

MI PDS - Problema 1 - Análise do efeito estroboscópico

Alyson Dantas, Gabriel Sá, Lucas Cardoso, Marcelo Mota
Universidade Estadual de Feira de Santana

Abstract—This document aims to describe in an analytical and graphic way the representation, through simulations carried out, of the stroboscopic effect for the curriculum component TEC513 - MI - DIGITAL SIGNAL PROCESSING, of the Computer Engineering course at the State University of Feira de Santana.

Index Terms—efeito, estroboscópico, aliasing, rotação

I. INTRODUÇÃO

A empresa SigmaDelta Inc. atuante no mercado de dispositivos eletrônicos vem enfrentando o desafio de entendimento do fenômeno conhecido como efeito estroboscópico. Considerando a importância da empresa nesse nicho de mercado, foi solicitado aos Engenheiros da Universidade Estadual de Feira de Santa matriculados na disciplina TEC513 - MI - PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAIS, que produzam esse relatório técnico com descrição textual, matemática e simulação do efeito estroboscópico.

Esse documento visa descrever de forma sistemática, analítica e gráfica a representação por meio de simulações, realizadas com o MATLAB, o efeito estroboscópico. Atendendo assim o solicitado pela empresa SigmaDelta Inc.

II. METODOLOGIA

Inicialmente, foi realizado a visualização do efeito estroboscópico através de um experimento utilizando um ventilador com uma faixa em uma das suas hélices e uma lâmpada estroboscópica. Nele foi possível visualizar o comportamento, onde a depender da frequência de flashes curtos era possível notar a mudança de posição dessa faixa, variando entre sentido horário, anti-horário, duplicado, etc.

Em seguida foram escolhidos alguns valores bases que seriam utilizados na simulação. Sendo 1 KHz para a frequência de uma onda senoidal (representando o movimento da faixa na hélice do ventilador), 3 MHz para a taxa de amostragem da geração do sinal e amplitude de valor unitário (1). Esses valores foram escolhidos por conveniência, visto que, facilitaria a interpretação, visualização e análise na simulação. Entretanto, houve um entrave relacionado a amostragem, visto que, haviam duas opções para a sua realização: trem de pulsos e trem de impulsos. Optou-se por trem de pulsos, já que, a representação simulada de um trem de impulso tem suas complicações, por exemplo, um impulso tem energia infinita, o que o torna impossível sua simulação fidedigna. Além disso, caso fosse escolhido o trem de impulsos, uma forma de contornar seria a utilização de um pulso com área unitária,

porém geraria outras complicações que fogem da resolução do problema.

Sendo assim, para o trem de pulsos, escolheu-se um período referente a 1/3000000 para cada amostra, a duração do sinal de 20 períodos, a amplitude com valor unitário (1) e para realizar análise e teste variou-se a frequência do trem de pulsos entre 500Hz e 5000Hz, possibilitando a simulação da mudança de frequência da luz estroboscópica.

Em processamento digital de sinais, segundo o teorema de Nyquist(Amostragem), temos que se a frequência de amostragem não for pelo menos maior que duas vezes a maior frequência do sinal de entrada, então o sinal amostrado não poderá ser reconstruído com o objetivo de recuperar o sinal original [1]. Essa falha ao representar o sinal de entrada é chamado de *aliasing*, que é o responsável por gerar o efeito estroboscópico. [2]

Para comprovar tal efeito usamos a Transformada de Fourier (FT) afim de visualizar o *aliasing*. Sendo assim, após desenvolver a parte analítica, optou-se por usar as ferramentas MATLAB e Octave, porém, durante a simulação, observou-se a necessidade de utilizar a Transformada Rápida de Fourier (FFT), visto que, dispositivos digitais não analisam sinais contínuos, e esse é um algoritmo que foi desenvolvido para lidar com a análise de Fourier de maneira eficiente para esses dispositivos, afinal, ela utiliza a Transformada Discreta de Fourier (DFT) e como a simulação dos sinais são discretos, este algoritmo se adequa as necessidades do projeto.

