## Metode Simpleks

Apa yang kalian pikirkan ketika kalian mendengar sebutan metode simpleks? Ya karena ini bagian dari masalah optimasi, maka akan terkait dengan pemodelan, skema, cara, algoritma, iterasi, langkah kerja, software. Tidak ada salahnya dengan pemikiran tersebut. Metode simpleks adalah suatu algoritma yang berguna dalam menyelesaikan masalah program linear (PL), atau masalah-masalah lain, yang pemodelannya bisa dibawa ke pemodelan PL. Seperti telah kita pelajari pada pekan-pekan sebelumnya mengenai masalah PL yang penyelesaiannya menggunakan cara grafik. Namun penyelesaian cara grafik ini terbatas pada banyaknya variabel yang terlibat dalam masalah. Karena keterbatasan dalam menggambarkan masalah ke dalam grafik yaitu sampai dimensi tiga, yang artinya hanya tiga variabel yang ada dalam masalah. Padahal dalam kehidupan sesungguhnya, karena masalah PL merupakan masalah nyata yang kita selesaikan secara matematis, yang tentu saja variabel dan kendala yang ada akan sangat banyak, bagaimana kita akan menyelesaikannya jika metode grafik tidak dapat menyelesaikan masalah-masalah tersebut?

Pada perang dunia pertama masalah PL ini sudah mulai menjadi pembahasan, dengan tujuan mencari solusi terbaik bagi pertahanan tentara Amerika, baik dari logistik, obat-obatan, serdadu, dsb. George Danzig bisa dikatakan sebagai orang yang mengembangkan metode simpleks sebagai cara yang dianggap paling efisien dalam menyelesaikan masalah PL ini.

Sebelum dikembangkannya metode simpleks sudah berkembang beberapa metode untuk menyelesaikan masalah PL, diantaranya metode titik interior dan metode Karmarkar. Jika pada metode grafik, prinsip utama kerja kita adalah menentukan plb pada titik-titik sudut daerah layaknya, metode titik interior dan metode Karmarkar bekerja mulai pada titik interior (dalam) daerah layak kemudian bergerak kearah luar daerah layak (ke daerah batas daerah layak) yaitu menuju ke titik plb yang berupa titik sudut atau sisi tepi daerah layak. Metode Karmarkar kurang berkembang, namun metode titik interior berkembang sangat pesat, terutama untuk pembahasan masalah PL secara analitis.

Bagaimana dengan metode simpleks? Prinsip kerja metode simpleks mirip dengan metode grafik, namun cara penyelesaiannya lebih aljabar. Penyelesaian yang dilakukan pada setiap iterasi adalah bergerak dari satu titik sudut daerah layak ke titik sudut daerah layak lainnya, hingga diperoleh titik sudut yang memberikan solusi optimal masalah.

Tidak bisa digambarkan secara grafik, namun mengapa bisa dikatakan bekerja pada titik-titik sudut daerah layak? Ilmu matematika adalah ilmu yang sangat indah. Kita bisa bekerja pada model sederhana untuk kemudian dengan cara yang valid kita generalisasi atau perumum ke masalah yang lebih kompleks, sehingga diperoleh hasil yang juga valid.

Pada bab ini juga kita akan bekerja pada masalah PL untuk mempermudah pemahaman kita akan masalah yang dihadapi, setelah itu kita perumum untuk masalah PL yang lebih kompleks, yaitu masalah PL dengan variabel lebih dari tiga. Baik itu sedikit pengantar untuk masuk ke masalah PL metode simpleks.

Sebagai tambahan, pada masalah PL metode simpleks ini, kita akan berkenalan dengan beberapa variabel baru yang akan membantu kita.

Mari kita mulai…

Karena masalah ini masih masalah optimasi, maka tak akan lepas dari pemodelam matematika masalah. Pemodelan ini kita perumum menjadi $n$ variabel dengan $m$ kendala.

Diberikan masalah PL:

Mengoptimumkan (Memaksimumkan atau meminimumkan)

$$f(x_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

terhadap kendala

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \; (\leq, =, \geq) b_i, i = 1,2, \dots, m \tag{1}$$

$$x_j \geq 0, \forall j = 1,2, \dots, n.$$

Masalah PL tersebut merupakan bentuk umum masalah PL, dan bisa dikatakan merupakan generalisasi masalah PL metode grafik yang biasanya hanya bekerja dengan dua sampai tiga variabel saja.

Persamaan (1) dapat dinyatakan sebagai:

Memaksimumkan / meminimumkan

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

terhadap kendala

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n (\leq, =, \geq) b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n (\leq, =, \geq) b_2 \\ &\vdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n (\leq, =, \geq) b_m \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Keterangan:

$c_j, j = 1,2,3, \dots, m$ adalah *cost unit* / satuan biaya

$x_j, j = 1,2,3, \dots, m$ adalah variabel masalah / variabel keputusan

$b_i,\ i = 1,2,3, \dots, n$ adalah sumber daya / koefisien ruas kanan / suku tetap ruas kanan

$a_{ij}$ adalah koefisien kendala.

