10.4 Menyelesaikan Persamaan Secara Numerik

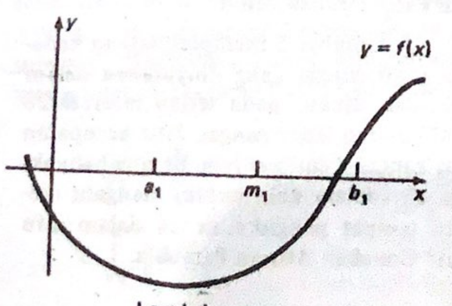
Dalam matematika dan sains, kerapkali kita perlu untuk mencari akar-akar (penyelesaian) suatu persamaan $f(x) = 0$. Supaya pasti, jika $f(x)$ suatu polinom linear atau kuadrat, rumus-rumus untuk penulisan penyelesaian yang eksak, ada dan dikenal. Tetapi untuk persamaan aljabar lainnya, dan secara pasti untuk persamaan transenden, rumus-rumus untuk penyelesaian eksak jarang tersedia. Apa yang dapat diperbuat dalam kasus demikian?

Terdapat suatu metode umum penyelesaian masalah yang terkenal untuk semua orang yang memerlukan. Ia boleh disebut sebagai "acak-acakan" atau "coba-coba." Misalnya secangkir teh, kita tambahkan gula sedikit demi sedikit sampai rasa manisnya cocok. Diberikan suatu sumbat kayu yang terlalu besar untuk sebuah lubang, kita raut sedikit-sedikit sampai ia pas. Kita ubah penyelesaian sedikit setiap kali, memperbaiki kecermatan, sampai kita puas. Matematikawan menyebutnya *metode aproksimasi beruntun*, atau *metode iterasi.*

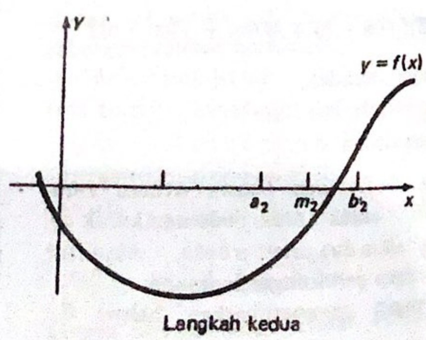
Pada pasal ini, kita sajikan dua metode yang demikian untuk menyelesaikan persamaan: Metode Bagi-dua dan Metode Newton. Keduanya dirancang untuk mencari akar-akar riil dari $f(x) = 0$. Keduanya memerlukan banyak komputasi. Anda ingin agar kalkulator anda berguna.

METODE BAGI DUA Metode ini mempunyai dua kebaikan besar yaitu kesederhanaan dan keterandalan. Ia juga mempunyai kejelekan langkah yaitu yang sangat besar untuk mencapai kecermatan yang diinginkan (sebaliknya dikenal sebagai kelambatan kekonvergenan).

Mulailah proses dengan menggambar sketsa grafik f yang dianggap berupa suatu fungsi kontinu. Suatu akar riil r dari $f(x) = 0$ adalah suatu titik (secara teknis, koordinat-x dari suatu titik) di mana grafik memotong sumbu-x. Sebagai langkah pertama dalam menemukan titik ini, tentukan dua titik, $a_1 < b_1$, pada kedua titik itu f berlawanan tanda. (Coba memilih a_1 dan b_1 pada sisi berlawanan dari terkaan terbaik anda untuk r). Teorema Nilai Antara menjamin eksistensi suatu akar antara a_1 dan b_1. Sekarang hitung f pada titik-tengah $m_1 = (a_1 + b_1)/2$ dari $[a_1, b_1]$. Bilangan m_1 merupakan aproksimasi pertama kita untuk r (lihat Gambar 1).



