КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра теорії та технологій програмування

ЗВІТ

з дисципліни «Екологічні економічні процеси та їх моделювання»

до лабораторної роботи №5

варіант 2

Виконала:
студентка групи МІ-3
Баклан Аліса

Київ — 2023

Постановка задачі

Розглядається динамічна трьохгалузева модель еколого-економічного балансу(промисловість, сільське господарство, очисні споруди) з наступними параметрами:

$$A_{11}=\begin{pmatrix}0,2 & 0,3\\ 0,3 & 0,4\end{pmatrix} \quad A_{12}=\begin{pmatrix}0\\ 0,2\end{pmatrix} \quad A_{21}=\begin{pmatrix}0,5 & 0,2\end{pmatrix} \quad A_{22}=0$$

$$B_1=\begin{pmatrix}0,8 & 0,3\\ 1,0 & 0,9\end{pmatrix} \quad B_2=\begin{pmatrix}0,3\\ 0\end{pmatrix} \quad x_1(0)=\begin{pmatrix}750\\ 500\end{pmatrix} \quad c_1(t)=\begin{pmatrix}600\\ 400\end{pmatrix}e^{0,1t} \quad C_2=80$$

Графічно дослідити динаміку **$x_1(t)$, $x_2(t)$**. Також у фазовому просторі **$x_1(t)$** зобразити траєкторію з технологічним темпом зростання, траєкторію замкненої системи та загальну траєкторію системи.

Виконання роботи

Запишемо дані з умовив середовище Maple:

```
> A11 := Matrix([[0.2, 0.3], [0.3, 0.4]])
```
$$A11 := \begin{bmatrix}0.2 & 0.3\\ 0.3 & 0.4\end{bmatrix}$$
```
> A12 := Matrix([[0], [0.2]])
```
$$A12 := \begin{bmatrix}0\\ 0.2\end{bmatrix}$$
```
> A21 := Matrix([[0.5, 0.2]])
```
$$A21 := \begin{bmatrix}0.5 & 0.2\end{bmatrix}$$
```
> A22 := Matrix([0.5])
```
$$A22 := \begin{bmatrix}0.5\end{bmatrix}$$
```
> B1 := Matrix([[0.8, 0.3], [1.0, 0.9]])
```
$$B1 := \begin{bmatrix}0.8 & 0.3\\ 1.0 & 0.9\end{bmatrix}$$
```
> B2 := Matrix([[0.3], [0]])
```
$$B2 := \begin{bmatrix}0.3\\ 0\end{bmatrix}$$
```
> x10 := Matrix([[750], [500]])
```
$$x10 := \begin{bmatrix}750\\ 500\end{bmatrix}$$
```
> y10 := Matrix([[600], [400]])
```
$$y10 := \begin{bmatrix}600\\ 400\end{bmatrix}$$
```
> tau := 0.1
```
$$\tau := 0.1$$
```
> y1 := y10·exp(tau·t)
```
$$y1 := \begin{bmatrix}600\,e^{0.1\,t}\\ 400\,e^{0.1\,t}\end{bmatrix}$$
```
> y2 := 80
```
$$y2 := 80$$

Порахуємо допоміжні матриці:

> $E1 := Matrix(2, shape = identity)$

$$E1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> $E2 := Matrix(1, shape = identity)$

$$E2 := \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

> $with(LinearAlgebra):$

> $Inv2 := MatrixInverse(E2 - A22)$

$$Inv2 := \begin{bmatrix} 2. \end{bmatrix}$$

> $y := y1 - Multiply(A12, Inv2) \cdot y2$

$$y := \begin{bmatrix} 600\, e^{0.1\, t} \\ 400\, e^{0.1\, t} - 32. \end{bmatrix}$$

> $A1 := Add(A11, Multiply(A12, Multiply(Inv2, A21)))$

$$A1 := \begin{bmatrix} 0.200000000000000 & 0.300000000000000 \\ 0.500000000000000 & 0.480000000000000 \end{bmatrix}$$

> $A2 := Add(A22, Multiply(A21, Multiply(MatrixInverse(E1 - A11), A12)))$

$$A2 := \begin{bmatrix} 0.658974358974359 \end{bmatrix}$$

> $B := B1 + Multiply(B2, Multiply(Inv2, A21))$

$$B := \begin{bmatrix} 1.10000000000000 & 0.420000000000000 \\ 1. & 0.900000000000000 \end{bmatrix}$$

> $Bnew := B^{-1}$

$$Bnew := \begin{bmatrix} 1.57894736842105 & -0.736842105263158 \\ -1.75438596491228 & 1.92982456140351 \end{bmatrix}$$

> $Bnew[2, 1] + Bnew[2, 2]$

$$0.175438596491228$$

> $EA := E1 - A1$

$$EA := \begin{bmatrix} 0.800000000000000 & -0.300000000000000 \\ -0.500000000000000 & 0.520000000000000 \end{bmatrix}$$

Вводимо диференціальні рівняння, розв’язуємо повну систему за вказаних початкових умов.

