

MI PDS - Problema 3 - Projeto de Filtros FIR pelo Método do Janelamento

Alyson Dantas, Gabriel Sá, Lucas Cardoso, Marcelo Mota
Universidade Estadual de Feira de Santana

Abstract—This report describes the development of a graphical interface where it is possible to use digital filters, in addition to selecting the specific window type. The windows used are: Rectangular, Bartlett, Hann, Hamming and Blackman. The implementations and results were carried out through the MATLAB environment.

Index Terms—Janelamento, Retangular, Bartlett, Hann, Hamming, Blackman, sinc, FIR

I. INTRODUÇÃO

A empresa SDK&APPs S.A., atuante no ramo de instrumentação por software, solicitou um protótipo de software, com interface gráfica do usuário (do inglês *graphical user interface* - GUI) amigável, para auxiliar no projeto de filtros seletivos em frequência. Esse protótipo precisa conter as seguintes características:

- Apresentar uma GUI com *layout* amigável para entrada de especificações, requisitos do filtro e execução dos cálculos;
- Opção de escolha de, pelo menos, cinco funções de janelamento;
- Seleção do tipo de filtro;
- Visualização gráfica das janelas, coeficientes ideais/janelados e dos respectivos espectros de magnitude e fase gerados

Esse relatório tem como objetivo mostrar todo o processo de confecção do software solicitado, considerando os requisitos exigidos, decisão de escolha dos cinco tipos de janelamento dentre os inúmeros existentes, ambiente de desenvolvimento e desafios envolvidos.

II. METODOLOGIA

Inicialmente foi necessário entender o que seriam filtros, os tipos e quais se adequariam ao solicitado para este projeto. De uma maneira generalizada, podem ser definidos como sendo qualquer sistema que modifica algumas frequências em relação a outras. Os tipos mais básicos são: o passa-baixa, passa-alta, passa-faixa e rejeita faixa.

Um filtro passa baixa permite a passagem de sinais de baixa frequência e reduzem a intensidade de sinais de alta frequência a partir de uma frequência de referência. Já os passa-alta são o contrário, atenuam frequência mais baixas e permitem a passagem livre de frequências mais altas. O passa faixa permite apenas a passagem de sinais em um determinada frequência rejeitando ou atenuando as demais enquanto o rejeita faixa opera de modo inverso, ou seja, permitindo todas

as frequências exceto algumas específicas. A Imagem 1 ilustra esses comportamentos.

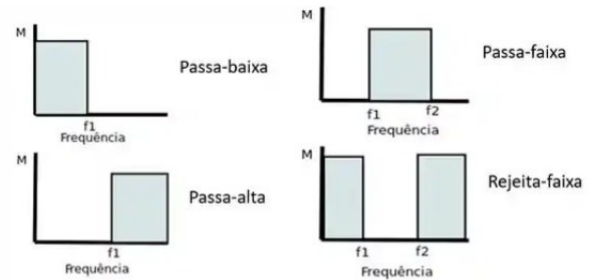


Fig. 1. Filtros: passa-baixa, passa-alta, passa-faixa e rejeita-faixa

Um projeto de filtros de tempo discreto corresponde a determinação dos parâmetros de uma função de transferência ou de uma equação de diferenças que irá se aproximar de uma resposta ao impulso ou, respeitando as tolerâncias especificadas, uma resposta em frequência. Nesse tipo de sistema, os filtros recaem em duas categorias: com resposta ao impulso infinito (IIR, *infinite impulse response*) e com resposta ao impulso finito (FIR, *finite impulse response*) [1]. Esse segundo tipo é o utilizado nesse projeto, afinal, tratasse de um filtro digital, logo de natureza finita e discreta.

As técnicas para projetos de filtros dessa natureza são baseadas na aproximação direta da resposta em frequência ou ao impulso desejado pelo sistema, dentre essas técnicas, o método mais simples é chamado de Janelamento [3] e pode ser representado por:

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n]e^{-j\omega n} \quad (1)$$

onde $h_d[n]$ é a sequência de resposta ao impulso consonante, podendo ser expressa em termos de $H_d(e^{j\omega})$ tal:

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \quad (2)$$

Uma simples maneira de conseguir um filtro FIR causal através de $h_d[n]$ é truncar o próprio $h_d[n]$ [4].

