Sejarah Perkembangan Program Linear

Salah satu Teknik Riset Operasi yang digunakan paling luas adalah Program Linear (PL). Program Linear merupakan metode matematika dalam mengalokasikan sumberdaya yang terbatas untuk mencapai suatu tujuan seperti memaksimumkan keuntungan atau meminimumkan biaya. Sumberdaya yang terbatas tersebut merupakan kendala, yang berupa fungsi linear, sedangkan tujuan merupakan fungsi tujuan yang berupa fungsi linear juga.

Pada tahap awal, penerapan-penerapan PL banyak dijumpai pada masalah-masalah militer seperti logistik, transportasi, dan perbekalan. Program linear berkembang sejak tahun 1940 yang pada awalnya diperlukan untuk memecahkan masalah perencanaan selama masa perang.

Program linear mengalami perkembangan pesat setelah masa perang dunia karena banyak industri yang menggunakannya. George B. Dantzig menemukan metode simpleks pada tahun 1947, sedangkan John von Neumann menemukan teori dualitas di tahun yang sama. Hadiah Nobel bidang ekonomi diberikan pada 1975 kepada matematikawan Leonid Kantorovich (USSR) dan ahli ekonomi Tjalling Koopmans (USA) untuk kontribusi mereka dalam teori pengalokasian optimal sumber daya yang memainkan peran penting pada Program Linear.

PL diterapkan dalam masalah bisnis, ekonomi, industri, militer, sosial, teknik, dan lain-lain. PL berkaitan dengan penjelasan suatu masalah dunia nyata sebagai suatu model matematika yang terdiri dari sebuah fungsi tujuan linear dan beberapa kendala linear. Misalnya, dalam ekonomi, fungsi tujuan dapat berkaitan dengan pengaturan secara optimal sumberdaya-sumberdaya untuk memperoleh keuntungan maksimal atau biaya minimal, sedangkan fungsi batasan menggambarkan batasan-batasan kapasitas tersedia yang dialokasikan secara optimal ke berbagai kegiatan. Industri yang memanfaatkan program linear di antaranya ialah industri transportasi, energi, telekomunikasi, dan manufaktur. Program linear juga terbukti berguna dalam membuat model berbagai jenis masalah dalam perencanaan, perancangan rute, penjadwalan *crew* dalam penerbangan dan pelayaran, jaringan telekomunikasi, pencampuran bahan / *blending*, pemberian tugas, pemotongan stok, dan desain.

Masalah keputusan yang sering dihadapi adalah: alokasi sumberdaya yang terbatas. Sumberdaya dapat berupa uang, tenaga kerja, bahan mentah, kapasitas mesin, waktu, ruangan, atau teknologi. Sumberdaya yang terbatas tersebut merupakan kendala berupa fungsi linear.

Tugas analisis adalah mencapai hasil terbaik yang mungkin dengan keterbatasan sumberdaya ini. Hasil yang diinginkan mungkin ditunjukkan sebagai memaksimumkan beberapa ukuran seperti keuntungan, penjualan, dan kesejahteraan, atau meminimumkan seperti pada biaya, waktu, dan jarak. Tujuan merupakan fungsi tujuan yang berupa fungsi linear juga.

Masalah Optimasi

Dalam kehidupan sehari-hari manusia cenderung untuk hidup berprinsip ekonomi, dengan usaha sesedikit mungkin dapat memperoleh hasil sebanyak mungkin. Banyak yang dicari nilai optimumnya, misalnya pendapatan yang maksimum, ongkos yang minimum, hidup yang paling nyaman, dsb., maka timbullah masalah optimasi.

Apabila gejala yang dioptimumkan tersebut ternyata kuantitatif maka masalah optimum menjadi masalah ekstrem yang tak lain adalah maksimum dan minimum. Karena yang akan dibahas hanyalah masalah yang kuantitatif maka istilah optimum dan ekstrem akan digunakan kedua-duanya dengan arti yang sama.