> $ode1 := diff(x11(t), t) = Bnew[1, 1] \cdot (EA[1, 1] \cdot x11(t) + EA[1, 2] \cdot x12(t) - (600 \cdot \exp(0.1 \cdot t))) + Bnew[1, 2] \cdot (EA[2, 1] \cdot x11(t) + EA[2, 2] \cdot x12(t) - (400 \cdot \exp(0.1 \cdot t) - 32))$

$$ode1 := \frac{d}{dt}\, x11(t) = 1.63157894736842\, x11(t) - 0.856842105263158\, x12(t) - 652.631578947368\, e^{0.1\, t} - 23.5789473684211$$

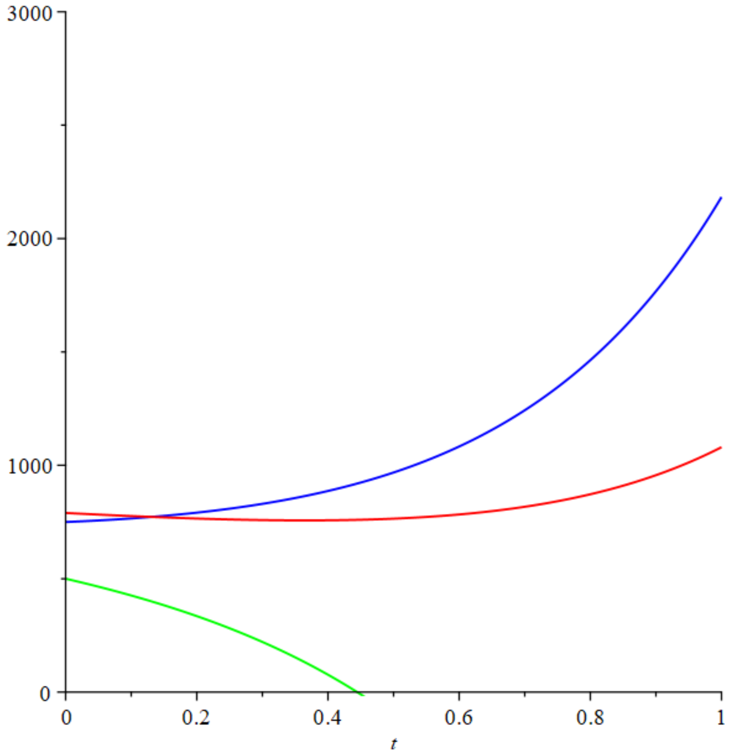
> $ode2 := diff(x12(t), t) = Bnew[2, 1] \cdot (EA[1, 1] \cdot x11(t) + EA[1, 2] \cdot x12(t) - (600 \cdot \exp(0.1 \cdot t))) + Bnew[2, 2] \cdot (EA[2, 1] \cdot x11(t) + EA[2, 2] \cdot x12(t) - (400 \cdot \exp(0.1 \cdot t) - 32))$

$$ode2 := \frac{d}{dt}\, x12(t) = -2.36842105263158\, x11(t) + 1.52982456140351\, x12(t) + 280.701754385965\, e^{0.1\, t} + 61.7543859649123$$

> $F := dsolve(\{ode1, ode2, x11(0) = 750, x12(0) = 500\}, \{x11(t), x12(t)\}, numeric)$

$F :=$ **proc**(x_rkf45) ... **end proc**

> with(plots) :
> odeplot(F, [[t, x11(t), color = blue], [t, x12(t), color = green], [t, x11(t) + 0.4 x12(t) − 160, color = red]], t = 0 ..1, view = [0 ..1, 0 ..3000])



Тут останнє рівняння визначається з $(E_2\text{-}A_{22})^{-1}[A_{21}x_1(t)\text{-}c_2(t)] = x_2(t)$. Проводимо обчислення для замкненої системи і для визначення технологічного темпу зростання.

