数一定有一个每一位都是正数的特征向量. 因为这诱导了一个第一象限的映射, 于是投射到 $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \text{每个 } x_k \geq 0, \sum x_k = 1\}$, 这是同胚于 D^{n-1} 的.



例 5.13 (Poincaré 回归映射).



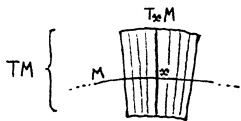
任何 $D^n \times S^1$ 上的流 (当 $n = 2$, 是实心轮胎) 如果每处皆有围绕着 S^1 呈非零角度的速度, 则必定具有一个周期轨道.

6 向量场的平衡点

向量场和他们的平衡点 (停滞的点) 是流体力学的基本知识. 我们要转译成相交理论来研究他们. 本节和第5节平行.

回忆 6.1. 流形 M 上的向量丛是流形 $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$, 其中 $T_x M$ 是 M 在 x 处的切空间, 带着局部乘积拓扑. (不必害怕此等术语.)

图片 6.2.



局部乘积 (会画作正交于 M) 未必是整体的. 一个 TM 的点是点对 (x, \mathbf{v}) , 其中 $x \in M, \mathbf{v} \in T_x M$.

$$\dim TM = 2 \dim M.$$

评注 6.3. 一个 M 上的向量场 \mathbf{v} 可以看成是一个映射

$$\mathbf{v}: \begin{matrix} M \longrightarrow TM \\ x \longmapsto (x, \mathbf{v}(x)). \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} \text{Diagram of } \Gamma(\mathbf{v}) \text{ and } \Gamma(0) \text{ intersecting in } TM \\ \mathbf{v} = 0 \end{matrix} \right\} TM$$

其图像 $\Gamma(\mathbf{v})$ 与零截面 $\Gamma(0) \simeq M$ 交在那些 $\mathbf{v} = 0$ 的点, 即平衡点.

宣 6.4. 现在起我们假设 M 闭且可定向. 此时 TM 也可定向 (但是在“垂直方向”敞开 (参见6.2)).




定义 6.5. 一个向量场 \mathbf{v} 如果其图像 $\Gamma(v)$ 与 $\Gamma(0)$ 横截则称为通常的.




定义 6.6. 把一个通常的 \mathbf{v} 写成坐标作 $\begin{pmatrix} v_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ v_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$. \mathbf{v} 在平

衡点 x 的指数是

$$\text{index}_{\mathbf{v}}(x) = \text{sgn} \det \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_x.$$

例 6.7.

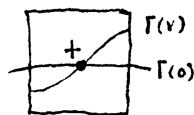
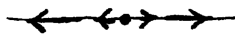
 源点: 指数 = +1
  汇点: 指数 = +1
  鞍点: 指数 = -1

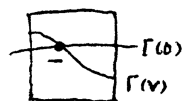

 中心点:
 不是通常的, 振动后会变成  或  指数皆为 1.

定理 6.8. 如果 \mathbf{v} 是通常的向量场, 那么

$$\sum_{x \text{ 是 } \mathbf{v} \text{ 的平衡点}} \text{index}_{\mathbf{v}}(x) = \Gamma(0) \circ \Gamma(\mathbf{v}).$$

证明. 维数是 1 时.


 这对应到 , 即 $\frac{dv}{dx} > 0$.


 这对应到 , 即 $\frac{dv}{dx} < 0$.

□

推论 6.9. $\sum_{x \text{ 是 } \mathbf{v} \text{ 的平衡点}} \text{index}_{\mathbf{v}}(x)$ 与 \mathbf{v} 无关, 只和 M 有关.

证明. 运用4.9: 任何两个向量场 \mathbf{v}, \mathbf{w} , 可以通过 $(1-t)\mathbf{v}(x) + t\mathbf{w}(x)$ 互相形变, 所以 $\Gamma(\mathbf{v}) \sim \Gamma(\mathbf{w})$. \square

推论 6.10. 如果 $\dim M =$ 奇数, 那么 $\sum_{x \text{ 是 } \mathbf{v} \text{ 的平衡点}} \text{index}_{\mathbf{v}}(x) = 0$.

证明. 根据4.8, 因为 $\Gamma(\mathbf{v}) \sim \Gamma(0)$,

$$(-1)^{(\dim M)^2} \Gamma(\mathbf{v}) \circ \Gamma(0) = \Gamma(0) \circ \Gamma(\mathbf{v}) = \Gamma(\mathbf{v}) \circ \Gamma(0). \quad \square$$

定义 6.11. 已知一个 n 维流形 M , 将其三角剖分成 β_0 个顶点, β_1 个边, β_2 个面, ..., β_n 个 n 维单纯形. (在物理应用中, 流形都是可三角剖分的.) M 的 Euler 示性数 是

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \beta_k.$$

例 6.12.