Optimasi Fungsi Tanpa Kendala

Bila diberikan fungsi satu variabel, $f: x \to y = f(x), x \in R$, yang terdiferensialkan $n+1$ kali, maka menggunakan deret Taylor di sekitar x_0 dapat disimpulkan, bila

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^n(x_0) = 0 \text{ dan } f^{n+1}(x_0) \neq 0$$

(i) untuk n genap: terdapat titik balik bagi $f(x)$ di x_0,

(ii) untuk n ganjil: terjadi ekstrem, dan bila

- $f^{n+1}(x_0) < 0$, maka $f(x)$ mencapai maksimum di x_0,
- $f^{n+1}(x_0) > 0$, maka $f(x)$ mencapai minimum di x_0.

Contoh:

1. $y = f(x) = \sin x$, maka $f'(x) = \cos x$

$$f''(x) = -\sin x,$$

Untuk $x = \frac{\pi}{2}$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ dan

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1,$$

jadi $n = 1$ (ganjil), sehingga terjadi ekstrem.

Karena $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ maka $\sin x$ mencapai maksimum untuk $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Untuk $x = \frac{3\pi}{2}$, $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ dan

$$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1,$$

karena $f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) > 0$ maka $\sin x$ mencapai minimum untuk $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$.

2. $y = f(x) = x^4 - 4x^3$, maka
   $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$
   $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$
   $f'''(x) = 24x - 24$.
   Untuk $x = 3$, $f'(3) = 0$, $f''(3) = 36 > 0$, maka y mencapai minimum di $x = 3$.
   Untuk $x = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -24 \neq 0$, jadi n genap, maka di $x = 0$ terjadi titik balik stasioner. (grafiknya garis singgung di titik balik akan mendatar).

Untuk fungsi dua variabel dengan rumus: $z = F(x, y)$ yang terdiferensial dua kali, bila di $P(x_0, y_0)$ dipenuhi

Syarat stasioner :

$$\frac{\delta z}{\delta x} = 0, \qquad \frac{\delta z}{\delta y} = 0$$

$$\Delta = \frac{\delta^2 z}{\delta x^2}\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} - \left(\frac{\delta^2 z}{\delta x\,\delta y}\right)' > 0$$

maka z akan mencapai ekstrem di $P(x_0, y_0)$.

Lebih lanjut, jika:

$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} > 0$ maka ekstrem yang timbul adalah ekstrem minimum,

$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} < 0$ maka ekstrem yang timbul adalah ekstrem maksimum.

Contoh:

Produksi dua macam sepatu (S_1 dan S_2) memberikan fungsi laba bulanan sebagai berikut $L = -x^2 - xy - 2y^2 + 5x + 13y$

dengan L : laba

x : tingkat produksi S_1 (banyak S_1 yang diproduksi)

y : tingkat produksi S_2 (banyak S_2 yang diproduksi).

Dicari nilai (x, y) yang memaksimumkan L.

Penyelesaian:

Dari syarat stasioner diperoleh $P(1,3)$ sebagai titik stasioner dan setelah dihitung ditemukan bahwa $\Delta = 7$ (positif), sehingga L mencapai ekstrem di $(x, y) = (1,3)$.

Lebih jauh $\left(\frac{\delta^2 L}{\delta x^2}\right)_{(1,3)} = -2$ (negatif), berarti ekstrem L tersebut merupakan ekstrem maksimum, sehingga disimpulkan bahwa supaya laba maksimum sebaiknya diproduksi 1 unit S_1 dan 3 unit S_2 per bulan (satu unit bisa saja 1.000 pasang sepatu).

Ekstrem-ekstrem tersebut disebut ekstrem stasioner karena terjadi saat nilai turunan pertama menjadi nol.

Optimasi Fungsi dengan Kendala

Contoh:

Pagar kawat sepanjang $24\ m$ akan digunakan untuk memagari kandang ayam berbentuk persegi Panjang. Bagaimana ukuran kandang supaya luasnya maksimum?

Penyelesaian:

Misalkan p : Panjang kandang

q : lebar kandang

maka luas kandang $L = pq$

sedang keliling kandang $2(p + q) = 24$.

