МІНІСТЕРСВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАІНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1

«Розв’язання нелінійних рівнянь»

Варіант 22

Виконала:

студентка 2 курсу, групи К-24

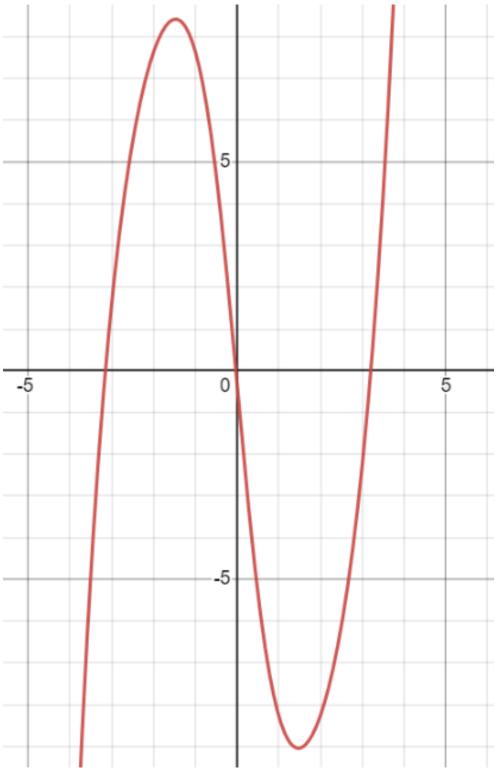
спеціальності «Комп’ютерні науки. Інформатика»

Баклан Аліса

Завдання:

Знайти корінь, який лежить між **-2 та 2** нелінійного рівняння $sh(x) - 12th(x) - 0.311 = 0$ методом релаксації, модифікованим методом Ньютона та методом простої ітерації з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$. Знайти апріорну та апостеріорну оцінку кількості кроків. Початковий проміжок та початкове наближення обрати однакове для обох методів(якщо це можливо), порівняти роботи методів між собою.

Дослідження кореня



Рівняння має єдиний дійсний корінь на проміжку [-2;2] :

$f(-2) = sh(-2) - 12th(-2) - 0.311 \approx 8{,}25 > 0$

$f(2) = sh(2) - 12th(2) - 0.311 \approx -8{,}25 < 0$

$f(-2) * f(2) < 0 = x^* \epsilon [-2; 2]$

Метод простої ітерації

Умови завдання: $\varepsilon = 10^{-4} = 0{,}0001$; f(x) = shx - 12thx - 0.311

$shx - 12thx - 0.311 = 0$

$shx - 12\frac{shx}{\sqrt{1 + (shx)^2}} - 0.311 = 0$

Зробимо заміну $u = shx$:

$g(u) = u - 12\frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} - 0.311 = 0$

Рівняння g(u) має єдиний дійсний корінь на проміжку **[-0.5;0]** :

$$g(-0.5) = (-0.5) - 12\frac{(-0.5)}{\sqrt{1+(-0.5)^2}} - 0.311 \approx 5.439 > 0$$