GAMBAR 1



GAMBAR 2

Salah satu dari dua kasus yaitu $f(m_1) = 0$, pada kasus mana kita selesai, atau $f(m_1)$ berbeda tanda terhadap $f(a_1)$ atau $f(b_1)$. Nyatakan salah satu selang bagian $[a_1, m_1]$ atau $[m_1, b_1]$ pada mana perubahan tanda terjadi dengan lambang $[a_2, b_2]$ dan hitung f pada titik-tengah $m_2 = (a_2 + b_2)/2$. Bilangan m_2 adalah aproksimasi kedua kita, untuk r (Gambar 2).

Ulangi proses. Jadi kita menentukan aproksimasi-aproksimasi m_1, m_2, m_3, dan selang bagian $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$ . . . tiap selang mengandung akar r dan panjangnya setengah selang bagian pendahulunya. Berhenti bilamana r tertentu mencapai kecermatan yang diinginkan – yakni, bilamana $(b_n - a_n)/2$ lebih kecil dari kesalahan yang diijinkan.

Agar proses sesuai untuk suatu kalkulator, pertama kita andaikan bahwa grafik $y = f(x)$ naik pada saat ia memotong sumbu-x; jika tidak, sebagai gantinya pandang grafik dari $y = -f(x)$, yang memotong pada titik yang sama. Kemudian tetapkan

$$m_n = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad h_n = \frac{b_n - a_n}{2}$$

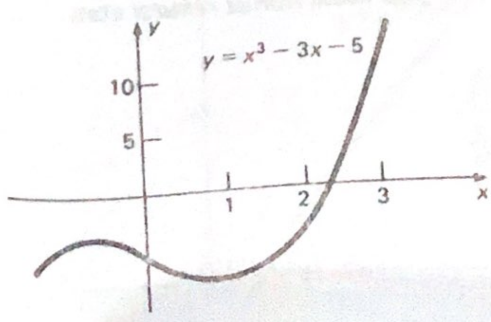
dan perhatikan bahwa m_n adalah titik tengah dari $[a_n, b_n]$ dan h_n adalah setengah panjangnya. Dengan menganggap bahwa m_n dan h_n diketahui, gunakan algoritma berikut untuk menentukan m_{n+1} dan h_{n+1}.

1. Hitung $f(m_n)$ dan jika $f(m_n) = 0$, berhenti.
2. Tetapkan $h_{n+1} = \dfrac{h_n}{2}$
3. Jika $f(m_n) < 0$, tetapkan $m_{n+1} = m_n + h_{n+1}$.
4. Jika $f(m_n) > 0$, tetapkan $m_{n+1} = m_n - h_{n+1}$.

CONTOH 1 Tentukan akar riil r dari $f(x) = x^3 - 3x - 5 = 0$ sampai kecermatan sekitar 0,0000001.

Penyelesaian Pertama kita buat sketsa grafik dari $y = x^3 - 3x - 5$ (Gambar 3) dan, dengan memperhatikan bahwa ia memotong sumbu-x antara 2 dan 3; kita gunakan $a_1 = 2$, $b_1 = 3$, $m_1 = 2{,}5$ dan $h_1 = 0{,}5$. Kemudian kita konstruksikan tabel berikut.

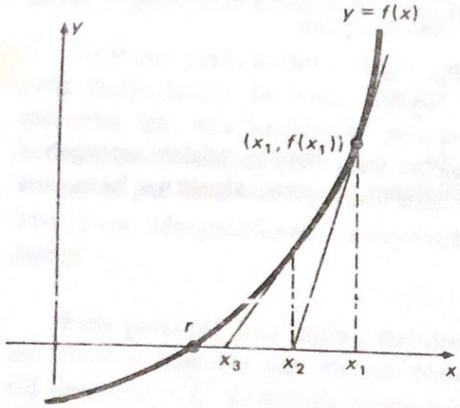
n	h_n	m_n	$f(m_n)$
1	0,5	2,5	3,125
2	0,25	2,25	−0,359
3	0,125	2,375	1,271
4	0,0625	2,3125	0,429
5	0,03125	2,28125	0,02511
6	0,015625	2,265625	−0,16729
7	0,0078125	2,2734375	−0,07001
8	0,0039063	2,2773438	−0,02106
9	0,0019532	2,2792969	0,00350
10	0,0009766	2,2783203	−0,00878
11	0,0004883	2,2788086	−0,00264
12	0,0002442	2,2790528	0,00043
13	0,0001221	2,2789307	−0,00111
14	0,0000611	2,2789918	−0,00034
15	0,0000306	2,2790224	0,00005
16	0,0000153	2,2790071	−0,00015
17	0,0000077	2,2790148	−0,00005
18	0,0000039	2,2790187	−0,000001
19	0,0000020	2,2790207	0,000024
20	0,0000010	2,2790197	0,000011
21	0,0000005	2,2790192	0,000005
22	0,0000003	2,2790189	0,0000014
23	0,0000002	2,2790187	0,0000011
24	0,0000001	2,2790188	0,0000001