Soal menjadi: mencari p dan q (tak negatif) yang memaksimumkan $L = pq$ dengan syarat $2(p + q) = 24$.

Soal ini disebut soal ekstrem (fungsi 2 variabel) dengan kendala berbentuk persamaan. Untuk penyelesaian contoh ini soal dapat diubah menjadi soal ekstrem fungsi 1 variabel tanpa kendala dengan cara mengeliminasikan salah satu variabelnya, misalnya q sebagai berikut.

Tulis $q = 12 - p$, dan $L = p(12 - p)$ harus dimaksimumkan.

Didapat $p = 6$, sehingga $q = 6$, dan memeberikan L maksimum 36.

Ini berarti kandang harus dibuat dengan ukuran 6 m kali 6 m (berarti berbentuk persegi).

Secara umum masalah ekstrem dengan kendala dapat dirumuskan sbb

a. Ekstrem dengan kendala berbentuk persamaan
   Mencari x_j yang mengoptimumkan $f = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$
   dengan kendala $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $i = 1,2,3, \dots, m$.
   Salah satu metode penyelesaiannya dengan menggunakan pengganda Lagrange (Kalkulus)
b. Ekstrem dengan kendala berbentuk pertidaksamaan
   Mencari x_j yang mengoptimumkan $f = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$
   dengan kendala $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)(\leq, =, \geq)0$, $i = 1,2,3, \dots, m$.

Model Matematis

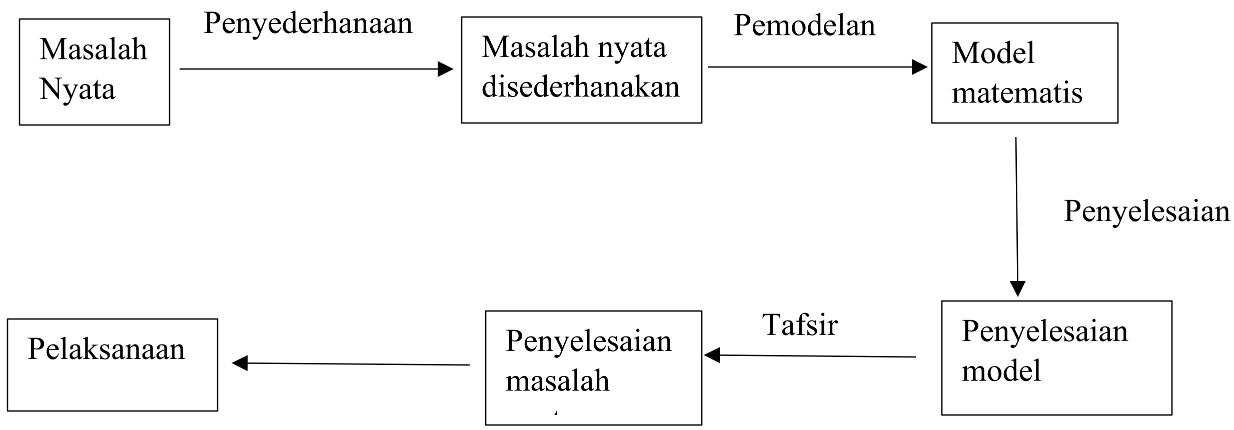
Dalam hidup sehari-hari selalu ada saja masalah yang dihadapi oleh suatu negara, suatu perusahaan, atau oleh seseorang tertentu. Secara umum masalah dapat ditafsirkan sebagai suatu kesenjangan antara yang seharusnya terjadi dan yang sesungguhnya terjadi, atau antara cita-cita dan keadaan sekarang. Menyelesaikan masalah berarti menjembatani kesenjangan tersebut.

Analisis sistem memberikan langkah-langkah penyelesaian sbb

i. Mengidentifikasi masalah
ii. Mencari metode-metode penyelesaian
iii. Memilih metode yang paling cocok, paling murah, atau paling cepat (optimisasi)
iv. Melaksanakan (implementasi)
v. Mengevaluasi hasil

(B. Susanta, 1994)

Apabila masalah nyata atau sebagian masalah tersebut bersifat kuantitatif maka matematika dapat membantunya. Pada langkah I matematika berusaha untuk merumuskan masalah dalam arti menerjemahkan masalah ke bahasa matematika. Kerja ini disebut menyusun model ,atematis dari masalah tersebut. Hasilnya yang misalnya berupa relasi-relasi aljabar disebut model matematis bagi masalah tersebut.