$$g(0) = 0 - 12\frac{0}{\sqrt{1+0}} - 0.311 \approx -0.311 < 0$$

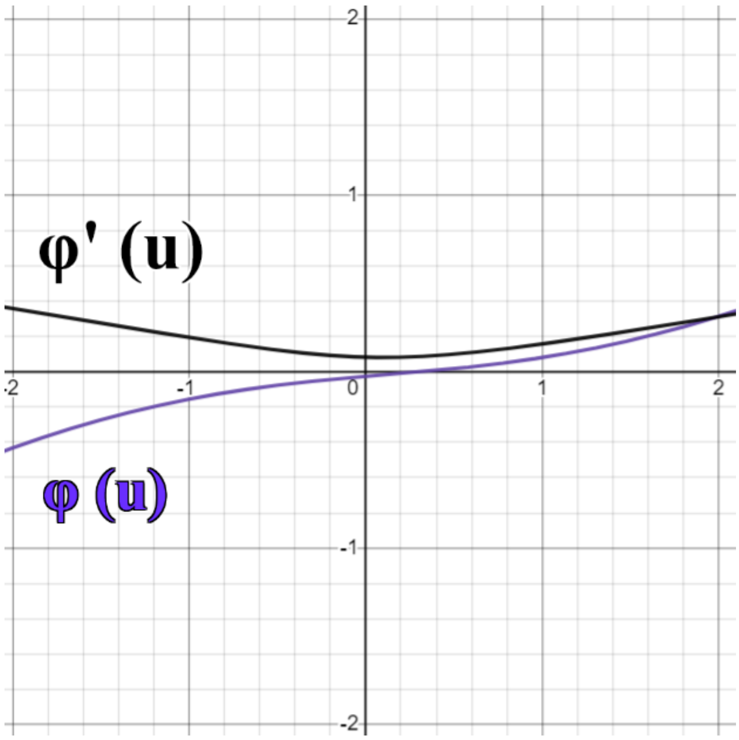
$$g(-0.5) * g(0) < 0 = u^{*} \epsilon [-0.5; 0]$$

Зведемо нелінійне рівняння до вигляду u = φ(u):

$$\varphi(u) = u = \frac{\sqrt{1+u^2}(u-0.311)}{12} \qquad \varphi'(u) = \frac{2u^2-0.311u+1}{12\sqrt{u^2+1}}$$

Оберемо початкове наближення: $u_0 = -0.25$.

$$\left.\begin{matrix} u \in [-0,5;0] \\ |u + 0,25| \leqslant \delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad \delta = 0,25$$



Перевіримо достатні умови збіжності для нової функції φ(u):

1) $\max\limits_{u\in[a;b]} |\varphi'(u)| = \max\limits_{u\in[-0.5;0]} \left|\frac{2u^2-0.311u+1}{12\sqrt{u^2+1}}\right| = |\varphi'(-0.5)| \approx 0.123393 < 1$

2) $|\varphi(u_0) - u_0| = |-0.048188 - (-0.25)| \approx 0.201812$

$(1-q)\delta = (1 - 0.123393) * (0.25) \approx 0.219122$

Оскільки q < 1 та 0.201812 < 0.219122, значить є збіжність. Переходимо до ітераційного процесу.

Перевіримо умову припинення. Оскільки q < 1/2, то використаємо умову:

$$|u_n - u_{n-1}| \le \frac{1-q}{q}\varepsilon \approx \frac{1-0.123393}{0.123393}0.0001 \approx 0.00071$$

<u>Ітерація 1</u>

$u_0 = -0.25$

$$u_1 = \varphi(u_0) = \frac{\sqrt{1+u_0{}^2}(u_0 - 0.311)}{12} \approx -0.048188$$

$|u_1 - u_0| = |-0.048188 - (-0.25)| \approx 0.201812 < 0.00071$

Умова не виконалась.

<u>Всього зроблено 4 ітерації:</u>

	u	fi (u)	|u(n)-u(n-1)|			
u0	-0,2500000	-0,0481888				
u1	-0,0481888	-0,0299671	0,2018112			
u2	-0,0299671	-0,0284267	0,0182217			
u3	-0,0284267	-0,0282970	0,0015405		0,123393685	=q
u4	-0,0282970	-0,0282861	0,0001297	<	0,000710414	=(1-q)*ε/q

Умова припинення виконалась, отже, знайшли корінь рівняння g(u) з точністю $\varepsilon = 0{,}0001$: $u^* \approx u_4 \approx -0{,}0282970$