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3)$$

Assim uma representação de $h[n]$ é dada pelo produto da resposta ao impulso desejado através de uma janela de duração finita $w[n]$,

$$h[n] = h_d[n]w[n] \quad (4)$$

onde, para truncamento simples, como na Eq.(2), a janela é a janela retangular(abordada com mais detalhes posteriormente).

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5)$$

Assim é possível concluir pelo janelamento que:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (6)$$

O resultado representado por $H(e^{j\omega})$ é a convolução periódica da resposta em frequência ideal que foi almejada com o uso da transformada de Fourier da janela, onde essa resposta será uma versão espelhada da desejada. A Figura 2 mostra o processo de convolução resultante de truncar a resposta ao impulso ideal, enquanto a Figura 3 exibe a aproximação típica resultante do janelamento da resposta ao impulso ideal [1].

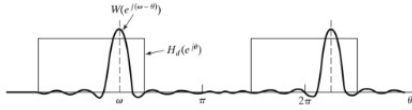


Fig. 2. Convolução do truncamento da resposta ao impulso ideal

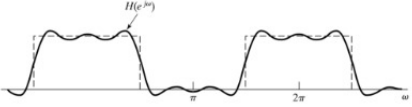


Fig. 3. Aproximação típica do janelamento da resposta ao impulso ideal

Segundo Oppenheim, algumas janelas são comumente utilizadas nos projetos de janelamento [2], nas quais são definidas pelas seguintes equações:

1) *Retangular*: A janela retangular possui o maior valor de perda no espectro, por isso, é comum falar que aplica-la é o mesmo que não aplicar nenhuma janela. Sua utilidade se dá quando os valores de transiente possuem duração menor que o da janela em análise:

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (7)$$

2) *Barlett (triangular)*: A janela de Barlett sugere uma transição mais suave para evitar o fenômeno de Gibbs. Essa possibilidade existe se a janela triangular estiver na forma:

$$w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{M}, & 0 \leq n \leq \frac{M}{2} \\ 2 - \frac{2n}{M}, & \frac{M}{2} \leq n \leq \frac{M}{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (8)$$

3) *Hann*: Essa janela é dada pela combinação linear entre janelas retangulares moduladas. Sua vantagem é o aliasing muito baixo, em contra partida, a desvantagem é o alargamento do lobo principal, resultado em uma pequena redução de resolução.

$$w[n] = \begin{cases} 0,5 - 0,5\cos(\frac{2n\pi}{M}), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (9)$$

4) *Hamming*: A janela de Hamming é uma adaptação de Hann. Embora possuam similaridades, no domínio do tempo essa janela não se aproxima de zero como a janela de Hann. Sua forma lembra a uma onda cossenoidal:

$$w[n] = \begin{cases} 0,54 - 0,46\cos(\frac{2n\pi}{M}), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (10)$$

5) *Blackman*: A janela de Blackman possui menor *ripple* na banda de passagem e maior encurtamento na banda de rejeição.

$$w[n] = \begin{cases} 0,42 - 0,5\cos(\frac{2n\pi}{M}) + 0,08\cos(\frac{4n\pi}{M}), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (11)$$

Após todo esse embasamento foi possível desenvolver as equações para cada filtro em caráter ideal, ou seja, as características de transmissão estão sem distorção, ao longo de uma ou mais bandas especificadas, e resposta nula à todas as demais frequências [3], são elas (considerando $m = n - \frac{M}{2}$):

6) *Passa-baixa*:

$$h_d = \frac{\sin(\omega c * m)}{\pi * m} \quad (12)$$

7) *Passa-alta*:

$$h_d = \frac{\sin(\pi * m)}{\pi * m} - \frac{\sin(\omega c * m)}{\pi * m} \quad (13)$$

8) *Passa-faixa*:

$$h_d = \frac{\sin(\omega c2 * m)}{\pi * m} - \frac{\sin(\omega c1 * m)}{\pi * m} \quad (14)$$