$\chi(S^1) = \chi(\triangle) = 3 - 3 = 0$. 一般地, $\chi(S^{\text{奇}}) = 0$.

$\chi(S^2) = \chi(\diamond) = 4 - 6 + 4 = 2$. 一般地, $\chi(S^{\text{偶}}) = 2$.

$\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$, $\chi(T^n) = 0$, $\chi(\mathbb{C}P^n) = n + 1$.

定理 6.13 (Hopf). 对于流形 M 上通常的向量场 \mathbf{v}

$$\sum_{x \text{ 是 } \mathbf{v} \text{ 的平衡点}} \text{index}_{\mathbf{v}}(x) = \chi(M)$$

特别地, $\chi(M)$ 是与三角剖分是无关的, 且关于平衡点的求和与 \mathbf{v} 无关.

证明. 在维数 2 的情况. 三角剖分 M , 并且上面搭建如下向量场: 在每个顶点上放置源点, 每条边中点上放置鞍点, 每个面中点放置一个汇点. 根据6.7, 源点和汇点对指数的贡献是 +1, 鞍点是 -1. \square



问题 6.14. 通过检查高度函数的梯度流, 寻找 $\chi(\Sigma_g)$ (参见6.12).

推论 6.15. 对于通常的 \mathbf{v} , \mathbf{v} 的平衡点的数目 $\geq |\chi(M)|$; 例如 $S^{\text{偶}}$ 不能有处处非零的向量场.



问题 6.16. 在 $S^{\text{奇}}$ 上构造一个处处非零的向量场.

问题 6.17. S^4 上能否就有一个没有奇点的 Minkowski 度量?

推论 6.18. 对于奇数维, 闭, 可定向流形 M , $\chi(M) = 0$.

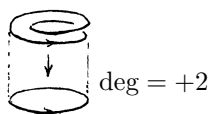
证明. 结合 6.10 和 6.13.

□

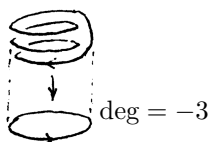
7 映射度

我们一度研究了解和平衡点的存在性 (第5节和第6节), 下一个问题是数他们的数量.

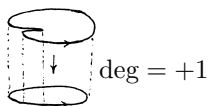
例 7.1.



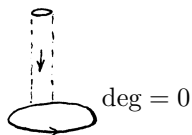
映射“绕两圈”



映射“反绕三圈”



“本质上”绕一圈



映射度 = 计符号的原像的数目.

定义 7.2. 令 $f: M \rightarrow N$ 是一个同维数闭可定向流形之间的映射. 假设 $y_0 \in N$ 是 f 的一个正则值, 即在每个原像处 $\det(\partial f / \partial x) \neq 0$. f 的映射度是

$$\deg f = \sum_{x \in f^{-1}(y_0)} \operatorname{sgn} \det \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_x$$

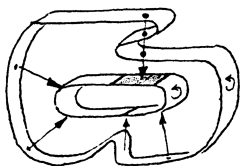
评注 7.3. Sard 有一个定理确保对每一个光滑的 f , 体积 $\{f \text{ 的正则值} \} = \text{体积} N$; 换言之, 如果我们随意地在 N 上挑选值, 挑到正则值的概率是 1. 所以有很多正则值可供选择.

注意到根据7.2的话, 一个 f 值域外的点自动 (用数学家的话说, “无中生有地”²⁾) 是正则值.

定理 7.4. \deg 与正则值 y_0 的选择无关, 且是同伦不变的.

证明. 记 f_0 为常映射 $M \rightarrow y_0$, $\deg f$ 无非是 $\Gamma(f_0) \circ \Gamma(f)$. 根据4.9, 断言成立. \square

例 7.5.



在 \square 上有三个原像, 符号分别是 $+1, -1, +1$.

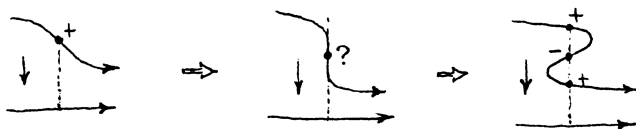
在 \nearrow 上都不正则.

(按, 面积(\nearrow) = 0 如同 Sard 所预言的.)

其他地方有一个符号是 $+1$ 的原像.

所以 $\deg = +1$.

例 7.6.



例 7.7. S^n 上的对极映射保持定向当且仅当 $n =$ 奇数. 所以 $\det(\text{对极映射}) = (-1)^{n+1}$. 根据7.4和6.16, 对极映射可形变称恒等映射当且仅当 $n =$ 奇数.