$sh(x^*) = u^*$ **=>** $x^* \approx -0{,}028293$

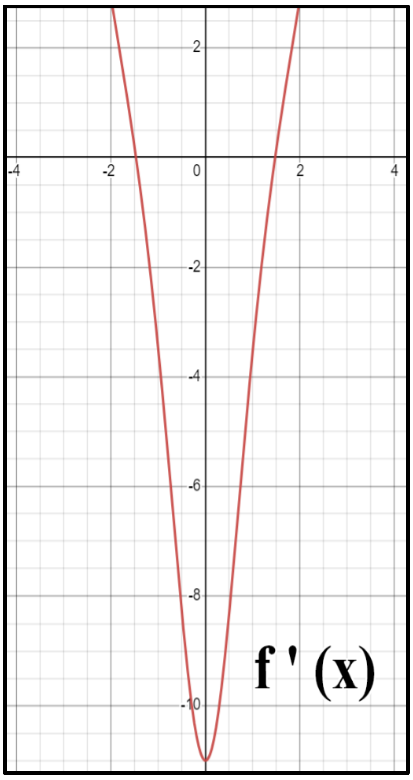
Оскільки корінь знайдено на 4-й ітерації, то апостеріорна оцінка кількості кроків дорівнює 4.

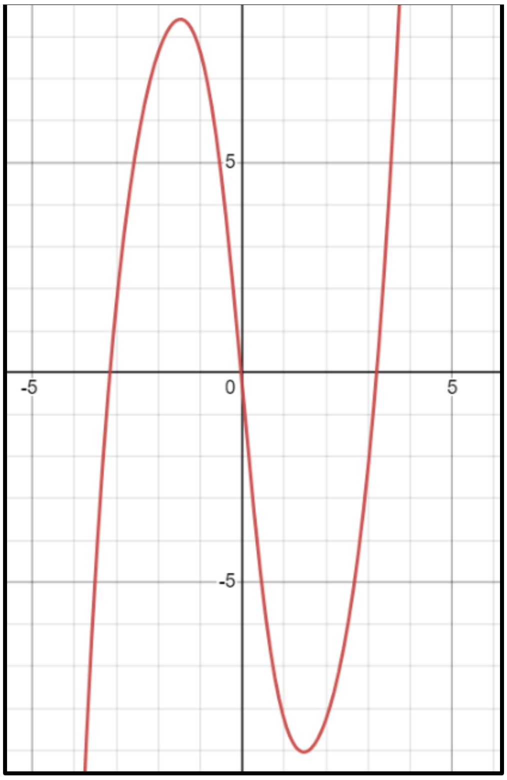
Для знаходження апріорної оцінки кількості кроків скористаємося формулою:

$$n \geqslant \left[\frac{\ln\frac{|\varphi(x_0) - x_0|}{(1-q)\varepsilon}}{\ln(1/q)}\right] + 1 = \left[\frac{\ln\frac{|-0{,}048 + 0{,}25|}{(1-0{,}123)0{,}0001}}{\ln(1/0{,}123)}\right] + 1 =$$

$$= [3{,}695] + 1 = 4$$

Метод релаксації





Умови завдання: $\varepsilon = 10^{-4} = 0{,}0001$; f(x) = shx - 12thx - 0.311

Рівняння має єдиний дійсний корінь на проміжку [-2;2]

$f(-2) = sh(-2) - 12th(-2) - 0.311 \approx 8{,}25 > 0$

$f(2) = sh(2) - 12th(2) - 0.311 \approx -8{,}25 < 0$

$f(-2) * f(2) < 0 = x^{*} \epsilon [-2; 2]$

Переходимо до побудови ітераційного процесу методу релаксації, для чого знайдемо m1, M1.

$f(x) = sh(x) - 12th(x) - 0.311$

$f'(x) = ch(x) - \frac{12}{ch(x)^2}$

$m_1 = \min\limits_{x \in [-2,2]} \left| ch(x) - \frac{12}{ch(x)^2} \right| = 0$ – не задовольняє умові $0 < m_1 < |f'(x)| < M_1$, тому звузимо проміжок.