GAMBAR 3

Contoh 1 mengilustrasikan kekurangan dari Metode Bagi-dua. Aproksimasi-aproksimasi $m_1, m_2, m_3, \ldots$ konvergen sangat lambat ke akar r. Tetapi mereka konvergen. Metode itu memberikan hasil dan pada langkah n kita mempunyai suatu batas yang baik untuk kesalahan $E_n = r - m_n$, yakni $|E_n| \leqslant h_n$.

METODE NEWTON Kita masih tetap memandang masalah penyelesaian persamaan $f(x) = 0$ untuk suatu akar r. Andaikan bahwa f terdiferensialkan, sehingga grafik dari $y = f(x)$ mempunyai garis singgung pada tiap titik. Jika kita dapat menemukan suatu aproksimasi pertama x_1 terhadap r dengan cara penggambaran grafik atau dengan cara lain, maka suatu aproksimasi x_2 yang lebih baik harus terletak pada perpotongan garis singgung pada $(x_1, f(x))$ dengan sumbu-x (lihat Gambar 4). Dengan menggunakan x_2 sebagai suatu aproksimasi, kemudian kita dapat menemukan suatu aproksimasi x_3 yang masih lebih baik, dan seterusnya.



GAMBAR 4

Proses ini dapat ditahap-tahapkan sehingga mudah untuk melakukannya pada kalkulator. Persamaan garis singgung pada $(x_1, f(x_1))$ adalah

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

dan perpotongan dengan sumbu-x, yaitu x_2 ditemukan dengan menetapkan $y = 0$ dan diselesaikan untuk x. Hasilnya adalah

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Secara lebih umum kita mempunyai **algoritma,** yang disebut juga suatu *rumus rekursi* atau suatu *skema iterasi.*

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

ALGORITMA

Algoritma telah menjadi bagian dari matematika sejak orang pertama kali belajar proses pembagian yang panjang, tetapi ilmu komputerlah yang membuat pemikiran algoritma menjadi terkenal saat ini. Apakah yang dimaksud dengan Algoritma? "Donald Knuth, bapak ilmuwan komputer, menjawab,
"Algoritma adalah urutan kaidah yang terdefinisi secara tepat tentang cara menghasilkan output informasi tertentu dari input informasi yang tertentu menurut sejumlah tahapan yang berhingga." Dan apakah ilmu komputer itu? Menurut Knuth, "Ilmu komputer adalah telaah tentang algoritma."

CONTOH 2 Gunakan Metode Newton untuk mencari akar riil r dari $f(x) = x^3 - 3x - 5 = 0$ sampai tujuh posisi desimal.