9) *Rejeita-faixa*:

$$h_d = \frac{\sin(\omega c1 * m)}{\pi * m} + \frac{\sin(\pi * m)}{\pi * m} - \frac{\sin(\omega c2 * m)}{\pi * m} \quad (15)$$

III. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Baseado nas discussões em sessão tutorial ficou definido a utilização do MATLAB como ambiente de desenvolvimento para os dois grupos afim de favorecer a troca de informações e facilitar a resolução de quaisquer problemas que pudessem surgir. Dentre as opções cotadas para o desenvolvimento da aplicação foi levantada a possível utilização da linguagem C++ juntamente com algumas bibliotecas de terceiros, porém, por conta do tempo reduzido para o desenvolvimento da solução, da incerteza da confiabilidade dos cálculos e resultados das bibliotecas de terceiros, e da necessidade de revisar alguns conceitos de programação, a opção do MATLAB foi a escolhida pois além de ser uma suíte de ferramentas bem conhecida, aceita e utilizada academicamente, todos os

componentes da sessão tutorial já possuíam certa afinidade com a ferramenta.

O desenvolvimento da solução iniciou com a implementação das equações 7, 8, 9, 10 e 11 representando as janelas mais utilizadas e documentadas na literatura [1], [3]. A Figura 4 ilustram o resultado da implementação das janelas escolhidas em ambiente MATLAB.

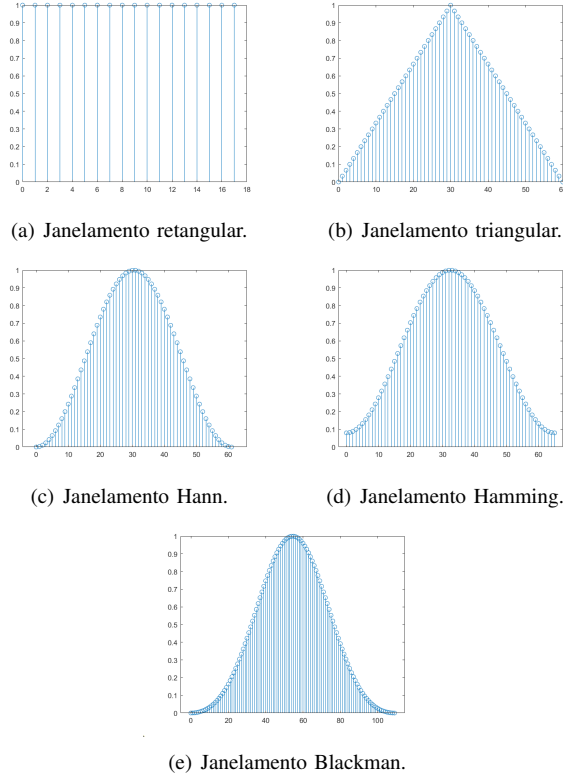


Fig. 4. Janelas implementadas manualmente no MATLAB

Durante o desenvolvimento das janelas um ponto chave foi compreender como encontrar e calcular o valor M , presente em todas as equações das janelas e responsável por indicar o comprimento da janela e a ordem filtro. O cálculo do valor M é realizado pela equação 17, onde Bw_Hz é a largura da banda de passagem nos filtros passa-baixa e passa-alta e é a largura da banda de transição nos filtros passa-faixa e rejeita-faixa.

$$\Delta f = \frac{Bw_Hz}{freq_s} \quad (16)$$

$$M = \frac{\Delta \omega}{\Delta f} - 1 \quad (17)$$

Os valores de $\Delta \omega$ são encontrados na Tabela I

Com as funções de janelamento desenvolvidas manualmente, partimos para a implementação das equações 12, 13, 14 e 15 para obtermos as representações dos tipos de filtros básicos.