Рівняння має єдиний дійсний корінь на проміжку [-1;0] :

$f(-1) = sh(-1) - 12th(-1) - 0.311 \approx 7.65 > 0$

$f(0) = sh(0) - 12th(0) - 0.311 \approx -0.311 < 0$

$f(-1) * f(0) < 0 = x^* \epsilon [-1; 0]$

Переходимо до побудови ітераційного процесу методу релаксації, для чого знайдемо m1, M1.

$f(x) = sh(x) – 12th(x) - 0.311$

$f'(x) = ch(x) - \frac{12}{ch(x)^2}$

$m_1 = \min_{x \in [-1,0]} \left| ch(x) - \frac{12}{ch(x)^2} \right| \approx 3.49661 > 0$

$M_1 = \max_{x \in [-1,0]} \left| ch(x) - \frac{12}{ch(x)^2} \right| = 11$

$\tau_0 = \frac{2}{M_1 + m_1} = \frac{2}{11 + 3.49661} \approx 0{,}13796$

Оскільки f ’(x) < 0, то в ітераційному процесі беремо знак «+»: $x_{n+1} = x_n +$ τf(x_n). Оберемо початкове наближення: $x_0 = 0$.

<u>Ітерація 1</u>

$$x_1 = x_0 + \tau f(x_0) = 0 + 0{,}13796 * (-0.311) \approx -0{,}04291$$

$$|x_1 - x_0| \approx |-0{,}04291 - 0| \approx 0{,}04291 > 0{,}0001$$

<u>Ітерація 2</u>

$$x_2 = x_1 + \tau f(x_1) = -0{,}04291 + 0{,}13796 * (0.16068) \approx -0{,}02074$$

$$|x_2 - x_1| \approx |-0{,}02074 - (-0{,}04291)| \approx 0{,}02217 > 0{,}0001$$

Всього зроблено 11 ітерацій:

	x	**f(x)**	**|x(n)-x(n-1)|**	
x0	0	-0,311		
x1	-0,0429056	0,16063229	0,04290556	**|x1-x0|**
x2	-0,0207447	-0,082845169	0,02216083	**|x2-x1|**
x3	-0,032174	0,042775819	0,01142932	**|x3-x2|**
x4	-0,0262727	-0,022075876	0,00590135	**|x4-x3|**
x5	-0,0293183	0,011396163	0,00304559	**|x5-x4|**
x6	-0,0277461	-0,005882204	0,00157221	**|x6-x5|**
x7	-0,0285576	0,003036358	0,00081151	**|x7-x6|**
x8	-0,0281387	-0,001567291	0,00041890	**|x8-x7|**
x9	-0,0283549	0,000809012	0,00021622	**|x9-x8|**
x10	-0,0282433	-0,000417595	0,00011161	**|x10-x9| > 0,0001**
x11	-0,0283009	0,000215555	0,00005761	**|x11-x10|< 0,0001**

$|x_{11} - x_{10}| \approx |-0{,}0283009 - (-0{,}0282433)| \approx -0{,}00005 < 0{,}0001 = \varepsilon$

$$x^* \approx x_{11} \approx -0{,}0283009$$

Отже, апостеріорна оцінка кількості кроків дорівнює 11.

Знайдемо апріорну оцінку кількості кроків:

$$q_0 = \frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1} = \frac{11 - 3.49661}{11 + 3.49661} \approx 0.5176$$

$$\left.\begin{array}{l} x^* \in [-1; 0\,] \\ x_0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow |x_0 - x^*| = |\ 0 - x^*| \leqslant 1$$

$$n_o \geqslant \left[\frac{\ln(|x_0 - x^*|/\varepsilon)}{\ln(1/q_o)}\right] + 1 = \left[\frac{\ln(\ 1/0{,}0001)}{\ln(1/0{,}5176)}\right] + 1 = [13{,}98] + 1 = 14.$$

<u>Використана теорія:</u>

Достатня умова збіжності. Якщо в ітераційному процесі (18) параметр $\tau \in (0; 2/M_1)$, де $0 < m_1 < |f'(x)| < M_1$, $M_1 = \max\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$, $m_1 = \min\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$, то ітераційний процес (18) збігається, при цьому швидкість збіжності лінійна.

