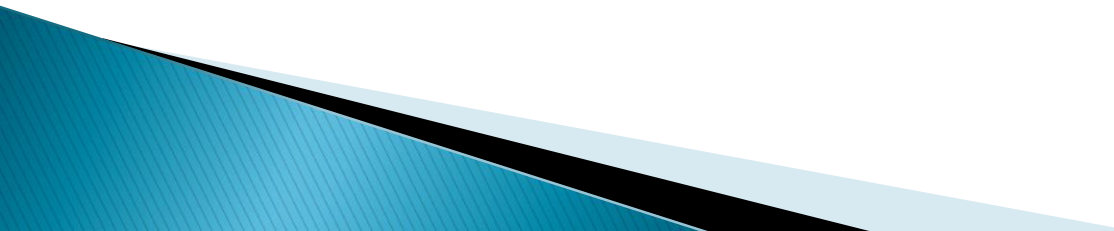


Peubah Acak

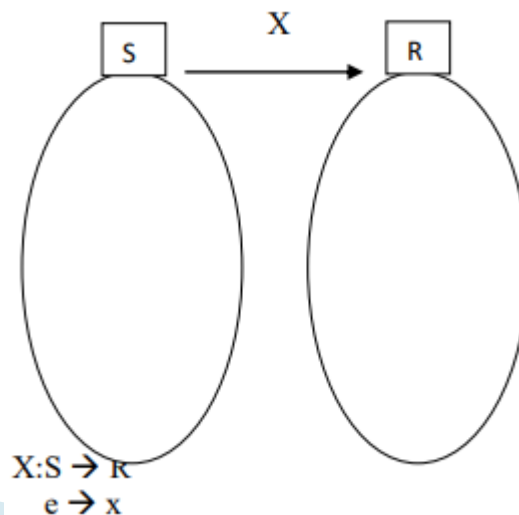
Kuliah ke-4

Masalah 1

- ▶ Suatu percobaan mengamati 3 alat elektronik dilakukan, untuk mengamati apakah alat-alat elektronik tersebut masih bagus atau sudah cacat. Tentukan ruang sampel percobaan tersebut
 - ▶ Gambarkan fungsi yang menyatakan banyak alat elektronik yang cacat pada percobaan di atas.
- 

Definisi

- ▶ Peubah acak X adalah fungsi yang memasangkan setiap anggota ruang sampel dengan tepat satu bilangan real, yaitu $X(e) \in \mathbb{R}$ untuk setiap $e \in S$
- ▶ Peubah acak X adalah fungsi bernilai riil dengan domain ruang sampel S



Contoh 1

Dari masalah 1 maka :

Ruang sampel $S = \{BBB, BBC, BCB, CBB, CCB, CBC, BCC, CCC\}$.

Misal X peubah acak yang menyatakan banyak peralatan yang cacat, maka nilai-nilai dari X , dituliskan $x = 0, 1, 2, 3$

Himpunan nilai nilai yang mungkin dari peubah acak X dinyatakan dengan

$$X(S) = \{0, 1, 2, 3\}$$

Contoh 2

- ▶ Percobaan memancing boneka
- ▶ Misal X peubah acak yang menyatakan banyak percobaan sampai berhasil
- ▶ Nilai-nilai X adalah : $x = 1, 2, 3, \dots$
- ▶ Himpunan nilai-nilai X yang mungkin
- ▶ $X(S) = \{ 1, 2, 3, \dots \}$

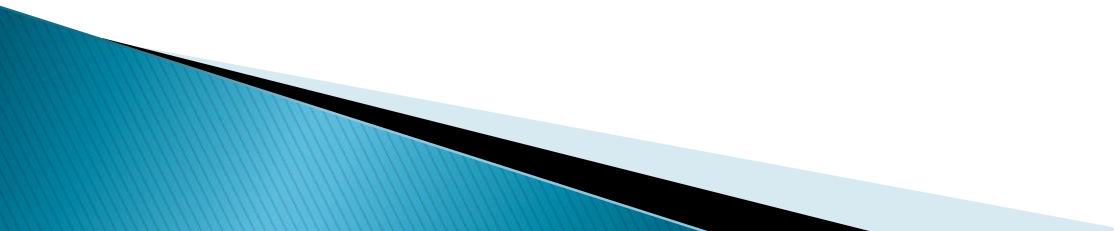
Contoh 3

Percobaan mengamati bayi lahir normal

Misal X menyatakan berat badan bayi lahir dalam kg.