A. Análise da Amostragem

Para realizar a análise do efeito estroboscópico foi escolhida a amostragem natural *Pulse Amplitude Modulation* (PAM), também conhecida como Gatilamento.

Sendo $x(t)$ uma forma de onda analógica e contínua no tempo e limitada em frequência, onde $f_m = BHz$, o sinal PAM que utiliza essa amostragem é:

$$x_s(t) = x(t) \cdot s(t) \quad (1)$$

Onde $s(t)$ é um trem de pulsos retangulares com frequência $f_s = 1/Ts > 2B$. O sinal $s(t)$ é definido como:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t - kTs}{\tau}\right) \quad (2)$$

Aplicando a Transformada de Fourier na equação 1 tem-se que:

$$X_s(f) = X(f) * S(f) \quad (3)$$

Para calcular a FT de $s(t)$ é preciso encontrar os coeficientes da sua Série de Fourier (FS) e multiplicá-lo por um trem de impulsos deslocados. Logo, temos:

$$a_k = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} s(t) e^{-jk\omega_s t} dt \quad (4)$$

$$= \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{-jk\omega_s t} dt \quad (5)$$

$$= \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} 1 \cdot e^{-jk\omega_s t} dt \quad (6)$$

Aplicando a substituição $u = -jk\omega_s t$ teremos:

$$a_k = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \frac{e^u}{-jk\omega_s} du \quad (7)$$

$$= \frac{1}{-jk\omega_s T_s} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^u du \quad (8)$$

$$= \frac{e^{jk\omega_s \frac{\tau}{2}} - e^{-jk\omega_s \frac{\tau}{2}}}{jk\omega_s T_s} \quad (9)$$

$$(10)$$

Simplificando, e utilizando a igualdade $\omega_s = 2\pi f_s$ e $d = \tau/T_s$, teremos:

$$a_k = \frac{1}{k\pi} \frac{e^{jk\pi d} - e^{-jk\pi d}}{2j} \quad (11)$$

$$= \frac{1}{k\pi} \text{sen}(k\pi d) \quad (12)$$

$$= \frac{d \text{sen}(k\pi d)}{k\pi d} \quad (13)$$

$$= d \text{sinc}(kd) \quad (14)$$

Logo, temos que a FT de $s(t)$ é definida como:

$$S(f) = d \sum_{n=-\infty}^{\infty} d \text{sinc}(kd) \cdot \delta(f - kf_s) \quad (15)$$

Substituindo a equação 15 em 3, teremos:

$$X_s(f) = d \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(kd) \cdot X(f) * \delta(f - kf_s) \quad (16)$$

$$X_s(f) = d \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(kd) \cdot X(f - kf_s) \quad (17)$$

É possível verificar pela equação 17 que a FT do sinal amostrado consistirá de réplicas do espectro do sinal original ponderadas por syncs. Cada réplica centrada em $f = 0, f_s, 2f_s, 3f_s \dots$ [3] Quando a frequência do trem de pulsos não respeita o teorema de Nyquist, ocorre uma sobreposição das réplicas geradas, portanto sendo possível comprovar o *aliasing* e o efeito estroboscópico. [4]

III. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Como desenvolveu-se uma simulação pelas aplicações MATLAB e Octave, foi possível gerar a representação gráfica, para validar o efeito estroboscópico, *aliasing* e o teorema de Nyquist. Realizamos 16 testes com a amostragem entre as frequências 500Hz e 5000Hz afim de visualizar os efeitos gerados por várias frequências de amostragem; e destes 16 selecionamos 9 para dissertar sobre a observação do efeito.

Para todas as simulações obteve-se a representação gráfica do sinal de entrada e do trem de pulsos conforme ilustrado na Figura 1. E na figura 2 visualizou-se o espectro do sinal de entrada e o espectro do trem de pulsos, como relatado na equação 15 é uma *sync*.

