КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Кафедра теорії та технологій програмування

ЗВІТ

з дисципліни «Екологічні економічні процеси та їх моделювання»

до лабораторної роботи №4

варіант 2

Виконала:
студентка групи МІ-3
Баклан Аліса

Київ — 2023

Постановка задачі

2.1. Ріст популяції описується таким рівнянням:

$$\frac{dN}{dt}=\beta\frac{N^2}{1+N}-\delta N-pN^2$$

Визначити величини верхньої та нижньої межі чисельності, якщо відомо, що коефіцієнт народжуваності дорівнює 36, смертності – 15, а внутрішньовидової конкуренції – 3. Побудувати графіки та зробити висновки щодо динаміки чисельності популяцій для початкових значень, які:

а) менші за половину нижньої критичної межі;

б) більші за половину нижньої критичної межі;

в) відповідають нижній критичній межі;

г) лежать в межах між нижньою та верхньою межею (менше та більше від половини різниці);

д) відповідають верхній критичній межі;

е) перевищують верхню межу.

2.2. Припустимо, що кількість кролів N(t) (t виражається в місяцях) у заповіднику задовольняє диференціальне рівняння

$$\dot{N}=0.0004\,N^2-0.06\,N$$

Нехай спочатку в заповіднику нараховується 200 кролів. Розв’язати це диференціальне рівняння та визначити, що станеться з популяцією в майбутньому. Що станеться з популяцією кролів, якщо початкова чисельність тварин становитиме 100 особин? Визначити чисельність популяції в обох випадках у момент часу t = 20. Побудувати графіки чисельності популяцій для двох випадків. Визначити тип популяції.

2.3. Для моделі Лоткі-Вольтерра побудувати траєкторії динаміки кожної популяції (на одному рисунку), а також фазову траєкторію. Знайти та відмітити на фазовому портреті точки спокою.

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt}=(\varepsilon_1-\gamma_1 N_2-\gamma_{11} N_1) N_1 \\ \frac{dN_2}{dt}=(-\varepsilon_2+\gamma_2 N_1) N_2 \end{cases}$$

Виконання роботи

2.1. З умови маємо, що β=36, δ=15, p=3.

Щоб знайти верхню і нижню межу популяції, розв'яжемо рівняння:

$$\frac{dN}{dt}=\beta \frac{N^2}{1+N}-\delta N-pN^2=0$$

$$\beta \frac{N^2}{1+N}-\delta N-pN^2=0$$

$$\beta N^2-(\delta N+pN^2)(1+N)=0$$

$$\beta N^2-\delta N-\delta N^2-pN^2-pN^3=0$$

$$\beta N-\delta-\delta N-pN-pN^2=0$$

$$pN^2+(p+\delta-\beta) N+\delta=0$$

$$3 N^2-18 N+15=0$$

$$N_L=1 \quad N_U=5$$

Таким чином нижня межа N_L=1, а верхня межа N_U=5.

Для побудови графіка розв'яжемо диференціальне рівняння.

$$\frac{dN}{dt}=\beta \frac{N^2}{1+N}-\delta N-pN^2$$

$$dt=\frac{N+1}{\beta N^2-\delta N-\delta N^2-pN^2-pN^3} dN$$

$$\int \frac{N+1}{\beta N^2-\delta N-\delta N^2-pN^2-pN^3} dN=\int dt$$

$$\int \frac{N+1}{-15 N+18 N^2-3 N^3} dN=\int dt$$

Скористаємося програмою Maple для розв'язку.

$$> VAR1 := \frac{(N+1)}{-15\,N+18\,N^2-3\,N^3}$$

$$VAR1 := \frac{1+N}{-3\,N^3+18\,N^2-15\,N}$$

$$> INT1 := int(VAR1, N)$$

$$INT1 := -\frac{\ln(N)}{15}+\frac{\ln(N-1)}{6}-\frac{\ln(N-5)}{10}$$

$$> EQ := -\frac{\ln(N)}{15}+\frac{\ln(N-1)}{6}-\frac{\ln(N-5)}{10}=t+C$$

$$EQ := -\frac{\ln(N)}{15}+\frac{\ln(N-1)}{6}-\frac{\ln(N-5)}{10}=t+C$$

Знайдемо константу C та побудуємо графіки для різних початкових значень:

а) менші за половину нижньої критичної межі;

Оберемо N=0.3

$$EQ1 := subs(N=0.3, t=0, EQ);$$

$$EQ1 := -\frac{\ln(0.3)}{15}+\frac{\ln(|-0.7|)}{6}-\frac{\ln(|-4.7|)}{10}=C$$

$$C1 := solve(EQ1, C)$$

$$C1 := -0.1339372213$$

б) більші за половину нижньої критичної межі;