Penyelesaian Ini merupakan persamaan yang sama yang telah ditinjau pada Contoh 1. Marilah kita gunakan $x_1 = 2{,}5$ sebagai aproksimasi pertama kita terhadap r, seperti yang kita lakukan di sana. Karena $f(x) = x^3 - 3x - 5$ dan $f'(x) = 3x^2 - 3$, algoritmanya adalah

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n - 5}{3x_n^2 - 3} = \frac{2x_n^3 + 5}{3x_n^2 - 3}$$

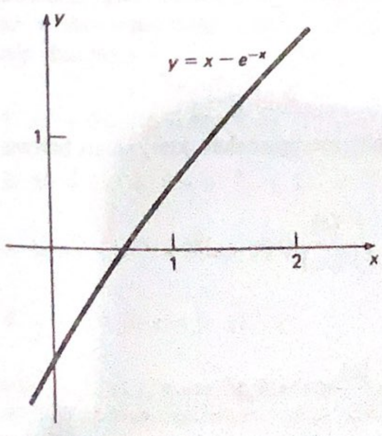
Kita peroleh data pada tabel di bawah ini.

n	x_n
1	2,5
2	2,30
3	2,2793
4	2,2790188
5	2,2790188

Setelah hanya empat langkah, kita peroleh suatu pengulangan dari empat angka yang pertama. Kita merasa yakin melaporkan bahwa $r \approx 2{,}2790188$, mungkin dengan pertanyaan tentang angka yang terakhir. ■

CONTOH 3 Gunakan Metode Newton untuk mencari akar riil r dari $f(x) = x - e^{-x} = 0$ sampai tujuh posisi desimal.

Penyelesaian Sketsa grafik $y = x - e^{-x}$ disajikan pada Gambar 5. Kita menggunakan $x_1 = 0{,}5$ dan $x_{n+1} = x_n - (x_n - e^{-x_n})/(1 + e^{-x_n}) = (x_n + 1)/(x^{e_n} + 1)$ untuk memperoleh tabel di bawah ini.

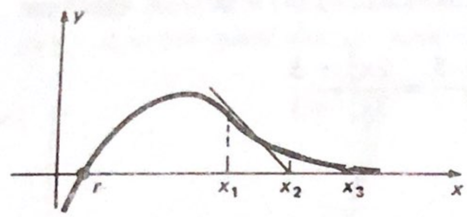


GAMBAR 5

n	x_n
1	0,5
2	0,566
3	0,56714
4	0,5671433
5	0,5671433

Setelah hanya empat langkah, kita peroleh suatu pengulangan dari angka ke tujuh di belakang titik desimal. Kita simpulkan bahwa $r \approx 0{,}5671433$. ■

KEKONVERGENAN METODE NEWTON Tidak selalu jelas bahwa Metode Newton menghasilkan aproksimasi yang konvergen ke akar r, walaupun dua contoh kita memberikan pembenaran untuk pernyataan tersebut. Mungkinkah itu hanya kebetulan saja dalam pilihan dua contoh kita? Kenyataannya, metode tidak selalu menuju ke konvergenan, seperti diperlihatkan diagram pada Gambar 6 (lihat juga Soal 21). Kesukaran dalam kasus ini adalah bahwa x_1 tidak cukup dekat ke r untuk memperoleh langkah awal suatu proses yang konvergen. Kesukaran lainnya yang jelas timbul jika $f'(x)$ nol pada atau dekat r karena $f'(x_n)$ terdapat di penyebut dari algoritma. Tetapi, kita mempunyai teorema berikut.



GAMBAR 6

> *Teorema A*
> Misalkan f dapat didiferensialkan dua kali pada suatu selang I, dan mempunyai sebagai titik tengah suatu akar r dari $f(x) = 0$. Andaikan terdapat bilangan-bilangan positif m dan M sedemikian rupa sehingga $|f'(x)| \geq m$ dan $|f''(x)| \leq M$ pada I. Jika x_1 berada dalam I dan cukup dekat ke r ($|x_1 - r| < 2m/M$ akan cukup) maka
>
> (i) $|x_{n+1} - r| \leq \dfrac{M}{2m}(x_n - r)^2$;
>
> (ii) x_n konvergen ke r bilamana $n \to \infty$.

Mungkin kita harus mengetengahkan bahwa kita telah menggunakan kata *konvergen* tanpa memberikan suatu definisi yang persis. Itu akan terdapat di Bab 11. Untuk saat ini, kita cukup menggunakan kata tersebut dalam pengertian intuisi yang biasa yaitu "semakin lama semakin dekat".