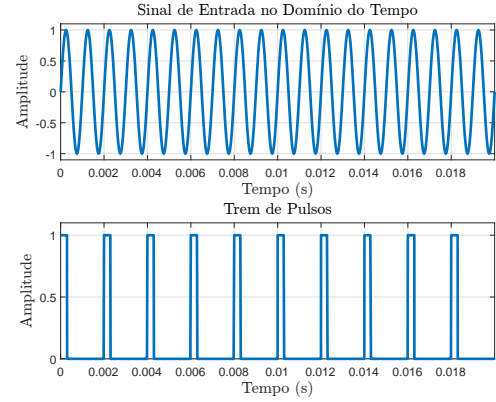


Fig. 1. Sinal senoidal simulado e trem de pulsos com frequência de 500Hz e 1% de *duty cycle*.

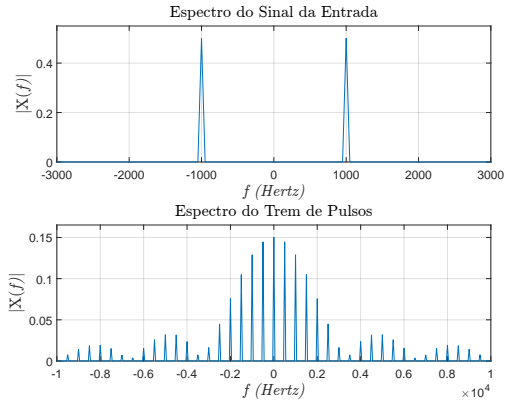


Fig. 2. Espectro do sinal do sinal de entrada e do trem de pulsos.

A. 900Hz ($f_s < f_n$)

A Figura 3(a) mostra o resultado da modulação do sinal de entrada com o trem de pulsos gerado com a frequência de 900Hz, nesse caso pode-se visualizar a captura da faixa se movendo lentamente no sentido horário. Com isso pode-se observar que o sinal recuperado parece com uma senoide com uma frequência menor que o sinal original. Já a Figura 3(b) mostra os espectros na frequência e pode-se visualizar a sobreposição dos espectros na frequência, ao aplicar um filtro

entre os pontos $-f_s/2$, que é -450Hz a $f_s/2$ e 450Hz , têm-se a frequência do sinal recuperado em 100Hz , o que resulta na senoide 10x mais lenta que a original, visualizando assim os efeitos do *aliasing*.

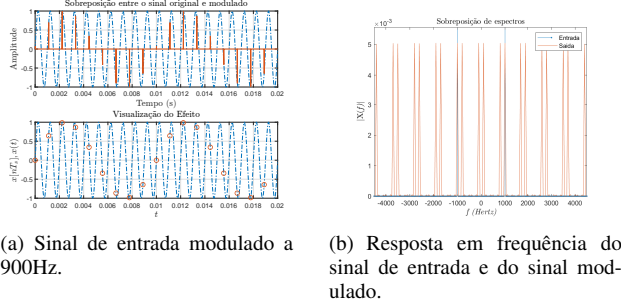


Fig. 3. Simulação com trem de pulsos a 900Hz

B. 1000Hz ($f_n = f_s$)

A Figura 4(a) mostra o resultado da modulação do sinal de entrada com o trem de pulsos gerado com a frequência de 1000Hz . Pode-se observar que uma faixa é capturada uma vez por ciclo sempre no mesmo ponto, visualmente isso ocasionará o efeito da faixa sempre na mesma posição, sem movimento algum. Na Figura 4(b) observa-se os espectros na frequência e sua sobreposição. Como a frequência de amostragem é a mesma do sinal original, ocorrerá um cancelamento das frequências de 1KHz e -1KHz de forma que a recuperação do sinal será um sinal constante ao aplicar um filtro de $-f_s/2$ a $f_s/2$.