Для оптимального параметру τ_o апріорна оцінка кількості кроків:

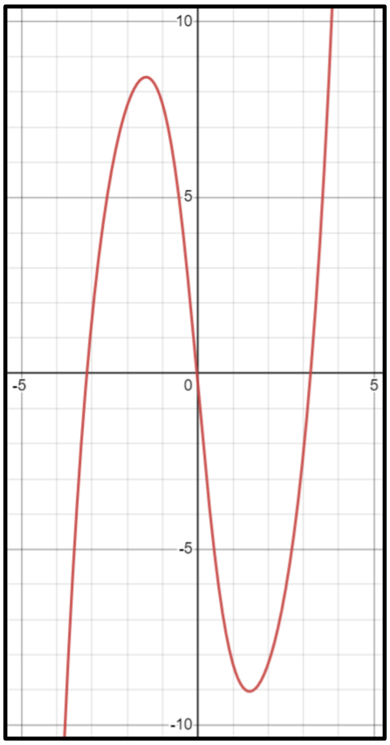
$$n_o \geqslant \left[\frac{\ln(|x_0 - x^*|/\varepsilon)}{\ln(1/q_o)}\right] + 1.$$

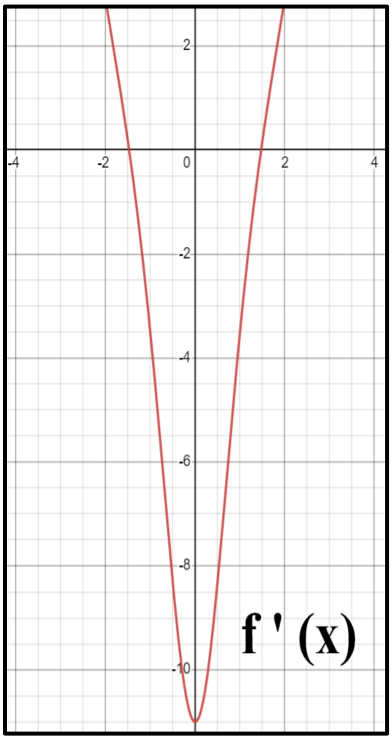
Початкове наближення обирається довільне з проміжку: $x_0 \in [a; b]$, ітераційний процес:

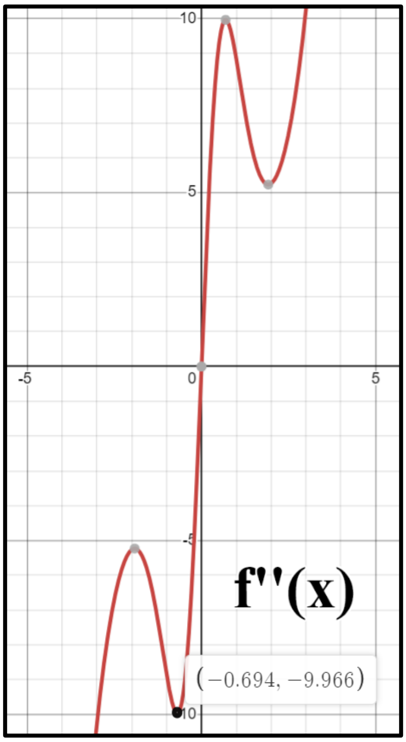
$$x_{n+1} = x_n \pm \tau f(x_n), \qquad (18)$$

де «+», якщо $f'(x) < 0$; «−», якщо $f'(x) > 0$.

Модифікований метод Ньютона







<u>Умови завдання:</u> $\varepsilon = 10^{-4} = 0{,}0001$; f(x) = shx - 12thx - 0.311

Рівняння має єдиний дійсний корінь на проміжку [-2;2]

$f(-2) = sh(-2) - 12th(-2) - 0.311 \approx 8{,}25 > 0$

$f(2) = sh(2) - 12th(2) - 0.311 \approx -8{,}25 < 0$

$f(-2) * f(2) < 0 = x^* \epsilon[-2;2]$

Переходимо до побудови ітераційного процесу.