推广 7.8. 在不可定向的情况, mod2 计数 (参见4.7).

推论 7.9 (Gauss). 每个多项式 $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, $n > 0$ 都在 \mathbb{C} 上有根.

证明. 因为 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$, f 可延拓成一个 $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{C}P^1 \simeq S^2$ 到 S^2 的映射. 现在, 将 f 形变成 $g(z) = z^n$ 通过 $tg(z) + (1-t)f(z)$. 根据7.4, $\deg f = \deg g = n$ (所有非 0 非 ∞ 值都正则), 所以 0 必有原像. \square

²原文: ‘vacuously’, as mathematicians say.

评注 7.10. 所以, 多项式代数次数 = 映射度.

注释 7.11. 在7.9的证明中, 我们为什么不将 f 通过 $th(z) + (1-t)f(z)$ 形变成任意一个 $h(z)$ 呢? 因为如果 h 和 f 的首项系数不同, 形变过程中会导致 ∞ 处的不连续.

mod 2 计数 (7.8) 仅可探测 $n \equiv 0 \pmod 2$, 即 $n =$ 奇数的情形.

8 Gauss 映射

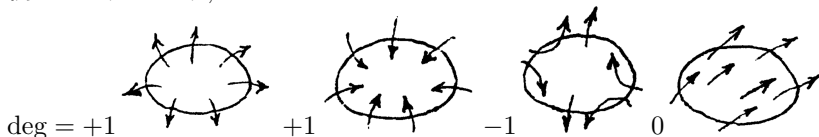
我们最后展示映射度理论在曲面的微分几何中的运用.

定义 8.1. 令 \mathbf{v} 是一个定义在 \mathbb{R}^n 某个超曲面 H 附近的非零向量场, 记

$$G = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} : H \longrightarrow S^{n-1} \quad (\text{Gauss 映射})$$

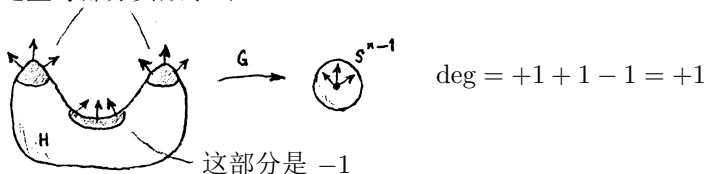
定义 \mathbf{v} 在 H 上的度 $\deg_H \mathbf{v} = \deg G$.

例 8.2. 在 \mathbb{R}^2 中,



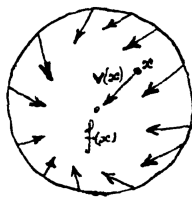
例 8.3. 在 \mathbb{R}^3 中, $\mathbf{v} = H$ 的外法向量,

这里每部分贡献了 +1



定理 8.4 (再度 Brouwer(见5.10)). 每一个 $f : D^n \rightarrow D^n$ 的连续映射都有不动点.

证明. 在 D^n 上搭建一个向量场 \mathbf{v} , 使得 $\mathbf{v}(x)$ 是 x 到 $f(x)$ 的连线. 没有不动点意味着 $\mathbf{v} \neq 0$ 处处成立. 在 ∂D^n 上, \mathbf{v} 处处指向内部, 所以 $\deg_{\partial D^n} \mathbf{v} \neq 0$ (其实 $= (-1)^n$, 根据 7.7). 现在, 将 ∂D^n 缩小成一个小的 $n-1$ 维球 $S \subseteq D^n$. 如果 S 足够小, \mathbf{v} 在 S 上几近平行, 所以 $\deg_S \mathbf{v} = 0$. 违背了同伦不变性 (7.4). \square



事实 8.5. S^{n-1} 的标准体积元可写成

$$\Omega = \sum_{k=1}^n (-1)^k x_k dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_k} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

(体积(S^{n-1}) = $\int_{S^{n-1}} \Omega = 2\sqrt{\pi}^n / \Gamma(n/2)$, 如果硬要知道的话.)

定理 8.6. 如果 \mathbf{v} 是 \mathbb{R}^n 某个超平面 H 的单位外法向量, 那么

$$\deg_H \mathbf{v} = \frac{1}{\text{体积}(S^{n-1})} \int_H K d\sigma,$$

其中 $K = H$ 的 Gauss 曲率 (主曲率的乘积), $d\sigma = H$ 上诱导自 \mathbb{R}^n 欧式度量的 $(n-1)$ 维的体积元.