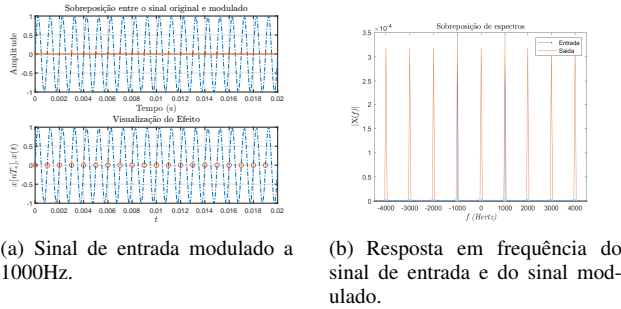
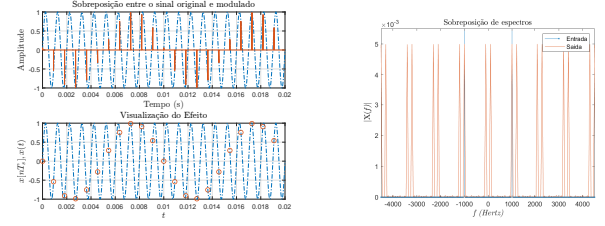


Fig. 4. Simulação com trem de pulsos a 1000Hz

C. 1100Hz ($f_n < f_s < 2f_n$)

A Figura 5(a) mostra o resultado da modulação do sinal de entrada com o trem de pulsos gerado com a frequência de 1100Hz . Visualmente, nessa amostragem pode-se observar a geração de uma senoide invertida e mais lenta do que a senoide original, ou seja, sua fase foi invertida. Isso explica o efeito da faixa girando em sentido oposto. Na Figura 5(b) observa-se os espectros na frequência e sua sobreposição. É possível visualizar o *aliasing*, e ao recuperar o sinal com um filtro de limite $f_s/2$ têm-se uma senoide com frequência mais lenta (100Hz), isso explica a velocidade menor de giro.

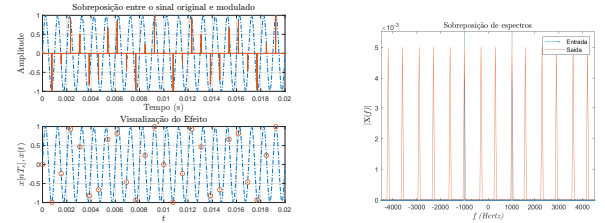


(a) Sinal de entrada modulado a 1100Hz . (b) Resposta em frequência do sinal de entrada e do sinal modulado.

Fig. 5. Simulação com trem de pulsos a 1100Hz

D. 1300Hz ($f_n < f_s < 2f_n$)

A Figura 6(a) mostra o resultado da modulação do sinal de entrada com o trem de pulsos gerado com a frequência de 1300Hz , nessa figura observa-se o comportamento da faixa alternando entre duas visualizações da faixa em uma rotação e em seguida duas rotações com uma posição da faixa, o que dá a impressão de que a faixa está alternando aleatoriamente entre as posições. Na Figura 6(b) pode-se observar os espectros na frequência e sua sobreposição, visualiza-se o *aliasing* quando aplicado um filtro com $-f_s/2$ a $f_s/2$ (-650Hz e 650Hz), obtêm-se um sinal com frequência de 300Hz , quarenta por cento a menos que a frequência original.



(a) Sinal de entrada modulado a 1300Hz . (b) Resposta em frequência do sinal de entrada e do sinal modulado.

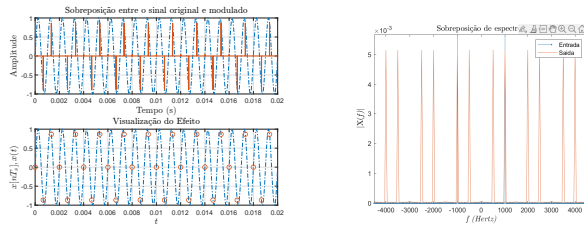
Fig. 6. Simulação com trem de pulsos a 1300Hz

E. 1500Hz ($f_n < f_s < 2f_n$)

A Figura 7(a) mostra o resultado da modulação do sinal de entrada com o trem de pulsos gerado com a frequência de 1500Hz . Pode-se observar que a captura da faixa é realizada sempre nos mesmos pontos, são 3 pontos em dois ciclos. Visualmente, têm-se o efeito de 3 faixas paradas. Na Figura 7(b) observa-se os espectros na frequência e sua sobreposição. Devido ao *aliasing*, ao recuperar o sinal com um filtro obtêm-se uma senoide de 500Hz .