Secara umum pada masalah tersebut terdapat *m* kendala utama dan *n* variabel.

Dari (2), kendala utamanya dapat dinyatakan sebagai perkalian matriks.

Memaksimumkan / meminimumkan $f(\bar{x}) = \bar{c}^T\bar{x}$

dengan kendala

$$A\bar{x} (\leq, = \geq) \bar{b}$$

$$\bar{x} \geq \bar{0}$$

dengan

$$\bar{c}^T = [c_1\ \ c_2\ \ \dots\ \ c_n]$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ \ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ \ \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Telah diketahui pada metode grafik terdapat prinsip-prinsip:

1. Setiap kendala utama merupakan bidang hiper yang konveks.
2. Irisan kendala-kendala utama menghasilkan daerah layak yang konveks.
3. Plb yang diperoleh merupakan titik pada batas-batas luar daerah layak konveks tersebut.

Metode simpleks yang diterapkan pada masalah PL persamaan (1) dan (2), memakai prinsip-prinsip serupa seperti pada masalah PL metode grafik, yaitu mencari plb yang merupakan titik-titik batas daerah layak konveks, terutama titik-titik sudut daerah layak.

Metode simpleks mempunyai alur berpikir sebagai berikut:

1. Pemodelan matematika masalah nyata ke model masalah PL.
2. Mengubah masalah PL ke bentuk kanonik masalah.
3. Menyusun matriks kanonik masalah.
4. Menyusun Tabel awal masalah bentuk kanonik.
5. Melakukan uji optimum pada tabel.
6. Membuat kesimpulan dan mengembalikan hasil optimum sebagai solusi masalah nyata.

1. Pemodelan matematika masalah nyata ke model masalah PL

Untuk pemodelan masalah, seperti telah kita pelajari sebelumnya, kita harus menentukan variabel-variabel, notasi, dan konstanta yang terlibat dalam masalah. Kemudian masalah nyata tersebut, dinyatakan dalam model matematika masalah

PL. Tidak akan dibahas kembali, karena sudah dibahas sebelumnya. Bisa dilihat-lihat kembali handout yang membahas masalah ini, atau buku teks yang kalian miliki.

2. Mengubah masalah PL ke bentuk kanonik masalah

Apa yang dimaksud bentuk kanonik masalah? Bentuk kanonik disebut juga bentuk siap simpleks, yaitu masalah PL dengan semua kendala utama sudah berbentuk persamaan, memuat variabel basis, dan fungsi tujuan sudah menjadi fungsi tujuan yang memuat variabel basis. Bentuk kanonik ini juga merupakan bentuk masalah PL yang memuat solusi awal basis.

Bagaimana cara mengubah masalah PL ke bentuk kanonik, berikut akan dijelaskan. Untuk mendapatkan bentuk kanonik, kita ubah dulu kendala utama masalah PL yang berupa pertidaksamaan atau persamaan yang belum memuat variabel basis menjadi persamaan yang memuat variabel basis. Dalam pengubahan ini, kita akan berkenalan dengan tiga variabel tambahan masalah, yaitu variabel slack, variabel surplus, dan variabel artifisial.

Ketiga variabel tambahan tersebut mempunyai sifat mengetatkan atau melonggarkan kendala utama dengan aturan sebagai berikut:

- Variabel *slack*, $s_k$, yaitu variabel yang mengetatkan kendala bertanda $\leq$, sehingga menjadi kendala persamaan.

  Pada kendala utama berbentuk pertidaksamaan linear $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \leq b_k$, ditambahkan variabel slack $s_k \geq 0$ sehingga pertidaksamaan linear menjadi persamaan linear berikut: $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n + s_k = b_k$, dan selanjutnya $s_k$ menjadi variabel basis masalah awal.
- Variabel *surplus*, $t_l$, yaitu variabel yang melonggarkan kendala bertanda $\geq$, sehingga menjadi kendala persamaan.

  Pada pertidaksamaan linear: $a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \cdots + a_{ln}x_n \geq b_l$, ditambahkan variabel surplus $t_l \geq 0$ sehingga pertidaksamaan linear menjadi persamaan linear berikut: $a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \cdots + a_{ln}x_n = b_l + t_l$, atau

$$a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \cdots + a_{ln}x_n - t_l = b_l.$$

(3)

$t_l$ bukan variabel basis masalah awal.

- Variabel *artifisial/semu*, $q_l$, yaitu variabel yang ditambahkan pada kendala berbentuk persamaan linear namun belum memuat variabel basis.

  Pada (3) ditambahkan variabel artifisial $q_l \geq 0$ sehingga persamaan linear menjadi:

  $$a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \cdots + a_{ln}x_n - t_l + q_l = b_l,$$

  dan $q_l$ menjadi variabel basis masalah awal.