Bukti Dari Rumus Taylor dengan sisa (Teorema 10.2A), terdapat suatu bilangan c antara x_n dan r sedemikian sehingga

$$f(r) = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + \frac{f''(c)}{2}(r - x_n)^2$$

Setelah membagi kedua ruas oleh $f'(x_n)$ dan dengan menggunakan kenyataan bahwa $f(r) = 0$, kita peroleh

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + r - x_n + \frac{f''(c)}{2f'(x_n)}(r - x_n)^2$$

dan kemudian secara beruntun

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - r = \frac{f''(c)}{2f'(x_n)}(r - x_n)^2$$

$$|x_{n+1} - r| = \left|\frac{f''(c)}{2f'(x_n)}\right|(x_n - r)^2$$

$$|x_{n+1} - r| \leq \frac{M}{2m}(x_n - r)^2$$

yang berupa (i).

Dari (i) seorang dapat menunjukkan dengan induksi (Soal 18) bahwa

$$|x_n - r| \leq \frac{2m}{M}\left(\frac{M}{2m}|x_1 - r|\right)^{2^{n-1}}$$

Karena $(M/2m)|x_1 - r| < 1$, ruas kanan dari pertaksamaan yang terakhir mendekati 0 bilamana $n \to \infty$. Ini membawakan bahwa $|x_n - r|$ juga menuju ke 0 bilamana $n \to \infty$, yang setara terhadap (ii). ■

Kecepatan dari kekonvergenan Metode Newton benar-benar patut dibanggakan; pada tiap langkah cenderung melipat-duakan banyaknya posisi desimal kecermatan. Untuk melihat kenapa demikian, andaikan $M/2m \leqslant 2$. Maka jika kesalahan $|x_n - r|$ pada langkah ke n kecil dari 0,005, kesalahan $|x_{n+1} - r|$ pada langkah berikutnya terpenuhi (menurut (1)).

$$|x_{n+1} - r| \leq \frac{M}{2m}|x_n - r|^2 \leq 2(0{,}005)^2 = 0{,}00005$$

Jadi kecermatan x_n sampai dua posisi desimal dilipatduakan ke kecermatan dari x_{n+1} sampai empat posisi desimal. Tentu saja, seharusnya kita tidak mengharapkan hasil yang demikian menyolok jika $M/2m$ lebih besar dari 2.

SOAL-SOAL 10.4

C Pada Soal 1-4, gunakan Metode Bagi-dua untuk mencari akar riil dari persamaan yang diberikan pada selang yang diberikan. Jawaban anda seharusnya cermat sampai dua posisi desimal.

1. $x^3 + 3x - 6 = 0$; $[1, 2]$
2. $x^4 + 4x^3 + 1 = 0$; $[-1, 0]$
3. $\cos x - e^{-x} = 0$; $[1, 2]$
4. $x - 2 + \ln x = 0$; $[1, 2]$

C Pada Soal 5-14, gunakan Metode Newton, untuk mengaproksimasi akar yang diminta dari persamaan yang diberikan cermat sampai lima posisi desimal. Mulai dengan membuat sketsa suatu grafik.

5. Akar terbesar dari $x^3 + 6x^2 + 9x + 2 = 0$.
6. Akar riil dari $7x^3 + x - 6 = 0$.
7. Akar dari $x - 2 + \ln x = 0$ (lihat Soal 4).
8. Akar positif terkecil dari $x - e^{-x} = 0$, (lihat Soal 3).
9. Akar dari $\cos x = x$.
10. Akar dari $x \ln x = 1$.
11. Semua akar riil dari $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 6 = 0$.
12. Semua akar riil dari $x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 28 = 0$.
13. Akar positif dari $2x^2 - \sin^{-1} x = 0$.
14. Akar positif dari $2 \tan^{-1} x = x$.

C 15. Gunakan Metode Newton untuk menghitung $\sqrt[3]{6}$ sampai lima posisi desimal.

Petunjuk: Selesaikan $x^3 - 6 = 0$.