F. 1900Hz ($f_n < f_s < 2f_n$)

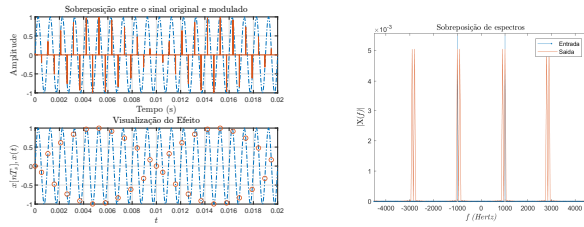
A Figura 8(a) mostra o resultado da modulação do sinal de entrada com o trem de pulsos gerado com a frequência de 1900Hz , observou-se visualmente duas faixas com capturas girando no sentido horário, com a impressão de duas senoides. Já a Figura 8(b) mostra os espectros na frequência e sua sobreposição, visualizou-se o *aliasing* quando aplicado



(a) Sinal de entrada modulado a 1500Hz. (b) Resposta em frequência do sinal de entrada e do sinal modulado.

Fig. 7. Simulação com trem de pulsos a 1500Hz

um filtro com $-f_s/2$ a $f_s/2$ (-950Hz e 950Hz), nessa faixa obtém-se um sinal recuperado de frequência 900Hz.

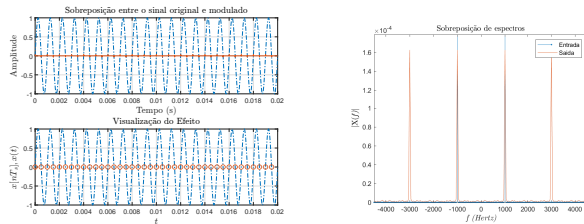


(a) Sinal de entrada modulado a 1900Hz. (b) Resposta em frequência do sinal de entrada e do sinal modulado.

Fig. 8. Simulação com trem de pulsos a 1900Hz

G. 2000Hz ($f_s = 2f_n$)

A Figura 9(a) mostra o resultado da modulação do sinal de entrada com o trem de pulsos gerado com a frequência de 2000Hz. Pode-se observar que a faixa é capturada duas vezes por ciclo, nos mesmos pontos centrais. Visualmente, isso ocasionará o efeito de duas faixas sempre paradas na mesma posição. Na Figura 9(b) observa-se os espectros na frequência e sua sobreposição. Nota-se que as réplicas da direita e da esquerda sobrepõem os espectros de 1KHz e -1KHz. Ao recuperar o sinal teremos um sinal constante como se a hélice não estivesse girando.



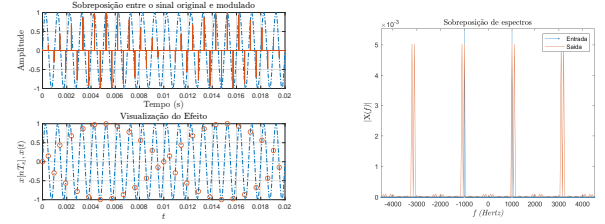
(a) Sinal de entrada modulado a 2000Hz. (b) Resposta em frequência do sinal de entrada e do sinal modulado.

Fig. 9. Simulação com trem de pulsos a 2000Hz

H. 2100Hz ($f_s > 2f_n$)

A Figura 10(a) mostra o resultado da modulação do nosso sinal de entrada com o trem de pulsos gerado com a frequência

de 2100Hz. Visualmente, teremos um sinal de mesma direção do sinal original girando mais lentamente. Na Figura 10(b) observa-se os espectros na frequência e sua sobreposição. Como a taxa de Nyquist está sendo respeitada não teremos *aliasing*, logo, ao aplicar um filtro de recuperação do sinal não teremos perda de informação do sinal original.