$f'(x) = ch(x) - \frac{12}{ch(x)^2}$; $\qquad f''(x) = \frac{24sh(x)}{ch(x)^3} + sh(x)$

Функції $f'(x)$ та $f''(x)$ неперервні.

Теорема 1. (Про вибір початкового наближення) *Якщо* $f(x) \in C^2[a,b]$, $f(a)f(b) < 0$, $f''(x)$ *не змінює знаку на* [a,b] та *початкове наближення* $x_0 \in [a,b]$ *задовольняє умові* $f(x_0)f''(x_0) > 0$, *то можна обчислити єдиний акорінь* x_* *рівняння (1) методом Ньютона з будь-якою точності.*

Введемо позначення $0 < m_1 = \min_{x \in S} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x \in S} |f''(x)|$ (24)

Спочатку перевіримо достатні умови вибору початкового наближення (Теорема 1).

Рівняння $f''(x)$ має дійсний корінь на проміжку [-2;2] , а саме $f''(0) = 0$, тобто змінює знак в точці x=0. Це не задовольняє достатнім умовам, тому звузимо проміжок до [a;b], де a > 0 чи b<0 (тоді на [a;b] функція $f''(x)$буде знакосталою).

Рівняння f(x) має єдиний дійсний корінь на проміжку [-2;0] :

$$f(-2) = sh(-2) - 12th(-2) - 0.311 \approx 8{,}25 > 0$$

$$f(0) = sh(0) - 12th(0) - 0.311 = -0.311 < 0$$

$$f(-2) * f(0) < 0 = x^{*} \epsilon [-2; 0]$$

Наш розв'язок знаходиться на проміжку [-2;0], тому [a;b]ϵ[-2;0].

На проміжку [-2;0] функція $f''(x)$ приймає від'ємні значення. Звідси, аби виконувалась умова $f(x_0)f''(x_0) > 0$, треба підібрати такий проміжок [-2;b], що: $f(b) < 0$, де b < 0 (b – початкове наближення).

$$f(-0.01) = sh(-0.01) - 12th(-0.01) - 0.311 \approx -0.2 < 0$$

Отже, ми звужуємо проміжок [-2;0] до [-2; -0.01]

Також $f'(x)$ змінює знак на проміжку [-2; -0.01]:

$$f'(-2) = ch(-2) - \frac{12}{ch(-2)^2} \approx 2.91 > 0$$

$$f'(-0.01) = ch(-0.01) - \frac{12}{ch(-0.01)^2} \approx -10.9 < 0$$

Це не задовольняє достатнім умовам збіжності методу Ньютона. Тому звузимо проміжок до [-0.5; -0.01] і перевіримо:

$$f'(-0.5) = ch(-0.5) - \frac{12}{ch(-1)^2} \approx -8.3 < 0$$

$$f'(-0.01) = ch(-0.01) - \frac{12}{ch(-0.01)^2} \approx -10.9 < 0$$

$$f(-0.5) = sh(-0.5) - 12th(-0.5) - 0.311 \approx 4.71 > 0$$

$$f(-0.01) = sh(-0.01) - 12th(-0.01) - 0.311 \approx -0.2 < 0$$

Отже, $f'(x)$ знакостала на проміжку [-0.5; -0.01] і корінь належить цьому проміжку.

Виберемо початкове наближення $x_0 = -0.01$.