Para cada tipo de filtro o usuário precisa inserir os parâmetros necessários:

Para filtros passa-baixa e passa-alta:

Janela	$\Delta \omega$
Retangular	0.9
Triangular	3.05
Hann	3.1
Hamming	3.3
Blackman	5.5

TABLE I
 $\Delta \omega$ PARA O CÁLCULO DO VALOR M

- Frequência de Amostragem;
- Frequência de Corte;
- Banda de Transição;
- Máxima oscilação na banda de Passagem;
- Mínima oscilação na banda de Rejeição

A partir dos parâmetros frequência de corte e banda de transição que o usuário insere na interface é possível obter as variáveis para gerar o filtro, poupando assim a descrição do filtro completo na interface. Como pode ser observado nas equações a seguir, a obtenção dos parâmetros f_p e w_p (frequência limite da banda de passagem), f_s e w_s (frequência limite da banda de transição), Para os filtros passa-baixa e passa-alta.

$$f_p = f_c - \frac{Bw_Hz}{2} \quad (18)$$

$$f_s = f_c + \frac{Bw_Hz}{2} \quad (19)$$

$$\omega_s = \frac{2\pi f_s}{freq_fs} \quad (20)$$

$$\omega_p = \frac{2\pi f_p}{freq_fs} \quad (21)$$

$$B\omega = \frac{|\omega_s - \omega_p|}{2\pi} \quad (22)$$

Para filtros passa-faixa e rejeita-faixa:

- Frequência de Amostragem;
- Frequência Central;
- Largura da banda de Transição;
- Largura da banda de Passagem (Passa-faixa);
- Largura da banda de Rejeição (Rejeita-faixa);
- Máxima oscilação na banda de Passagem;
- Mínima oscilação na banda de Rejeição

Já para os filtros passa-faixa e rejeita-faixa, a partir dos parâmetros frequência central, largura da banda de transição e ($B\omega$) largura da banda de passagem, (largura da banda de rejeição para o rejeita-faixa), é possível obter as variáveis ω_0 , ω_1 , ω_2 , ω_3 e ω_4 .

$$B\omega = \frac{|Bt|}{2\pi} \quad (23)$$

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{B\omega}{2} \quad (24)$$

$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{B\omega}{2} \quad (25)$$

$$\omega_3 = \omega_1 - Bt \quad (26)$$

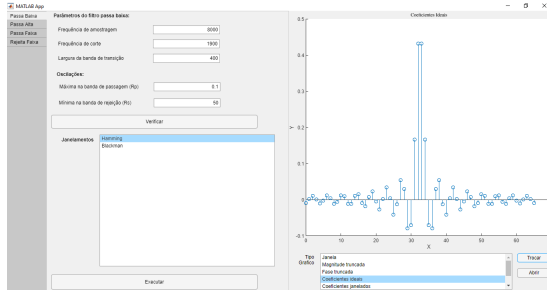


Fig. 5. Filtro Passa-Baixa

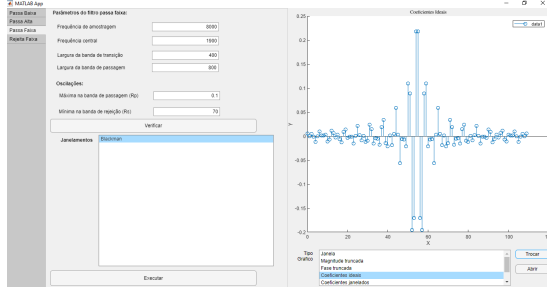


Fig. 6. Filtro Rejeita-Faixa

$$\omega_4 = \omega_2 + Bt \quad (27)$$

As Figuras 5 e 6 mostram a interface e os parâmetros necessários para os filtros passa-baixa e rejeita-faixa respectivamente.

Uma funcionalidade implementada foi a listagem automática dos tipos de janelamento compatíveis baseado nos parâmetros informados pelo usuário, para isso foi realizado o cálculo do δ_s e do δ_p sendo a variação na banda de rejeição e passante respectivamente a Tabela II mostra os valores encontrados para as cinco janelas escolhidas:

JANELA	δ
Retangular	0.0891
Triangular	0.0562
Hann	0.0063
Hamming	0.0022
Blackman	0.0001

TABLE II

δ PARA A ESCOLHA DAS JANELAS BASEADO NOS PARÂMETROS

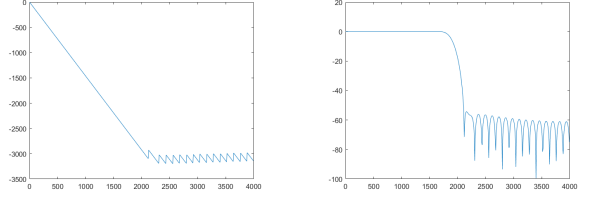
Os valores foram encontrados utilizando as equações 28 e 29, sendo utilizado o menor valor encontrado, para a janela triangular não foram encontrados os valores para δ_p , então assumimos apenas os valores calculados para o δ_s .