Maka nilai X yang mungkin adalah $(2 ; 4,5)$

Peubah Acak Diskrit dan Kontinu

- ▶ Peubah acak dengan himpunan nilai yang mungkin merupakan himpunan terhitung (countable) baik berhingga maupun tak hingga disebut peubah acak diskrit (contoh 1, 2)
 - ▶ Peubah acak dengan himpunan nilai yang mungkin merupakan himpunan tak terhitung (uncountable) baik berhingga maupun tak hingga disebut peubah acak Kontinu (contoh 3)
- 

Masalah 4

Pada percobaan mengamati 3 alat elektronik untuk mengamati apakah alat-alat elektronik tersebut masih bagus atau sudah cacat.

Berapakah peluang bahwa:

1. terdapat satu alat cacat?
2. terdapat dua alat cacat?
3. tidak ada alat yang cacat?
4. terdapat 4 alat yang cacat?
5. Buatlah tabel nilai-nilai peluang untuk setiap nilai yang mungkin
6. Buatlah grafik nilai-nilai peluang pada no 5
7. Buatlah tabel nilai-nilai peluang kumulatif pada no 5.
8. Buatlah grafik nilai-nilai peluang kumulatif no 7

Peubah Acak Diskrit

► Definisi:

Misal X peubah acak diskrit dengan nilai-nilai yang mungkin x_1, x_2, \dots, x_n atau, x_1, x_2, \dots

Fungsi $f(x) = P(X = x)$, untuk $x = x_1, x_2, \dots$

disebut fungsi padat peluang diskrit (pdf) dari peubah acak X

Untuk selanjutnya $f(x)$ disebut fungsi peluang peubah acak X

Teorema

$f(x)$ merupakan fungsi peluang peubah acak diskrit X jika hanya jika

$$\forall x, f(x) \geq 0$$

$$\sum_x f(x) = 1$$

Fungsi Distribusi Kumulatif (CDF)

- ▶ **Definisi.** Fungsi distribusi kumulatif untuk peubah acak diskret X didefinisikan sebagai

$$F(x) = P(X \leq x)$$

untuk sembarang x nilai peubah acak X

▪



Teorema

Diketahui peubah acak diskret X dengan fungsi peluang $f(x)$, dan $F(x)$ fungsi distribusi kumulatif dari X . Jika nilai-nilai dari peubah acak X dapat disusun dalam susunan yang meningkat yaitu

$x_1 < x_2 < x_3, \dots$, maka

$$f(x_1) = F(x_1)$$

dan untuk sembarang $i > 1$,

$$f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Selanjutnya, untuk $x < x_1$, maka $F(x) = 0$, serta untuk sembarang bilangan real x

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

dengan $x_i \leq x$.

Teorema:

Fungsi $F(x)$ merupakan CDF dari peubah Acak X jhj memenuhi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} F(x + h) = F(x)$$