Оберемо N=0.7

$$EQ2 := subs(N=0.7, t=0, EQ);$$

$$EQ2 := -\frac{\ln(0.7)}{15}+\frac{\ln(|-0.3|)}{6}-\frac{\ln(|-4.3|)}{10}=C$$

$$C2 := solve(EQ2, C);$$

$$C2 := -0.3227453067$$

в) відповідають нижній критичній межі;

$$EQ3 := N=1;$$

$$EQ3 := N=1$$

г) лежать в межах між нижньою та верхньою межею

1) менше від половини різниці

Оберемо N=2

$EQ4 := subs(N = 2, t = 0, EQ);$

$$EQ4 := -\frac{\ln(2)}{15} + \frac{\ln(|1|)}{6} - \frac{\ln(|-3|)}{10} = C$$

$C4 := evalf(solve(EQ4, C));$

$$C4 := -0.1560710409$$

2) більше від половини різниці

Оберемо N=4

$EQ5 := subs(N = 4, t = 0, EQ);$

$$EQ5 := -\frac{\ln(4)}{15} + \frac{\ln(|3|)}{6} - \frac{\ln(|-1|)}{10} = C$$

$C5 := evalf(solve(EQ5, C));$

$$C5 := 0.09068242414$$

д) відповідають верхній критичній межі;

$EQ6 := N = 5;$

$$EQ6 := N = 5$$

е) перевищують верхню межу.

Оберемо N=7

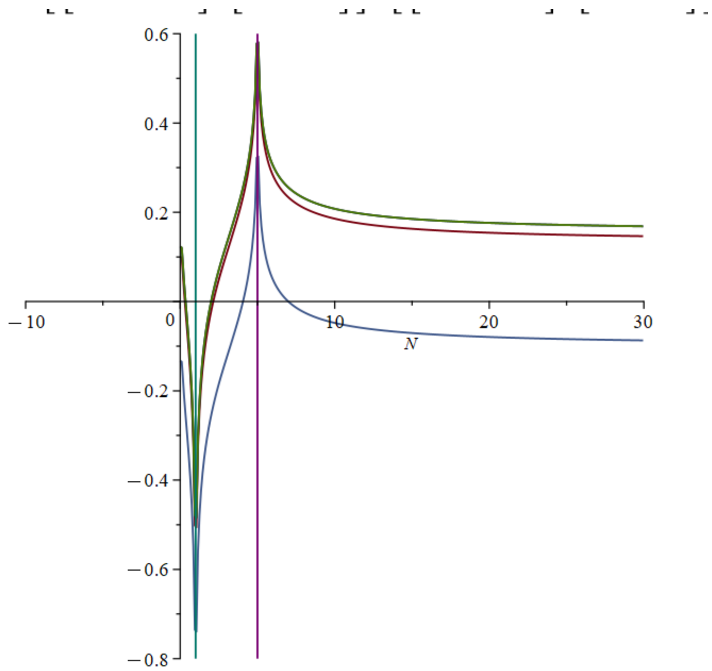
$EQ7 := subs(N = 7, t = 0, EQ);$

$$EQ7 := -\frac{\ln(7)}{15} + \frac{\ln(|6|)}{6} - \frac{\ln(|2|)}{10} = C$$

$C7 := evalf(solve(EQ7, C));$

$$C7 := 0.09958451684$$

Побудуємо графік:



2.2. Для розв'язку диференціального рівняння знову ж таки використаємо програму Maple.

$$\dot{N} = 0.0004\,N^2 - 0.06\,N$$

> $ODE := diff(N(t), t) = 0.0004\,N^2(t) - 0.06\,N(t)$

$$ODE := \frac{d}{dt}\,N(t) = 0.0004\,N(t)^2 - 0.06\,N(t)$$

> $dsolve(\{ODE, N(0) = 100\}, N(t))$

$$N(t) = \frac{300}{2 + e^{\frac{3t}{50}}}$$

> $dsolve(\{ODE, N(0) = 200\}, N(t))$

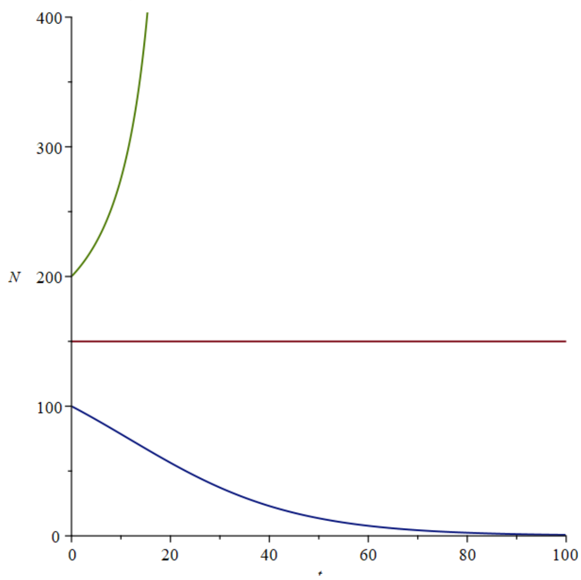
$$N(t) = -\frac{600}{e^{\frac{3t}{50}} - 4}$$