$$\delta_p = 10^{\frac{rp \cdot dB}{20}} - 1 \quad (28)$$

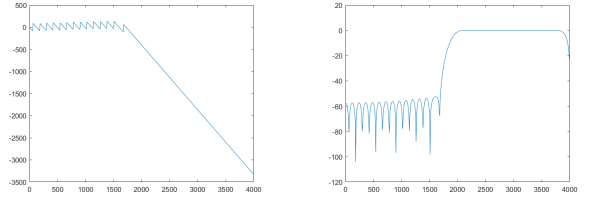
$$\delta_s = 10^{\frac{rs \cdot dB}{20}} \quad (29)$$

Finalizado as implementações, realizamos diversos testes, envolvendo todas as combinações possíveis dentre os tipos de filtros e os tipos de janela, realizando a análise dos gráficos de fase, magnitude do sinal ideal, fase e magnitude do sinal

truncado e os coeficientes do sinal ideal e truncado. Para realizar os teste e criar as figuras utilizamos os parâmetros de frequência de amostragem 8000, frequência de corte em 1900, largura da banda de transição de 400 para os filtros passa-baixa e passa-alta. As Figuras 7(a), 7(b), 7(c) e 7(d) representam a análise de fase e magnitude truncadas para o filtro passa-baixa e passa-alta para janela de Hamming.



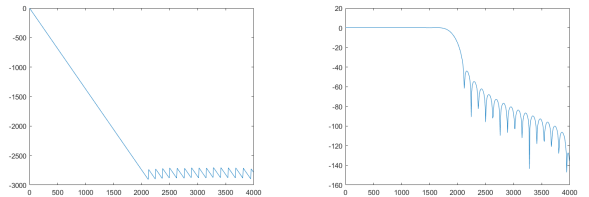
(a) Fase truncada do passa-baixa. (b) Magnitude truncada do passa-baixa.



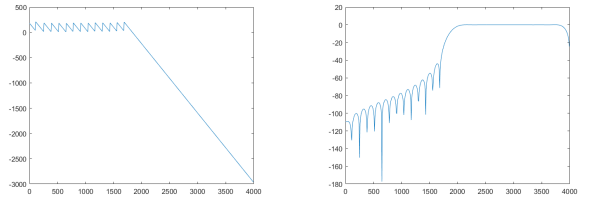
(c) Fase truncada do passa-alta. (d) Magnitude truncada do passa-alta.

Fig. 7. Análise de Fase e Magnitude truncada do Filtro Passa-Baixa e Passa-Alta para janela de Hamming.

As Figuras 8(a), 8(b), 8(c) e 8(d) representam a análise de fase e magnitude truncadas para o filtro passa-baixa e passa-alta para janela de Hann.



(a) Fase truncada do passa-baixa. (b) Magnitude truncada do passa-baixa.



(c) Fase truncada do passa-alta. (d) Magnitude truncada do passa-alta.

Fig. 8. Análise de Fase e Magnitude truncada do Filtro Passa-Baixa e Passa-Alta para janela de Hann.

Já para os filtros passa-faixa, utilizamos a frequência central em 2000, largura de banda de transição 500 e largura de

banda de passagem de 1000. E para o rejeita faixa, utilizamos a largura da banda de rejeição em 1000. As Figuras 9(a), 9(b), 9(c) e 9(d) representam a análise de fase e magnitude truncadas para o filtro passa-faixa e rejeita-faixa para janela de Hamming.