$$a < b \text{ implies } F(a) \leq F(b)$$

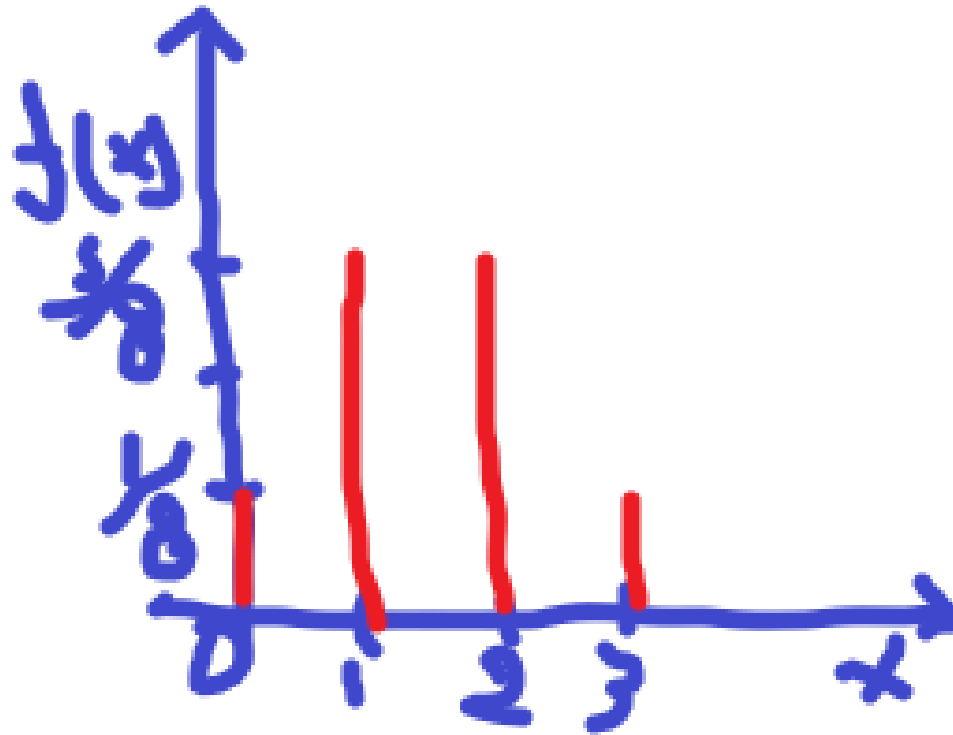
Jawaban masalah 4

- ▶ $S = \{BBB, BBC, BCB, CBB, CCB, CBC, BCC, CCC\}$.
- ▶ Peluang terdapat satu alat cacat $= \frac{3}{8}$
- ▶ Peluang terdapat dua alat cacat =
- ▶ Peluang tidak terdapat alat cacat =
- ▶ Peluang terdapat empat alat cacat =
- ▶ Jika p.a X: banyak alat yang cacat, maka nilai-nilai yang mungkin dari X dinyatakan dengan $x = 0, 1, 2, 3$

- ▶ Tabel nilai peluang untuk setiap nilai yang mungkin

| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $f(x) = P(X = x)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