> $solve(0.0004\,N^2 - 0.06\,N = 0)$

$$0.,\ 150.$$

Будуємо графік:

> $plot\left(\left\{\frac{300}{2 + e^{\frac{3t}{50}}}, -\frac{600}{e^{\frac{3t}{50}} - 4}, 150\right\}, t = 0..100, N = 0..400\right)$



Для кожного випадку знаходимо значення в t=20:

$t := 20$

$$t := 20$$

$$evalf\left(\frac{300}{2+e^{\frac{3t}{50}}}\right)$$

$$56.38973811$$

$$evalf\left(-\frac{600}{e^{\frac{3t}{50}}-4}\right)$$

$$882.5046840$$

Тип популяції: з найменшим критичним рівнем чисельності. Маємо так звану j -криву. З рисунка видно, що популяція або вимирає, або необмежено зростає.

2.3

Маємо модель Лоткі-Вольтерра:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2 - \gamma_{11} N_1) N_1 \\ \dfrac{dN_2}{dt} = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1) N_2 \end{cases}$$

Виберемо константи:

> $ep1 := 0.1;$

$$ep1 := 0.1 \quad (1)$$

> $ep2 := 0.4;$

$$ep2 := 0.4 \quad (2)$$

> $gam11 := 0.0025$

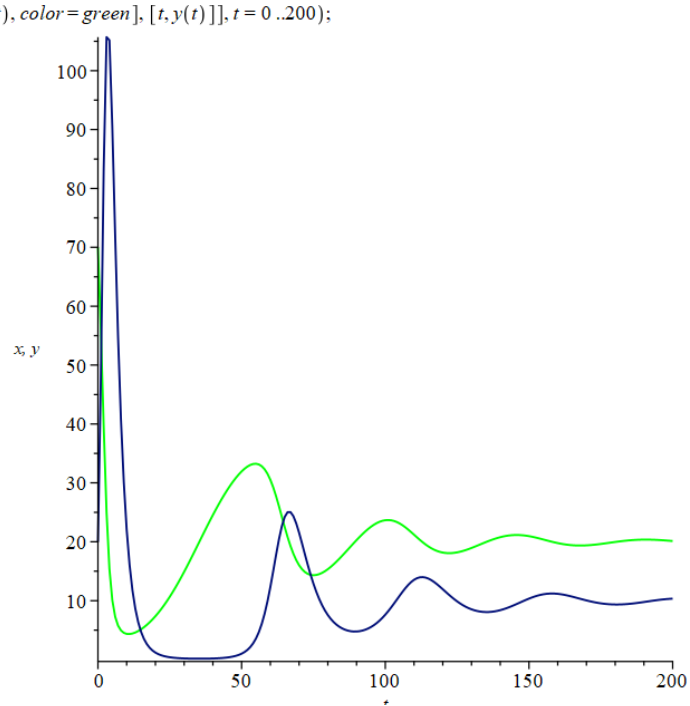
$$gam11 := 0.0025 \quad (3)$$

> $gam1 := 0.005$

$F := dsolve(\{diff(x(t), t) = evalf((ep1 - gam1 \cdot y(t) - gam11 \cdot x(t))x(t)),\ diff(y(t), t) = evalf((-ep2 + gam2 \cdot x(t))y(t)),\ x(0) = evalf(N1), y(0) = evalf(N2)\}, \{x(t), y(t)\}, numeric, method = rkf45)$

$F :=$ **proc**(x_rkf45) ... **end proc**

$plots[odeplot](F, [[t, x(t), color = green], [t, y(t)]], t = 0..200);$



Знайдемо стаціонарні точки і побудуємо фазовий портрет.

> $solve(\{evalf((ep1 - gam1 \cdot y(t) - gam11 \cdot x(t))x(t)) = 0, evalf((-ep2 + gam2 \cdot x(t))y(t)) = 0\}, \{x(t), y(t)\})$

$\{x(t) = 0., y(t) = 0.\}, \{x(t) = 40., y(t) = 0.\}, \{x(t) = 20., y(t) = 10.\}$

> $with(DEtools):$

> $DPLOT := DEplot([diff(x(t), t) = evalf((ep1 - gam1 \cdot y(t) - gam11 \cdot x(t))x(t)), \quad diff(y(t), t) = evalf((-ep2 + gam2 \cdot x(t))y(t))], [x(t), y(t)], t = -10..10, [[x(0) = 40, y(0) = 70], [x(0) = 100, y(0) = 110], [x(0) = 150, y(0) = 200]], x = 0..350, y = 0..300)$