> charactValues := Re(Eigenvalues(Multiply(EA^{−1}, B)))

$$charactValues := \begin{bmatrix} 0.332649508923012 \\ 6.44178658130255 \end{bmatrix} \quad (25)$$

> mu := max(charactValues)

$$\mu := 6.44178658130255 \quad (26)$$

> lambda := $\frac{1}{mu}$

$$\lambda := 0.155236437497406 \quad (27)$$

> eigenv, L := Eigenvectors(Multiply(EA^{−1}, B))

$$eigenv, L := \begin{bmatrix} 0.332649508923012 + 0.\,I \\ 6.44178658130255 + 0.\,I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.528988365204332 + 0.\,I & -0.501965066078039 + 0.\,I \\ 0.848629076498354 + 0.\,I & -0.864887895878576 + 0.\,I \end{bmatrix} \quad (28)$$

> FrobVector := L(.., 2)

$$FrobVector := \begin{bmatrix} -0.501965066078039 + 0.\,I \\ -0.864887895878576 + 0.\,I \end{bmatrix} \quad (29)$$

> ode3 := diff(z11(t), t) = Bnew[1, 1]·(EA[1, 1]·z11(t) + EA[1, 2]·z12(t)) + Bnew[1, 2]·(EA[2, 1]·z11(t) + EA[2, 2]·z12(t))

$$ode3 := \frac{d}{dt}\, z11(t) = 1.63157894736842\, z11(t) - 0.856842105263158\, z12(t) \quad (30)$$

> ode4 := diff(z12(t), t) = Bnew[2, 1]·(EA[1, 1]·z11(t) + EA[1, 2]·z12(t)) + Bnew[2, 2]·(EA[2, 1]·z11(t) + EA[2, 2]·z12(t))

$$ode4 := \frac{d}{dt}\, z12(t) = -2.36842105263158\, z11(t) + 1.52982456140351\, z12(t) \quad (31)$$

> F2 := dsolve({ode3, ode4, z11(0) = 750, z12(0) = 500}, {z11(t), z12(t)}, numeric)

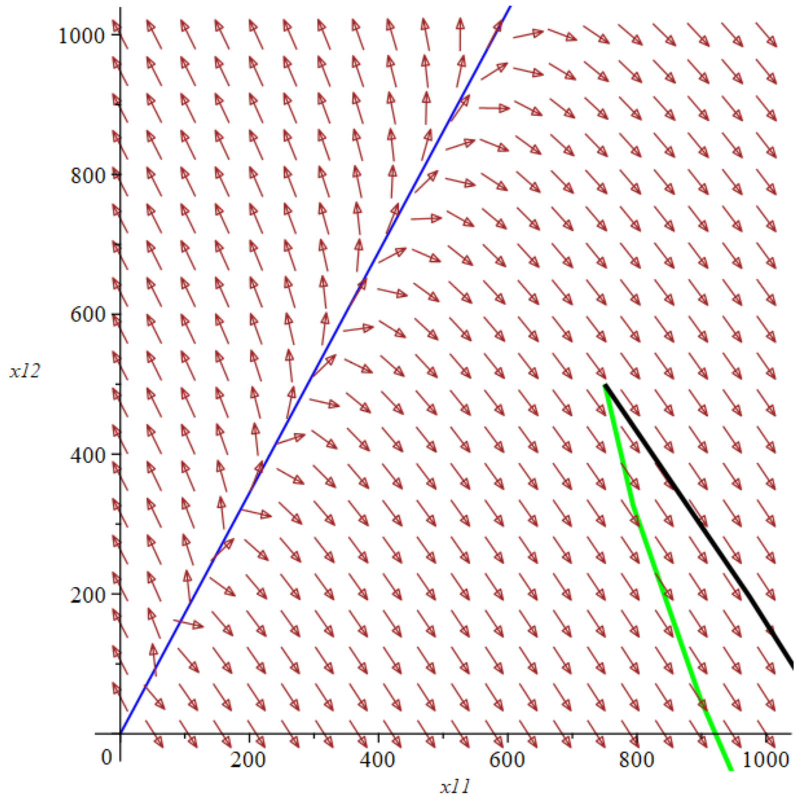
F2 := **proc**(x_rkf45) ... **end proc** (32)

> P2 := DEplot([ode3, ode4], [z11(t), z12(t)], t = 0 ..10, z11 = 0 ..1000, z12 = 0 ..1000, [[z11(0) = 750, z12(0) = 500]], linecolor = black, arrows = medium)

$P3 := plot(Vector(-10000 \cdot [0, FrobVector(1)]), Vector(-10000 \cdot [0, FrobVector(2)]), color = blue)$

Будуємо фазовий простір:

> $display(\{P1, P2, P3\})$



>