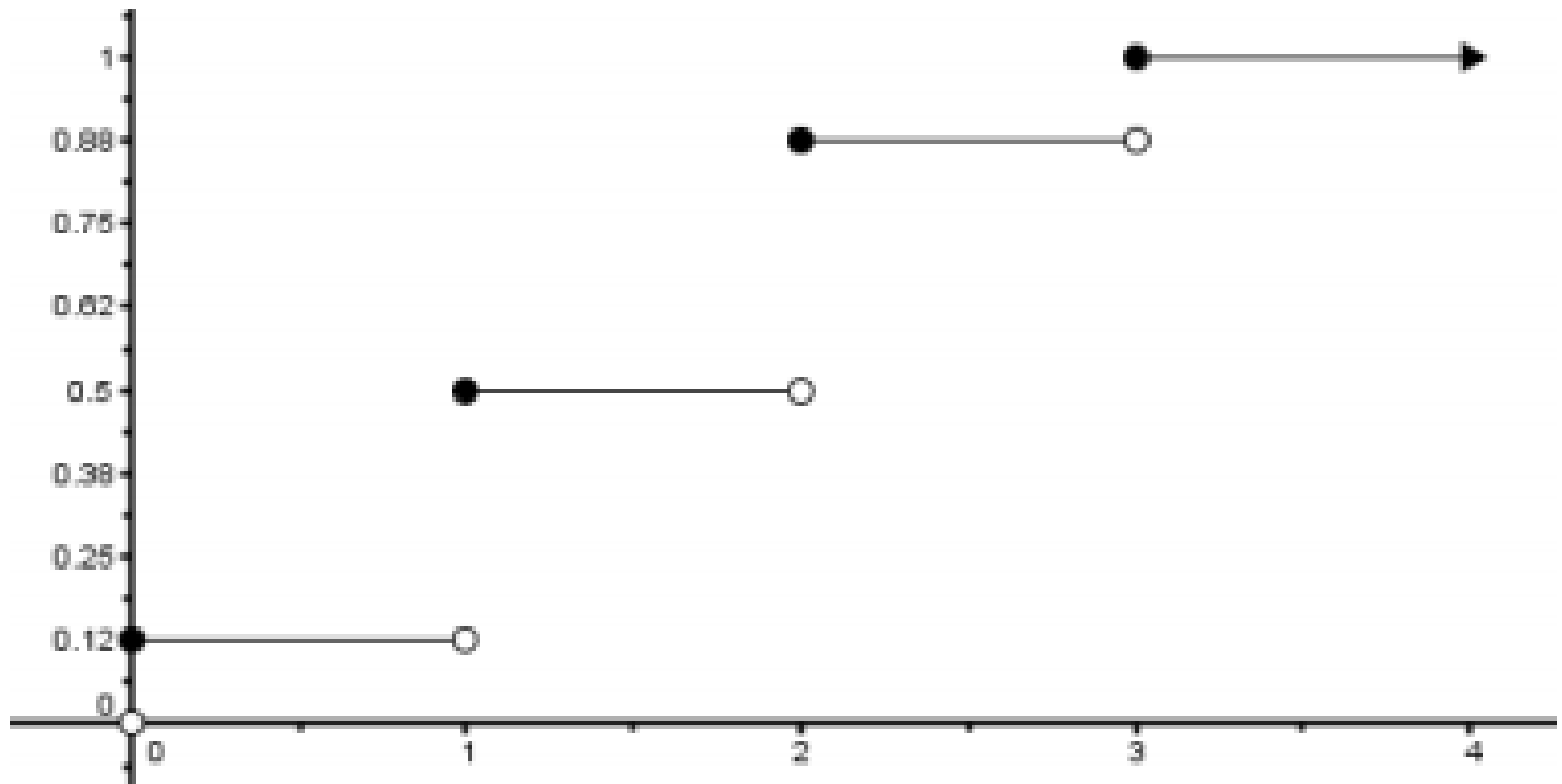
Grafik fungsi peluang



Tabel Fungsi distribusi Kumulatif

| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
|----------------------|---------------|---------------|---------------|-------------------|
| $F(x) = P(X \leq x)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{4}{8}$ | $\frac{7}{8}$ | $\frac{8}{8} = 1$ |

Grafik Fungsi Distribusi Kumulatif



Nilai Harapan

- ▶ Jika X peubah acak diskrit dengan fungsi peluang $f(x)$, nilai harapan peubah acak diskrit X didefinisikan sebagai

$$E(X) = \sum_x x f(x)$$

Dari masalah 4, nilai harapan peubah acak X adalah

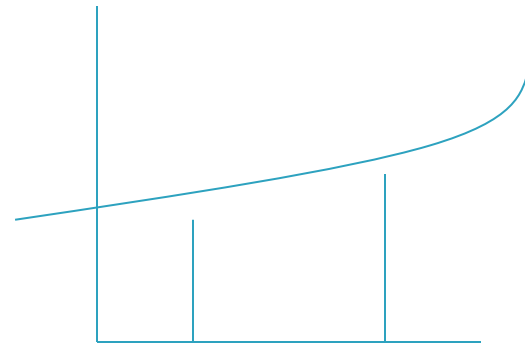
$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x x \cdot f(x) \\ &= 0 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) + 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3) \\ &= 0 + \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} \\ &= \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{12}{8} \end{aligned}$$

Peubah Acak Kontinu

► Definisi:

X disebut sebagai peubah acak kontinu, jika ada suatu fungsi $f(x)$ yaitu fungsi peluang dari X sehingga fungsi distribusi kumulatif $F(x)$ dapat dinyatakan sebagai