C 16. Gunakan Metode Newton untuk menghitung $\sqrt[4]{47}$ sampai lima posisi desimal.

C 17. Di titik mana pada $(\pi, 2\pi)$, bentuk $(\sin x)/x$ mencapai suatu minimum dan berapa nilai minimumnya?

18. Perlihatkan dengan induksi bahwa jika

$$|x_{n+1} - r| \leq \frac{M}{2m}(x_n - r)^2, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

maka

$$|x_n - r| \leq \frac{2m}{M}\left(\frac{M}{2m}|x_1 - r|\right)^{2^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

C 19. Andaikan kita menggunakan Metode Newton untuk mencari akar positif dari $x^2 - 2 = 0$ – yakni, untuk mengaproksimasi $\sqrt{2}$. Selanjutnya andaikan kita mengetahui bahwa akar ini berada pada selang $[1, 2]$. Hitung m dan M dari Teorema A. Gunakan pertaksamaan yang kedua dari Soal 18 untuk menaksir $|x_6 - \sqrt{2}|$, diberikan bahwa $x_1 = 1{,}5$.

C 20. Seberapa besar seharusnya kita mengambil nilai n pada Soal 19 untuk meyakinkan $|x_n - \sqrt{2}| \leq 5 \times 10^{-41}$?

C 21. Perhatikan pencarian akar riil dari $(1 + \ln x)/x = 0$ memakai Metode Newton. Perlihatkan bahwa ini menuju ke algoritma.

$$x_{n+1} = 2x_n + \frac{x_n}{\ln x_n}$$

Terapkan ini dengan $x_1 = 1{,}2$. Berikutnya coba dia dengan $x_1 = 0{,}5$. Akhirnya, gambar grafik $y = (1 + \ln x)/x$ untuk memahami hasil-hasil anda.

22. Buat sketsa grafik dari $y = x^{1/3}$. Jelas, ia memotong sumbu-x di nol. Yakinkan anda bahwa Metode Newton gagal untuk konvergen. Jelaskan kegagalan ini.

23. Dalam pembelian secara angsuran, seseorang mungkin ingin mengetahui besarnya suku bunga riel (suku bunga efektif) yang harus ditanggungnya, tetapi sayangnya hal ini melibatkan penyelesaian persamaan yang rumit. Jika seseorang membeli barang yang bernilai $\$P$ hari ini dan sepakat untuk membayar sejumlah $\$R$ pada tiap akhir bulan selama k bulan, maka

$$P = \frac{R}{i}\left[1 - \frac{1}{(1 + i)^k}\right]$$

di mana i adalah suku bunga per bulan. Tom membeli mobil bekas seharga \$2000 dan sepakat untuk membayar sejumlah \$100 pada tiap akhir bulan selama 24 bulan berikutnya:

(a) Tunjukkan bahwa i memenuhi persamaan

$$20i(1 + i)^{24} - (1 + i)^{24} + 1 = 0$$

(b) Turunkan Algoritma Newton untuk persamaan ini, yaitu,

$$i_{n+1} = i_n - \left[\frac{20i_n^2 + 19i_n - 1 + (1 + i_n)^{-23}}{500i_n - 4}\right]$$

(c) Tentukan i sampai 5 angka desimal yang dimulai dengan $i_1 = 0{,}012$ dan kemudian hitung suku bunga tahunan r yang dihitung dalam persetase (r=1200i).

24. Dalam menerapkan Algoritma Newton untuk menyelesaikan $f(x) = 0$, kita biasanya dapat langsung mengatakan melalui angka-angka x_1, x_2, x_3, . . . apakah deret tersebut semakin konvergen. Tetapi meskipun deret tersebut semakin konvergen, katakanlah ke-$\bar{x}$, apakah kita yakin bahwa $\bar{x}$ merupakan penyelesaian? Buktikan bahwa jawaban tersebut adalah benar dengan ketentuan bahwa f dan f' bersifat kontinu pada $\bar{x}$ dan $f'(x) \neq 0$.