Перевіримо умови:

- $f(-0.5) = sh(-0.5) - 12th(-0.5) - 0.311 \approx 4.71 > 0$
  $f(-0.01) = sh(-0.01) - 12th(-0.01) - 0.311 \approx -0.2 < 0$
  $f(-0.5) * f(-0.01) < 0 = x^* \epsilon [-0.5; -0.01]$
- $f'(x)$ та $f''(x)$ неперервні на проміжку [-0.5;-0.01], тому $f(x) \in C^2{}_{[-0.5;-0.01]}$
- $f''(x) < 0$ на проміжку [-0.5;-0.01], тобто знакостала.
- $f(x_0)f''(x_0) > 0$, оскільки $f''(-0.01) < 0$ і $f(-0.01) < 0$

Початкове наближення знайдено, перевіримо достатні умови збіжності:

Теорема 2. (Про збіжність методу Ньютона) *Нехай x_* – простий дійсний корінь рівняння (1) і $f(x) \in C^2(S)$, $f'(x) \neq 0, \forall x \in S$, де $S = \{x : |x - x_*| \leq \delta\}$.*

та виконується нерівність

$$q = \frac{M_2 |x_0 - x_*|}{2m_1} < 1. \qquad (25)$$

- $f(-0.5) = sh(-0.5) - 12th(-0.5) - 0.311 \approx 4.71 > 0$
  $f(-0.01) = sh(-0.01) - 12th(-0.01) - 0.311 \approx -0.2 < 0$
  $f(-1) * f(-0.01) < 0 = x^* \epsilon [-0.5; -0.01]$
- $f'(x)$ та $f''(x)$ неперервні на проміжку [-0.5;-0.01], тому $f(x) \in C^2{}_{[-0.5;-0.01]}$
- $f'(x) < 0$ на проміжку [-0.5;-0.01], тобто $f'(x) \neq 0$.

Введемо позначення $0 < m_1 = \min\limits_{x \in S} |f'(x)|, \quad M_2 = \max\limits_{x \in S} |f''(x)|$

$m_1 = \min\limits_{x \in [-0.5;-0.01]} |f'(x)| \approx 8.309747 > 0$

$M_2 = \max\limits_{x \in [-0.5;-0.01]} |f''(x)| \approx 9.243439$

$$\left.\begin{array}{l} x^* \in [-0.5;-0.01] \\ x_0 = -0.01 \end{array}\right\} \Rightarrow |x_0 - x^*| = |-0.01 - x^*| \leqslant 0{,}49.$$

$$q = \frac{M_2|x_0 - x^*|}{2m_1} \leqslant \frac{9.243439 \cdot 0{,}49}{2 \cdot 8.309747} \approx 0{,}3 < 1$$

<u>Отже, достатні умови збіжності виконуються</u>

Оскільки ми використовуємо модифікований метод Ньютона, не потрібно обчислювати похідну $f'(x)$ на кожній ітерації, а достатньо лише $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = f'(-0.01) = ch(-0.01) - \frac{12}{ch(-0.01)^2} \approx -10.99875$$

<u>Ітерація 1.</u>

$x_0 = -0.01$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -0.01 - \frac{-0.201004}{-10.99875} \approx -0.028275$$

$|x_1 - x_0| \approx |-0.028275 - (-0.01)| \approx 0.018275 > 0{,}0001 = \varepsilon$

<u>Ітерація 2.</u>

$x_1 \approx -0.028275$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_0)} \approx -0.028275 - \frac{-0.0000692}{-10.99875} \approx -0.028281$$

$|x_2 - x_1| \approx |-0.028281 - (-0.028275)| \approx 0.000006 < 0{,}0001 = \varepsilon$

Умова припинення виконалася, знайшли корінь на другій ітерації, тому $x^* \approx x_2 \approx -0.028281$, а апостеріорна оцінка кількості кроків дорівнює 2.

Висновок

У цій лабораторній роботі я вирішила нелінійне рівняння трьома способами: методом простої ітерації, методом релаксації, модифікованим методом Ньютона. Кількість ітерацій відповідно: 4, 11, 2. Отримані результати відрізняються не більш ніж на $\varepsilon = 10^{-4}$. Метод простої ітерації для нашого рівняння виявився найважчим для реалізування, оскільки складно підібрати функцію $\varphi(x)$, яка б задовольняла умовам для використання цього методу. Для цього методу було використано заміну.