Langkah-langkah memformulasikan masalah PL menjadi model matematika:

1. Tentukan variabel yang tak diketahui (variabel keputusan) dan nyatakan dalam simbol matematika.
2. Membentuk fungsi tujuan yang ditunjukkan sebagai suatu hubungan linear (bukan perkalian) dalam variabel keputusan.
3. Menentukan semua kendala masalah tersebut dan mengekspresikan dalam persamaan atau pertidaksamaan yang juga merupakan hubungan linear dari variabel keputusan yang mencerminkan keterbatasan sumberdaya masalah itu.

Data yang dibutuhkan

Sumberdaya	Pemakaian sumberdaya per unit kegiatan				Jumlah sumberdaya yang tersedia
	Kegiatan				
	1	2	$\cdots$	n	
1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
Δz / unit kegiatan	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	
Tingkat kegiatan	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	

Contoh:

Suatu perusahaan yang mempunyai 3 pabrik akan memproduksi 2 jenis produk. Pabrik 1 dapat menghasilkan satu unit produk I selama 1 jam tetapi tidak dapat menghasilkan produk II. Pabrik 2 dapat menghasilkan satu unit produk II selama 2 jam tetapi tidak dapat menghasilkan produk I. Pabrik 3 dapat menghasilkan satu unit produk I selama 3 jam dan menghasilkan satu unit produk II selama 2 jam. Kapasitas produksi pabrik 1 setiap pekannya adalah dapat beroperasi paling lama 4 jam, pabrik 2 paling lama 12 jam, dan pabrik 3 paling lama 18 jam. Adapun keuntungan produk I per unit adalah 3 dan produk II adalah 5. Perusahaan tersebut ingin memaksimumkan laba yang diperoleh dengan keterbatasan kapasitas produksi setiap pabriknya. Masalahnya adalah berapa unit masing-masing produk I dan produk II yang harus diproduksi.

Untuk memudahkan formulasi masalah ke model matematika, disusun tabel data sebagai berikut.

Pabrik	Produk I (jam) x	Produk II (jam) y	Jam tersedia /pekan
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Laba	3	5	

Pembentukan Model Matematika

Langkah 1. **Variabel**

Misalkan x: banyaknya produk I yang akan diproduksi

y: banyaknya produk II yang akan diproduksi.

Langkah 2. **Fungsi Tujuan**

Laba total yang akan diperoleh jika memproduksi produk I sebanyak x dan produk II sebanyak y adalah $3x + 5y$, sehingga fungsi tujuannya adalah:

Memaksimumkan $f(x, y) = 3x + 5y$.

Langkah 3. **Kendala**

Untuk memproduksi produk I sebanyak x unit dan produk II sebanyak y unit, maka lama operasi:

Pabrik 1 $\quad 1x + 0y$

Pabrik 2 $\quad 0x + 2y$

Pabrik 3 $\quad 3x + 2y$

Pabrik 1 dapat beroperasi ≤ 4 jam

Pabrik 2 dapat beroperasi ≤ 12 jam

Pabrik 3 dapat beroperasi ≤ 18 jam

Banyaknya produk I dan II lebih besar atau sama dengan nol, $x \geq 0, y \geq 0$.

Dengan demikian diperoleh kendala masalah adalah

$1x + 0y \leq 4$

$0x + 2y \leq 12$

$3x + 2y \leq 18$

$x \geq 0$

$y \geq 0$.

Formulasi masalah tersebut sebagai masalah Program Linear (PL) adalah:

Menentukan (x, y) yang

memaksimumkan $f(x, y) = 3x + 5y$

dengan kendala

$1x + 0y \leq 4$

$0x + 2y \leq 12$

$3x + 2y \leq 18$

$x \geq 0$

$y \geq 0$.