证明.

$$\deg_H \mathbf{v} = \frac{\deg G}{\text{体}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} \Omega = \frac{1}{\text{体}(S^{n-1})} \int_H G^* \Omega = \frac{1}{\text{体}(S^{n-1})} \int_H K d\sigma;$$

第二个等号是根据变元替换的 Jacobi 公式. ($\int_{S^{n-1}} \Omega = \int_H G^* \Omega$ 如果 G 是 1 对 1 的, 但是现在 G 是 $\deg G$ 对 1 的). \square

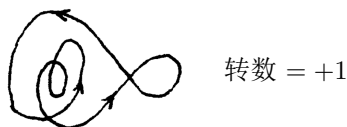
回忆 8.7. 对于被

$$\begin{pmatrix} x_1(s_1, \dots, s_{n-1}) \\ \vdots \\ x_n(s_2, \dots, s_n) \end{pmatrix}$$

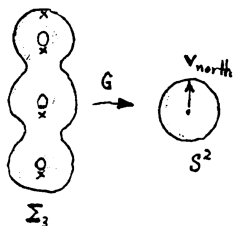
参数化的 H , 有

$$d\sigma = \sqrt{|\det(g_{ij})|} ds_1 \wedge \dots \wedge ds_{n-1}, \quad g_{ij} = \frac{\partial}{\partial s_i} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial s_j} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

例 8.8. 对于 \mathbb{R}^2 中的回路 γ , $\deg_\gamma \mathbf{v} = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma K ds = \gamma$ 的旋转数.



推论 8.9 (Gauss-Bonnet). $\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_g} K d\sigma = \chi(\Sigma_g)$



证明. 根据同伦不变性 (7.4), 可将 Σ_g 形变到图示位置, 这不会改变 $\deg G$, 所以 8.6 的积分也不变. 而 $\mathbf{v}_{\text{北}}$ 是 G 一个正则值, 其原像是极大值点和 g 个“朝上”的鞍点. 根据 8.3, 他们对 $\deg G$ 的贡献分别是 $+1, -1$. 所以根据 8.6 和 6.12,

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_g} K d\sigma = 1 - g = \frac{\chi(\Sigma_g)}{2} \quad \square$$

评注 8.10. 我们对 $\Sigma_g \subseteq \mathbb{R}^3$ 得到了 8.9, 但是可以证明, 即使在 Σ_g 的度量并非诱导自嵌入欧式空间的情形也是正确的.

推论 8.11. 亏格为 g 的 Σ_g (或 $g = 0, g = 1$) 不能有一个处处正曲率 (或处处非零, 取负) 的度量.

9 推荐阅读

一本和本报告同等水平的好书是 [4]. [3] 则是系统的教材. [5] 是“半流行”风格的并且很有趣. 想要知道更多拓扑的话题, [7] 值得推荐; [2] 则更权威且覆盖更多. 对于流体力学家, 这四天报告的一个后续话题

是偏微分方程中的无穷维的拓扑方法; [8] 将其解释得很好. 应用型的拓扑不变量计算需要代数系统; 一本精悍的小书是 [6]. 除此之外, 每一个几何与拓扑的研究生似乎都读过 [1].

感谢

感谢 K. Moffatt, H. Aref, D. Mackay, R. Ricca, 和 E. Spiegel 在剑桥的热情好客以及热切反馈

参考文献

1. Bott, R. & Tu, L. (1982) *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer.
2. Dubrovin, B.A., Fomenko, A.T. & Novikov, S.P. (1984-1990) *Modern Geometry: Methods and Applications*. Volumes I-III, Springer.
3. Guillemin, V. & Pollack, A. (1974) *Differential Topology*. Prentice-Hall.
4. Milnor, J. (1965) *Topology from the Differentiable Viewpoint*. University Press Virginia.
5. Prasolov, V.V. (1994) *Intuitive Topology*. American Mathematical Society.
6. Sato, H. (1999) *Algebraic Topology: An Intuitive Approach*. American Mathematical Society.
7. Schwarz, A.S. (1994) *Topology for Physicists*. Springer.
8. Smoller, J. (1994) *Shock Waves and Reaction-Diffusion equations*. Springer.

Index

- n 维方块, 3
- n 维球, 2
- n 维轮胎面, 3
- $n - 1$ 维球面, 2
- Euler 示性数, 15
- Gauss 映射, 18
- Hopf 纤维, 4
- Klein 瓶, 3
- Lefschetz 数, 11
- Möbius 带, 3
- Riemann 球, 4
- 亏格为 g 的 Riemann 面, 5
- 单位区间, 2
- 同伦, 6
- 同痕, 6
- 同胚, 3
- 图像, 10
- 处在一般位置, 7
- 复射影空间, 4
- 实射影空间, 4
- 对角线, 10
- 平衡点, 13
- 指数, 14
- 映射度, 16
- 横截, 7
- 正则值, 16
- 边界, 3
- 连通和, 5
- 通常的, 11, 14
- 零截面, 13