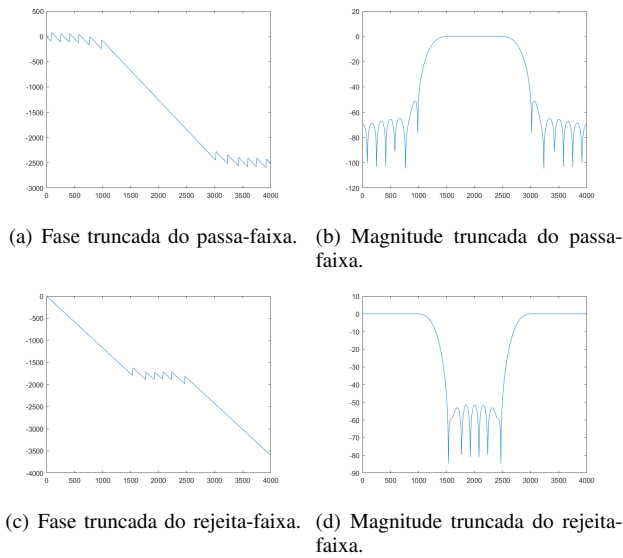


Fig. 9. Análise de Fase e Magnitude truncada do Filtro Passa-Faixa e Rejeita-Faixa para janela de Hamming.

As Figuras 10(a), 10(b), 10(c) e 10(d) representam a análise de fase e magnitude truncadas para o filtro passa-faixa e rejeita-faixa para janela de Hann.

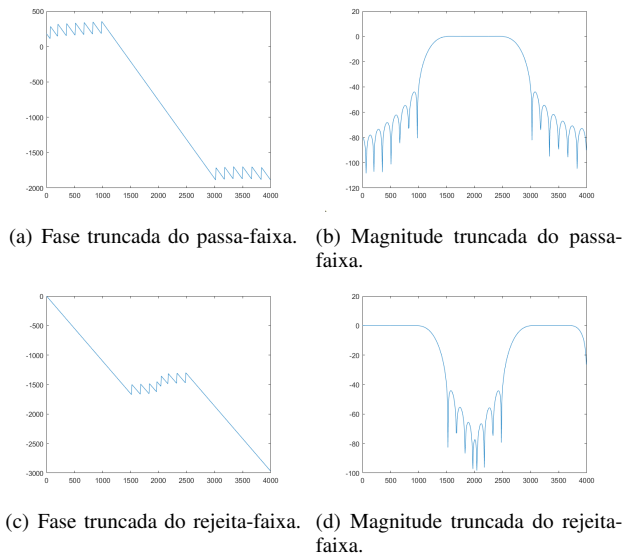


Fig. 10. Análise de Fase e Magnitude truncada do Filtro Passa-Faixa e Rejeita-Faixa para janela de Hann.

IV. CONCLUSÃO

O protótipo de GUI atende os requisitos estipulados pela empresa SDK&APPs S.A., o ambiente é funcional além de

auxiliar o usuário na melhor escolha do janelamento, visto que, através da interface o software indica o melhor tipo de janelamento e com os cálculos baseados nas informações inseridas pelo usuário. Os resultados apresentados pelas saídas dos filtros FIR mostram os processos envolvidos na filtragem através das janelas Retangular, Barlett, Hann, Hamming e Blackman.

Observou-se algumas barreiras, o erro de aproximação não é distribuído de maneira uniforme nas bandas, sendo mais alto nas fronteiras das bandas e segue atenuando quanto maior a distância entre elas e não se pode especificar ω_p e ω_s de maneira precisa. Uma alternativa é através do método *equiripple*, pois o erro é distribuído de forma uniforme na banda de passagem e de corte, resultando assim em um filtro de ordem menor, porém, sua desvantagem é a complexidade utilização e implementação.

Por fim, notou-se também que novas técnicas de janelamento podem ser adquiridas realizando pequenas alterações em alguma das formulas já existentes, isso mostra que surgem inúmeras possibilidades para essa técnica, tudo vai depender da necessidade de solução que o problema exige.

REFERENCES

- [1] Oppenheim, A. V., Signal and Systems. Ed. Prentice Hall, Second Edition.
- [2] Oppenheim, A. V. and SCHAFER R. W., "Digital Signal Processing" Ed. Prentice Hall
- [3] Haykin, S. and Veen, B. V. Sinais e Sistemas. Ed. Bookman. Published by Prentice Hall, 2007.
- [4] A. O. e R. Schafer, Processamento em Tempo Discreto de Sinais. Pearson Education do Brasil, 2012