Secara umum, suatu masalah PL dapat diformulasikan sebagai berikut.

Memaksimumkan / meminimumkan

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \quad (1)$$

terhadap kendala

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n (\leq, =, \geq) b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n (\leq, =, \geq) b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n (\leq, =, \geq) b_m \end{aligned} \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \quad (3)$$

Keterangan:

$c_j, j = 1,2,3, \dots, n$ adalah *cost unit* / satuan biaya

$x_j, j = 1,2,3, \dots, n$ adalah variabel masalah / variabel keputusan

$b_i, i = 1,2,3, \dots, m$ adalah sumber daya / koefisien ruas kanan / suku tetap ruas kanan

a_{ij} adalah koefisien kendala.

(1) dinamakan fungsi tujuan / fungsi sasaran / fungsi objektif
(2) dinamakan kendala utama
(3) dinamakan kendala non negatif / kendala tanda.

Program linear dapat direpresentasikan dalam notasi matriks sebagai berikut:

Memaksimumkan / meminimumkan $f(\bar{x}) = \bar{c}^T \bar{x}$

dengan kendala

$$A\bar{x} (\leq, = \geq) \bar{b}$$

$$\bar{x} \geq \bar{0}$$

dengan

$$\bar{c}^T = [c_1 \;\; c_2 \;\; \dots \;\; c_n]$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Masalah PL tersebut juga dapat dituliskan sebagai berikut:

Memaksimumkan / meminimumkan

$$f(x_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

terhadap kendala

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \; (\leq, =, \geq) b_i, \forall i, i = 1,2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \forall j, j = 1,2, \dots, n.$$

Soal Latihan:

1. Pabrik cat "Warna Merona" akan memproduksi dua jenis cat, yaitu cat interior dan cat eksterior dengan menggunakan dua bahan mentah A dan B. Persediaan bahan A 6 ton / hari, sedangkan bahan B tersedia 8 ton / hari. Cat interior dibuat dari bahan campuran 2 ton bahan A dan 1 ton bahan B, sedangkan cat eksterior dibuat dari 1 ton bahan A dan 2 ton bahan B. Kebijakan pabrik juga didasarkan pada survei pasar yang menunjukkan bahwa permintaan cat interior tidak pernah lebih 1 ton dari cat eksterior dan permintaan cat interior paling banyak 2 ton per hari. Harga grosir cat interior $3.000 / ton dan cat eksterior $2.000 / ton. Masalahnya adalah berapa ton cat interior dan cat eksterior yang harus diproduksi agar keuntungan bruto pabrik tersebut maksimal. Rumuskan masalah tersebut ke dalam model matematika.

2. Misalkan produsen perahu memproduksi dua jenis perahu untuk olahraga dan berkemah, yaitu perahu dayung keluarga dan kano olahraga. Perahu dicetak dari aluminium dengan menggunakan mesin pengepres besar dan diselesaikan dengan tenaga tangan. Sebuah perahu dayung membutuhkan 23 kg aluminium, 6 menit waktu mesin, dan 3 jam kerja finishing; sebuah kano membutuhkan 14 kg aluminium, 5 menit waktu mesin, dan 5 jam kerja finishing. Untuk 3 bulan ke depan perusahaan dapat berkomitmen hingga 1 ton aluminium, 5 jam waktu mesin, dan 200 jam tenaga kerja untuk pembuatan perahu kecil. Perusahaan menyadari keuntungan Rp. 720.000,00 dari penjualan perahu dayung dan Rp. 850.000,00 keuntungan dari penjualan kano. Dengan asumsi bahwa semua kapal yang dibuat dapat dijual, berapa banyak dari masing-masing jenis harus diproduksi dalam 3 bulan ke depan untuk memaksimalkan keuntungan?

Aturan Tugas 1:

1. Kerjakan pada folio bergaris
2. Scan dan kirim ke no 085600946135 sebelum hari Selasa, 14 September 2021, pk 09.00
3. Format penamaan file: no presensi_kelas_nama_Tugas 1