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$



Dengan menggunakan kalkulus diperoleh

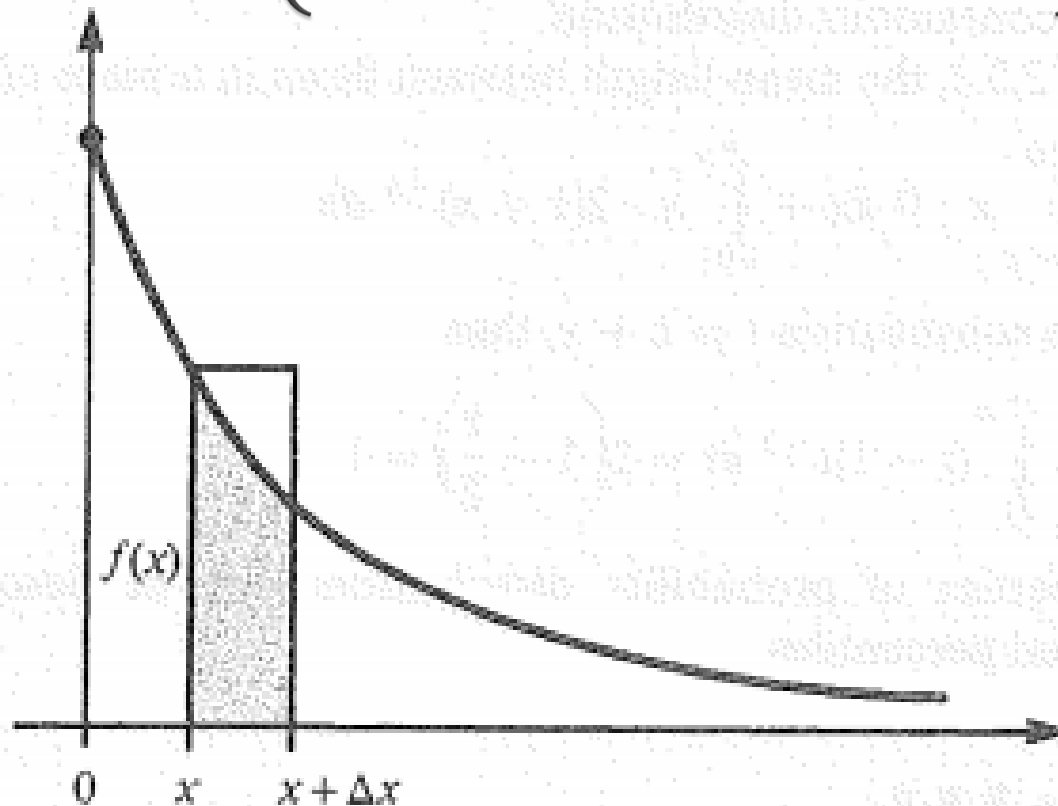
$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = F'(x)$$

Demikian juga

$$\begin{aligned}P[a < X \leq b] &= P[a \leq X < b] = P[a < X < b] \\&= P[a \leq X \leq b]\end{aligned}$$

and each of these has the value $F(b) - F(a)$.

Gambar $P(x < X < x + \Delta x)$



$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Teorema

A function $f(x)$ is a pdf for some continuous random variable X if and only if it satisfies the properties

$$f(x) \geq 0 \quad (2.3.4)$$

for all real x , and

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (2.3.5)$$

Nilai Harapan

If X is a continuous random variable with pdf $f(x)$, then the **expected value** of X is defined by

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx \quad (2.3.9)$$

if the integral in equation (2.3.9) is absolutely convergent. Otherwise we say that $E(X)$ does not exist.