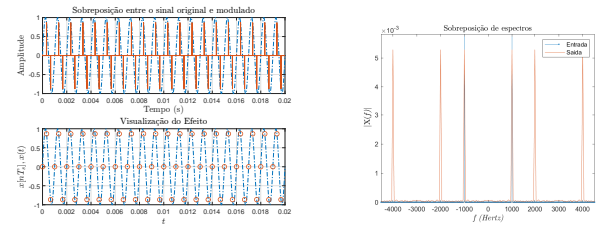
(a) Sinal de entrada modulado a 2100Hz. (b) Resposta em frequência do sinal de entrada e do sinal modulado.

Fig. 10. Simulação com trem de pulsos a 2100Hz

I. 3000Hz ($f_s = 3f_n$)

A Figura 11(a) mostra o resultado da modulação do sinal de entrada com o trem de pulsos gerado com a frequência de 3000Hz. Nesse caso têm-se respeitado o teorema de Nyquist, não havendo mais *aliasing*, então a visualização é uma faixa girando rapidamente em sentido horário. Conforme a frequência de amostragem aumenta, essa faixa vai acelerar e em algum momento não será possível visualizar a faixa. Também têm-se um efeito de interpolação, onde a amostragem será muito próximo do sinal original, simulando a lampada do efeito estroboscópico ligada ininterruptamente. Esse teste foi replicado para as frequências 4000Hz e 5000Hz, onde não houveram mudanças.

A Figura 11(b) demonstra os espectros na frequência e nesse caso, não têm-se *aliasing* já que respeita-se o teorema de Nyquist. Para essa frequência há um filtro com $-f_s/2$ a $f_s/2$ (-1500Hz e 1500Hz) que recupera o sinal como uma senoide de 1000Hz, exatamente o sinal de entrada.



(a) Sinal de entrada modulado a 3000Hz. (b) Resposta em frequência do sinal de entrada e do sinal modulado.

Fig. 11. Simulação com trem de pulsos a 3000Hz

IV. CONCLUSÃO

A partir do final do experimento constatou-se que a relação entre frequências de um sinal original e de um sinal amostrado é o que corresponde ao efeito estroboscópico. Observou-se

ainda que o movimento falso da faixa é mais lento que o movimento original, fato que ocorre quando o teorema de Nyquist não é respeitado, devido a sobreposição dos espectros, ao passar um filtro de $-f_s/2$ a $f_s/2$ para reconstruir o sinal, termina obtendo frequências das sobreposições ou a interpolação da reconstrução do sinal se aproxima cada vez mais do sinal original quando maior for a taxa de amostragem utilizando esse mesmo teorema. A utilização do MATLAB e Octave possibilitou analisar as situações separadamente e em específico e concluir que a visualização do fenômeno estroboscópico ocorre devido ao efeito *aliasing*.

Baseado em todo o processo de análise construído e documentado nesse relatório conseguiu-se compreender, comprovar a existência e a ocorrência do efeito estroboscópico de forma matemática/computacional atendendo assim os requisitos solicitados pela empresa SigmaDelta Inc. Obteve-se respostas para algumas perguntas motivadoras deste trabalho: como se pode explicar o efeito estroboscópico à luz da relação entre as frequências presentes nesse fenômeno? O que explica a impressão de giro mais lento do que o movimento em si, ou até mesmo a impressão de giro na direção contrária? O que acontece quando se tem a impressão de movimento alternado ou estacionário?

REFERENCES

- [1] Machado, Jussara, et al. "Uso da metodologia PBL na análise do efeito estroboscópico." Anais da XIX Escola Regional de Computação Bahia, Alagoas e Sergipe. SBC, 2019.
- [2] Oppenheim, A. V., Signal and Systems. Ed. Prentice Hall, Second Edition.
- [3] Oppenheim, A. V. and SCHAFER R. W., "Digital Signal Processing" Ed. Prentice Hall
- [4] Haykin, S. and Veen, B. V. Sinais e Sistemas. Ed. Bookman. Published by Prentice Hall. 2007.