Persentil

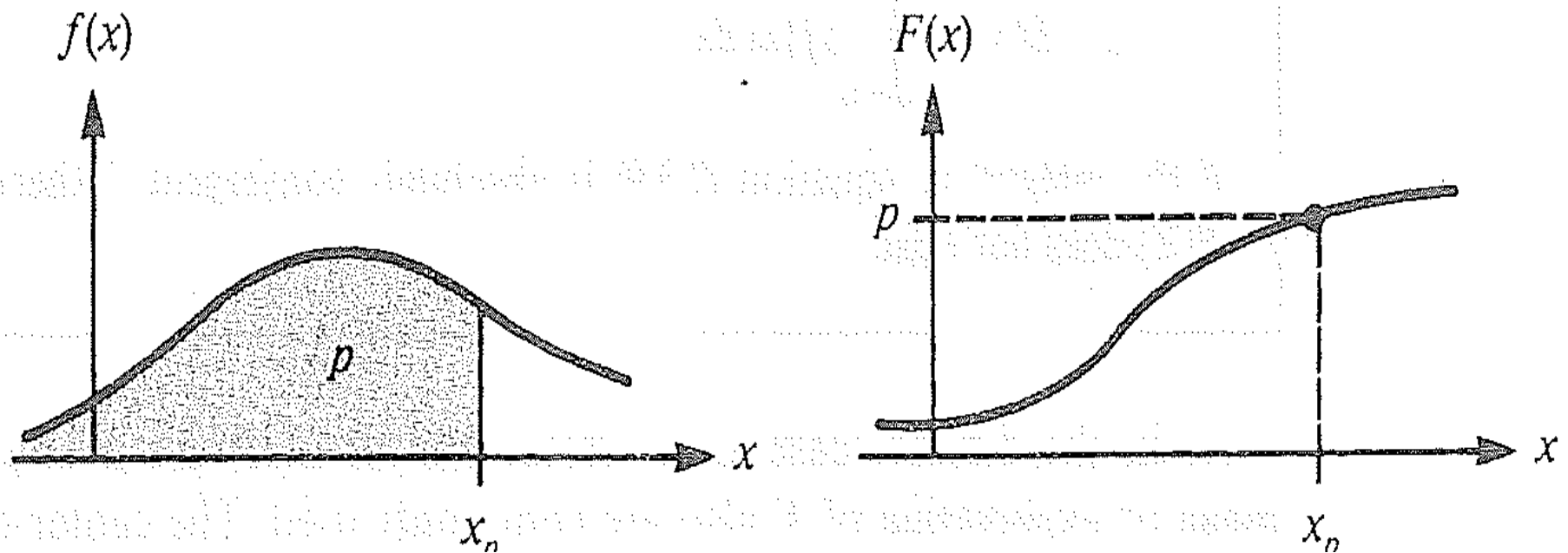
Definition 2.3.3

If $0 < p < 1$, then a $100 \times p$ th percentile of the distribution of a continuous random variable X is a solution x_p to the equation

$$F(x_p) = p$$

(2.3.10)

A $100 \times p$ th percentile



Modus

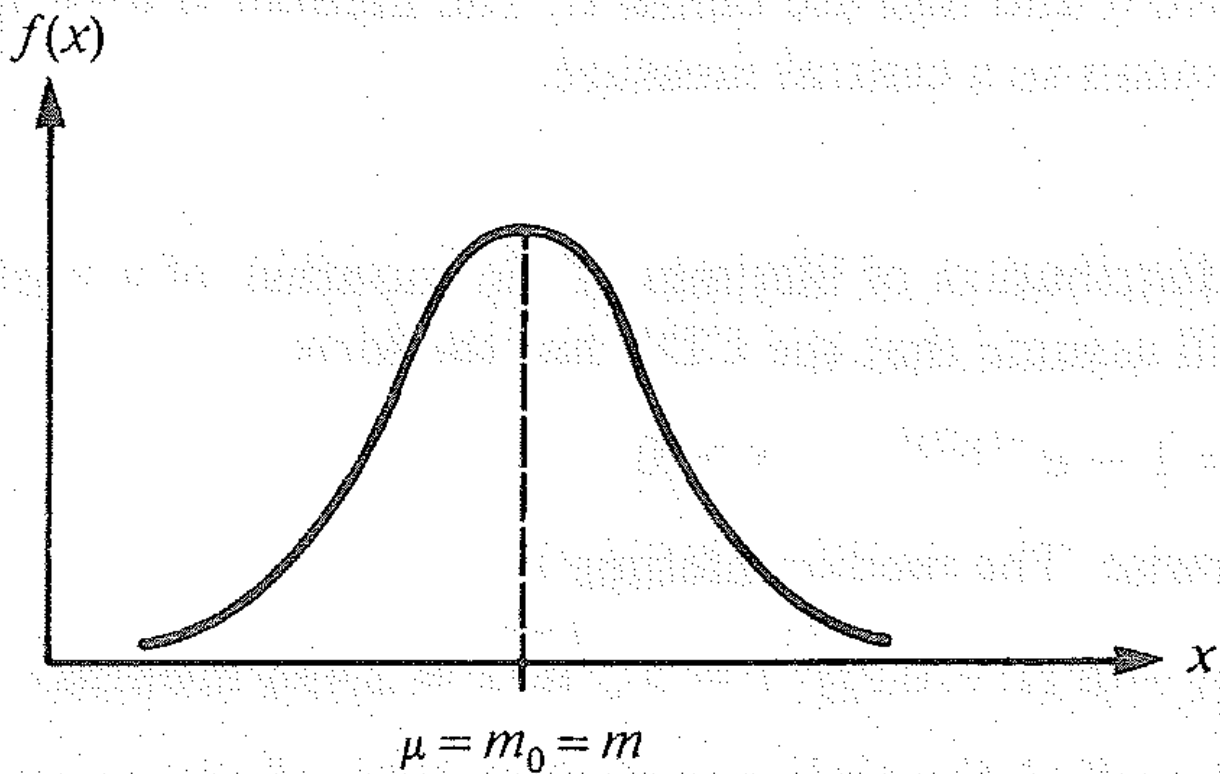
Definition 2.3.4

If the pdf has a unique maximum at $x = m_0$, say $\max f(x) = f(m_0)$, then m_0 is called the mode of X .

Definition 2.3.5

A distribution with pdf $f(x)$ is said to be **symmetric** about c if $f(c - x) = f(c + x)$ for all x .

The pdf of a symmetric distribution



Contoh (Bain, hal 85)

A continuous random variable X has pdf given by $f(x) = c(1-x)x^2$ if $0 < x < 1$ and zero otherwise.

- (a) Find the constant c .
- (b) Find $E(X)$.

Penyelesaian

$$12. \quad f(x) = \begin{cases} c(1-x)x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{x yang lain} \end{cases}$$

$$\text{a. } 1 = \int_0^1 f(x) dx$$

$$1 = \int_0^1 c(1-x)x^2 dx$$

$$1 = c \int_0^1 (x^2 - x^3) dx$$

$$1 = c \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1$$

$$1 = c \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$$

$$1 = c \left(\frac{1}{12} \right)$$

$$c = 12$$

$$\text{b. } E(X) = \int_0^1 x \cdot f(x) dx$$

$$= \int_0^1 x \cdot c(1-x)x^2 dx$$

$$= \int_0^1 x \cdot 12(1-x)x^2 dx$$

$$= \int_0^1 (12x^3 - 12x^4) dx$$

$$= \left[3x^4 - \frac{12}{5}x^5 \right]_0^1$$

$$= 3 - \frac{12}{5} = \frac{3}{5}$$

A continuous random variable X has a pdf of the form $f(x) = 2x/9$ for $0 < x < 3$, and zero otherwise.

- (a) Find the CDF of X .
- (b) Find $P[X \leq 2]$.
- (c) Find $P[-1 < X < 1.5]$.
- (d) Find a number m such that $P[X \leq m] = P[X \geq m]$.
- (e) Find $E(X)$.

Penyelesaian

18. a. $f(x) = \frac{2x}{9}, 0 < x < 3, f(x) = 0$ untuk x yang lain.

CDF of X ,

Untuk $x < 0$ maka $F(x) = 0$

Untuk $0 < x < 3$

$$\begin{aligned} F(x) = P(X \leq x) &= \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{2}{9} t dt \\ &= \left[\frac{1}{9} t^2 \right]_0^x \\ &= \frac{x^2}{9} \end{aligned}$$

Untuk $x > 3$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^3 f(t) dt + \int_3^x f(t) dt \\
 &= \int_0^3 \frac{2}{9} t dt + 0 \\
 &= \left[\frac{t^2}{9} \right]_0^3 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{9}, & 0 < x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

b. $P[X \leq 2] = F(2) = \frac{4}{9}$

c. **Cara 1**

$$\begin{aligned}P[-1 < X < 1,5] &= P[-1 < X < 0] + P[0 < X < 1,5] \\&= \int_{-1}^0 0 \, dx + \int_0^{1,5} \frac{2x}{9} \, dx \\&= 0 + \left[\frac{x^2}{9} \right]_0^{1,5} \\&= \frac{2,25}{9}\end{aligned}$$

Cara 2

$$\begin{aligned}P(-1 < X < 1,5) &= P(X < 1,5) - P(X < -1) \\&= F(1,5) - F(-1) \\&= \frac{1,5^2}{9} - 0 \\&= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

d. $P[X \leq m] = P[X \geq m]$
 $P[X \leq m] = 1 - P[X \leq m]$

Cara 1

$$P[X \leq m] = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^m \left(\frac{2x}{9}\right) dx = \frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{1}{9}x^2\right]_0^m = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9}m^2 = \frac{1}{2}$$

$$m^2 = \frac{9}{2}$$

$$m = \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$m = \frac{3}{2}\sqrt{2} \text{ atau } m = -\frac{3}{2}\sqrt{2} \text{ (tidak memenuhi)}$$

$$\text{Sehingga, } m = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

Cara 2

$$P[X \leq m] = F(m) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{m^2}{9} = \frac{1}{2}$$

$$m^2 = \frac{9}{2}$$

$$m = \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$m = \frac{3}{2}\sqrt{2} \text{ atau } m = -\frac{3}{2}\sqrt{2} \text{ (tidak memenuhi)}$$

$$\text{Sehingga, } m = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

Tugas

Kerjakan soal dari Buku Bain mulai hal 85

No : 2, 7, 10, 12, 17, 19, 20

TERIMA KASIH

